# Errata und Ergänzungen

**zum Skriptum „Mathematische Methoden der Theoretischen Physik "**

Notation: „Z. 4" meint: 4. Zeile, „Z. 4 v.u." meint: 4. Zeile von unten; Leerzeilen werden nicht mitgezählt.

Eingefügte bzw. korrigierte Wörter sind manchmal *kursiv* gesetzt.

Man beachte: Die Seiten- und Zeilenzahlen beziehen sich auf das Skriptum, dessen Kopie in der Mathematik ausliegt; die entsprechende Seitenzahl in der (unkorrigierten) elektronischen Version ist um 2 höher!

S. 14, Ergänzung nach der letzten Zeile:
„(Man kann $\lambda$ noch allgemeiner definieren, d. h. auf einem $\sigma$-Körper, der größer ist als der Borelkörper; davon werden wir hier keinen Gebrauch machen.)"

S. 17, Def. 1.2.11: Die erste Zeile muß lauten:

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C};\ f \text{ meßbar},\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx < \infty \right\}$$

S. 19, Z. 4: „Hewitt *and* Stromberg".

S. 19, Mitte, ergänzende Fußnote: „Man kann beweisen, daß es Mengen in $\mathbb{R}$ gibt, die nicht $\lambda$-meßbar sind. Ihre Konstruktion ist kompliziert, und man kann zeigen, daß man sie nur mithilfe des Zermelo'schen Auswahlaxioms konstruieren kann. (Siehe Hewitt and Stromberg, p. 136.)"

S. 22, Z. 9: „… $\mathcal{D}$ endliche *lineare* Menge… ".

S. 24, Z. 8 v.u.: „… Einheitsoperator, *der* jeden … ".

S. 33, Z. 8, Einfügung: „… Länge $L$, *sie schwinge in einer Ebene*, ihre… ".

S. 33, Z. 12: Einfügung „… $K = k\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},\ k > 0$. Hierbei … "

S. 33: In Gl. (1.11) und an weiteren sieben Stellen bis zum Ende des Abschnitts ist $2n\pi/L$ (bzw. $2l\pi/L$, $2k\pi/L$, $2\pi/L$) zu ersetzen durch $n\pi/L$ (bzw. $l\pi/L$, $k\pi/L$, $\pi/L$).

S. 33, Z. nach Gl. (1.11): Der erste Satz „Wegen der … auf." ist zu ersetzen durch „Damit die Funktion $\xi(t,x)$ in allen Punkten, auch den Endpunkten $x = 0$ und $x = L$, durch die Fourier-Reihe dargestellt wird, muß sie auch in den Randpunkten stetig differenzierbar sein. Das läßt sich erreichen, indem sie in das Intervall $[-L, 0]$ antisymmetrisch fortgesetzt wird: $\xi(t,x) := -\xi(t,-x)$ für $x \in [-L, 0]$, und dann als $2L$-periodische Funktion betrachtet wird (daher der Faktor $2\pi/(2L) = \pi/L$ im Argument des Sinus). In der Fourier-Reihe einer antisymmetrischen Funktion treten keine Cosinus-Terme auf.“

S. 34: In der letzten Gleichung fehlt der Faktor $\kappa$, richtig:

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi(0,x) = \kappa \sum ik(c_{1k} - c_{2k}) \sin \frac{2k\pi}{L} x \,.$$

S. 40: Ergänzung am Ende der Seite nach der Mehrfachgleichung:
„(Die Faltung haben wir im Lemma 1.2.17 verwendet, um eine Funktion zu glätten.)“

