

**Normalitätseigenschaften
lokaler Gleichgewichtszustände
in der relativistischen
Quantenfeldtheorie**

Diplomarbeit

vorgelegt von
Elvira Ritz
aus Archangelsk (Rußland)

angefertigt
am Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Gleichgewicht und Nichtgleichgewicht	5
1.2	Die Frage, die wir uns stellen	7
1.3	Aufbau der Arbeit	8
2	Grundlagen und technischer Rahmen	9
2.1	Elemente der Wightman'schen Axiomatik	9
2.2	Abstrakte Feldalgebra und ihre Darstellung	10
2.3	Thermisches Gleichgewicht und Referenzzustände	12
2.3.1	KMS-Zustände	12
2.3.2	Punktfelder und thermische Funktionen	13
2.3.3	Thermische Referenzzustände	14
2.4	Lokales Gleichgewicht	15
3	Das Modell	17
3.1	Das freie skalare masselose Feld	17
3.2	Die Doppelkegel- und die CCR-Algebra	19
3.2.1	Lösung des Cauchy-Problems für glatte Funktionen	21
3.2.2	Zusammenhang zwischen den Algebren	22
3.3	Die Zustände	23
3.3.1	Die Referenzzustände	23
3.3.2	Der Hot-Bang-Zustand	24
3.4	Lokale thermische Observablen	26
3.4.1	Thermodynamische Eigenschaften des Hot-Bang-Zustands	27
4	Lokale Normalität der Hot-Bang-Zustände	29
4.1	Quasi-Äquivalenz von quasifreien Zuständen	30
4.2	Äquivalenz der Topologien	32
4.2.1	Analytizitätseigenschaft des Hot-Bang-Zustands	33
4.2.2	Abschätzung der Hot-Bang-Norm durch die Vakuum-Norm	35
4.3	Spurklasse-Eigenschaft	41
4.3.1	Zustände über der kinematischen Feldalgebra	43

4.3.2	Übergang zum zeitspiegelungsinvarianten Zustand	45
4.3.3	Beweis der Spurklasse-Eigenschaft	49
5	Allgemeine Lokale Gleichgewichtszustände	55
5.1	Was weiß man über die Zweipunktfunktion ?	55
5.1.1	Ortsabhängige Lifts der LG-Zustände zu den Makroobser- vablen als Distributionen	55
5.1.2	Kandidaten für die Zweipunktfunktion	57
5.1.3	Analytizitätseigenschaft bzgl. der Differenzvariablen	61
5.2	Lokale Normalität	63
5.2.1	Übergang zu einem regularisierten Zustand	64
5.2.2	Glattheit des regularisierten Zustands	65
5.2.3	Konsequenz für den Kandidatenzustand	66
6	Zusammenfassung und Ausblick	69
6.1	Zusammenfassung	69
6.2	Ausblick	71
6.2.1	Ortsabhängigkeit der Phasenraumdichte in LG-Zuständen	72
A	Analytizität unter dem Integralzeichen	75
B	Propagator der Wellengleichung	77
C	Liste der Symbole	85

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Gleichgewicht und Nichtgleichgewicht

Es ist konzeptuell vollständig geklärt, wie man die Beschreibung makroskopischer Systeme angeht, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. In der klassischen Statistischen Mechanik haben Boltzmann und Gibbs das Prinzip der maximalen subjektiven Unkenntnis über den Mikrozustand eines Systems mit vielen Teilchen als Kriterium des Gleichgewichts eingeführt. Bei dem Übergang von dem Quanten-Gibbs-Ensemble auf dem Fockraum (wo es keine Zustände mit unendlich vielen Teilchen gibt) zu den unendlichen Systemen hat sich die berühmte KMS-Bedingung als eine modellunabhängige und im Vergleich zu den vorhergehenden Techniken einfache Charakterisierung der thermischen Gleichgewichtszustände herauskristallisiert. Mit dieser Bedingung, die nach den Namen ihrer Autoren Kubo, Martin und Schwinger benannt wurde, sind Systeme im globalen thermodynamischen Gleichgewicht in der Quantenfeldtheorie auf alle interessanten Fragen gut untersucht worden (s. z.B. [Ha96]).

Bei Systemen im thermischen Gleichgewicht handelt es sich allerdings um eine Idealisierung. Es existiert in der Natur kein abgeschlossenes System, das auch noch genug Zeit zum Erreichen der maximalen Entropie gehabt hätte. Und es gibt schon gar nicht die globalen Gleichgewichtszustände, denn wir sind zum Glück da und unsere Welt ist noch weit von der totalen Unordnung und von der Zeittranslationsinvarianz.

Die globalen Gleichgewichtszustände können aber vielleicht als ein hervorragendes Hilfsmittel zur Beschreibung realer physikalischer Systeme dienen, so wie die testende Punktladung vernachlässigbarer Ladungsmenge in der Elektrodynamik, über die man alles weiß und die das zu untersuchende elektromagnetische Feld nie stört (auch nur eine gedankliche Idealisierung).

Obwohl die thermodynamischen Größen nur im Fall vom Gleichgewicht klar definiert sind, wendet man sie experimentell natürlich auch im Leben z.B. bei der Temperatur- oder Druckmessung an, ohne es exakt mathematisch beschreiben zu können. Fachleute in der relativistischen Quantenfeldtheorie haben nun genaue Methoden entwickelt, wie man Systeme, die nur lokal und nur in einer gewissen Nähe des Gleichgewichts sind, thermodynamisch charakterisieren kann:

Buchholz, Ojima und Roos in ihrer Arbeit [BOR02], sowie D.Buchholz in seiner weiterführenden Arbeit [Bu03] haben eine Idee ausgearbeitet, Nichtgleichgewichtszustände durch den Vergleich mit dem Satz aller globalen Gleichgewichtszustände mittels *lokaler* thermischer Observablen auf *lokale* thermische Eigenschaften zu prüfen. Dabei wird die Translationsinvarianz der phasenübergangsfreien KMS-Zustände benutzt: in diesen kann man Messung einer makroskopischen thermischen Observablen durch Messungen in einer beliebig kleinen Zelle des Minkowskiraums ersetzen, die man genügend oft wiederholt, um die aufgrund der Unschärferelation entstehenden Fluktuationen wegzumitteln. Mittelung über die Raumzeit ist bei phasenübergangsfreien Gleichgewichtszuständen äquivalent zu der Mittelung über das Ensemble. Das letztere bettet sich dabei natürlich in den mathematischen Rahmen der Quantentheorie als Bildung eines Erwartungswerts ein. Es ist dabei sogar möglich und bequem, das “Meßgerät” auf einzelne Punkte in der Raumzeit schrumpfen zu lassen, d.h. in der Quantenfeldtheorie zu bestimmten Punktfeldern $\phi(x)$ überzugehen. Solche *lokalen thermischen Observablen* sind nur im Sinne von quadratischen Formen definiert und wir sind von vornherein auf Untersuchungszustände eingeschränkt, die im Definitionsbereich von $\phi(x)$ als quadratischer Formen liegen. Das ist aber physikalisch gesehen keine Einschränkung und hat mit lokal endlicher Energie zu tun (vgl. [BOR02]), was man auch in den KMS-Zuständen immer hat.

Stimmen nun Erwartungswerte in einem zu untersuchenden Nichtgleichgewichtszustand ω für einen bestimmten Satz von lokalen thermischen Observablen \mathcal{S}_x am Punkt x mit deren Erwartungswerten in einem (für all diese lokalen Observablen gleichen) Zustand globalen Gleichgewichts ω_x (i.a. einem Gemisch von solchen) überein, so kann man ω an der Stelle x konsequent die thermischen Eigenschaften von ω_x zuschreiben, die den thermischen Observablen aus \mathcal{S}_x entsprechen. Und je größer die Mächtigkeit von \mathcal{S}_x ist, desto stabiler ist das lokale Gleichgewicht von ω bei x .

Man interessiert sich natürlich für solche Nichtgleichgewichtszustände ω , die im obigen Sinne lokal thermisch charakterisierbar nicht nur an einem isolierten Punkt x im Minkowskiraum, sondern gleich in einer gewissen Umgebung \mathcal{O} sind, und zwar bzgl. derselben Observablenmenge \mathcal{S}_x . Die Referenzzustände werden sich i.a. von Punkt zu Punkt unterscheiden (sonst wäre es ja uninteressant) und mit denen die

Werte der thermischen Parameter. Man könnte dann die Raumzeit-Entwicklung dieser thermischen Charakteristiken von ω beobachten, oder seine Thermodynamik.

1.2 Die Frage, die wir uns stellen

Ein Nichtgleichgewichtszustand ω mit gewissen lokalen thermischen Eigenschaften im oben angedeuteten Sinne wurde in [BOR02] als $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal oder als lokaler Gleichgewichtszustand bezeichnet. In den Arbeiten [BOR02] und [Bu03] wurde die ganze Situation im einfachsten Modell des freien masselosen skalaren Felds ϕ_0 konkretisiert. Dort haben die Autoren auch den linearen Raum der lokalen thermischen Observablen \mathcal{S}_x spezifiziert und die entsprechenden thermischen Funktionen durch Bildung der Erwartungswerte in den KMS-Zuständen ausgerechnet. Die physikalische Bedeutung der Messung solcher lokalen Observablen ist dabei den ersten (in der Hierarchie der wachsenden thermischen Stabilität) sofort abzulesen, wie z.B. die absolute Temperatur zum Quadrat.

Es stellt sich nun die Frage, ob ein beliebiger Zustand ω , der $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal in einem konvexen Gebiet \mathcal{O} mit kompaktem Abschluß innerhalb seines Definitionsgebiets ist, lokal normal bezüglich des Vakuumzustands ist. Das ist gleichbedeutend mit der Frage, ob die Restriktion von ω auf die freie Feldalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ im entsprechenden lokalen Fockraum liegt, was unter anderem lokal endliche Energie- und Teilchendichte für ω als Konsequenz hätte. Im Fall, dass ω diese Eigenschaft (der lokalen Normalität) besitzt, wird er daher als physikalisch angesehen.

Einen in der algebraischen Formulierung angegebenen Zustand im lokalen Fockraum zu suchen wäre eine mühsame Aufgabe, aber zum Glück haben Araki und Yamagami in ihrer Arbeit [AY82] ein mathematisches Kriterium für die Existenz eines solchen lokalen Fockraum-Analogons formuliert. Im Fall eines konkret konstruierten Zustands, der aufgrund seiner lokalen thermischen Eigenschaften ein Hot-Bang-Zustand genannt wurde ([BOR02]), konnten wir die lokale Normalität durch Anwendung des Theorems von Araki-Yamagami mit den von D.Buchholz entwickelten Methoden sowie einer Idee aus der Arbeit [Ver94] beweisen.

Ein schwierigeres Problem ist es allerdings, eine hinreichende Bedingung für die allgemeinen lokalen Gleichgewichtszustände zu finden, damit sie physikalisch sind. Da außer der Bedingung der $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität nicht viel über diese Zustände auf der freien Algebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ bekannt ist, wurde von D.Buchholz eine Kandidatur für deren Zweipunktfunktion in [Bu03] vorgeschlagen. Für diese haben wir dann unter Verwendung der in der Arbeit [Bu03] (unter anderem) entwickelten Tricks eine hinreichende Bedingung für die lokale Normalität bzgl. des Vakuumzustands aufstellen können. Wir haben auch gesehen, unter welcher zusätzlichen Bedingung

an einen allgemeinen lokalen Gleichgewichtszustand seine Zweipunktfunktion in der von D.Buchholz vorgeschlagenen Form sein wird.

Es gibt noch viele weitere Ideen zur Beantwortung der oben formulierten Fragen ([Bu]), die wir aus Zeitgründen nicht mehr bearbeiten konnten.

1.3 Aufbau der Arbeit

Im zweiten Kapitel stellen wir den technischen Rahmen des von uns benutzten Formalismus der relativistischen Quantenfeldtheorie nach [SW64], [Ha96], [BOR02], sowie die in [BOR02] und [Bu03] entwickelte Charakterisierung der lokalen Gleichgewichtszustände modellunabhängig vor.

Im Kapitel 3 gehen wir dann im Modell des freien skalaren masselosen Felds (nach [BS76],[BOR02]) konkret auf die lokalen Feldalgebren in zwei verschiedenen Formulierungen ein: zum einen im vierdimensionalen Minkowskiraum, zum anderen kinematisch zur Zeit Null. Wir besprechen deren Zusammenhang untereinander, den wir mehrmals in der Arbeit gebrauchen, und stützen uns dabei auf die Arbeit [Dim80]. Weiterhin werden die Gleichgewichtszustände im Modell kurz vorgestellt (die als Referenzzustände dienen), der Hot-Bang-Zustand sowie die lokalen thermischen Observablen besprochen ([BOR02],[Bu03]).

Im vierten Kapitel formulieren wir dann die Fragestellung der lokalen Normalität ([Bu],[Ar99]), stellen das Kriterium von Araki-Yamagami für die Quasi-Äquivalenz der quasifreien Zustände ausführlich vor ([AS71],[AY82]), um es dann auf das Zustandspaar ω_{hb} und ω_∞ auf einer lokalen Feldalgebra anzuwenden. Dabei haben wir uns bei dem Beweis der Äquivalenz der Topologien auf die Hauptidee von R.Verch in [Ver94] gestützt, und bei dem Beweis des zweiten Punkts des Theorems auf mehrere Ideen und Vorschläge von D.Buchholz.

Im Kapitel 5 besprechen wir die allgemeinen lokalen Gleichgewichtszustände im Hinblick auf die Eigenschaft der lokalen Normalität bezüglich des Vakuumzustands auf der Grundlage der Arbeit [Bu03].

Im sechsten Kapitel geben wir eine Zusammenfassung unserer Ergebnisse und Erkenntnisse sowie einen Ausblick über mögliche andere Ansätze bei der Behandlung dieser interessanten Problematik ([Bu]).

Zwei ausführliche mathematische Herleitungen für wohl bekannte, jedoch für uns neue nützliche Tatsachen wurden vollständigshalber in den Anhängen ausgeführt. Als Leitfaden wurden im Anhang A [Bu] und im Anhang B [BS76] benutzt.

Kapitel 2

Grundlagen und technischer Rahmen

Die Beschreibung von Systemen, die nur lokal gewisse thermische Interpretation zulassen, wurde von Buchholz, Ojima und Roos ([BOR02]) im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie entwickelt.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, sind die Basisobjekte in dieser Analyse lokal observable Felder, die generisch als $\phi(x)$ bezeichnet werden. Quantenfelder am Punkt sind aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation ganz singuläre Objekte, die nur im Sinne von quadratischen Formen auf geeigneten Domänen (in einem Hilbertraum im Wightman'schen Formalismus bzw. in der Menge der Zustände im algebraischen Zugang, s. unten) definiert sind. Gewöhnlicherweise mittelt man die Punktfelder $\phi(x)$ daher mit Testfunktionen f , die kompakten Träger im Minkowskiraum haben:

$$\phi(f) := \int dx f(x) \phi(x) . \quad (2.1)$$

Mit diesen Objekten, die in der Wightman'schen Formulierung operatorwertige Distributionen mit einem für alle f gemeinsamen stabilen dichten Definitionsbereich des unterliegenden Hilbertraums darstellen, kann man besser arbeiten.

Hier werden diejenigen Wightman'schen Postulate der relativistischen QFT ([SW64]) aufgelistet, die wir in unserer Arbeit benutzen:

2.1 Elemente der Wightman'schen Axiomatik

Es ist ein Hilbertraum \mathcal{H} gegeben. Unter einem lokal observablen Quantenfeld ϕ versteht man folgendes ($\mathcal{M} := \mathbb{R}^4$ soll der Minkowskiraum und $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ der Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in \mathcal{M} , der Testfunktionen, sein):

1. ϕ ist eine operatorwertige Distribution über $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. D.h. $\phi(f)$ sind (i.a. unbeschränkte) Operatoren auf einem für alle $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ gemeinsamen dichten Definitionsbereich $D \subset \mathcal{H}$ mit Matrixelementen

$$\langle \psi, \phi(f)\psi' \rangle, \quad \psi, \psi' \in D \quad (2.2)$$

aus $\mathcal{D}(\mathcal{M})'$.

2. D ist invariant unter der Wirkung von $\phi(f)$.
3. Die adjungierten Operatoren erhält man durch komplexe Konjugation der Testfunktionen im Ortsraum:

$$\phi(f)^* = \phi(\bar{f}) \quad \text{auf } D. \quad (2.3)$$

4. Es gilt die Lokalität :

$$[\phi(f), \phi(g)] = 0 \quad \text{auf } D \quad \text{für } \text{supp}(f) \times \text{supp}(g). \quad (2.4)$$

Aus den $\phi(f)$ und dem 1-Operator auf \mathcal{H} erzeugt man nun polynomial eine *-Algebra \mathcal{P} (das geht dank 2).

Die Eigenschaft, operatorwertige Distribution zu sein, setzt sich auf \mathcal{P} fort:

$$\langle \psi, \phi(f_1) \cdots \phi(f_n)\psi' \rangle, \quad \psi, \psi' \in D, \quad (2.5)$$

ist aufgrund 1, 2, 2.3 eine Distribution aus $\mathcal{D}(\mathcal{M})'$ in jedem Argument f_j , $j = 1, \dots, n$. Es folgt nach dem Satz vom Kern

$$\begin{aligned} \exists \quad T \in \mathcal{D}(\mathcal{M}^n)' \quad \text{mit} \\ \langle \psi, \phi(f_1) \cdots \phi(f_n)\psi' \rangle = T(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n). \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Abstrakte Feldalgebra und ihre Darstellung

Da in dieser Arbeit eine große Klasse von Zuständen vorkommt, sehen wir von einem Hilbertraum im voraus ab und betrachten eine abstrakte Feldalgebra \mathcal{P} (vgl. [BOR02], sowie [Ha96]).

Sie wird von den Elementen $\phi(f)$, linear in $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, und einem 1-Element erzeugt. Weiterhin ist \mathcal{P} eine *-Algebra mit der Adjungiertenbildung gemäß (da Felder observabel sein sollen):

$$\begin{aligned} \phi(f)^* &= \phi(\bar{f}) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), \\ (A + A')^* &= A^* + A'^*, \\ (AA')^* &= A'^* A^* \quad \text{für } A \in \mathcal{P} \quad \text{sowie} \\ 1^* &= 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die eigentliche orthochrone Poincaré-Gruppe \mathcal{P}_+^\uparrow (vgl. z.B. [RJo65]) mit den Elementen $\lambda = (\Lambda, a)$ ist auf \mathcal{P} durch Automorphismen α_λ dargestellt:

$$\alpha_\lambda(\phi(f)) := \phi(f_\lambda) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), \quad (2.8)$$

wobei $f_\lambda(x) := D(\lambda) f(\lambda^{-1}x)$ mit der Matrixdarstellung D von \mathcal{P}_+^\uparrow , die dem Tensorcharakter des Quantenfelds ϕ entspricht.

Die Zustände werden als lineare positive Funktionale auf der Algebra definiert gemäß:

Definition 2.1. Eine lineare Abbildung $\omega : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ heißt Zustand, falls es gilt:

- $\omega(A^*A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{P} \quad (\text{Positivität})$
- $\omega(1) = 1$

Aus dieser Definition folgt $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$ (vgl. [Bu85]). Somit ist ein Zustand auf \mathcal{P} ein reellwertiges Funktional auf den selbstadjungierten Elementen von \mathcal{P} mit nichtnegativen Schwankungsquadraten, sodaß physikalische Interpretation möglich ist.

Zustände ω , die hier betrachtet werden, besitzen zusätzlich folgende Stetigkeitseigenschaft: der Ausdruck

$$\omega(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)) \quad \text{für } f_1, \dots, f_n \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad (2.9)$$

soll Einschränkung einer Distribution $T \in \mathcal{D}(\mathcal{M}^n)'$ auf $\mathcal{D}(\mathcal{M})^{\otimes n}$ sein. Man benutzt für solche Zustände die suggestive Schreibweise

$$\omega(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)) = T(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \quad (2.10)$$

$$=: \int dx_1 \cdots dx_n f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \omega(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) \quad (2.11)$$

und nennt $\omega(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n))$ die *n-Punktfunktion des Zustands* ω . Die Bezeichnung wird auch für die Abbildung $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \mapsto \omega(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n))$ verwendet.

Jeder Zustand ω induziert eine Darstellung π_ω von \mathcal{P} auf einem Hilbertraum \mathcal{H}_ω mit einem Vektor $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$, der dem Zustand ω entspricht: $\langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A) \Omega_\omega \rangle = \omega(A)$ für $A \in \mathcal{P}$. Ω_ω ist ein zyklischer Vektor, d.h.

$$D_\omega := \pi_\omega(\mathcal{P}) \Omega_\omega \quad (2.12)$$

ist dicht in \mathcal{H}_ω . Das ist die GNS-Konstruktion $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$, die auf Gelfand, Naimark und Segal zurückgeht, s. z.B. [Ha96].

In der GNS-Darstellung werden die Elemente von \mathcal{P} zu operatorwertigen Distributionen (falls (2.10) vorausgesetzt wird, wie hier) mit dem gemeinsamen dichten Definitionsbereich D_ω .

Wir werden in unserer Arbeit mit Unteralgebren $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ der globalen Algebra \mathcal{P} zu tun haben, die von den Feldern $\phi(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ erzeugt werden. Wir werden nämlich Restriktionen der Zustände auf lokale Algebren zu $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ mit kompaktem Abschluß innerhalb des Definitionsgebiets des jeweiligen Zustands studieren, erstens weil unsere Zustände i.a. nicht im ganzen Minkowskiraum leben und zweitens weil wir nur an deren lokalen Eigenschaften interessiert sind.

2.3 Thermisches Gleichgewicht und Referenzzustände

2.3.1 KMS-Zustände

Das für den Rest dieses Kapitels Folgende basiert auf den Arbeiten [BOR02] und [Bu03].

Wie in der Einleitung schon angedeutet wurde, nehmen hier die Zustände globalen Gleichgewichts als Vergleichszustände für die Nichtgleichgewichtszustände einen ganz wichtigen Platz ein. Wie es auch schon erwähnt wurde, sind diese durch die Kubo-Martin-Schwinger-Bedingung charakterisiert. Da die Gleichgewichtszustände gewöhnlich in ihrem Ruhesystem betrachtet werden, ein Nichtgleichgewichtszustand allerdings an verschiedenen Punkten in seinem Definitionsgebiet i.a. unterschiedliche Geschwindigkeiten bezüglich eines fest gewählten Inertialsystems haben kann (z.B. ein hydrodynamischer Fluß), sollten wir zu jedem Gleichgewichtszustand auch all seine Lorentz-transformierten Zustände in unsere Menge der Referenzzustände dazunehmen.

Da man den Übergang von einem Laborsystem zu einem anderen Inertialsystem mit Hilfe der Elemente der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe $\lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ erhält, sind die transformierten Systeme durch normierte Vektoren aus dem Vorwärtslichtkegel, der positiv zeitartigen Teilmenge des Minkowskiraums:

$$V_+ := \{x \in \mathcal{M} : x^2 > 0, x_0 > 0\} \quad (2.13)$$

festgenagelt (vgl. z.B. [RJo65]).

Zu einem normierten Vektor $e \in V_+$, der das Bezugssystem definiert, lautet die KMS-Bedingung:

Definition 2.2. Ein Zustand ω_β auf \mathcal{P} genügt der KMS-Bedingung bei der inversen Temperatur $\beta > 0$ in dem gegebenen Lorentzsystem, falls es zu jedem Paar von Operatoren $A, B \in \mathcal{P}$ eine Funktion h gibt, die analytisch im Streifen $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \beta\}$ und stetig an seinen Rändern ist, sodass gilt:

$$h(t) = \omega_\beta(B \alpha_{te}(A)), \quad h(t + i\beta) = \omega_\beta(\alpha_{te}(A) B), \quad \text{für } t \in \mathbb{R} .$$

Solch ein Zustand heißt dann *ein KMS-Zustand*.

Da wir beide Parameter eines KMS-Zustands e und β wissen müssen, um ihn als Referenzzustand zu benutzen, vereinigen wir beide in einem Vierervektor $\beta \in V_+$ mit der Richtung von e , dessen Betrag gleich der inversen Temperatur ist.

Für die Zwecke im Kontext der oben genannten Arbeiten ist es erlaubt und bequem, die Phasenübergänge bei den Gleichgewichtszuständen auszuschließen, also deren Eindeutigkeit anzunehmen. Es folgt daraus (und aus der Definition) eine einfache Formel für den Poincaré-transformierten KMS-Zustand:

$$\omega_\beta \circ \alpha_\lambda^{-1} = \omega_{\Lambda\beta} . \tag{2.14}$$

Folglich sind die KMS-Zustände, die hier betrachtet werden, nicht nur translationsinvariant in der Zeitrichtung, sondern invariant unter allen Raumzeit-Translationen.

Man nimmt (zur Erleichterung der mathematischen Beschreibung) schwache Stetigkeit der KMS-Zustände in β an, d.h. für jedes $A \in \mathcal{P}$ ist die Funktion

$$\beta \mapsto \omega_\beta(A) \tag{2.15}$$

stetig. Da Phasenübergänge ausgeschlossen werden, erwartet man, dass diese Eigenschaft ganz allgemein gilt.

