

Zustandskeime in der lokalen Quantenfeldtheorie

Diplomarbeit

vorgelegt von
Henning Bostelmann
aus Soltau

angefertigt im
Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

Mai 1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Lokale Algebren und Punktfelder	4
1.2	Algebraische Quantenfeldtheorie	6
1.3	Wightman'sche Quantenfeldtheorie	8
2	Phasenraumbedingung und Konstruktion von Punktfeldern	10
2.1	Motivation	11
2.2	Ein Kriterium	13
2.3	Reduktion	15
2.4	Lokalität der Punktfelder	22
2.5	Integration zu Wightman-Feldern	25
2.A	Eine Prä-Ordnung auf Funktionen $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$	28
2.B	Topologisierung des Raumes Θ	29
2.C	Linearformen mit polynomialen Energieschranken	31
3	Zustands- und Feldkeime	34
3.1	Formalismus nach Haag und Ojima	35
3.2	Operatoren und Gruppendarstellungen	38
3.3	Differentiation der Felder	44
3.4	Translationen	48
3.A	Keime, Halme, Prägarben	51
3.B	Dicht besetzte Folgen	53
4	Freie Feldtheorie	55
4.1	Das Modell	57
4.2	Obere Abschätzungen	59
4.3	Untere Abschätzungen	83
4.4	Freie Wightman-Felder	95
4.5	Andere Modelle	100
	Literaturverzeichnis	102
	Notationskonventionen	104

Kapitel 1

Einleitung

Die axiomatische Quantenfeldtheorie verwendet im wesentlichen zwei verschiedene mathematische Konzepte: Den algebraischen Zugang einerseits, den Wightman'schen Rahmen andererseits. Während die erste Sichtweise Vorteile bei der mathematischen Behandlung bietet, ist die zweite für die Definition konkreter Modelle vorteilhaft. Die Relationen zwischen den beiden Konzepten, konkret die Frage, wie man ein Modell vom einen Rahmen in den anderen überführt und umgekehrt, sind bisher nicht vollständig geklärt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wie sich aus einem gegebenen Modell der algebraischen Quantenfeldtheorie zugehörige Wightman-Felder konstruieren lassen. Den Schlüssel hierzu bildet eine spezielle Phasenraumbedingung: Beschränkt man sich auf Messungen in einem endlichen Raum-Zeit-Gebiet, dann finden sich in vielen Modelle „beinahe“ nur endlich viele unabhängige Zustände unterhalb einer vorgegebenen Energie. Diese „Basis des Phasenraums“ respektive die dazu dualen Objekte lassen sich als Wightman'sche Punktfelder deuten. Für sie kann man Lokalitätsbedingungen nachweisen.

Außerdem werden die anderen Wightman-Axiome für die erhaltenen Punktfelder etabliert, insbesondere die Hermitezität und die Kovarianz unter Poincaré-Transformationen. Allgemein können Darstellungen von Symmetriegruppen unter gewissen Voraussetzungen von den lokalen Algebren auf die erhaltenen Punktfelder übertragen werden. Auch die Bildung von Ableitungen der Punktfelder wird untersucht.

Schließlich wird die genannte Phasenraumbedingung in Modellen der freien Feldtheorie nachgewiesen; die besagten Punktfelder lassen sich explizit berechnen und stimmen mit denen der zugrundeliegenden Wightman'schen Theorie überein.

1.1 Lokale Algebren und Punktfelder

Unser Anliegen ist, wie bereits gesagt, die Aufklärung von Relationen zwischen algebraischer und Wightman-Quantenfeldtheorie. Wir geben hier einen Überblick über bisher bekannte Ergebnisse und den Inhalt dieser Arbeit. Dabei beschränken wir uns auf heuristische Formulierungen; alle relevanten Aussagen werden an späterer Stelle präzisiert.

Die algebraische Quantenfeldtheorie (Abschnitt 1.2) verwendet zur Formulierung physikalischer Modelle lokale C^* -Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, die man als von den im Raum-Zeit-Gebiet \mathcal{O} meßbaren Observablen erzeugt deutet. Diese Algebren bestehen aus beschränkten Operatoren; sie sind mathematisch einfach handhabbar und deshalb für die Analyse struktureller Aspekte der Quantenfeldtheorie gut geeignet.

In der Wightman'schen Quantenfeldtheorie (Abschnitt 1.3) hingegen betrachtet man lokale Quantenfelder $\phi(f)$ oder - in prägnanterer Form - punktiert lokalisierte Felder $\phi(x)$. Diese sind singuläre Objekte und in einer mathematisch strengen Analyse schwer zu behandeln. Sie sind jedoch für die Konstruktion konkreter Modelle von entscheidender Bedeutung: Man definiert spezielle Theorien üblicherweise dadurch, daß man bekannte Feldgleichungen aus „klassischen“ Theorien übernimmt und fordert, daß die Punktfelder $\phi(x)$ ihnen genügen.

Eine solche heuristische Leitlinie zur Definition von Modellen gibt es im algebraischen Rahmen nicht. Es ist daher relevant, den Zusammenhang zwischen den Punktfeldern und den lokalen Algebren zu klären.

Einerseits ist man - aufgrund der bereits in der Wightman-Theorie bekannten Modelle - daran interessiert, aus gegebenen Punktfeldern $\phi(x)$ lokale Algebren zu konstruieren. Im wesentlichen geschieht dies, indem man die $\phi(x)$ zunächst mit Testfunktionen f „verschmiert“

$$\phi(f) = \int f(x)\phi(x)d^{s+1}x, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1}), \quad (1.1.1)$$

und dann zu beschränkten Funktionen dieser im allgemeinen unbeschränkten Operatoren übergeht. Ist etwa $\phi(f)$ selbstadjungiert, dann werden die $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ erzeugt von den unitären Operatoren

$$e^{i\phi(f)}, \quad \text{supp}(f) \subset \mathcal{O}. \quad (1.1.2)$$

Diese Fragestellungen sind in der Literatur ausführlich behandelt worden (siehe [3] und die dort zitierten Publikationen).

Der umgekehrte Prozeß (mit dem sich die vorliegende Arbeit beschäftigt), also die Frage, wie man aus einem gegebenen lokalen Netz $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ punktiert lokalisierte Felder $\phi(x)$ (re)konstruiert, ist bisher nicht vollständig geklärt. Heuristisch würde man vermuten, die $\phi(x)$ im Durchschnitt aller $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ für Umgebungen \mathcal{O} von x zu finden, also eine „Algebra am Punkt“ betrachten:

$$\mathfrak{A}(x) := \bigcap_{\mathcal{O} \ni x} \mathfrak{A}(\mathcal{O}). \quad (1.1.3)$$

Es stellt sich aber heraus [9], daß unter sehr allgemeinen Bedingungen der Durchschnitt auf der rechten Seite trivial ist, nämlich nur Vielfache des Einheitsoperators enthält. Dies ist auch nicht verwunderlich: Wie schon erwähnt, sind die Punktfelder $\phi(x)$ singuläre Objekte¹. Das

¹Tatsächlich handelt es sich um unbeschränkte quadratische Formen.

erklärt sich physikalisch aus der Unschärferelation - eine im Ortsraum beliebig gut lokalisierte Messung muß einen unendlich großen Energie-Impuls-Übertrag zur Folge haben. Man kann die $\phi(x)$ also allenfalls als gewisse Grenzwerte der beschränkten lokalen Observablen erwarten. Fredenhagen und Hertel [13] bemerkten, daß man hierzu das singuläre Hochenergieverhalten der Punktfelder „dämpfen“ muß: Für $R = (1 + H)^{-1}$ und $l \in \mathbb{R}^+$ betrachteten sie

$$\bigcap_{\mathcal{O} \ni x} \overline{R^l \mathfrak{A}(\mathcal{O}) R^l}^w \quad (1.1.4)$$

und zeigten, daß man die Elemente dieses Raumes als energiegeläppte Punktfelder $R^l \phi(x) R^l$ deuten kann. Ähnliche Objekte wurden im Anschluß auch von Rehberg und Wollenberg [23] sowie Wollenberg [26] untersucht. In all diesen Überlegungen bleibt jedoch offen, ob (bzw. unter welchen Bedingungen) nicht auch die Durchschnitte (1.1.4) trivial sind. Zudem ist ein solcher Ansatz wenig „konstruktiv“ im engeren Sinne; er liefert kaum Informationen über die weitere Struktur der Wightmanfelder.

Eine sehr viel explizitere Konstruktionsmöglichkeit bietet sich im Fall dilatationsinvarianter Theorien. Hier hat man die Darsteller $D(\lambda)$ der Dilatationen zur Verfügung, um Punktfelder aus lokalen Observablen zu erhalten. So bemerkten Buchholz und Fredenhagen [6], daß man (heuristisch) folgendes Verhalten der $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ finden sollte:

$$D(\lambda) A D(\lambda)^{-1} = (\Omega | A \Omega) \mathbf{1} + \lambda \phi(0) + o(\lambda) \quad (1.1.5)$$

mit einem Punktfeld $\phi(0)$. Fredenhagen und Jörß [14] führten eine ähnliche Konstruktion in einem speziellen Modell, der 2-dimensionalen konformen chiralen Theorie eines reellen skalaren Teilchens, sehr explizit durch; sie erhalten Punktfelder $\phi(0)$ als Limiten

$$\lambda^{-n} D(\lambda) A \Omega \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \phi(0) \Omega. \quad (1.1.6)$$

Diese Vorgehensweise läßt noch Verallgemeinerungen zu [18], bleibt aber prinzipiell auf dilatationsinvariante Modelle beschränkt: Die $D(\lambda)$ sind in allgemeineren Situationen schlicht nicht verfügbar, nicht einmal in Theorien freier massiver Teilchen.

Ein anderer Zugang wurde kürzlich von Haag vorgeschlagen [15] und von Haag und Ojima näher ausgeführt [17]. Die beiden Autoren betrachten den von den lokalen energiebeschränkten Zuständen aufgespannten Raum $\Sigma_E(\mathcal{O})$. Die $\Sigma_E(\mathcal{O})$ bilden mathematisch gesehen eine Prägarbe, und ihr Verhalten „am Punkt“ wird durch deren Keime beschrieben; man analysiert also z.B. für Standarddoppelkegel \mathcal{O}_r vom Radius r das Verhalten von $\Sigma_E(\mathcal{O}_r)$ für $r \rightarrow 0$.

Die Elemente von $\Sigma_E(\mathcal{O})$ sind gleichzeitig in Orts- und Impulsraum gut lokalisierte Objekte; man kann daher Nutzen aus den bekannten Phasenraumeigenschaften von Theorien [8] ziehen: $\Sigma_E(\mathcal{O}_r)$ sollte sich gut durch endlichdimensionale Räume approximieren lassen. Haag und Ojima vermuteten nun, daß es eine r -unabhängige Basis dieser endlichdimensionalen Räume gibt, deren Elemente quasi die „Zustände am Punkt“ beschreiben. Als Basis des Dualraums sollte man dann die gesuchten Punktfelder ϕ erhalten. Diese Überlegungen waren ebenfalls durch die dilatationsinvariante Theorie motiviert; die Autoren verdeutlichen ihre Überlegungen (sehr heuristisch) am Beispiel eines reellen skalaren masselosen freien Feldes. Da jedoch die Dilatationen nicht explizit verwendet werden, lassen sich die genannten Prinzipien leicht auf andere Modelle übertragen.

Die vorliegende Arbeit greift die von Haag und Ojima vorgeschlagene Methode auf und konstruiert lokale Punktfelder $\phi(x)$ aus vorgegebenen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ unter Verwendung einer speziellen Phasenraumbedingung.

Diese Phasenraumbedingung wird in Kapitel 2 zunächst motiviert und dann präzise formuliert; mit ihrer Hilfe lassen sich Punktfelder $\phi(x)$ und schließlich Wightman-Felder $\phi(f)$ konstruieren, welche die gewünschte Lokalisierungsbedingung erfüllen. Wir weichen dabei etwas von dem von Haag und Ojima betrachteten Rahmen ab, da es sich als wesentlich herausstellt, nicht nur $\Sigma_E(\mathcal{O})$ bei festem E , sondern auch den Limes $E \rightarrow \infty$ betrachten zu können.

In Kapitel 3 kehren wir im eigentlichen Sinn zur Analyse der Keime von $\Sigma_E(\mathcal{O})$ zurück und etablieren die von Haag und Ojima vermuteten Strukturen. Außerdem werden die Darstellungen von Symmetriegruppen von den $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ auf die Keime respektive die erwähnten endlichdimensionalen Räume übertragen. Dies erlaubt uns, die Hermitezität der Punktfelder und ihre Kovarianz unter der Poincaré-Gruppe zu etablieren. Außerdem werden die Ableitungen der Punktfelder untersucht, die zur Formulierung von Feldgleichungen notwendig sind.

Kapitel 4 schließlich weist die aufgestellte Phasenraumbedingung in einem konkreten Modell nach, und zwar in der freien Feldtheorie, speziell für ein reelles skalares (massives oder masseloses) freies Feld in $s \geq 3$ räumlichen Dimensionen. Wir berechnen explizit die in Kapitel 2 allgemein konstruierten Punktfelder und zeigen, daß sie mit dem definierenden Feld $\phi(x)$ und seinen Funktionen übereinstimmen.

Einige Aspekte der Konstruktion, die mehr mathematischer Natur sind oder für sich selbst genommen interessieren, sind in Anhängen zu den betreffenden Kapiteln oder Abschnitten angeordnet. Dem Leser, der bei den zahlreichen verwendeten Kurzschreibweisen und Definitionen den Überblick verloren hat, sei außerdem die Zusammenstellung der Notationskonventionen ab Seite 104 empfohlen.

1.2 Algebraische Quantenfeldtheorie

Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie [16] verwendet als Grundobjekt ein *Netz von Algebren*, d.h. eine Abbildung²

$$\mathcal{O} \mapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O}), \quad (1.2.1)$$

die jeder offenen Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{s+1}$ des Minkowskiraums eine C^* -Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ zuordnet; dabei fordert man Isotonie:

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2) \quad \text{für } \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2. \quad (1.2.2)$$

Physikalisch stehen die lokalen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ - respektive ihre selbstadjungierten Elemente - für die im Gebiet \mathcal{O} meßbaren Observablen. Deren relativistische Lokalisierung läßt sich dann durch die algebraischen Relationen beschreiben: Sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 raumartig getrennt, dann stellt man die *Lokalisierungsbedingung*

$$[A_1, A_2] = 0 \quad \text{für } A_i \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_i). \quad (1.2.3)$$

Weiterhin ist eine Darstellung $\alpha_{\Lambda, x}$ der Poincaré-Gruppe³ \mathfrak{P} durch Automorphismen des Netzes $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ gegeben, die geometrisch auf den lokalen Algebren wirkt:

$$\alpha_{\Lambda, x} \mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(\Lambda \mathcal{O} + x). \quad (1.2.4)$$

²Mathematisch handelt es sich dabei um eine Prä-Kogarbe, das duale Objekt zu den in Anhang 3.A besprochenen Prägarben.

³Präziser ist hier und im folgenden mit \mathfrak{P} die Zusammenhangskomponente der 1 in der Poincaré-Gruppe gemeint (sonst oft mit \mathfrak{P}_1^\dagger bezeichnet). Analog ist \mathfrak{L} die 1-Zusammenhangskomponente der Lorentzgruppe.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Analyse des *Vakuumsektors* eines solchen Netzes: Wir nehmen die $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ als schwach abgeschlossene Unteralgebren von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ für einen Hilbertraum \mathcal{H} an, also als von-Neumann-Algebren. Weiter sei die Darstellung α *unitär implementiert*, d.h. sie rühre von einer unitären Darstellung $U(\Lambda, x)$ von \mathfrak{P} auf \mathcal{H} her:

$$\alpha_{\Lambda, x}(\cdot) = U(\Lambda, x) \cdot U(\Lambda, x)^*. \quad (1.2.5)$$

$U(\Lambda, x)$ soll bezüglich der starken Operortopologie stetig in Λ, x sein. Dann kann $U(\Lambda, x)$ als Exponentialfunktion seiner selbstadjungierten Generatoren geschrieben werden; man hat etwa für die Translationen

$$U(\mathbf{1}, x) \equiv U(x) = e^{iP_\mu x^\mu}. \quad (1.2.6)$$

Die unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren P_μ ($\mu = 0 \dots s$) werden als Energie-Impuls-Operatoren interpretiert; speziell ist $H = P_0$ der Hamilton-Operator. Seine Spektralprojektoren auf das Intervall $[0, E]$ bezeichnen wir mit $P(E)$. Die Darstellung U soll die *Spektrumsbedingung* erfüllen, d.h. das gemeinsame Spektrum der kommutierenden Operatoren P_μ liege im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel („Positivität der Energie“). Schließlich gebe es in \mathcal{H} einen unter allen $U(\Lambda, x)$ invarianten Vektor Ω („das Vakuum“), der bis auf skalare Faktoren eindeutig bestimmt sei. Er erfüllt dann $P(E)\Omega = \Omega \forall E > 0$.

Wir haben die lokalen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ als von-Neumann-Algebren vorausgesetzt, um eine weitere mathematische Struktur zur Verfügung zu haben, nämlich ihren *Prädualraum*: Der Raum der normalen (d.h. linearen und ultraschwach stetigen) Funktionale auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ sei mit Σ bezeichnet; er ist identisch mit dem Raum der Spurklasseoperatoren $\mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$ auf \mathcal{H} , wobei $\rho \in \mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$ ein $\sigma \in \Sigma$ induziert durch

$$\sigma(\cdot) = \text{tr}(\rho \cdot). \quad (1.2.7)$$

Σ wird mit der Supremumsnorm (entsprechend der Spurnorm auf $\mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$) zu einem Banachraum, dessen Dualraum gerade $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ist:

$$\Sigma^* = \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \quad \text{auch notiert als } \Sigma = \mathfrak{B}(\mathcal{H})_* . \quad (1.2.8)$$

Die positiven normierten Elemente von Σ können als physikalische Zustände des betrachteten Systems gedeutet werden.

Wir definieren für offenes $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{s+1}$ außerdem

$$\Sigma(\mathcal{O}) := \Sigma[\mathfrak{A}(\mathcal{O})]; \quad (1.2.9)$$

dann gilt analog zu (1.2.8)

$$\Sigma(\mathcal{O})^* = \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \quad \text{bzw.} \quad \Sigma(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(\mathcal{O})_* . \quad (1.2.10)$$

In unserer Analyse ist noch der Raum der energiebeschränkten normalen Funktionale wichtig: Für $E > 0$ sei

$$\Sigma_E := P(E)\Sigma P(E), \quad \Sigma_E(\mathcal{O}) := \Sigma_E[\mathfrak{A}(\mathcal{O})]; \quad (1.2.11)$$

dabei schreiben wir $P(E)\sigma P(E) = \sigma(P(E) \cdot P(E))$ für $\sigma \in \Sigma$. Man hat dann

$$\Sigma_E^* = P(E)\mathfrak{B}(\mathcal{H})P(E) =: \mathfrak{A}_E, \quad \Sigma_E(\mathcal{O})^* = P(E)\mathfrak{A}(\mathcal{O})P(E) =: \mathfrak{A}_E(\mathcal{O}). \quad (1.2.12)$$

Die $\Sigma(\mathcal{O})$ und ebenso die $\Sigma_E(\mathcal{O})$ bilden jeweils eine Prägarbe im Sinne von Anhang 3.A.

1.3 Wightman'sche Quantenfeldtheorie

Die Wightman'sche Quantenfeldtheorie [25] formuliert man mit Hilfe von Feldern (unbeschränkten Operatoren) $\phi(f)$. Wir beschränken uns hier auf den Fall von Bose-Feldern; sie bzw. ihre selbstadjungierten Funktionen repräsentieren dann die physikalischen Observablen. Genauer betrachtet man folgende Struktur:

Zunächst ist ein Hilbertraum \mathcal{H} gegeben, auf dem eine unitäre, stark stetige Darstellung $U(\Lambda, x)$ von \mathfrak{P} wirkt. Wie in Abschnitt 1.2 bezeichnen wir die Generatoren der Translation mit P_μ ; sie mögen der Spektrumsbedingung genügen. Außerdem gebe es einen bis auf einen Faktor eindeutigen U -invarianten Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$.

Unter einem Quantenfeld bzw. einem Satz von Quantenfeldern $\phi_1 \dots \phi_n$ versteht man nun folgendes:

- Die ϕ_j sind operatorwertige temperierte Distributionen, d.h. sie sind lineare Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$ in die Menge der (nicht notwendig beschränkten) linearen Operatoren auf \mathcal{D} , wobei $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ ein dichter Unterraum ist. Man betrachtet also unbeschränkte Operatoren $\phi_j(f)$ auf einem gemeinsamen Definitionsbereich \mathcal{D} . Für $\psi, \xi \in \mathcal{D}$ ist das Matrixelement $(\psi | \phi_j(f) \xi)$ stetig in f bezüglich der Laurent-Schwartz-Topologie („Temperiertheit“).
- Der Definitionsbereich \mathcal{D} ist nicht nur dicht in \mathcal{H} , sondern auch invariant unter Anwendung der $U(\Lambda, x)$ und $\phi_j(f)$; ferner ist $\Omega \in \mathcal{D}$.
- Die adjungierten Operatoren $\phi_j(f)^*$ sind ebenfalls in der Menge der Felder enthalten:

$$\phi_j(f)^* = \phi_k(f) \quad \text{mit zu } j \text{ geeignet gewähltem } k. \quad (1.3.1)$$

Dies gilt als Operatorgleichung auf \mathcal{D} .

- Die ϕ_j erfüllen kausale Vertauschungsrelationen, d.h. für Testfunktionen f, g mit raumartig getrenntem Träger gilt

$$[\phi_j(f), \phi_k(g)] = 0, \quad j, k = 1 \dots n, \quad (1.3.2)$$

wieder als Gleichung auf \mathcal{D} .

- Es gibt eine endlichdimensionale Matrixdarstellung S_{jk} von \mathfrak{L} , so daß

$$U(\Lambda, x) \phi_j(f) U(\Lambda, x)^* = \sum_{k=1}^n S_{jk}(\Lambda^{-1}) \phi_k(f_{\Lambda, x}), \quad (1.3.3)$$

wobei

$$f_{\Lambda, x}(y) = f(\Lambda^{-1}(y - x)). \quad (1.3.4)$$

Zusätzlich wird oft noch gefordert, daß die $\phi_j(f)$ eine Vollständigkeitsrelation erfüllen: Die Menge der Polynome der ϕ_j soll, angewandt auf Ω , eine in \mathcal{H} dichte Menge ergeben. Wir werden diesen Aspekt jedoch hier nicht berücksichtigen.

Die oben gewählten Testfunktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$ sind im allgemeinen komplexwertig. Wir beschränken uns bei der Konstruktion von Feldern jedoch stets auf *reellwertige* Testfunktionen. Ein für reellwertiges f erklärtes Feld $\phi(f)$ kann man dann vermöge der Gleichung

$$\phi_{\mathbb{C}}(f) := \phi(\operatorname{Re}f) + i\phi(\operatorname{Im}f) \quad (1.3.5)$$

immer zu einem komplex-linearen Feld $\phi_{\mathbb{C}}$ fortsetzen.

Häufig betrachtet man statt der $\phi(f)$ auch punktartig lokalisierte Felder $\phi(x)$; diese sind dann nicht als Operatoren, sondern nur als quadratische Formen auf $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ definiert. Die $\phi(f)$ ergeben sich aus ihnen durch „Versmieren“ mit einer Testfunktion:

$$\phi(f) = \int d^{s+1}x f(x)\phi(x). \quad (1.3.6)$$

Wir werden diese heuristische Formel in Abschnitt 2.5 genauer präzisieren. Die obigen Bedingungen lassen sich fast alle in analoger Weise auch für die $\phi(x)$ aufstellen. Probleme bereitet dabei aber die Lokalisierforderung: Da das Produkt zweier quadratischer Formen sich im allgemeinen nicht definieren läßt, machen Kommutatorrelationen wie (1.3.2) für die $\phi(x)$ keinen Sinn. Für eine exakte Formulierung muß man hier auf die Operatoren $\phi(f)$ ausweichen.

Kapitel 2

Phasenraumbedingung und Konstruktion von Punktfeldern

Zu Beginn unserer Analyse von algebraischen Quantenfeldtheorien „am Punkt“ werden wir jetzt eine Phasenraumbedingung aufstellen, die uns die Konstruktion punktartig lokalisierter Felder ermöglicht.

Die gesuchte Bedingung verlangt im wesentlichen, daß es für die Räume $\Sigma_E(\mathcal{O}_r)$ ein Erzeugendensystem gibt, das einerseits aus „fast endlich vielen“ Elementen besteht und andererseits unabhängig von E und r ist. Wir werden in Abschnitt 2.1 zunächst in Anlehnung an [17] heuristisch motivieren, warum ein solches Verhalten in physikalisch relevanten Fällen zu erwarten ist. In Abschnitt 2.2 formulieren wir die genannte Bedingung dann präzise; mathematisch fordert sie die Existenz einer Reihenentwicklung der Inklusionsabbildung $\bigcup_E \Sigma_E \hookrightarrow \Sigma$, die in einer speziell dafür formulierten Topologie konvergiert.

Wir wollen die Elemente des erwähnten Erzeugendensystems (bzw. die Summanden der genannten Reihenentwicklung) als Wightman'sche Punktfelder deuten. Dazu ist es aber zunächst notwendig, in gewissem Sinne lineare Abhängigkeiten zwischen ihnen zu entfernen, also zu einer „Basis des Phasenraums“ überzugehen; diesem Zweck dient die Konstruktion in Abschnitt 2.3. Danach können wir die Basiselemente als lokale Punktfelder $\phi_j(x)$ etablieren (Abschnitt 2.4), wobei wir die in [13] vorgeschlagene Lokalisierungsbedingung verwenden. Mit den dort entwickelten Methoden können die Punktfelder schließlich zu Wightman-Feldern $\phi_j(f)$ ausintegriert werden; dies geschieht in Abschnitt 2.5.

2.1 Motivation

Es ist unser Ziel, aus den lokalen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ Quantenfelder im Wightman'schen Sinne zu konstruieren. Wir geben dazu zunächst einige heuristische Bemerkungen, wie und unter welchen Voraussetzungen diese Konstruktion gelingen kann.

Um ein punktförmig lokalisiertes Feld $\phi(x)$ - wir beschränken uns im folgenden auf $x = 0$ - zu erhalten, sollte man es im Durchschnitt alle $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ für $r > 0$ suchen. Dabei bezeichnet \mathcal{O}_r den Standard-Doppelkegel vom Radius r um den Koordinatenursprung:

$$\mathcal{O}_r = \{x \in \mathbb{R}^{s+1} \mid |x^0| + |\vec{x}| < r\}. \quad (2.1.1)$$

Wie in Abschnitt 1.1 bereits erwähnt, muß man gewisse Grenzwerte zum Durchschnitt der Algebren hinzunehmen, um ein nichttriviales Ergebnis zu erhalten; da die $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ bereits schwach abgeschlossen sind, muß man Grenzwerte in anderen als den sonst üblichen Topologien betrachten.

Ohnehin sind die Punktfelder $\phi = \phi(0)$ typischerweise singuläre Objekte - sie sind im allgemeinen nicht als Operatoren, sondern nur als quadratische Formen definiert, lassen sich also schlecht durch die beschränkten Operatoren aus $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ approximieren. Der Grund für die Unbeschränktheit der Punktfelder ist, wie schon gesagt, in ihrem schlechten Hochenergieverhalten zu suchen (bedingt durch die Unschärferelation). Tatsächlich existieren in vielen Modellen die $P(E)\phi P(E)$ als beschränkte Operatoren; es liegt daher nahe, zunächst diese durch Elemente aus $P(E)\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)P(E)$ zu approximieren.