S. 42, Z. 16 v.u.: korrigiertes Vorzeichen:

$$= \frac{2\pi i}{k} \cos k\pi - \frac{2i}{k^2} \sin k\pi \,.$$

S. 51, Gl. (5.3): Differential $dt$ statt $dz$ im Integral.

S. 58, Z. 6 v.u.: „gegebenenfalls“ statt „gegbenenfalls“.

S. 59, letzte Zeile: $\forall f \in \mathcal{S}$ statt $\forall f \in \mathcal{S}'$ .

S. 60, Z. 11 v.u., Ergänzung in der Klammer: „P steht für ‘principal value’.“

S. 61, Z. 4: $\pm\varepsilon$ statt $\pm a$.

S. 63, Ergänzung nach Def. 3.2.1:
„Wenn $f_\alpha \longrightarrow f$ in der Topologie von $\mathcal{S}$ gilt, dann folgt natürlich auch $f'_\alpha \longrightarrow f'$; daher ist, weil $T \in \mathcal{S}'$ ein stetiges Funktional ist, auch das so definierte $T'$ stetig, $T' \in \mathcal{S}'$.“

S. 64, Z.4: Semikolon statt Komma: „wenn $\lambda > -1$ ist;“ statt „wenn $\lambda > -1$ ist,“

S. 67, Z. 5/6: „wende die Methode von Lemma 1.2.17 an.“ statt „wende dann Lemma 1.2.17 an.“

S. 67, Z. 16: „wo $f$ in einer Umgebung $= 0$ ist“ statt „wo $f = 0$ ist“.

S. 69, Z. 8: Betragsstriche in der Formel fehlen, richtig:

$$\frac{\varepsilon'}{2q_N(f)}|T(f)| < 1$$

S. 73, Z. 7: „Wachstumseigenschaften“ statt „Abfalleigenschaften“.

S. 77, in der Definition von $\mathcal{Z}$: „$\{\ \ldots$ und erfüllt die Bedingung $(*)\ \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ “.

S. 78, $\tilde{f}$ statt $f$ in der Gleichung in Def. 3.4.3:

$$(\mathcal{F}T)(\tilde{f}) = T(\mathcal{F}^{-1}\tilde{f})\,, \quad \tilde{f} \in \mathcal{S}\,.$$

S. 83, Z. 14, Fußnote zu $L^2$: „Genau: $L^2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta) + \frac{1}{sin^2\vartheta}\,\partial^2_\varphi$ .“

S. 84, Z. 7: $\varphi$ statt $\phi$: „$d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi$".

S. 86, Gl. (5.3): „$\lim_{\alpha\to 0}$" statt „$\lim_{\alpha\to\infty}$".

S. 86, Z. 7 v.u., Einfügung: „konsistente *Definition* ist, $\delta(a\,\cdot\,) = \lim_{\alpha\to 0} T_{d_\alpha}$ ."

S. 103, Z. 11: an zwei Stellen $\|Q_1\psi_y\|$ statt $\|Q\psi_y\|$.

S. 104, Ergänzung in Zeile 11: „(Aber Vorsicht: $\lim\psi_\alpha = 0$ muß $\lim A\psi_\alpha = 0$ zur Folge haben!)"

S. 104, Fußnote zu Zeile 11: „Für einen linearen Operator $A$ gilt $A\sum\psi_n = \sum A\psi_n$ für *endliche* Summen; das gilt, wenn $A$ unbeschränkt ist, im allgemeinen aber nicht für unendliche Summen, denn unbeschränkte Operatoren sind überall unstetig."

S. 106, Fußnote 2: „Aus $(\chi, A\varphi) = (\chi, \psi)$ ..." statt „Aus $(\mathcal{H}, A\varphi) = (\chi, \psi)$ ...".

S. 109, Z. 12 und 13 v.u.: an vier Stellen „$\mathcal{D}_A$" statt „$D_A$".

S. 109, Gl. (3.7): $A \subset A^*$ statt $A \subset \mathcal{A}^*$

S. 112, Fußnote zu Z. 9: „Ein solches Produkt tritt bei der Definition des Drehimpulses auf: $\vec{L} = \vec{Q} \times \vec{P}$, in Komponenten: $L_i = Q_k P_l$, $(i,k,l)$ zyklisch. Aber für $k \neq l$ vertauschen $P_k$ und $Q_l$."

