Universität Göttingen
Fakultät für Physik

Juniorprof. Dr. V. Meden

WS 2005/2006 **Vorkurs: Mathematische Methoden der Physik** 6. Übungsblatt

Aufgabe 29: Seien $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$ beides komplexe Zahlen. Berechnen Sie $z_3 = z_1 + z_2,\ z_4 = z_1 - z_2,\ z_5 = z_1 \cdot z_2$ sowie $|z_n|$ und $\mathrm{arc}(z_n)$, für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ und stellen Sie die z_n in der komplexen Zahlenebene dar.

Aufgabe 30: Zeigen Sie mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen von $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ und unter Verwendung von $i^2 = -1$, daß ($x \in \mathbb{R}$)

$$\cos(ix) = \cosh x \quad \text{und} \quad \sin(ix) = i \sinh x$$

gilt.

Aufgabe 31: Beweisen Sie

a) die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ und $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

b) $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ und $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

mit Hilfe der Relation $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Dabei seien x und y reelle Zahlen.

Aufgabe 32: Beweisen Sie die sogenannten *Moivreschen Formeln*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)\,,$$

für $x \in \mathbb{R}$. Drücken Sie mit Hilfe dieser Formeln $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ durch Kosinus- und Sinusfunktionen mit dem Argument x (nicht $2x$) aus.

Aufgabe 33: Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen an ($z \in \mathbb{C}$)

a) $z^2 = 1$ b) $z^2 + (1 + i)z + i = 0$ c) $z^3 = -i$ d) $z^4 = -4$.