Von den Räumen $\mathfrak{A}_E(\mathcal{O}_r) = P(E)\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)P(E)$ bzw. ihren (Prä-)Dualräumen $\Sigma_E(\mathcal{O}_r) = \Sigma_E[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)]$ nimmt man oft an, daß sie gewisse *Phasenraum-Bedingungen* erfüllen: Es handelt sich hier um Objekte, die gleichzeitig im Orts- wie im Impulsraum mehr oder weniger scharf lokalisiert sind. Betrachtet man etwa in der Quantenmechanik ein ideales Gas im Kasten (also im Ortsraum lokalisiert), dann gibt es unterhalb einer vorgegebenen Energie E nur einen endlichdimensionalen Raum von Wellenfunktionen bzw. Zuständen des Systems. Übertragen auf die Quantenfeldtheorie könnte man also heuristisch vermuten, daß die $\Sigma_E(\mathcal{O}_r)$ endlichdimensional sind; das heißt, die Abbildung

$$\Xi_{E,r} : \Sigma_E \rightarrow \Sigma(\mathcal{O}_r), \sigma \mapsto \sigma[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)] \quad (2.1.2)$$

sollte ein endlichdimensionales Bild besitzen. Das ist so nicht der Fall, da in der Quantenfeldtheorie keine gleichzeitig in Orts- und Impulsraum scharf lokalisierten Objekte existieren. Die Endlichdimensionalität wird aber „fast“ erreicht: In Modellen der freien Feldtheorie wiesen Buchholz und Porrman [8] nach, daß sich $\Xi_{E,r}$ in gewisser Weise als Reihe von Rang-1-Operatoren schreiben läßt:¹

$$\Xi_{E,r} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \sigma_j; \quad \sigma_j \in \Sigma(\mathcal{O}_r), \phi_j \in P(E)\mathfrak{B}(\mathcal{H})P(E). \quad (2.1.3)$$

Die in [8] konstruierten σ_j und ϕ_j hängen dabei explizit von E und, wenn man gute Abschätzungen für die Normen der σ_j erhalten möchte, auch von r ab.

¹Tatsächlich ist die Abbildung $\Xi_{E,r}$ nuklear. Ähnliche *Nuklearitäts-* und schwächere *Kompaktheits-Kriterien* wurden auch in [7], [12] behandelt; als „Energiedämpfungsfaktor“ diente dabei meist $e^{-\beta H}$ und nicht $P(E)$, was für heuristische Überlegungen aber ohne Belang ist.

Man kann nun fragen, ob es möglich ist, die σ_j und ϕ_j unabhängig von E und r (*skalenunabhängig*, wie wir im folgenden schreiben) zu wählen. Zumindest in dilatationsinvarianten Theorien kann man erwarten, daß

$$\Xi_{E,r} = \sum_{j=1}^{\infty} P(E) \phi_j P(E) \cdot \sigma_j [\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)], \quad (2.1.4)$$

wobei die ϕ_j und σ_j skalenunabhängige Objekte sind; die ϕ_j sind allerdings nicht mehr Operatoren, sondern quadratische Formen (wir werden dies in Abschnitt 2.2 präzisieren). Analoges wird man in jeder Theorie mit Ultraviolett-Fixpunkt vermuten, jedenfalls für große E und kleine r .

Man kann (2.1.4) jetzt als eine Entwicklung der lokalisierten Zustände „nach Größen am Punkt“ auffassen; die $\phi_j \sigma_j$ bilden quasi eine Basis des Phasenraums. Insofern liegt es nahe, in den ϕ_j die gesuchten Punktfelder zu vermuten - wir werden später sehen, daß sie dies im wesentlichen bereits sind.

Hier tritt ein entscheidender Unterschied zwischen unserem Ansatz und dem von Haag und Ojima [17] vorgeschlagenen Formalismus auf: Die beiden Autoren betrachten Σ_E bei festgehaltenem E und analysieren dann die Keime der Prägarbe $\Sigma_E(\mathcal{O})$; sie benötigen dazu in unserem Sinne eine r -, nicht aber eine E -unabhängige Basis. Für eine Konstruktion von Punktfeldern reicht dieser Rahmen aber nicht aus: Wie die Autoren selbst bemerken [17, p. 388], kann das Verhalten der Struktur mit wachsendem E so im allgemeinen nicht kontrolliert werden. Dies ist aber notwendig, da man, um die Lokalität der Felder nachzuweisen, den Limes $E \rightarrow \infty$ betrachten muß (Abschnitt 2.4).

Der hier vorgestellte Ansatz mit E - und r -unabhängigen Größen hat demgegenüber den Nachteil, daß man die Existenz der Punktfelder ϕ_j scheinbar bereits mit der benötigten Phasenraumbedingung (2.1.4) voraussetzt. Andererseits läßt sich mit demselben Argument, mit dem man die Existenz einer r -unabhängigen Basis in (2.1.4) vermutet, auch eine E -unabhängige Basis heuristisch begründen.

Ein weiterer, von Haag und Ojima hervorgehobener Aspekt wird in unserer Konstruktion wesentlich sein: Wir betrachten den Bereich kleinen „Phasenraumvolumens“, d.h. kleiner $E \cdot r$. Je kleiner Er wird, desto besser sollte sich $\Sigma_E(\mathcal{O}_r)$ durch einen endlichdimensionalen Raum gegebener Dimension annähern lassen, und desto schneller sollte die Reihe (2.1.4) konvergieren. Wir können jedem Approximationsterm sein E - r -Verhalten zuordnen,

$$\eta_j(E, r) := \|\sigma_j[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)]\| \cdot \|P(E) \phi_j P(E)\|, \quad (2.1.5)$$

wobei η_j typischerweise nur vom skaleninvarianten Term Er abhängen wird, zumindest asymptotisch für $E \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$. Wie Haag und Ojima vermuteten, sollten sich die Approximationsterme nach ihrem Er -Verhalten sortieren lassen; man erwartet eine Art hierarchisches Verhalten der η_j :

$$\frac{\eta_k(E, r)}{\eta_j(E, r)} \xrightarrow{Er \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{für } k > N(j) \\ \text{const.} \neq 0 & \text{für } M(j) \leq k \leq N(j) \\ \infty & \text{für } k < M(j) \end{cases} \quad (2.1.6)$$

mit gewissen Zahlen $M(j), N(j) \in \mathbb{N}$. In diesem Formalismus haben wir also die Energiedimensionen der Punktfelder wiederentdeckt. Im Fall der freien Feldtheorie ergibt sich $\eta_j \propto (Er)^{\gamma(j)}$, wie wir in Kapitel 4 sehen werden.

Es erscheint allerdings unverhältnismäßig, solche Details über das E - r -Verhalten der Approximationsterme a priori anzunehmen. Wir werden nur verlangen, daß die Approximationssumme in (2.1.4) in gewisser Weise alle polynomial abfallenden Anteile von Ξ (also Anteile $\propto (Er)^\gamma$) kompensiert. Die Sortierung der $\sigma_j \phi_j$ wird daraus dann in Abschnitt 2.3 konstruiert.

2.2 Ein Kriterium

Wir werden die heuristischen Überlegungen des letzten Abschnitts jetzt konkretisieren und eine Phasenraumbedingung angeben, die uns im folgenden die Konstruktion von Wightmanfeldern erlauben soll.

Wie wir eben gesehen haben, kann die Phasenraumstruktur eines Modells durch Approximation gewisser Abbildungen $\Xi_{E,r} : \Sigma_E \rightarrow \Sigma(\mathcal{O}_r)$ untersucht werden. In unserem Zusammenhang ist es aber wichtig, dabei von skalunenabhängigen Objekten auszugehen; wir betrachten daher lineare Operatoren $\bigcup_E \Sigma_E \rightarrow \Sigma$, die dann auf Σ_E und $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ (mit festem E, r) eingeschränkt werden. Dabei kann man nicht erwarten, daß die interessierenden Abbildungen auf ganz $\bigcup_E \Sigma_E$ beschränkt sind - die singulären Punktfelder ϕ wären sonst nicht beschreibbar. Allerdings ist für diese Felder $\|P(E)\phi P(E)\|$ oft nicht nur endlich, sondern wächst höchstens wie eine Potenz von E an:

$$\|P(E)\phi P(E)\| < E^k \cdot \text{const.} \quad (k \in \mathbb{N} \text{ geeignet}). \quad (2.2.1)$$

Solche polynomialen Hochenergieschranken lassen sich in einer großen Klasse von Modellen nachweisen [11]. Es liegt daher nahe, folgenden Raum von linearen Abbildungen zu betrachten:

$$\Theta := \left\{ \vartheta : \bigcup_E \Sigma_E \rightarrow \Sigma \text{ linear} \mid \|\vartheta[\Sigma_E]\| \leq (1+E)^k \cdot \text{const.} \text{ für ein } k > 0 \right\}. \quad (2.2.2)$$

Dabei ist $(1+E)^k$ statt E^k als Schranke angesetzt, um keine Obstruktionen im Bereich kleiner Energien zu erhalten - für unsere Zwecke ist nur das Hochenergieverhalten der ϑ interessant.

Die zu approximierende Abbildung Ξ können wir nun als Element von Θ auffassen, nämlich als die Inklusionsabbildung $\Xi : \bigcup_E \Sigma_E \hookrightarrow \Sigma$; sie ist hier also ein skalunenabhängiges Objekt. Wir wollen sie als Summe von Rang-1-Operatoren darstellen; solche Operatoren haben die Form

$$\vartheta = \phi(\cdot)\sigma \quad (2.2.3)$$

mit $\sigma \in \Sigma$ und einer Linearform ϕ mit polynomialen Hochenergieverhalten; genauer ist ϕ ein Element des Raumes Θ_1 von Linearformen auf $\bigcup_E \Sigma_E$, der analog zu Θ definiert wird:

$$\Theta_1 := \left\{ \vartheta_1 : \bigcup_E \Sigma_E \rightarrow \mathbb{C} \text{ linear} \mid \|\vartheta_1[\Sigma_E]\| \leq (1+E)^k \cdot \text{const.} \text{ für ein } k > 0 \right\}. \quad (2.2.4)$$

Zur Verkürzung der Schreibweise notieren wir im folgenden:

$$\|\vartheta\|_{E,r} := \|\vartheta[\Sigma_E, \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)]\| = \|P(E)\vartheta P(E)[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)]\| \quad (\vartheta \in \Theta); \quad (2.2.5)$$

$$\|\vartheta_1\|_E := \|\vartheta_1[\Sigma_E]\| = \|P(E)\vartheta_1 P(E)\| \quad (\vartheta_1 \in \Theta_1); \quad (2.2.6)$$

$$\|\sigma\|_r := \|\sigma[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)]\| \quad (\sigma \in \Sigma). \quad (2.2.7)$$

Man bemerkt, daß für Rang-1-Operatoren der Form (2.2.3) gilt

$$\|\phi(\cdot)\sigma\|_{E,r} = \|\phi\|_E \|\sigma\|_r. \quad (2.2.8)$$

Um Ξ als eine unendliche Reihe darstellen zu können, benötigen wir noch eine spezielle Topologie auf Θ , die Konvergenz „bezüglich des Punktes $x = 0$ “ beschreibt (die Normtopologie etwa ist offenbar wenig geeignet). Wir werden diese Topologie nun konstruieren und plausibel machen, warum sie die in Abschnitt 2.1 vermuteten Strukturen beschreibt. In Anhang 2.B werden die Definitionen in einen etwas erweiterten Rahmen gestellt, den wir im folgenden manchmal benötigen; dort findet man auch einige mehr mathematische Aspekte der konstruierten Topologie.

Die in Abschnitt 2.1 gewonnene Idee zur Konvergenz der Reihe in (2.1.4) ist: Alle polynomialen Anteile $\propto (Er)^k$ von Ξ sollen von den Approximationstermen kompensiert werden; zu gegebenem k sollen dazu endlich viele (etwa N) Terme ausreichen. Mithin soll für $E \rightarrow \infty, r \rightarrow 0, Er \leq 1$ gelten

$$(Er)^{-k} \|\Xi - \sum_{j=1}^N \phi_j \sigma_j\|_{E,r} \rightarrow 0. \quad (2.2.9)$$

Im folgenden seien $\vartheta, \vartheta' \in \Theta$; wir wollen ihren Abstand „mit Genauigkeit $(Er)^k$ “ im genannten Bereich beschreiben. Dazu sei zunächst $r > 0$ fest; wir betrachten

$$\sup_{E \leq r^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E,r}}{r^k (1+E)^k}. \quad (2.2.10)$$

Das ist in gewisser Weise ein Maß für den gesuchten Abstand bei festem r . Wieder wurde $(1+E)$ statt E im Nenner verwendet, um Probleme bei $E = 0$ auszuschließen. Statt der Schranke $E \leq r^{-1}$ ($Er \leq 1$) könnte übrigens $Er \leq w_0$ mit einer beliebigen positiven Konstanten w_0 eingesetzt werden; für die folgende Argumentation wäre das ohne Belang. Andererseits scheint es keinen Grund zu geben, warum in Modellen eine intrinsische Konstante w_0 auftreten sollte; daher setzen wir ohne großen Verlust an Allgemeinheit $w_0 = 1$.

Um Punktfelder zu beschreiben, interessiert uns nur das Verhalten von Ξ in einer beliebig kleinen Umgebung von $x = 0$; wir müssen daher den Ausdruck (2.2.10) im Limes $r \rightarrow 0$ betrachten - um die Existenz stets zu garantieren, wählt man den limes superior. Außerdem ist es für die Konstruktion in Abschnitt 2.3 erforderlich, die Werte von r aus einer diskreten Nullfolge $\rho = (r_n) \subset \mathbb{R}^+$ zu wählen (man muß daraus dann Teilfolgen aussondern). Das führt uns zu dem Ausdruck

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{E \leq r_n^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E,r_n}}{r_n^k (1+E)^k}, \quad (2.2.11)$$

der den gewünschten Abstand asymptotisch für $r \rightarrow 0$ beschreibt. Im mathematischen Sinne ist er aber so noch keine (Pseudo-)Metrik, da der limes superior eventuell ∞ ergibt, etwa wenn $\|\vartheta - \vartheta'\|_{E,r} \propto (Er)^{k-1}$. Um dies zu umgehen, führen wir die Funktion $Z(x) := \frac{x}{1+x}$ ein und setzen

$$d_k(\vartheta, \vartheta') := \limsup_{n \rightarrow \infty} Z\left(\sup_{E \leq r_n^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E,r_n}}{r_n^k (1+E)^k}\right). \quad (2.2.12)$$

Die d_k sind dann Pseudometriken auf Θ . Die gewünschte Topologie soll Konvergenz aller polynomial abfallenden Anteile für $r \rightarrow 0$ beschreiben, also Konvergenz bezüglich aller d_k . Dazu definieren wir eine weitere Pseudometrik:

$$d(\vartheta, \vartheta') := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} d_k(\vartheta, \vartheta'). \quad (2.2.13)$$

Im folgenden betrachten wir Θ mit der von d induzierten Topologie, die noch von der gewählten Nullfolge ρ abhängt. Wir können unsere Phasenraumbedingung dann so formulieren:

Eigenschaft 2.1. *Es gibt Funktionale $\sigma_j \in \Sigma$ und Linearformen $\phi_j \in \Theta_1$ ($j \in \mathbb{N}$), so daß bei geeigneter Wahl der Nullfolge ρ gilt*

$$\Xi = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \sigma_j.$$

Die Reihe konvergiert dabei im Sinne der in (2.2.13) definierten Pseudometrik d .

Der hier definierte Konvergenzbegriff bedeutet im wesentlichen das in (2.2.9) Geforderte. Wir haben ihn sogar noch etwas schärfer formuliert und können statt $E \rightarrow \infty$ auch $E = \text{const.}$ setzen; dies wird in Kapitel 3 wichtig, um den von Haag und Ojima vorgeschlagenen Formalismus zurückzugewinnen.

2.3 Reduktion

Es gilt jetzt, die Konsequenzen der eben aufgestellten Phasenraumbedingung zu analysieren. Vor allem wollen wir die in der Approximationsreihe auftretenden Linearformen ϕ_j als lokale Punktfelder interpretieren. Dazu sind aber noch einige Umformungen nötig, die in diesem Abschnitt durchgeführt werden.

Wir betrachten im folgenden eine Theorie, die die Eigenschaft 2.1 besitzt; man hat also $\Xi = \sum \phi_j \sigma_j$. Diese Reihendarstellung von Ξ ist aber nicht eindeutig; sie könnte neben den vermuteten Punktfeldern auch „redundante“ Terme enthalten: Seien etwa $\hat{\sigma} \in \Sigma$ und $\hat{\phi} \in \Theta_1$ beliebig vorgegeben, dann kann man die Reihe auch schreiben als

$$\Xi = \phi_1 \sigma_1 + \dots + \phi_j \sigma_j + \hat{\phi} \hat{\sigma} - \hat{\phi} \hat{\sigma} + \phi_{j+1} \sigma_{j+1} + \dots \quad (2.3.1)$$

oder etwas subtiler als

$$\Xi = \phi_1 \sigma_1 + \dots + (\phi_j - \hat{\phi}) \sigma_j + \hat{\phi} (\sigma_j + \sigma_{j+1}) + (\phi_{j+1} - \hat{\phi}) \sigma_{j+1} + \dots \quad (2.3.2)$$

Die in diesen Darstellungen auftretenden quadratischen Formen sind sicher im allgemeinen keine lokalen Punktfelder, schließlich konnte $\hat{\phi} \in \Theta_1$ beliebig gewählt werden.

Zur Konstruktion von Punktfeldern muß man also zumindest lineare Unabhängigkeit der Funktionale σ_j fordern; die tatsächlich benötigte Bedingung ist sogar etwas schärfer. Aus anderen Gründen werden wir später auch lineare Unabhängigkeit der ϕ_j verwenden. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Approximationssumme so umzuformen, daß die genannten Unabhängigkeitsbedingungen erfüllt werden. Gleichzeitig konstruieren wir eine Ordnung im r -Verhalten der Funktionale σ_j ; wir konkretisieren damit die heuristischen Überlegungen aus (2.1.6), lassen allerdings das E -Verhalten der Approximationsterme dabei außer Betracht.

Zuerst behandeln wir die lineare Unabhängigkeit der quadratischen Formen ϕ_j . Wir können die Summanden der Reihe aus Eigenschaft 2.1 so zusammenfassen, daß jeweils endlich viele der ϕ_j linear unabhängig werden: Ist das nicht bereits der Fall, dann sei N minimal, so daß $\phi_1 \dots \phi_N$ linear abhängig sind; es gilt also

$$\phi_N = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j \phi_j \quad (2.3.3)$$

mit gewissen λ_j . Wir schreiben dann

$$\sum_{j=1}^N \phi_j \sigma_j = \sum_{j=1}^{N-1} \phi_j (\sigma_j + \lambda_j \sigma_N) + \underbrace{\left(\phi_N - \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j \phi_j \right)}_{=0} \sigma_N =: \sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \hat{\sigma}_j. \quad (2.3.4)$$

Wir erhalten also wieder eine Approximationssumme der gewünschten Form, in der die ϕ_j aber linear unabhängig sind. Das Verfahren kann nun für $N \rightarrow \infty$ iteriert werden; da stets nur endliche Summen umgeformt werden, treten dabei keine Umordnungsprobleme auf. Wir erhalten also (durch Neuzeichnung der $\hat{\sigma}_j$)

$$\Xi = \sum_j \phi_j \sigma_j \quad \text{mit linear unabhängigen } \phi_j. \quad (2.3.5)$$

Eventuell verbleiben in der Reihe nur endlich viele Terme, was im folgenden aber ohne Belang ist.

Jetzt befassen wir uns mit der Unabhängigkeit der σ_j ; gleichzeitig sollen diese nach ihrem r -Verhalten geordnet werden. Die Konstruktion geschieht wie für die ϕ_j induktiv, ist aber ungleich länger; wir führen sie daher zunächst für die ersten Terme der Approximation durch und diskutieren das Induktionsschema später.

Es sei dazu zunächst $k := 1$; wir wählen N groß genug, damit

$$d_k(\Xi, \sum_{j=1}^n \phi_j \sigma_j) = 0 \quad \forall n \geq N; \quad (2.3.6)$$

wegen der Konvergenz der Reihe ist das nach (2.B.14) immer möglich. Nun sei für $j \leq N$

$$\hat{\eta}_j(r) := \|\sigma_j\|_r. \quad (2.3.7)$$

Wir können annehmen, daß diese Funktionen für $r > 0$ strikt positive Werte haben; wäre nämlich $\sigma_j \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r) = 0$ für ein $r > 0$, dann könnte der Term $\phi_j \sigma_j$ in der Entwicklung (2.3.5) auch entfallen. Um die $\hat{\eta}_j$ hinsichtlich ihres Verhalten auf der Nullfolge $\rho = (r_n)$ zu vergleichen, verwenden wir folgende Notation:

$$\hat{\eta}_i \underset{\rho}{\leq} \hat{\eta}_j \quad :\Leftrightarrow \quad \hat{\eta}_i(r_n) \leq \hat{\eta}_j(r_n) \cdot \text{const.}; \quad (2.3.8)$$

$$\hat{\eta}_i \underset{\rho}{\sim} \hat{\eta}_j \quad :\Leftrightarrow \quad \hat{\eta}_i(r_n) \cdot \text{const.} \leq \hat{\eta}_j(r_n) \leq \hat{\eta}_i(r_n) \cdot \text{const.}'; \quad (2.3.9)$$

$$\hat{\eta}_i \underset{\rho}{\ll} \hat{\eta}_j \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{\hat{\eta}_i(r_n)}{\hat{\eta}_j(r_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.3.10)$$

Die Eigenschaften dieser Relationen werden in Anhang 2.A näher untersucht.

Wir nehmen nun an, daß zumindest für ein j und nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge von ρ gilt

$$r^k \underset{\rho}{\ll} \hat{\eta}_j; \quad (2.3.11)$$

falls das nicht möglich ist, dann folgt $r^k \underset{\rho}{\geq} \hat{\eta}_j \forall j \leq N$; wir erhöhen dann k und beginnen die Konstruktion erneut² bei (2.3.6).

Man kann auf $F := \{\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_N, r^k\}$ nun das in Anhang 2.A (Aussage 2.7) entwickelte Verfahren anwenden; daraus erhält man nach Übergang zu einer Teilfolge von ρ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ und ein $\eta_1 \in F$, so daß

$$\hat{\eta}_j \underset{\rho}{\sim} \eta_1 \quad \text{für } 0 < j \leq N_1; \quad (2.3.12)$$

$$\hat{\eta}_j \underset{\rho}{\ll} \eta_1 \quad \text{für } N_1 < j \leq N; \quad (2.3.13)$$

$$r^k \underset{\rho}{\ll} \eta_1 \quad . \quad (2.3.14)$$

Die letzte Relation kann wegen (2.3.11) erreicht werden. Durch Auswertung von (2.3.6) ergibt sich

$$d[\eta_1, k, \rho](\Xi, \sum_{j=1}^{N_1} \phi_j \sigma_j) = 0. \quad (2.3.15)$$

Jetzt befassen wir uns mit der Unabhängigkeit der σ_j . Wir nehmen an, daß $\sigma_1 \dots \sigma_{N_1}$ linear abhängig sind im folgenden Sinne: Es gebe $\lambda \in \mathbb{R}^{N_1 \setminus \{0\}}$, so daß (eventuell bezüglich einer Teilfolge von ρ) gilt

$$\frac{1}{\eta_1(r_n)} \left\| \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j \sigma_j \right\|_{r_n} \rightarrow 0. \quad (2.3.16)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei dabei $\lambda_{N_1} = 1$. Dann kann die Approximationsumme für Ξ wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \phi_j \sigma_j &= \sum_{j=1}^{N_1-1} (\phi_j - \lambda_j \phi_{N_1}) \sigma_j + \phi_{N_1} \left(\sigma_{N_1} + \sum_{i=1}^{N_1-1} \lambda_i \sigma_i \right) + \sum_{j=N_1+1}^N \phi_j \sigma_j \\ &=: \sum_{j=1}^N \hat{\phi}_j \hat{\sigma}_j. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Wir haben also wiederum eine andere Darstellung der Approximationsumme gefunden; da die Funktionale $\hat{\sigma}_j$ für $j \neq N_1$ mit den σ_j übereinstimmen, gelten die Relationen (2.3.12) bis (2.3.15) auch für die neue Aufteilung, allerdings jetzt mit $N_1 - 1$ statt N_1 . Außerdem sind auch die $\hat{\phi}_j$ linear unabhängig, denn $\text{Span}(\phi_1, \dots, \phi_{N_1}) = \text{Span}(\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_{N_1-1}, \phi_{N_1})$. Wir lassen das „Dach“ über den Symbolen im folgenden wieder weg.

²Zu Details siehe Abbildung 2.1.