2.3.2 Punktfelder und thermische Funktionen

Wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, ist es für die in den Arbeiten [BOR02] und [Bu03] entwickelte Analyse der lokalen Gleichgewichtszustände nützlich, auch die nichtregularisierten Felder $\phi(x)$ zu betrachten. Diese sind im Sinne von quadratischen Formen zu verstehen.

Aufgrund der Translationsinvarianz hängt der Erwartungswert $\omega_\beta(\phi(f))$ nicht von der Testfunktion ab, solange deren Integral über den Minkowskiraum gleich bleibt. Man kann also die KMS-Zustände wie folgt auf die Punktfelder $\phi(x)$ fortsetzen:

$$\omega_\beta(\phi(x)) := \omega_\beta(\phi(f)) , \tag{2.16}$$

wobei f eine beliebige Testfunktion ist, deren Raum-Zeit-Integral gleich 1 ist. Dieser Ausdruck hängt nicht von x ab. Der von den Feldern $\phi(x)$ (quadratischen Formen) an der Stelle x erzeugte Vektorraum wird mit \mathcal{Q}_x bezeichnet. Man geht davon aus, dass alle im Kontext der oben genannten Arbeiten interessierenden Zustände auf die Räume \mathcal{Q}_x (in einem vom Zustand abhängigen Gebiet des Minkowskiraums) fortgesetzt werden können.

Es ist von zentraler Wichtigkeit, dass die lokalen Felder $\phi(x)$ die gleiche Information über die KMS-Zustände liefern, wie bestimmte makroskopische Observablen. Sei f_n eine Folge von Testfunktionen mit Integral 1, deren Träger im kausalen Komplement von jedem gegebenen beschränkten Gebiet des Minkowskiraums für fast alle n liegt. Wie in [Bu03] gezeigt wird, existiert in allen Gleichgewichtszuständen der Limes

$$\Phi := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(f_n) \quad (2.17)$$

und definiert eine makroskopische Observable. Folglich stimmt die Messung der Punktfelder $\phi(x)$ in einem Zustand globalen Gleichgewichts gemäß (2.16) mit der Messung der entsprechenden makroskopischen Observablen Φ überein:

$$\omega_\beta(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta(\phi(f_n)) = \omega_\beta(\phi(x)) = \omega_\beta(\phi(0)) . \quad (2.18)$$

Die zugehörigen (nach (2.15) stetigen) Funktionen

$$\beta \longmapsto \Phi(\beta) := \omega_\beta(\phi(0)) \quad (2.19)$$

werden als thermische Funktionen bezeichnet.

2.3.3 Thermische Referenzzustände

Für den Vergleich der Nichtgleichgewichtszustände lokal mit der Gleichgewichtssituation reichen die Temperaturzustände i.a. nicht aus, man braucht auch deren Gemische. Für kompakte Teilmengen B von V_+ läßt sich jedes Gemisch in der Form

$$\omega_B(A) = \int_B d\rho(\beta) \omega_\beta(A), \quad A \in \mathcal{P} \quad (2.20)$$

schreiben, wobei ρ ein positives normiertes Maß mit dem Träger in B ist. Die konvexe Menge solcher Zustände wird als \mathcal{C}_B bezeichnet und die Vereinigung über alle B wie oben bildet die Menge der Referenzzustände \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} := \bigcup \mathcal{C}_B . \quad (2.21)$$

Die Zustände $\omega_B \in \mathcal{C}$ setzt man analog zu den Temperaturzuständen auf die Punktfelder fort (f ist dabei eine beliebige Testfunktion mit Integral 1):

$$\omega_B(\phi(x)) := \int_B d\rho(\beta) \omega_\beta(\phi(x)) = \omega_B(\phi(f)) , \quad (2.22)$$

sodass ebenfalls folgt:

$$\omega_B(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_B(\phi(f_n)) = \omega_B(\phi(x)) = \omega_B(\phi(0)) . \quad (2.23)$$

2.4 Lokale thermische Eigenschaften der Nichtgleichgewichtszustände

Es ist sinnvoll, einen Nichtgleichgewichtszustand ω am Punkt zu untersuchen, sodass keine Mittelung über i.a. verschiedene Referenzzustände stattfindet, die die Information etwas verwischen würde (Nichtgleichgewichtszustände sind ja normalerweise nicht translationsinvariant). Dazu dienen die lokalen Observablen aus den Räumen \mathcal{Q}_x , s. Abschnitt 2.3.2.

Die Bedeutung von $\omega(\phi(x))$ ist a priori nicht klar, denn nur in den Zuständen globalen Gleichgewichts (und deren Gemischen) ist das equivalent zur Messung der entsprechenden makroskopischen Observablen (s. (2.23)). Deshalb vergleicht man $\omega(\phi(x))$ mit $\omega_B(\phi(x))$ für alle $\omega_B \in \mathcal{C}$ und falls man einen Referenzzustand ω_{B_x} findet, der auf einem geeigneten linearen Teilraum \mathcal{S}_x der Punktobservablen mit ω übereinstimmt, so kennt man die physikalische Bedeutung der Messung von $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$ in ω , nämlich

$$\omega(\phi(x)) = \omega_{B_x}(\phi(x)) = \omega_{B_x}(\Phi) \quad \text{für} \quad \phi(x) \in \mathcal{S}_x . \quad (2.24)$$

Da beide Zustände auf \mathcal{S}_x nicht zu unterscheiden sind, kann man diese Interpretation konsistent auf ω übertragen. Da der Zustand i.a. nicht translationsinvariant ist, mag er an einem anderen Punkt x' mit einem anderen Referenzzustand $\omega_{B_{x'}}$ übereinstimmen:

$$\omega(\Phi)(x) := \omega(\phi(x)) \quad \text{für} \quad \phi(x) \in \mathcal{S}_x . \quad (2.25)$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als Lift von ω an der Stelle x zu dem Raum der Makroobservablen Φ mit $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$.

Man nennt solch einen Zustand (für den (2.24) gilt) \mathcal{S}_x -thermal. Ist ein Zustand ω \mathcal{S}_x -thermal für jedes x aus einem Gebiet \mathcal{O} des Minkowskiraums, so heißt er $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal. Die Funktion $x \mapsto \omega(\Phi)(x)$ beschreibt in diesem Fall das Raumzeit-Verhalten der Erwartungswerte der entsprechenden Makroobservablen Φ in ω .

Nichtgleichgewichtszustände mit lokalen thermischen Eigenschaften in diesem Sinne werden i.f. als lokale Gleichgewichtszustände (kurz: LG-Zustände) bezeichnet.

Kapitel 3

Das Modell

Für den Rest dieser Arbeit wird das freie skalare masselose Feld ϕ_0 betrachtet. Von diesem einfachen Modell erwartet man physikalisch relevante Aussagen, da Systeme betrachtet werden, die lokal im Gleichgewicht bei hohen Temperaturen sind, sodass Wechselwirkung sowie Ruhemasse keine entscheidende Rolle spielen (vgl. [Bu03]).

Die von $\phi_0(f)$ erzeugte Feldalgebra wird als \mathcal{P}_0 bezeichnet, sie unterscheidet sich von \mathcal{P} (s. vorhergehendes Kapitel) durch zusätzliche algebraische Relationen des freien Felds. Die eigentliche orthochrone Poincaré-Gruppe \mathcal{P}_+^\uparrow ist auf \mathcal{P}_0 durch Automorphismen α_λ zu $\lambda = (\Lambda, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ dargestellt, die wegen des skalaren Charakters von ϕ_0 wie folgt wirken (vgl. (2.8)):

$$\alpha_{\Lambda, a}(\phi_0(x)) = \phi_0(\Lambda x + a) . \quad (3.1)$$

3.1 Das freie skalare masselose Feld

Das freie skalare masselose Feld $\phi_0(x)$ ist charakterisiert durch seine Feldgleichung (die Klein-Gordon-Gl. zu $m = 0$, d.h. die Wellengleichung):

$$\square \phi_0(x) = 0, \quad \square = \partial_{x_0}^2 - \Delta_{\vec{x}} \quad (3.2)$$

und die bosonische Kommutatorrelation :

$$[\phi_0(x), \phi_0(y)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp e^{-i(x-y)p} \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \cdot 1 = \frac{1}{i} D(x-y) \cdot 1 . \quad (3.3)$$

(vgl. z.B. [BS76].)

Beides ist in einem Zustand gemäß (2.10) im Sinne von Distributionen zu verstehen. Dabei ist die Kommutatorfunktion

$$D(x) := \frac{i}{(2\pi)^3} \int dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) e^{-ipx} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \{e^{-ipx} - e^{ipx}\} \quad (3.4)$$

ein Element von $\mathcal{D}(\mathcal{M})'$ mit ($\underline{p} := (|\vec{p}|, \vec{p})$)

$$D(f) = \int dx \overline{D(x)} f(x) = \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \{ \tilde{f}(-\underline{p}) - \tilde{f}(\underline{p}) \} \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}). \quad (3.5)$$

Um die sehr wichtige Trägereigenschaft der Kommutatorfunktion zu formulieren, braucht neben dem Vorwärtslichtkegel V_+ (s. (2.13)) auch den Rückwärtslichtkegel V_- , die negativ zeitartige Teilmenge des Minkowskiraums:

$$V_- := \{x \in \mathcal{M} : x^2 > 0, x_0 < 0\}. \quad (3.6)$$

Aus der Lorentzinvarianz der Kommutatorfunktion und $D(-x) = -D(x)$ ersieht man, daß $D = 0$ auf den Testfunktionen mit dem Träger im raumartigen Bereich $\mathcal{M} \setminus (\overline{V}_+ \cup \overline{V}_-)$ des Minkowskiraums ist, sodass gilt:

$$\text{supp}(D) \subset (\overline{V}_+ \cup \overline{V}_-). \quad (3.7)$$

In der GNS-Darstellung eines Zustands ω erhält man aus (3.2) und (3.3) entsprechende Operatorgleichungen auf dem dichten Teilraum $D_\omega \subset \mathcal{H}_\omega$, vgl. (2.12):

Gemäß 2.1.1 bedeutet die Gleichung (3.2) i.S.v.D. folgendes (unter $A \in \mathcal{P}_0$ sind stets die Darsteller $\pi_\omega(A)$ zu verstehen):

$$\begin{aligned} \square \phi_0(x) = 0 & \quad \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \quad \langle \psi, \phi_0(\square f) \psi' \rangle = 0 \quad \forall \psi, \psi' \in D_\omega, \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \\ & \iff \quad \phi_0(\square f) = 0 \quad \text{auf } D_\omega, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die zweite Äquivalenz gilt, da D_ω dicht in \mathcal{H} ist.

Analog versteht man unter (3.3) gemäß (2.6) folgendes:

$$\langle \psi | [\phi_0(\overline{f}), \phi_0(g)] \psi' \rangle = \int dx dy \overline{f}(x) g(y) \langle \psi | [\phi_0(x), \phi_0(y)] \psi' \rangle \quad (3.9)$$

$$= \langle \psi | \frac{1}{i} \int dx dy \overline{f}(x) g(y) D(x-y) \cdot 1 \psi' \rangle$$

$$\forall \psi, \psi' \in D_\omega, \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), \quad (3.10)$$

wobei der Kern der Distribution in der suggestiven Schreibweise von (3.9) nur formal (da naheliegend) als Skalarprodukt geschrieben wird. Wie oben, ist die Gleichung (3.10) äquivalent zu der Gleichheit von Operatoren auf D_ω :

$$\begin{aligned} [\phi_0(\overline{f}), \phi_0(g)] &= \frac{1}{i} \int dx \overline{f}(x) (D * g)(x) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{i} \int dx \overline{f}(x) (Eg)(x) \cdot 1 =: \kappa(f, g) \cdot 1 \\ & \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

E ist dabei der Propagator der Wellengleichung, s. Anhang B, und

$$\begin{aligned}\kappa(f, g) &= i \int dx (E\bar{f})(x)g(x) \\ &= \pi \int \frac{d^3p}{|\underline{p}|} \left\{ \overline{\tilde{f}(\underline{p})} \tilde{g}(\underline{p}) - \overline{\tilde{f}(-\underline{p})} \tilde{g}(-\underline{p}) \right\} \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\end{aligned}\quad (3.12)$$

ist die Kommutatorform, eine hermitesche Form mit der Eigenschaft $\kappa(\bar{f}, \bar{g}) = -\kappa(g, f)$.

Da die Gleichungen (3.8) und (3.11) in der GNS-Darstellung eines beliebigen (stetigen) Zustands gelten, betrachtet man sie als Relationen auf der abstrakten Algebra \mathcal{P}_0 .

3.2 Der Zusammenhang zwischen der Doppelkegelalgebra und der CCR-Algebra der Basis

In dieser Arbeit wird häufig eine lokale Feldalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ betrachtet, die polynomial aus $\phi_0(f)$ mit $\text{supp}(f) \subset \mathcal{O}$ und 1 erzeugt wird (mit den algebraischen Relationen wie unter 3.1), wobei $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ der kausale Abschluß einer offenen Kugel $O \subset \mathbb{R}^3$ um den Ursprung der Hyperebene $x^0 = 0$ des Minkowskiraumes ist:

$$\mathcal{O} := O'' , \quad O := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| < R < \infty\} . \quad (3.13)$$

Dabei bezeichnet man für $K \subset \mathcal{M}$ mit K' das kausale Komplement von K in \mathcal{M} :

$$K' = \mathcal{M} \setminus J(K) . \quad (3.14)$$

$J(K) = J^+(K) \cup J^-(K)$ und $J^\pm(K)$ steht für die Zukunft, bzw. Vergangenheit, von $K \subset \mathcal{M}$, d.h. für jene Punktmenge in \mathcal{M} , die von den von K ausgehenden kausalen (d.h. zeitartigen) zukunfts- bzw. vergangenheitsgerichteten Kurven erreicht werden.

\mathcal{O} nennt man einen *Doppelkegel* mit der Basis O . Wie in Abb.3.1 zu sehen ist, liegt \mathcal{O} innerhalb eines geeignet in Zeit-Richtung verschobenen Vorwärtslichtkegels:

$$V_+^{t_0} := V_+ - t_0 \quad \text{für } t_0 > 0 . \quad (3.15)$$

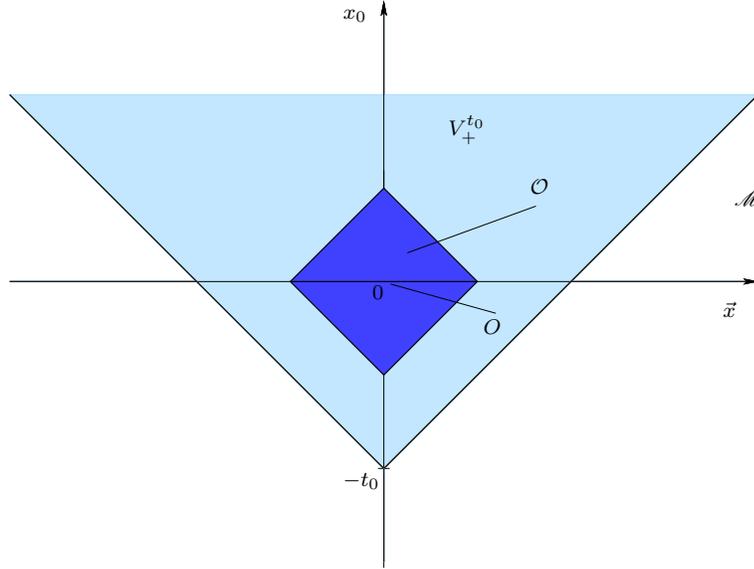


Abbildung 3.1: Die Grundgeometrie.

Als Lösung der Wellengleichung (3.2), die eine Differentialgleichung 2.Odnung ist, ist ϕ_0 durch die Zeit-0-Felder (erstmal formal)

$$\varphi(\vec{x}) = \phi_0(0, \vec{x}) \quad \text{und} \quad \pi(\vec{y}) = \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \phi_0(y_0, \vec{y}) \right)_{y_0=0} \quad (3.16)$$

als Anfangsdaten für das Cauchy-Problem (s. z.B.[Dim80]) festgelegt.

φ und π genügen i.S.v.D. den kanonischen Kommutatorrelationen (vgl. (3.3)):

$$[\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0, \quad (3.17)$$

$$[\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \cdot 1. \quad (3.18)$$

Man erzeugt aus den (abstrakten) Elementen 1 und $\varphi(f)$, $\pi(g)$, die linear in $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ sind, und deren Adjungierten $\varphi(f)^*$, $\pi(g)^*$ polynomial eine *-Algebra. Mit den algebraischen Relationen

$$\varphi(f)^* = \varphi(\bar{f}), \quad \pi(g)^* = \pi(\bar{g}) \quad \text{sowie} \quad (3.19)$$

$$[\varphi(f), \varphi(g)] = [\pi(f), \pi(g)] = 0 \quad \text{und} \quad (3.20)$$

$$[\varphi(f), \pi(g)] = i \int d^3x f(\vec{x})g(\vec{x}) \cdot 1 \quad (3.21)$$

wird sie zur *-Algebra der kanonischen Kommutatorrelationen (3.20)-(3.21), der CCR-Algebra über $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, die wir $\mathcal{Q}(\mathcal{O})$ nennen.

Da es einen technischen Vorteil bringt, wollen wir den Feldoperator (in einer Darstellung) $\phi_0(h)$ mit $h \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ durch die CCR-Algebra Elemente $\varphi(f)$ und

$\pi(g)$ mit geeigneten $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ ausdrücken. Dafür sehen wir uns die Lösung der Wellengleichung zuerst für Funktionen aus $C^\infty(\mathcal{O})$ an und übertragen dann das Ergebnis auf das Feld ϕ_0 als operatorwertige Distribution (s. z.B. [Dim80]).

3.2.1 Lösung des Cauchy-Problems für glatte Funktionen

Möchte man im Minkowskiraum oder einer Teilraumzeit $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ eine Funktion $u \in C^\infty(\mathcal{V})$ mit der Zeitentwicklung gemäß der Gleichung

$$\square u = 0 \tag{3.22}$$

bestimmen, so ist die Angabe von Anfangsbedingungen für u nur auf Hyperflächen $S \subset \mathcal{V}$ sinnvoll, die folgender Definition genügen:

Definition 3.3. *Eine raumartige Hyperfläche S in \mathcal{V} wird als Cauchy-Fläche bezeichnet, falls sie von jeder unendlich ausgedehnten kausalen Kurve genau einmal geschnitten wird.*

Beispiele:

- für $\mathcal{M} : S = \{x \in \mathcal{M} : x_0 = 0\}$;
- für den Vorwärtslichtkegel $V_+ : H_m^+ = \{x \in V_+ : x^2 = m^2\}$, die obere Massenschale zur Masse m ;
- für den Doppelkegel \mathcal{O} (s. (3.13)) : die Basis \mathcal{O} .

Wir werden hier das letzte Beispiel einer (global hyperbolischen, d.h. Cauchy-Flächen besitzenden) Raumzeit gebrauchen, weil wir nur an einer (erstmal beliebigen) Doppelkegelalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ interessiert sind, d.h. die Testfunktionen sind aus $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Das ganze geht natürlich analog im Fall des ganzen Minkowskiraums \mathcal{M} statt der zweckbegründeten Wahl von $\mathcal{V} = \mathcal{O}$.

Bekannterweise besitzt (3.22) zu beliebigen Funktionen $u_0, u_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ eine eindeutige Lösung $u \in C^\infty(\mathcal{O})$ mit $u(0, \vec{x}) = u_0(\vec{x})$ und $\partial_{x_0} u(0, \vec{x}) = u_1(\vec{x})$ (vgl. z.B. [Dim80]).

Wir führen zur Abkürzung der Schreibweise lineare Operatoren ein, die die Anfangsdaten zurückgeben:

$$\begin{aligned} \rho_0 : C^\infty(\mathcal{O}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{O}) \\ u(x) &\longmapsto u(0, \vec{x}), \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 : C^\infty(\mathcal{O}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{O}) \\ u(x) &\longmapsto \partial_{x_0} u(0, \vec{x}). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Als $C^\infty(\mathcal{O})$ -Funktion ist eine Lösung u der Gleichung (3.22) zu den Anfangsbedingungen u_0, u_1 eine reguläre Distribution auf dem Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Sie ist explizit gegeben durch (vgl. Korollar 1.1 bei [Dim80])

$$u(f) = u_0(\rho_1 E f) - u_1(\rho_0 E f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) \quad (3.25)$$

mit dem Propagator E , s. Anhang B.

3.2.2 Zusammenhang zwischen den Algebren

Es sei eine Darstellung der CCR-Algebra $\mathcal{Q}(O)$, die am Anfang des Abschnitts 3.2 definiert wurde, auf einem Hilbertraum \mathcal{H} gegeben. Man kann sie als Cauchy-Daten zur Lösung der Wellengleichung (3.2) für ϕ_0 als operatorwertige Distribution nehmen und in Analogie zu (3.25) auf einem dichten Bereich $D \subset \mathcal{H}$ folgende Operatoren definieren (vgl. Satz 1 in [Dim80]):

$$\phi_0(h) := \varphi(\rho_1 E h) + \pi(-\rho_0 E h) = \varphi(f) + \pi(g) \quad \forall h \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \quad (3.26)$$

(Bem.: Aufgrund der Trägereigenschaft des Propagators gemäß der Definition (B.1)-(B.2) im Anhang B sind $f, g \in \mathcal{D}(O)$.)

Die so definierten Operatoren haben alle Eigenschaften der Elemente von $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ (auf D), insbesondere:

$$\phi_0(\square f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \quad (3.27)$$

$$[\phi_0(\bar{f}), \phi_0(g)] = \frac{1}{i} \int dx \bar{f}(x)(Eg)(x) \cdot 1 \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \quad (3.28)$$

Das bedeutet, dass die CCR-Algebra $\mathcal{Q}(O)$ die richtige Wahl der Anfangsdaten für $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ ist und wir einen Algebrenhomomorphismus haben, der die algebraischen Relationen respektiert:

$$\sigma : \mathcal{P}_0(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{Q}(O) \quad (3.29)$$

$$\phi_0(h) \longmapsto \varphi(\rho_1 E h) + \pi(-\rho_0 E h), \quad (3.30)$$

$$1 \longmapsto 1. \quad (3.31)$$

Zu jedem Paar $f, g \in \mathcal{D}(O)$, die ja eine eindeutige Lösung der Wellengleichung u zu den Cauchy-Daten

$$\rho_0 u = -g \quad \text{und} \quad \rho_1 u = f \quad (3.32)$$

mit sich bringen, existiert ein $h \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, das $u = E h$ erfüllt (vgl. Lemma A.3 in [Dim80]). Bis auf $\ker E$ ist dieses h eindeutig. Aufgrund der Beziehung

ker $E = \text{Ran} \square$ sowie (3.27) bedeutet das nach (3.30) die Existenz einer Umkehrabbildung:

$$\sigma^{-1} : \quad \mathcal{Q}(O) \longrightarrow \mathcal{P}_0(\mathcal{O}) \quad (3.33)$$

$$\varphi(f) + \pi(g) \longmapsto \phi_0(h) , \quad (3.34)$$

$$1 \longmapsto 1 . \quad (3.35)$$

Somit sind die Algebren $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ und $\mathcal{Q}(O)$ isomorph gemäß σ .

3.3 Die Zustände über der freien Feldalgebra

Definition 3.4. Ein Zustand ω auf \mathcal{P}_0 heißt quasi-frei, falls es gilt:

$$\begin{aligned} & \omega(\phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n)) \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \sum \omega(\phi_0(x_{i_1}) \phi_0(x_{i_2})) \cdots \omega(\phi_0(x_{i_{n-1}}) \phi_0(x_{i_n})), & n \text{ gerade} \end{cases} . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Die Summe läuft dabei über alle Paarzerlegungen des Produkts mit der ursprünglichen Reihenfolge der Faktoren in jedem Paar (\mathcal{P}_0 ist nicht kommutativ).

Ein quasi-freier Zustand ist somit durch die Kenntnis seiner 2-Punktfunktion festgelegt.

Sei für $K \subset \mathcal{M}$ eine Distribution aus $\mathcal{D}(K^2)'$ mit dem Kern $\omega(\phi_0(x) \phi_0(y))$ gegeben (vgl.(2.11)), die konsistent mit (3.8) und (3.11) ist:

$$\omega(\phi_0(\square f) \phi_0(g)) = 0 , \quad \omega(\phi_0(f) \phi_0(\square g)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (3.37)$$

$$\omega([\phi_0(\bar{f}), \phi_0(g)]) = \kappa(f, g) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(K) \quad (3.38)$$

und die Positivitätsbedingung

$$\omega(\phi_0(\bar{f}) \phi_0(f)) \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(K) \quad (3.39)$$

erfüllt. Dann liefert $\omega(\phi_0(x) \phi_0(y))$ gemäß der Definition 3.4 durch die lineare Fortsetzung und $\omega(1) := 1$ einen quasi-freien Zustand ω auf $\mathcal{P}_0(K)$ (vgl. [BOR02]).