S. 112, Zeilen 12 bis 15 sollen lauten:
„Beweis: In der Schwarzschen Ungleichung $|(\varphi,\chi)| \leq \|\varphi\|\,\|\chi\|$ gilt Gleichheit für $\chi = \varphi$, und daher kann man die Norm auch durch

$$\|\chi\| = \sup\{|(\varphi,\chi)|;\ \|\varphi\| \leq 1\} \tag{3.18}$$

darstellen. Angewandt auf $\|A\psi\|$ folgt"

S. 113, Zeile 10 v.u. soll lauten:
„folgt $\|P\| \leq 1$, und weil $P \neq 0$, gibt es ein $\psi$, so daß $\varphi = P\psi \neq 0$, damit wird der Wert 1 erreicht: $\|P\varphi\| =$"

S. 115, Ergänzung nach Z. 5:
„(Selbstadjungierte) Projektoren können auch als Observablen auftreten: als Fragen. Wenn die Zustände, in denen einen Eigenschaft $\mathcal{E}$ gilt, durch Vektoren eines Unterraums $P\mathcal{H}$ gegeben sind, ist $P$ die Observable für die Frage: „Liegt $\mathcal{E}$ im Zustand $\psi$ vor?" Wenn $P\psi = \psi$, ist die Antwort „ja", wenn $P\psi = 0$, dann „nein". Die Quantenmechanik läßt auch die Antwort „jein" zu: genauer, die Antwort „ja mit Wahrscheinlichkeit $\alpha$", wenn $\langle P\rangle_\psi = \alpha$. "

S. 119, Z. 13 v.u. am Zeilenende: $|\Phi_n(\psi)|$ statt $|\Phi_n|$.

S. 121, Fußnote am Ende von Z. 10: „Bedeutung in der Quantenmechanik: wenn die Observable $A$ positiv ist, gilt $\langle A\rangle_\varphi$ für alle $\varphi$, d. h. alle Meßwerte sind positiv."

S. 122, fünf falsche ober Indizes in Zeilen 5 und 6 v.u., sie sollen lauten:

$$\begin{aligned}(\varphi,(P^{(2)}-P^{(1)})\varphi) &= (\varphi,P^{(2)}(P^{(2)}-P^{(1)})P^{(2)}\varphi)=(P^{(2)}\varphi,(P^{(2)}-P^{(1)})P^{(2)}\varphi)\\ &= \left\|(P^{(2)}-P^{(1)})P^{(2)}\varphi\right\|^2\geq 0\,.\end{aligned}$$

S. 123, Z. 7: $\|A_N\psi\|^2=\ldots$ statt $\|A_n\psi\|^2=\ldots$

S. 123, Ergänzung in Z. 2 v.u. nach „Spektralzerlegung“: „mehr noch: $A$ mit dem oben angegebenen Definitionsbereich $\mathcal{D}_A$ ist selbstadjungiert, Beweis im nächsten Abschnitt. Man ... “

S. 126, Z. 10: $H=\frac{1}{2m}P^2+V(Q)$ statt $H=-\frac{1}{2m}P^2+V(Q)$

S. 126, Ergänzung der Fußnote: „Man kann $\varphi_g$ raten: Fourier-Transformation der Eigenwertgleichung $(-\frac{d}{dx^2})\psi=E\psi$ ergibt eine Gleichung gleicher Art: $(-\frac{d}{dk^2})\tilde{\psi}=E\tilde{\psi}$; und wir wissen, daß die Gauß'sche Glockenkurve bei Fourier-Transformation eine Funktion derselben Art ergibt.