Nach endlich vielen solchen Schritten³ gelangen wir schließlich zu einer Entwicklung der Form (2.3.5), die nicht nur die Bedingungen (2.3.12) bis (2.3.15) erfüllt, sondern in der auch keine „linearen Abhängigkeiten“ der Form (2.3.16) auftreten; mithin gilt

$$\left\| \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j \sigma_j \right\|_{r_n} \geq C(\lambda) \cdot \eta_1(r_n) \quad (2.3.18)$$

mit Konstanten $C(\lambda) > 0$ ($\lambda \neq 0$). Wir werden nun zeigen, daß diese Konstanten sogar gleichmäßig in (normiertem) λ gewählt werden können. Dazu sei $\lambda \neq 0$ festgehalten und $\epsilon \in \mathbb{R}^{N_1}$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_1(r_n)} \left\| \sum_{i=1}^{N_1} (\lambda_i + \epsilon_i) \sigma_i \right\|_{r_n} &\geq \frac{\left\| \sum \lambda_i \sigma_i \right\|_{r_n}}{\eta_1(r_n)} - \frac{\left\| \sum \epsilon_i \sigma_i \right\|_{r_n}}{\eta_1(r_n)} \\ &\geq C(\lambda) - \sum_i |\epsilon_i| \frac{\left\| \sigma_i \right\|_{r_n}}{\eta_1(r_n)} \stackrel{(2.3.12)}{\geq} C(\lambda) - N_1 d \max_i |\epsilon_i| \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

mit einer Konstanten $d > 0$. Für genügend kleine ϵ kann man $N_1 d \max_i |\epsilon_i| < \frac{1}{2} C(\lambda)$ abschätzen. Das bedeutet, daß die Konstante $C(\lambda)$ in (2.3.18) lokal gleichmäßig gewählt werden kann; aus Kompaktheitsgründen läßt sie sich dann für λ aus der Einheitskugel gleichmäßig abschätzen, weshalb wir mit geeignetem $c > 0$ die Schranke (2.3.18) ersetzen können durch

$$\left\| \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j \sigma_j \right\|_{r_n} \geq c \|\lambda\| \eta_1(r_n). \quad (2.3.20)$$

Die Konstruktion für die ersten Terme der Entwicklung ist damit abgeschlossen. Wir konstruieren nun induktiv weitere Funktionen η_ν mit $\eta_1 \ll \eta_2 \ll \dots$, zu denen jeweils Funktionale $\sigma_{N_{\nu-1}+1}, \dots, \sigma_{N_\nu}$ mit passendem r -Verhalten gehören. (Für die bisherige Konstruktion war $\nu = 1$.) Im Detail verläuft das so:

Haben wir schon $\eta_{\nu-1}$ und die zugehörigen Funktionale konstruiert, dann betrachten wir wie zuvor

$$\hat{\eta}_j := \|\sigma_j\|_r, \quad N_{\nu-1} < j \leq N. \quad (2.3.21)$$

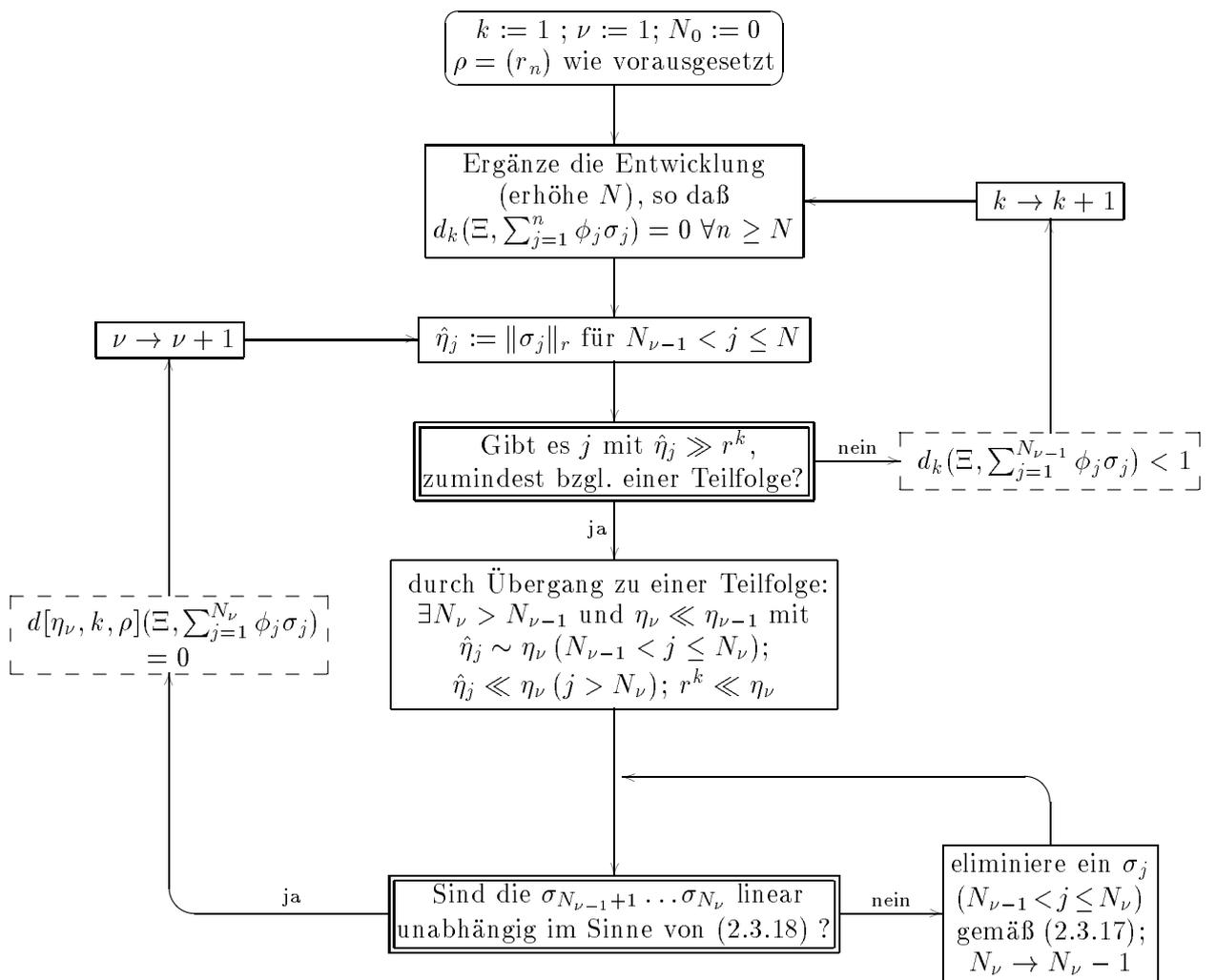
Wir erhöhen k und N , bis wieder gilt

$$d_k(\Xi, \sum_{i=1}^n \phi_i \sigma_i) = 0 \quad \forall n \geq N, \quad r^k \ll_{\rho} \hat{\eta}_j \quad (2.3.22)$$

für ein j zwischen $N_{\nu-1}+1$ und N . Eventuell durch Erhöhen von N hinzugenommene Terme $\sigma_m \phi_m$ erfüllen dabei weiterhin $\hat{\eta}_m \ll \eta_{\nu-1}$, wie man aus (2.3.6) sieht. Unter Umständen kann k auch beliebig groß gewählt werden, ohne daß (2.3.22) erfüllt ist; dann erhält man eine abbrechende Approximationsreihe.

³Dabei bleibt wegen Voraussetzung (2.3.11) stets $N_1 \geq 1$.

Abbildung 2.1: Zum Beweis von Satz 2.2



Analog zu (2.3.12) bis (2.3.14) können wir die Funktionen $\hat{\eta}_j$ wieder durch Übergang zu einer Teilfolge von ρ ordnen: Es gibt $\eta_\nu \ll \eta_{\nu-1}$ und $N_\nu > N_{\nu-1}$ mit

$$\hat{\eta}_j \underset{\rho}{\sim} \eta_\nu \quad \text{für } N_{\nu-1} < j \leq N_\nu; \quad (2.3.23)$$

$$\hat{\eta}_j \underset{\rho}{\ll} \eta_\nu \quad \text{für } N_\nu < j \leq N; \quad (2.3.24)$$

$$r^k \underset{\rho}{\ll} \eta_\nu \underset{\rho}{\ll} \eta_{\nu-1}. \quad (2.3.25)$$

Wie in (2.3.17) werden nun eventuelle lineare Abhängigkeiten der $\sigma_{N_{\nu-1}+1} \dots \sigma_{N_\nu}$ entfernt; die ersten $N_{\nu-1}$ Terme der Entwicklung bleiben davon aber unberührt, insbesondere müssen $\phi_1 \dots \phi_{N_{\nu-1}}$ nicht geändert werden. Man erhält dann analog zu (2.3.20)

$$\left\| \sum_{j=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} \lambda_j \sigma_j \right\|_{r_n} \geq \|\lambda\| \eta_\nu(r_n) \cdot \text{const.} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{N_\nu - N_{\nu-1}}. \quad (2.3.26)$$

Damit sind die nächsten Terme der Entwicklung behandelt; wir haben

$$d[\eta_\nu, k, \rho_\nu](\Xi, \sum_{j=1}^{N_\nu} \phi_j \sigma_j) = 0. \quad (2.3.27)$$

Abbildung 2.1 zeigt den Verlauf der gesamten Konstruktion. Man beachte, daß stets nach endlichen vielen Schritten entweder ν oder k erhöht werden, wobei auch die Erhöhung von ν offenbar nur endlich oft möglich ist, ohne k zu inkrementieren. Als Endergebnis erhalten wir:

Satz 2.2. *Wir betrachten ein Netz von lokalen Algebren, das die Eigenschaft 2.1 mit einer Nullfolge ρ erfüllt. Dann gibt es⁴*

- Nullfolgen $\rho = \rho_0 \supset \rho_1 \supset \rho_2 \supset \dots$,
- ganze Zahlen $0 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots$,
- Funktionen $\eta_1 \underset{\rho_1}{\ll} \eta_2 \underset{\rho_2}{\ll} \dots$ von \mathbb{R}^+ nach \mathbb{R}^+ mit $\eta_\nu \underset{\rho_\nu}{\gg} r^k$ für geeignetes $k(\nu)$,
- linear unabhängige quadratische Formen $\phi_j \in \Theta_1$,
- Funktionale $\sigma_j \in \Sigma$ mit $\|\sigma_j\|_r \underset{\rho_\nu}{\sim} \eta_\nu$ für $N_{\nu-1} < j \leq N_\nu$,

außerdem zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein ν , so daß

$$d[r^k, k, \rho_\nu](\Xi, \sum_{j=1}^{N_\nu} \phi_j \sigma_j) = 0$$

und zu jedem ν ein $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$d[\eta_\nu, k, \rho_\nu](\Xi, \sum_{j=1}^{N_\nu} \phi_j \sigma_j) = 0.$$

⁴Die Größen σ_j, ϕ_j müssen nicht unbedingt mit denen übereinstimmen müssen, mit denen wir die Konstruktion begonnen haben - wir verzichten jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine neue Bezeichnung.

Weiterhin existiert zu ν eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{R}^{N_\nu - N_{\nu-1}}$

$$\left\| \sum_{j=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} \lambda_j \sigma_j \right\|_{r_n} \geq \|\lambda\| c \eta_\nu(r_n) \quad (r_n \in \rho_\nu).$$

Die Werte von ν können dabei eventuell aus ganz \mathbb{N} gewählt werden; es kann aber auch sein, daß die Folgen N_1, N_2, \dots usw. abbrechen und entsprechend nur endlich viele Werte von ν und j auftreten. Wir werden in diesem Zusammenhang manchmal auch von *zulässigen Werten* für ν sprechen, meist aber stillschweigend voraussetzen, daß ein auftretendes ν nur solche Werte annimmt.

Die „Hierarchie von Funktionen“ η_ν und die zugehörigen „Dimensionen“⁵ N_ν wurden im Rahmen der Konstruktion auf recht komplizierte Weise gewonnen. Bei konkreten Modellen wird man jedoch detailliertere Informationen über die Funktionale σ_j und quadratischen Formen ϕ_j besitzen, die eine Vereinfachung der Konstruktion und eine explizite Bestimmung (bzw. Abschätzung) der N_ν ermöglichen:

Für die Rekonstruktion der Felder geht man von einer Reihenentwicklung der in Eigenschaft 2.1 geforderten Form aus. Dabei wird man typischerweise schon a priori erreichen können, daß die Formen ϕ_j linear unabhängig sind. Der Nachweis hiervon wird z.B. dadurch erleichtert, daß die ϕ_j unterschiedliches Hochenergieverhalten aufweisen: Zumindest in Theorien mit Ultraviolett-Fixpunkt kann man erwarten, daß die Ausdrücke $\|\phi_j \sigma_j\|_{E,r}$ tatsächlich nur vom skaleninvarianten Term $E \cdot r$ abhängen; die „Hierarchie“ im r -Verhalten der σ_j überträgt sich also auf das E -Verhalten der ϕ_j . Dies schränkt die Möglichkeiten für lineare Relationen zwischen den ϕ_j deutlich ein.

Kennt man außerdem die Normen der Funktionale σ_j und damit auch die Funktionen η_ν explizit, dann kann man für die zugehörigen Dimensionen N_ν sofort obere Schranken angeben, denn im Verlauf der Konstruktion werden höchstens Terme entfernt, und zwar immer nur innerhalb eines „Blockes“ von Funktionalen, die zum gleichen r -Verhalten $\eta_\nu(r)$ gehören. Um auch untere Schranken an N_ν zu gewinnen, reicht es aus, Informationen über die minimale Zahl linear unabhängiger Terme innerhalb eines solchen Blockes zu besitzen.

Eine andere Methode zum Erhalt unterer Abschätzungen für die N_ν ist die folgende: Bei bekannten η_ν hat man zu jedem ν eine Approximationssumme Ξ_ν , so daß

$$d[\eta_\nu, k, \rho_\nu](\Xi, \Xi_\nu) = 0 \tag{2.3.28}$$

für hinreichend großes k . Kann man nun allgemein zeigen, daß eine (2.3.28) erfüllende Summe Ξ_ν aus Rang-1-Operatoren mindestens M Terme besitzen muß, dann gilt offenbar $N_\nu \geq M$. Um diese Eigenschaft nachzuweisen, reicht es unter Umständen aus, die approximierenden Abbildungen nur auf einzelnen Punkten in $\bigcup_E \Sigma_E$ bzw. $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ auszuwerten.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Auswahl von Teilfolgen ρ_ν sich in der allgemeinen Konstruktion wohl nicht vermeiden läßt, in konkreten Modellen aber vermutlich keine Rolle spielt - zumindest für das in Kapitel 4 behandelte Beispiel der freien Feldtheorie ist die Approximation unabhängig von der gewählten Teilfolge, man kann direkt die Limiten $r \rightarrow 0$ betrachten.

⁵Wir werden in Kapitel 3 genauer darauf eingehen, in welchem Sinne es sich um die Dimension eines Vektorraums handelt.

2.4 Lokalität der Punktfelder

Wir sind nun in der Lage nachzuprüfen, daß es sich bei den konstruierten ϕ_j um punktförmig lokalisierte Quantenfelder handelt; die kausalen Vertauschungsrelationen der lokalen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ werden quasi auf die Basis des Phasenraums übertragen.

Wie in Abschnitt 1.3 bereits erwähnt, läßt sich die Lokalitätsbedingung nicht direkt für am Punkt lokalisierte quadratische Formen $\phi(x)$ formulieren; man muß zu den ausintegrierten Feldern $\phi(f)$ übergehen. Fredenhagen und Hertel [13] haben aber hinreichende (und in einem gewissen Rahmen auch notwendige) Bedingungen angegeben, unter denen sich die Kausalitätsstruktur der $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ auf eine quadratische Form ϕ übertragen läßt: Man setzt $R = (1 + H)^{-1}$; mit geeignetem $l \in \mathbb{N}$ soll dann gelten

$$\|R^l \phi R^l\| < \infty, \quad (2.4.1)$$

$$R^l \phi R^l \in \overline{R^l \mathfrak{A}(\mathcal{O}) R^l}^w \quad \text{für jede Nullumgebung } \mathcal{O}. \quad (2.4.2)$$

Unter diesen Bedingungen läßt sich ϕ zu einem Wightmanfeld $\phi(f)$ ausintegrieren, das die Vertauschungsrelationen (1.3.2) erfüllt; wir werden dies in Abschnitt 2.5 explizit durchführen.

Interessant ist hier die Formulierung (2.4.2) der Lokalitätsbedingung: Wie schon in Abschnitt 1.1 gesagt, ist die Bildung des schwachen Abschlusses wesentlich, will man nicht-triviale Quantenfelder erhalten (R ist invertierbar). Auch auf die Faktoren R^l kann nicht verzichtet werden, da die $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ bereits schwach abgeschlossen sind. Diese Energiedämpfung darf aber auch nicht zu scharf sein, um die $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ nicht zu stark zu delokalisieren; so gilt etwa zumindest in der freien Feldtheorie⁶

$$\overline{P(E) \mathfrak{A}(\mathcal{O}) P(E)}^w = P(E) \mathfrak{B}(\mathcal{H}) P(E) \quad (2.4.3)$$

für jedes offene \mathcal{O} . Die bisher verwendete scharfe Energiedämpfung zerstört also die gewünschte Lokalisierung, und wir müssen sie im Sinne von (2.4.2) abschwächen.

Die beiden Bedingungen (2.4.1) und (2.4.2) sind jetzt für die in Satz 2.2 auftretenden Linearformen ϕ_j nachzuweisen. Für Bedingung (2.4.1) ist das einfach: Per Voraussetzung ist $\phi_j \in \Theta_1$, weist also polynomiales Hochenergieverhalten auf; nach Lemma 2.10 (in Anhang 2.C) kann man mit geeignetem l dann $R^l \phi_j R^l$ zu einem beschränkten Operator fortsetzen.

Bedingung (2.4.2) werden wir durch Induktion nach ν für $\phi_1 \dots \phi_{N_\nu}$ beweisen. Für $\nu = 0$ ist das trivial; sei also $\nu \geq 1$, und wir setzen voraus, daß

$$R^l \phi_j R^l \in \bigcap_{\mathcal{O}} \overline{R^l \mathfrak{A}(\mathcal{O}) R^l}^w \quad \text{für } 1 \leq j \leq N_{\nu-1} \quad (2.4.4)$$

(der Durchschnitt läuft über alle Nullumgebungen).

Aussagen über das r -Verhalten der Approximationsterme in Satz 2.2 besitzen wir nur auf der Nullfolge $\rho_\nu = (r_n)$. Zu finden ist eine Folge von lokalen Observablen $A_k^{(n)} \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n})$, so daß etwa

$$R^l A_k^{(n)} R^l \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} R^l \phi_k R^l, \quad N_{\nu-1} < k \leq N_\nu. \quad (2.4.5)$$

⁶Man kann (2.4.3) allgemein unter Voraussetzung von schwacher Additivität der lokalen Algebren erhalten, indem man Analytizitätsargumente wie im Beweis des Satzes von Reeh und Schlieder verwendet. Die Gleichung bleibt auch dann noch richtig, wenn man $P(E)$ durch $e^{-\beta H}$ ersetzt.

Zur Konstruktion der $A_k^{(n)}$ müssen wir die Reihenentwicklung $\Xi = \sum \phi_j \sigma_j$ ausnutzen. Um ϕ_k zu approximieren, liegt es nahe, die $A_k^{(n)}$ als eine Art duale Basis zu den σ_j zu wählen: Es sollte $\sigma_j(A_k^{(n)}) = \delta_{jk}$ gelten. Um dies zumindest teilweise zu erreichen, definieren wir die $A_k^{(n)}$ zunächst als Linearformen auf dem endlichdimensionalen Raum

$$S_\nu := \text{Span}\{\sigma_{N_{\nu-1}+1}[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n})], \dots, \sigma_{N_\nu}[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n})]\} \subset \Sigma(\mathcal{O}_{r_n}) \quad (2.4.6)$$

direkt durch Festsetzung von

$$A_k^{(n)}(\sigma_j) := \delta_{jk}; \quad N_{\nu-1} < j, k \leq N_\nu. \quad (2.4.7)$$

Die Norm dieser Linearformen auf S_ν ist dann

$$\begin{aligned} \|A_k^{(n)}\|_{S_\nu} &= \sup_{\sigma \in S_\nu} \frac{|A_k^{(n)}(\sigma)|}{\|\sigma\|_{r_n}} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|A_k^{(n)}(\sum \lambda_j \sigma_j)|}{\|\sum \lambda_j \sigma_j\|} \stackrel{\text{(Satz 2.2)}}{\leq} \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\| \eta_\nu(r_n)} \cdot \text{const.} \\ &\quad (j \text{ läuft von } N_{\nu-1}+1 \text{ bis } N_\nu.) \\ &\leq \frac{1}{\eta_\nu(r_n)} \cdot \text{const.} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach können wir die $A_k^{(n)}$ nun zu Elementen des Dualraums von $\Sigma(\mathcal{O}_{r_n})$ fortsetzen; nach (1.2.10) hat man $\Sigma(\mathcal{O}_{r_n})^* = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n})$. Die Normschränke (2.4.8) bleibt auch für die Fortsetzung bestehen. Wir erhalten also Operatoren $A_k^{(n)} \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n})$ mit

$$\sigma_j(A_k^{(n)}) = \delta_{jk} \quad \text{für } N_{\nu-1} < j, k \leq N_\nu; \quad \|A_k^{(n)}\| \leq \frac{1}{\eta_\nu(r_n)} \cdot \text{const.} \quad (2.4.9)$$

In leichter Abwandlung von (2.4.5) werden wir im folgenden zeigen, daß

$$R^l A_k^{(n)} R^l - \sum_{j=1}^{N_{\nu-1}} \sigma_j(A_k^{(n)}) R^l \phi_j R^l \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} R^l \phi_k R^l, \quad N_{\nu-1} < k \leq N_\nu \quad (2.4.10)$$

für geeignetes l .

Wir bemerken dazu die wegen (2.4.9) gültige Identität

$$\sum_{j=1}^{N_{\nu-1}} \sigma_j(A_k^{(n)}) \phi_j + \phi_k = \sum_{j=1}^{N_\nu} \sigma_j(A_k^{(n)}) \phi_j. \quad (2.4.11)$$

Außerdem prüft man sofort nach, daß mit $E_n := r_n^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned} R^l A_k^{(n)} R^l &= R^l (1-P(E_n)) A_k^{(n)} R^l \\ &\quad + R^l P(E_n) A_k^{(n)} (1-P(E_n)) R^l + R^l P(E_n) A_k^{(n)} P(E_n) R^l \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

und analoges für ϕ_j statt $A_k^{(n)}$.

Nun sei $\sigma = (\psi | \cdot \xi) \in \Sigma$ ein festgehaltenes Vektorfunktional. Zusammen mit der Dreiecksungleichung liefern die Relationen (2.4.11) und (2.4.12):

$$|\sigma(R^l A_k^{(n)} R^l - \sum_{j=1}^{N_{\nu-1}} \sigma_j(A_k^{(n)}) R^l \phi_j R^l - R^l \phi_k R^l)| \quad (2.4.13)$$

$$\leq |\sigma(R^l (1-P(E_n)) A_k^{(n)} R^l)| + |\sigma(R^l P(E_n) A_k^{(n)} (1-P(E_n)) R^l)| \quad (A)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_{\nu}} |\sigma_j(A_k^{(n)})| (|\sigma(R^l (1-P(E_n)) \phi_j R^l)| + |\sigma(R^l P(E_n) \phi_j (1-P(E_n)) R^l)|) \quad (B)$$

$$+ |\sigma(R^l P(E_n) (A_k^{(n)} - \sum_{j=1}^{N_{\nu}} \sigma_j(A_k^{(n)}) \phi_j) P(E_n) R^l)|. \quad (C)$$

Man hat für den ersten Teil des Terms (A)

$$\begin{aligned} |\sigma(R^l (1-P(E_n)) A_k^{(n)} R^l)| &\leq \|\sigma\| \|R^l (1-P(E_n))\| \|A_k^{(n)}\| \|R^l\| \\ &\leq \|\sigma\| \cdot \left(\frac{1}{1+E_n}\right)^l \frac{1}{\eta_{\nu}(r_n)} \cdot \text{const.} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

wenn l genügend groß ist, denn es gilt $\eta_{\nu} \gg r^k$ für ein k . Der zweite Summand verschwindet im Limes genauso.

Weiterhin ist in Term (B)

$$|\sigma_j(A_k^{(n)})| \leq \|A_k^{(n)}\| \|\sigma_j\|_{r_n} \leq \frac{\eta_{\mu}(r_n)}{\eta_{\nu}(r_n)} \cdot \text{const.} \ll r^k \quad (2.4.15)$$

für zu j passendes $\mu \leq \nu$ und genügend großes $k \in \mathbb{N}$. Wir wählen $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|R^{l_0} \phi_j R^{l_0}\| < \infty$ für alle $j \leq N_{\nu}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\sigma(R^l (1-P(E_n)) \phi_j R^l)| &= |\sigma(R^{l-l_0} (1-P(E_n)) R^{l_0} \phi_j R^l)| \\ &\leq \|\sigma\| \|(1-P(E_n)) R^{l-l_0}\| \|R^{l_0} \phi_j R^{l_0}\| \leq \|\sigma\| \left(\frac{1}{1+E_n}\right)^{l-l_0} \|R^{l_0} \phi_j R^{l_0}\|; \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

das verschwindet für $n \rightarrow \infty$ schneller als jede feste Potenz von r , wenn man $l > l_0$ passend wählt. Das Produkt aus (2.4.15) und (2.4.16) konvergiert damit gegen 0. Für den anderen Summanden in (B) gilt entsprechendes.

Zu betrachten bleibt noch Term (C):

$$|\sigma(R^l P(E_n) (A_k^{(n)} - \sum_{j=1}^{N_{\nu}} \sigma_j(A_k^{(n)}) \phi_j) P(E_n) R^l)| \leq ? \quad (2.4.17)$$

Wir setzen $B := P(E_n) (A_k^{(n)} - \sum_{j=1}^{N_{\nu}} \sigma_j(A_k^{(n)}) \phi_j) P(E_n)$. Weiterhin sei für $E_a, E_b \geq 0$

$$\hat{\sigma}_{E_a, E_b} := \sigma(P(E_a) P(E_n) \cdot P(E_n) P(E_b)) \in \Sigma_{E_{\min}} \quad (2.4.18)$$

mit $E_{\min} := \min\{E_n, E_{\max}\}$ und $E_{\max} := \max\{E_a, E_b\}$. Es ist offensichtlich, daß

$$\sigma(P(E_a) B P(E_b)) = \left((\Xi - \sum_{j=1}^{N_{\nu}} \phi_j \sigma_j) \hat{\sigma}_{E_a, E_b} \right) (A_k^{(n)}), \quad (2.4.19)$$

wobei wir Ξ und die Approximationssumme hier auf $\Sigma_{E_{\min}}$ und $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n})$ einschränken dürfen. Wir wissen aus Satz 2.2, daß für ein k

$$d[\eta_\nu, k, \rho_\nu](\Xi, \sum_{j=1}^{N_\nu} \phi_j \sigma_j) = 0 \quad (2.4.20)$$

und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{E \leq E_n} \frac{\|\Xi - \sum \phi_j \sigma_j\|_{E, r_n}}{\eta_\nu(r_n) (1+E)^k} = 0. \quad (2.4.21)$$

Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ können wir also n so groß wählen, daß stets

$$\begin{aligned} |\sigma(P(E_a)BP(E_b))| &\leq \|\hat{\sigma}_{E_a, E_b}\| \|A_k^{(n)}\| \|\Xi - \sum_{j=1}^{N_\nu} \phi_j \sigma_j\|_{E_{\min}, r_n} \\ &\leq \|\sigma\| \frac{1}{\eta_\nu(r_n)} \eta_\nu(r_n) (1+E_{\min})^k \epsilon \cdot \text{const.} \leq (1+E_{\max})^k \cdot c \cdot \epsilon. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Die hier eingeführte Konstante c hängt nicht von ϵ ab. Nach Lemma 2.9 in Anhang 2.C können wir nun eine ebenfalls nicht von ϵ abhängige Konstante d finden, so daß

$$|\sigma(R^l B R^l)| \leq \epsilon c d. \quad (2.4.23)$$

Da ϵ beliebig war, verschwindet also auch der Term (C) im Limes $n \rightarrow \infty$.

Wir haben damit den Grenzwert in (2.4.10) etabliert. Ist \mathcal{O} nun eine beliebige Nullumgebung, dann gilt $A_k^{(n)} \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ für große n und folglich

$$R^l \phi_k R^l \in \overline{R^l \mathfrak{A}(\mathcal{O}) R^l + R^l \mathfrak{A}(\mathcal{O}) R^l}^w = \overline{R^l \mathfrak{A}(\mathcal{O}) R^l}^w, \quad N_{\nu-1} < k \leq N_\nu. \quad (2.4.24)$$

Der Induktionsbeweis ist damit geführt, wir notieren noch einmal das Ergebnis:

Satz 2.3. *Für die in Satz 2.2 auftretenden Linearformen ϕ_j gilt mit geeignet zu j gewähltem l :*

$$\|R^l \phi_j R^l\| < \infty; \quad R^l \phi_j R^l \in \overline{R^l \mathfrak{A}(\mathcal{O}) R^l}^w \text{ für jede Nullumgebung } \mathcal{O}.$$

2.5 Integration zu Wightman-Feldern

Wir folgen jetzt der bereits erwähnten Arbeit von Fredenhagen und Hertel [13] und zeigen, daß die betrachteten Linearformen ϕ_j durch „Versmieren“ mit geeigneten Testfunktionen zu unbeschränkten Operatoren gemacht werden können, die kausale Vertauschungsrelationen erfüllen.