3.3.1 Die Referenzzustände

Die Algebra \mathcal{P}_0 hat einen eindeutigen quasi-freien KMS-Zustand ω_β zu jedem Temperaturvektor $\beta \in V_+$. Seine Zweipunktfunktion lautet:

$$\omega_\beta(\phi_0(x) \phi_0(y)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp e^{-i(x-y)p} \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \frac{1}{1 - e^{-\beta p}} . \quad (3.40)$$

Im Limes verschwindender Temperatur $\beta^2 \nearrow \infty$ erhält man den Vakuumzustand

$$\omega_\infty(\phi_0(x)\phi_0(y)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp e^{-i(x-y)p} \theta(p_0) \delta(p^2). \quad (3.41)$$

Die Differenz der Zweipunktfunktion eines Temperaturzustands zum Vakuum ergibt sich zu:

$$\omega_\beta(\phi_0(x)\phi_0(y)) - \omega_\infty(\phi_0(x)\phi_0(y)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|} \cos(\underline{p}(x-y)) \frac{1}{e^{\beta \underline{p}} - 1} \\ \text{mit } \underline{p} := (|\vec{p}|, \vec{p}). \quad (3.42)$$

Wie man leicht überprüft, ist die Zweipunktfunktion des Vakuumzustands

$$S_\infty(f, g) := \omega_\infty(\phi_0(\bar{f})\phi_0(g)) = \pi \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|} \overline{\tilde{f}(\underline{p})} \cdot \tilde{g}(\underline{p}) \\ \text{für } f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad (3.43)$$

eine (antilineare im ersten Argument) Distribution über $\mathcal{D}(\mathcal{M})^{\otimes 2}$ mit oben genannten Eigenschaften (3.37)-(3.39).

3.3.2 Der Hot-Bang-Zustand

Als einfaches Beispiel eines LG-Zustands wurde in [BOR02] der Hot-Bang-Zustand konstruiert, der die Zukunft einer Hitzeexplosion beschreibt. Wir sehen uns Eigenschaften wie lokale thermische Interpretation und lokale Normalität der LG-Zustände zuerst an diesem einfachen Zustand an. Das ist ein quasi-freier Zustand, festgelegt durch seine 2-Punktfunktion für $x, y \in V_+$:

$$\omega_{hb}(\phi_0(x)\phi_0(y)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp e^{-i(x-y)p} \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \frac{1}{1 - e^{-\gamma(x+y)p}} \quad (3.44)$$

mit einem Parameter $\gamma > 0$.

Da man ω_{hb} mit dem Vakuumzustand vergleichen will, dessen Eigenschaften bekannt sind, betrachtet man die Differenz der beiden Zweipunktfunktionen (es ist wie immer $\underline{p} = (|\vec{p}|, \vec{p})$):

$$B_{hb}(x, y) := \omega_{hb}(\phi_0(x)\phi_0(y)) - \omega_\infty(\phi_0(x)\phi_0(y)) \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|} \cos(\underline{p}(x-y)) \frac{1}{e^{\gamma(x+y)\underline{p}} - 1} \quad (3.45)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|} \cos(\underline{p}(x-y)) e^{-n\gamma(x+y)\underline{p}}, \\ \text{für } x, y \in V_+. \quad (3.46)$$

Die Vertauschung der Summe mit dem Integral beim Übergang zu (3.46) ist berechtigt, da die Reihe der Beträge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\underline{p}|} e^{-n\gamma(x+y)\underline{p}} = \frac{1}{|\underline{p}|} \frac{1}{e^{\gamma(x+y)\underline{p}} - 1}$$

wegen des exponentiellen Abfalls in $|\underline{p}|$ für jedes Paar $x, y \in V_+$ integrierbar ist (s. z.B. [JJo98]).

Vollständigkeitshalber (da der Hot-Bang-Zustand genauer untersucht werden soll) sehen wir uns die Eigenschaften seiner Zweipunktfunktion

$$S_{hb}(f, g) := \omega_{hb}(\phi_0(\bar{f})\phi_0(g)) = B_{hb}(\bar{f}, g) + S_{\infty}(f, g) \quad \text{für } f, g \in \mathcal{D}(V_+) \quad (3.47)$$

ausführlich an:

- $B_{hb} \in C^{\infty}(V_+^2) \subset \mathcal{D}(V_+^2)'$ (s. Anhang 4.2.1). Folglich ist $\omega_{hb}(\phi_0(x)\phi_0(y))$ auch Kern einer Distribution über $\mathcal{D}(V_+^2)$.
- B_{hb} ist eine glatte (s. Abschnitt 4.2.1) Bilösung der KG-Gleichung auf V_+^2 :

$$\square_x B_{hb}(x, y) = \square_y B_{hb}(x, y) = 0. \quad (3.48)$$

Das folgt aus

$$\square_x \{ \cos(\underline{p}(x-y)) e^{-n\gamma(x+y)\underline{p}} \} = 0, \quad (3.49)$$

da der Ausdruck in (3.46) den nötigen Sätzen über die Vertauschung von Ableitungen mit \sum und \int genügt.

- ω_{hb} ist konsistent mit der Feldgleichung, vgl. (3.37):

$$\omega_{hb}(\phi_0(\square f)\phi_0(g)) = \omega_{\infty}(\phi_0(\square f)\phi_0(g)) + \int dx dy (\square f)(x)g(y)B_{hb}(x, y) = 0 \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(V_+).$$

- ω_{hb} ist konsistent mit der Kommutatorrelation, vgl. (3.38):

$$\begin{aligned} \omega_{hb}([\phi_0(\bar{f}), \phi_0(g)]) &= \int dx dy \bar{f}(x)g(y) \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \int dp \delta(p^2)\varepsilon(p_0) \frac{e^{-i(x-y)p}}{1 - e^{-\gamma(x+y)p}} \right. \\ &\quad \left. - \int dp \delta(p^2)\varepsilon(p_0) \frac{e^{-i(y-x)p}}{1 - e^{-\gamma(x+y)p}} \right\} \\ &= \int dx dy \bar{f}(x)g(y) \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp \delta(p^2)\varepsilon(p_0) e^{-i(x-y)p} = \kappa(f, g) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(V_+). \end{aligned}$$

- B_{hb} ist positiv, d.h. $B_{hb}(\bar{f}, f) \geq 0$ für $f \in \mathcal{D}(V_+)$, denn (s. (3.46)):

$$\begin{aligned}
B_{hb}(\bar{f}, f) &= \int dx dy \bar{f}(x) f(y) \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} e^{i(x-y)\underline{p}} e^{-n\gamma(x+y)\underline{p}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int dx dy \bar{f}(x) f(y) \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} e^{i(x-y)\underline{p}} e^{-n\gamma(x+y)\underline{p}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} \int dx \bar{f}(x) e^{ix\underline{p} - n\gamma x \underline{p}} \int dy f(y) e^{-iy\underline{p} - n\gamma y \underline{p}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} \left| \tilde{f}((-1 + in\gamma)\underline{p}) \right|^2 \geq 0. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Die Vertauschung von $\sum_{n=1}^{\infty}$ mit $\int dx dy$ in der zweiten Zeile ist gerechtfertigt (vgl. mit der Begründung von (3.46)) durch die Integrierbarkeit der Reihe der Beträge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \bar{f}(x) f(y) \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} e^{-n\gamma(x+y)\underline{p}} \right| = |\bar{f}(x) f(y)| \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} \frac{1}{e^{\gamma(x+y)\underline{p}} - 1}.$$

Die Vertauschung von Integralen in der dritten Zeile ist nach Fubini erlaubt.

- Es folgt die Positivitätseigenschaft (3.39) für ω_{hb} aus der Positivität von ω_{∞} und B_{hb} , s. (3.47).

3.4 Lokale thermische Observablen

Der Raum \mathcal{S}_x der lokalen thermischen Observablen (vgl. Abschnitt 2.4), die zur Analyse der LG-Zustände benutzt werden, wird im Modell von dem 1-Element von \mathcal{P}_0 , dem Feld $\phi_0(x)$ und den balancierten Ableitungen seines Wick-Quadrats aufgespannt (s. [BOR02]). Die letzten sind mit der Multiindexnotation $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\mu_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, und $\partial_{\zeta}^{\boldsymbol{\mu}} = \partial_{\zeta_{\mu_1}} \cdots \partial_{\zeta_{\mu_m}}$ gegeben als

$$\theta^{\boldsymbol{\mu}}(x) := \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\boldsymbol{\mu}} (\phi_0(x + \zeta) \phi_0(x - \zeta) - \omega_{\infty}(\phi_0(x + \zeta) \phi_0(x - \zeta)) \cdot 1) \tag{3.51}$$

mit raumartigen ζ . (Der Limes ist im Sinne von quadratischen Formen gemeint.) Alle Zustände von Interesse liegen per Annahme im Definitionsbereich dieser quadratischen Formen.

Wie in [BOR02] erklärt, sind quadratische Formen $\theta^{\boldsymbol{\mu}}(x)$ im linearen Raum der

Punktfelder der Theorie \mathcal{Q}_x approximiert, sodass deren Werte in den Referenzzuständen mit der Messung gewisser makroskopischen Observablen Θ^μ übereinstimmen (vgl. Abschnitt 2.3.2). Die entsprechenden thermischen Funktionen lauten

$$\beta \longmapsto \Theta^\mu(\beta) = \omega_\beta(\theta^\mu(0)) = c_m \partial_\beta^\mu (\beta^2)^{-1}. \quad (3.52)$$

Hier sind die Faktoren $c_m = 0$, falls m ungerade ist (Konsequenz der Lokalität der Quantenfelder (2.4)), und $c_m = (-1)^{m/2} (4\pi)^m (m+2)!^{-1} B_{m+2}$ für gerade m , wobei B_n der Betrag der Bernulli'schen Zahl mit dem gleichen Index ist.

Die thermische Funktion zu $m = 0$ ist proportional zu der absoluten Temperatur zum Quadrat:

$$\Theta(\beta) = \frac{c_0}{\beta^2}, \quad (3.53)$$

für die Erwartungswerte der höheren balancierten Ableitungen $\theta^\mu(x)$ in KMS-Zuständen siehe [BOR02].

3.4.1 Thermodynamische Eigenschaften des Hot-Bang-Zustands

Im Hot-Bang-Zustand haben die lokalen thermischen Observablen an der Stelle $x \in V_+$ folgende Werte (s. (3.42) und (3.45)):

$$\begin{aligned} \omega_{hb}(\theta^\mu(x)) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu (\omega_{hb}(\phi_0(x+\zeta)\phi_0(x-\zeta)) - \omega_\infty(\phi_0(x+\zeta)\phi_0(x-\zeta))) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu B_{hb}(x+\zeta, x-\zeta) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{|\underline{p}|} \cos(2\underline{p}\zeta) \frac{1}{e^{2\gamma x \underline{p}} - 1} \\ &= \omega_{2\gamma x}(\theta^\mu(x)). \end{aligned} \quad (3.54)$$

D.h. der LG-Zustand ω_{hb} ist \mathcal{S}_{V_+} -thermal und sein Referenzzustand an der Stelle $x \in V_+$ ist $\omega_{\beta(x)}$ mit der scharfen inversen Temperatur $\beta(x) = 2\gamma x$ (vgl. Abschnitt 2.4).

Für $m = 0$ mißt man somit in ω_{hb} innerhalb des Vorwärtslichtkegels die quadratische Temperatur (bis auf konstante Faktoren) in Höhe von:

$$\omega_{hb}(\Theta)(x) = \omega_{2\gamma x}(\Theta) = \frac{c_0}{(2\gamma x)^2} \quad \text{für } x \in V_+.$$

Gegen den Rand des Lichtkegels, an dem der Hot-Bang-Zustand nicht definiert ist, wird seine lokale Temperatur unendlich hoch, während sie in zeitartigen Richtungen monoton abfällt. Alle Lorentz-Beobachter messen in ω_{hb} zur Zeit $t > 0$

nach der Hitzeexplosion im Ursprung ihres Raums zur Zeit $t = 0$ die gleiche Temperatur (bis auf Faktoren) $T(t) = 1/t$.

Interessant ist es, sich den Lift von ω_{hb} zu der zulässigen Observablen der Phasenraumdichte der masselosen Teilchen $N_{\underline{p}}$ anzusehen, s. Abschnitt 5.1.1:

$$\omega_{hb}(N_{\underline{p}})(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{e^{2\gamma x \underline{p}} - 1}, \quad x \in V_+.$$

Die Teilchendichte divergiert, wenn sich x parallel zu dem positiv lichtartigen Vektor \underline{p} ausrichtet. Das heißt, dass eine Riesensmenge an Teilchen, die unendlich hohe Temperatur am Rand des Vorwärtslichtkegels verursachen, aus der Spitze des Kegels kommt.

Der Hot-Bang-Zustand ist somit die Zukunft einer Hitzeexplosion im Ursprung des Minkowskiraums.

Die Lage der Spitze in \mathcal{M} ist dabei für die physikalischen Eigenschaften des Zustands völlig willkürlich, sodass man von der Klasse der Hot-Bang-Zustände spricht, die aus ω_{hb} durch Translationen hervorkommen.

Kapitel 4

Lokale Normalität der Hot-Bang-Zustände

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass der in 3.3.2 definierte Hot-Bang-Zustand physikalisch ist, d.h. lokal aus dem Vakuum erzeugt werden kann, was insbesondere lokal endliche Energie- und Teilchendichte bedeuten würde. Man stellt sich also folgende Frage ([Bu]):

Sei \mathcal{O} ein beliebiger Doppelkegel, dessen Abschluß $\overline{\mathcal{O}}$ bzgl. der Minkowskiraumtopologie in der Zukunft der Hitzeexplosion des Hot-Bang-Zustands (s. 3.4.1) liegt. Auf der lokalen Feldalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ betrachten wir quasifreie Partialzustände: den Hot-Bang-Zustand ω_{hb} und den Vakuumzustand ω_∞ . Aus mathematischer Bequemlichkeit diskutieren wir statt der Feldalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ zunächst die Weyl-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ der beschränkten Operatoren mit erzeugenden Elementen $W(f) = e^{i\phi_0(f)}$ für reellwertige $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ und betrachten $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ in der entsprechenden GNS-Darstellung $(\pi_\infty, \mathcal{H}_\infty, \Omega_\infty)$ von ω_∞ . Die Frage, die wir uns stellen, lautet dann:

Gibt es nun eine Dichtematrix ρ_∞ auf \mathcal{H}_∞ , sodass

$$\omega_{hb}(A) = \text{Tr } \rho_\infty \pi_\infty(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}),$$

gilt? Entspricht also ω_{hb} auf $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ einem normalen Zustand bezüglich der Vakuumdarstellung (vgl. z.B. [Ar99])?

Diese Frage ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Quasi-Äquivalenz der beiden Zustände ω_{hb} und ω_∞ auf $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, oder der Quasi-Äquivalenz deren GNS-Darstellungen (s. z.B. [BRI87]). In einer äquivalenten Charakterisierung heißen zwei Darstellungen quasi-äquivalent, falls jede Unterdarstellung der einen eine Unterdarstellung besitzt, zu der es eine unitär äquivalente Unterdarstellung der anderen Darstellung gibt.

Die i.a. stärkere unitäre Äquivalenz der beiden Darstellungen $(\pi_{hb}, \mathcal{H}_{hb}, \Omega_{hb})$ und $(\pi_\infty, \mathcal{H}_\infty, \Omega_\infty)$ würde die Existenz eines unitären Operators U bedeuten, der die beiden Darstellungen verbindet:

$$\begin{aligned} U : \mathcal{H}_\infty &\longrightarrow \mathcal{H}_{hb} \\ \text{mit } \pi_{hb}(A) &= U\pi_\infty(A)U^{-1} \quad \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Quasi-Äquivalenz zweier Darstellungen entspricht also der unitären Äquivalenz bis auf die Multiplizität, die von der relativen Anzahl der Unterdarstellungen abhängt (vgl. z.B. [BRI87]), wobei die Projektoren auf die invarianten Unterräume in der Kommutanten der Algebra liegen. Da man über die Doppelkommutante der Weyl-Algebra in Vakuumdarstellung $(\pi_\infty(\mathcal{A}(\mathcal{O})))''$ weiß, daß es ein Faktor vom Typ III ist (vgl. [Ha96]) und die Multiplizität somit keine Rolle spielt, ist die lokale Quasi-Äquivalenz gleichbedeutend mit der unitären Äquivalenz.

Wie man der Definition (4.1) abliest, würde die unitäre Äquivalenz von ω_{hb} und ω_∞ auf $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ bedeuten, dass der Hot-Bang-Zustand durch einen Vektor $\Omega_0 \in \mathcal{H}_\infty$ gegeben ist:

$$\omega_{hb}(A) = \langle \Omega_0, \pi_\infty(A)\Omega_0 \rangle \quad \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}). \quad (4.2)$$

Wir fassen zusammen:

Um den Hot-Bang-Zustand auf lokale Normalität bzgl. des Vakuumzustands zu prüfen, müssen wir die Quasi-Äquivalenz der beiden Darstellungen beweisen. Da sich diese als gegeben erweist, steht sogar fest, dass es sich bei der Restriktion von ω_{hb} auf $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ um einen Vektorzustand aus dem lokalen Fockraum handelt.

4.1 Quasi-Äquivalenz von quasifreien Zuständen

Araki und Yamagami haben 1982 eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Quasi-Äquivalenz von (beliebigen) quasifreien Zuständen einer selbstdualen CCR-Algebra veröffentlicht, [AY82]. Wir geben das Kriterium erstmals in der Formulierung der Autoren wieder, weil wir bei der Anwendung sowohl die Doppelkegelalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ als auch die dazu isomorphe CCR-Algebra $\mathcal{Q}(\mathcal{O})$ (s. Abschnitt 3.2) gebrauchen werden:

Es sei ein \mathbb{C} -Vektorraum K (Testfunktionenraum) mit einer antilinearen Involution Γ (d.h. $\Gamma^2 = 1$) (komplexe Konjugation im Ortsraum) und einer hermiteschen Form κ (Kommutatorform) gegeben, die $\kappa(\Gamma f, \Gamma g) = -\kappa(g, f)$ für $f, g \in K$ erfüllen.

Die selbstduale CCR-Algebra $\mathfrak{A}(K, \kappa, \Gamma)$ über dem Phasenraum (K, κ, Γ) ist eine komplexe $*$ -Algebra, die von den Elementen $B(f)$ zu $f \in K$ (Quantenfelder), deren Adjungierten $B(f)^*$ und der Identität 1 erzeugt wird, mit den algebraischen Relationen:

1. $B(f)$ ist linear in f ,
2. $[B(f)^*, B(g)] = \kappa(f, g) \cdot 1$,
3. $B(f)^* = B(\Gamma f)$.

Für einen quasifreien Zustand ω auf $\mathfrak{A}(K, \kappa, \Gamma)$ (definiert analog zur Def.3.4) betrachten Araki-Yamagami die Zweipunktfunktion in der Form

$$S(f, g) := \omega(B(f)^* B(g)) \quad \text{für } f, g \in K. \quad (4.3)$$

Aufgrund der Positivität eines Zustands sowie der Eigenschaft $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$ (s. Abschnitt 2.2) ist $S(\cdot, \cdot)$ eine i.a. positiv-semidefinite hermitesche Form auf K .

Weiterhin brauchen Araki und Yamagami für ihr Theorem über die Quasi-Äquivalenz der Zustände eine weitere hermitesche Form

$$\begin{aligned} (f, g)_s &:= S(f, g) + S(\Gamma g, \Gamma f) \\ &= \omega(B(f)^* B(g)) + \omega(B(g) B(f)^*) \quad \text{für } f, g \in K, \end{aligned} \quad (4.4)$$

die ebenfalls i.a. positiv-semidefinit ist.

Aus all diesen Definitionen folgen sofort einige nützliche algebraische Relationen:

- Die Kommutatorform läßt sich durch die Zweipunktfunktion ausdrücken:

$$\kappa(f, g) = \omega[B(f)^*, B(g)] = S(f, g) - S(\Gamma g, \Gamma f) \quad \text{für } f, g \in K. \quad (4.5)$$

- Somit läßt sich die Zweipunktfunktion schreiben als

$$S(f, g) = \frac{1}{2} ((f, g)_s + \kappa(f, g)) \quad \text{für } f, g \in K. \quad (4.6)$$

- Aus der Cauchy-Schwarz-Ungl. erhält man ähnliche Abschätzungen für die Kommutatorform:

$$|\kappa(f, g)|^2 \leq (f, f)_s (g, g)_s \quad \text{für } f, g \in K, \quad \text{sowie} \quad (4.7)$$

$$|\kappa(f, g)|^2 \leq 4 S(f, f) S(g, g) \quad \text{für reellwertige } f, g \in K. \quad (4.8)$$

Nach der Division des Testfunktionsraums durch die Untergruppe $\ker s = \{f \in K : (f, f)_s = 0\}$ wird $(\cdot, \cdot)_s$ zu einem Skalarprodukt auf $K/\ker s$ durch:

$$S(\widehat{f}, \widehat{g}) := S(f, g) \quad \text{für } \widehat{f}, \widehat{g} \in K/\ker s. \quad (4.9)$$

Dies ist wohldefiniert (s. (4.6) und (4.7)):

$$f_0 \in \ker s \implies S(f_0, g) = 0 \quad \forall g \in K. \quad (4.10)$$

Das gleiche gilt natürlich auch für κ auf $K/\ker s$.

Den Abschluß des Faktorraums $K/\ker s$ in der von $(\cdot, \cdot)_s$ induzierten Normtopologie τ_s nennen Araki-Yamagami \overline{K} . Wir bezeichnen die Elemente der dichten Teilmenge $K/\ker s$ von \overline{K} i.f. wie die entsprechenden Elemente von K mit f, g , was für die einzig interessanten Formen $S(\cdot, \cdot)$, $(\cdot, \cdot)_s$ und $\kappa(\cdot, \cdot)$ keinen Unterschied macht.

Somit sind alle notwendigen Vorbereitungen abgeschlossen, um den Inhalt des Theorems von Araki-Yamagami formulieren zu können:

Zwei quasifreie Zustände ω_s und $\omega_{s'}$ auf $\mathfrak{A}(K, \kappa, \Gamma)$ haben nun quasi-äquivalente GNS-Darstellungen π_s und $\pi_{s'}$ g.d.w. folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\tau_s = \tau_{s'} =: \tau$ (Äquivalenz der Topologien).
2. Mit einem τ erzeugenden Skalarprodukt (\cdot, \cdot) auf dem Hilbertraum \overline{K} kann man nach dem Riesz'schen Lemma positive beschränkte (lineare) Operatoren \widetilde{S} und \widetilde{S}' durch die Zweipunkt-funktionen der beiden Zustände definieren:

$$(f, \widetilde{S}g) := S(f, g), \quad (f, \widetilde{S}'g) := S'(f, g) \quad \text{für } f, g \in \overline{K}.$$

Für diese soll $\widetilde{S}^{1/2} - \widetilde{S}'^{1/2}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator (s. z.B. [RS80]) sein.

Die für die Definition von \widetilde{S} (bzw. \widetilde{S}') notwendige Stetigkeit von $S(f, g)$ in $f \in \overline{K}$ bzgl. der τ -Topologie sieht man aus (4.6) und (4.7).

4.2 Äquivalenz der Topologien

In diesem Abschnitt soll der erste Punkt des Kriteriums von Araki-Yamagami für die Zustände ω_{hb} und ω_∞ überprüft werden.

Wir betrachten den Hot-Bang-Zustand im Inneren des Vorwärtslichtkegels gemäß der Definition im Abschnitt 3.3.2. Also wählen wir einen beliebigen Doppelkegel \mathcal{O} , für den $\overline{\mathcal{O}} \subset V_+$ ist, mit der zugehörigen lokalen Feldalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$. Dementsprechend heißen in diesem Abschnitt der Testfunktionenraum $K = \mathcal{D}(\mathcal{O})$, die Kommutatorform κ wie in (3.12) angegeben, Γ die komplexe Konjugation der Testfunktionen im Ortsraum und die selbstduale CCR-Algebra $\mathfrak{A}(K, \kappa, \Gamma)$ die Feldalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$.

Die Zweipunktfunktionen der zu vergleichenden Zustände lauten (vgl. Kap.3):

$$\begin{aligned} S_\infty(f, g) &= \pi \int \frac{d^3 p}{|p|} \overline{\tilde{f}(p)} \cdot \tilde{g}(p), \\ S_{hb}(f, g) &= B_{hb}(\overline{f}, g) + S_\infty(f, g) \quad \text{für } f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Gemäß dem Abschnitt 4.1 soll die Äquivalenz der Normen

$$(f, f)_s = S_s(f, f) + S_s(\overline{f}, \overline{f}), \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})/\ker s \quad (4.12)$$

für $s = hb$ und $s = \infty$ gezeigt werden. Dafür ist es hinreichend zu zeigen:

$$C_1 S_\infty(f, f) \leq S_{hb}(f, f) \leq C S_\infty(f, f) \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}) \quad (4.13)$$

mit positiven Konstanten C_1 und C .

