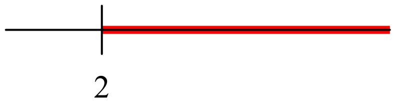
Aufgabe 1:

a) $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2} \Rightarrow 12-2x < 12x-16 \Rightarrow 28 < 14x \Rightarrow x > 2$ Lsg.:



b) $|x+2| < 1$

1. Fall $x \geq -2$:	2. Fall $x < -2$:
$x+2<1 \Rightarrow x<-1 \quad \Rightarrow -2 \leq x < -1$	$-x-2<1 \Rightarrow x>-3 \quad \Rightarrow -3<x<-2$

Lsg.:

c) $\left|\frac{2}{x}-4\right| < 3$

1. Fall $x<0$:	2. Fall $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$:	3. Fall $x > \frac{1}{2}$:
$-\frac{2}{x}+4<3 \Rightarrow -\frac{2}{x}<-1$ $\Rightarrow x>2$ Widerspruch!!!	$\frac{2}{x}-4<3 \Rightarrow 2<7x$ $\Rightarrow x>\frac{2}{7} \Rightarrow \frac{2}{7}<x\leq\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{x}+4<3 \Rightarrow -\frac{2}{x}<-1$ $\Rightarrow x<2 \Rightarrow \frac{1}{2}<x<2$

Lsg.:

d) $4x^2+16x \geq 20 \Rightarrow x^2+4x-5 \geq 0$

Betrachtet man die stetige nach oben geöffnete

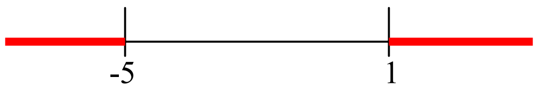
Parabel $f(x)=x^2+4x-5$ so genügt es die Nullstellen zu

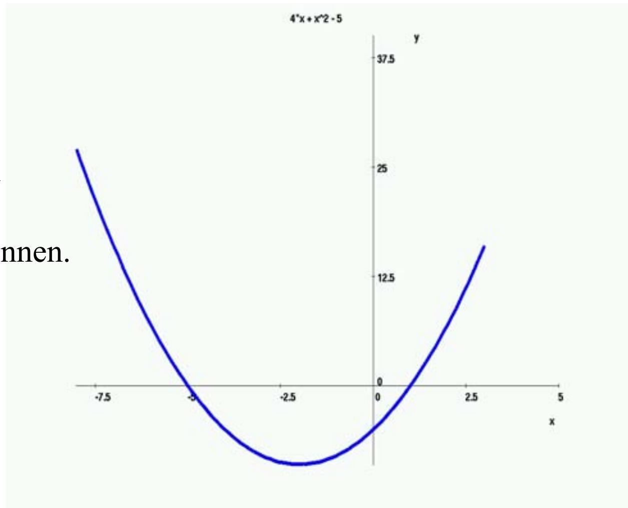
bestimmen um anschließend die Ungleichung lösen zu können.

$x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=-2\pm\sqrt{4+5} \Rightarrow x_1=1, x_2=-5$

Somit gilt für die Ungleichung: $x \in \mathbb{R}\backslash(-5,1)$

Lsg.:





Aufgabe 2:

a) Punktsteigungsformel: $\mathrm{y - y_0 = m(x - x_0)} \Rightarrow \mathrm{y + 1 = -1(x - 1)} \Rightarrow \mathrm{y = -x}$

b) Zweipunktformel: $\mathrm{y - y_1} = \dfrac{\mathrm{y_2} - y_1}{\mathrm{x_2} - x_1}\mathrm{(x - x_1)} \Rightarrow \mathrm{y - 4} = \dfrac{5-4}{-2-3}\mathrm{(x - 3)} \Rightarrow \mathrm{y} = -\dfrac{1}{5}x + 4 + \dfrac{3}{5}$

c) Erstelle die Normalform der gegebenen Gerade: $2x + 5y = 15 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{5}x + 3 \Rightarrow m = -\dfrac{2}{5}$

Punktsteigungsformel: $\mathrm{y - y_0 = m(x - x_0)} \Rightarrow \mathrm{y + 1} = -\dfrac{2}{5}\mathrm{(x - 5)} \Rightarrow \mathrm{y} = -\dfrac{2}{5}\mathrm{x} + 1$

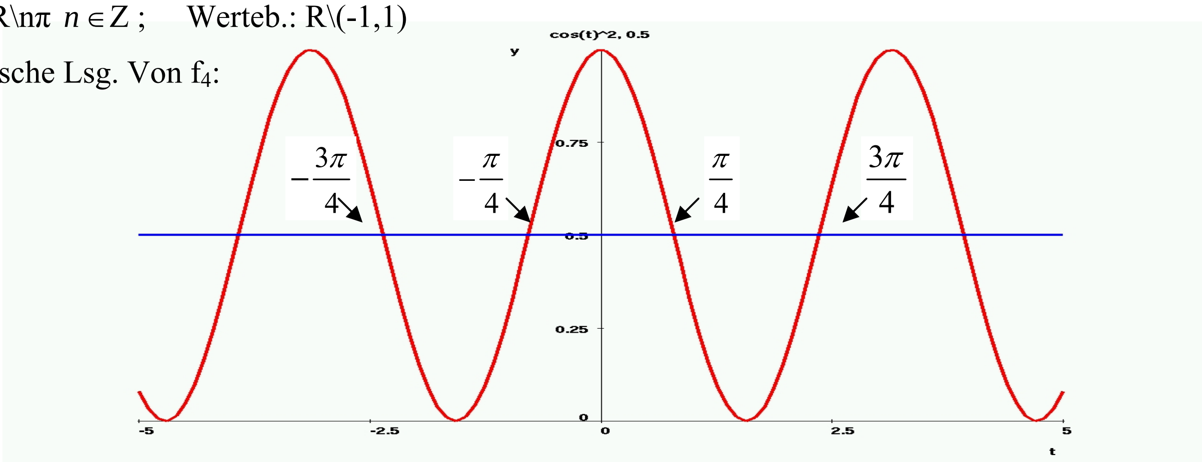
Aufgabe 3:

a) Def.: [-1,1] ; Werteb.: [0,1]

b) Def.: R\0 ; Werteb.: R\0

c) Def.: R\n$\pi$ $n \in Z$; Werteb.: R\(-1,1)

d)Graphische Lsg. Von f_4:



In dem Gebiet in dem der rote Graph unterhalb des blauen verläuft ist die Funktion f_4 definiert.

Aufgabe 4:

a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$

b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{1+(x-1)} = \dfrac{1}{x}$

c) $(f \circ f)(x) = x - 1 - 1 = x - 2$

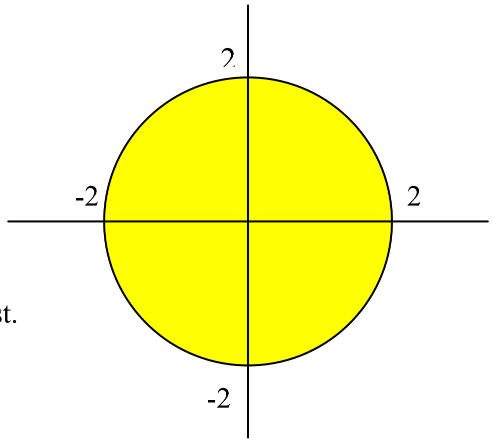
d) $(g \circ g)(x) = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{x+2}{x+1}} = \dfrac{x+1}{x+2}$

Aufgabe 5:

a) $x^2 + y^2 < 4$:

Denn die Kreisgleichung lautet

$x^2 + y^2 = r^2$, wobei r der Radius ist.