Sei dazu ϕ eine quadratische Form auf $\bigcup_E (\mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E)$, welche die schon mehrfach genannten Bedingungen (2.4.1) und (2.4.2) erfüllt. Wir definieren das mit einer Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$ „verschmierte“ Feld

$$\phi(f) := \int d^{s+1}x f(x) U(x) \phi U(-x) \quad (2.5.1)$$

zunächst als quadratische Form, d.h. als schwaches Integral auf $\bigcup_E (\mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E)$. Wir werden zeigen, daß es sich auch als Operator auffassen läßt, und zwar auf dem Definitionsbereich

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H}) := \bigcap_{l \in \mathbb{N}} R^l \mathcal{H}. \quad (2.5.2)$$

Dieser Raum ist dicht in \mathcal{H} , denn sogar $\bigcup_E \mathcal{H}_E \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$ hat diese Eigenschaft.

Lemma 2.4. *Das in (2.5.1) definierte $\phi(f)$ läßt sich zu einem (im allgemeinen unbeschränkten) Operator auf dem Definitionsbereich $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$ erweitern. Dieser läßt $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$ invariant.*

Beweis. Mit der in Lemma 2.11 (Anhang 2.C) berechneten Vertauschungsrelation

$$[R, \phi(f)] = -iR \phi(\partial_t f) R \quad (2.5.3)$$

(von der es ausreicht, sie auf einem dichten Bereich zu kennen) erhält man sofort, daß mit $\|R^l \phi(f) R^l\| < \infty \forall f$ auch $\|\phi(f) R^{2l}\| < \infty$ gilt. Für $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$ ist die Abbildung

$$\psi \mapsto (\psi | \phi(f) | \xi) \quad (2.5.4)$$

also stetig und wird daher vom Skalarprodukt mit einem Vektor $\phi(f)\xi$ induziert. Die Vertauschungsrelation (2.5.3) bedingt $\phi(f)\xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$. \square

Es ist klar, daß $\phi(f)$ linear von f abhängt. Die Wightman-Axiome verlangen außerdem noch *Temperiertheit*, das heißt die Stetigkeit der Abbildung $f \mapsto (\psi | \phi(f) | \xi)$ bezüglich der $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$ -Topologie bei festgehaltenem $\psi, \xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$. Man erhält diese so:

$$\begin{aligned} |(\psi | \phi(f) | \xi)| &\leq \int d^{s+1}x |f(x)| |(\psi | U(x) \phi U(-x) | \xi)| \\ &\leq \|R^{-l} \psi\| \|R^{-l} \xi\| \|R^l \phi R^l\| \int |f(x)| d^{s+1}x \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

wenn $f \rightarrow 0$ in der \mathcal{S} -Topologie.

Nun müssen wir noch die Lokalisierungsbedingung auswerten. Dazu sei ϕ' eine weitere quadratische Form, die (2.4.1) und (2.4.2) genügt. Wir zeigen, daß $\phi(f)$ und $\phi'(g)$ dann kausale Vertauschungsrelationen erfüllen.

Lemma 2.5. *Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$; $\text{supp}(f)$ und $\text{supp}(g)$ seien raumartig getrennt. Dann gilt*

$$[\phi(f), \phi'(g)] = 0$$

im Sinne von Operatoren auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß $\text{supp}(f)$ kompakt ist. Dann kann man eine Nullumgebung \mathcal{O} finden, so daß auch $\text{supp}(f) + \mathcal{O}$ und $\text{supp}(g) + \mathcal{O}$ raumartig getrennt sind. Wir wählen Netze A_λ und B_μ in $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, so daß

$$R^l A_\lambda R^l \xrightarrow{w} R^l \phi R^l, \quad R^l B_\mu R^l \xrightarrow{w} R^l \phi' R^l. \quad (2.5.6)$$

Für $\psi, \xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$ folgt dann

$$\begin{aligned} & (\psi | [\phi(f), \phi'(g)] \xi) \\ &= \int d^{s+1}x f(x) \lim_{\lambda} \int d^{s+1}y g(y) \lim_{\mu} (\psi | \underbrace{[U(x)A_\lambda U(-x)]}_{\in \mathfrak{A}(\mathcal{O} + \text{supp}(f))}, \underbrace{U(y)B_\mu U(-y)}_{\in \mathfrak{A}(\mathcal{O} + \text{supp}(g))}] \xi) = 0. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Das läßt sich leicht auf $\psi \in \mathcal{H}$ stetig erweitern; mithin gilt $[\phi(f), \phi'(g)]\xi = 0$, wie behauptet. Für den Fall, daß $\text{supp}(f)$ nicht kompakt ist, führt eine Zerlegung $f = \sum f_i$ in Testfunktionen mit kompaktem Träger $\text{supp}(f_i) \subset \text{supp}(f)$ zum Ziel. \square

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen:

Korollar 2.6. *Sei ϕ eine quadratische Form auf $\bigcup_E (\mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E)$, und es gebe ein $l \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\|R^l \phi R^l\| \leq \infty \quad \text{und} \quad R^l \phi R^l \in \overline{R^l \mathfrak{A}(\mathcal{O}) R^l}^w \quad \text{für jede Nullumgebung } \mathcal{O}.$$

Dann ist

$$f \mapsto \phi(f) := \int d^{s+1}x f(x) U(x) \phi U(-x)$$

eine temperierte operatorwertige Distribution, wobei die Operatoren $\phi(f)$ den invarianten dichten Definitionsbereich $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$ besitzen.

Die quadratische Form ϕ' erfülle die gleichen Bedingungen wie ϕ ; dann gilt

$$[\phi(f), \phi'(g)] = 0$$

für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$, deren Träger raumartig getrennt sind.

Wir haben damit einen ersten Teil der Wightman-Axiome für die aus Satz 2.2 erhaltenen Felder ϕ_j verifiziert; die Wightman-Domäne ist $\mathcal{D} = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$. Wie schon gesehen, ist \mathcal{D} invariant unter den $\phi_j(f)$ und enthält offenbar auch Ω . Nachzuprüfen bleibt aber noch, daß auch die Darsteller $U(\Lambda, x)$ der Poincaré-Transformationen \mathcal{D} invariant lassen. Man bemerkt dazu, daß wegen der Gruppenrelationen gilt

$$U(\Lambda, x) \frac{1}{1+H} U(\Lambda, x)^* = \frac{1}{1+\Lambda_0^\mu P_\mu} \quad (2.5.8)$$

und folglich für $\psi \in \mathcal{H}$ und $l \in \mathbb{N}_0$:

$$U(\Lambda, x) \left(\frac{1}{1+H} \right)^l \psi = \left(\frac{1}{1+\Lambda_0^\mu P_\mu} \right)^l U(\Lambda, x) \psi. \quad (2.5.9)$$

Damit wird

$$U(\Lambda, x) R^l \psi = R^l \left(\frac{1+H}{1+\Lambda_0^\mu P_\mu} \right)^l U(\Lambda, x) \psi \in R^l \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad U(\Lambda, x) \mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad (2.5.10)$$

sofern wir noch zeigen können, daß $\frac{1+H}{1+\Lambda_0^\mu P_\mu}$ als beschränkter Operator existiert. Dazu bemerkt man, daß es $\epsilon > 0$ gibt mit

$$\Lambda_0^\mu P_\mu \geq \epsilon H. \quad (2.5.11)$$

Das ist zumindest in dem Fall klar, daß Λ einen *boost* entlang der 1-Achse darstellt, denn dann ist mit gewissem $\chi \in \mathbb{R}$

$$\Lambda_0^\mu P_\mu = \cosh \chi P_0 + \sinh \chi P_1 \geq \cosh \chi H - |\sinh \chi| |P_1| \geq \underbrace{(\cosh \chi - |\sinh \chi|)}_{=: \epsilon} H \quad (2.5.12)$$

unter Verwendung der Spektrumsbedingung. Allgemeine Lorentztransformationen ergeben sich aus solchen Λ durch Komposition mit räumlichen Drehungen, die aber die 0-Komponenten der Minkowskivektoren nicht ändern. Wir erhalten also auch im allgemeinen Fall

$$\frac{1}{1 + \Lambda_0^\mu P_\mu} \leq \frac{1}{1 + \epsilon H}. \quad (2.5.13)$$

Da sicher $\frac{1+x}{1+\epsilon x} \leq 1 + \frac{1}{\epsilon}$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$, folgt

$$\frac{1 + H}{1 + \Lambda_0^\mu P_\mu} \leq \frac{1 + H}{1 + \epsilon H} \leq \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{1 + H}{1 + \Lambda_0^\mu P_\mu} \right\| < \infty. \quad (2.5.14)$$

Für die obige Argumentation ist es natürlich wesentlich, daß die Operatoren P_μ eine gemeinsame Spektralschar besitzen, so daß man die Abschätzungen von reellen Zahlen direkt auf Operatoren übertragen kann.

2.A Eine Prä-Ordnung auf Funktionen $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

Es sei F eine endliche Menge von Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Wir wollen die Elemente von F in ihrem Verhalten für $x \rightarrow 0$ vergleichen; durch Einschränkung auf gewisse Nullfolgen werden wir F sogar hinsichtlich des Abfallverhaltens der Funktionen vollständig ordnen können.

Sei dazu $x = (x_n)$ eine Nullfolge in \mathbb{R}^+ . Wir führen auf F folgende Prä-Ordnung ein:

$$f \underset{x}{\leq} g \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_n) \leq g(x_n) \cdot \text{const.} \quad (2.A.1)$$

(Transitivität und Reflexivität sind klar.) Weiter schreiben wir

$$f \underset{x}{\sim} g \quad :\Leftrightarrow \quad f \underset{x}{\leq} g \wedge g \underset{x}{\leq} f. \quad (2.A.2)$$

Dann ist $\underset{x}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation, und $\underset{x}{\leq}$ liefert eine Ordnung auf den Äquivalenzklassen.

Für unsere Zwecke wichtig ist das Verhalten der eingeführten Ordnung bei Übergang zu einer Teilfolge $y = (y_n)$ von x . Man hat unmittelbar

$$f \underset{x}{\leq} g \quad \Rightarrow \quad f \underset{y}{\leq} g, \quad (2.A.3)$$

jedoch gilt die Umkehrung im allgemeinen nicht; insbesondere könnte $f \underset{x}{\leq} g$, $f \not\underset{x}{\sim} g$ gelten, aber trotzdem $f \underset{y}{\sim} g$. Allerdings bleibt die schärfere Bedingung

$$f \underset{x}{\ll} g \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.A.4)$$

auch bezüglich Teilfolgen erhalten.

Eine weitere Eigenschaft der eingeführten Ordnung ist, daß man sie durch Übergang zu Teilfolgen verfeinern kann. Es sei etwa $g \not\leq_x f$. Aus der Definition (2.A.1) sieht man, daß dann eine Teilfolge y von x existieren muß, so daß $f(y_n)/g(y_n) \rightarrow 0$; das bedeutet aber $f \ll_y g$. Insbesondere kann man mit dieser Methode nicht vergleichbare Elemente von F mittels Übergang zu Teilfolgen vergleichbar machen.

Es sei nun f_1 ein maximales Element⁷ bezüglich der definierten (Halb-)Ordnung. Falls $f \in F$ mit f_1 vergleichbar ist, gilt also $f \leq_x f_1$; dasselbe können wir durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, falls f und f_1 nicht (bezüglich x) vergleichbar sind. In der Halbordnung „ \leq_y “ mit einer geeigneten Teilfolge y ist f_1 also obere Schranke von F . Wir können nun (wiederum durch Übergang zu Teilfolgen) erreichen, daß für $f \in F$ entweder $f \sim_y f_1$ oder $f \ll_y f_1$. Ist weiter $f' \in F$ und gilt sowohl $f \sim_y f_1$ als auch $f' \ll_y f_1$, dann folgt $f' \ll_y f$. Man erhält also folgende Aussage:

Aussage 2.7. Sei F wie oben, $|F| = m$ und $x = (x_n)$ eine Nullfolge in \mathbb{R}^+ . Dann gibt es eine Teilfolge y von x und $\hat{m} \in \mathbb{N}$, so daß

$$\begin{aligned} F &= \{f_1, \dots, f_{\hat{m}}, f_{\hat{m}+1}, \dots, f_m\}, \\ f_i &\sim_y f_j \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq \hat{m}, \\ f_i &\ll_y f_j \quad \text{für } \hat{m} < i \leq m; 1 \leq j \leq \hat{m}. \end{aligned}$$

2.B Topologisierung des Raumes Θ

In Abschnitt 2.2 haben wir einen Raum von linearen Abbildungen $\bigcup_E \Sigma_E \rightarrow \Sigma$ betrachtet:

$$\Theta = \left\{ \vartheta : \bigcup_E \Sigma_E \rightarrow \Sigma \text{ linear} \mid \|\vartheta[\Sigma_E]\| \leq (1+E)^k \cdot \text{const. für ein } k > 0 \right\}. \quad (2.B.1)$$

Auf Θ wurde durch Pseudometriken d_k eine Topologie definiert. Wir geben hier eine erweiterte Fassung der Definition und untersuchen einige ihrer mathematischen Konsequenzen.

Dazu sei $\rho = (r_n)$ eine Nullfolge in \mathbb{R}^+ , $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion sowie $k \geq 0$. Weiter sei wieder $Z(x) = \frac{x}{1+x}$ für $x \geq 0$. Z wächst monoton und erfüllt $Z(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$. Wir setzen dann für $\vartheta, \vartheta' \in \Theta$

$$d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') := \limsup_{n \rightarrow \infty} Z \left(\sup_{E \leq r_n^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E, r_n}}{f(r_n)(1+E)^k} \right). \quad (2.B.2)$$

Die $d[f, k, \rho]$ sind Pseudometriken auf Θ ; die Dreiecksungleichung erhält man dabei aus den bekannten Eigenschaften des Supremums⁸ und der Funktion Z . Die Pseudometriken sind translationsinvariant, d.h. es gilt

$$d[f, k, \rho](\vartheta + \chi, \vartheta' + \chi) = d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') \quad \forall \vartheta, \vartheta', \chi \in \Theta. \quad (2.B.3)$$

⁷Die Existenz solcher maximalen Elemente ist hier trivial, da die betrachtete Menge F endlich ist.

⁸Man beachte aber, daß das *Infimum* bzw. der *limes inferior* die Dreiecksungleichung verletzen.

Offensichtlich ist $d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') \in [0, 1]$. Das Innere und die Grenzen dieses Intervalls haben eine spezielle Bedeutung; es gilt jeweils für $n \rightarrow \infty$:

$$d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') = 0 \Leftrightarrow \sup_{E \leq r_n^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E, r_n}}{f(r_n)(1+E)^k} \rightarrow 0; \quad (2.B.4)$$

$$d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') > 0 \Leftrightarrow \sup_{E \leq r_n^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E, r_n}}{f(r_n)(1+E)^k} \geq \text{const.} > 0 \text{ auf einer Teilfolge}; \quad (2.B.5)$$

$$d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') < 1 \Leftrightarrow \sup_{E \leq r_n^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E, r_n}}{f(r_n)(1+E)^k} \leq \text{const.} < \infty; \quad (2.B.6)$$

$$d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') = 1 \Leftrightarrow \sup_{E \leq r_n^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E, r_n}}{f(r_n)(1+E)^k} \rightarrow \infty \text{ auf einer Teilfolge}. \quad (2.B.7)$$

Aus diesen Relationen ist klar, daß für $f \ll_{\rho} f'$ gilt

$$d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') < 1 \Rightarrow d[f', k, \rho](\vartheta, \vartheta') = 0, \quad (2.B.8)$$

$$d[f', k, \rho](\vartheta, \vartheta') > 0 \Rightarrow d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta') = 1. \quad (2.B.9)$$

Weiter sei ρ' eine Teilfolge von ρ ; dann hat man

$$d[f, k, \rho'](\vartheta, \vartheta') \leq d[f, k, \rho](\vartheta, \vartheta'). \quad (2.B.10)$$

Wir erhalten jetzt die in Abschnitt 2.2 eingeführten Pseudometriken als Spezialfall, indem wir für $k \in \mathbb{N}_0$ setzen

$$d_k := d[r^k, k, \rho] \quad (2.B.11)$$

und die nach wie vor vorhandene Abhängigkeit von der Nullfolge ρ in der Notation ausdrücken. Nun definieren wir wie gehabt:

$$d(\vartheta, \vartheta') := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} d_k(\vartheta, \vartheta'). \quad (2.B.12)$$

Das ist dann wieder eine translationsinvariante Pseudometrik auf Θ . Konvergenz bezüglich d bedeutet Konvergenz bezüglich aller $d_k = d[r^k, k, \rho]$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Wegen (2.B.8) folgt aber stets

$$d_k(\vartheta, \vartheta') < 1 \Rightarrow d_{k-1}(\vartheta, \vartheta') = 0; \quad (2.B.13)$$

eine Folge ϑ_n konvergiert also genau dann bezüglich d gegen ϑ , wenn

$$\forall k \exists N : \forall n \geq N : d_k(\vartheta, \vartheta_n) = 0. \quad (2.B.14)$$

Auch d hängt noch von der gewählten Nullfolge ρ ab; geht man zu einer Teilfolge von ρ über, so wird die auf Θ gelieferte Topologie wegen (2.B.10) offenbar gröber, der Konvergenzbegriff schwächer.

Im übrigen ist die besagte Topologie im allgemeinen nicht Hausdorff'sch - alle mehr als polynomial mit Er abfallenden Anteile der Normen werden von d nicht erfaßt. Sie ist auch

keine Vektorraumtopologie, denn im allgemeinen ist die Skalarmultiplikation nicht d -stetig; ist etwa $d_k(\vartheta, \vartheta') = 1$, dann folgt wegen (2.B.7) für alle $\alpha \neq 0$:

$$d_k(\alpha\vartheta, \alpha\vartheta') = 1 \not\rightarrow 0 \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0. \quad (2.B.15)$$

Zur hier gewählten Verallgemeinerung der Pseudometriken d_k aus Abschnitt 2.2 sei noch gesagt, daß man ohne wesentliche Verkomplizierung auch von den Faktoren $(1+E)^k$ im Nenner von (2.B.2) zu allgemeinen Funktionen $g(E)$ übergehen könnte. Dies wäre jedoch für die hier durchgeführten Rechnungen ohne Belang, da wir etwa in Abschnitt 2.3 nur das r -Verhalten der interessierenden Approximationsterme genau analysieren; für das E -Verhalten reichen Abschätzungen aus.

Andererseits scheint es sinnvoll anzunehmen, daß Ausdrücke der Form $\|\vartheta - \vartheta'\|_{E,r}$ in interessanten Fällen nur vom skaleninvarianten Ausdruck Er abhängen, wie dies etwa in der freien Feldtheorie der Fall ist (Kapitel 4). Insofern erscheint es natürlicher, ein $f(Er)$ statt $f(r)(1+E)^k$ in der Definition (2.B.2) zu verwenden. Bei der Konstruktion von Punktfeldern in Abschnitt 2.4 benötigen wir aber explizit eine Faktorisierung des Ausdrucks, um das E -Verhalten der Felder ϕ_j und das r -Verhalten der Funktionale σ_j trennen zu können; aus diesem Grunde haben wir nur für die hier untersuchte faktorisierte Form Verwendung.

2.C Linearformen mit polynomialen Energieschranken

Für die Konstruktion punktartig lokalisierter Felder ϕ ist es wichtig, die scharfe Energieabschneidung $P(E)\phi P(E)$ abzuschwächen und etwa zu der von Fredenhagen und Hertel [13] verwendeten Energiedämpfung $R^l\phi R^l$ überzugehen. Dabei ist R der wegen der Spektrumsbedingung beschränkte Operator $R = (1+H)^{-1}$. Als wesentliches Bindeglied zwischen den beiden Formen von Energieschranken erweist sich folgende Formel:

Lemma 2.8. *Im Sinne schwacher Konvergenz auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ gilt für $l \in \mathbb{N}$:*

$$R^l = l \int_0^\infty dE \left(\frac{1}{1+E} \right)^{l+1} P(E).$$

Beweis. Es seien $f(E)$ eine stetig differenzierbare, $g(E)$ eine monoton wachsende und beschränkte Funktion auf \mathbb{R} derart, daß die im folgenden auftretenden Integrale existieren. g ist dann bis auf abzählbar viele „Sprungstellen“ E_i differenzierbar mit Ableitung g' . Man wertet folgendes Riemann-Stieltjes-Integral aus:

$$\int f(E) dg(E) = \int f(E)g'(E)dE + \sum_i f(E_i) (g(E_{i+}) - g(E_{i-})). \quad (2.C.1)$$

Außerdem berechnet man durch partielle Integration:

$$\int -f'(E)g(E)dE = \sum_i \left(\int_{E_i}^{E_{i+1}} f(E)g'(E)dE + f(E_{i+1})g(E_{i+1}-) - f(E_i)g(E_{i+}) \right). \quad (2.C.2)$$

(Dabei sind eventuelle Randterme bei $E = \pm\infty$ in suggestiver Weise notiert.) Die beiden Integrale (2.C.1) und (2.C.2) stimmen also überein. Setzt man nun

$$f(E) = \left(\frac{1}{1+E} \right)^l; \quad g(E) = (\psi|P(E)\psi) \quad (\psi \in \mathcal{H}), \quad (2.C.3)$$

dann folgt die Behauptung zumindest auf Zuständen $(\psi|\cdot\psi)$. Die Polarisationsidentität liefert die Erweiterung auf alle Matricelemente. \square

Wir können hieraus eine etwas technische, aber sehr nützliche Abschätzung folgern:

Lemma 2.9. *Zu $l \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $d > 0$ mit folgender Eigenschaft: Seien $\psi, \xi \in \mathcal{H}$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Es existiere ein $c > 0$, so daß*

$$|(\psi|P(E_1)BP(E_2)\xi)| \leq c \cdot (1+E_{\max})^{l-1} \quad \forall E_1, E_2 > 0$$

mit $E_{\max} := \max\{E_1, E_2\}$. Dann gilt

$$|(\psi|R^lBR^l\xi)| \leq c \cdot d.$$

Ein wichtiger Aspekt ist hierbei, daß die Konstante d universell gewählt werden kann und nicht von ψ, ξ, B oder c abhängt.

Beweis. Man berechnet

$$\begin{aligned} & |(\psi|R^lBR^l\xi)| \\ & \stackrel{\text{(Lemma 2.8)}}{=} \left| l^2 \int_0^\infty dE_1 \int_0^\infty dE_2 \left(\frac{1}{1+E_1} \cdot \frac{1}{1+E_2} \right)^{l+1} (\psi|P(E_1)BP(E_2)\xi) \right| \\ & \leq c \cdot l^2 \int_0^\infty dE_1 \int_0^\infty dE_2 \left(\frac{1}{1+E_1} \cdot \frac{1}{1+E_2} \right)^{l+1} (1+E_{\max})^{l-1}. \quad (2.C.4) \end{aligned}$$

Dieses Integral existiert, da der Integrand mindestens wie E_i^{-2} abfällt. Damit ist eine von ψ, ξ, B und c unabhängige Abschätzung gefunden. \square

Als Spezialfall ergibt sich folgendes Lemma, das die Fredenhagen-Hertel-Energieschranken für quadratischen Formen mit polynomialem Hochenergieverhalten garantiert:

Lemma 2.10. *Sei ϕ quadratische Form auf $\bigcup_E (\mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E)$ mit*

$$\|P(E)\phi P(E)\| \leq (1+E)^{l-1} \cdot c \quad \text{für ein } l \in \mathbb{N}, \text{ ein } c > 0 \text{ und alle } E \geq 0.$$

Dann läßt sich $R^l\phi R^l$ zu einem beschränkten Operator erweitern.

Beweis. Sei zunächst $E > 0$ fest, und seien $\psi, \xi \in \mathcal{H}_E$. Wir setzen $B = P(E)\phi P(E)$. Nach Voraussetzung ist

$$|(\psi|P(E_1)BP(E_2)\xi)| = |(\psi|P(E_1)\phi P(E_2)\xi)| \leq \|\psi\| \|\xi\| (1+E_{\max})^{l-1} \cdot c. \quad (2.C.5)$$

Lemma 2.9 liefert dann

$$|(\psi|R^l\phi R^l\xi)| = |(\psi|R^lP(E)\phi P(E)R^l\xi)| \leq \|\psi\| \|\xi\| \cdot c d. \quad (2.C.6)$$

Da $\bigcup_E \mathcal{H}_E$ dicht in \mathcal{H} ist, läßt sich $R^l\phi R^l$ nun stetig auf ganz $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ fortsetzen und wird daher durch einen beschränkten Operator beschrieben. \square

Wir interessieren uns außerdem für die Vertauschungsrelationen von R mit den durch Testfunktionen f „verschmierten“ quadratischen Formen

$$\phi(f) = \int d^{s+1}x f(x) U(x) \phi U(-x). \quad (2.C.7)$$

Dabei erfülle ϕ die Bedingungen aus Lemma 2.10; das Integral (2.C.7) ist dann im Sinne von Matrixelementen auf $\bigcup_E \mathcal{H}_E$ erklärt. Da f absolut integrierbar ist, gilt

$$\|P(E)\phi(f)P(E)\| \leq \int d^{s+1}x |f(x)| \|P(E)\phi P(E)\| < (1+E)^{l-1} \cdot \text{const.} \quad (2.C.8)$$

also existiert auch $R^l \phi(f) R^l$ als beschränkter Operator. Wir zeigen nun:

Lemma 2.11. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$; dann gilt im Sinne quadratischer Formen auf $\bigcup_E \mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E$:*

$$[R, \phi(f)] = -iR\phi(\partial_t f)R. \quad (2.C.9)$$

Beweis. Sei im folgenden $E > 0$ fest, und seien $\psi, \xi \in \mathcal{H}_E$. Da $P(E)R^{-1}$ beschränkt ist, hat man

$$(\psi | [R, \phi(f)] \xi) = (\psi | \frac{1}{1+H} [\phi(f), (1+H)] \frac{1}{1+H} \xi) = -(\psi | R[H, \phi(f)]R \xi). \quad (2.C.10)$$

Wir setzen $\psi' := R\psi$, $\xi' := R\xi$; beide Vektoren liegen in \mathcal{H}_E . Da die Operatoren $P(E)P_\mu$ beschränkt sind, können im Ausdruck

$$(\psi' | U(x) \phi U(-x) \xi') \quad (2.C.11)$$

die Translationsoperatoren $U(x) = e^{iP_\mu x^\mu}$ als Potenzreihe ausgeschrieben werden, und (2.C.11) wird damit eine differenzierbare Funktion von x . Man berechnet nun:

$$\begin{aligned} \partial_t(\psi' | U(x)\phi U(-x) \xi') &= \frac{\partial}{\partial x^0}(\psi' | e^{iP_\mu x^\mu} \phi e^{-iP_\mu x^\mu} \xi') \\ &= i(\psi' | (P_0 U(x)\phi U(-x) - U(x)\phi U(-x) P_0) \xi') = i(\psi' | [H, U(x)\phi U(-x)] \xi'). \end{aligned} \quad (2.C.12)$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} (\psi' | [H, \phi(f)] \xi') &= \int d^{s+1}x f(x) (\psi' | [H, U(x)\phi U(-x)] \xi') \\ &= -i \int d^{s+1}x f(x) \partial_t(\psi' | U(x)\phi U(-x) \xi') \\ &\stackrel{(P.1)}{=} i \int d^{s+1}x \partial_t f(x) (\psi' | U(x)\phi U(-x) \xi') = i(\psi' | \phi(\partial_t f) \xi'). \end{aligned} \quad (2.C.13)$$

Zusammen mit (2.C.10) liefert das die Behauptung. \square

Für den Beweis des Lemmas mußte hinsichtlich der Funktion f nur ausgenutzt werden, daß in (2.C.13) partiell integriert werden kann und daß $\partial_t f$ absolut integrierbar ist. Wir müssen f also nicht als Schwartzfunktion annehmen; es reicht, wenn f eine verallgemeinerte Ableitung im Sinne von Sobolevräumen besitzt. In der Anwendung (Lemma 2.4) bedeutet dies, daß man - bei oben festgehaltenem l - die $\phi(f)$ zu unbeschränkten Operatoren erweitern kann, sobald f verallgemeinerte Ableitungen l -ter Ordnung besitzt. Bei festem l kann man die Klasse der zulässigen Testfunktionen für die operatorwertige Distribution ϕ also über $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$ hinaus erweitern.