Für eine komplexwertige Testfunktion $f = f^r + i f^i \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ trennen sich nämlich deren Real- und Imaginärteil in der Form $(\cdot, \cdot)_s$:

$$\begin{aligned} S(f, f) &= S(f^r, f^r) + S(f^i, f^i) + i\kappa(f^r, f^i) \\ S(\overline{f}, \overline{f}) &= S(f^r, f^r) + S(f^i, f^i) - i\kappa(f^r, f^i) \\ \implies (f, f)_s &= 2S(f^r, f^r) + 2S(f^i, f^i). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es folgt bereits aus der Positivität von B_{hb} , dass die erste Ungleichung in (4.13) mit $C_1 = 1$ erfüllt ist (vgl. (3.47)). Im Beweis der zweiten (wesentlich schwierigeren) Ungleichung stützen wir uns auf die Beweisideen der Proposition 3.8 in der Arbeit [Ver94]. Man macht Gebrauch von der Glattheit der Differenz von den Zweipunktfunktionen der fraglichen Zustände:

4.2.1 Analytizitätseigenschaft des Hot-Bang-Zustands

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass die Differenz der Hot-Bang-Zweipunktfunktion zum Vakuum, B_{hb} (s. (3.45)), eine glatte Funktion im Vorwärtslichtkegel $V_+ \times V_+$ darstellt.

Dazu drücken wir sie in bequemen Koordinaten $u := (x - y)$, $v := (x + y)$ aus:

$$\widehat{B}_{hb}(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} \cos(u\underline{p}) \frac{1}{e^{\gamma v \underline{p}} - 1}. \quad (4.15)$$

Lemma 4.1. \widehat{B}_{hb} ist reell analytisch auf $\mathcal{M} \times (V_+ + b)$ für ein beliebiges $b = (b_0, \vec{0})$ mit $b_0 > 0$.

Beweis: Es ist für $v \in \mathbb{R}^4$

$$v\underline{p} = v_0|\underline{p}| - \vec{v}\vec{p} = |\underline{p}|(v_0 - |\vec{v}|\cos(\vec{v}, \vec{p})).$$

Der Ausdruck kann also nur Null werden für $|v_0| \leq |\vec{v}|$; er ist ungleich Null für $|v_0| > |\vec{v}|$:

$$v\underline{p} > 0 \quad \text{für} \quad v_0 > |\vec{v}|, \quad \text{d.h.} \quad v \in V_+, \quad (4.16)$$

$$v\underline{p} < 0 \quad \text{für} \quad v_0 < -|\vec{v}|, \quad \text{d.h.} \quad v \in V_-. \quad (4.17)$$

Für $v = (x + y) \in V_+$, hat der Integrand von (4.15) also keine Pole für feste \underline{p} mit $\vec{p} \neq 0$.

Erweitere $\widehat{B}_{hb}(u, v)$ auf komplexwertige Argumente $z = u + i\xi$, $w = v + i\eta$:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{hb}(z, w) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} \cos(z\underline{p}) \frac{1}{e^{\gamma w \underline{p}} - 1} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p f(\vec{p}, z, w). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für $\vec{p} \neq 0$ ist der Integrand $f(\vec{p}, z, w)$ eine analytische Funktion von (z, w) auf dem Gebiet

$$G := \{(z, w) \in \mathbb{C}^8 : \operatorname{Re}(w) \in V_+\}.$$

Um die Analytizität von dem Integral (4.18) gemäß dem Kriterium im Anhang A zu zeigen, brauchen wir noch eine integrierbare Majorante für f . Man schätzt ab:

$$\begin{aligned} |f(\vec{p}, z, w)| &= \frac{1}{2|\underline{p}|} \cdot |e^{(iu-\xi)\underline{p}} + e^{(-iu+\xi)\underline{p}}| \cdot \frac{1}{|e^{\gamma(v+i\eta)\underline{p}} - 1|} \\ &\leq \frac{1}{2|\underline{p}|} \cdot |e^{-\xi\underline{p}} + e^{\xi\underline{p}}| \cdot \frac{1}{e^{\gamma v \underline{p}} - 1} \end{aligned}$$

da $v\underline{p} > 0$ ist und für komplexe Zahlen r, s mit $|r| > |s|$ gilt: $|r - s| \geq |r| - |s|$.

Wir können nun eine Majorante $F(\vec{p})$ des Integrandes von (4.18) konstruieren, was weitere Einschränkungen an den Definitionsbereich von \widehat{B}_{hb} mit sich bringt:

$$|f(\vec{p}, z, w)| \leq \frac{1}{|\vec{p}|} \cdot e^{a\vec{p}} \cdot \frac{1}{e^{\gamma b\vec{p}} - 1} =: F(\vec{p}), \quad (4.19)$$

$$\text{falls } \begin{cases} -\xi\vec{p} < a\vec{p} \\ \xi\vec{p} < a\vec{p} \\ v\vec{p} > b\vec{p} \end{cases} \iff \begin{cases} (\xi + a)\vec{p} > 0 \\ (\xi - a)\vec{p} < 0 \\ (v - b)\vec{p} > 0 \end{cases} \text{ gilt.}$$

Das ist nach (4.16), (4.17) erfüllt, falls

$$\begin{cases} \xi \in V_+ - a \\ \xi \in V_- + a \\ v \in V_+ + b \end{cases}.$$

Die Wahl der konstanten Vektoren

$$a = (a_0, \vec{0}), \quad b = (b_0, \vec{0}) \quad \text{mit} \quad 0 < a_0 < \gamma b_0$$

garantiert die Integrierbarkeit der Majoranten F in (4.19).

Somit ist \widehat{B}_{hb} nach Anhang A auf dem Gebiet

$$G_{a,b} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^8 : \text{Im}(z) \in (V_+ - a) \cap (V_- + a), \text{Re}(w) \in V_+ + b\}$$

analytisch und daher auf den reellen Punkten von $G_{a,b}$

$$G_b^r := \{(u, v) \in \mathbb{R}^8 : v \in V_+ + b\}$$

reell analytisch. □

Es folgt aus dem Lemma nach der Kettenregel, dass B_{hb} glatt auf $(V_+ + b)^2$ ist. Da b beliebig ist, ist $B_{hb} \in C^\infty(V_+^2)$.

4.2.2 Abschätzung der Hot-Bang-Norm durch die Vakuum-Norm

Wie schon erwähnt, stammen die grundlegenden Beweisideen in diesem Abschnitt aus der Arbeit [Ver94]. Die Ausführung und einzelne Schritte sehen in unserem Fall der konkreten Zustände auf dem Minkowskiraum etwas anders (einfacher) aus.

Die vom Hot-Bang-Zustand induzierte Norm läßt sich durch die Vakuum-Norm nach unten abschätzen (vgl. rechte Ungl. in (4.13)):

Proposition 4.1. *Für einen beliebigen Doppelkegel \mathcal{O} mit $\bar{\mathcal{O}} \subset V_+$ und die quasifreien Hot-Bang-Zustand ω_{hb} und Vakuumzustand ω_∞ auf $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ mit den Zweipunktfunktionen S_{hb} bzw. S_∞ gibt es Folgen $\phi_j, \psi_j \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$, $j \in \mathbb{N}$, sodass folgendes gilt:*

1. B_{hb} läßt sich durch die Kommutatorform κ ausdrücken:

$$B_{hb}(f, g) = S_{hb}(f, g) - S_\infty(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \kappa(f, \phi_j) \kappa(\psi_j, g) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}). \quad (4.20)$$

2. Folgende Reihe konvergiert

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} S_\infty(\phi_j, \phi_j)^{1/2} S_\infty(\psi_j, \psi_j)^{1/2} < \infty. \quad (4.21)$$

3. Es gibt eine positive Konstante C mit

$$S_{hb}(f, f) \leq C S_\infty(f, f) \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}). \quad (4.22)$$

Beweis: Teil 1.

Wir zeigen zuerst, dass 1. und 2. die Aussage 3. implizieren. Mit der Positivität von B_{hb} und der Cauchy-Schwarz-ähnlichen Abschätzung der Kommutatorform (s. (4.8)) bekommt man aus (4.20)

$$\begin{aligned} S_{hb}(f, f) - S_\infty(f, f) &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |\kappa(f, \phi_j)| \cdot |\kappa(\psi_j, f)| \\ &\leq 4 S_\infty(f, f) \sum_{j \in \mathbb{N}} S_\infty(\phi_j, \phi_j)^{1/2} S_\infty(\psi_j, \psi_j)^{1/2} \\ &\quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die erwünschte Ungleichung

$$S_{hb}(f, f) \leq S_\infty(f, f) \underbrace{\left(1 + 4 \sum_{j \in \mathbb{N}} S_\infty(\phi_j, \phi_j)^{1/2} S_\infty(\psi_j, \psi_j)^{1/2} \right)}_{=: C} \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O})$$

mit einer nach (4.21) endlichen Konstanten C .

Bei der Zerlegung (4.20) hat der Autor von [Ver94] den Zusammenhang zwischen der Kommutatorform (s. (3.12)):

$$\kappa(f, g) = i \int dx (Ef)(x)g(x) = -\kappa(g, f) \quad \text{für } f, g \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}), \quad (4.23)$$

und dem Propagator $E = E^+ - E^-$ der freien Feldgleichung (Wellengleichung) geschickt ausgenutzt. Wir geben hier die Eigenschaften der Abbildungen E^+ , E^- (s. Anhang B) an:

$$\square E^\pm f = f \quad \text{und} \quad \text{supp}(E^\pm f) \subset J^\pm(\text{supp}(f)) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}). \quad (4.24)$$

In Verbindung mit den netten Eigenschaften des Kerns B_{hb} , wie Glattheit und Bilösung der Wellengleichung (s. Abschnitt 3.3.2), kann man nämlich (4.24) einsetzen, um den Übergang in (4.20) zu bekommen.

Diese Tatsachen ausnutzend, beweisen wir (wie auch bei [Ver94]) vorerst ein Lemma und zeigen dann im zweiten Teil des Beweises der Proposition die Existenz von Funktionenfolgen $\{\phi_j\}$, $\{\psi_j\}$ mit den Eigenschaften wie in der Aussage.

Lemma 4.2. *Seien $\mathcal{O} \subset \hat{\mathcal{O}} \subset V_+$ ineinander geschachtelte Doppelkegel, B_{hb} die Differenz der Zweipunktfunktionen von ω_{hb} und ω_∞ und E der Propagator der Wellengleichung. Es gibt eine Funktion $Q \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathcal{O}} \times \hat{\mathcal{O}})$ mit*

$$\int dx dy f(x)g(y)B_{hb}(x, y) = \int dx dy (Ef)(x)(Eg)(y)Q(x, y) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \quad (4.25)$$

Beweis: Man betrachte einen Doppelkegel $\tilde{\mathcal{O}}$, der zwischen $\hat{\mathcal{O}}$ und \mathcal{O} liegt.

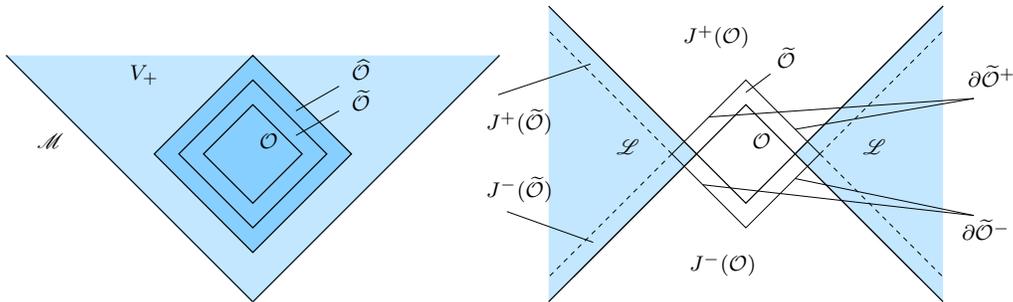


Abbildung 4.1: Skizze.

Dann bilden $J^+(\tilde{\mathcal{O}})$, $J^-(\tilde{\mathcal{O}})$ (offene Teilmengen von \mathcal{M} , da Doppelkegel als offen

definiert wurden, s. (3.13)) und $\mathcal{L} := \mathcal{M} \setminus J(\overline{\mathcal{O}})$ eine offene Überdeckung von \mathcal{M} . Dieser ist eine Partition der Eins untergeordnet:

$$\psi^0, \psi^\pm \in C_{\mathbb{R}}^\infty(\mathcal{M}), \quad \psi^0 + \psi^+ + \psi^- = 1, \quad (4.26)$$

$$\text{supp}(\psi^0) \subset \mathcal{L}, \quad \text{supp}(\psi^\pm) \subset J^\pm(\tilde{\mathcal{O}}). \quad (4.27)$$

Wir definieren für $M, N \in \{+, -\}$:

$$B^{MN}(x, y) := \psi^M(x)\psi^N(y)B_{hb}(x, y), \quad x, y \in V_+. \quad (4.28)$$

Auf $J(\mathcal{O})$ ist $\psi^+ + \psi^- = 1$. Es folgt unter Berücksichtigung der Bilösungseigenschaft von B_{hb} :

$$\square_x \square_y B^{++}(x, y) = \square_x \square_y B^{--}(x, y) = -\square_x \square_y B^{+-}(x, y) = -\square_x \square_y B^{-+}(x, y)$$

$$\text{für } x, y \in J(\mathcal{O}) \cap V_+ \quad (4.29)$$

Außerdem sieht man aus der Abb.4.1 sowie der Trägereigenschaft der Abbildungen E^\pm (4.24), dass folgende Funktionen (der Variablen x) auf dem oberen Rand von $\tilde{\mathcal{O}}$, $\partial\tilde{\mathcal{O}}^+$, verschwinden:

$$E^- f \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \quad B^{-+}(x, y) \quad \text{und} \quad B^{--}(x, y). \quad (4.30)$$

Nach einer analogen Beobachtung für den unteren $\tilde{\mathcal{O}}$ -Rand $\partial\tilde{\mathcal{O}}^-$ verschwinden sämtliche Randterme bei der partiellen Integration von:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\mathcal{O}} \times \tilde{\mathcal{O}}} dx dy (E^M f)(x)(E^N g)(y) \square_x \square_y B^{\overline{MN}}(x, y) \\ &= \int_{\mathcal{O} \times \mathcal{O}} dx dy f(x)g(y) B^{\overline{MN}}(x, y) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Wir haben dabei von (4.24) Gebrauch gemacht und folgende Notation für $M \in \{+, -\}$ benutzt:

$$\overline{M} := \begin{cases} -, & \text{falls } M = + \\ +, & \text{falls } M = -. \end{cases} \quad (4.32)$$

Daraus ergibt sich mit der Trägereigenschaft in (4.24) und (4.29) sofort das Ziel-
ergebnis:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\mathcal{O}} \times \tilde{\mathcal{O}}} dx dy (E^+ - E^-) f(x) (E^+ - E^-) g(y) \square_x \square_y B^{++}(x, y) \\ &= \int_{\mathcal{O} \times \mathcal{O}} dx dy f(x) g(y) \sum_{M, N} B^{MN}(x, y) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Es lautet nämlich unter Benutzung der obigen Definitionen

($E = E^+ - E^-$ sowie $\sum_{M, N} B^{MN} = B_{hb}$ auf $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$, s. (4.28)):

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\mathcal{O}} \times \tilde{\mathcal{O}}} dx dy (Ef)(x) (Eg)(y) \square_x \square_y B^{++}(x, y) \\ &= \int_{\mathcal{O} \times \mathcal{O}} dx dy f(x) g(y) B_{hb}(x, y) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Da der Integrand auf der linken Seite aufgrund (4.24) und (4.29) außerhalb des
Gebiets $(\tilde{\mathcal{O}} \cap J(\mathcal{O}))^2$ verschwindet, kann man über ein beliebiges größeres Ge-
biet ohne Änderung integrieren. Das nutzen wir, um eine Funktion Q wie in der
Aussage vom Lemma zu konstruieren. Man nehme dazu z.B. eine glatte Abschnei-
defunktion

$$\xi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathcal{O}} \times \hat{\mathcal{O}}), \quad \text{mit} \quad \xi|_{\tilde{\mathcal{O}} \times \tilde{\mathcal{O}}} = 1. \quad (4.35)$$

Damit läßt sich das Ergebnis in der gewünschten Form schreiben:

$$\begin{aligned} & \int dx dy f(x) g(y) B_{hb}(x, y) \\ &= \int dx dy (Ef)(x) (Eg)(y) \underbrace{\xi(x, y) \square_x \square_y B^{++}(x, y)}_{=: Q(x, y)} \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

□

Beweis: Teil 2.

Wir wollen nun die gemäß (4.36) konstruierte Funktion $Q \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathcal{O}} \times \hat{\mathcal{O}})$ als
Reihe der in x, y faktorisierenden reellwertigen Testfunktionen schreiben, um B_{hb}
als hermitesche Form durch die Kommutatorform (s. (4.23)) auszudrücken (erste
Aussage der Proposition). Wegen der kompakten Lokalisierung eignet sich z.B. die

Fourier-Reihe zu diesem Zweck. Man kann damit problemlos folgende bekannten Tatsachen (vgl. Satz vom Kern) überprüfen:

Das algebraische Tensorprodukt $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\widehat{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\widehat{\mathcal{O}})$ ist dicht in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\widehat{\mathcal{O}} \times \widehat{\mathcal{O}})$ bzgl. der Schwartzraum-Topologie. Diese wird durch die Familie von Normen (vgl. z.B. [RS80]):

$$p_{r,s}(f) = \sum_{|k| \leq r} \sum_{|l| \leq s} \sup_{x \in \mathcal{M}} |x^k D^l f(x)| \quad \text{für } f \in \mathcal{S}(\mathcal{M}) \quad (4.37)$$

erzeugt, mit der üblichen Multiindexnotation: z.B. $D^l f = \partial_{x_0}^{l_0} \cdots \partial_{x_3}^{l_3} f$ mit $l \in \mathbb{N}_0^4$ für $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$. Diese Normen werden im Fall anderer Dimensionen und für Teilräume von $\mathcal{S}(\mathcal{M}^n)$ natürlich völlig analog definiert.

Da $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{O}})$ sogar ein nuklearer Raum ist, gibt es Folgen $\{\phi_j\}$ und $\{\psi_j\}$ in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\widehat{\mathcal{O}})$, die Q in der $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{O}} \times \widehat{\mathcal{O}})$ -Topologie approximieren:

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \otimes \psi_j, \quad (4.38)$$

so dass für jede Norm p der obigen Familie absolute Konvergenz dieser Reihe gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(\phi_j) p(\psi_j) < \infty. \quad (4.39)$$

Wir erhalten die erste Aussage der Proposition durch das Einsetzen von (4.38) in (4.36):

$$\begin{aligned} \int dx dy f(x) g(y) B_{hb}(x, y) &= \int dx dy (Ef)(x) (Eg)(y) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \psi_j(y) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int dx dy (Ef)(x) (Eg)(y) \phi_j(x) \psi_j(y) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \kappa(f, \phi_j) \kappa(\psi_j, g) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.40)$$

(s. die Kommutatorform auf reelwertigen Testfunktionen (4.23))

Die Rechtfertigung der Vertauschung der Reihe mit dem Integral beruht (s. z.B. [JJo98]) auf der Integrierbarkeit der Reihe über die Beträge:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} |(Ef)(x) (Eg)(y) \phi_j(x) \psi_j(y)| \\ &\leq |(Ef)(x) (Eg)(y)| \cdot |\chi(x)| \cdot |\chi(y)| \sum_{j=1}^{\infty} p_{0,0}(\phi_j) p_{0,0}(\psi_j) \end{aligned}$$

mit einer Abschneidefunktion $\chi \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ mit $\chi|_{\widehat{O}} = 1$. Die Reihe ist dabei endlich laut (4.39) und der kompakte Träger von χ garantiert die Integrierbarkeit.

Es bleibt nur noch die Konvergenz der Reihe (4.21):

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} S_{\infty}(\phi_j, \phi_j)^{1/2} S_{\infty}(\psi_j, \psi_j)^{1/2} < \infty$$

nachzuweisen. Dafür schätzen wir die Vakuumhalbnorm durch eine Schwartznorm ab (vgl. (4.11) für reellwertige Testfunktionen):

$$\begin{aligned} S_{\infty}(f, f) &= \pi \int \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \tilde{f}(-\underline{p}) \tilde{f}(\underline{p}) = \pi \int \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \frac{(1 + \vec{p}^2)^2 \tilde{f}(-\underline{p}) \tilde{f}(\underline{p})}{(1 + \vec{p}^2)^2} \\ &\leq c' \left(p_{2,0}(\tilde{f}) \right)^2 \leq c (p_{0,2}(f))^2 \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Bei dem letzten Übergang haben wir den kompakten Träger der Testfunktion benutzt, sonst hätte man den ersten Index der Schwartznorm wachsen lassen, um den Integrand zum Abfallen zu bringen:

$$\begin{aligned} \sup_p \left| p_0^2 \tilde{f}(p) \right| &= \sup_p \left| \int_{\text{supp}(f)} dx f(x) p_0^2 e^{ipx} \right| = \sup_p \left| \int_{\text{supp}(f)} dx \partial_{x_0}^2 f(x) e^{ipx} \right| \\ &\leq \sup_p \sup_x \left| \partial_{x_0}^2 f(x) \right| \cdot V(\text{supp}(f)) \leq c p_{0,2}(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Wir haben daher:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} S_{\infty}(\phi_j, \phi_j)^{1/2} S_{\infty}(\psi_j, \psi_j)^{1/2} \leq c \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{0,2}(\phi_j) p_{0,2}(\psi_j) < \infty,$$

da (4.39) gilt und die Konstante c für alle ϕ_j, ψ_j mit kompaktem Träger in \widehat{O} gleich ist.

Damit ist der Beweis der Proposition zu Ende. □

4.3 Spurklasse-Eigenschaft

In diesem Abschnitt soll der zweite Punkt des Kriteriums der Quasi-Äquivalenz für die Zustände ω_{∞} und ω_{hb} überprüft werden (s. den ersten Abschnitt des Kapitels). Dabei benutzen wir das Lemma im Appendix B der Arbeit [Bu74]:

Damit für die im Theorem von Araki-Yamagami definierten Operatoren \tilde{S} und \tilde{S}' $\tilde{S}^{1/2} - \tilde{S}'^{1/2}$ im Hilbert-Schmidt-Ideal ist, reicht die Spurklasse-Eigenschaft deren Differenz aus.

Die Spurklasse-Eigenschaft von $\tilde{S} - \tilde{S}'$ läßt sich bequem in der Sprache der CCR-Algebra $\mathcal{Q}(O)$ beweisen, die der Algebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ des Doppelkegels \mathcal{O} mit der Basis O in der Zeit-0-Hyperebene entspricht (s. Abschnitt 3.2 und Abb.3.1). Hier übersetzen wir die Araki-Notation in die der Feldalgebra $\mathcal{Q}(O)$ wie folgt:

Der Testfunktionenraum ist eine orthogonale (bzgl. des L_2 -Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$) Summe

$$K(O) := \omega^{-1/2}\mathcal{D}(O) \oplus \omega^{1/2}\mathcal{D}(O) \quad (4.42)$$

mit den Elementen $F := \omega^{-1/2}f \oplus \omega^{1/2}g$; $f, g \in \mathcal{D}(O)$. Der im Impulsraum diagonale Operator

$$\omega(\vec{p}) = |\vec{p}| \quad (4.43)$$

ist der Energieoperator für die masselosen Einteilchenzustände. Im Kontext dieses Kapitels besteht keine Verwechslungsgefahr mit der Notation ω für Zustände.

Die Involution Γ ist die komplexe Konjugation der Testfunktionen im Ortsraum und die Felder sind gemäß (3.30):

$$B(F) = \varphi(f) + \pi(g) \quad \text{für } F = \omega^{-1/2}f \oplus \omega^{1/2}g \in K(O). \quad (4.44)$$

Deren Kommutator lautet gemäß (3.20)-(3.21)

$$\begin{aligned} [B(F_1)^*, B(F_2)] &= [\varphi(\overline{f_1}) + \pi(\overline{g_1}), \varphi(f_2) + \pi(g_2)] \\ &= i(\langle f_1, g_2 \rangle - \langle g_1, f_2 \rangle) \cdot 1 \\ &= \langle F_1, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} F_2 \rangle \cdot 1 \\ &= \kappa(F_1, F_2) \cdot 1 \quad \forall F_1, F_2 \in K(O). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Wir betrachten einen um $t_0 > 0$ in die negative Zeitrichtung verschobenen Hot-Bang-Zustand mit der Zweipunktfunktion (wir schreiben t_0 ebenfalls für den Vierervektor $(t_0, \vec{0})$):

$$\omega_{hb}^{t_0}(\phi_0(x)\phi_0(y)) := \omega_{hb}(\phi_0(x+t_0)\phi_0(y+t_0)) \quad \text{für } x, y \in V_+^{t_0}. \quad (4.46)$$

Siehe dazu die Definitionen (3.15) sowie (3.44) des vorhergehenden Kapitels.