b) $x^2 + y^2 + 6y < 0$ und y>-3

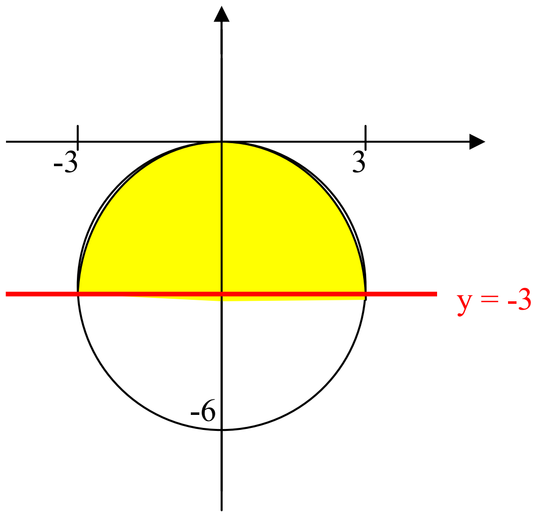
Die Kreisgleichung mit „verschobenen“ Mittelpunkt lautet:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

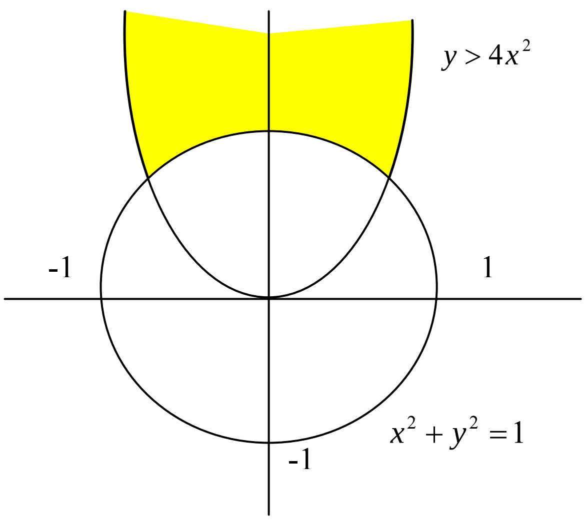
Mit Mittelpunkt (x_0, y_0)

Quadratische Ergänzung:

$$x^2 + y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = 9$$



c) $x^2 + y^2 \geq 1$ und $y > 4x^2$



Aufgabe 6:

Definition der Ableitung: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

a) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(x+h)}{1-(x+h)} - \frac{x}{1-x}\right]\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(x+h)(1-x)-x(1-(x+h))}{h(1-x)(1-(x+h))}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{h(1-x)(1-(x+h)}\right] = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Mit der Quotientenregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ folgt:

$$f'(x) = \frac{1(1-x)-x(-1)}{\left(1-x\right)^2} = \frac{1}{\left(1-x\right)^2}$$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sqrt{(1+(x+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+x^2}}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sqrt{(1+x^2}-\sqrt{(1+(x+h)^2}}{\sqrt{(1+(x+h)^2}\sqrt{(1+x^2}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sqrt{(1+x^2}-\sqrt{(1+(x+h)^2}}{\sqrt{(1+(x+h)^2}\sqrt{(1+x^2}}\right]\left[\frac{\sqrt{(1+x^2}+\sqrt{(1+(x+h)^2}}{\sqrt{(1+x^2}+\sqrt{(1+(x+h)^2}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{(1+x^2)-(1+(x+h)^2)}{\sqrt{(1+(x+h)^2}\sqrt{(1+x^2}\left(\sqrt{(1+x^2}+\sqrt{(1+(x+h)^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\bullet\left[\frac{-2xh-h^2}{\sqrt{(1+(x+h)^2}\sqrt{(1+x^2}\left(\sqrt{(1+x^2}+\sqrt{(1+(x+h)^2}\right)}\right] = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Mit Kettenregel $f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ folgt für $f(x) = \left(1+x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{-3}{2}}(2x) = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Aufgabe 7

a) $f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2$

$$f'(x)=2\left(\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)\left(\frac{\cos(x)(1+\cos(x))-(-\sin(x)\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}\right)$$

$$=\frac{2\sin(x)}{(1+\cos(x))}\left(\frac{\cos(x)+\cos^2(x)+\sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2}\right)=\frac{2\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$$

b) $f(x)=\sin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)$

$$f'(x)=\cos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{(1+x)}\right)=\cos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)\left(\frac{2+x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

c) $f(x)=\sqrt{1+\cos(x^2)}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+\cos(x^2)}}\left(-\sin(x^2)2x\right)=\frac{-\sin(x^2)x}{\sqrt{1+\cos(x^2)}}$$

Aufgabe 8

a) $F(x,y)=x^2y+xy^2-6=0\,\Big|\,\text{"}\frac{d}{dx}\text{"}$

$\Rightarrow 2xy+x^2y'+y^2+2xyy'=0$

$\Leftrightarrow y'(x^2+2xy)=-2xy-y^2$

$\Leftrightarrow y'=\frac{-2xy-y^2}{(x^2+2xy)}$

b) $F(x,y)=x+\tan(xy)=0\,\Big|\,\text{"}\frac{d}{dx}\text{"}$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{\cos^2(xy)}(y+xy')=0$

$\Leftrightarrow y+xy'=-\cos^2(xy)$

$\Leftrightarrow y'=\frac{-y}{x}-\frac{\cos^2(xy)}{x}$

Aufgabe 9

a) $f(x)=y=x^2+1; x\geq 0$

$y=x^2+1\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$

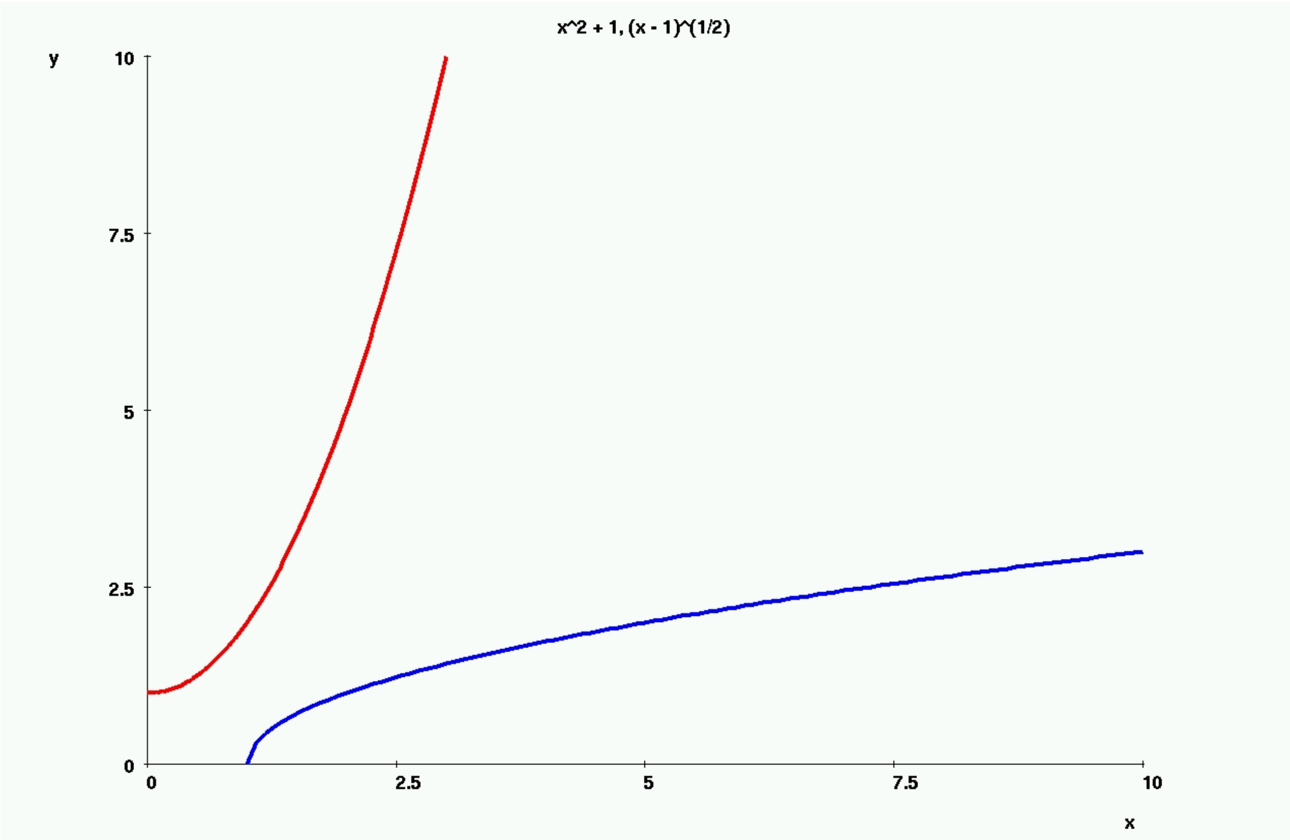
$Variablentausch \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$