Kapitel 3

Zustands- und Feldkeime

Wir haben bisher zur Konstruktion von Punktfelder in der algebraischen Quantenfeldtheorie die Abbildung $\Xi : \bigcup_E \Sigma_E \hookrightarrow \Sigma$ analysiert. Ξ wurde als Summe skalenunabhängiger Rang-1-Operatoren $\phi_j \sigma_j$ geschrieben; dabei konnten die ϕ_j als lokale Punktfelder interpretiert werden.

In Anlehnung an den von Haag und Ojima [17] vorgeschlagenen Formalismus werden wir die Betrachtung von Funktionalen und Punktfeldern, von E - und r -Verhalten nun trennen; wir werden die in Satz 2.2 auftretenden ϕ_j und σ_j als Basis endlichdimensionaler Vektorräume deuten, welche den „Feldinhalt am Punkt“ respektive sein Duales beschreiben (wir sprechen auch von *Feldkeimen* und *Zustandskeimen*). Abschnitt 3.1 enthält die dazu notwendigen Definitionen.

Dieser Formalismus erlaubt es uns, Kovarianzeigenschaften der Punktfelder zu untersuchen: Unter gewissen Bedingungen können Darstellungen von Symmetriegruppen, die auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ bzw. Σ wirken, auf die Zustandskeime und Feldkeime übertragen werden (Abschnitt 3.2). Auf diese Weise können - unter einer leichten Zusatzbedingung - insbesondere die Hermitezität der Felder und ihre Kovarianz unter der Lorentzgruppe etabliert werden.

Außerdem untersuchen wir in Abschnitt 3.3 die Ableitungen $\partial_\mu \phi_j$ der Punktfelder, die in der Wightman'schen Feldtheorie zur Formulierung von Feldgleichungen wichtig sind. Wir zeigen, daß die Menge der in Kapitel 2 konstruierten Felder - unter derselben Zusatzbedingung - abgeschlossen unter Differentiation ist.

Bis hierher wurden stets bei $x = 0$ lokalisierte Punktfelder betrachtet; alle Strukturen wurden für diesen Spezialfall definiert. Das stellt wegen der Translationssymmetrie der Theorie keine Einschränkung dar. Abschnitt 3.4 präzisiert diese Tatsache: Wir geben explizit eine Wirkung der Translationen auf den Feld- und Zustandskeimen an und etablieren die Kovarianz der Punktfelder bzw. Wightman-Distributionen ϕ_j unter der vollen Poincaré-Gruppe.

Mit Abschnitt 3.4 sind schließlich alle Wightman-Axiome für die konstruierten Punktfelder nachgeprüft.

3.1 Formalismus nach Haag und Ojima

Bisher haben wir skalenenunabhängige Objekte wie die Inklusionsabbildung $\Xi : \bigcup_E \Sigma_E \hookrightarrow \Sigma$ und ihre Reihenentwicklungen betrachtet. Durch sie wurde das Verhalten der Theorie für alle E und r (in einem gewissen Bereich) gleichzeitig beschrieben; dies war für den Nachweis der Lokalität der erhaltenen Punktfelder wesentlich. Im Sinne der Garbentheorie (siehe Anhang 3.A) bewegten sich unsere Rechnungen in den Keimen der Prägarbe $\Theta[\mathfrak{A}(\mathcal{O})]$.

Der ursprünglich von Haag und Ojima [17] vorgeschlagene Formalismus geht jedoch von einem anderen Objekt aus: Die Autoren betrachten bei festem E die Prägarbe $\Sigma_E(\mathcal{O})$ und analysieren ihre Keime, also den Aufbau von $\Sigma_E(\mathcal{O})$ für immer kleinere Umgebungen \mathcal{O} eines Punktes (etwa des Koordinatenursprungs). Die wesentlichen interessanten Strukturen ergeben sich dabei, wenn man die Funktionale $\sigma \in \Sigma_E$ bezüglich ihres Verhaltens auf \mathcal{O}_r für $r \rightarrow 0$, also hinsichtlich der Funktionen $\|\sigma\|_r$, vergleicht.

Wir betrachten eine Theorie, die die Eigenschaft 2.1 besitzt; dann gilt Satz 2.2, die dort gewählten Bezeichnungen werden für das folgende festgehalten. Das r -Verhalten der Approximationssumme $\Xi = \sum \phi_j \sigma_j$ wird durch die Funktionale σ_j bestimmt; wir hatten dies in Abschnitt 2.3 bereits detailliert behandelt. Um unsere Ergebnisse zur Analyse des Keims zu verwenden, definieren wir die Räume

$$\mathcal{N}_\nu := \mathcal{N}[\eta_\nu, \rho_\nu] = \left\{ \sigma \in \Sigma \mid \frac{\|\sigma\|_{r_n}}{\eta_\nu(r_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \ (r_n \in \rho_\nu) \right\}. \quad (3.1.1)$$

Solche Strukturen werden in (3.A.5) und folgende näher untersucht. Wie in [17] betrachten wir nun den Quotientenraum Σ/\mathcal{N}_ν ; wir betrachten die Zustände $\sigma \in \Sigma$ gewissermaßen nur mit Genauigkeit $\eta_\nu(r)$ (für $r \rightarrow 0$) und identifizieren diejenigen mit 0, deren Norm dort schneller als $\eta_\nu(r)$ abfällt. Die kanonische Projektion auf Σ/\mathcal{N}_ν sei mit $p[\eta_\nu, \rho_\nu]$ bezeichnet. Man kann analog auch den Raum $\bigcup_E \Sigma_E/\mathcal{N}_\nu$ bzw. $\bigcup_E \Sigma_E / (\bigcup_E \Sigma_E \cap \mathcal{N}_\nu)$ definieren; dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_E \Sigma_E & \xrightarrow{\text{can.}} & \bigcup_E \Sigma_E / \mathcal{N}_\nu \\ \Xi \downarrow & \searrow p^\nu & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{p[\eta_\nu, \rho_\nu]} & \Sigma / \mathcal{N}_\nu \end{array} \quad (3.1.2)$$

mit $p^\nu := p[\eta_\nu, \rho_\nu] \circ \Xi$. Die Restklasse von $\sigma \in \Sigma$ in Σ/\mathcal{N}_ν werden wir mit $[\sigma]$ bezeichnen.

Die von Haag und Ojima beschriebenen *Zustandskeime* lassen sich nun ausdrücken als

$$\Sigma^\nu := \text{Bild } p^\nu \subset \Sigma / \mathcal{N}_\nu. \quad (3.1.3)$$

Nach der Argumentation der beiden Autoren sollten diese Räume endliche Dimension besitzen. Tatsächlich kann man aus Satz 2.2 folgern:

Satz 3.1. *Die Räume Σ^ν sind endlichdimensional; man hat*

$$\dim \Sigma^\nu = N_\nu.$$

Eine Basis ist durch $[\sigma_1] \dots [\sigma_{N_\nu}]$ gegeben.

Beweis. Man erhält aus Satz 2.2 mit gewissem k :

$$d[\eta_\nu, k, \rho_\nu](\Xi, \sum_{j=1}^{N_\nu} \phi_j \sigma_j) = 0. \quad (3.1.4)$$

Wählen wir $\sigma \in \Sigma_E$ fest, dann bedeutet dies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_\nu(r_n)} \left\| \sigma - \sum_{j=1}^{N_\nu} \sigma(\phi_j) \sigma_j \right\|_{r_n} = 0 \quad (r_n \in \rho_\nu) \quad \Rightarrow \quad [\sigma] = \sum_{j=1}^{N_\nu} \sigma(\phi_j) [\sigma_j] \quad \text{in } \Sigma^\nu. \quad (3.1.5)$$

Damit wird Σ^ν von den $[\sigma_j]$ erzeugt. Wir untersuchen nun die lineare Unabhängigkeit der $[\sigma_j]$: Sei $\lambda \in \mathbb{R}^{N_\nu}$ gegeben, so daß

$$\frac{1}{\eta_\nu(r_n)} \left\| \sum_{j=1}^{N_\nu} \lambda_j \sigma_j \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1.6)$$

Wir wissen aus Satz 2.2, daß für beliebiges $\mu \leq \nu$

$$\frac{1}{\eta_\mu(r_n)} \left\| \sum_{j=N_{\mu-1}+1}^{N_\mu} \lambda_j \sigma_j \right\| \geq \|(\lambda_{N_{\mu-1}+1}, \dots, \lambda_{N_\mu})\| \cdot \text{const.} \not\rightarrow 0. \quad (3.1.7)$$

Wegen $\eta_\nu \leq \eta_\mu$ und $\|\sigma_j\|_r \ll \eta_\mu$ für $j > N_\mu$ können wir damit die λ_j in (3.1.6) sukzessive zu 0 bestimmen. Die $[\sigma_1] \dots [\sigma_{N_\nu}]$ sind also linear unabhängig in Σ/\mathcal{N}_ν .

Zu zeigen bleibt noch, daß die $[\sigma_j]$ tatsächlich im Bild von p^ν liegen. Dazu betrachten wir folgende Abbildung:

$$\chi : \bigcup_E \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}^{N_\nu}; \quad \sigma \mapsto (\sigma(\phi_j))_{j=1}^{N_\nu}. \quad (3.1.8)$$

Falls das Bild von χ nicht ganz \mathbb{R}^{N_ν} ist, dann läßt es sich als Durchschnitt von Hyperebenen darstellen, d.h. es gibt (mindestens) ein $\alpha \in \mathbb{R}^{N_\nu} \setminus \{0\}$ mit

$$\sum_{j=1}^{N_\nu} \alpha_j \sigma(\phi_j) = 0 \quad \forall \sigma \in \bigcup_E \Sigma_E; \quad (3.1.9)$$

das steht aber im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der ϕ_j . Mithin ist χ surjektiv, und wir können insbesondere Urbilder der Standard-Basisvektoren finden, also $\hat{\sigma}_k \in \Sigma_E$ (E geeignet) mit $\hat{\sigma}_k(\phi_j) = \delta_{kj}$. Setzt man diese statt σ in (3.1.5) ein, dann folgt offenbar $[\sigma_k] \in \text{Bild } p^\nu = \Sigma^\nu$. \square

Nach dem obigen Satz können wir p^ν schreiben als

$$p^\nu = \sum_{j=1}^{N_\nu} \phi_j [\sigma_j] \quad \text{bzw.} \quad p^\nu(\sigma) = \sum_{j=1}^{N_\nu} \sigma(\phi_j) [\sigma_j]. \quad (3.1.10)$$

Schränkt man p^ν auf ein Σ_E mit festem E ein, dann sind die Entwicklungskoeffizienten $\sigma(\phi_j)$ stetig in σ , denn $\phi_j|_{\Sigma_E}$ ist beschränkt; mit anderen Worten: Die Abbildung $p_E^\nu := p^\nu|_{\Sigma_E}$

ist stetig, wenn man Σ^ν mit der Standardtopologie versieht. Außerdem ist p_E^ν für genügend großes E surjektiv.

Bezeichnen wir also mit \mathfrak{A}^ν den Dualraum von Σ^ν , dann ist die zu p_E^ν duale Abbildung $p_E^{\nu*}$ stetig und injektiv, wie das folgende Diagramm verdeutlicht:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_E & \xrightarrow{p_E^\nu} & \Sigma^\nu \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{A}_E & \xleftarrow{p_E^{\nu*}} & \mathfrak{A}^\nu \end{array} \quad (3.1.11)$$

Hierbei ist $\mathfrak{A}_E = P(E)\mathfrak{B}(\mathcal{H})P(E) = \Sigma_E^*$; die unterbrochenen Linien verbinden die dualen Paare von Vektorräumen.

Wir notieren nun die zu den $[\sigma_j]$ gehörende duale Basis von \mathfrak{A}^ν als $[\phi_j]$ ($j = 1 \dots N_\nu$); es gilt also¹

$$([\sigma_j]; [\phi_k]) = \delta_{jk}. \quad (3.1.12)$$

Die Schreibweise $[\phi_j]$ erklärt sich, wenn man das Bild von $[\phi_j]$ bei $p_E^{\nu*}$ berechnet. Man hat für $\sigma \in \Sigma_E$:

$$(\sigma; p_E^{\nu*}[\phi_j]) = (p_E^\nu \sigma; [\phi_j]) = \sum_k \sigma(\phi_k) ([\sigma_k]; [\phi_j]) \stackrel{(3.1.12)}{=} \sigma(\phi_j). \quad (3.1.13)$$

Mithin gilt

$$p_E^{\nu*}[\phi_j] = P(E)\phi_j P(E) \in \mathfrak{A}_E. \quad (3.1.14)$$

Das Bild von \mathfrak{A}^ν unter $p_E^{\nu*}$ wird also gerade von den Punktfeldern ϕ_j aufgespannt, von denen wir in Abschnitt 2.4 gezeigt hatten, daß sie bei $x = 0$ lokalisiert sind. Wir bezeichnen die \mathfrak{A}^ν daher auch als *Feldkeime*; sie sind im beschriebenen Sinn dual zu den Zustandskeimen Σ^ν .

Man sieht an (3.1.14) noch einmal, daß die Abbildung p_E^ν (und mit ihr $p_E^{\nu*}$) explizit von E abhängt; die Abhängigkeit ist aber sehr einfach, sie läßt sich (für $E' > E$) in folgendem kommutativen Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma_{E'} & & \\ & i \text{ (Inkl.)} & \nearrow & p_{E'}^\nu & \\ \Sigma_E & \xrightarrow{p_E^\nu} & \Sigma^\nu & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ \mathfrak{A}_E & \xleftarrow{p_E^{\nu*}} & \mathfrak{A}^\nu & & \\ & i^* = \text{ad } P(E) & \nwarrow & p_{E'}^{\nu*} & \\ & & \mathfrak{A}_{E'} & & \end{array} \quad (3.1.15)$$

¹Wir schreiben die Anwendung eines Elements $v^* \in V^*$ auf ein $v \in V$ (V ein topologischer Vektorraum) im folgenden auch als $(v; v^*)$.

Wir kommen nun auf den Zusammenhang zwischen den Σ^ν und \mathfrak{A}^ν für verschiedene ν zu sprechen. Dazu setzen wir voraus, daß die Folgen ρ_ν dicht besetzt sind (siehe Anhang 3.B). Es sei $\nu' > \nu$; dann ist $\eta'_\nu \ll_{\rho_{\nu'}} \eta_\nu$, und man hat

$$\mathcal{N}_{\nu'} = \mathcal{N}[\eta_{\nu'}, \rho_{\nu'}] \subset \mathcal{N}[\eta_\nu, \rho_{\nu'}] = \mathcal{N}[\eta_\nu, \rho_\nu] = \mathcal{N}_\nu, \quad (3.1.16)$$

wobei die vorletzte Gleichheit durch Lemma 3.9 garantiert wird. Wie in (3.A.6) kann man daher das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \cup_E \Sigma_E & \xrightarrow{p^{\nu'}} & \Sigma^{\nu'} \\ & \searrow p^\nu & \downarrow p^{\nu', \nu} \\ & & \Sigma^\nu \end{array} \quad (3.1.17)$$

mit einer eindeutig bestimmten, surjektiven Abbildung $p^{\nu', \nu}$ kommutativ machen. Wegen $\|\sigma_j\|_r \ll \eta_\nu(r)$ ($j > N_\nu$) auf der entsprechenden Nullfolge werden die Basisvektoren $[\sigma_{N_\nu+1}] \dots [\sigma_{N_{\nu'}}] \in \Sigma^{\nu'}$ von $p^{\nu', \nu}$ auf die Null geworfen; dagegen wird für $j \leq N_\nu$ der Vektor $[\sigma_j] \in \Sigma^{\nu'}$ auf $[\sigma_j] \in \Sigma^\nu$ abgebildet. Unsere Basiswahl ist also mit den Abbildungen $p^{\nu', \nu}$ verträglich; ebenso ist es die Wahl der dualen Basis mit den $p^{\nu', \nu*}$. Letztere sind injektiv, ergeben also eine natürliche Inklusion von $\mathfrak{A}^{\nu'}$ in \mathfrak{A}^ν . Insgesamt ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma_E & \xrightarrow{p_E^\nu} & \Sigma^\nu & \xrightarrow{p^{\nu, \nu-1}} & \Sigma^{\nu-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Sigma^2 & \xrightarrow{p^{2,1}} & \Sigma^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{A}_E & \xleftarrow{p_E^{\nu*}} & \mathfrak{A}^\nu & \xleftarrow{p^{\nu, \nu-1*}} & \mathfrak{A}^{\nu-1} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \mathfrak{A}^2 & \xleftarrow{p^{2,1*}} & \mathfrak{A}^1 \end{array} \quad (3.1.18)$$

3.2 Operatoren und Gruppendarstellungen

Für die Überprüfung der Wightman-Axiome ist es unter anderem von Bedeutung, die Wirkung linearer Operatoren, insbesondere der Darstellungen von Symmetriegruppen, auf die Punktfelder ϕ_j (als quadratische Formen bzw. als ausintegrierte Distributionen) zu untersuchen. Die Wirkung solcher Operatoren - wie etwa der Lorentztransformationen oder der Involution $A \mapsto A^*$ - ist auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ bereits vorgegeben. Interessant ist nun die Frage, ob man sie auf die Feldkeime \mathfrak{A}^ν übertragen kann, wobei diese Übertragung mit den Abbildungen $p_E^{\nu*}$ kompatibel sein soll. Ist dies der Fall, dann erhält man unmittelbar, daß die besagten Operatoren Bild $p_E^{\nu*}$ invariant lassen, also die energiebeschränkten Punktfelder $P(E)\phi_j P(E)$ in Linearkombinationen solcher Felder überführen.

Wir werden diese Übertragung von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ auf \mathfrak{A}^ν erreichen, indem wir zunächst die induzierte Wirkung der in Rede stehenden Operatoren auf Σ bzw. Σ_E betrachten, diese dann restklassenweise auf Σ^ν übertragen und schließlich wieder per Dualität zu \mathfrak{A}^ν übergehen.

Hierfür müssen natürlich gewisse Bedingungen an die zu übertragenden Operatoren gestellt werden. Um die wesentlichen Aspekte der Konstruktion deutlicher hervorzuheben, betrachten wir zunächst einen speziellen Fall, der für die interessierenden Anwendungen an sich wenig relevant ist; wir können später jedoch leicht Verallgemeinerungen anbringen.

Das zu übertragende Objekt, einen beschränkten linearen Operator auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$,² bezeichnen wir mit α . Wir werden im folgenden noch weitere Eigenschaften von α fordern. Zunächst soll α mit $\text{ad } P(E)$ kommutieren:

$$\alpha(P(E) \cdot P(E)) = P(E) \alpha(\cdot) P(E). \quad (3.2.1)$$

Im folgenden seien $E > 0$ und $\nu \in \mathbb{N}$ fest, wobei E hinreichend groß ist, damit p_E^ν surjektiv wird. Zu $\sigma \in \Sigma_E$ definieren wir $\alpha_*\sigma \in \Sigma$ durch

$$\alpha_*\sigma(A) := \sigma(\alpha A) \quad \text{bzw.} \quad (\alpha_*\sigma; A) := (\sigma; \alpha A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}). \quad (3.2.2)$$

Wir müssen dazu voraussetzen, daß α stetig bezüglich der schwach*-Topologie ist; dann ist (3.2.2) wohldefiniert, weil αA schwach*-stetig in A wird. Aus (3.2.1) und der Energiebeschränktheit von σ folgt

$$(\alpha_*\sigma; P(E)AP(E)) = (\sigma; \alpha(P(E)AP(E))) \stackrel{(3.2.1)}{=} (\sigma; \alpha A) = (\alpha_*\sigma; A); \quad (3.2.3)$$

deshalb liegt auch $\alpha_*\sigma$ in Σ_E . Wir haben also einen (offenbar linearen) Operator α_* auf Σ_E erhalten, der in gewisser Weise „präduale“ zu α ist.

Nun sei weiter angenommen, daß α die lokalen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ (zumindest für Standard-Doppelkegel \mathcal{O}_r) invariant läßt; wir fordern also

$$\alpha\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r) \quad \forall r > 0. \quad (3.2.4)$$

In diesem Fall ist der Raum \mathcal{N}_ν (der Kern von p_E^ν) stabil unter α_* , denn

$$\|\alpha_*\sigma\|_r = \sup_{A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)} \frac{|\alpha_*\sigma(A)|}{\|A\|} \leq \sup_{A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)} \frac{|\sigma(\alpha A)|}{\|\alpha A\|} \|\alpha\| \stackrel{(3.2.4)}{\leq} \|\alpha\| \|\sigma\|_r \quad (3.2.5)$$

und deshalb

$$\sigma \in \mathcal{N}_\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\sigma\|_r}{\eta_\nu(r)} \rightarrow 0 \quad (r \in \rho_\nu) \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\alpha_*\sigma\|_r}{\eta_\nu(r)} \rightarrow 0 \quad (r \in \rho_\nu) \quad \Rightarrow \quad \alpha_*\sigma \in \mathcal{N}_\nu. \quad (3.2.6)$$

Damit ist es möglich, einen Operator $\check{\alpha}_*$ auf Σ^ν restklassenweise zu definieren:

$$\check{\alpha}_*[\sigma] := [\alpha_*\sigma]. \quad (3.2.7)$$

Per Dualität³ kann dann schließlich ein Operator $\check{\alpha}$ auf \mathfrak{A}^ν eingeführt werden:

$$([\sigma]; \check{\alpha}[\phi]) := (\check{\alpha}_*[\sigma]; [\phi]), \quad [\sigma] \in \Sigma^\nu, [\phi] \in \mathfrak{A}^\nu. \quad (3.2.8)$$

Es läßt sich nun leicht nachprüfen, daß die so eingeführten „Darsteller“ von α nicht nur (per Definition) mit p_E^ν , sondern auch mit $p_E^{\nu*}$ verträglich gewählt sind: Für $\sigma \in \Sigma_E$, $[\phi] \in \mathfrak{A}^\nu$ hat man

$$\begin{aligned} (\sigma; \alpha p_E^{\nu*}[\phi]) &\stackrel{(3.2.2)}{=} (\alpha_*\sigma; p_E^{\nu*}[\phi]) = (p_E^\nu \alpha_*\sigma; [\phi]) = ([\alpha_*\sigma]; [\phi]) \\ &\stackrel{(3.2.7)}{=} (\check{\alpha}_*[\sigma]; [\phi]) \stackrel{(3.2.8)}{=} ([\sigma]; \check{\alpha}[\phi]) = (\sigma; p_E^{\nu*} \check{\alpha}[\phi]), \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

²Gemeint ist hier also nicht $\alpha \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, sondern ein beschränktes lineares $\alpha : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

³Tatsächlich ist das hier definierte $\check{\alpha}$ nichts weiter als die duale Abbildung zu $\check{\alpha}_*$.

es gilt also

$$\alpha \circ p_E^{\nu*} = p_E^{\nu*} \circ \check{\alpha} \quad \text{oder suggestiver} \quad [\alpha\phi] = \check{\alpha}[\phi], \quad (3.2.10)$$

wenn man $p_E^{\nu*}[\phi] = \phi$ etc. schreibt. Insbesondere läßt α das Bild von $p_E^{\nu*}$ invariant, transformiert also die energiebeschränkten Punktfelder in sich. Das folgende Diagramm faßt zusammen, auf welchen Räumen die vier verschiedenen „Darsteller“ von α wirken (angedeutet durch gepunktete Linien):

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha_* & & \check{\alpha}_* \\
 \vdots & & \vdots \\
 \Sigma_E & \xrightarrow{p_E^\nu} & \Sigma^\nu \\
 \vdots & & \vdots \\
 \mathfrak{A}_E & \xrightarrow{p_E^{\nu*}} & \mathfrak{A}^\nu \\
 \vdots & & \vdots \\
 \alpha & & \check{\alpha}
 \end{array} \quad (3.2.11)$$

Die Definition von $\check{\alpha}$ hängt bisher noch von E und ν ab. Eine Abhängigkeit von E tritt aber in der Konstruktion - insbesondere in der Definition (3.2.2) - nicht explizit auf, und die Bildung des Quotientenraum $\Sigma^\nu = \Sigma_E/\mathcal{N}_\nu$ kann nach Diagramm (3.1.15) bei beliebigem E betrachtet werden, solange nur p_E^ν surjektiv ist. Wählt man $\nu' > \nu$ statt ν , dann ändert sich der Raum, auf dem $\check{\alpha}_*$ definiert wird; da die Definition (3.2.7) aber restklassenweise erfolgt ist, ergibt sich sofort Verträglichkeit mit $p^{\nu',\nu}$; entsprechend ist $\check{\alpha}$ mit den Inklusionen $p^{\nu',\nu*}$ kompatibel - siehe auch die Diagramme (3.1.17) und (3.1.18). Dicht besetzte Folgen⁴ ρ_ν sind dabei wieder vorauszusetzen.

Wie bereits erwähnt, sind die bisherigen Annahmen über den Operator α für die Anwendungen noch zu stark. Wir verallgemeinern das Resultat daher zu folgendem Satz:

Satz 3.2. *Sei α ein linearer oder antilinearer, beschränkter Operator auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. α ist stetig bezüglich der schwach*-Topologie auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.
2. Es gibt eine lineare Abbildung B auf \mathbb{R}^{s+1} , so daß für Standard-Doppelkegel \mathcal{O}_r mit Mittelpunkt 0 gilt

$$\alpha\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r) \subset \mathfrak{A}(B\mathcal{O}_r).$$

3. Zu jedem E gibt es ein $E' \geq E$, so daß

$$P(E) \alpha(P(E') \cdot P(E')) P(E) = P(E) \alpha(\cdot) P(E).$$

Die Folgen ρ_ν seien dicht besetzt. Dann existiert ein (anti)linearer Operator $\check{\alpha}$ auf $\bigcup_\nu \mathfrak{A}^\nu$, der jedes \mathfrak{A}^ν invariant läßt und die Gleichung

$$\text{ad } P(E) \circ \alpha \circ p_{E'}^{\nu*} = p_E^{\nu*} \circ \check{\alpha}$$

erfüllt (für jedes zulässige ν und genügend großes E). Insbesondere ist die lineare Hülle der ϕ_j (als quadratische Formen) invariant unter der Wirkung von α .

⁴Dicht besetzte Folgen sind, wie erwähnt, in Anhang 3.B definiert.

Beweis. Zunächst sei α linear. Wir definieren α_* erneut wie in (3.2.2); ist $\sigma \in \Sigma_E$, dann liefert Bedingung 3, daß

$$\alpha_*\sigma(P(E') \cdot P(E')) = \sigma(\alpha(P(E') \cdot P(E'))) \stackrel{(\text{Bedg.3})}{=} \sigma(\alpha(\cdot)) = \alpha_*\sigma(\cdot), \quad (3.2.12)$$

also $\alpha_*\sigma \in \Sigma_{E'}$. Demnach läßt α_* den Raum Σ_E hier nicht mehr notwendigerweise invariant, sondern wir haben $\alpha_* : \Sigma_E \rightarrow \Sigma_{E'}$. Für die Bildung der Restklassen ist das allerdings ohne Belang - siehe wiederum Diagramm (3.1.15).