Das Ergebnis der Äquivalenz der Topologien gilt für das Zustandspaar $\omega_{hb}^{t_0}$ und ω_∞ aufgrund der Translationsinvarianz des Vakuumzustands:

$$\omega_\infty = \omega_\infty \circ \alpha_{t_0} = \omega_\infty^{t_0}. \quad (4.47)$$

Aus demselben Grund behält auch die Differenz von $\omega_{hb}^{t_0}(\phi_0(x)\phi_0(y))$ zu der Zweipunktfunktion vom Vakuum alle entscheidenden Eigenschaften von B_{hb} , da sie durch Verschiebung erhalten wird:

$$\begin{aligned} B_{hb}^{t_0}(x, y) &:= \omega_{hb}^{t_0}(\phi_0(x)\phi_0(y)) - \omega_\infty(\phi_0(x)\phi_0(y)) \\ &= \omega_{hb}(\phi_0(x+t_0)\phi_0(y+t_0)) - \omega_\infty(\phi_0(x+t_0)\phi_0(y+t_0)) \\ &= B_{hb}(x+t_0, y+t_0) \quad \text{für } x, y \in V_+^{t_0}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

4.3.1 Zustände über der kinematischen Feldalgebra

Da die Algebren $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ und $\mathcal{Q}(O)$ bei gegebener Zeitentwicklung gemäß der Wellengleichung isomorph sind, können deren Zustände identifiziert werden. Wir haben bis jetzt jeden quasifreien Zustand ω auf $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ durch seine Zweipunktfunktion $\omega(\phi_0(x), \phi_0(y))$ bzw. $S_\omega(f, g) = \omega(\phi_0(\bar{f})\phi_0(g))$ als Form auf den Testfunktionen mit geeignetem Träger im Minkowskiraum angegeben. Die entsprechende Zweipunktfunktion $\omega(B(F_1)^*B(F_2))$ auf der CCR-Algebra der Anfangsdaten zur Zeit 0 setzt sich aus vier Termen zusammen, vgl. (4.44), mit den Kernen (i.S.v.D.):

$$\begin{aligned} \omega(\varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y})) &= \omega(\phi_0(x)\phi_0(y))\big|_{x_0=y_0=0}, \\ \omega(\pi(\vec{x})\varphi(\vec{y})) &= \partial_{x_0}\omega(\phi_0(x)\phi_0(y))\big|_{x_0=y_0=0}, \\ \omega(\varphi(\vec{x})\pi(\vec{y})) &= \partial_{y_0}\omega(\phi_0(x)\phi_0(y))\big|_{x_0=y_0=0}, \\ \omega(\pi(\vec{x})\pi(\vec{y})) &= \partial_{x_0}\partial_{y_0}\omega(\phi_0(x)\phi_0(y))\big|_{x_0=y_0=0}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Das folgt aus der Tatsache, daß (vgl. (3.16)):

$$\varphi(\vec{x}) = \phi_0(0, \vec{x}) \quad \text{und} \quad \pi(\vec{y}) = \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \phi_0(y_0, \vec{y}) \right)_{y_0=0}, \quad (4.50)$$

siehe Abschnitt 3.2. Wir wollen auch hier kurz begründen, warum (4.49) gilt (für die erste Gleichung, die anderen sind analog):

Wir schreiben dafür Elemente von $\mathcal{Q}(O)$ der Form $\varphi(f)$ als Elemente $\phi_0(h)$ von

$\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ gemäß der Isomorphie der beiden Algebren (vgl. (3.30)) um, auf denen ja der Zustand bekannt ist:

$$\phi_0(h) = \varphi(\rho_1 Eh) + \pi(-\rho_0 Eh) = \varphi(f) + \pi(g) \quad (4.51)$$

Wir suchen also zu $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ ein $h \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ mit

$$\rho_0 Eh = 0, \quad \rho_1 Eh = f, \quad (4.52)$$

sodass $\varphi(f) = \phi_0(h)$ gilt. Dazu benötigen wir folgende Ergänzung zum Abschnitt 3.2.1 (vgl. z.B. [Dim80]):

Anm.: Die eindeutige Lösung $u \in C^\infty(\mathcal{O})$ der Wellengleichung zu den Anfangsdaten $\rho_0(u) = u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ und $\rho_1(u) = u_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ lautet

$$u = E\rho'_0 u_1 - E\rho'_1 u_0. \quad (4.53)$$

Diesen Sachverhalt haben wir bereits im Abschnitt 3.2.1 unter Benutzung des Kalküls der Distributionen verwendet. Dabei errechnen sich die adjungierten Abbildungen von ρ_0 und ρ_1 zu:

$$\begin{aligned} \rho'_0 &: \mathcal{D}(\mathcal{O})' \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})' \\ & \quad T(\vec{x}) \longmapsto T(\vec{x}) \delta(x_0), \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \rho'_1 &: \mathcal{D}(\mathcal{O})' \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})' \\ & \quad T(\vec{x}) \longmapsto -T(\vec{x}) \delta'(x_0). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Eh mit den Anfangsbedingungen (4.52) ist als Lösung der Wellengleichung (vgl. (B.2)) festgelegt und lautet nach der Anmerkung:

$$Eh = E\rho'_0 f \quad \implies \quad h(x) = (\rho'_0 f)(x) + \ker E = \delta(x_0) f(\vec{x}) + \ker E. \quad (4.56)$$

Es gibt in dieser Äquivalenzklasse Testfunktionen aus $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ (vgl. z.B. Lemma A.3 bei [Dim80]), die das gleiche $\phi_0(h)$ liefern, wie $h = \delta \otimes f$ ($\ker E = \text{Ran} \square$). Somit lautet die gesuchte Zweipunktfunktion:

$$\begin{aligned} \omega(\varphi(f)\varphi(f')) &= \int d^3x d^3y f(\vec{x}) f'(\vec{y}) \omega(\varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y})) \\ &= \omega(\phi_0(\delta \otimes f)\phi_0(\delta \otimes f')) \\ &= \int dx dy f(\vec{x}) \delta(x_0) f'(\vec{y}) \delta(y_0) \omega(\phi_0(x)\phi_0(y)) \\ &= \int d^3x d^3y f(\vec{x}) f'(\vec{y}) \omega(\phi_0(0, \vec{x})\phi_0(0, \vec{y})). \end{aligned} \quad (4.57)$$

In analoger Weise beweist man die Gleichheit aller Distributionskerne in (4.49) (i.S.v.D.). Die vorhergehenden Überlegungen haben zwar die Anwendung der Distribution mit dem Kern $\omega(\phi_0(x)\phi_0(y))$ auf $\delta \otimes f \otimes \delta \otimes f'$ mit $f, f' \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ bereits

gerechtfertigt, wir erwähnen aber auch ein anderes Argument dafür:

Da $\delta \otimes f$ für $f \in \mathcal{D}(O)$ eine Distribution mit kompaktem Träger in \mathcal{O} ist, läßt sie sich i.S.v.D. durch eine Folge der Testfunktionen $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(O)$ approximieren (vgl. z.B. [Ro99]), so dass (4.57) im Sinne dieses Limes gelesen werden kann.

Der Vakuumzustand auf der kinematischen Algebra

Aus der Zweipunktfunktion des Vakuumzustands in vier Dimensionen (3.41) sowie den Übergangsregeln zur Zeit $t = 0$ (4.49) rechnen wir die Zweipunktfunktion auf $\mathcal{Q}(O)$ aus:

$$\begin{aligned}
S_\infty(F_1, F_2) &= \omega_\infty(B(F_1)^* B(F_2)) = \omega_\infty((\varphi(\overline{f_1}) + \pi(\overline{g_1}))(\varphi(f_2) + \pi(g_2))) \\
&= \frac{1}{2} \int d^3p \left\{ \frac{1}{|\vec{p}|} \overline{\tilde{f}_1(\vec{p})} \tilde{f}_2(\vec{p}) + i \overline{\tilde{f}_1(\vec{p})} \tilde{g}_2(\vec{p}) - i \overline{\tilde{g}_1(\vec{p})} \tilde{f}_2(\vec{p}) + |\vec{p}| \overline{\tilde{g}_1(\vec{p})} \tilde{g}_2(\vec{p}) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \langle F_1, \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} F_2 \rangle \quad \text{für } F_1, F_2 \in K(O). \tag{4.58}
\end{aligned}$$

In der hermiteschen Form $(\cdot, \cdot)_\infty$ verschwinden die gemischten Terme:

$$\begin{aligned}
(F_1, F_2)_\infty &= S_\infty(F_1, F_2) + S_\infty(\overline{F_2}, \overline{F_1}) \\
&= \frac{1}{2} \int d^3p \left\{ \frac{1}{|\vec{p}|} \overline{\tilde{f}_1(-\vec{p})} \tilde{f}_2(\vec{p}) + i \overline{\tilde{f}_1(-\vec{p})} \tilde{g}_2(\vec{p}) - i \overline{\tilde{g}_1(-\vec{p})} \tilde{f}_2(\vec{p}) + |\vec{p}| \overline{\tilde{g}_1(-\vec{p})} \tilde{g}_2(\vec{p}) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^3p \left\{ \frac{1}{|\vec{p}|} \tilde{f}_2(\vec{p}) \overline{\tilde{f}_1(-\vec{p})} + i \tilde{f}_2(\vec{p}) \overline{\tilde{g}_1(-\vec{p})} - i \tilde{g}_2(\vec{p}) \overline{\tilde{f}_1(-\vec{p})} + |\vec{p}| \tilde{g}_2(\vec{p}) \overline{\tilde{g}_1(-\vec{p})} \right\} \\
&= \int d^3p \left\{ \frac{1}{|\vec{p}|} \overline{\tilde{f}_1(\vec{p})} \tilde{f}_2(\vec{p}) + |\vec{p}| \overline{\tilde{g}_1(\vec{p})} \tilde{g}_2(\vec{p}) \right\} \\
&= \langle F_1, F_2 \rangle \quad \text{für } F_1, F_2 \in K(O). \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Die Definition des Testfunktionenraums gemäß (4.42) hat also den Vorteil, dass das vom Vakuumzustand erzeugte Skalarprodukt auf $K(O)$ (das eine mit dem Hot-Bang-Zustand gemeinsame Topologie induziert, wie wir aus Abschnitt 4.2 wissen) die Form eines L_2 -Skalarprodukts hat (der Operator ω ist in der Definition der Argumente versteckt worden).

4.3.2 Übergang zum zeitspiegelungsinvarianten Zustand

[Bu]: Das gegenseitige Kompensieren der gemischten Terme $\omega_\infty(\varphi(f)\pi(g))$ bzw. $\omega_\infty(\pi(g)\varphi(f))$ im Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_\infty$ hängt mit der Zeitspiegelungsinvarianz

des Vakuumzustands zusammen. Man kann vom Hot-Bang-Zustand auf $\mathcal{P}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{Q}(\mathcal{O})$ ausgehend einen zeitspiegelungsinvarianten Zustand definieren, wobei aus seiner lokalen Normalität diese auch für den ursprünglichen $\omega_{hb}^{t_0}$ folgen wird (s. unten). Da die Zeitspiegelungsinvarianz einen wesentlichen technischen Vorteil bei der Spurklasse-Frage bringt (der fragliche Operator wird diagonal), wenden wir uns dem Zeitspiegelungsantiautomorphismus τ zu:

Der Zeitspiegelungsantiautomorphismus τ bildet in unserem Fall die Feldalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ auf sich selbst ab (da der Doppelkegel \mathcal{O} symmetrisch bzgl. der \vec{x} -Hyperebene im Minkowskiraum ist, s. Abb.3.1). τ wird von der Zeitspiegelung der Felder ($x_0 \mapsto -x_0$) erzeugt (i.S.v.D.):

$$\begin{aligned} \phi_0(x_0, \vec{x}) &\mapsto \phi_0(-x_0, \vec{x}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \phi_0\right)(y_0, \vec{y}) &\mapsto -\left(\frac{\partial}{\partial y_0} \phi_0\right)(-y_0, \vec{y}). \end{aligned}$$

Die Einschränkung auf die Zeit-0-Felder lautet (i.S.v.D.):

$$\begin{aligned} \phi_0(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}) &\mapsto \phi_0(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \phi_0\right)(0, \vec{y}) = \pi(\vec{y}) &\mapsto -\left(\frac{\partial}{\partial y_0} \phi_0\right)(0, \vec{y}) = -\pi(\vec{y}). \end{aligned}$$

Folglich ist der antilineare Automorphismus τ auf $\mathcal{Q}(\mathcal{O})$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \tau &: \varphi(f) &\mapsto \varphi(\overline{f}), \\ &\pi(g) &\mapsto -\pi(\overline{g}) \\ &1 &\mapsto 1. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Dabei muß τ antilinear sein, um die Kommutatorrelation (3.21) auf der Algebra $\mathcal{Q}(\mathcal{O})$ zu respektieren:

$$\tau[\varphi(f), \pi(g)] \stackrel{!}{=} \tau(i < \overline{f}, g > \cdot 1).$$

Definition 4.5. Ein Zustand ω_s auf $\mathcal{Q}(\mathcal{O})$ heißt zeitspiegelungsinvariant, falls gilt:

$$\omega_s(\tau A^*) = \omega_s(A) \quad \forall A \in \mathcal{Q}(\mathcal{O}).$$

Für einen zeitspiegelungsinvarianten Zustand ω_s auf $\mathcal{Q}(\mathcal{O})$ sind die gemischten

Terme in der Zweipunktfunktion festgelegt:

$$\omega_s(\varphi(\bar{f}) \pi(g)) = \omega_s(\tau(\pi(\bar{g}) \varphi(f))) = -\omega_s(\pi(g) \varphi(\bar{f})) \quad (\tau - \text{Invarianz}),$$

$$\omega_s(\varphi(\bar{f}) \pi(g)) = \omega(\pi(g) \varphi(\bar{f})) + i \langle f, g \rangle \quad (\text{CCR, s. (3.21)})$$

$$\implies \omega_s(\varphi(\bar{f}) \pi(g)) = \frac{i}{2} \langle f, g \rangle \quad \text{und analog} \quad (4.61)$$

$$\omega_s(\pi(\bar{g}) \varphi(f)) = -\frac{i}{2} \langle g, f \rangle . \quad (4.62)$$

Diese Ausdrücke stimmen mit den entsprechenden Ausdrücken im Vakuumzustand überein (vgl. (4.58)).

Für die ungemischten Algebraelemente $A = \varphi(\bar{f}_1) \varphi(f_2)$ bzw. $A = \pi(\bar{g}_1) \pi(g_2)$ folgt $\omega(\tau A^*) = \omega(A)$ in jedem Zustand ω aufgrund der kanonischen Kommutatorrelationen (3.20), die die Lokalität ausdrücken. Es folgt:

Sei ω ein beliebiger quasifreier Zustand auf $\mathcal{Q}(O)$. Dann definiert

$$\omega_s(A) := \frac{1}{2} (\omega(A) + \omega(\tau A^*)) \quad \text{für } A \in \mathcal{Q}(O)$$

einen zeitspiegelungsinvarianten Zustand mit

$$\begin{aligned} \omega_s(\varphi(\bar{f}_1) \varphi(f_2)) &= \omega(\varphi(\bar{f}_1) \varphi(f_2)), \\ \omega_s(\pi(\bar{g}_1) \pi(g_2)) &= \omega(\pi(\bar{g}_1) \pi(g_2)) \end{aligned} \quad (4.63)$$

und den gemischten Termen (4.61)-(4.62). (Dass der so definierte Zustand tatsächlich die Def. 4.5 erfüllt, überprüft man unter Benutzung der Vertauschung von τ mit der *-Operation sowie von $\tau^2 = id$ auf $\mathcal{Q}(O)$.)

Um zu zeigen, dass $\omega_{hb}^{t_0}$ lokal normal bzgl. ω_∞ ist, reicht es zu beweisen, dass der zeitspiegelungsinvariante Zustand (mit derselben Definition auf $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$):

$$\begin{aligned} \omega_{hbs}(A) &:= \frac{1}{2} (\omega_{hb}^{t_0}(A) + \omega_{hb}^{t_0}(\tau A^*)) \\ &=: \frac{1}{2} (\omega_{hb}^{t_0}(A) + \omega_{hb}^{t_0s}(A)) \quad \text{für } A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) \end{aligned} \quad (4.64)$$

diese Eigenschaft besitzt. Man benutze dazu folgende (zu der am Anfang des Kapitels angegebenen äquivalente) Definition der lokalen Normalität ([Bu], vgl. auch [Ar99]):

Definition 4.6. *Ein Zustand ω auf $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ heißt lokal normal bezüglich der Vakuumdarstellung, falls für jedes fallende Netz von positiven Operatoren $A_\nu \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$, das in der Vakuumdarstellung schwach gegen 0 konvergiert, gilt:*

$$\lim_{\nu} \omega(A_\nu) = 0 . \quad (4.65)$$

(Unter den Operatoren A versteht man die entsprechenden Darsteller $\pi_\infty(A)$ der Algebraelemente und ein Zustand ω auf $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ definiert einen Zustand φ auf $\pi_\infty(\mathcal{A}(\mathcal{O}))$ gemäß $\varphi(\pi_\infty(A)) := \omega(A)$ für $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ und wir testen mit (4.65), ob es sich dabei um einen Dichtematrixzustand auf $\pi_\infty(\mathcal{A}(\mathcal{O}))$ handelt.) Dabei heißt ein Netz A_ν fallend, falls für $\nu \geq \mu$ gilt: $A_\nu \leq A_\mu$.

Zeigen wir nun (4.65) für ω_{hbs} , so folgt diese Eigenschaft unter Benutzung der Positivität der Operatoren A_ν und der Positivität der Zustände (jeder positive Operator läßt sich ja eindeutig als Quadrat eines positiven Operators schreiben, vgl. [RS80]) auch für $\omega_{hb}^{t_0}$:

$$\omega_{hb}^{t_0}(A_\nu) = 2\omega_{hbs}(A_\nu) - \omega_{hb}^{t_0s}(A_\nu) \leq 2\omega_{hbs}(A_\nu) .$$

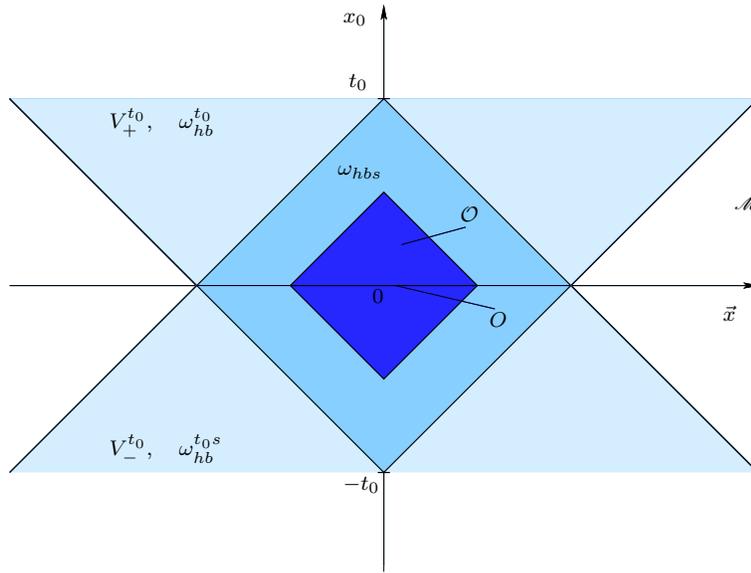


Abbildung 4.2: Übergang zum zeitspiegelungsinvarianten Zustand.

Der “zeitgespiegelte” Hot-Bang-Zustand $\omega_{hb}^{t_0s}$ besitzt die Zweipunktfunktion

$$\begin{aligned} \omega_{hb}^{t_0s}(\phi_0(f) \phi_0(g)) &= \omega_{hb}^{t_0}(\tau(\phi_0(\bar{g}) \phi_0(\bar{f}))) \\ &= \omega_{hb}^{t_0}(\phi_0(-y_0, \vec{y})(g(y)) \phi_0(-x_0, \vec{x})(f(x))) \\ &= \int dy dx g(y) f(x) \omega_{hb}^{t_0}(\phi_0(-y_0, \vec{y}) \phi_0(-x_0, \vec{x})) \\ &= \int dx dy f(x) g(y) \omega_{hb}^{t_0s}(\phi_0(x) \phi_0(y)) \end{aligned}$$

$$\implies \omega_{hb}^{t_0s}(\phi_0(x)\phi_0(y)) = \omega_{hb}^{t_0}(\phi_0(-y_0, \vec{y})\phi_0(-x_0, \vec{x})) \quad (\text{i.S.v.D.})$$

und ist somit auf dem um t_0 in positive Zeitrichtung verschobenen Rückwertslichtkegel

$$V_-^{t_0} := V_- + t_0, \quad t_0 > 0 \quad (4.66)$$

definiert (wir schreiben immer t_0 auch für den entsprechenden Vierervektor in Zeitrichtung). Folglich ist ω_{hbs} auf der Schnittmenge der verschobenen Lichtkegel $V_+^{t_0} \cap V_-^{t_0}$ definiert, die den Abschluß von unserem (beliebig aber fest gewählten) Doppelkegel \mathcal{O} enthält (s. Abb.4.2).

Da ω_∞ zeitspiegelungs- und translationsinvariant ist, gilt die im Abschnitt 4.2 für partielle Zustände ω_∞ und ω_{hb} gezeigte Äquivalenz der Topologien ebenfalls für die partiellen Zustandspaare $(\omega_\infty, \omega_{hb}^{t_0s})$, $(\omega_\infty, \omega_{hb}^{t_0s})$ und folglich auch für $(\omega_\infty, \omega_{hbs})$ auf $\mathcal{P}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{Q}(O)$. Es reicht daher, die Spurklasse-Frage für das neue Zustandspaar zu untersuchen.

4.3.3 Beweis der Spurklasse-Eigenschaft

Matrizelemente des zu untersuchenden Operators $(\widetilde{S}_{hbs} - \widetilde{S}_\infty)$ bzgl. des vom Vakuumzustand erzeugten Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)_\infty$ lauten (vgl. den 2.Punkt des Kriteriums in 4.1):

$$\begin{aligned} \left(F_1, (\widetilde{S}_{hbs} - \widetilde{S}_\infty) F_2 \right)_\infty &= S_{hbs}(F_1, F_2) - S_\infty(F_1, F_2) \\ &= (\omega_{hbs} - \omega_\infty)(B(F_1)^* B(F_2)) \\ &= (\omega_{hb}^{t_0} - \omega_\infty)(\varphi(\overline{f_1}) \varphi(f_2)) + (\omega_{hb}^{t_0} - \omega_\infty)(\pi(\overline{g_1}) \pi(g_2)) \\ &= \int d^3x d^3y \overline{f_1}(\vec{x}) f_2(\vec{y}) K_{\varphi\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) \\ &\quad + \int d^3x d^3y \overline{g_1}(\vec{x}) g_2(\vec{y}) K_{\pi\pi}(\vec{x}, \vec{y}) \\ &= \langle f_1, A_{\varphi\varphi} f_2 \rangle + \langle g_1, A_{\pi\pi} g_2 \rangle \\ &\quad \text{für } F_1, F_2 \in K(O). \end{aligned}$$

Die gemischten Terme in der zweiten Zeile verschwinden, da sie für beide zeitspiegelungsinvarianten Zustände gleich sind (Zweck des Abschnitts 4.3.2).

Für die Diagonalterme (vgl. (4.63)) haben wir folgende Bezeichnungen der Kerne eingeführt (mit einer glatten Abschneidefunktion $\chi_o|_O = 1$ mit dem Träger in

$\widehat{O} \subset V_+^{t_0}$):

$$\begin{aligned}
K_{\varphi\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) &:= \chi_o(\vec{x}) \chi_o(\vec{y}) \cdot (\omega_{hb}^{t_0} - \omega_\infty)(\varphi(\vec{x}) \varphi(\vec{y})) \\
&= \chi_o(\vec{x}) \chi_o(\vec{y}) \cdot (\omega_{hb}^{t_0} - \omega_\infty)(\phi_0(x) \phi_0(y)) \Big|_{x_0=y_0=0} \\
&= \chi_o(\vec{x}) \chi_o(\vec{y}) \cdot B_{hb}^{t_0}(x, y) \Big|_{x_0=y_0=0} \in \mathcal{D}(\widehat{O} \times \widehat{O}), \\
K_{\pi\pi}(\vec{x}, \vec{y}) &:= \chi_o(\vec{x}) \chi_o(\vec{y}) \cdot (\omega_{hb}^{t_0} - \omega_\infty)(\pi(\vec{x}) \pi(\vec{y})) \\
&= \chi_o(\vec{x}) \chi_o(\vec{y}) \cdot \partial_{x_0} \partial_{y_0} (\omega_{hb}^{t_0} - \omega_\infty)(\phi_0(x) \phi_0(y)) \Big|_{x_0=y_0=0} \\
&= \chi_o(\vec{x}) \chi_o(\vec{y}) \cdot \partial_{x_0} \partial_{y_0} B_{hb}^{t_0}(x, y) \Big|_{x_0=y_0=0} \in \mathcal{D}(\widehat{O} \times \widehat{O}). \quad (4.67)
\end{aligned}$$

Siehe dazu die Übergangsregeln (4.49) und die Bemerkung über $B_{hb}^{t_0}$ (4.48).