$\frac{df}{dx}=2x; x=a\Rightarrow f'(a)=2a$

$$\frac{df^{-1}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}};x=a\Rightarrow f^{-1\prime}(f(a))=\frac{1}{2\sqrt{a^2+1-1}}=\frac{1}{2a}$$

$$f'(a)f^{-1\prime}(f(a))=2a\frac{1}{2a}=1$$

In der folgenden Grafik bezeichnet der rote Graph die Funktion und der blaue die Umkehrfunktion.



b) $f(x)=x^2;x\le 0$

$$y=x^2\Leftrightarrow x=-\sqrt{y}$$

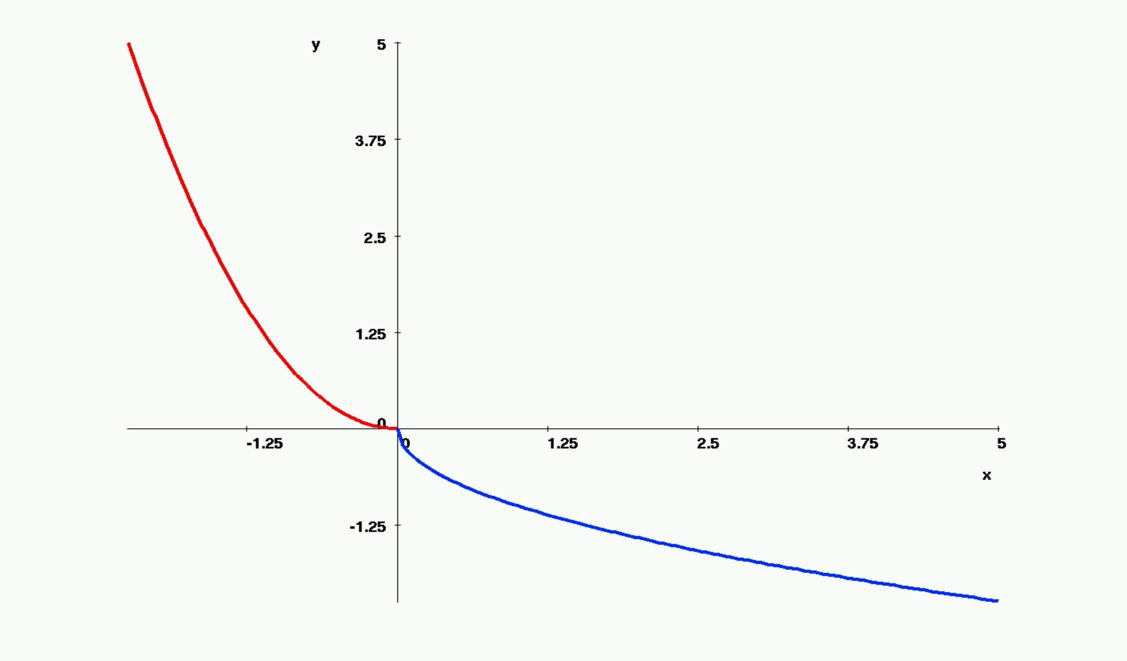
$$Variablentausch\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$$

$$\frac{df}{dx}=2x;x=a\Rightarrow f'(a)=2a$$

$$\frac{df^{-1}}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{2x}};x=a\Rightarrow f^{-1\prime}(f(a))=\frac{-1}{2\sqrt{a^2}}=\frac{-1}{2|a|}=\frac{-1}{-2a}=\frac{1}{2a}$$

$$f'(a)f^{-1\prime}(f(a))=2a\frac{1}{2a}=1$$

Analog zu Teil a) ist die Funktion rot und die Umkehrfunktion blau dargestellt.



Aufgabe 10

Es gilt: $f^{-1\prime}(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Mit $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ und $f(x) = \sin(x)$ erhält man:

$(\arcsin(\sin(x)))' = \dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$; und mit f(x) = y folgt:

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$Variablentausch \Rightarrow (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mit $f^{-1} = \arccos(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ ergibt sich:

$$(\arccos(\cos(x)))' = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$Variablentausch \Rightarrow (\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 11

a) N^n

b) $N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1) = \dfrac{N!}{(N-n)!}$

c) $\dbinom{N}{n} = \dfrac{N!}{(N-n)!n!}$

WS 2005/06 Vorkurs: Mathematische Methoden der Physik Musterlösung von Blatt 3

Aufgabe 12:

a)

$$(f \pm g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - f(x) \mp g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) \pm g'(x)$$

b)

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

c)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) + g(x)f(x) - g(x)f(x)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Aufgabe 13:

Sei n>0 $\Rightarrow x^{-n} = \frac{1}{x^n} := f(x)$ dann gilt für die Ableitung nach der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$$

Aufgabe 14:

Die Definitionsgleichung der Umkehrfunktion lautet: $f^{-1}(f(x)) = x$

Differenziert man dann beide Seiten erhält man nach der Kettenregel: $f^{-1\prime}(f(x))f'(x) = 1$

Somit gilt: $f^{-1\prime}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Aufgabe 15:

a)

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)};\ f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2};\ f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3};\ f'''(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4};\ f^{(4)}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5}\ \text{usw.}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}};\ \Rightarrow f^{(n)}(0)=n!$$

b)

$$f(x)=\sqrt{1+x};\ f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^{1/2}};\ f''(x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)^{3/2}};\ f'''(x)=\frac{3}{8}\frac{1}{(1+x)^{5/2}};$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}\frac{1}{(1+x)^{7/2}}\ \text{usw.}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-3)}{2^n}(1+x)^{-n+\frac{1}{2}};\ \Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^n\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-3)}{2^n};mit\prod_{i=1}^{0}i=1$$

Aufgabe 16:

Sei $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ dann gilt:

$$p(0)=a_0;\ p'(0)=a_1;\ p''(0)=2a_2;\ p'''(0)=6a_3\ \Rightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Somit gilt für p(x) mit den Vorraussetzungen von der Funktion 15 a: $a_0=1;a_1=1;a_2=1;a_3=1$

Bei 15 b gilt: $a_0=1;a_1=\frac{1}{2};a_2=-\frac{1}{8};a_3=\frac{1}{16}$

Aufgabe 17:

a)

$$F(x)=\frac{1}{3}Ax^3+\frac{1}{2}Bx^2+Cx+D$$

b)

$$F(x)=\frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$$

Im Folgenden werden wir für SF[f(x)] immer $\int f(x)dx$ schreiben, siehe Skript.

c)

$$F(x)=\int 2x(1+x^2)^n dx\ \text{subst.:}\ y=x^2;\ \frac{dy}{dx}=2x;\ \frac{dy}{2x}=dx;\ \Rightarrow\int 2x(1+y)^n\frac{dy}{2x}=\int(1+y)^n dy$$

$$\frac{1}{n+1}(1+y)^{n+1}+C=\frac{1}{n+1}(1+x^2)^{n+1}+C$$

d)

$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=\int(1-x)^{-1/2}dx=-2(1-x)^{1/2}+C$$