S. 128, Z. 3: „Eigenwerte müssen $\geq 0$ sein“ statt „$\ldots>0\ldots$

S. 128, Z. 5, Einschub nach „ist“: „siehe die erste Gleichung (5.7),“

S. 128, Fußnote am Ende von Zeile 17:
„Wir zeigen in Kürze, daß für alle $\psi\in\mathcal{D}(H)$ gilt: $\langle H\rangle_\psi\leq\langle H\rangle_{\varphi_g}$.“

S. 128, Ergänzung in Zeile 5 v.u.:
„Weiterhin folgt, daß $H=\sum_{n=0}\infty(2n+1)P_{\varphi_n}$, $\varphi_n=(a^+)^n\varphi_g$. Jedes $\psi$ läßt sich nach den $\varphi_n$ entwickeln, $\psi=\sum\alpha_n\varphi_n$, Œ$\|\psi\|^2=\sum|\alpha_n|^2=1$, daher ist $\langle H\rangle_\psi=\sum|\alpha_n|^2(2n+1)\leq\langle H\rangle_{\varphi_g}$.“

S. 130. Z. 7 v.u.: $\langle Q\rangle_\varphi=x_0$ statt $\langle Q\rangle_\varphi=0$

S. 132, Z. 7, Ergänzung: „... rechte Seite *der Ungleichung in Satz 4.5.13* nie ... “

S. 134, Z. 9: $\mathcal{L}^2([0,1])$ statt Ł$^2([0,1])$

S. 138, Ergänzung nach Ende des Beweises: „Für unitäre Operatoren, $U^*=U^{-1}$, gilt der Satz analog; statt $\mathbb{R}$ lese man $C_1:=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}$ (und statt $\Im z\neq 0$: $z\notin C_1$).“

S. 139, Ergänzung zu Z. 2 v.u.: „regulärer Punkt, denn $(A-\lambda\mathbb{1})^{-1}$ ist beschränkt auf $\mathcal{W}_{A-\lambda\mathbb{1}}$ und dieser Bereich ist dicht in $\mathcal{H}$, weil L.H. $\bigcup_n P_n\mathcal{H}\subset\mathcal{W}_{A-\lambda\mathbb{1}}$. “

S. 140, Z. 12, Einfügung nach „von $A$.“:
„Wir nehmen Œ wieder an, daß $\sum P_n=\mathbb{1}$ ist. Weiterhin sei Œ $a_n<a_{n+1}$, $n$ durchlaufe eine Indexmenge $I$, z.B. auch $I=\mathbb{Z}$.“

S. 140, Z. 13: $Q_k:=\sum_{n\leq k}P_n$ statt $Q_k:=\sum_{n=1}^k P_n$

S. 140, Z. 14, Einfügung nach „ein.“:

„Das ist eine wachsende Schar von Projektoren; ihre Unterräume sind ineinander geschachtelt und schöpfen ganz $\mathcal{H}$ aus.“

S. 140, Z. 3 v.u.: Semikolon nach „$a_{k-1} < x < a_k$ ist“ und Einfügung:
„bei $a_k$ macht $e(x)$ einen sprung der Größe $q_k - q_{k-1}$.“

S. 142, Z. 7 v.u., Einfügung nach der Gleichung: „(das folgt aus der Eigenschaft (2) von Definition 4.6.16)“

S. 142, Z. 3 v.u. soll lauten:
„Sei $Z_1 = \{\lambda_i\}$, $Z = \{\lambda_{ik}\}$ mit $\lambda_{i-1} < \lambda_{ik} \le \lambda_i$, $k = 1, \ldots, m$, $\lambda_{i,m} = \lambda_i$, $\lambda_{i,0} = \lambda_{i-1}$.“

S. 143, Z. 17 v.u.: $\Delta = \mathbb{R}$ statt $I = \mathbb{R}$

S. 144, in den Gleichungen (6.22) und (6.23): $\delta(\lambda - \lambda')d\lambda'$ statt $\delta(\lambda - \lambda')d\lambda$