Die Integraloperatoren $A_{\varphi\varphi}$ und $A_{\pi\pi}$ auf dem Hilbertraum $L_2(\mathbb{R}^3)$ mit den Kernen $K_{\varphi\varphi}$ und $K_{\pi\pi}$ aus $\mathcal{D}(\widehat{O} \times \widehat{O})$ sind schon mal in der Spurklasse \mathcal{S}_1 . Auf diese (bekannte, [Bu]) Tatsache möchten wir hier kurz eingehen:

Anm.: Ein Integraloperator A auf dem Hilbertraum $L_2(\mathbb{R}^3)$ mit dem Integralkern $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ ist in der Spurklasse \mathcal{S}_1 . Als Testfunktion läßt sich nämlich K in eine Reihe faktorisierender Testfunktionen entwickeln (vgl. Satz vom Kern):

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \otimes \psi_j, \quad \phi_j, \psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3),$$

mit absoluter Konvergenz:

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(\phi_j) \cdot p(\psi_j) < \infty$$

für jede Schwartznorm p (vgl. deren Definition in (4.37)).

Es handelt sich somit bei A um eine Reihe der Rang-1-Operatoren (diese sind trivialerweise in \mathcal{S}_1) mit den Kernen $\phi_j \otimes \psi_j$ und den Spurnormen $\|\phi_j \otimes \psi_j\|_1 = \|\phi_j\|_{L_2} \cdot \|\psi_j\|_{L_2}$.

Da die Schwartzraumtopologie feiner als die L_2 -Topologie ist:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2}^2 &= \int d^3x \frac{(1 + \vec{x}^2)^2}{(1 + \vec{x}^2)^2} |f(\vec{x})|^2 \\ &\leq (p_{2,0}(f))^2 \int d^3x \frac{1}{(1 + \vec{x}^2)^2} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

konvergiert die obige Reihe in der Spurnorm wegen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\phi_j\|_{L_2} \cdot \|\psi_j\|_{L_2} < \infty.$$

Folglich ist A in der Spurklasse, da diese bzgl. der Spurnorm abgeschlossen ist.

In diesem Fall hätte wegen des kompakten Trägers auch schon die Supremumsnorm $p_{0,0}$ ausgereicht. Wir brauchen das Kriterium aber auch weiter unten. Siehe auch ein Kriterium der Spurklasse-Eigenschaft für einen Integraloperator mit schwächeren Voraussetzungen im Abschnitt 6.2.

Wir müssen die Diagonalterme jetzt bzgl. des Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)_{\infty}$ ausdrücken und die entsprechenden Operatoren auf die Spurklasse-Eigenschaft untersuchen.

Da der Operator ω im Impulsraum ein Multiplikationsoperator ist (vgl. (4.42)-(4.43)), lassen sich die obigen Matrixelemente wie folgt schreiben (vgl. auch (4.59)):

$$\begin{aligned} \left(F_1, (\widetilde{S}_{hbs} - \widetilde{S}_{\infty}) F_2 \right)_{\infty} &= \langle F_1, (\widetilde{S}_{hbs} - \widetilde{S}_{\infty}) F_2 \rangle \\ &= \langle \omega^{-1/2} f_1, \omega^{1/2} A_{\varphi\varphi} \omega^{1/2} \omega^{-1/2} f_2 \rangle \\ &\quad + \langle \omega^{1/2} g_1, \omega^{-1/2} A_{\pi\pi} \omega^{-1/2} \omega^{1/2} g_2 \rangle \\ &= \langle F_1, \begin{pmatrix} \omega^{1/2} A_{\varphi\varphi} \omega^{1/2} & 0 \\ 0 & \omega^{-1/2} A_{\pi\pi} \omega^{-1/2} \end{pmatrix} F_2 \rangle \\ &\quad \text{für } F_1, F_2 \in K(O). \end{aligned} \tag{4.68}$$

Es reicht also zu zeigen, dass die Operatoren $\omega^{1/2} A_{\varphi\varphi} \omega^{1/2}$ und $\omega^{-1/2} \chi_o A_{\pi\pi} \chi_o \omega^{-1/2}$ auf dem Hilbertraum $L_2(\mathbb{R}^3)$ in \mathcal{S}_1 sind (χ_o ist dabei der Operator der Multiplikation mit der Abschneidefunktion χ_o im Ortsraum).

Falls ein Operator AB in der Spurklasse \mathcal{S}_1 ist, ist seine Spur zyklisch: $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$. Folglich ist es hinreichend, die Operatoren $A_{\varphi\varphi}\omega$ und $\chi_o\omega^{-1}\chi_o A_{\pi\pi}$ darauf zu untersuchen, denn das positive Ergebnis würde sich auf die Ausgangsoperatoren übertragen.

- Wir zeigen, dass $\chi_o\omega^{-1}\chi_o$ ein beschränkter Operator auf $L_2(\mathbb{R}^3)$ ist, woraus die Spurklasse-Eigenschaft für $\chi_o\omega^{-1}\chi_o A_{\pi\pi}$ folgt, da \mathcal{S}_1 ein Ideal in der Algebra der beschränkten Operatoren ist (vgl. [RS80]).

[Bu]: Der Hamiltonoperator der nichtrelativistischen Quantenmechanik mit dem Coulomb-Potential besitzt eine negative Grundzustansenergie (unwichtige positive Konstanten gleich 1 gesetzt):

$$H = \vec{P}^2 - \frac{1}{|\vec{X}|} \geq -E_0. \quad (4.69)$$

Das bedeutet die Existenz einer oberen Schranke für unseren Operator ($\vec{X} \leftrightarrow \vec{P}$):

$$\tilde{\chi}_o \frac{1}{|\vec{p}|} \tilde{\chi}_o \leq (E_0 \tilde{\chi}_o + \tilde{\chi}_o \tilde{x}^2 \tilde{\chi}_o) \leq (E_0 + R^2) \tilde{\chi}_o,$$

wobei R der Radius der Kugel \hat{O} ist.

- [Bu]: Wir spalten von dem Operator $A_{\varphi\varphi}\omega$ den Operator ω/ω_m ab, was im Impulsraum wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} \omega_m(\vec{p}) &= (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}, \quad m > 0, \\ \omega(\vec{p})/\omega_m(\vec{p}) &= \frac{(\vec{p}^2)^{1/2}}{(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Wie man aus dieser Relation sieht, ist ω/ω_m beschränkt, während $\omega_m(\vec{p})$ eine glatte polynomial anwachsende Funktion ist. Folglich zerfällt der zu untersuchende Operator in das Produkt von einem Spurklasse-Operator mit einem beschränkten Operator:

$$A_{\varphi\varphi}\omega = A_{\varphi\varphi}\omega_m \cdot \frac{\omega}{\omega_m}, \quad (4.70)$$

d.h. er ist auch im Ideal \mathcal{S}_1 .

Um die Spurklasse-Eigenschaft von $A_{\varphi\varphi}\omega_m$ zu zeigen, sehen wir uns erst die Wirkung von $A_{\varphi\varphi}$ im Impulsraum an:

$$\begin{aligned} (\widetilde{A_{\varphi\varphi} f})(\vec{p}) &= \int d^3x (A_{\varphi\varphi} f)(\vec{x}) e^{-i\vec{p}\vec{x}} = \int d^3x d^3y K_{\varphi\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) e^{-i\vec{p}\vec{x}} \\ &= \int d^3x d^3y K_{\varphi\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) \int d^3q \tilde{f}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{y}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \\ &= \int d^3q \widetilde{K_{\varphi\varphi}}(\vec{p}, -\vec{q}) \tilde{f}(\vec{q}) \quad \text{für } f \in L_2(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Da $K_{\varphi\varphi}$ in $\mathcal{D}(\widehat{O} \times \widehat{O})$, also insbesondere eine Schwartzraumfunktion, ist, gilt das auch für deren Fouriertransformierte $\widetilde{K}_{\varphi\varphi}$. Es folgt (für f weiterhin aus $L_2(\mathbb{R}^3)$):

$$(\widetilde{A_{\varphi\varphi} \omega_m f})(\vec{p}) = \widetilde{A_{\varphi\varphi}} (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \widetilde{f}(\vec{p}) = \int d^3q \underbrace{\widetilde{K_{\varphi\varphi}}(\vec{p}, -\vec{q}) (\vec{q}^2 + m^2)^{1/2}}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^6)} \widetilde{f}(\vec{q}),$$

was die Spurklasse-Eigenschaft von $A_{\varphi\varphi} \omega_m$ bedeutet (s. die Anmerkung oben).

Damit ist der Beweis des zweiten Punkts im Kriterium von Araki-Yamagami abgeschlossen.

Kapitel 5

Nichtgleichgewichtszustände, die lokal thermische Eigenschaften besitzen.

5.1 Was weiß man über die Zweipunktfunktion eines lokalen Gleichgewichtszustands ?

In diesem Kapitel soll ω ein beliebiger $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand (vgl. Abschnitt 2.4) sein, wobei $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ o.B.d.A. ein Doppelkegel ist (vgl. Abschnitt 3.2). Der Raum \mathcal{S}_x in unserem Modell wurde unter 3.4 spezifiziert und besteht aus den lokalen thermischen Observablen $\theta^\mu(x)$ mit den entsprechenden makroskopischen Observablen Θ^μ . Wie in der Arbeit [Bu03], wird hier für technische Zwecke vorausgesetzt, dass die Referenzzustände ω_{B_x} des Zustands ω für $x \in \mathcal{O}$ schwach integrierbar in x sind (s. unten) und deren Temperaturträger B_x innerhalb eines kompakten $B \in V_+$ liegen.

5.1.1 Ortsabhängige Lifts der LG-Zustände zu den Makroobservablen als Distributionen

Auf dem Inhalt der Arbeit [Bu03] basierend, wollen wir in diesem Abschnitt zeigen, dass die ortsabhängigen Lifts (vgl. (2.25)) von ω zu den Makroobservablen von Interesse Distributionen sind und daher i.S.v.D. differenzierbar sind.

Nach den obengenannten Voraussetzungen an ω existiert folgendes Integral und

erlaubt die Abschätzung (s. Schwartznormen (4.37)):

$$\begin{aligned}
|\omega(\Theta^\mu)(f)| &= \left| \int dx f(x) \overline{\omega(\Theta^\mu)(x)} \right| = \left| \int dx f(x) \int_{B_x} d\rho_x(\beta) \overline{\omega_\beta(\Theta^\mu)} \right| \\
&\leq \int dx |f(x)| \cdot \sup_{B_x \subset B} \left| \int_{B_x} d\rho_x(\beta) \Theta^\mu(\beta) \right| \\
&\leq V(\mathcal{O}) \sup_{\beta \in B} |\Theta^\mu(\beta)| \cdot p_{0,0}(f), \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{5.1}
\end{aligned}$$

(Es wurden dabei die Positivität und Normiertheit des Maßes $\rho_x(\beta)$ sowie die schwache Stetigkeit der KMS-Zustände in β benutzt, s. Abschnitt 2.3.) Daher ist der Lift $\omega(\Theta^\mu)(x)$ eine Distribution auf $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Wie in der Arbeit [Bu03] gezeigt wurde, lassen sich viele interessante Makroobservablen, wie die Teilchendichte im Phasenraum oder die Entropiedichte, die nicht unter Θ^μ sind, beliebig gut durch die letzteren in Zuständen wie ω approximieren.

Nach dem Lemma 3.1 in [Bu03] gibt es für jede glatte Lösung $\Xi(\beta)$ der Wellengleichung auf V_+ zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Konstanten c_μ (vierdimensionale Tensoren m -ter Stufe) mit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, sodass folgendes gilt (mit der *zulässigen* Makroobservablen Ξ gemäß $\omega_\beta(\Xi) = \Xi(\beta)$):

$$\sup_{\beta \in B} \left| \omega_\beta \left(\Xi - \sum c_\mu \Theta^\mu \right) \right| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

$$\implies \left| \omega_{B_x} \left(\Xi - \sum c_\mu \Theta^\mu \right) \right| < \varepsilon \tag{5.3}$$

$$\iff \left| \omega_{B_x}(\Xi) - \omega \left(\sum c_\mu \Theta^\mu \right) (x) \right| < \varepsilon \quad \text{für } x \in \mathcal{O}. \tag{5.4}$$

Man kann also die thermodynamische Charakteristik von ω an der Stelle $x \in \mathcal{O}$ auf Ξ fortsetzen, indem man definiert

$$\omega(\Xi)(x) := \omega_{B_x}(\Xi). \tag{5.5}$$

Dies ist (wie oben) eine Distribution auf $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Eine für unsere Untersuchung an den LG-Zuständen wichtige makroskopische Observable ist die mittlere Phasenraumdichte der masselosen Teilchen mit der termischen Funktion (Planck'sche Formel):

$$\beta \in V_+ \longmapsto N_{\underline{p}}(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta \underline{p}} - 1}, \tag{5.6}$$

die eine glatte Lösung der Wellengleichung zu jedem $\underline{p} = (|\vec{p}|, \vec{p})$ ist.

Folglich lautet der Erwartungswert von $N_{\underline{p}}$ in ω an der Stelle $x \in \mathcal{O}$ gemäß (5.5):

$$\omega(N_{\underline{p}})(x) = \omega_{B_x}(N_{\underline{p}}) = \int_{B_x} d\rho_x(\beta) N_{\underline{p}}(\beta) =: \overline{N}(x, \underline{p}) \quad (5.7)$$

Dies ist nach dem obigen eine Distribution in x auf dem Raum $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ und stellt den Mittelwert der Planck'schen Teilchendichte im Gemisch reiner Temperaturzustände mit einem ortsabhängigen Temperaturmaß ρ_x dar.

5.1.2 Kandidaten für die Zweipunktfunktion

Von dem quasifreien LG-Zustand ω auf $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ mit oben besprochenen Eigenschaften ist es noch nicht bekannt, wie seine Zweipunktfunktion $\omega(\phi_0(x)\phi_0(y))$ aussieht. In diesem Abschnitt stellen wir einen natürlichen Kandidaten $\varphi(\phi_0(x)\phi_0(y))$ für die Zweipunktfunktion eines LG-Zustands vor (vgl. [Bu03]). Dabei stellen wir uns zwei Fragen:

- Folgt aus $\varphi(\phi_0(x)\phi_0(y))$ die erwünschte Eigenschaft für den entsprechenden Zustand (falls es diesen gibt) φ über $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$, physikalisch zu sein, mit anderen Worten lokal normal bzgl. der Vakuumdarstellung (s. dazu das vorhergehende Kapitel)?
- Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an ω wird $\varphi(\phi_0(x)\phi_0(y))$ identisch mit seiner Zweipunktfunktion sein ?

Wir werden in diesem Abschnitt den Kandidaten φ auf uns interessierende Eigenschaften untersuchen, soweit wir es uns erlauben können. Und je besser er sich zeigt, desto wichtiger ist die zweite Frage, die wir schon am Ende von diesem Abschnitt beantworten werden.

Wir fangen zum Vergleich mit den KMS-Zuständen an:

Für einen Temperaturzustand ω_β und den Vakuumzustand ω_∞ lauten die Zwei-

punktfunktionen (vgl. Abschnitt 3.3.1) und deren Differenz:

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(\phi_0(x)\phi_0(y)) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp e^{-ip(x-y)} \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \frac{1}{1 - e^{-\beta p}}, \\
\omega_\infty(\phi_0(x)\phi_0(y)) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp e^{-ip(x-y)} \theta(p_0) \delta(p^2), \\
(\omega_\beta - \omega_\infty)(\phi_0(x)\phi_0(y)) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \left\{ \frac{e^{-i\vec{p}(x-y)}}{1 - e^{-\beta \vec{p}}} - \frac{e^{i\vec{p}(x-y)}}{1 - e^{\beta \vec{p}}} - e^{-i\vec{p}(x-y)} \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \frac{\cos(\vec{p}(x-y))}{e^{\beta \vec{p}} - 1} = \int \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} N(\vec{p}, \beta) \cos(\vec{p}(x-y)). \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Die zu konstruierende Zweipunktfunktion $\varphi(\phi_0(x)\phi_0(y))$ soll mit der Bedingung der $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität, den Relationen auf der Algebra des freien Quantenfelds $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ sowie der technischen Voraussetzung am Anfang des Kapitels im Einklang stehen.

Die $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität bedeutet für den Kandidaten nach dem im Abschnitt 2.4 stehenden sowie der Definition (3.51) Erfüllung für alle $\theta^\mu \in \mathcal{S}_x$ der Gleichung (mit raumartigen Vektoren ζ):

$$\begin{aligned}
&\lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu (\varphi - \omega_\infty)(\phi_0(x + \zeta)\phi_0(x - \zeta)) \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu (\omega_{B_x} - \omega_\infty)(\phi_0(x + \zeta)\phi_0(x - \zeta)), \quad \forall x \in \mathcal{O}, \quad (5.9)
\end{aligned}$$

wobei der Referenzzustand ω_{B_x} an der Stelle $x \in \mathcal{O}$ schwach integrierbar in $x \in \mathcal{O}$ sein soll und den Temperaturträger im kompakten $B \subset V_+$ (s. oben) haben soll.

Setzt man den Ausdruck unter allen Limeszeichen in der Gleichung (5.9) auf beliebige $x, y \in \mathcal{O}$ fort, so erhält man einen Kern $\varphi(\phi_0(x)\phi_0(y))$, der nach dem

Abzug der Vakuumzweipunktfunktion wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned}
(\varphi - \omega_\infty) (\phi_0(x) \phi_0(y)) &= (\omega_{B_{(x+y)/2}} - \omega_\infty) (\phi_0(x) \phi_0(y)) \\
&= \int_{B_{(x+y)/2}} d\rho_{(x+y)/2}(\beta) (\omega_\beta - \omega_\infty) (\phi_0(x) \phi_0(y)) \\
&= \int_{B_{(x+y)/2}} d\rho_{(x+y)/2}(\beta) \int \frac{d^3p}{|\underline{p}|} N(\underline{p}, \beta) \cos(\underline{p}(x-y)) \\
&= \int \frac{d^3p}{|\underline{p}|} \int_{B_{(x+y)/2}} d\rho_{(x+y)/2}(\beta) N(\underline{p}, \beta) \cos(\underline{p}(x-y)) \\
&= \int \frac{d^3p}{|\underline{p}|} \varphi(N_{\underline{p}}((x+y)/2)) \cos(\underline{p}(x-y)) \\
&= \int \frac{d^3p}{|\underline{p}|} \overline{N}((x+y)/2, \underline{p}) \cos(\underline{p}(x-y)) =: B_\varphi(x, y), \\
&\qquad\qquad\qquad \text{für } x, y \in \mathcal{O}. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Dabei werden für das ortsabhängige positive normierte Maß $\rho_x(\beta)$ die oben erwähnten Eigenschaften vorausgesetzt.

Man erkennt die Differenz der Hot-Bang-Zweipunktfunktion zum Vakuum (vgl. (3.45))

$$B_{hb}(x, y) = \int \frac{d^3p}{|\underline{p}|} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\gamma(x+y)\underline{p}} - 1} \cos(\underline{p}(x-y)) \quad \text{für } x, y \in V_+$$

als einen Spezialfall von (5.10) mit dem ortsabhängigen Temperaturmaß

$$d\rho_{(x+y)/2}(\beta) = \delta(\beta - \gamma(x+y)) d\beta.$$

Der Ausdruck $\varphi(\phi_0(x) \phi_0(y))$ ist Zweipunktfunktion eines linearen quasifreien Funktionals φ über $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$, weil folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $\varphi(1) = 1$,
- $\varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$.

Wir überprüfen im Folgenden, ob φ die für die Linearität notwendige Bedingung:

$$\varphi(0) = 0 \tag{5.11}$$

erfüllt.

Dabei machen wir von der Proposition 4.2 der Arbeit [Bu03] Gebrauch. Es wurde dort gezeigt, dass $\overline{N}(x, \underline{p})$ i.S.v.D. folgenden Differenzialgleichungen genügt:

$$(\underline{p} \partial_x) \overline{N}(x, \underline{p}) = 0, \quad \square_x \overline{N}(x, \underline{p}) = 0 \quad \text{für } x \in \mathcal{O}. \quad (5.12)$$

Das Nullideal der Algebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ ist erzeugt von den Elementen (vgl. die Gleichungen (3.8) und (3.11)):

$$\phi_0(\square f) \quad \text{sowie} \quad [\phi_0(\overline{f}), \phi_0(g)] - \kappa(f, g) \cdot 1 \quad \text{mit } f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

1. $\varphi(\phi_0(x) \phi_0(y))$ aus (5.10) erfüllt die Feldgleichung:

$$\begin{aligned} \varphi(\phi_0(\square f) \phi_0(g)) &= \int dx dy (\square f)(x) g(y) \varphi(\phi_0(x) \phi_0(y)) \\ &= \int dx dy f(x) g(y) \square_x \varphi(\phi_0(x) \phi_0(y)) = 0. \end{aligned}$$

ω_∞ erfüllt sie nämlich und für B_φ haben wir (mit $u := (x+y)/2$) i.S.v.D.:

$$\begin{aligned} \square_x (\varphi - \omega_\infty) (\phi_0(x) \phi_0(y)) &= \square_x B_\varphi(x, y) \\ &= \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} \left\{ \frac{1}{4} \square_u \overline{N}(u, \underline{p}) \cos(\underline{p}(x-y)) - (\partial_u \underline{p}) \overline{N}(u, \underline{p}) \sin(\underline{p}(x-y)) \right. \\ &\quad \left. - \underline{p}^2 \overline{N}(u, \underline{p}) \cos(\underline{p}(x-y)) \right\} = 0 \end{aligned}$$

wegen (5.12) und $\underline{p}^2 = 0$.

Analoges gilt auch für $\square_y B_\varphi(x, y)$.

2. φ erfüllt die Kommutatorrelation, denn ω_∞ erfüllt sie und B_φ ist symmetrisch in x, y .

Es stellt sich heraus, dass $B_\varphi(x, y)$ für $(x+y)/2 \in \mathcal{O}$ eine reell analytische Funktion von $(x-y) \in \mathcal{M}$ darstellt. Damit können wir unsere zweite Frage (s. oben) schon beantworten:

Wird für die Zweipunktfunktion des in diesem Kapitel betrachteten LG-Zustands ω reelle Analytizität bzgl. der Differenzvariablen vorausgesetzt, so stimmen $\omega(\phi_0(x)\phi_0(y))$ und $\varphi(\phi_0(x)\phi_0(y))$ für $x, y \in \mathcal{O}$ überein, da beide die Bedingung der $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität (5.9) erfüllen.

Und nun zum Beweis der reellen Analytizität von $B_\varphi(x, y)$ in $(x - y)$:

5.1.3 Reelle Analytizität bzgl. der Differenzvariablen

Wir drücken B_φ (vgl. (5.10)) in bequemerer Koordinaten aus:

$$u = (x - y), \quad v = (x + y)/2;$$

$$\widehat{B}_\varphi(u, v) = \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} \cos(u\underline{p}) \overline{N}(v, \underline{p}) \quad \text{für } v \in \mathcal{O}. \quad (5.13)$$

Aus der vorausgesetzten Form von \overline{N} (s. (5.6)-(5.7)):

$$\overline{N}(v, \underline{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{B_v} d\rho_v(\beta) \frac{1}{e^{\beta \underline{p}} - 1}$$

wobei $\forall v \in \mathcal{O} \quad B_v \subset B, \quad B$ kompakt in V_+ ,

folgt sofort die Existenz einer von v unabhängigen Majoranten. Es gilt nämlich:

$$\beta \underline{p} = |\underline{p}| \left(\beta_0 - |\vec{\beta}| \cos(\vec{\beta}, \vec{p}) \right) \geq |\underline{p}| \left(\beta_0 - |\vec{\beta}| \right) \geq b_0 |\underline{p}|,$$

mit $b_0 = \inf_{\beta \in B} \left(\beta_0 - |\vec{\beta}| \right) > 0$.

Das liefert eine Abschätzung ($v \in \mathcal{O}$):

$$\overline{N}(v, \underline{p}) \leq \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{e^{b_0 |\underline{p}|} - 1} \int_{B_v} d\rho_v(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{e^{b_0 |\underline{p}|} - 1}, \quad (5.14)$$

da $\rho_v(\beta)$ ein positives normiertes Maß ist.

Die Funktion $u \mapsto \widehat{B}_\varphi(u, v)$ vom Parameter v ist in Form eines Integrals vom Fouriertyp gegeben (s. (5.13)), wobei der \vec{p} -abhängige Faktor nach dem obigen für jeden Parameterwert exponentiell abfällt. Daher vermutet man Analytizitätseigenschaft in u von vornherein.

Lemma 5.3. Die Funktion $u \mapsto \widehat{B}_\varphi(u, v)$ ist für jeden Wert des Parameters $v \in \mathcal{O}$ reell analytisch.

Beweis: Erweitere \widehat{B}_φ als Funktion von u auf komplexwertiges Argument $z = u + i\xi$:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_\varphi(z, v) &= \int \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \cos((u + i\xi)\underline{p}) \overline{N}(v, \underline{p}) \\ &= \int d^3 p f(\vec{p}, z, v) \quad \text{für } v \in \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Für $\vec{p} \neq 0$ ist der Integrand $f(\vec{p}, z, v)$ eine analytische Funktion von z (für jeden Wert des Parameters $v \in \mathcal{O}$).