Aufgabe 18

Es gilt: $y(x) = \int y'(x)dx = \int \left(\int y''(x)dx \right) dx$

a) $y''(x) = \frac{1}{x^2}$

$$y(x) = \int \left(\int \frac{1}{x^2} dx \right) dx = \int \left(\frac{-1}{x} + a \right) dx = -\ln(x) + ax + b$$

b) $y''(x) = \sin(x)$

$$y(x) = \int \left(\int \sin(x)dx \right) dx = \int (-\cos(x) + a)dx = -\sin(x) + ax + b$$

Aufgabe 19

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1$$

Da (x-1)*(x+1) = x^2-1 ergibt, folgt der Ansatz zur Partialbruchzerlegung:

$$\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{x^2 - 1}$$

Hierbei werden A und B so bestimmt, dass diese die Funktion f(x) ergeben. Daraus erhält man folgende Bedingungen:

$$I : A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$II : -A + B = 1 \Rightarrow mitI : B = \frac{1}{2}; \Rightarrow mitI : A = -\frac{1}{2}$$

Somit gilt:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{-1}{2(x+1)} dx + \int \frac{1}{2(x-1)} dx = -\frac{1}{2\ln(x+1)} + \frac{1}{2\ln(x-1)} + c$$

Aufgabe 20

Es gilt: $\int (f'(x)g(x))dx = f(x)g(x) - \int (f(x)g'(x))dx$

a) $F'(x) = xe^{-x}$ mit $f'(x) = e^{-x}$ und g(x) = x folgt:

$$F(x) = \int (xe^{-x})dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

b) $F'(x) = e^{-ax}\sin(x)$ mit $f'(x) = e^{-ax}$ und g(x) = sin(x) folgt:

$$F(x)=\int (e^{-ax}\sin x)dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(x)-\int(-\cos(x)\frac{1}{a}e^{-ax})dx$$

Wiederum partielle Integration mit $f(x)=-\frac{1}{a}e^{-ax}$ und g(x)= cos(x)

$$F(x)=\int e^{-ax}\sin(x)dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(x)-\left[\cos(x)\frac{1}{a^2}e^{-ax}-\int(-\sin(x)\frac{1}{a^2}e^{-ax})dx\right]$$

$$=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(x)-\cos(x)\frac{1}{a^2}e^{-ax}-\frac{1}{a^2}\int e^{-ax}\sin(x)dx$$

$$\Leftrightarrow (1+\frac{1}{a^2})\int e^{-ax}\sin(x)dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(x)-\cos(x)\frac{1}{a^2}e^{-ax}$$

$$\Rightarrow \int e^{-ax}\sin(x)dx=\left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(x)-\cos(x)\frac{1}{a^2}e^{-ax}\right)+c=\frac{e^{-ax}}{a^2+1}\big(-a\sin(x)-\cos(x)\big)+c$$

Aufgabe 21

a) $\int_0^1 \sqrt{x}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$

b) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ Substitution $y=x^2+1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{dy}{2x}$

Bei bestimmten Integralen muss bei der Substitution immer eine Grenzenverschiebung vorgenommen werden, dies werden wir im Folgenden ohne Erwähnen durchführen.
Hier gilt: $x=0\to y=1; x=1\to y=2$
Somit erhält man folgendes Integral:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\int_1^2 \frac{x}{y}\frac{dy}{2x}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{y}dy=\frac{1}{2}\left[\ln(y)\right]_1^2=\frac{1}{2}\big(\ln(2)-0\big)=\frac{1}{2}\ln(2)$$

c) Mit Hilfe partieller Integration folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\cos(x)dx=\left[\sin^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\cos(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\cos(x)dx=\left[\sin^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\cos(x)dx=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

Aufgabe 22

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x x e^{-ax^2} dx = \left[x \frac{-1}{2a} e^{-ax^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{(-1)}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

$$wobei \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = I_0$$

Jetzt muss man den mittleren Term (Klammerausdruck) berechnen, um den Quotienten I_2/I_0 zu bestimmen.
Dies erreicht man, indem man die Grenzen einsetzt und die Regel von L´Hospital anwendet.

Für die obere Grenze folgt:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1}{2a} \frac{x}{e^{ax^2}} = 0$ da die Exponentialfunktion schneller anwächst als jede Potenz von x!

Analog für die untereGrenze:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{2a} \frac{x}{e^{ax^2}} = 0$$

Somit fällt der Mittelterm weg. Demnach gilt:

$$I_2 = \frac{1}{2a} I_0 \Leftrightarrow \frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{2a}$$

<u>**WS 2005/06 Vorkurs: Mathematische Methoden der Physik Musterlösung von Blatt 5**</u>

Aufgabe 23:

$$\ln(\frac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} udu \quad \text{substituiere:} \quad s = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{ds}{du} = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow du = -u^2 ds$$

$$\Rightarrow \ln(\frac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{u} du = \int_1^{x} s(-u^2)ds = \int_1^{x} \frac{s}{-s^2} ds = -\int_1^{x} \frac{1}{s} ds = -\ln(x)$$

Aufgabe 24:

a)

$$f(x) = xe^{-x^2} \quad F(x) = \int xe^{-x^2} dx$$

substituiere: $r = -x^2 \Rightarrow \frac{dr}{dx} = -2x \Rightarrow dx = -\frac{dr}{2x}$

$$\Rightarrow F(x) = \int xe^{-x^2} dx = \int xe^{r}\left(-\frac{dr}{2x}\right) = -\frac{1}{2}\int e^r dr = -\frac{1}{2}e^r + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + d$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-0,25} + \frac{1}{2}$$

b)

$$g(x) = \ln(x)$$

$$G(x) = \int \ln(x) = \int 1 \ln(x) = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + d$$

$$\int_1^2 g(x) = \left[x\ln(x) - x\right]_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1$$

Aufgabe 25:

$$v(t) = gt_0 + (v_0 - gt_0)e^{-\frac{t}{t_0}}$$

$$\Rightarrow x(t) = gt_0 t + \left(-t_0\right)(v_0 - gt_0)e^{-\frac{t}{t_0}} + c$$

$$x(0) = h_0 = \left(-t_0\right)(v_0 - gt_0) + c \quad \Rightarrow c = h_0 + v_0 t_0 - g{t_0}^2$$

$$\Rightarrow x(t) = gt_0 t + (g{t_0}^2 - v_0 t_0)e^{-\frac{t}{t_0}} + h_0 + v_0 t_0 - g{t_0}^2$$

Aufgabe 26:

$y' - xy = 0$ **;** $y(0) = 1$

Potenzreihenansatz:

$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \Rightarrow y'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$

$$y' - xy = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} - x \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow a_1 + \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) a_{i+2} x^{i+1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left((i+2) a_{i+2} + a_i \right) x^{i+1} = 0$$
$$\Rightarrow a_1 = 0 \wedge (i+2) a_{i+2} + a_i = 0$$

für i ungerade folgt: $a_i = 0$

für i gerade folgt: $a_i = \frac{a_{i-2}}{i}; a_i = \frac{\frac{a_{i-4}}{i-2}}{i} = \frac{a_{i-4}}{i(i-2)}; \ldots; a_i = a_0 \frac{1}{i\left(i-2\right)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2}$

$$y(0) = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + \ldots = a_0 = 1$$
$$a_i = \frac{1}{i\left(i-2\right)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! \cdot 2^i} x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{2} x^2 \right)^i = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Ansatz mit Separation der Variablen:

$y' - xy = 0$ **;** $\frac{dy}{dx} = xy$ **;** $\Rightarrow \frac{dy}{y} = x dx$ **;** $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x dx$ **;** $\Rightarrow \ln(y) = \frac{1}{2} x^2 + d$

$\Rightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2 + d}$ mit $y(0) = 1$ folgt d=0 also $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$