S. 145, Z. 14 v.u. Einfügung: „viele *disjunkte* Intervalle“

S. 145, Z. 4. v.u.: „$= -V_0$ in $G_0$“ statt „$= V_0$ in $G_0$“

S. 145, Z. 3. v.u.: im dritten Ausdruck muß es heißen: $G_r = \{x;\ x > a\}$

S. 147, Ergänzung nach dem Beweis:
„Für $E < -V_0$ gibt es keine Eigenwerte, diese Werte liegen aber auch nicht im kontinuierlichen Spektrum von $H$, sondern in $\mathsf{P}(H)$. Denn $\frac{1}{2m}P^2$ ist ein positiver Operator, also ist $H > -V_0$, folglich $H - E > -V_0 - E > c > 0$ nach Voraussetzung. Daraus folgt $0 < c < (\varphi, (H-E)\varphi) \le \|\varphi\| \, \|(H-E)\varphi\|$, und das impliziert nach Satz 4.6.3, daß $E \notin \operatorname{Sp} H$.“

S. 150, Druckfehler:

Z. 11 v.u.: „Quasipolynomen“ statt „Quasipolynomn“
Z. 9 v.u.: falsche Trennung
Z. 7 v.u.: „als“ statt „al“

S. 152, Ergänzung nach Lemma 4.7.2: „Weil alle auftretenden Operatoren beschränkt sind, entfällt im folgenden die Unterscheidung zwischen symmetrisch und selbstadjungiert. “

S. 158, Z. 6 v.u.: „$\lambda$:“ ist zu streichen.

S. 159, Z. 2 v.u.: $A = \int \lambda \, dE_\lambda$ statt $A = \lambda \, dE_\lambda$

S.161, Z. 9 und 10 sollen besser lauten:

$$\|\psi_\Delta\| = \left( \int_\Delta |f(\lambda)|^2 \, d(\psi, E_\lambda \psi) \right)^{\frac{1}{2}} \le \|A_f{}^* \psi\|$$

unabhängig von $\Delta$, der Limes $\Delta \to \mathbb{R}$ ist also möglich und somit $\psi \in \mathcal{D}_{A_f}$. ■

S. 162, Z. 1, Einfügung: „gibt es eine *Zerlegung der Einheit, seine* Spektralschar“

S. 162, Z. 9: „…ist nicht die einzige“ statt „…ist nicht eindeutig“

S. 162, Z. 6 v.u., Einfügung: „Die Abbildung $A \mapsto U$ ist …“

S. 164, Z. 17, Einfügung: „ein beschränkter Operator, *definiert auf ganz* $\mathcal{H}$, und das heißt …“

S. 167, Ergänzung nach Satz 4.9.1:
„Eine operatorwertige Funktion $R(z)$ über $\mathbb{C}$ heißt analytisch, wenn alle Matrixelemente $(\varphi, R(z)\varphi)$ analytische Funktionen sind; das ist gleichbedeutend damit, daß $R(z)$ komplex differenzierbar ist und sich als Potenzreihe in $z$ darstellen läßt.“

S. 177, Z. 13: „Wahrscheinlichkeitsdichte“ „Wachrscheinlichkeitsdichte“

S. 178: die Zeilen 8 v.u. bis 6 v.u. sind zu ersetzen: Seien $\{e_k;\ k \in I_1\}$ und $\{f_k;\ k \in I_2\}$ orthogonale Basen von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$, wobei $I_1$ und $I_2$ endliche oder unendliche Indexmengen sein können. Dann ist

$$\begin{aligned} \{e_k,\ f_l;\ k \in I_1, l \in I_2\} &\quad \text{orthogonale Basis von} \quad \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2\,, \\ \{e_k \otimes f_l;\ k \in I_1, l \in I_2\} &\quad \text{orthogonale Basis von} \quad \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2\,. \end{aligned}$$

S. 178, Z. 5 v.u.: „(endliche)“ ist zu streichen.

S. 182, Einfügung nach Z. 16: „Die Abbildung ist eindeutig umkehrbar denn die für die rechte Seite geforderten Äquivalenzrelationen (die Gleichungen vor (10.5)) gelten trivialerweise auch für die linke Seite.“

S. 184, Z. 16 v.u.: „des Hilbertraums“ statt „des Hilbertraum“

S. 185, Z. 5 v.u.: „$a\varphi_0 = 0$“statt „$a\varphi_0$“