Um die Analytizität von dem Integral (5.15) gemäß dem Kriterium im Anhang A zu zeigen, brauchen wir noch eine integrierbare Majorante für f . Man schätzt ab (vgl. (5.14)):

$$\begin{aligned} |f(\vec{p}, z, v)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2|\vec{p}|} \cdot |e^{(iu-\xi)\underline{p}} + e^{(-iu+\xi)\underline{p}}| \cdot \frac{1}{e^{b_0|\vec{p}|} - 1} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2|\vec{p}|} \cdot |e^{-\xi\underline{p}} + e^{\xi\underline{p}}| \cdot \frac{1}{e^{b_0|\vec{p}|} - 1}. \end{aligned}$$

Wir können nun eine Majorante $F(\vec{p})$ des Integrandes von (5.15) konstruieren, was eine Einschränkung an den Definitionsbereich von \widehat{B}_φ im Komplexen mit sich bringt:

$$|f(\vec{p}, z, v)| \leq \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{|\vec{p}|} \cdot e^{a\underline{p}} \cdot \frac{1}{e^{b_0|\vec{p}|} - 1} =: F(\vec{p}), \quad (5.16)$$

$$\text{falls } \begin{cases} -\xi\underline{p} < \underline{a\underline{p}} \\ \xi\underline{p} < \underline{a\underline{p}} \end{cases} \iff \begin{cases} (\xi + a)\underline{p} > 0 \\ (\xi - a)\underline{p} < 0 \end{cases} \text{ gilt.}$$

Das ist nach (4.16), (4.17) erfüllt, falls

$$\begin{cases} \xi \in V_+ - a \\ \xi \in V_- + a \end{cases}.$$

Die Wahl des konstanten Vektors

$$a = (a_0, \vec{0}) \quad \text{mit } 0 < a_0 < b_0 \quad (5.17)$$

garantiert die Integrierbarkeit der Majoranten F in (5.16).

Somit ist \widehat{B}_φ für jeden Wert des Parameters $v \in \mathcal{O}$ nach Anhang A auf dem Gebiet

$$G_a := \{z \in \mathbb{C}^4 : \text{Im}(z) \in (V_+ - a) \cap (V_- + a)\}$$

analytisch und daher auf den reellen Punkten von G_a , auf \mathbb{R}^4 , reell analytisch. \square

5.2 Eine hinreichende Bedingung für die lokale Normalität

Damit das normierte quasifreie Funktional φ mit der Zweipunktfunktion wie in (5.10) einen lokal normalen Zustand auf $\mathcal{P}_0(\widehat{\mathcal{O}})$ (für einen etwas kleineren Doppelkegel $\widehat{\mathcal{O}}$, dessen Abschluß in \mathcal{O} liegt) bzgl. der Vakuumdarstellung definiert, wären folgende zwei Bedingungen hinreichend (siehe das Beispiel vom Hot-Bang-Zustand):

- $S_\varphi(f, f) \geq S_\infty(f, f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{O}})$.

(Dies würde insbesondere die Positivität von φ implizieren, gegeben durch (5.10). Das ist die letzte hier fehlende Eigenschaft von φ , damit es ein quasifreier Zustand auf $\mathcal{P}_0(\widehat{\mathcal{O}})$ ist. Siehe dazu [Bu03].)

Das setzen wir hier für das weitere voraus und bezeichnen daher φ ab sofort als einen Zustand.

- Glattheit des Kerns B_φ im Gebiet $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$.

(Die Eigenschaft, eine Bilösung der Wellengleichung auf \mathcal{O} zu sein, würde sich von der oben gezeigten für B_φ als Distribution übertragen.)

Die Glattheit der Zweipunktfunktionendifferenz B_φ bzgl. der Variablen $(x+y)/2$ ist nicht so offensichtlich. Allerdings erscheint sie aus physikalischer Überlegung für die lokale Normalität des Zustands φ auch nicht notwendig zu sein ([Bu]):

Diese Variable bezeichnet die Koordinate des Punktes in \mathcal{O} , an dem der Zustand mit lokalen thermischen Observablen untersucht wird. Im Ausdruck für $B_\varphi(x, y)$ ist $(x+y)/2$ das räumliche Argument des Erwartungswerts der mittleren Phasenraumdichte (vgl. (5.10)), und sogar die Unstetigkeit von $\varphi(N_p)(x)$ würde in keinem Widerspruch zu den endlichen Energie und Dichte des Zustands stehen.

Deshalb nehmen wir eine Regularisierung des bis jetzt betrachteten Zustands φ vor, die einer Ausglättung dessen Zweipunktfunktion in der Variablen $(x+y)/2$ entspricht. Dieser Schritt ist in der Arbeit [Bu03] eingeführt worden:

5.2.1 Übergang zu einem regularisierten Zustand

Man nimmt dafür eine nichtnegative Testfunktion f mit dem Träger in einer kleinen offenen Umgebung U_o des Ursprungs von dem Minkowskiraum, für die $\int dx f(x) = 1$ gilt. Der regularisierte Zustand wird wie folgt definiert:

$$\varphi_f := \int dy f(y) \varphi \circ \alpha_y . \quad (5.18)$$

Dieser Zustand ist $\mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{O}}}$ -thermal für jedes offene Gebiet $\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{M}$, das $(\tilde{\mathcal{O}} + U_o) \subset \mathcal{O}$ erfüllt.

Es folgt sofort die Glattheit der Lifts des φ_f zu den Makroobservablen Θ^μ bzgl. $x \in \tilde{\mathcal{O}}$:

$$\begin{aligned} \varphi_f(\Theta^\mu)(x) &:= \varphi_f(\theta^\mu(x)) = \int_{U_o} dy f(y) \varphi(\theta^\mu(x+y)) \\ &= \int_{U_o} dy f(y) \varphi_{B_{x+y}}(\Theta^\mu) \\ &= \int_{U_o+x} dz f(z-x) \varphi_{B_z}(\Theta^\mu) . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Dieser Ausdruck ist glatt in x , denn jede Ableitung des Integrandes nach $x \in \tilde{\mathcal{O}}$ ist integrierbar (vgl. $f \in \mathcal{D}(U_o)$ sowie schwache Integrierbarkeit der Referenzzustände), und besitzt eine integrierbare Majorante:

$$M_n(z) := \chi(z) \cdot \sup_{y \in U_o} |f^{(n)}(y)| \cdot \sup_{\beta \in B} |\Theta^\mu(\beta)| .$$

Dabei haben wir die Abschneidefunktion $\chi \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ mit $\chi|_{U_o+\tilde{\mathcal{O}}} = 1$ eingeführt.

Die Glattheit in $x \in \tilde{\mathcal{O}}$ bekommen wir nach (5.5) auch für die Lifts von φ zu den zulässigen makroskopischen Observablen (deren termische Funktionen glatte Lösungen der Wellengleichung sind), und insbesondere für die Phasenraumdichte:

$$\begin{aligned} \varphi_f(N_{\underline{p}})(x) &:= \int_{U_o} dy f(y) \varphi_{B_{x+y}}(N_{\underline{p}}) \\ &= \int_{U_o+x} dz f(z-x) \varphi_{B_z}(N_{\underline{p}}), \quad x \in \tilde{\mathcal{O}} . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Aufgrund der Translationsinvarianz des Vakuumzustands verändert sich die Differenz der Zweipunktfunktion des regularisierten Zustands zum Vakuum gegenüber B_φ in (5.10) wie folgt:

$$\begin{aligned}
(\varphi_f - \omega_\infty)(\phi_0(x)\phi_0(y)) &= \int dy' f(y') (\varphi - \omega_\infty) \circ \alpha'_y(\phi_0(x)\phi_0(y)) \\
&= \int dy' f(y') \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|} \varphi(N_{\underline{p}})((x+y)/2 + y') \cos(\underline{p}(x-y)) \\
&= \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|} \varphi_f(N_{\underline{p}})((x+y)/2) \cos(\underline{p}(x-y)) =: B_{\varphi_f}(x, y), \\
&\quad \text{für } x, y \in \tilde{\mathcal{O}}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

5.2.2 Glattheit des regularisierten Zustands

Um die Funktion B_{φ_f} auf Glattheit zu untersuchen, drücken wir sie in bequemeren Koordinaten aus (vgl. Abschnitt 5.1.3):

$$\begin{aligned}
u &= (x - y), & v &= (x + y)/2; \\
\widehat{B}_{\varphi_f}(u, v) &= \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|} \cos(u\underline{p}) \varphi_f(N_{\underline{p}})(v), & u &\in \mathcal{M}, v \in \tilde{\mathcal{O}}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Lemma 5.4. *Die Funktion $\widehat{B}_{\varphi_f}(u, v)$ ist glatt für $u \in \mathcal{M}$ und $v \in \tilde{\mathcal{O}}$.*

Beweis:

Die C^∞ -Eigenschaft der Funktion \widehat{B}_{φ_f} in $\mathcal{M} \times \tilde{\mathcal{O}}$ ist äquivalent zu der Existenz ihrer sämtlichen gemischten partiellen Ableitungen auf diesem Gebiet.

Wir müssen also zeigen, dass $\widehat{B}_{\varphi_f}(u, v)$ eine beliebige gemischte partielle Ableitung $D_u^\mu D_v^\nu \widehat{B}_{\varphi_f}(u, v)$ in $\mathcal{M} \times \tilde{\mathcal{O}}$ besitzt, wobei wir für $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ und $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ die übliche Multiindexschreibweise verwenden.

Als Produkt glatter Funktionen für $\vec{p} \neq 0$ (was wir aus dem vorhergehenden Abschnitt wissen) ist der Integrand von (5.22) glatt auf $\mathcal{M} \times \tilde{\mathcal{O}}$. Folglich spielt die Reihenfolge der partiellen Ableitungen hier keine Rolle.

Der Integrand besitzt somit die obengenannte gemischte partielle Ableitung für $\vec{p} \neq 0$:

$$\frac{1}{|\vec{p}|} D_u^\mu D_v^\nu \cos(u\underline{p}) \varphi_f(N_{\underline{p}})(v) \tag{5.23}$$

und wir brauchen nur noch eine von u und v unabhängige Majorante dafür, um die Existenz dieser Ableitung auch für das Integral zu beweisen.

Diese haben wir uns im wesentlichen schon im Abschnitt 5.1.3 konstruiert. Gemäß (5.20) sowie (5.14) gilt:

$$\begin{aligned} \left| D_u^\mu D_v^\nu \cos(u\underline{p}) \varphi_f(N_{\underline{p}})(v) \right| &= \left| D_u^\mu \cos(u\underline{p}) \int_{U_o+v} dz D_v^\nu f(z-v) \varphi_{B_z}(N_{\underline{p}}) \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^3} V(\text{supp}(f)) \sup_y |D_y^\nu f(y)| \cdot \frac{|\vec{p}|^m}{e^{b_0|\vec{p}|} - 1} \end{aligned}$$

mit einem $b_0 > 0$.

Das liefert sofort eine integrierbare Majorante für die obige (beliebige) partielle Ableitung $D_u^\mu D_v^\nu$ des Integrandes von (5.22) für $\vec{p} \neq 0$:

$$M(\vec{p}) := c_n \cdot \frac{|\vec{p}|^{m-1}}{e^{b_0|\vec{p}|} - 1}$$

mit einer von der Höhe der partiellen Ableitung nach v abhängigen Konstanten c_n , was zu zeigen war. \square

5.2.3 Konsequenz für den Kandidatenzustand

Die erste Bedingung für die lokale Normalität von unserem Kandidatenzustand φ (s. Anfang von 5.2) haben wir vorausgesetzt und sie überträgt sich trivialerweise auf den regularisierten Zustand φ_f .

Mit dem Beweis der Glattheit der Zweipunktfunktionendifferenz für φ_f und ω_∞ auf $\mathcal{P}_0(\tilde{\mathcal{O}})$ erfüllt sich daher unsere hinreichende Bedingung für die lokale Normalität von φ_f bezüglich der Vakuumdarstellung. (Wir können diese Eigenschaft in Analogie zum Kapitel 4 für φ_f auf $\mathcal{A}(\hat{\mathcal{O}})$ mit $\tilde{\mathcal{O}} \subset \hat{\mathcal{O}}$ beweisen, da wir die erste Bedingung am Anfang von 5.2 vorausgesetzt haben.)

Laut der Definition 4.6 gilt somit für jedes fallende Netz von positiven Operatoren $A_\nu \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{O}})$ mit schwacher Konvergenz gegen 0 in der Vakuumdarstellung:

$$\begin{aligned} \lim_\nu \varphi_f(A_\nu) &= \lim_\nu \int dx f(x) \varphi \circ \alpha_x(A_\nu) \\ &= \int dx f(x) \lim_\nu \varphi \circ \alpha_x(A_\nu) = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Zur Vertauschung des Limes mit dem Integralzeichen:

Da die positiven Operatoren A_ν in der lokalen Algebra $\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$ sind und der Träger U_o der nichtnegativen Testfunktion f erfüllt (s. Abschnitt 5.2.1): $(\widehat{\mathcal{O}} + U_o) \subset \mathcal{O}$, bilden $\varphi \circ \alpha_x(A_\nu)$ positive abfallende Zahlennetze (Zustände sind ja positiv und positive Operatoren bleiben bei der Verschiebung der Testfunktionen positiv). Da 0 eine untere Schranke für die positiven fallenden Netzelemente ist, besitzt jedes Netz unter dem Integralzeichen einen Limes (der jedoch nicht notwendig gleich 0 ist):

$$\lim_{\nu} \varphi \circ \alpha_x(A_\nu) = a(x) \geq 0. \quad (5.25)$$

Um den Limes nun unter das Integralzeichen ziehen zu dürfen, braucht man noch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz (5.25) in x . Das sehen wir an der Stelle leider nicht ein, aber es wird so sein. Der Vorgang ist jedenfalls berechtigt ([Bu]).

Die regularisierende Funktion f ist nichtnegativ gewesen, wobei wir eine positive bis in den Trägerrand hinein wählen können. Dann darf im Integral (5.24)

$$\lim_{\nu} \varphi \circ \alpha_x(A_\nu) \neq 0 \quad (5.26)$$

nur für $x \in \text{supp}(f)$ aus einer Menge vom Maß 0 sein.

Durch eine Zusatzforderung der Stetigkeit des Zustands φ auf $\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$ bei den Translationen:

$$\|\varphi \circ \alpha_x - \varphi\| \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0 \quad (5.27)$$

können wir (5.26) ausschließen und die lokale Normalität für den Kandidatenzustand φ auf $\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$ bezüglich der Vakuumdarstellung folgern:

$$\lim_{\nu} \varphi(A_\nu) = 0 \quad (5.28)$$

für das obige (beliebige) fallende Netz von positiven Operatoren A_ν aus der Weil-Algebra $\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$ mit schwacher Konvergenz gegen 0 in der Vakuumdarstellung.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Auf den Arbeiten [BOR02] sowie [Bu03] basierend, haben wir uns thermische Nichtgleichgewichtszustände, die gewisse lokale thermodynamische Charakterisierung im Sinne der oben genannten Arbeiten erlauben, auf die Eigenschaft der lokalen Normalität bezüglich des Vakuumzustands angesehen. Die Frage war festzustellen, ob bzw. unter welchen (hinreichenden) Bedingungen die lokalen Gleichgewichtszustände physikalisch sind, d.h. zumindest lokal über endliche Energie- und Teilchendichte verfügen.

Als erstes haben wir im Kapitel 4 das interessante (trotz der relativ einfachen Konstruktion) Beispiel eines Hot-Bang-Zustands untersucht. Solch ein Zustand ist in der Arbeit [BOR02] eingeführt worden und beschreibt die Zukunft einer Hitzeexplosion: von einem Punkt im Minkowskiraum breitet sich im Inneren des darauf stützenden Vorwärtslichtkegels ein Teilchen- und Energiefluß aus, während der Rand des Lichtkegels singularär in der Temperatur und in der Teilchendichte ist. Wir haben für den Hot-Bang-Zustand ω_{hb} zeigen können, dass seine Restriktion auf die Weyl-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ eines beliebigen Doppelkegels \mathcal{O} , dessen Abschluß innerhalb des Definitionsgebiets von ω_{hb} liegt, ein Vektorzustand aus dem lokalen Fockraum ist. Dabei haben wir uns des Theorems von Araki-Yamagami über die Quasi-Äquivalenz von quasifreien Zuständen auf der selbstdualen CCR-Algebra bedient. Bei der Ausführung waren insbesondere die Methoden und Ratschläge [Bu] sowie die Arbeiten [Ver94] und [Dim80] eine große Stütze.

Im Kapitel 5 haben wir uns mit der Frage der lokalen Normalität für ganz allgemeine (bis auf ein paar mathematisch bequeme Voraussetzungen) $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustände beschäftigt, wobei \mathcal{O} ein beliebiges offenes konvexes Gebiet mit kompaktem Abschluß im Minkowskiraum ist, z.B. ein Doppelkegel. Die Ideen und Methoden für dieses Kapitel stammen aus der Arbeit [Bu03].

Da als einziger (bis auf die technischen) Ausgangspunkt für solche quasifreien Zustände auf der freien Feldalgebra $\mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ deren $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität zur Verfügung steht, muss man sich einen Kandidaten für deren Zweipunktfunktionen erst konstruieren, der allen oben genannten Forderungen genügt. Wir haben uns ein solches Funktional φ mit dem in [Bu03] vorgeschlagenen Kern (nach Abzug der Vakuumzweipunktfunktion):

$$\begin{aligned} B_\varphi(x, y) &= (\varphi - \omega_\infty)(\phi_0(x) \phi_0(y)) \\ &= \int \frac{d^3 p}{|\underline{p}|} \overline{N}((x+y)/2, \underline{p}) \cos(\underline{p}(x-y)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

für $x, y \in \mathcal{O}$.

angesehen, wobei

$$\overline{N}(x, \underline{p}) = \varphi(N_{\underline{p}})(x) = \int_{B_x} d\rho_x(\beta) N_{\underline{p}}(\beta) \quad (6.2)$$

der Erwartungswert der makroskopischen Observablen Phasenraumdichte $N_{\underline{p}}$ in φ an der Stelle $x \in \mathcal{O}$ ist ($\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität des Funktionals φ ist ja gerade die wichtigste Grundvoraussetzung).

Die Zweipunktfunktion des Hot-Bang-Zustands ist ein Spezialfall der Kerne von der Form $\varphi(\phi_0(x) \phi_0(y))$ mit dem punktartigen Temperaturmaß $\rho_{(x+y)/2}(\beta)$ bei $\beta = \gamma(x+y)$.

Unter den Bedingungen (zur Notation s. Kap.4):

- Die Form B_φ auf den Testfunktionen $f \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{O}})$ ist positiv:

$$S_\varphi(f, f) \geq S_\infty(f, f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{O}}),$$

wobei $\widehat{\mathcal{O}}$ ein kleinerer Doppelkegel ist, der mit seinem Abschluß in \mathcal{O} liegt;

- Stetigkeit des (nach der ersten Bedingung) Zustands φ bezüglich der Translationen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|\varphi \circ \alpha_x - \varphi\| = 0 \quad (6.3)$$

läßt sich lokale Normalität von φ bzgl. des Vakuumzustands analog zu dem Beweis für den Hot-Bang-Zustand zeigen.

Setzt man bei den Zweipunktfunktionen der ursprünglichen $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustände reelle Analytizität bzgl. der Differenzvariablen $(x-y)$ voraus, so stimmen sie mit $\varphi(\phi_0(x) \phi_0(y))$ überein.

6.2 Ausblick

Die hier angegebenen hinreichenden Bedingungen, damit das Funktional (6.1) einen physikalischen Zustand definiert, kann man vermutlich weiter abschwächen:

Wie schon unter 5.2 bemerkt wurde, sollte die Glattheit von $\varphi(\phi_0(x)\phi_0(y))$ bzgl. der Variablen $(x+y)/2$ aus physikalischen Überlegungen nicht notwendig für die lokale Normalität von φ sein, d.h. die zweite Bedingung in 5.2 ist wahrscheinlich zu hart.

Wir haben das im Abschnitt 5.2 durch die Regularisierung mit einer Testfunktion erreicht, jedoch auf Kosten einer anderen Bedingung: der Stetigkeitsforderung bei den Translationen (6.3).

Es gibt einige Ansätze für den Versuch, auf die Glattheitsforderung bei B_φ in der Mischvariablen zu verzichten ([Bu]):

- Bei dem Beweis der Äquivalenz der Topologien (1.Punkt des Kriteriums von Araki-Yamagami für die Quasi-Äquivalenz von quasifreien Zuständen) im Abschnitt 4.2.2 haben wir uns auf die Ideen der Arbeit [Ver94] gestützt. Seinen recht allgemein greifenden Formalismus der dynamischen Feldalgebra beibehaltend, haben wir die Schritte in unserem Fall des Minkowskiraums und konkreter Zustände so weit wie möglich vereinfacht. Der Autor von [Ver94] konnte den Zusammenhang zwischen der Kommutatorform (s. (3.12)) und dem Propagator $E = E^+ - E^-$ der freien Feldgleichung (Wellengleichung) geschickt ausnutzen.

Diese Idee kann man im Fall des Minkowskiraums, wo der Kommutator explizit gegeben ist, unter Benutzung der Ausdrücke (3.20)-(3.21) auch direkt auf der kinematischen Algebra anwenden. Es besteht die Hoffnung, dass man dabei einsieht, dass die Funktion $B_\varphi(x, y)$ bzgl. der Variablen $(x+y)/2$ nicht notwendig glatt sein muß.

- Die Mischvariable $(x+y)/2$ im Ausdruck für $B_\varphi(x, y)$ ist das räumliche Argument des Erwartungswerts der mittleren Phasenraumdichte. Studium der Eigenschaften von $\overline{N}(x, \underline{p})$ könnte bei der Frage über Forderungen an die $(x+y)/2$ -Abhängigkeit von $B_\varphi(x, y)$ helfen (s. nächsten Punkt).
- Der Beweis der Spurklasse-Eigenschaft (2.Punkt des Theorems von Araki-Yamagami) ist hier auf der Glattheit von $B_\varphi(x, y)$ aufgebaut worden. Würde man diese Forderung abschwächen, so sollte man diesen Beweis überdenken.

Der Kern eines Integraloperators braucht keine Testfunktion zu sein, damit

der Operator in der Spurklasse ist. Es reichen die zweifache Differenzierbarkeit und polynomialer Abfall des Kerns mit der Ordnung größer als die doppelte Raumdimension in der einen Variablen, sowie die L_2 -Eigenschaft des Kerns insgesamt ([Bu]):

Man entwickelt dazu den fraglichen Integraloperator in das Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren (Äquivalenz zu der Spurklasse-Eigenschaft, vgl. [RS80]) und benutzt dabei die Tatsache, dass die Deltafunktion die zweite Ableitung i.S.v.D. von der Betragsfunktion ist.

6.2.1 Ortsabhängigkeit der Phasenraumdichte in LG-Zuständen

Im vorhergehenden Kapitel wurde folgendes Ergebnis aus der Arbeit [Bu03] schon gebraucht, trotzdem wiederholen wir die Aussage an dieser Stelle aus Übersichtlichkeitsgründen nochmals:

In der Proposition 4.2 von [Bu03] wurde gezeigt, dass $\overline{N}(x, \underline{p})$ i.S.v.D. folgenden Differentialgleichungen genügt (\mathcal{O} ist der Doppelkegel, in dem die zu untersuchenden Zustände $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal sind.)

$$(\underline{p} \partial_x) \overline{N}(x, \underline{p}) = 0, \quad \square_x \overline{N}(x, \underline{p}) = 0 \quad \text{für } x \in \mathcal{O}. \quad (6.4)$$

In [Bu03] wurden im Ortsraum folgende an \underline{p} mit $|\underline{p}| \neq 0$ geknüpfte Koordinaten

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - (\vec{e} \vec{x}) \vec{e}, \quad \text{und} \quad x_{\pm} = x_0 \pm (\vec{e} \vec{x}), \quad \text{mit} \quad \vec{e} := \frac{\underline{p}}{|\underline{p}|} \quad (6.5)$$

mit der Rücktransformation

$$x_0 = \frac{x_+ + x_-}{2}, \quad \vec{x} = \vec{x}_{\perp} + \frac{x_+ - x_-}{2} \vec{e} \quad (6.6)$$

eingeführt.

Aus den obigen Gleichungen folgt dann ($|\underline{p}| \neq 0$):

$$\begin{cases} (\partial_{x_0}^2 - \Delta_{\vec{x}}) \overline{N}(x, \underline{p}) = 0 \\ (\partial_{x_0} - \vec{e} \partial_{\vec{x}}) \overline{N}(x, \underline{p}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta_{\perp} \overline{N}(x, \underline{p}) = 0 \\ \partial_{x_-} \overline{N}(x, \underline{p}) = 0 \end{cases}. \quad (6.7)$$

Hier ist

$$\Delta_{\perp} = (\Delta_{\vec{x}} - (\vec{e} \partial_{\vec{x}})^2) \quad (6.8)$$

der Laplace-Operator in der zu \vec{p} senkrechten Ebene. Außerdem gilt:

$$\frac{\partial \bar{N}(x, \underline{p})}{\partial x_-} = \frac{\partial \bar{N}(x, \underline{p})}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial x_-} + \frac{\partial \bar{N}(x, \underline{p})}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_-} = \frac{1}{2}(\partial_{x_0} - \vec{e} \partial_{\vec{x}}) \bar{N}(x, \underline{p}). \quad (6.9)$$

Daher hängt der ortsabhängige Erwartungswert der Phasenraumdichte in einem LG-Zustand nur von drei Ortskoordinaten ab:

$$\bar{N}(x, \underline{p}) = \bar{N}(x_+, \vec{x}_\perp, \underline{p}) \quad (6.10)$$

und ist in der \vec{x}_\perp -Richtung i.S.v.D. Lösung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung, woraus man insbesondere Glattheit in dieser Variablen folgern kann.