Wir müssen außerdem auf die Annahme (3.2.4) verzichten und zeigen, daß die \mathcal{N}_ν auch unter den allgemeineren Bedingungen stabil unter α_* sind; genauer muß gelten:

$$\alpha_* \text{Kern } p_{E'}^\nu \subset \text{Kern } p_{E'}^\nu. \quad (3.2.13)$$

Sei ν im folgenden fest. Wir wählen k hinreichend groß, so daß

$$\frac{r_n^k}{\eta_\nu(r_n)} \rightarrow 0; \quad r_n \in \rho_\nu. \quad (3.2.14)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir nach Umordnung der Folge ρ_ν annehmen, daß $\frac{r_n^k}{\eta_\nu(r_n)}$ monoton fällt. (Die Umordnung der Folge ist für Konvergenzaussagen ohne Bedeutung.) Nun hat man für $\sigma \in \text{Kern } p_{E'}^\nu$ wie zuvor in (3.2.5):

$$\|\alpha_*\sigma\|_r \leq \|\alpha\| \sup_{A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)} \frac{|\sigma(\alpha A)|}{\|\alpha A\|}. \quad (3.2.15)$$

Nach Voraussetzung 2 ist dabei $\alpha A \in \mathfrak{A}(B\mathcal{O}_r)$. Bezeichnet K_r die $(s+1)$ -dimensionale Kugel mit Radius r um den Ursprung, dann hat man

$$B\mathcal{O}_r \subset BK_r \subset \|B\|K_r \subset 2\|B\|\mathcal{O}_r = \mathcal{O}_{2\|B\|r}. \quad (3.2.16)$$

Mithin gilt $\alpha A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{br})$ mit einer geeigneten Konstanten b , von der wir ohne Einschränkung $b \geq 1$ annehmen können. Zu $r_n \in \rho_\nu$ (n groß) kann man nun, da ρ_ν voraussetzungsgemäß dicht besetzt ist, ein $m \in \mathbb{N}$ finden, so daß $br_n < r_m < bcr_n$ mit einer Konstanten c . Somit folgt schließlich

$$\frac{1}{\eta_\nu(r_n)} \|\alpha_*\sigma\|_{r_n} \leq \frac{\|\alpha\|}{\eta_\nu(r_n)} \|\sigma\|_{br_n} \leq \|\alpha\| \underbrace{\frac{r_n^k}{\eta_\nu(r_n)} \frac{\eta_\nu(r_m)}{r_m^k}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{r_m^k}{r_n^k}}_{\leq (bc)^k} \cdot \frac{\|\sigma\|_{r_m}}{\eta_\nu(r_m)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.2.17)$$

denn für $n \rightarrow \infty$ wächst auch m beliebig. Folglich ist $\alpha_*\sigma \in \text{Kern } p_{E'}^\nu$, und (3.2.13) ist gezeigt.

Der Rest der Konstruktion verläuft genauso wie in (3.2.7) und folgende beschrieben. Da jetzt aber im allgemeinen $\alpha_*\sigma \notin \Sigma_E$, muß man bei der Interpretation von Gleichung (3.2.9) vorsichtiger sein: Mit der gleichen Rechnung erhält man zunächst

$$(\sigma; \alpha p_{E'}^{\nu*}[\phi]) = (\sigma; p_{E'}^{\nu*}\check{\alpha}[\phi]) \quad \forall \sigma \in \Sigma_E. \quad (3.2.18)$$

Da Σ_E aber nur für \mathfrak{A}_E , nicht für $\mathfrak{A}_{E'}$ separierend ist, erhalten wir im Sinne von Abbildungen die Beziehung

$$\text{ad } P(E) \circ \alpha \circ p_{E'}^{\nu*} = p_{E'}^{\nu*} \circ \check{\alpha}. \quad (3.2.19)$$

Für die Invarianz der Menge der Punktfelder unter α ist zuerst zu klären, inwiefern α überhaupt auf quadratischen Formen operiert: Sei ϕ eine Linearkombination der Punktfelder, $[\phi] \in \mathfrak{A}^\nu$. Wegen Bedingung 3 kann man für $\psi, \xi \in \mathcal{H}_E$ zunächst formal schreiben

$$(\psi | \alpha \phi | \xi) = (\psi | P(E) \alpha(\phi) P(E) | \xi) = (\psi | P(E) \alpha(P(E') \phi P(E')) P(E) | \xi) \quad (3.2.20)$$

und dann die linke Seite durch die rechte definieren, indem man die Beschränktheit von $P(E') \phi P(E')$ ausnutzt. Diese Definition ist dann wegen Bedingung 3 unabhängig von E' , solange E' genügend groß gewählt wird. Nun berechnet man

$$(\psi | \alpha \phi | \xi) \stackrel{(3.2.20)}{=} (\psi | \text{ad } P(E) \circ \alpha \circ p_{E'}^{\nu*} [\phi] | \xi) \stackrel{(3.2.18)}{=} (\psi | p_{E'}^{\nu*} \circ \check{\alpha}[\phi] | \xi). \quad (3.2.21)$$

Da sich $\check{\alpha}[\phi]$ als endliche Linearkombination der $[\phi_j]$ schreiben läßt, liegt $\alpha \phi$ als quadratische Form wieder in der linearen Hülle der ϕ_j .

Zu behandeln bleibt noch der Fall eines antilinearen Operators α . Hier können wir die vorstehenden Überlegungen fast vollständig übernehmen; es sind lediglich (3.2.2) durch

$$(\alpha_* \sigma ; A) := \overline{(\sigma ; \alpha A)} \quad (3.2.22)$$

und (3.2.8) durch

$$([\sigma] ; \check{\alpha}[\phi]) := \overline{(\check{\alpha}_*[\sigma] ; [\phi])} \quad (3.2.23)$$

zu ersetzen. □

Die Zuordnung $\alpha \mapsto \check{\alpha}$ ist per Definition linear. Aus Gleichung (3.2.10) liest man außerdem ab, daß die Produktstruktur erhalten bleibt: $(\alpha\beta)^\check{} = \check{\alpha}\check{\beta}$. Aus diesem Grunde kann man offenbar Gruppendarstellungen von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ auf \mathfrak{A}^ν übertragen:

Korollar 3.3. *Sei α eine Darstellung der Gruppe G auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$; die Bedingungen des Satzes 3.2 seien für jedes $\alpha(g)$ ($g \in G$) statt α erfüllt. Dann gibt es eine Darstellung $\check{\alpha}$ von G auf $\bigcup_\nu \mathfrak{A}^\nu$, die jedes \mathfrak{A}^ν invariant läßt und die*

$$\text{ad } P(E) \circ \alpha(g) \circ p_{E'}^{\nu*} = p_{E'}^{\nu*} \circ \check{\alpha}(g) \quad \forall g \in G$$

für jedes zulässige ν und genügend großes E erfüllt.

Als Anwendung betrachten wir zunächst die antilineare Involution $J : A \mapsto A^*$; sie ist beschränkt, da $\|A\| = \|A^*\|$. Wegen $(P(E)AP(E))^* = P(E)A^*P(E)$ und $\mathfrak{A}(\mathcal{O})^* = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ sind die Bedingungen 2 und 3 des Satzes erfüllt, sogar mit $E = E'$ und $B = \mathbf{1}$; auch die schwach*-Stetigkeit prüft man sofort nach. Man erhält also einen antilinearen Operator \check{J} auf jedem \mathfrak{A}^ν mit $\check{J}^2 = \mathbf{1}$, der nach Komposition mit $p_{E'}^{\nu*}$ gerade die Adjunktion in \mathfrak{A}_E ergibt. Damit ist die Menge der Punktfelder (als quadratische Formen auf $\bigcup_E (\mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E)$) abgeschlossen unter Konjugation: Zu jedem ϕ findet man dort auch die adjungierte quadratische Form

$$\phi^* : (\psi | \phi^* | \xi) := \overline{(\xi | \phi | \psi)}; \quad \psi, \xi \in \bigcup_E \mathcal{H}_E. \quad (3.2.24)$$

Wir wollen dies nun auch auf die Operatoren $\phi(f)$ übertragen. Sei dazu $[\phi] \in \mathfrak{A}^\nu$. Wir integrieren ϕ^* statt ϕ nach Abschnitt 2.5 mit einer Testfunktion f aus und erhalten für $\psi, \xi \in \mathcal{H}_E$:

$$\begin{aligned} (\psi | \phi^*(f) \xi) &= \int d^{s+1}x f(x) (U(-x)\psi | \phi^* | U(-x)\xi) \\ &= \int d^{s+1}x f(x) \overline{(U(-x)\xi | \phi | U(-x)\psi)} = \overline{(\xi | \phi(f)\psi)} = (\phi(f)\psi | \xi). \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Man bemerkt nun, daß sich die rechte Seite der Gleichung stetig auf $\psi \in \mathcal{H}$ erweitern läßt, sogar für $\xi \in \mathcal{D} = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$; das folgt aus der Kommutatorrelation (2.5.3) und der anschließenden Diskussion. Folglich enthält der Definitionsbereich \mathcal{D}^* des adjungierten Operators $\phi(f)^*$ mindestens auch \mathcal{D} . Da sich (3.2.25) dann sofort auf $\psi \in \mathcal{H}$ und $\xi \in \mathcal{D}$ fortsetzen läßt, erhält man

$$\phi^*(f) \subset \phi(f)^* \quad (3.2.26)$$

bzw. die Gleichheit dieser Operatoren auf \mathcal{D} . Damit werden auch die $\phi_j(f)$ durch Konjugation in Linearkombinationen solcher Felder überführt.

Dieses Ergebnis stimmt noch nicht ganz mit der Hermitezitätsforderung (1.3.1) der Wightman-Axiome überein, die verlangt, daß die $\phi_j(f)^*$ in der Menge (nicht der linearen Hülle) der $\phi_k(f)$ vorkommen. Wir können dies aber durch einen einfachen Basiswechsel erreichen: Nach obiger Überlegung liegen mit den $[\phi_1] \dots [\phi_{N_\nu}]$ auch die $2N_\nu$ Vektoren

$$[\phi_j^+] := \frac{1}{2}([\phi_j] + \check{J}[\phi_j]), \quad [\phi_j^-] := \frac{1}{2i}([\phi_j] - \check{J}[\phi_j]) \quad (j = 1 \dots N_\nu) \quad (3.2.27)$$

in \mathfrak{A}^ν , und offenbar spannen sie auch \mathfrak{A}^ν auf. Außerdem sind sie \check{J} -invariant. Indem wir aus ihnen linear unabhängige Vektoren auswählen, erhalten wir eine Basis $\{[\phi_j^W], j = 1 \dots N_\nu\}$ von \mathfrak{A}^ν aus \check{J} -invarianten Vektoren; Anwendung von $p_E^{\nu*}$ und Ausintegration liefert dann sogar N_ν hermitesche Wightmanfelder. Alternativ könnten wir zur Erfüllung der Axiome auch die ϕ_j^* zur Menge der Felder hinzunehmen und dafür auf die lineare Unabhängigkeit der Felder verzichten.

Weiterhin interessieren wir uns für die Darstellung der Lorentzgruppe \mathfrak{L} auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$: Zu $\Lambda \in \mathfrak{L}$ hat man den Darsteller $\alpha_\Lambda = U(\Lambda) \cdot U(\Lambda)^*$ mit unitären Operatoren $U(\Lambda) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Als Multiplikation mit beschränkten Operatoren sind die α_Λ sowohl beschränkt wie auch schwach*-stetig. Außerdem besagt die Kovarianz des lokalen Netzes, daß $\alpha_\Lambda \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}(\Lambda\mathcal{O})$. Bedingung 1 und 2 des Satzes 3.2 sind also erfüllt; zu überprüfen bleibt noch Bedingung 3. Dazu schreibt man

$$U(\Lambda)P(E) = U(\Lambda)P(E)U(\Lambda)^* \cdot U(\Lambda) = P^\Lambda(E) \cdot U(\Lambda); \quad (3.2.28)$$

hier ist $P^\Lambda(E)$ der Energieprojektor im Lorentztransformierten Bezugssystem. Da sich das gemeinsame Spektrum der P_μ mit der bekannten $(s+1)$ -dimensionalen Darstellung von \mathfrak{L} transformiert, erhält man für genügend groß gewähltes E'

$$P(E')P^\Lambda(E) = P^\Lambda(E) \stackrel{(3.2.28)}{\Rightarrow} P(E')U(\Lambda)P(E) = U(\Lambda)P(E). \quad (3.2.29)$$

Mit diesem E' folgt (wenn man noch von Λ zu Λ^{-1} übergeht) dann Bedingung 3. Korollar 3.3 liefert also - dicht besetzte Folgen ρ_ν vorausgesetzt - eine Darstellung $\check{\alpha}_\Lambda$ von \mathfrak{L} auf jedem

\mathfrak{A}^ν . Entwickeln wir diese nach einer Basis von \mathfrak{A}^ν , etwa nach den $[\phi_j]$, dann erhalten wir eine N_ν -dimensionale Matrixdarstellung $S_{jk}(\Lambda)$ von \mathfrak{L} , so daß

$$U(\Lambda)\phi_j U(\Lambda)^* = \sum_{k=1}^{N_\nu} S_{jk}(\Lambda^{-1}) \phi_k \quad (3.2.30)$$

im Sinne quadratischer Formen.

Auch dies ist zur Überprüfung der Wightman-Axiome noch auf die ausintegrierten Felder $\phi_j(f)$ zu übertragen. Für $\psi, \xi \in \mathcal{H}_E$ hat man

$$\begin{aligned} (\psi | U(\Lambda)\phi_j(f)U(\Lambda)^* \xi) &= \int d^{s+1}x f(x) (\psi | U(\Lambda)U(x)\phi_j U(x)^* U(\Lambda)^* | \xi) \\ &\stackrel{(3.2.30)}{=} \sum_{k=1}^{N_\nu} S_{jk}(\Lambda^{-1}) \int d^{s+1}x f(x) (\psi | U(\Lambda x)\phi_k U(\Lambda x)^* | \xi) \\ &= \sum_{k=1}^{N_\nu} S_{jk}(\Lambda^{-1}) \int d^{s+1}x f(\Lambda^{-1}x) (\psi | U(x)\phi_k U(x)^* | \xi) \\ &= \sum_{k=1}^{N_\nu} S_{jk}(\Lambda^{-1}) (\psi | \phi_k(f_\Lambda) \xi), \quad \text{wobei } f_\Lambda(y) = f(\Lambda^{-1}y). \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Bei der stetigen Erweiterung auf $\psi \in \mathcal{H}$ und $\xi \in \mathcal{D}$ bleibt die eben berechnete Relation erhalten; es gilt

$$U(\Lambda)\phi(f)U(\Lambda)^* = \sum_{k=1}^{N_\nu} S_{jk}(\Lambda^{-1}) \phi_k(f_\Lambda) \quad (3.2.32)$$

als Operatorgleichung auf \mathcal{D} . Analoges kann man - mit einer anderen Matrixdarstellung von \mathfrak{L} - auch für die oben konstruierten ϕ_j^W erreichen.

Es sei bemerkt, daß sich Satz 3.2 noch weiter verallgemeinern läßt: Wir benötigen die Operatoren α beispielsweise nicht auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, sondern nur auf jedem \mathfrak{A}_E , und ihre Norm darf ohne weiteres mit E wachsen. Um die Formulierung aber nicht unnötig zu verkomplizieren, verzichten wir hier auf eine solche Verallgemeinerung. Die genannten Überlegungen werden im nächsten Abschnitt eingehen, um speziell einen Operator der partiellen Ableitung auf den \mathfrak{A}^ν zu etablieren.

3.3 Differentiation der Felder

In der Wightman'schen Quantenfeldtheorie benötigt man Ableitungen der Punktfelder $\phi(x)$, um Differentialgleichungen („Feldgleichungen“) zwischen ihnen betrachten zu können; man möchte also Ausdrücke der Form

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \quad (3.3.1)$$

rechtfertigen. Wir werden unten darauf eingehen, in welchem Sinn diese Differentiation erklärt werden kann. In unserem Rahmen ist außerdem die Frage interessant, ob die Ableitung

als Operation auf den Feldkeimen aufgefaßt werden kann: Mit jedem ϕ sollten unter den konstruierten Feldern auch die Ableitungen $\partial_\mu \phi$ vorkommen. Wir präzisieren dies ähnlich wie in Abschnitt 3.2 durch Übertragung des Differentialoperators ∂_μ auf die Feldkeime. Auf diese Weise erhält man auch, daß die Differentiation der Felder im Sinne von Distributionen (die natürlich stets möglich ist) nicht aus der Menge der konstruierten Felder herausführt.

Wir untersuchen nun zunächst die Existenz der Ableitung. Die Punktfelder ϕ bzw. ϕ_j , die bisher betrachtet wurden, waren bei $x = 0$ lokalisiert. Um sie zu differenzieren, müssen wir zunächst zu den Feldern $\phi(x)$ übergehen: Im Vorgriff auf Abschnitt 3.4, in dem wir uns genauer mit der Translation der Keime befassen, definieren wir im Sinne quadratischer Formen

$$\phi(x) := U(x)\phi U(-x) \quad (3.3.2)$$

mit den Darstellern $U(x)$ der Translationsgruppe. Dann ist $P(E)\phi(x)P(E)$ wieder beschränkter Operator. Da die Generatoren P_μ der Translationen nach Adjunktion mit $P(E)$ beschränkt sind (die Spektrumsbedingung liefert $P_\mu^2 \leq H^2$, $\mu = 0 \dots s$), kann man $U(x) = e^{iP_\mu x^\mu}$ in (3.3.2) als Potenzreihe ausschreiben, die dann absolut konvergiert:

$$\begin{aligned} P(E)\phi(x)P(E) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{i^{m-n}}{m!n!} P(E)(P_\mu x^\mu)^m P(E)\phi P(E)(P_\mu x^\mu)^n P(E) \\ &= P(E)\phi P(E) + iP(E)[P_\mu, \phi]P(E)x^\mu + O(\|x\|^2). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Genauer können wir (bei festem E) schreiben:

$$\|P(E)\phi(x)P(E) - P(E)\phi P(E) - iP(E)[P_\mu, \phi]P(E)x^\mu\| \leq \|x\|^2 \cdot \text{const.} \quad (3.3.4)$$

Folglich ist $P(E)\phi(x)P(E)$ bei $x = 0$ in der Operatornorm differenzierbar. Ist nun $\sigma \in \Sigma_E$, dann gilt

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sigma(\phi(x)) \right|_{x=0} = \sigma(i[P_\mu, \phi]) =: \sigma(\partial_\mu \phi). \quad (3.3.5)$$

Im Sinne von Linearformen auf $\bigcup_E \Sigma_E$ können die Punktfelder also differenziert werden; man erhält wieder Linearformen auf demselben Definitionsbereich. Auch die polynomiale Energiebeschränktheit bleibt erhalten: Ist $\phi \in \Theta_1$, dann folgt

$$\begin{aligned} \|\partial_\mu \phi|_{\Sigma_E}\| &= \sup_{\sigma \in \Sigma_E} \frac{|\sigma(\partial_\mu \phi)|}{\|\sigma\|} = \sup_{\sigma \in \Sigma_E} \frac{|\sigma([P_\mu, \phi])|}{\underbrace{\|\sigma([P_\mu, \cdot])\|}_{=: \sigma'}} \cdot \frac{\|\sigma([P_\mu, \cdot])\|}{\|\sigma\|} \\ &\leq \sup_{\sigma' \in \Sigma_E} \frac{|\sigma'(\phi)|}{\|\sigma'\|} \cdot 2 \|P_\mu P(E)\| \leq 2E \cdot \|\phi\|_E \leq 2E \cdot (1+E)^k \cdot \text{const.} \quad (k \text{ geeignet}); \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

folglich liegt auch $\partial_\mu \phi$ in Θ_1 .

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit sich die Differentiation der Felder innerhalb der Feldkeime \mathfrak{A}^ν ausdrücken läßt, ähnlich wie es für die Wirkung von Symmetriegruppen in Abschnitt 3.2 durchgeführt wurde. Die Ableitung soll also auf dem „Umweg“ über die Prädualräume auf die \mathfrak{A}^ν übertragen werden.

Es tritt hier aber ein Problem auf, das in Abschnitt 3.2 nicht vorhanden war: Wegen (3.3.6) erwartet man, daß $\|\partial_\mu \phi\|_E$ für $E \rightarrow \infty$ um eine Potenz von E stärker divergiert als

$\|\phi\|_E$; dies sollte sich im r -Verhalten des zu $\partial_\mu \phi$ gehörenden dualen Objekts im Zustandskeim widerspiegeln. Daher wird ein zu etablierender Differentiationsoperator \check{D}_μ im allgemeinen den Raum \mathfrak{A}^ν nicht invariant lassen, sondern in ein $\mathfrak{A}^{\nu'}$ mit $\nu' > \nu$ abbilden, d.h. die „Energiedimension“ der Felder erhöhen. Dies wird im Verlauf der Konstruktion, mit der wir nun beginnen, zu berücksichtigen sein.

Um die Analogie zu Satz 3.2 herzustellen, definieren wir wie folgt einen linearen Operator D_μ auf \mathfrak{A}_E :

$$D_\mu A := iP(E)[P_\mu, A]P(E), \quad A \in \mathfrak{A}_E. \quad (3.3.7)$$

D_μ ist gerade so konstruiert, daß

$$D_\mu(P(E)\phi P(E)) = P(E)\partial_\mu \phi P(E). \quad (3.3.8)$$

Die Definition ist zwar von E abhängig, aber dies ist für $E' > E$ mit den Projektionen $\mathfrak{A}_{E'} \rightarrow \mathfrak{A}_E, A \mapsto P(E)AP(E)$ verträglich. Wir können also wieder den „prädualen Operator“ $D_{\mu*}$ auf Σ_E einführen durch

$$(D_{\mu*}\sigma; A) := (\sigma; D_\mu A), \quad \sigma \in \Sigma_E, A \in \mathfrak{A}_E, \quad (3.3.9)$$

und dies ist verträglich mit den Inklusionen $\Sigma_E \hookrightarrow \Sigma_{E'}$ (vgl. auch Diagramm (3.1.15)). Die Übertragung auf die Zustandskeime Σ^ν läßt sich hingegen nicht mehr problemlos durchführen; im Gegensatz zu (3.2.6) ist hier im allgemeinen $D_{\mu*}\mathcal{N}_\nu \not\subset \mathcal{N}_\nu$. Dies ist Ausdruck der oben erwähnten Eigenschaft von \check{D}_μ , die Räume \mathfrak{A}^ν nicht in sich abzubilden. Wir müssen für die hier nicht erfüllte Relation einen Ersatz finden:

Lemma 3.4. *Die Folgen ρ_ν seien dicht besetzt.⁵ Dann gibt es zu jedem zulässigen Wert ν ein ν' , so daß*

$$D_{\mu*}\mathcal{N}_{\nu'} \subset \mathcal{N}_\nu.$$

Beweis. Sie ν im folgenden fest. Wir wissen aus Satz 2.2, daß $\eta_\nu \gg_{\rho_\nu} r^k$ mit geeignetem k ; weiterhin existiert laut diesem Satz ein ν' mit

$$d[r^{2k}, 2k, \rho_{\nu'}](\Xi, \sum_{j=1}^{N_{\nu'}} \phi_j \sigma_j) = 0. \quad (3.3.10)$$

Ist $\sigma \in \mathcal{N}_{\nu'}$, dann verschwinden alle $\sigma(\phi_j)$ ($j = 1 \dots N_{\nu'}$); wertet man (3.3.10) auf einem solchen Funktional aus, so erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n^{2k}} \|\sigma\|_{r_n'} = 0, \quad (3.3.11)$$

wobei wir $\rho_{\nu'} = (r_n')$, $\rho_\nu = (r_n)$ schreiben. Man hat also

$$\mathcal{N}_{\nu'} \subset \mathcal{N}[r^{2k}, \rho_{\nu'}] \subset \mathcal{N}[r^k \eta_\nu, \rho_{\nu'}]; \quad (3.3.12)$$

⁵Siehe wiederum Anhang 3.B.

da wir $\rho_{\nu'}$ als dicht besetzt vorausgesetzt hatten, folgt nach Lemma 3.9 (Anhang 3.B) außerdem

$$\mathcal{N}[r^k \eta_{\nu'}, \rho_{\nu'}] = \mathcal{N}[r^k \eta_{\nu}, \rho_{\nu}]. \quad (3.3.13)$$

Sei nun also $\sigma \in \mathcal{N}_{\nu'} \subset \mathcal{N}[r^k \eta_{\nu}, \rho_{\nu}]$. Für $q \in \mathbb{R}^+$ setzen wir $\alpha_q(\cdot) = U(qe_{\mu}) \cdot U(qe_{\mu})^*$, wobei e_{μ} der Einheitsvektor in Richtung der μ -Achse ist. Da σ energiebeschränkt ist, erhält man durch eine Potenzreihenentwicklung wie in (3.3.4)

$$\left| \sigma \left(\frac{\alpha_q A - A}{q} - D_{\mu}(P(E)AP(E)) \right) \right| \leq \|A\| \cdot c \cdot q \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \quad (3.3.14)$$

für kleine q mit einer von A unabhängigen Konstanten c . Man berechnet nun

$$\begin{aligned} \|D_{\mu*}\sigma\|_r &= \sup_{A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)} \frac{|\sigma(D_{\mu}(P(E)AP(E)))|}{\|A\|} \\ &\leq \sup_{A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)} \frac{1}{\|A\|} \left(|\sigma(D_{\mu}A - \frac{\alpha_q A - A}{q})| + \frac{1}{q} |\sigma(\alpha_q A - A)| \right) \\ &\leq \sup_{A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)} \left(c \cdot q + \frac{1}{q} \frac{|\sigma(\alpha_q A - A)|}{\underbrace{\|\alpha_q A - A\|}_{\in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r+q})}} \cdot \underbrace{\frac{\|\alpha_q A - A\|}{\|A\|}}_{\leq 2} \right) \leq c \cdot q + \frac{2}{q} \|\sigma\|_{r+q}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Setzen wir nun $q = r_n^k$, dann gilt für kleine r_n :

$$\frac{1}{\eta_{\nu}(r_n)} \|D_{\mu*}\sigma\|_{r_n} \leq c \cdot \frac{r_n^k}{\eta_{\nu}(r_n)} + 2 \frac{\|\sigma\|_{2r_n}}{r_n^k \eta_{\nu}(r_n)}. \quad (3.3.16)$$

Der erste Summand verschwindet im Limes $n \rightarrow \infty$ wegen $\eta_{\nu} \gg_{\rho_{\nu}} r^k$, der zweite mit ähnlichen Überlegungen wie in (3.2.17), wobei man verwendet, daß $\sigma \in \mathcal{N}[r^k \eta_{\nu}, \rho_{\nu}]$. Damit ist gezeigt, daß $D_{\mu*}\sigma \in \mathcal{N}_{\nu}$. \square

Mit der eben bewiesenen Aussage können wir nun die partielle Ableitung nicht auf die Zustandskeime, aber zumindest auf die Feldkeime übertragen. Sei dazu $[\phi] \in \mathfrak{A}^{\nu}$. Mit Hilfe von Lemma 3.4 erhalten wir ν' , so daß $D_{\mu*}\mathcal{N}_{\nu'} \subset \mathcal{N}_{\nu}$. Dann läßt sich $\check{D}_{\mu}[\phi] \in \mathfrak{A}^{\nu'}$ definieren durch

$$(p^{\nu'}\sigma; \check{D}_{\mu}[\phi]) := (p^{\nu}D_{\mu*}\sigma; [\phi]); \quad \sigma \in \bigcup_E \Sigma_E. \quad (3.3.17)$$

Hier ist natürlich Wohldefiniertheit zu zeigen: Zunächst ist die Definition wegen Lemma 3.4 unabhängig von der Auswahl von σ . Wählt man ein anderes ν' (etwa $\nu'' > \nu'$), dann erhält man sofort Verträglichkeit mit der kanonischen Inklusion⁶ $p^{\nu''}, \nu'^{*}$ von $\mathfrak{A}^{\nu'}$ in $\mathfrak{A}^{\nu''}$:

$$(p^{\nu''}\sigma; p^{\nu'', \nu'^{*}}\check{D}_{\mu}^{(\nu')}[\phi]) = (\underbrace{p^{\nu'', \nu'} p^{\nu''}}_{p^{\nu'}}\sigma; \check{D}_{\mu}^{(\nu')}[\phi]) = (p^{\nu}D_{\mu*}\sigma; [\phi]) = (p^{\nu''}\sigma; \check{D}_{\mu}^{(\nu'')}[\phi]). \quad (3.3.18)$$

⁶Siehe dazu auch Diagramm (3.1.18).