Aufgabe 27:

$$f(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}};\; f^{/}(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}};\; f^{//}(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}};\; f^{///}(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}};$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}};$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\prod_{i=1}^{n}(2i-3)\frac{1}{2^i}(1-x)^{-n+\frac{1}{2}} \;\Rightarrow a_n=\frac{f^n(x)}{n!}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-3)\frac{1}{2^i}(1-x)^{-n+\frac{1}{2}}}{n!};\, a_0=f(x_0)$$

Für die allgemeine Taylorentwicklung gilt dann:

$$\Rightarrow g_\infty(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(x-x_0)^n\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-3)\frac{1}{2^i}(1-x_0)^{-n+\frac{1}{2}}}{n!}(x-x_0)^n\right)$$

Die Taylorentwicklung bis zum Grad 3 ist dann explizit:

$$g_3(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$$

Aufgabe 28:

$$\lim_{h\to0}\frac{\cos(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n)!}\right)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n)!}\right)+1-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n)!}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{h^{2n-1}}{(2n)!}\right)=0$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\sin(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\left(1+\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)}{h}\right)=1$$

Aufgabe 29

$z_1 = 1+i$ und $z_2 = 1-i$

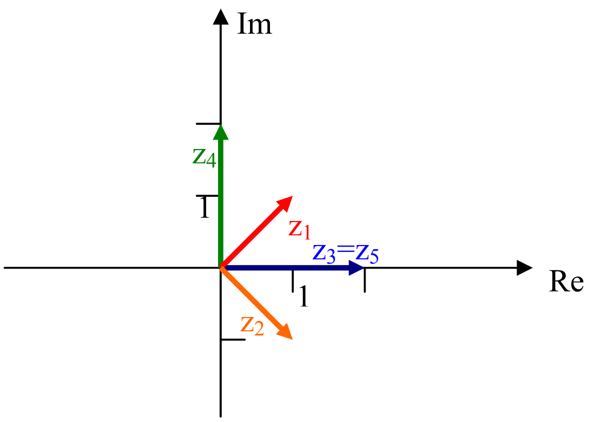
$$z_3 = z_1 + z_2 = 1+i+(1-i) = 2$$
$$z_4 = z_1 - z_2 = 1+i-(1-i) = 2i$$
$$z_5 = z_1 \bullet z_2 = (1+i) \bullet (1-i) = 1+i-i-i^2 = 2$$

Sei $z = a + bi \rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$|z_1| = \sqrt{2}; |z_2| = \sqrt{2}; |z_3| = \sqrt{4} = 2; |z_4| = \sqrt{4} = 2; |z_5| = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = arc(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\varphi = arc(z_1) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$$
$$\varphi = arc(z_2) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$$
$$\varphi = arc(z_3) = arc(z_5) = \arctan\left(\frac{0}{2}\right) = 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$$
$$\varphi = arc(z_4) = \arctan\left(\frac{2}{0}\right) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$$



Aufgabe 30

Es gilt: $i^2 = -1$

$$\cos(ix)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n(ix)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n(i)^{2n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n\left((i)^2\right)^n x^{2n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n\left(-1\right)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=\cosh(x)$$

$$\sin(ix)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n(ix)^{2n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n i\left((i)^2\right)^n x^{2n+1}=i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n(-1)^n x^{2n+1}=i\sinh(x)$$

Aufgabe 31

Es gilt: $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ und $\cos(-x)=\cos(x);\sin(-x)=-\sin(x)$

a)

$$\cos(x\pm y)=\mathrm{Re}\left(e^{i(x\pm y)}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{ix\pm iy}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{ix}e^{\pm iy}\right)=\mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))(\cos(\pm y)+i\sin(\pm y))\right)$$
$$=\mathrm{Re}\left(\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)+i\left(\sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)\right)\right)=\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x\pm y)=\mathrm{Im}\left(e^{i(x+y)}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{ix\pm iy}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{ix}e^{\pm iy}\right)=\mathrm{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))(\cos(\pm y)+i\sin(\pm y))\right)$$
$$=\mathrm{Im}\left(\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)+i\left(\sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)\right)\right)=\sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)$$

b)

$$\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=\frac{1}{2i}\left(\cos(x)+i\sin(x)-\cos(-x)-i\sin(-x)\right)=\frac{1}{2i}2i\sin(x)=\sin(x)$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{i-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(x)+i\sin(x)+\cos(-x)+i\sin(-x)\right)=\frac{1}{2}2\cos(x)=\cos(x)$$

Aufgabe 32

$$\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^n=(e^{ix})^n=e^{i(nx)}=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

$$\cos(2x) = \left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^2 - i\sin(2x)$$
$$= \cos^2(x) + 2i\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x) - 2i\sin(x)\cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{i}\left[\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^2 - \cos(2x)\right] = \frac{1}{i}\left[\cos^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin^2(x)\right]$$
$$= \frac{1}{i} 2i\cos(x)\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

Aufgabe 33

Für $z \in \mathbb{C}$ mit z = a + bi gilt: $z = |r| e^{i\varphi}$ wobei $|r| = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

a) $z^2 = 1$; $z_1 = 1$; $z_2 = -1$

b) $z^2 + (1+i)z + i = 0$

Mit p-q-Formel folgt:

$$z_{1/2} = \frac{-(1+i)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+i)^2}{4} - i} = \frac{-(1+i)}{2} \pm \sqrt{\frac{1+2i+i^2-4i}{4}} = \frac{-(1+i)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-i)^2}{4}} = \frac{-(1+i)}{2} \pm \frac{(1-i)}{2}$$
$$\Rightarrow z_1 = -i; z_2 = -1$$

c) $z^3 = -i$ mit obigem Ansatz folgt mit $|r| = 1$ und $-i = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)}$ wobei n = 0,1,2:

$$\left(e^{i\phi}\right)^3 = e^{3i\varphi} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)}$$
$$\Leftrightarrow 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$
$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} n\pi$$

Somit lauten die Lösungen: $z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}; z_2 = e^{\frac{3\pi}{2}i}; z_3 = e^{\frac{5\pi}{2}i}$

d) $z^4 = -4$ analog zu c) mit $|r| = \sqrt{2}$ und $-4 = 4e^{\pi + 2n\pi}$ und n = 0,1,2,3 folgt:

$$z^4 = \left(\sqrt{2} e^{i\varphi}\right)^4 = 4e^{i4\varphi} = 4e^{\pi + 2n\pi}$$
$$\Leftrightarrow 4\varphi = \pi + 2n\pi$$
$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$$

Daraus ergeben sich folgende Lösungen: $z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}; z_2 = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}; z_3 = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4}i}; z_4 = \sqrt{2} e^{\frac{7\pi}{4}i}$

WS 2005/06 Vorkurs: Mathematische Methoden der Physik Musterlösung von Blatt 7

Aufgabe 34:

Laut Skript lautet die allgemeine Vektordarstellungsform: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

In diesem Fall benutzen wir aber die in der Schule übliche Darstellung als Spaltenvektor, da wir ausschließlich in der üblichen Basis rechnen.