Anhang A

Analytizität unter dem Integralzeichen

Das Ziel von diesem Abschnitt ist festzustellen, unter welchen hinreichenden Bedingungen das Integral

$$F(z) = \int d^3p f(\vec{p}, z) \quad (\text{A.1})$$

eine analytische Funktion des Parameters z in einer offenen konvexen Teilmenge G von \mathbb{C}^n darstellt.

Die Analytizität einer Funktion mehrerer komplexer Variablen auf $G \subset \mathbb{C}^n$ ist nach [SW64] äquivalent zu ihrer Stetigkeit in allen und Analytizität in jeder einzelnen Veränderlichen in G .

Daraus ergibt sich folgendes Kriterium ([Bu]):

Ist $z \mapsto f(\vec{p}, z)$ in (A.1) eine analytische Funktion in einer offenen konvexen Teilmenge G von \mathbb{C}^n mit einer integrierbaren Majoranten

$$|f(\vec{p}, z)| \leq F(\vec{p}) \quad \text{für fast alle } \vec{p}, \quad (\text{A.2})$$

so ist $F(z)$ analytisch auf G .

Beweis: Die Stetigkeit von $F(z)$ in G folgt nach Th.16.9 in [JJo98] aus der Stetigkeit des Integrandes in G für fast alle \vec{p} und der Existenz einer integrierbaren Majoranten.

Die Analytizität von $F(z)$ in G bzgl. einer Komponente z_i ist nach dem Cauchy'schen Integralsatz äquivalent zum Verschwinden des Integrals

$$\oint_{\mathcal{C}_i} dz_i F(z) = \oint_{\mathcal{C}_i} dz_i \int d^3p f(\vec{p}, z) \quad (\text{A.3})$$

für jede geschlossene Kurve $\mathcal{C}_i \subset G$ (da G konvex ist, sind die eindimensionalen Schnitte einfach zusammenhängend). Wegen der Existenz der Majoranten (A.2) ist f integrierbare Funktion der zusammengesetzten Variablen (\vec{p}, z) , sodass der Satz von Fubini (vgl. Th.15.12 in [JJo98]) anwendbar ist:

$$\oint_{\mathcal{C}_i} dz_i F(z) = \int d^3p \oint_{\mathcal{C}_i} dz_i f(\vec{p}, z). \quad (\text{A.4})$$

Das Kurvenintegral auf der rechten Seite verschwindet für fast alle \vec{p} nach der Voraussetzung für jede Kurve wie oben. Folglich verschwindet auch das ganze Integral.

□

Anhang B

Der Propagator der Wellengleichung

Der Vollständigkeit halber wird in diesem Abschnitt der Propagator E der Klein-Gordon Gleichung zu $m = 0$, der Wellengleichung, und seine Zerlegung, von der wir unter 4.2 Gebrauch gemacht haben, ausgerechnet. E beinhaltet die Zeitentwicklung des freien skalaren masselosen Felds ϕ_0 gemäß (3.2) und spielt deshalb bei dem Zusammenhang mit den Zeit-0-Feldern (s. den Abschnitt 3.2) eine zentrale Rolle. Wir folgen den Schritten im Kapitel 3 von [BS76].

1. Formulierung des Problems.

Die Zerlegung des oben genannten Propagators E in E^+ , E^- mit den Eigenschaften:

$$\square E^\pm f = E^\pm \square f = f \quad \text{und} \quad \text{supp}(E^\pm f) \subset J^\pm(\text{supp}(f)); \quad (\text{B.1})$$

$$E = E^+ - E^- \quad \implies \quad \square E f = E \square f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad (\text{B.2})$$

entspricht der Bestimmung der retardierten, bzw. avancierten Green'schen Funktion G^\pm der inhomogenen Wellengleichung. D.h. man löst die Gleichung

$$\square G^\pm = \delta \quad (\text{B.3})$$

mit der retardierten/avancierten Randbedingung

$$G^+(x) = 0 \quad \text{für} \quad x_0 < 0 \quad \text{bzw.} \quad G^-(x) = 0 \quad \text{für} \quad x_0 > 0. \quad (\text{B.4})$$

Es ist dann

$$E^\pm = G^\pm * . \quad (\text{B.5})$$

Wir rechnen hier G^+ aus und geben für G^- das Ergebnis an, das analog zu erhalten ist.

Die Gleichung (B.3) ist i.S.v.D. gemeint, d.h. sie ist äquivalent zu

$$G^+(\square f) = \delta(f) = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad (\text{B.6})$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \quad \widetilde{G}^+(\mathcal{F}(\square f)) = \widetilde{G}^+((-p^2)\widetilde{f}) = \widetilde{\delta}(\widetilde{f}) = \int dp \frac{1}{(2\pi)^2} \widetilde{f}(p) . \quad (\text{B.7})$$

In der suggestiven Schreibweise bedeutet das

$$\overline{\widetilde{G}^+(p)(-p^2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} . \quad (\text{B.8})$$

2. Regularisierung.

Da p^{-2} wegen der nichtintegrierbaren Pole bei $p^2 = 0$ keine reguläre Distribution über $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ liefert, läßt sich (B.8) nicht einfach durch Division lösen. Man betrachtet deshalb eine regularisierte Distribution mit dem Kern

$$G_\varepsilon^+(x) := G^+(x) e^{-\varepsilon x_0} , \quad \varepsilon > 0; \quad G_\varepsilon^+(x) = 0, \quad x_0 < 0. \quad (\text{B.9})$$

Diese werden wir ausrechnen und am Ende beweisen, dass sie i.S.v.D. die gesuchte G^+ approximiert:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} G_\varepsilon^+ = G^+ , \quad (\text{B.10})$$

d.h. dass der Limes i.S.v.D. die Gleichungen (B.3) und (B.4) erfüllt.

Um die Gleichung für G_ε^+ aus der für G^+ herzuleiten, setzen wir es in die linke Seite von (B.3) ein (für die Anschauung schreiben wir dabei die Argumente mit, ersparen uns jedoch das Ausschreiben der Integrale):

$$\begin{aligned} (\square G_\varepsilon^+)(f) &= (G^+(x) e^{-\varepsilon x_0})(\square f(x)) = (G^+(x))(e^{-\varepsilon x_0} \square f(x)) \quad (\text{B.11}) \\ &= (G^+(x))(((\partial_{x_0} + \varepsilon)^2 - \Delta)(f(x) e^{-\varepsilon x_0})) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

Um (B.6) benutzen zu können, modifizieren wir die linke Seite von (B.11) passend:

$$\begin{aligned} (((\partial_{x_0} + \varepsilon)^2 - \Delta) G_\varepsilon^+(x))(f(x)) &= (G^+(x))(\square(f(x) e^{-\varepsilon x_0})) \\ &= \delta(f(x) e^{-\varepsilon x_0}) = f(0) = \delta(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \\ \iff ((\partial_{x_0} + \varepsilon)^2 - \Delta) G_\varepsilon^+ &= \delta . \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

Zur Lösung dieser Gleichung machen wir die gleichen Schritte wie oben für G^+ :

$$(G_\varepsilon^+) (((\partial_{x_0} - \varepsilon)^2 - \Delta) f) = \delta(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad (\text{B.13})$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \widetilde{G}_\varepsilon^+((-p^2 + i2p_0\varepsilon)\tilde{f}) = \tilde{\delta}(\tilde{f}) \quad (\text{B.14})$$

Da man am Ende den Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ ausführen will, spielt ε^2 in (B.13) keine Rolle (s. [BS76]). Analog zu (B.8) lautet die letzte Gleichung in der suggestiven Schreibweise

$$\overline{\widetilde{G}_\varepsilon^+(p)}(-p^2 + i2p_0\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2}. \quad (\text{B.15})$$

Durch Division dieser Gleichung erhält man eine reguläre Distribution (mit Polen außerhalb von \mathbb{R}^4) über $\mathcal{D}(\mathcal{M})$:

$$\int dp \overline{\widetilde{G}_\varepsilon^+(p)} \tilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \frac{\tilde{f}(p)}{-p^2 + i2p_0\varepsilon} \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad (\text{B.16})$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \int dx \overline{G_\varepsilon^+(x)} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx f(x) \int dp \frac{e^{ipx}}{-p^2 + i2p_0\varepsilon}.$$

Nun rechnen wir den Kern

$$G_\varepsilon^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp \frac{e^{-ipx}}{-p^2 - i2p_0\varepsilon} \quad (\text{B.17})$$

aus. Das Integral über p_0 kann man durch Anwendung des Residuensatzes berechnen:

$$I(\vec{p}, x_0) := \int dp_0 \frac{e^{-ip_0 x_0}}{p_0^2 - \vec{p}^2 + i2p_0\varepsilon}. \quad (\text{B.18})$$

Zur Bestimmung der komplexwertigen Pole des Integrandes zerlegen wir p_0 in Real- und Imaginärteil:

$$p_0 = p_0^r + ip_0^i \quad (p_0^r, p_0^i \in \mathbb{R}) \quad \implies \quad p_0^2 = p_0^{r2} - p_0^{i2} + i2p_0^r p_0^i. \quad (\text{B.19})$$

Die Pole erfüllen dann folgende Gleichungen (s. (B.18)):

$$p_0^r p_0^i + p_0^r \varepsilon = p_0^r (p_0^i + \varepsilon) = 0, \quad (\implies p_0^r = 0 \text{ oder } p_0^i = -\varepsilon) \quad (\text{B.20})$$

$$p_0^{r2} - p_0^{i2} - 2p_0^i \varepsilon - \vec{p}^2 = 0. \quad (\text{B.21})$$

$p_0^r = 0$ ist im Limes $\varepsilon \searrow 0$ nicht relevant, sonst wäre p_0^i trotz des Ansatzes nicht reell ($p_0^i = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \vec{p}^2}$, falls $p_0^r = 0$) für $\vec{p} \neq \vec{0}$. Da $\vec{p} = \vec{0}$ als

Nullmenge zum Integral über \vec{p} nicht beiträgt, ist $p_0^r = 0$ als Nullstelle ganz zu verwerfen.

Also folgt aus (B.20)-(B.21):

$$p_0^i = -\varepsilon \quad (\text{B.22})$$

$$\implies p_0^{r2} = \vec{p}^2 - \varepsilon^2. \quad (\text{B.23})$$

In der zweiten Gleichung wird ε^2 im Hinblick auf den Limes $\varepsilon \searrow 0$ weggelassen (der Unterschied wird bei diesem Grenzübergang, der erst nach der Integration auszuführen ist, verschwinden).

Somit hat der Integrand von (B.18) folgende zwei Pole für $\vec{p} \neq \vec{0}$:

$$p_0^\pm = \pm|\vec{p}| - i\varepsilon. \quad (\text{B.24})$$

Der Residuensatz ergibt nun für $I(\vec{p}, x_0)$ folgendes:

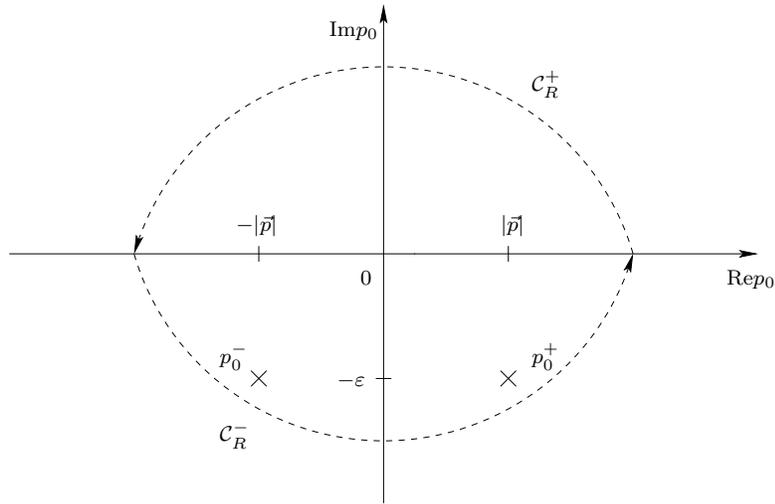


Abbildung B.1: Zur Integration von $I(\vec{p}, x_0)$.

- für $x_0 < 0$ ist $I(\vec{p}, x_0) = 0$ in Übereinstimmung mit der retardierten Randbedingung:

Das Integral verschwindet nämlich im oberen Kreisbogen C_R^+ bei $R \rightarrow \infty$ wegen

$$\left| \int_{C_R^+} dp_0 \frac{e^{ip_0|x_0|}}{p_0^2 - \vec{p}^2 + i2p_0\varepsilon} \right| \leq \pi R \cdot \frac{1}{R^2 - 2\varepsilon R - \vec{p}^2}. \quad (\text{B.25})$$

$$(|p_0^2 - (\vec{p}^2 - i2p_0\varepsilon)| \geq |p_0^2| - |\vec{p}^2 - i2p_0\varepsilon| \geq R^2 - 2\varepsilon R - \vec{p}^2)$$

Folglich ist (B.18) gleich dem Integral über den Rand des oberen Halbkreises γ^+ in der komplexen Ebene, wo der Integrand keine Pole besitzt.

- für $x_0 > 0$ ist (B.18) mit einer analogen Begründung gleich dem Integral über den Rand vom unteren Halbkreis γ^- (unter Beachtung des Umlaufsinn) in der komplexen Ebene, wo die beiden Pole p_0^\pm nichtverschwindende Residuen liefern:

$$-I(\vec{p}, x_0) = \int_{\gamma^-} dp_0 \frac{e^{-ip_0 x_0}}{(p_0 - p_0^+)(p_0 - p_0^-)} = 2\pi i \left\{ \frac{e^{-ip_0^+ x_0}}{p_0^+ - p_0^-} + \frac{e^{-ip_0^- x_0}}{p_0^- - p_0^+} \right\}$$

Damit erhalten wir für G_ε^+ bei $x_0 > 0$ gemäß (B.17):

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^+(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3 p e^{i\vec{p}\vec{x}} I(\vec{p}, x_0) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} (e^{-i(|\vec{p}|-i\varepsilon)x_0} - e^{i(|\vec{p}|-i\varepsilon)x_0}) e^{i\vec{p}\vec{x}} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} e^{-\varepsilon x_0} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} (e^{-i\vec{p}\vec{x}} - e^{i\vec{p}\vec{x}}) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

mit dem üblichen $\underline{p} = (|\vec{p}|, \vec{p})$.

Zusammen mit der Randbedingung lautet das Ergebnis:

$$G_\varepsilon^+(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \theta(x_0) e^{-\varepsilon x_0} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} (e^{-i\vec{p}\vec{x}} - e^{i\vec{p}\vec{x}}), \quad \text{d.h.} \quad (\text{B.27})$$

$$G_\varepsilon^+(f) = \frac{i}{(2\pi)} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} (\tilde{f}_\varepsilon(-\underline{p}) - \tilde{f}_\varepsilon(\underline{p})) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), \quad (\text{B.28})$$

wobei wir

$$f_\varepsilon(x) := \theta(x_0) f(x) e^{-\varepsilon x_0} \quad (\text{B.29})$$

gesetzt haben.

3. Grenzübergang zur retardierten Greenfunktion.

Der Limes (B.10) i.S.v.D. ergibt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} G_\varepsilon^+(f) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{i}{(2\pi)} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \underbrace{(\tilde{f}_\varepsilon(-\underline{p}) - \tilde{f}_\varepsilon(\underline{p}))}_{=: J_\varepsilon(\vec{p})} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{(2\pi)} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} (\tilde{f}_+(-\underline{p}) - \tilde{f}_+(\underline{p})) \\ &= (\theta(x_0) D(x))(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

mit $f_+(x) := \theta(x_0)f(x)$ und der Kommutatorfunktion D .

Wir haben dabei die Stetigkeit von $G_\varepsilon^+(f)$ bei $\varepsilon \searrow 0$ benutzt, für die nach dem Satz 16.10 in [JJo98] folgende Eigenschaften des Integrandes $(|\underline{p}|^{-1}J_\varepsilon(\underline{p}))$ in (B.30) ausreichen:

- Stetigkeit bei $\varepsilon \searrow 0$ für f.a. \underline{p} . Diese folgt aus der Stetigkeit von $\tilde{f}_\varepsilon(\underline{p})$:

$$\tilde{f}_\varepsilon(\underline{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx f_+(x) e^{-\varepsilon x_0} e^{i\underline{p}x}, \quad (\text{B.32})$$

als einem Integral über eine für alle x bei $\varepsilon \searrow 0$ stetige Funktion mit der integrierbaren Majoranten $|f_+|$ mit kompaktem Träger.

- Existenz einer ε -unabhängigen integrierbaren Majoranten. Diese besorgt man sich, kompakten Träger der Testfunktion f innerhalb einer Kugel K_R vom Radius R ausnutzend:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\underline{p}) &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{K_R} dx f_+(x) e^{-\varepsilon x_0} \sin(\underline{p}x), \\ p_1^2 J_\varepsilon(\underline{p}) &= \frac{-2}{(2\pi)^2} \int_{K_R} dx f_+(x) e^{-\varepsilon x_0} \partial_{x_1}^2 \sin(\underline{p}x) \\ \implies |J_\varepsilon(\underline{p})| &\leq \frac{C}{\underline{p}^2 + 1}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Die Konstante C enthält das Integrationsvolumen, den Vorfaktor sowie das Supremum des Integrandes in K_R .

Wir überprüfen den erhaltenen Limes von (B.16) auf Erfüllung der definierenden Eigenschaft von G^+ gemäß der Gl. (B.7):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \widetilde{G}_\varepsilon^+((-p^2)\tilde{f}) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \frac{-p^2 \tilde{f}(p)}{-p^2 + i2p_0\varepsilon} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \tilde{f}(p) + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{(-i2\varepsilon)}{(2\pi)^2} \int dp \frac{p_0 \tilde{f}(p)}{-p^2 + i2p_0\varepsilon} \\ &= \tilde{\delta}(\tilde{f}) - 2i(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon) \cdot \lim_{\varepsilon \searrow 0} G_\varepsilon^+(\partial_{x_0} f) = \tilde{\delta}(\tilde{f}) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Der zweite Limes in der letzten Zeile ist endlich, s. (B.31). Da die Trägereigenschaft offensichtlich erfüllt ist, haben wir somit:

$$G^+(x) = \theta(x_0)D(x). \quad (\text{B.34})$$

Man sieht am Ergebnis leicht die Gleichheit (B.5) ein, da die Trägereigenschaft der Abbildung G^{+*} wegen $\text{supp}(D) \subset (\overline{V}_+ \cup \overline{V}_-)$ mit (B.1) übereinstimmt.

Analog erhält man

$$G^-(x) = -\theta(-x_0)D(x), \quad (\text{B.35})$$

sodass gilt:

$$G^+ - G^- = D \quad \text{bzw.} \quad E = D * . \quad (\text{B.36})$$

Der Propagator E ist hier also eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} E : \mathcal{D}(\mathcal{M}) &\longrightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \\ f(x) &\longmapsto (D * f)(x) = \frac{i}{2\pi} \int dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \tilde{f}(p) e^{-ipx} \\ &= 2\pi i \cdot \mathcal{F}^{-1} \{ \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \tilde{f}(p) \} (x) \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^3p}{2|\underline{p}|} \{ \tilde{f}(\underline{p}) e^{-i\underline{p}x} - \tilde{f}(-\underline{p}) e^{i\underline{p}x} \}, \quad (\text{B.38})$$

die Funktionen aus $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ auf glatte Lösungen der Wellengleichung abbildet (vgl. (B.2)), was den Namen begründet. (B.37) ist i.S.v.D. zu verstehen (da die Wellengleichung keine Fourier-transformierbaren Lösungen besitzt) und zeigt die anschauliche Wirkung des Propagators im Impulsraum.

Anhang C

Liste der Symbole

Hier sind die im Text häufig vorkommenden Symbole aufgelistet.

Symbol	Bedeutung
β	Vektor aus V_+ , dessen Betrag der inversen absoluten Temperatur entspricht und die Richtung das Lorentz-Bezugssystem festlegt
B_{hb}	Differenz der Zweipunktfunktion des Hot-Bang-Zustands zu der vom Vakuumzustand
\mathcal{C}	Menge der Referenzzustände
D	die Kommutatorfunktion
$\mathcal{D}(X)$	Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in X
$\mathcal{D}(X)'$	Raum der Distributionen über $\mathcal{D}(X)$
E	der Propagator der Wellengleichung
E^\pm	Zerlegung des Propagators
f, g	Testfunktionen
H_m^+	obere Massenschale zur Masse m
\mathcal{H}	der Hilbertraum
$J^\pm(K)$	kausale Zukunft bzw. Vergangenheit von $K \subset \mathcal{M}$
$J(K)$	kausale Menge von $K \subset \mathcal{M}$
Λ	Lorentz-Transformation
\mathcal{M}	der Minkowskiraum
\mathcal{O}	Doppelkegel
\mathcal{P}	*-Algebra, polynomial erzeugt von $\phi(f)$ bzw. $\phi_0(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ und 1, zzgl. alg. Relationen
\mathcal{P}_0	das gleiche für das freie Feld
\mathcal{P}_+^\uparrow	die eigentliche orthochrone Poicaré-Gruppe

Symbol	Bedeutung
π	das kanonisch konjugierte Moment des freien skalaren masselosen Felds zur Zeit 0
\underline{p}	positiv lichtartiger Vektor im Impulsraum
\mathcal{Q}	CCR-Algebra
\mathcal{Q}_x	Vektorraum, der von allen Punktfeldern der Theorie $\phi(x)$ an der Stelle x erzeugt wird
V_+	der Vorwärtslichtkegel
$V_+^{t_0}$	der um $t_0 > 0$ gesenkte Vorwärtslichtkegel
$V_-^{t_0}$	der um $t_0 > 0$ gehobene Rückwärtslichtkegel
ϕ	lokal observables Quantenfeld
ϕ_0	das freie skalare masselose Feld
φ	das freie skalare masselose Feld zur Zeit 0

Literaturverzeichnis

- [Ar99] H.Araki: *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford University Press, New York (1999)
- [AS71] H.Araki, M.Shiraishi: *On Quasifree States of the Canonical Commutation Relations (I)* , Publ. RIMS, Kyoto Univ. **7** (1971/72) 105-120
- [AY82] H.Araki, S.Yamagami: *On Quasi-equivalence of Quasifree States of the Canonical Commutation Relations* , Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18** (1982) 283-338
- [BOR02] D.Buchholz,I.Ojima,H.Roos: *Thermodynamic Properties of Non-Equilibrium States in Quantum Field Theory*, Ann. Phys. **297** (2002) 219-242
- [BRI87] O.Bratteli, D.W.Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*, Springer, New York (1987)
- [BRI81] O.Bratteli, D.W.Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*, Springer, New York (1981)
- [BS76] N.N.Bogoliubov, D.V.Shirkov: *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Izdatel'stvo Nauka, Moskva (1976)
- [Bu] D.Buchholz: private Mitteilung
- [Bu74] D.Buchholz: *Product States for Local Algebras*, Comm. Math. Phys. **36** (1974) 287-304
- [Bu85] D.Buchholz: *Einführung in die Algebraische Quantenfeldtheorie*, Vorlesungsnotizen im SS 1985 an der Universität Hamburg
- [Bu03] D.Buchholz: *On Hot Bangs and the Arrow of Time in Relativistic Quantum Field Theory*, Comm. Math. Phys. **237** (2003) 31-68
- [Dim80] J.Dimock: *Algebras of Local Observables on a Manifold*, Comm. Math. Phys. **77** (1980) 219-228

- [Fi60] G.M.Fichtenholz: *Differential- und Integralrechnung III*, Fizmatgiz, Moskau (1960) oder Harry Deutsch, Frankfurt am Main (2001)
- [Ha96] R.Haag: *Local Quantum Physics*, Springer, Berlin (1996)
- [JJo98] J.Jost: *Postmodern Analysis*, Springer, Berlin (1998)
- [RJo65] R.Jost: *The General Theory of Quantized Fields*, American Mathematical Society, Providence, RI (1965)
- [Ro99] H.Roos: *Mathematische Methoden der Theoretischen Physik II*, Vorlesungsnotizen im WS 1998/99 an der Universität Göttingen
- [RS80] M.Reed, B.Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics I : Functional Analysis*, Academic Press, San Diego (1980)
- [SW64] R.F.Streater, A.S.Wightman: *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Benjamin, New York (1964)
- [Ver94] R.Verch: *Local Definiteness, Primarity and Quasiequivalence of Quasifree Hadamard Quantum States in Curved Spacetime*, Comm. Math. Phys. **160** (1994) 507-536