Ebenso ist die Definition verträglich mit den Inklusionen bei Wahl eines anderen ν . Wir können \check{D}_μ also als wohldefinierten Operator auf $\bigcup_\nu \mathfrak{A}^\nu$ betrachten. Eine einfache Rechnung wie in (3.2.9) zeigt nun, daß tatsächlich

$$p_E^{\nu*} \circ \check{D}_\mu = D_\mu \circ p_E^{\nu*} \quad (3.3.19)$$

bei festgehaltenem ν und E ; die Punktfelder ϕ_j werden durch Differentiation also in (endliche) Linearkombinationen der ϕ_j überführt.

Unser Ergebnis lautet damit:

Satz 3.5. *Sind die Folgen ρ_ν dicht besetzt, dann gibt es lineare Operatoren \check{D}_μ ($\mu = 0 \dots s$) auf $\bigcup_\nu \mathfrak{A}^\nu$, so daß*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(U(x) (p_E^{\nu*}[\phi]) U(-x) \right) \right|_{x=0} = p_E^{\nu*} \check{D}_\mu[\phi]$$

für $[\phi] \in \mathfrak{A}^\nu$ und (zu ν) genügend groß gewähltes ν' und E .

Der Vollständigkeit halber zeigen wir noch, daß unsere Definition der Differentiation von Punktfeldern nach Ausintegrieren mit der üblichen Ableitung der Wightman-Distributionen übereinstimmt. Dazu seien $[\phi] \in \mathfrak{A}^\nu$ und $\psi, \xi \in \mathcal{H}_E$. Wir integrieren das differenzierte Feld $\partial_\mu \phi$ aus:

$$\begin{aligned} (\psi | (\partial_\mu \phi)(f) \xi) &= \int d^{s+1}x f(x) (U(-x)\psi | \partial_\mu \phi | U(-x)\xi) \\ &= \int d^{s+1}x f(x) \left. \frac{\partial}{\partial y^\mu} (U(-x)\psi | U(y)\phi U(-y) | U(-x)\xi) \right|_{y=0} \\ &= \int d^{s+1}x f(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\psi | U(x)\phi U(-x) | \xi) \\ &\stackrel{\text{(P.I.)}}{=} - \int d^{s+1}x \partial_\mu f(x) (\psi | U(x)\phi U(-x) | \xi) = -(\psi | \phi(\partial_\mu f) \xi). \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Nach Fortsetzung erhält man somit

$$(\partial_\mu \phi)(f) = -\phi(\partial_\mu f) \quad (3.3.21)$$

als Operatorgleichung auf \mathcal{D} . Damit sind auch die im Sinne von Distributionen differenzierten $\phi_j(f)$ endliche Linearkombinationen gewisser $\phi_k(f)$.

3.4 Translationen

In der gesamten bisherigen Konstruktion haben wir das Verhalten der Theorie am Koordinatenursprung betrachtet und dort lokalisierte Punktfelder $\phi = \phi(0)$ konstruiert. Wir wollen nun zu den Feldern $\phi(x)$ übergehen und die Wirkung von Raum-Zeit-Translationen auf sie untersuchen.

Es würde hierzu ausreichen, die $\phi(x)$ direkt durch die Wirkung der Translationen zu definieren, also $\phi(x) := U(x)\phi U(-x)$ zu setzen, wie dies in (3.3.2) schon vorweggenommen wurde. Auf diese Weise erhält man auch die in den Wightman-Axiomen geforderte Kovarianz der ϕ_j bzw. $\phi_j(f)$ unter der Poincaré-Gruppe.

Trotzdem ist es in unserem Rahmen interessant, wie sich die Translationen innerhalb des Formalismus der Feld- und Zustandskeime ausdrücken lassen; wir werden dies kurz skizzieren. Das Verfahren liefert zwar keine neuen Aussagen über die ϕ_j , zeigt aber, daß die Feldkeime geeignet sind, um Punktfelder im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie vollständig zu beschreiben.

Wir müssen dazu zunächst die Zustands- und Feldkeime am Ort x definieren. Dies geschieht ganz analog zur Definition der Keime bei $x = 0$: Wie in (3.1.1) setzen wir

$$\mathcal{N}_\nu(x) := \mathcal{N}[\eta_\nu, \rho_\nu](x) = \left\{ \sigma \in \Sigma \mid \frac{\|\sigma[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n}(x))]\|}{\eta_\nu(r_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \ (r_n \in \rho_\nu) \right\}. \quad (3.4.1)$$

Dabei ist $\mathcal{O}_r(x)$ der Standard-Doppelkegel mit Radius r und Mittelpunkt x ; man vergleiche auch mit (3.A.7) und der zugehörigen Diskussion. Die Zustandskeime $\Sigma^\nu(x)$ bei x können nun als Bild von $\bigcup_E \Sigma_E$ in $\Sigma/\mathcal{N}_\nu(x)$ definiert werden, analog zu (3.1.3). Ihr Dualraum ist entsprechend der Feldkeim bei x :

$$\mathfrak{A}^\nu(x) := \Sigma^\nu(x)^*, \quad (3.4.2)$$

versehen mit der Standardtopologie. (Natürlich sind auch die $\Sigma^\nu(x)$ endlichdimensional, wie wir gleich explizit sehen werden.) Wir verwenden analog zu Abschnitt 3.1 die Abbildungen $p^\nu(x)$, $p_E^\nu(x)$ und $p^{\nu', \nu}(x)$. Die $\Sigma^\nu(x)$ und $\mathfrak{A}^\nu(x)$ erfüllen bezüglich dieser Abbildungen dieselben Verträglichkeitsbedingungen wie bereits für die Keime bei $x = 0$ erwähnt - siehe insbesondere die Diagramme (3.1.15), (3.1.17) und (3.1.18).

Wir betrachten nun die Wirkung der Translationen α_x auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$; sie soll uns die Beziehungen zwischen den $\Sigma^\nu(x)$ bzw. $\mathfrak{A}^\nu(x)$ für verschiedene x liefern. Ähnlich wie in Abschnitt 3.2 definieren wir dazu eine „präduale Darstellung“ α_{x*} der Translationsgruppe auf Σ :

$$\alpha_{x*}\sigma(A) := \sigma(\alpha_{-x}A); \quad \sigma \in \Sigma, A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}). \quad (3.4.3)$$

Man rechnet leicht nach, daß α_{x*} die Räume $\mathcal{N}_\nu(y)$ gewissermaßen verschiebt: Für $x, y \in \mathbb{R}^{s+1}$ hat man

$$\alpha_{x*}\mathcal{N}_\nu(y) = \mathcal{N}_\nu(x+y). \quad (3.4.4)$$

Aufgrund dieser Tatsache kann man nun Translationen zwischen den Zustandskeimen restklassenweise definieren: Man setzt

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_{x*} : \Sigma^\nu(y) &\rightarrow \Sigma^\nu(x+y), \\ \check{\alpha}_{x*} &= p^\nu(x+y) \circ \alpha_{x*} \circ p^\nu(y)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

d.h. man definiert $\check{\alpha}_{x*}$ durch folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{p^\nu(y)} & \Sigma^\nu(y) \\ \alpha_{x*} \downarrow & & \downarrow \check{\alpha}_{x*} \\ \Sigma & \xrightarrow{p^\nu(x+y)} & \Sigma^\nu(x+y) \end{array} \quad (3.4.6)$$

Da $\alpha_x = U(x) \cdot U(x)^*$ und ebenso α_{x*} mit $\text{ad } P(E)$ vertauschen, gilt dieses Diagramm auch, wenn man Σ durch Σ_E und die $p^\nu(\cdot)$ durch $p_E^\nu(\cdot)$ ersetzt.

Wegen der Invertierbarkeit von α_{x*} ist es nun klar, daß die $\check{\alpha}_{x*}$ Isomorphismen sind, insbesondere solche zwischen $\Sigma^\nu(0)$ und $\Sigma^\nu(x)$. Damit sind alle $\Sigma^\nu(x)$ endlichdimensional (nämlich N_ν -dimensional).

Wir übertragen die Translationen nun auch auf die Feldkeime $\mathfrak{A}^\nu(x)$, was wieder per Dualität geschieht: Wir definieren

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_x : \mathfrak{A}^\nu(y) &\rightarrow \mathfrak{A}^\nu(x+y), \\ ([\sigma]; \check{\alpha}_x[\phi]) &= (\check{\alpha}_{-x*}[\sigma]; [\phi]); \quad [\phi] \in \mathfrak{A}^\nu(y), [\sigma] \in \Sigma^\nu(x+y). \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Die $\check{\alpha}_x$ sind wiederum Isomorphismen; sie überführen die betrachteten Basen $[\phi_j]$ bzw. $[\phi_j^W]$ von \mathfrak{A}^ν kanonisch in Basen

$$[\phi_j^{(W)}(x)] = \check{\alpha}_x[\phi_j^{(W)}] \quad (3.4.8)$$

von $\mathfrak{A}^\nu(x)$.

Man bemerkt nun - genau wie in (3.2.9) -, daß diese Wirkung $\check{\alpha}_x$ der Translationsgruppe kompatibel ist mit der ursprünglichen auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, in dem Sinne, daß

$$\alpha_x \circ p_E^\nu(y) = p_E^\nu(x+y) \circ \check{\alpha}_x. \quad (3.4.9)$$

Damit ist die aus der Sicht der Feldkeime natürliche Definition der translatierten Felder, nämlich

$$P(E)\phi(x)P(E) := p_E^\nu(x)\check{\alpha}_x[\phi], \quad [\phi] \in \mathfrak{A}^\nu, \quad (3.4.10)$$

verträglich mit unserer bisherigen Definition

$$\phi(x) = U(x)\phi U(-x). \quad (3.4.11)$$

Zum Nachweis der Wightman-Axiome haben wir noch zu zeigen, daß die definierten Felder nun tatsächlich kovariant unter der vollen Poincaré-Gruppe sind. Dazu benötigen wir lediglich die Relation (3.4.11). Wir beziehen uns zunächst auf die Punktfelder ϕ_j ; im folgenden seien $x, y \in \mathbb{R}^{s+1}$ und $\Lambda \in \mathcal{L}$. Im Sinne quadratischer Formen auf $\bigcup_E (\mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E)$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, x)\phi_j(y)U(\Lambda, x)^* &= U(x)U(\Lambda)U(y)\phi_j U(y)^* U(\Lambda)^*U(x)^* \\ &= U(x)U(\Lambda y)U(\Lambda)\phi_j U(\Lambda)^* U(\Lambda y)^*U(x)^* \stackrel{(3.2.30)}{=} U(\Lambda y + x) \sum_{k=1}^{N_\nu} S_{jk}(\Lambda^{-1})\phi_k U(\Lambda y + x)^* \\ &= \sum_{k=1}^{N_\nu} S_{jk}(\Lambda^{-1})\phi_k(\Lambda y + x). \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Dies ist gerade die gewünschte Kovarianzeigenschaft. Sie läßt sich durch Integration leicht auf die Operatoren $\phi_j(f)$ übertragen: Durch eine einfache Rechnung wie in (3.2.31) erhält man

$$U(\Lambda, x)\phi_j(f)U(\Lambda, x)^* = \sum_{k=1}^{N_\nu} S_{jk}(\Lambda^{-1})\phi_k(f_{\Lambda, x}) \quad \text{mit} \quad f_{\Lambda, x}(y) = f(\Lambda^{-1}(y-x)), \quad (3.4.13)$$

und zwar zunächst auf Vektorfunktionalen $(\psi | \cdot \xi) \in \mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E$, dann durch Erweiterung als Operatorgleichung auf \mathcal{D} .

Die obigen Überlegungen lassen sich natürlich statt für die ϕ_j analog auch für die ϕ_j^W durchführen.

Wir haben damit schließlich alle in Abschnitt 1.3 genannten Wightman-Axiome (bei Vernachlässigung der Vollständigkeitsbedingung) für die betrachteten Felder nachgewiesen. Unser Ergebnis können wir so formulieren:

Satz 3.6. *Wir betrachten eine Quantenfeldtheorie, die die Eigenschaft 2.1 besitzt, so daß Satz 2.2 gilt. ν sei dort ein zulässiger Wert, und die Folge ρ_ν sei dicht besetzt. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $A = (a_{jk})$, so daß die operatorwertigen Distributionen $\phi_1^W \dots \phi_{N_\nu}^W$, definiert als*

$$\phi_j^W(f) = \sum_{k=1}^{N_\nu} a_{jk} \phi_k(f), \quad j = 1 \dots N_\nu,$$

einen Satz von Wightman-Feldern im Sinne der in Abschnitt 1.3 aufgeführten Axiome bilden.

3.A Keime, Halme, Prägarben

In unserer Diskussion der Konstruktion von Punktfeldern treten in natürlicher Weise Strukturen aus der Garbentheorie auf, die wir hier näher beleuchten wollen.

Definition 3.7. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe⁷ \mathcal{G} auf X ist gegeben durch*

- eine Zuordnung $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{O})$, die jeder offenen Menge $\mathcal{O} \subset X$ einen Vektorraum $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ zuordnet,
- zu je zwei offenen Mengen $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \subset X$ eine lineare Abbildung

$$\tau_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2} : \mathcal{G}(\mathcal{O}_1) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{O}_2)$$

(die sogenannte Restriktionsabbildung)

mit folgenden Eigenschaften:

- Für offenes $\mathcal{O} \subset X$ ist $\tau_{\mathcal{O}, \mathcal{O}} = id_{\mathcal{G}(\mathcal{O})}$.
- Für offene Mengen $\mathcal{O}_3 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \subset X$ ist $\tau_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2} \circ \tau_{\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3} = \tau_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3}$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(\mathcal{O}_1) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3}} & \mathcal{G}(\mathcal{O}_3) \\ & \searrow \tau_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2} & \nearrow \tau_{\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3} \\ & \mathcal{G}(\mathcal{O}_2) & \end{array}$$

Im folgenden werden wir stets $X = \mathbb{R}^{s+1}$ (den Minkowskiraum mit Standardtopologie) betrachten.

⁷Die hier aufgeführte Definition ist bei weitem nicht die allgemeinste mögliche.

Besonders wichtig sind für uns Unterräume $\mathcal{G} \subset \Sigma$ der Menge der normalen Funktionale. Sie werden mit der Einschränkung auf die lokalen Algebren

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}) := \mathcal{G}[\mathfrak{A}(\mathcal{O})] \quad (3.A.1)$$

zu Prägarben; die Restriktionsabbildungen sind dabei ebenfalls durch die gewöhnliche Einschränkung gegeben:

$$\tau_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2} : g \mapsto g[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)]. \quad (3.A.2)$$

Die in Definition 3.7 geforderten Eigenschaften erhält man sofort aus der Isotonie des Netzes $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$.

Sei nun \mathcal{G} eine Prägarbe, $x \in X$ und \mathcal{O} eine Umgebung von x ; wir definieren dann folgende Äquivalenzrelation auf $\mathcal{G}(\mathcal{O})$:

$$g \stackrel{x}{\sim} g' \quad :\Leftrightarrow \quad \tau_{\mathcal{O}, \mathcal{O}_x} g = \tau_{\mathcal{O}, \mathcal{O}_x} g' \text{ für eine Umgebung } \mathcal{O}_x \subset \mathcal{O} \text{ von } x. \quad (3.A.3)$$

In unserem speziellen Fall (3.A.1) ist das gleichbedeutend mit

$$g \stackrel{x}{\sim} g' \quad :\Leftrightarrow \quad g[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_x)] = g'[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_x)] \text{ für eine Umgebung } \mathcal{O}_x \subset \mathcal{O} \text{ von } x. \quad (3.A.4)$$

Der Quotientenraum $\mathcal{G}(\mathcal{O})/\stackrel{x}{\sim}$ (der von \mathcal{O} unabhängig ist) heißt *Halm* der Prägarbe \mathcal{G} bei x ; die zugehörige kanonische Projektion wird als *Keim* bezeichnet.

Wir benötigen für unsere Analyse noch weitere Details der Keime bzw. Halme: Wir wollen nicht nur die Zustände mit 0 identifizieren, die in einer Umgebung von x verschwinden, sondern auch die, deren Anteil auf immer kleineren Umgebungen von x genügend schnell abfällt. Dabei beschränken wir uns zunächst - zur Vereinfachung der Notation - auf $x = 0$. Sei wieder $\mathcal{G} \subset \Sigma$ eine Prägarbe der in (3.A.1) eingeführten Form; weiter sei $\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion, $\rho = (r_n) \subset \mathbb{R}^+$ eine Nullfolge. Wir betrachten

$$\mathcal{N}[\eta, \rho] := \left\{ g \in \mathcal{G} \mid \frac{\|g[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n})\|}{\eta(r_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}. \quad (3.A.5)$$

So definiert, ist $\mathcal{N}[\eta, \rho]$ ein Unterraum von \mathcal{G} . Man kann ihn aber entsprechend auch als Unterraum von $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ oder des Halmes $\mathcal{G}/\stackrel{0}{\sim}$ definieren. Die Quotientenräume $\mathcal{G}/\mathcal{N}[\eta, \rho]$, $\mathcal{G}(\mathcal{O})/\mathcal{N}[\eta, \rho]$ und $(\mathcal{G}/\stackrel{0}{\sim})/\mathcal{N}[\eta, \rho]$ können dann identifiziert werden. Die kanonische Projektion bezeichnen wir im folgenden mit $p[\eta, \rho]$.

Seien η' eine weitere Funktion $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ und $\rho' \subset \mathbb{R}^+$ eine weitere Nullfolge. Falls $\mathcal{N}[\eta, \rho] \subset \mathcal{N}[\eta', \rho']$, dann gibt es offenbar eine eindeutig bestimmte, surjektive Abbildung $p[\eta, \rho, \eta', \rho']$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G}/\mathcal{N}[\eta, \rho] & \\ p[\eta, \rho] \nearrow & \downarrow p[\eta, \rho, \eta', \rho'] & \\ \mathcal{G} & & \\ p[\eta', \rho'] \searrow & \mathcal{G}/\mathcal{N}[\eta', \rho'] & \end{array} \quad (3.A.6)$$

kommutativ macht. Insbesondere liegt diese Situation vor, wenn $\rho \subset \rho'$ und $\eta \leq \eta'$.

Man kann die eingeführte Struktur nun bezüglich jedes Punktes $x \in \mathbb{R}^{s+1}$ statt $x = 0$ betrachten: Mit $\mathcal{O}_r(x)$ sei der Standard-Doppelkegel vom Radius r mit Mittelpunkt x bezeichnet. Analog zu (3.A.5) setzen wir

$$\mathcal{N}[\eta, \rho](x) := \left\{ g \in \mathcal{G} \mid \frac{\|g[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_{r_n}(x))]\|}{\eta(r_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}. \quad (3.A.7)$$

Für die $\mathcal{N}[\eta, \rho](x)$ und die Quotientenräume $\mathcal{G}/\mathcal{N}[\eta, \rho](x)$ gelten die oben durchgeführten Überlegungen dann entsprechend.

3.B Dicht besetzte Folgen

Aus technischen Gründen müssen wir über die Nullfolgen ρ_ν , die wir bei der Konstruktion der Punktfelder erhalten, eine Zusatzannahme machen; sie dürfen in gewisser Weise nicht „zu schnell“ gegen 0 gehen bzw. nicht „zu wenige“ Werte enthalten. Präzisiert wird dies mit folgendem Begriff:

Definition 3.8. Sei $x = (x_n)$ ein Nullfolge in \mathbb{R}^+ . x heiße dicht besetzt, wenn es Konstanten $R, c > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft:

$$\forall r \in (0, R) \exists n \in \mathbb{N} : r \leq x_n \leq c \cdot r.$$

So ist zum Beispiel $x_n = 2^{-n}$ dicht besetzt, nicht aber $x_n = 2^{-n^2}$. Wie schon erwähnt, wird an einigen Stellen des Textes angenommen, daß die Folgen ρ_ν dicht besetzt sind. Dies hat im wesentlichen den Effekt, daß in gewisser Hinsicht keine Unterschiede zwischen den ρ_ν und ihren Teilfolgen auftreten:

Lemma 3.9. Sei $\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion, und seien $\rho' \subset \rho$ zwei Nullfolgen in \mathbb{R}^+ . ρ' sei dicht besetzt; außerdem gebe es $k > 0$ mit $\eta \gg_\rho r^k$. Dann ist

$$\mathcal{N}[\eta, \rho] = \mathcal{N}[\eta, \rho'].$$

Beweis. Die Inklusion „ \subset “ ist klar. Für „ \supset “ schreiben wir $\rho = (r_n), \rho' = (r'_n)$. Wir wissen nach Voraussetzung, daß $r_n^k/\eta(r_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$; ohne Einschränkung geschehe dies monoton (nach eventueller Umordnung der Folgen). Sei nun $\sigma \in \mathcal{N}[\eta, \rho']$, d.h.

$$\frac{1}{\eta(r'_m)} \|\sigma\|_{r'_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (3.B.1)$$

Zu jedem (hinreichend großen) n wählen wir nun $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$r_n \leq r'_m \leq c \cdot r_n. \quad (3.B.2)$$

Wegen $\|\sigma\|_{r_n} \leq \|\sigma\|_{r'_m}$ erhalten wir dann

$$\frac{1}{\eta(r_n)} \|\sigma\|_{r_n} \leq \underbrace{\frac{r_n^k}{\eta(r_n)} \frac{\eta(r'_m)}{r'_m{}^k}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{r'_m{}^k}{r_n^k}}_{\leq c^k} \cdot \frac{1}{\eta(r'_m)} \|\sigma\|_{r'_m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.B.3)$$

denn mit n wächst auch m beliebig. Mithin ist $\sigma \in \mathcal{N}[\eta, \rho]$. \square

Es wirkt sicher etwas unnatürlich, die ρ_ν in unserer Konstruktion als dicht besetzt anzunehmen. Diese Eigenschaft scheint für den Nachweis gewisser Konvergenzaussagen, wie im Zusammenhang mit Satz 3.2 und Lemma 3.4, jedoch nicht verzichtbar zu sein. Zwar wäre es plausibel (und in dem in Kapitel 4 behandelten Beispiel erfüllt), in der Phasenraumbedingung (Eigenschaft 2.1) eine dicht besetzte Nullfolge ρ vorauszusetzen oder sogar Konvergenz unabhängig von einer speziellen Folge zu fordern; im Verlauf der Konstruktion in Abschnitt 2.3 mußten aus ρ aber wiederholt Teilfolgen ausgewählt werden, um gewisse Funktionen nach ihrem r -Verhalten zu sortieren. Ob diese Teilfolgen ihrerseits dicht besetzt sind, ist a priori nicht bekannt.

Es stellt sich also die Frage, ob man bei gegebener Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ aus einer dicht besetzten Nullfolge ρ stets eine dicht besetzte Teilfolge ρ' auswählen kann, so daß $f(r)$ auf ρ' gegen eine Konstante oder gegen ∞ konvergiert. Leider ist dies im allgemeinen nicht der Fall. Als Beispiel betrachte man

$$f(r) := r^{(-1)^{\lfloor \sqrt{-\log r} \rfloor}} = \begin{cases} r & \text{falls } \lfloor \sqrt{-\log r} \rfloor \text{ gerade,} \\ \frac{1}{r} & \text{falls } \lfloor \sqrt{-\log r} \rfloor \text{ ungerade;} \end{cases} \quad r < 1. \quad (3.B.4)$$

Dabei ist [...] die Gauß-Klammer; die Fortsetzung der Funktion für $r \geq 1$ ist beliebig. Man sieht leicht, daß es keine dicht besetzte Nullfolge ρ gibt, auf der $f(r)$ für $r \rightarrow 0$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne konvergiert.

Kapitel 4

Freie Feldtheorie

Wir wollen nun die betrachteten Strukturen in einem konkreten Modell untersuchen und vor allem die in Eigenschaft 2.1 formulierte Phasenraumbedingung nachprüfen. Dazu betrachten wir Modelle der *freien Feldtheorie*, also Systeme mit beliebig vielen, nicht miteinander wechselwirkenden Teilchen.

Die freie Feldtheorie ist zwar physikalisch nur von eingeschränktem Interesse; ihre einfache mathematische Struktur macht sie aber zu einem geeigneten Testfall für unsere Annahmen. Bereits in [7], [8] und [10] wurden gewisse Phasenraumbedingungen in der freien Theorie nachgewiesen; wir übernehmen teilweise die dort entwickelten Methoden. Auch Haag und Ojima [17] verwenden ein solches Modell, um ihre Vermutungen über Zustandskeime plausibel zu machen. Die dortigen Rechnungen sind jedoch sehr heuristisch; das nun folgende Kapitel präzisiert in gewisser Weise die Vorstellungen der beiden Autoren.

Nachdem wir in Abschnitt 4.1 das zu untersuchende Modell beschrieben haben, gliedert sich die Analyse im wesentlichen in zwei Teile: Zunächst leiten wir in Abschnitt 4.2 eine Reihenentwicklung der Abbildung Ξ her und prüfen so die Eigenschaft 2.1 nach. Wir erhalten auf diese Weise obere Abschätzungen für die Anzahl der notwendigen Approximationsterme, wenn Ξ bis auf einen festgelegten Rest genähert werden soll. In Abschnitt 4.3 zeigen wir, daß andererseits zur Approximation von Ξ eine Mindestanzahl von Rang-1-Operatoren notwendig ist („untere Abschätzungen“); damit folgt, daß keines der in Abschnitt 4.2 berechneten Reihenglieder redundant ist bzw. entfallen kann.

Die genannten Rechnungen führen wir nur für den einfachsten Fall, ein *reelles skalares freies Feld*, vollständig durch; die Erweiterung auf allgemeinere Situationen wird aber so weit als möglich angedeutet.

Die freie Feldtheorie wird bekanntermaßen durch Punktfelder $\phi(x)$ bzw. ausintegrierte Wightman-Distributionen $\phi(f)$ definiert. Abschnitt 4.4 beschäftigt sich mit dem Zusammenhang des untersuchten algebraischen Modells mit diesen Punktfeldern; wir zeigen, daß die in Kapitel 2 konstruierten lokalen Felder hier gerade mit dem definierenden Feld $\phi(f)$ und dessen Funktionen (Ableitungen, Wickprodukte) übereinstimmen.

Schließlich diskutiert Abschnitt 4.5 Erweiterungsmöglichkeiten des betrachteten Modells und Beispiele, in denen die hier vorgestellte Methode versagt.