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix};$$

$$2\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}-\vec{b}-\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix};$$

b)

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5; \quad \varphi_{\vec{a}} = \arctan\frac{-4}{3} = -0,93rad; \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\varphi_{\vec{b}} = \arctan\frac{2}{-1} = 2,03rad; \quad |\vec{c}| = \sqrt{(1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad \varphi_{\vec{c}} = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4};$$

c)

$$\vec{a}\vec{b} = 3\cdot(-1) + (-4)\cdot 2 = -11; \quad \vec{a}\vec{c} = 3\cdot 1 + (-4)\cdot 1 = -1; \quad \vec{b}\vec{c} = (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1;$$

d)

$$\cos\varphi(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-11}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 2,96rad;$$

e)

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 3\lambda - \mu = 1 \\ -4\lambda + 2\mu = 1 \end{array};$$

$$\Rightarrow \mu = 3\lambda - 1; \Rightarrow -4\lambda + 2(3\lambda - 1) = 1 \Rightarrow 2\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}; \mu = \frac{7}{2}$$

Aufgabe 35:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}; \quad \vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c};$$

$$\vec{a}\vec{d} = \vec{a}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \alpha\vec{a}\vec{a} + \beta\vec{a}\vec{b} + \gamma\vec{a}\vec{c} = \alpha\vec{a}\vec{a} \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{a}\vec{d}}{\vec{a}\vec{a}};$$

$$\vec{b}\vec{d} = \vec{b}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \alpha\vec{b}\vec{a} + \beta\vec{b}\vec{b} + \gamma\vec{b}\vec{c} = \beta\vec{b}\vec{b} \Rightarrow \beta = \frac{\vec{b}\vec{d}}{\vec{b}\vec{b}};$$

$$\vec{c}\vec{d} = \vec{c}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \alpha\vec{c}\vec{a} + \beta\vec{c}\vec{b} + \gamma\vec{c}\vec{c} = \gamma\vec{c}\vec{c} \Rightarrow \gamma = \frac{\vec{c}\vec{d}}{\vec{c}\vec{c}};$$

Aufgabe 36:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix};\ \vec{c}\perp\vec{a}\Rightarrow 3c_1-c_2=0\Rightarrow c_2=3c_1$$

Wähle nun $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\c_3\end{pmatrix}$, da $\vec{a}\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\\c_3\end{pmatrix}=0$

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{c}=\vec{b}\Rightarrow\lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\-3\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}3\lambda-\mu=2\\-\lambda-3\mu=1\Rightarrow\mu=3\lambda-2\Rightarrow-\lambda-3(3\lambda-2)=1\\\mu c_3=-3\end{matrix}$$

$$\Rightarrow-10\lambda=-5\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow\mu=\frac{-1}{2}\Rightarrow c_3=6$$

$$\Rightarrow\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\6\end{pmatrix}$$

Aufgabe37:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}2+9\\-6+1\\-3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-5\\-7\end{pmatrix};\ (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\10\\14\end{pmatrix}$$

Allgemein gilt nämlich:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times(-\vec{b})+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times(-\vec{b})$$
$$=\vec{a}\times(-\vec{b})+\vec{b}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}=2(\vec{b}\times\vec{a})=-2(\vec{a}\times\vec{b})$$

Aufgabe 38:

$\left|\vec{a}(x)\right|=\sqrt{\vec{a}(x)\vec{a}(x)}\Rightarrow\vec{a}(x)\vec{a}(x)=\left|\vec{a}(x)\right|^2$, wenn $\left|\vec{a}(x)\right|=const.$ dann auch $\left|\vec{a}(x)\right|^2$, also gilt: $\vec{a}(x)\vec{a}(x)=c\Rightarrow\left(\vec{a}(x)\vec{a}(x)\right)'=\vec{a}'(x)\vec{a}(x)+\vec{a}(x)\vec{a}'(x)=2\vec{a}'(x)\vec{a}(x)=0\Rightarrow\vec{a}'(x)\vec{a}(x)=0$ Dies heißt anschaulich, dass wenn $\left|\vec{a}(x)\right|=const.$ ist, steht der Ableitungsvektor zu jedem x senkrecht auf der vektorwertigen Ausgangsfunktion.

Aufgabe 39:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left|\vec{a}(x)\right|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\vec{a}(x)\vec{a}(x)\right)=\vec{a}(x)\vec{a}'(x)$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left|\vec{a}(x)\right|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}a^2(x)=a(x)a'(x)$$

Seitenvergleich liefert das das gewünschte Ergebnis

Aufgabe 40:

Der Körper vollzieht eine Spirale, wobei er in der e_1-e_2 Ebene eine Kreisbewegung vollzieht und diese Kreisbewegung durch die e_3 Komponente zur Spirale wird.

$$\vec{x}(t) = \cos(\omega t)\vec{e}_1 + \sin(\omega t)\vec{e}_2 + v_z t\vec{e}_3$$
$$\vec{v}(t) = -\omega\sin(\omega t)\vec{e}_1 + \omega\cos(\omega t)\vec{e}_2 + v_z\vec{e}_3$$
$$\vec{a}(t) = -\omega^2\cos(\omega t)\vec{e}_1 - \omega^2\sin(\omega t)\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

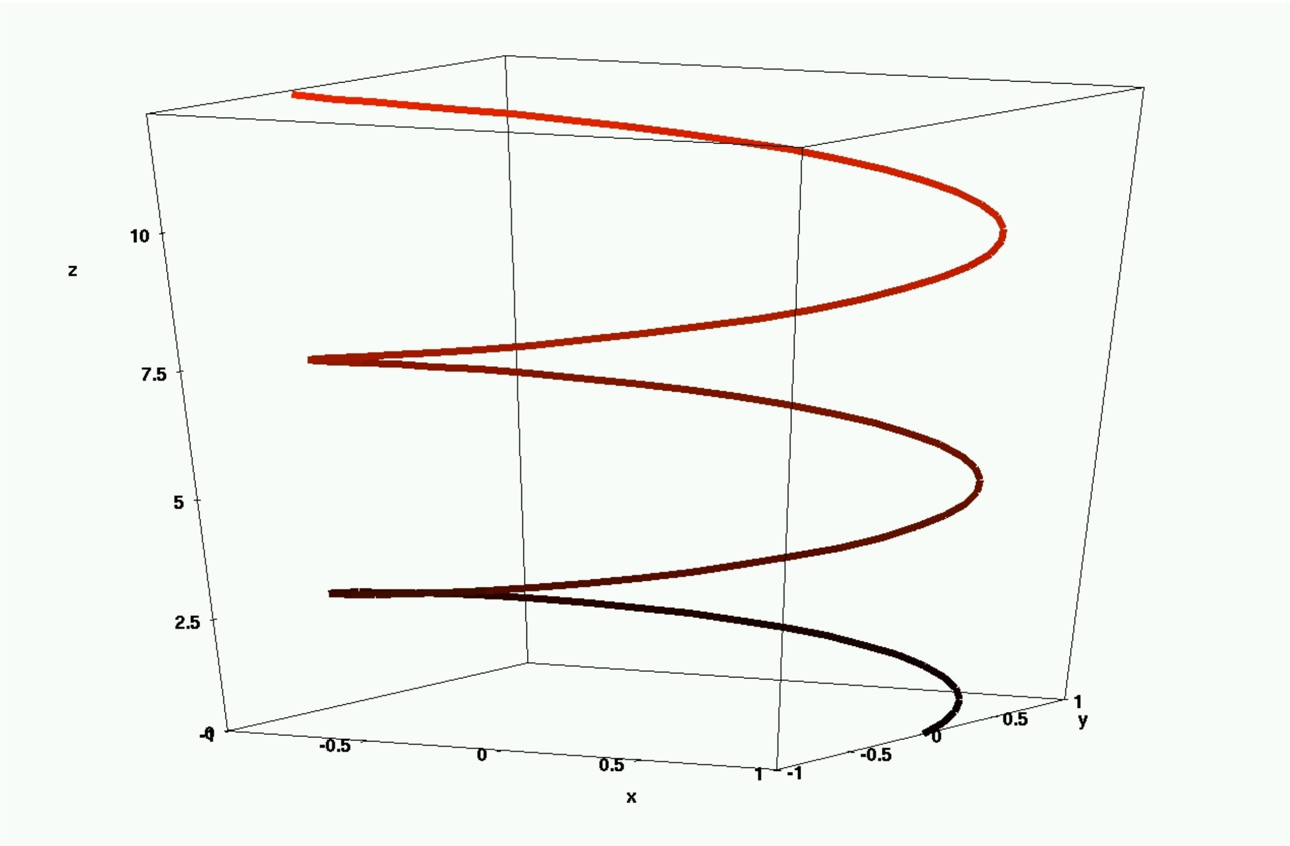
Für $v_z=0$ gilt:

$$\left|\vec{x}(t)\right| = \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = 1 = const. \Rightarrow \vec{x}(t) \perp \vec{v}(t)$$
$$\vec{x}(t)\vec{v}(t) = \cos(\omega t)\omega(-\sin(\omega t)) + \sin(\omega t)\omega\cos(\omega t) = 0$$

Das heißt, dass der Ortsvektor immer senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor steht, dies ist auch einleuchtend, da der Geschwindigkeitsvektor bei dieser Kreisbewegung immer der Tangentenvektor am Kreis ist und der Ortsvektor der Vektor vom Mittelpunkt des Kreises zum Kreisrand.

$$\vec{x}(t) = \cos(\omega t)\vec{e}_1 + \sin(\omega t)\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$
$$\vec{a}(t) = -\omega^2\cos(\omega t)\vec{e}_1 - \omega^2\sin(\omega t)\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = -\omega^2\vec{x}(t)$$

Somit ist der Beschleunigungsvektor antiparallel zum Ortsvektor (Minuszeichen!!!) und um den Faktor ω^2 gestreckt bzw. gestaucht.



