

Klausur 1

Aufgabe 1: Erzeugung von Zufallszahlen (12 Punkte)

- a. Wie kann man Zufallszahlen (x) erzeugen, die gemäß der Exponentialverteilung mit Dichte $p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0, \lambda > 0$) verteilt sind? 3 Punkte
- b. Berechnen Sie die Dichte $q_{\lambda,2}(x)$ der Summe zweier mit Parameter λ exponentiell verteilter Zufallszahlen, indem sie das Integral $\int_0^x p_\lambda(z)p_\lambda(x-z)dz$ ausrechnen. 3 Punkte
- c. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die Dichte der n -fachen Summe von mit Parameter λ exponentiell verteilten Zufallszahlen die Gamma-Verteilung $q_{\lambda,n}(x) = \frac{e^{-\lambda x} \lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}$ ($x \geq 0$) ergibt. 4 Punkte
- d. Wie erzeugt man Zufallszahlen, die gemäß $q_{\lambda,n}(x)$ verteilt sind? 2 Punkte

Aufgabe 2: Mittelwert und Varianz (10 Punkte)

- a. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz folgender diskreter Zufallsgröße: 4 Punkte
- | | | | | | | |
|--------|-----|-----|------|-----|-----|-----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $p(x)$ | 1/4 | 1/6 | 1/12 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
- b. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Exponentialverteilung mit Dichte $p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0, \lambda > 0$). 6 Punkte

Aufgabe 3: Sattelpunktsintegrale (10 Punkte)

- a. Begründen Sie, dass im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ unter der Annahme, dass $g(x)$ an der Stelle x_0 sein einziges Maximum hat: 5 Punkte

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Ng(x)} dx \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-Ng''(x_0)}} e^{Ng(x_0)}$$

- b. Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-N(x-2)^2} (x^2 - 4x + 5)^{-N} dx$ näherungsweise im Grenzfall $N \rightarrow \infty$. 5 Punkte

Aufgabe 4: Mikrokanonische Gesamtheit (9 Punkte)

Betrachten Sie ein System aus N ($N \gg 1$) lokalisierten $S = \frac{1}{2}$ Spins im Magnetfeld $B\hat{e}_z$. Es seien N_\uparrow die Zahl der Spins, die parallel, und N_\downarrow die Zahl der Spins, die antiparallel zum Feld ausgerichtet sind. Das System habe die Energie

$$E = -(N_\uparrow - N_\downarrow)\mu_B B = -M\mu_B B.$$

- a. Zeigen Sie, dass sich in der mikrokanonischen Gesamtheit für die Entropie 5 Punkte
 $S(N, M) = 0.5k_B \left[(N + M) \ln \frac{2N}{N+M} + (N - M) \ln \frac{2N}{N-M} \right]$ ergibt.
TIP: Verwenden Sie die Stirling Formel.
- b. Berechnen Sie daraus die Temperatur als Funktion von N und M . 4 Punkte

Aufgabe 5: Kanonische Gesamtheit (10 Punkte)

Leiten Sie die Verteilungsfunktion der kanonischen Gesamtheit auf alternativem Weg her. Betrachten Sie dazu ein Übersystem von M physikalisch gleichwertigen Systemen jeweils im Kontakt mit einem Wärmebad bei Temperatur T . Jedes System habe die diskreten Energien E_m mit Eigenzuständen $|m\rangle$. Sei n_m die Anzahl der Systeme im Zustand $|m\rangle$.

Verwenden Sie dazu, dass in diesem Fall die Gesamtenergie E_t scharf ist (also als konstant angesehen werden kann), ebenso natürlich die Zahl M der Systeme.
 Schrittweise:

- a. Bestimmen Sie die Zahl $W(\{n_m\})$ der Realisierungsmöglichkeiten für eine 3 Punkte
 Verteilung $\{n_m\}$ der M Systeme auf die Zustände. Geben Sie die Randbedingungen an.
- b. Maximieren Sie W und arbeiten Sie die zwei Randbedingungen für M, E_t 3 Punkte
 mit Hilfe von Lagrangeschen Multiplikatoren λ_1, λ_2 ein. Was ergibt sich für n_m ?
- c. Berechnen Sie die Lagrangeschen Multiplikatoren. Verwenden Sie dazu, dass 4 Punkte
 das Phasenvolumen $\Gamma(E_t)$ des Gesamtsystems wegen der Schärfe der Verteilung ungefähr gleich W ist, also $\ln \Gamma(E_t) \approx \ln W_{\max}$.

Aufgabe 6: Harmonische Oszillatoren (10 Punkte)

Betrachten Sie N *unterscheidbare* klassische harmonische Oszillatoren (Masse m , Frequenz ω) mit Hamiltonfunktion

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right) \quad (1)$$

- a. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T, N)$ 5 Punkte
 (Ergebnis: $Z(T, N) = (k_B T / \hbar \omega)^N$).
- b. Berechnen Sie freie Energie, Entropie und chemisches Potential. 5 Punkte

Hinweis: Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Lösungen stets mit Ihrem **Namen** und mit **Name des Leiters und Nummer Ihrer Übungsgruppe** beschriftet und zusammengeheftet sind.

Es sind keinerlei Hilfsmittel (außer Papier und Schreibmaterial) erlaubt.