WS 2005/06 Vorkurs: Mathematische Methoden der Physik Musterlösung von Blatt 8

Aufgabe 41

$$V\left(\vec{x}\right)=\frac{a}{\left|\vec{x}\right|}=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{-\frac{1}{2}};x\in\Re^3$$

$$\vec{\nabla}V\left(\vec{x}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{-\frac{1}{2}}=a\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x_1\\ -\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x_2\\ -\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x_3\end{pmatrix}=\frac{-a}{\left|\vec{x}\right|^3}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{-a\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|^3}$$

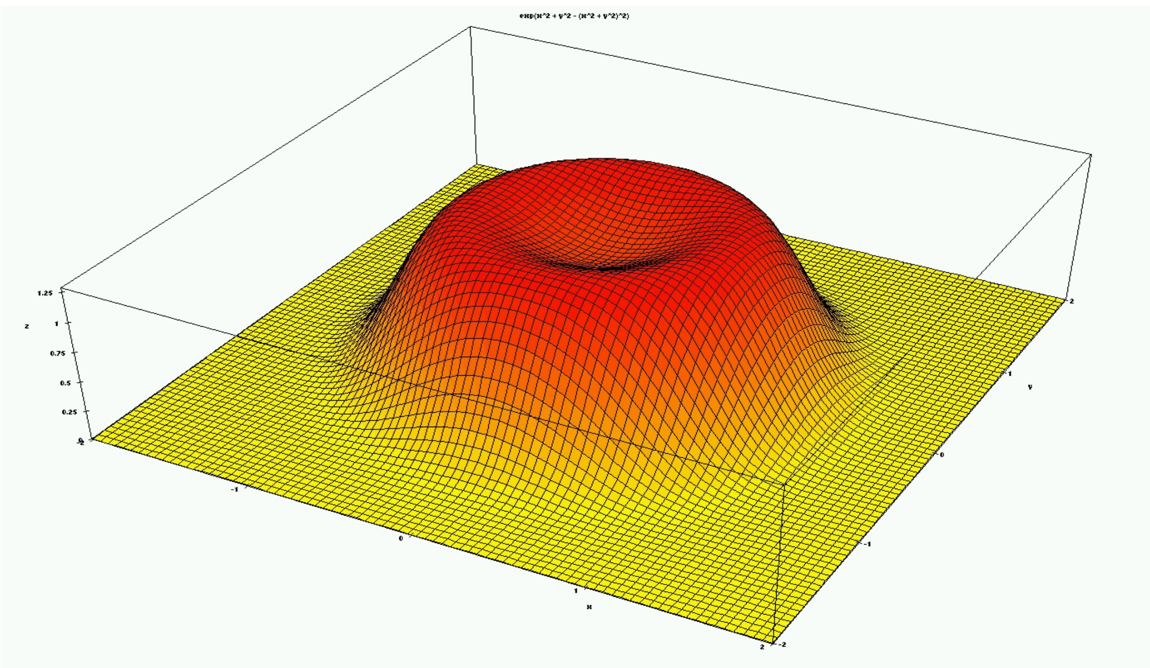
Aufgabe 42

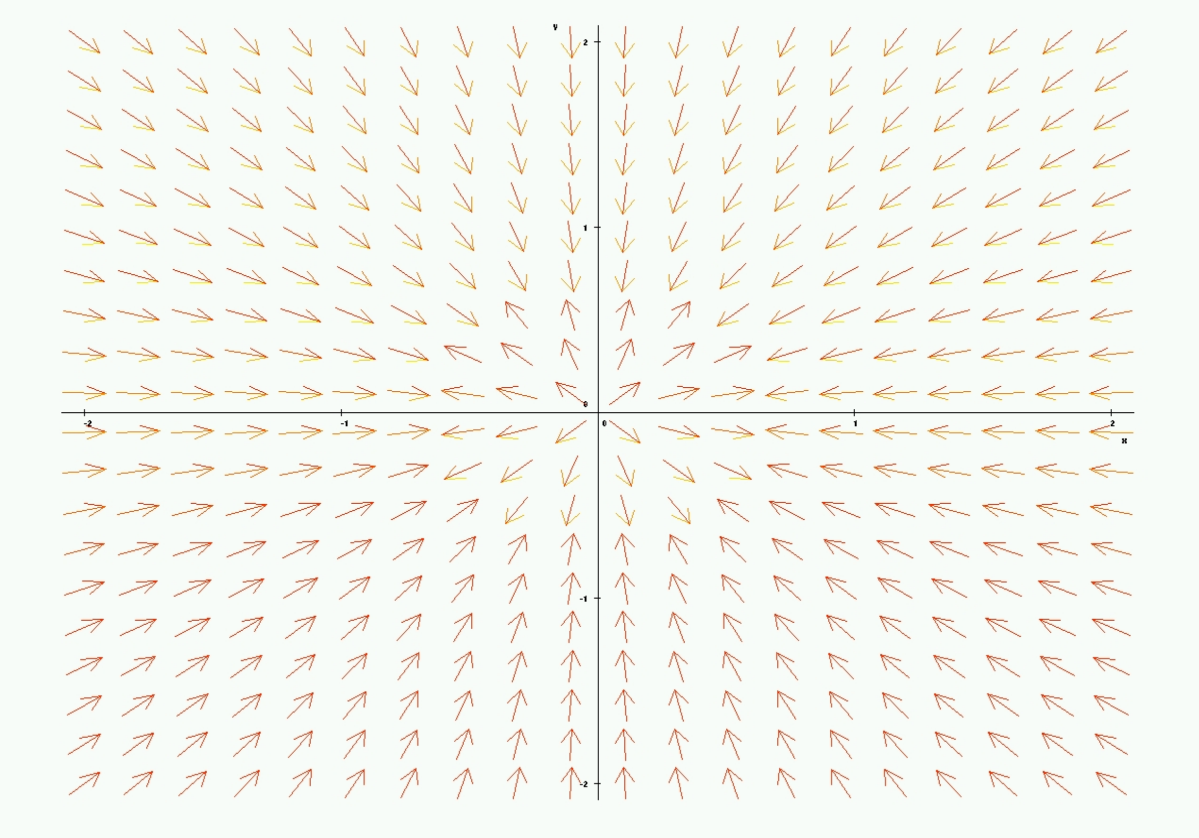
$$F\left(\vec{x}\right)=\exp(-\left|\vec{x}\right|^4+\left|\vec{x}\right|^2)=\exp\left(-\left(x_1^2+x_2^2\right)^2+\left(x_1^2+x_2^2\right)\right);x\in\Re^2$$

$$\vec{\nabla}F\left(\vec{x}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}\exp\left(-\left(x_1^2+x_2^2\right)^2+\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)=\begin{pmatrix}-2\left(x_1^2+x_2^2\right)2x_1+2x_1\\ -2\left(x_1^2+x_2^2\right)2x_2+2x_2\end{pmatrix}\exp\left(-\left(x_1^2+x_2^2\right)^2+\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)$$

$$=\vec{x}\left(-4\left|\vec{x}\right|^2+2\right)\exp\left(-\left(x_1^2+x_2^2\right)^2+\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)$$

Die anschließenden Grafiken stellen die Funktion sowie deren Gradientenfeld dar.





Aufgabe 43

Die Rotationsmatrix für eine Drehung um die $\vec{e_3} - Achse$ um den Winkel φ lautet:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ analog gilt dies für die rückgängige Rotation um den Winkel –φ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) & 0 \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & +\sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\cos(-x) = \cos(x); \sin(-x) = -\sin(x)$ verwendet wurde.
Bildet man nun das Produkt AA^{-1}, so folgt:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) & \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi) & \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Drehung um $\frac{\pi}{4}$ ergibt sich:

$$A=\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A^{-1}=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vergleicht man nun die Matrixelemente von A und A^{-1}, so erkennt man, dass alle Einträge identisch sind und nur die Elemente a_{12} und a_{21} die Vorzeichen wechseln.

Aufgabe 44

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) $C=2A=2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

b)

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 \\ 3+4 & 4+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 4 & 1\cdot 3+2\cdot 5 \\ 2\cdot 3+4\cdot 4 & 3\cdot 3+4\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 3 & 2\cdot 2+3\cdot 4 \\ 4\cdot 1+5\cdot 3 & 2\cdot 4+5\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}$$

Anhand dieses Beispiels erkennt man, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

d) Es gilt: $AA^{-1}=\underline{1}$; Sei $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ beliebig. Daraus folgt das Gleichungssystem:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} I: a+2c=1 \\ II: 3a+4c=0 \\ III: b+2d=0 \\ IV: 3b+4d=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a=-\frac{4}{3}c \\ b=-2d \end{array} \qquad \text{a in I und b in II einsetzen}$$

.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -\frac{4}{3}c+2c=1 \Leftrightarrow c=\frac{3}{2} \Rightarrow a=-2 \\ -6d+4d=1 \Leftrightarrow d=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=1 \end{array}$$ Somit lautet die inverse Matrix $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 45

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 46

Sei Paula = p und Fritz = f, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem und die anschließende Lösung:

$$\begin{array}{r} I: p=2f \\ II: p+f=99 \end{array} \Leftrightarrow 3f=99 \Leftrightarrow f=33 \Rightarrow p=66$$

Überführt man dieses System in „Matrixschreibweise" der Form $y=Ax; y,x \in \Re^2$ und A eine 2x2-Matrix, deren Lösung $A^{-1}y=A^{-1}Ax=x$ für x als Unbekannte ist, so folgt:

$$\begin{array}{l} 0=p-2f \\ 99=p+f \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 99 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ f \end{pmatrix}$$

Die Inverse zu $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man analog zu Aufgabe 44.

Es gilt: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ und demnach folgt: $\begin{pmatrix} p \\ f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 99 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} p=66 \\ f=33 \end{array}$

Aufgabe 47:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow \det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)-1=0;\Rightarrow \lambda^2-4\lambda+2=0\Rightarrow \lambda_{1/2}=2\pm\sqrt{2}$$

Für $\lambda_1=2+\sqrt{2}$

$$\begin{matrix}(1-2-\sqrt{2})x_1-x_2=0\\ -x_1+(3-2-\sqrt{2})x_2=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}(-1-\sqrt{2})x_1-x_2=0\\ -x_1+(1-\sqrt{2})x_2=0\end{matrix}\Rightarrow x_2=(-1-\sqrt{2})x_1$$

Diese Relation wird eingesetzt in die zweite Gleichung bestätigt, denn:

$$-x_1+(1-\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})x_1=x_1(-1-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+2)=0$$

$$\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}x_1\\ (-1-\sqrt{2})x_1\end{pmatrix}$$

Normierung:

$$\Rightarrow |v_1|=\sqrt{x_1^{\,2}+(-1-\sqrt{2})^2x_1^{\,2}}=\sqrt{x_1^{\,2}+3x_1^{\,2}+2\sqrt{2}x_1^{\,2}}=1\Leftrightarrow x_1^{\,2}\left(1+3+2\sqrt{2}\right)=1\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\ \frac{(-1-\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}38\\ -0{,}92\end{pmatrix}$$

Probe:

$$Av_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\ \frac{(-1-\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+\frac{(-1-\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(-1)\\ (-1)\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+3\frac{(-1-\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}=(2+\sqrt{2})\frac{(-1-\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

Für $\lambda_1=2-\sqrt{2}$

$$\begin{matrix}(1-2+\sqrt{2})y_1-y_2=0\\ -y_1+(3-2+\sqrt{2})y_2=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}(-1+\sqrt{2})y_1-y_2=0\\ -y_1+(1+\sqrt{2})y_2=0\end{matrix}\Rightarrow y_2=(-1+\sqrt{2})y_1$$

Diese Relation wird eingesetzt in die zweite Gleichung bestätigt, denn:

$$-y_1+(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})y_1=y_1(-1-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+2)=0$$

$$\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}y_1\\ (-1+\sqrt{2})y_1\end{pmatrix}$$

Normierung:

$$\Rightarrow |v_2| = \sqrt{y_1^{\,2} + (-1+\sqrt{2})^2 y_1^{\,2}} = \sqrt{y_1^{\,2} + 3x_1^{\,2} + 2\sqrt{2}y_1^{\,2}} = 1 \Leftrightarrow y_1^{\,2}\left(1+3+2\sqrt{2}\right) = 1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{(-1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}16 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{(-1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} + \frac{(-1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(-1) \\ (-1)\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} + 3\frac{(-1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} = (2-\sqrt{2})\frac{(-1+\sqrt{2})}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

Aufgabe 48:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B-\lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) - (1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \left(-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1\right) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1$$

Für $\lambda_{1/2} = 1$

$$\begin{matrix} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = x_3; x_2 = beliebig$$

Wähle $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Normierung : v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Nun brauchen wir einen Vektor der senkrecht auf v_1 steht und die Bedingungen: $x_1 = x_3; x_2 =$ beliebig erfüllt.

Wähle: $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn $v_1 v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

Für $\lambda_3 = -1$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 &= 0 \quad \Rightarrow x_1 = -x_3 ; x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wähle: $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathit{Normierung} : v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Dieser Vektor steht nach Skript S.85/86 senkrecht auf den andern beiden Vektoren somit haben wir die 3 orthogonalen und normierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten.

Probe:

$$Bv_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

$$Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 v_2$$

$$Bv_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \lambda_3 v_3$$

Aufgabe 49:

a) $$\det(cA) = \det \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11}ca_{22}ca_{33} + ca_{12}ca_{23}ca_{31} + ca_{13}ca_{21}ca_{32} \\ -ca_{13}ca_{22}ca_{31} - ca_{32}ca_{23}ca_{11} - ca_{33}ca_{21}ca_{12} \end{pmatrix}$$

$$= c^3 \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{pmatrix} = c^3 \det(A)$$

b) $$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{pmatrix}$$

Betrachtet man nun die 6 Summanden, so enthält jeder Summand jeweils eine Komponente aus jeder Zeile, das heißt, dass wenn eine Zeile nur aus Nullen besteht, dass alle Summanden 0 werden also auch die Determinante 0 ist.

c) Wir vertauschen nun als Exempel die ersten beiden Zeilen. Ein allgemeiner Beweis wird in der AGLA 1 Vorlesung folgen.

$$\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{23}a_{11}a_{32} \\ -a_{23}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{13}a_{21} - a_{33}a_{11}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -a_{21}a_{12}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} \\ +a_{23}a_{12}a_{31} + a_{32}a_{13}a_{21} + a_{33}a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{pmatrix}$$

$$= -\det(A)$$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \Rightarrow \det(A) = \det(B) = 0 \neq \det(A+B) = \det(I) = 1$

Aufgabe 50:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3; A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

Allgemein gilt: $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$