Inhalt von Kapitel 4

4.1	Das Modell	57
4.1.1	Einteilchenraum	57
4.1.2	Fockraum	58
4.1.3	Lokale Algebren	59
4.2	Obere Abschätzungen	59
4.2.1	Vorgehensweise	60
4.2.2	Entwicklung nach skalenunabhängigen Funktionen	61
4.2.3	Entwicklung nach skalenabhängigen Funktionen	65
4.2.4	Aufspaltung der Weyloperatoren	66
4.2.5	Erweiterung und Normkonvergenz der Reihe	68
4.2.6	Anwendung auf die Abbildung Ξ	72
4.2.A	Multiindex-Schreibweise	74
4.2.B	Spezielle Funktionale	75
4.2.C	Spurnorm der Operatoren $T^\pm(E, r)$ für das reelle skalare freie Feld	78
4.2.D	Die kleinste obere Schranke zweier Operatoren	81
4.3	Untere Abschätzungen	83
4.3.1	Vorgehensweise	84
4.3.2	Funktionen im Einteilchenraum	85
4.3.3	Verallgemeinertes Gram-Schmidt-Verfahren	89
4.3.4	Zweite Quantisierung	92
4.3.A	Die Δ -Symbole	95
4.4	Freie Wightman-Felder	95
4.4.1	Das reelle skalare Feld im Wightman-Rahmen	96
4.4.2	Rekonstruktion des Feldes	98
4.5	Andere Modelle	100

4.1 Das Modell

Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über die Formulierung der freien Feldtheorie, genauer der Theorie freier Bosonen, im algebraischen Rahmen. Wir nennen dabei nur die Definitionen und Resultate; eine ausführlichere Darstellung der Konstruktion findet man in [2, Kapitel 8.3].

4.1.1 Einteilchenraum

Die Konstruktion beginnt mit dem *Einteilchenraum* \mathcal{K} , einem separablen Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$, dessen Elemente man als Wellenfunktionen eines Teilchens („im Impulsraum“) deutet. Auf \mathcal{K} hat man eine unitäre Darstellung $U_{\mathcal{K}}(\Lambda, x)$ der Poincaré-Gruppe \mathfrak{P} , welche die Spektrumsbedingung erfüllt. Der selbstadjungierte Generator ω der Zeittranslation kann als Energieoperator interpretiert werden; wir bezeichnen seinen Spektralprojektor auf das Intervall $[0, E]$ mit $Q(E)$.

Weiterhin ist auf \mathcal{K} eine antiunitäre Involution J gegeben, d.h. ein antilinearer Operator mit $J^2 = \mathbf{1}$, $\langle Jf | Jg \rangle = \langle g | f \rangle$. Wir nehmen an, daß J mit ω kommutiert. Jedes $f \in \mathcal{K}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung in J -invariante Funktionen der Form

$$f = f^+ + if^- \quad , \quad Jf^{\pm} = f^{\pm} ; \quad (4.1.1)$$

dabei ist explizit

$$f^+ = \frac{1}{2}(1+J)f \quad , \quad f^- = \frac{1}{2i}(1-J)f. \quad (4.1.2)$$

Speziell betrachten wir im folgenden die Theorie eines rellen skalaren freien Teilchens der Masse $m \geq 0$ in s räumlichen Dimensionen. Hier ist der Einteilchenraum gegeben als

$$\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^s, d^s p) \quad (4.1.3)$$

mit dem üblichen Skalarprodukt. Die Zeittranslation wird generiert durch

$$\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (\text{als Multiplikationsoperator}); \quad (4.1.4)$$

die Generatoren für räumliche Translationen sind die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinaten p_j . Für die Definition der Darsteller von Lorentztransformationen sei auf [25, sect. 1-4.] verwiesen; wir werden sie nicht explizit benötigen.

Vom „Impulsraum“ $L^2(\mathbb{R}^s, d^s p)$ kann man durch Fouriertransformation zum „Ortsraum“ $L^2(\mathbb{R}^s, d^s x)$ übergehen (zu Vorzeichenkonventionen siehe Seite 104); die Transformation ist unitär, so daß man jedes $f \in \mathcal{K}$ und jeden linearen Operator auf \mathcal{K} wahlweise in einem der beiden Räume betrachten kann. Um die Notation nicht zu überfrachten, werden die beiden Darstellungen im folgenden nicht streng unterschieden, sondern es wird lediglich über das Funktionsargument \vec{x} bzw. \vec{p} angedeutet, ob man sich im Orts- oder Impulsraum befindet.

Die Involution J kann nun durch komplexe Konjugation im Ortsraum definiert werden:

$$(Jf)(\vec{x}) = \overline{f(\vec{x})} \quad \Leftrightarrow \quad (Jf)(\vec{p}) = \overline{f(-\vec{p})}. \quad (4.1.5)$$

J hat also die Bedeutung, die Aufspaltung der Wellenfunktionen in Real- und Imaginärteil zu beschreiben respektive (im allgemeinen Fall) diesen Begriff auf beliebige Einteilchenräume zu erweitern.

4.1.2 Fockraum

Die Beschreibung von Mehrteilchenzuständen geschieht mit Hilfe symmetrisierter Tensorprodukte von \mathcal{K} , der sogenannten *n-Teilchen-Räume*

$$\mathcal{H}_n := \text{Sym} \otimes^n \mathcal{K} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4.1.6)$$

Außerdem setzen wir $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C} \cdot \Omega$ als eindimensionalen „0-Teilchen-Raum“; physikalisch repräsentiert Ω das Vakuum. Aus den \mathcal{H}_n bildet man nun den *Fockraum* \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \quad \text{mit Skalarprodukt } (\cdot | \cdot). \quad (4.1.7)$$

Mehr von technischer Bedeutung ist der Raum der *Vektoren endlicher Teilchenzahl*, der aus *endlichen* Linearkombinationen von Produktvektoren besteht:

$$\mathcal{H}^0 := \text{Span} \left\{ \bigoplus_{n=0}^N \text{Sym} (f_{n1} \otimes \cdots \otimes f_{nn}) \mid N \in \mathbb{N}_0, f_{ij} \in \mathcal{K} \right\}. \quad (4.1.8)$$

Er ist dicht in \mathcal{H} .

Die Darstellung $U_{\mathcal{K}}(\Lambda, x)$ von \mathfrak{P} auf \mathcal{K} bestimmt durch „zweite Quantisierung“ eine Darstellung $U(\Lambda, x)$ auf \mathcal{H} . Die Generatoren der Translationen schreiben wir wie zuvor als P_{μ} ($\mu = 0 \dots s$); speziell für die Zeittranslation ist das der Hamiltonoperator $H = P_0$. Seine Spektralprojektoren auf $[0, E]$ notieren wir wie gehabt als $P(E)$.

Zu $f \in \mathcal{K}$ hat man die üblichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^*(f)$ und $a(f)$, die linear bzw. antilinear in f sind und kanonische Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$[a(f), a^*(g)] = \langle f | g \rangle \mathbf{1}; \quad [a^*(f), a^*(g)] = 0 = [a(f), a(g)] \quad (f, g \in \mathcal{K}). \quad (4.1.9)$$

Sie sind unbeschränkt, aber zumindest auf \mathcal{H}^0 definiert. Durch Anwendung der Erzeugungsoperatoren $a^*(\cdot)$ auf Ω kann man ganz \mathcal{H}^0 (und nach Abschluß auch \mathcal{H}) erhalten, und zwar mit Hilfe folgender Relation:

$$a^*(f_1) \dots a^*(f_n) \Omega = \sqrt{n!} \text{Sym}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n); \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{K}. \quad (4.1.10)$$

Der offenbar symmetrische Operator $a(f) + a^*(f)$ ist nach geeigneter Erweiterung des Definitionsbereiches selbstadjungiert [22, Theorem X.41]; man kann daher die unitären Operatoren

$$W(f) = e^{i(a(f)+a^*(f))} \quad (4.1.11)$$

betrachten. Sie werden als *Weyl-Operatoren* bezeichnet; wir listen hier einige ihrer Eigenschaften auf:

$$W(f) W(g) = W(f+g) e^{i \text{Im} \langle g | f \rangle}; \quad (4.1.12)$$

$$W(f) = e^{ia^*(f)} e^{ia(f)} e^{-\frac{1}{2} \|f\|^2}; \quad (4.1.13)$$

$$[a(g), W(f)] = i \langle g | f \rangle W(f), \quad [a^*(g), W(f)] = -i \langle f | g \rangle W(f); \quad (4.1.14)$$

$$(\Omega | W(f) \Omega) = e^{-\frac{1}{2} \|f\|^2}. \quad (4.1.15)$$

4.1.3 Lokale Algebren

Die Definition der lokalen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ erfolgt so: Zu jeder offenen Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{s+1}$ sind zwei abgeschlossene Unterräume $\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}) \subset \mathcal{K}$ gegeben. Sie sind unter J invariant, also $J\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}) \subset \mathcal{L}^\pm(\mathcal{O})$; bezeichnet $P_{\mathcal{L}^\pm}(\mathcal{O})$ den Projektor auf $\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O})$, dann impliziert das $[J, P_{\mathcal{L}^\pm}(\mathcal{O})] = 0$. Die Räume $\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O})$ hängen mit den Anfangswerten des Cauchyproblems für die zugrundeliegende Feldgleichung zusammen (näheres siehe Abschnitt 4.4). Man betrachtet jetzt folgenden *reell*-linearen Unterraum von \mathcal{K} :

$$\mathcal{L}(\mathcal{O}) = (1+J)\mathcal{L}^+(\mathcal{O}) + (1-J)\mathcal{L}^-(\mathcal{O}). \quad (4.1.16)$$

Für $f \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ ist in der Zerlegung (4.1.1) dann $f^\pm \in \mathcal{L}^\pm(\mathcal{O})$.

Die lokale Algebra für \mathcal{O} wird nun von allen zu $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ gehörenden Weyloperatoren erzeugt, enthält also deren Linearkombinationen und schwache Limespunkte:

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) := \{W(f) \mid f \in \mathcal{L}(\mathcal{O})\}'' \quad (4.1.17)$$

Erfüllen die $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ nun Isotonie-, Kovarianz- und Lokaliätsbedingungen, wobei die Lokaliät formuliert wird durch

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \langle f_2 | f_1 \rangle \quad \text{für raumartig getrennte } \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \text{ und } f_i \in \mathcal{O}_i, \quad (4.1.18)$$

dann bilden die $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ ein lokales Netz, das die Axiome aus Abschnitt 1.2 erfüllt. Die Darstellung der Poincaré-Gruppe \mathfrak{P} ist dabei per Definition unitär implementiert:

$$\alpha_{\Lambda, x}(\cdot) := U(\Lambda, x) \cdot U(\Lambda, x)^*. \quad (4.1.19)$$

Für das reelle skalare Feld werden die Räume \mathcal{L}^\pm wie folgt definiert: Für offene Standard-Doppelkegel \mathcal{O}_r vom Radius r mit Mittelpunkt 0 (wie in (2.1.1) definiert) setzt man

$$\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r) := \overline{\omega^{\mp \frac{1}{2}} \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(r)}. \quad (4.1.20)$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(r)$ die Menge der komplexwertigen Schwartzfunktionen auf \mathbb{R}^s , deren Träger im Ortsraum innerhalb der Kugel $|\vec{x}| < r$ liegt. Damit sind die $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ für eine Nullumgebungsbasis erklärt; durch Anwendung der Translationen $U_{\mathcal{K}}(x)$ erhält man sie für Umgebungsbasen beliebiger x , für allgemeines \mathcal{O} dann per Additivität. Für unsere Analyse genügt es, Doppelkegel \mathcal{O}_r zu betrachten; wir schreiben daher auch kurz $P_{\mathcal{L}^\pm}(\mathcal{O}_r) = P_{\mathcal{L}^\pm}^\pm(r)$.

4.2 Obere Abschätzungen

Es geht uns nun darum, im beschriebenen Modell die Phasenraumbedingung aus Eigenschaft 2.1 nachzuprüfen und eine Darstellung

$$\Xi = \sum_j \sigma_j \phi_j, \quad (4.2.1)$$

also eine Entwicklung von Ξ nach Rang-1-Abbildungen zu etablieren. Wir betrachten dazu zunächst die Einschränkung $\Xi_{E,r}$ von Ξ auf Σ_E und $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ bei festem E, r und untersuchen danach deren Fortsetzung zu Ξ .

Im Zusammenhang mit der von ihnen untersuchten Nuklearitätsbedingung hatten schon Buchholz und Porrman [8] eine Entwicklung von $\Xi_{E,r}$ nach Rang-1-Operatoren angegeben.¹ In dieser Arbeit lag das Augenmerk aber hauptsächlich auf einer Abschätzung der p -Normen von $\Xi_{E,r}$; die einzelnen Terme der Reihenentwicklung waren ohne Belang. Buchholz [5] gelang es später, die dort verwendeten Konzepte so zu erweitern, daß auch die Normen der einzelnen Approximationsterme $\sigma_j \phi_j$ und ihr Verhalten mit E und r kontrolliert werden konnten.

Für unsere Zwecke weist der Ansatz dieser Autoren aber einen entscheidenden Mangel auf: Die von ihnen berechneten σ_j und ϕ_j hängen in subtiler und kaum zu kontrollierender Weise von E und r ab. Wir möchten jedoch letztlich eine Entwicklung der Form (4.2.1) mit E - und r -unabhängigen Termen erhalten - diese Form hatte sich in Kapitel 2 als wichtig für die Konstruktion von Punktfeldern erwiesen. Das Verfahren aus [8] muß daher in unserem Sinne modifiziert werden.

Gleichzeitig beseitigen wir einen weiteren Nachteil des genannten Konzepts: Die Anzahl der Approximationsterme (für Approximation bis zu einer gegebenen Genauigkeit) ist in [8] nicht minimal gewählt - dies ist dort auch nicht relevant, führte aber zu einer Diskrepanz zwischen den von Buchholz [5] einerseits und Haag/Ojima [17] andererseits berechneten „Dimensionen der Keime“. Die hier hergeleitete Entwicklung besteht hingegen im beschriebenen Sinn aus minimal vielen Termen, wie wir in Abschnitt 4.3 noch präzisieren werden.

4.2.1 Vorgehensweise

Um die Phasenraumbedingung in Eigenschaft 2.1 nachzuweisen, haben wir die Inklusionsabbildung

$$\Xi : \bigcup_E \Sigma_E \hookrightarrow \Sigma \quad (4.2.2)$$

bezüglich der Pseudometriken

$$d_k(\vartheta, \vartheta') = \limsup_{r \rightarrow 0} Z \left(\sup_{E \leq r^{-1}} \frac{\|\vartheta - \vartheta'\|_{E,r}}{r^k (1+E)^k} \right), \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.2.3)$$

durch Rang-1-Operatoren zu approximieren.² Wir werden uns dazu, wie erwähnt, zunächst auf festes E und r beschränken und die Abbildung

$$\Xi_{E,r} : \Sigma_E \rightarrow \Sigma(\mathcal{O}_r), \quad \sigma \mapsto \sigma[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)] \quad (4.2.4)$$

bezüglich der Normtopologie approximieren. Es erweist sich als noch günstiger (und äquivalent), stattdessen die duale Abbildung

$$\Xi_{E,r}^* : \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r) \rightarrow P(E)\mathfrak{B}(\mathcal{H})P(E), \quad A \mapsto P(E)AP(E) \quad (4.2.5)$$

zu betrachten.

Wir werden für $\Xi_{E,r}^*$ zwei verschiedene Entwicklungen nach Rang-1-Operatoren der Form

$$\Xi_{E,r}^*(\cdot) = \sum \sigma_j(\cdot) \phi_j; \quad \sigma_j \in \Sigma(\mathcal{O}_r), \phi_j \in P(E)\mathfrak{B}(\mathcal{H})P(E) \quad (4.2.6)$$

¹In [8] wurde allerdings eine Energiedämpfung mit $e^{-\beta H}$ statt $P(E)$ verwendet.

²Die Nullfolgen ρ spielen hier keine Rolle und können beliebig gewählt werden.

herleiten; eine davon besteht aus skalenunabhängigen Termen und läßt sich später zu einer Entwicklung von Ξ fortsetzen, die andere benötigt man nur aus technischen Gründen wegen ihrer guten Konvergenzeigenschaften.

Beide Entwicklungen werden zunächst durch explizite Zerlegung von $\Xi_{E,r}^*(W(f))$ mit lokalisiertem f hergeleitet (Abschnitt 4.2.4); diese Aufgabe läßt sich auf Annahmen über die Eigenschaften der Theorie im Einteilchenraum zurückführen (Abschnitt 4.2.2 und 4.2.3), die wir im Fall des reellen skalaren Feldes explizit nachweisen. Dann diskutieren wir, inwiefern sich die berechnete Zerlegung linear und stetig auf ganz $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ fortsetzen läßt (Abschnitt 4.2.5).

Zuerst aber befassen wir uns mit dem Problem im Einteilchenraum. Im folgenden bezeichnen f^\pm eine Funktion aus $\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r)$, und es sei $k \in Q(E)\mathcal{K}$. Wir interessieren uns für Reihenentwicklungen des Skalarprodukts $\langle f^\pm | k \rangle$ und werden, wie bereits erwähnt, zwei verschiedene solche angeben.

4.2.2 Entwicklung nach skalenunabhängigen Funktionen

Zuerst leiten wir eine Reihendarstellung für das besagte Skalarprodukt her, indem wir Projektoren auf explizit bekannte Funktionen im Einteilchenraum „einschieben“.

Dazu fixieren wir eine reellwertige Testfunktion $\chi(x)$ auf \mathbb{R} mit $\chi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$; weiter setzen wir

$$\chi_r(\vec{x}) := \chi\left(\frac{|\vec{x}|}{r}\right), \quad \text{also } \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s); \quad \chi_r(\vec{x}) = 1 \text{ für } |\vec{x}| \leq r. \quad (4.2.7)$$

Außerdem bezeichnen wir mit $\chi_E(\vec{p})$ die charakteristische Funktion

$$\chi_E(\vec{p}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \omega(\vec{p}) \leq E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Sei zunächst $k \in \mathcal{D}(\omega^{-\frac{1}{2}})$ und außerdem glatt. Weiterhin sei $f^\pm \in \omega^{\mp\frac{1}{2}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(r)$. (Damit werden sowohl f als auch k aus dichten Mengen der interessierenden Räume gewählt.) Wir können dann schreiben:

$$\begin{aligned} \langle f^\pm | k \rangle &= \langle \omega^{\pm\frac{1}{2}} f^\pm | \omega^{\mp\frac{1}{2}} k \rangle = \int_{|\vec{x}| \leq r} \overline{(\omega^{\pm\frac{1}{2}} f^\pm)(\vec{x})} \cdot \widetilde{\omega^{\mp\frac{1}{2}} k}(\vec{x}) d^s x \\ & \quad (\omega^{\mp\frac{1}{2}} k \text{ hat im Impulsraum kompakten Träger, die Fouriertransformierte ist also holomorph.)} \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{M}^s} \frac{1}{\kappa!} \frac{\partial^\kappa}{\partial x^\kappa} \widetilde{\omega^{\mp\frac{1}{2}} k} \Big|_{\vec{x}=0} \cdot \underbrace{\int_{|\vec{x}| \leq r} \overline{(\omega^{\pm\frac{1}{2}} f^\pm)(\vec{x})} x^\kappa \chi_r(\vec{x}) d^s x}_{\langle \omega^{\pm\frac{1}{2}} f^\pm | x^\kappa \chi_r \rangle}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

κ läuft über alle s -stelligen Multiindizes - siehe dazu Anhang 4.2.A. Die auftretende Ableitung

läßt sich auch als Skalarprodukt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^\kappa}{\partial x^\kappa} \widetilde{\omega^{\mp \frac{1}{2}} k} \right|_{\vec{x}=0} &= (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \frac{\partial^\kappa}{\partial x^\kappa} \int_{\omega \leq E} \omega^{\mp \frac{1}{2}} k(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}} d^s p \Big|_{\vec{x}=0} \\ &= (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int_{\omega \leq E} \omega^{\mp \frac{1}{2}} k(\vec{p}) (ip)^\kappa d^s p = \left\langle \frac{i^{-|\kappa|}}{(2\pi)^{s/2}} p^\kappa \chi_E \middle| \omega^{\mp \frac{1}{2}} k \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Man sieht nun, daß sowohl $x^\kappa \chi_r$ wie auch $p^\kappa \chi_E$ im Definitionsbereich von $\omega^{\pm \frac{1}{2}}$ liegen, falls $s \geq 2$ oder $m > 0$: Für $p^\kappa \chi_E$ ist das unmittelbar klar, und da $x^\kappa \chi_r$ eine Testfunktion ist, ist ihre Fouriertransformierte ebenfalls glatt und fällt rasch ab. Damit erhält man insgesamt:³

$$\langle f^\pm | k \rangle = \sum_\kappa \langle f^\pm | \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\kappa!} \omega^{\pm \frac{1}{2}} x^\kappa \chi_r}_{=: h_\kappa^\pm} \rangle \underbrace{\left\langle \frac{i^{-|\kappa|}}{\sqrt{2} (2\pi)^{s/2}} \omega^{\mp \frac{1}{2}} p^\kappa \chi_E \middle| k \right\rangle}_{=: g_\kappa^\pm} = \sum_\kappa \langle f^\pm | h_\kappa^\pm \rangle \langle g_\kappa^\pm | k \rangle. \quad (4.2.11)$$

Die Funktionen g_κ^\pm und h_κ^\pm sind von E bzw. r abhängig definiert (im Widerspruch zum Titel des Abschnitts); sind aber $E', E'' \geq E$, dann gilt

$$Q(E) g_\kappa^{\pm(E')} = Q(E) g_\kappa^{\pm(E'')}; \quad (4.2.12)$$

in diesem Sinne können wir sagen, daß die Definition der g_κ^\pm mit den $Q(E)$ verträglich ist, oder wir können in Ausdrücken der Form $Q(E) g_\kappa^\pm$ die g_κ^\pm als E -unabhängige Größen betrachten. Analoges gilt für die h_κ^\pm hinsichtlich der $P_\kappa^\pm(r)$.

Wir werden nun noch die Normen der Vektoren g_κ^\pm und h_κ^\pm , insbesondere deren Verhalten hinsichtlich E und r , abschätzen. Allgemein hat man für $\beta \geq -1$ (und $s \geq 3$):

$$\begin{aligned} \|\omega^\beta p^\kappa \chi_E\|^2 &= \int_{\omega \leq E} \omega^{2\beta} p^{2\kappa} d^s p \leq \int_{|\vec{p}| \leq E} p^{2\kappa} (\vec{p}^2 + m^2)^\beta d^s p \\ &\stackrel{\text{(Skalierung)}}{=} E^{s+2\beta+2|\kappa|} \int_{|\vec{p}| \leq 1} \underbrace{p^{2\kappa}}_{\leq 1} \left(\vec{p}^2 + \left(\frac{m}{E}\right)^2 \right)^\beta d^s p \\ &\leq E^{s+2\beta+2|\kappa|} \cdot \text{const. etwa für } E > m. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Die Konstante hängt zwar von β , nicht aber von κ ab. Mit der Definition

$$q^\pm(\kappa) := \frac{s \mp 1}{2} + |\kappa| \quad (4.2.14)$$

erhalten wir also

$$\|g_\kappa^\pm\| \leq E^{q^\pm(\kappa)} \cdot c_g \quad \text{sowie} \quad \|\omega^{-\frac{1}{2}} g_\kappa^\pm\| \leq E^{q^\pm(\kappa) - \frac{1}{2}} \cdot c_g \quad (4.2.15)$$

mit einer Konstanten c_g .

³Die in (4.2.11) scheinbar willkürlich eingeschobenen Faktoren $\sqrt{2}$ dienen zur Normierung der in Abschnitt 4.4.2 rekonstruierten Punktfelder.

Die Normen der Funktionen h_κ^\pm lassen sich so abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\omega^{\pm\frac{1}{2}} x^\kappa \chi_r\|^2 &= \int d^s p \sqrt{\bar{p}^2 + m^2}^{\pm 1} (2\pi)^{-s} \left| \int x^\kappa \chi_r(\vec{x}) e^{-i\bar{p}\vec{x}} d^s x \right|^2 \\ &\stackrel{\text{(Skalierung)}}{=} (2r)^{s\mp 1+2|\kappa|} (2\pi)^{-s} \int d^s p \sqrt{\bar{p}^2 + (2mr)^2}^{\pm 1} \left| \int x^\kappa \underbrace{\chi(2|\vec{x}|)}_{\chi_{\frac{1}{2}}(\vec{x})} e^{-i\bar{p}\vec{x}} d^s x \right|^2 \\ &= (2r)^{s\mp 1+2|\kappa|} \langle x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} | \sqrt{\bar{p}^2 + (2mr)^2}^{\pm 1} | x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Im zuletzt stehenden Erwartungswert ist zwar das Verhalten mit r sehr einfach, das mit κ jedoch weitaus schwieriger zu kontrollieren. Wir betrachten zunächst den Fall „-“. Hier gilt

$$\sqrt{\bar{p}^2 + (2mr)^2}^{-1} \leq \frac{1}{|\bar{p}|}. \quad (4.2.17)$$

Den betrachteten Erwartungswert berechnen wir nun durch Aufspalten des Integrationsbereiches in $|\bar{p}| \leq 1$ und $|\bar{p}| \geq 1$:

$$\begin{aligned} &\langle x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} | \frac{1}{|\bar{p}|} | x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} \rangle \\ &= (2\pi)^{-s} \int_{|\bar{p}| \leq 1} d^s p \frac{1}{|\bar{p}|} \left| \int x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}}(\vec{x}) e^{-i\bar{p}\vec{x}} d^s x \right|^2 + \int_{|\bar{p}| \geq 1} d^s p \underbrace{\frac{1}{|\bar{p}|}}_{\leq 1} \left| \widetilde{x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}}}(\bar{p}) \right|^2 \\ &\leq (2\pi)^{-s} \int_{|\bar{p}| \leq 1} d^s p \frac{1}{|\bar{p}|} \left(\int_{|\vec{x}| \leq 1} |x^\kappa| |\chi_{\frac{1}{2}}(\vec{x})| d^s x \right)^2 + \|x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}}\|^2 \leq \text{const.} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Hier wurde $s \geq 2$ verwendet. Im Fall „+“ hat man für $2mr \leq 1$:

$$\sqrt{\bar{p}^2 + (2mr)^2} \leq \bar{p}^2 + (2mr)^2 + 1 \leq \bar{p}^2 + 2 \quad (4.2.19)$$

und damit

$$\begin{aligned} &\langle x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} | \sqrt{\bar{p}^2 + (2mr)^2} | x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} \rangle \\ &\leq \langle x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} | -\Delta | x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} \rangle + 2 \|x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}}\|^2 \leq \int_{|\vec{x}| \leq 1} \left(\text{grad } x^\kappa \chi_{\frac{1}{2}} \right)^2 d^s x + \text{const.} \\ &\leq \int_{|\vec{x}| \leq 1} \sum_{i=1}^s \underbrace{\left(2\chi'(2|\vec{x}|) \cdot \frac{x_i}{|\vec{x}|} \cdot x^\kappa + \kappa_i x^{\kappa'} \chi_{\frac{1}{2}}(\vec{x}) \right)^2}_{\leq \text{const.}'} d^s x + \text{const.} \\ &\quad (\kappa' \text{ ist gegenüber } \kappa \text{ an der } i\text{-ten Stelle um 1 vermindert.}) \\ &\leq \text{const.}''' \cdot \sum_i \kappa_i^2 + \text{const.}'''' \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Berücksichtigt man nun, daß $\sum \kappa_i^2 \leq \text{const.} \cdot \sqrt{\kappa!}$, dann wird mit einer Konstanten c_h

$$\|h_\kappa^\pm\| \leq \frac{(2r)^{q^\pm(\kappa)}}{\sqrt[4]{\kappa!}} \cdot c_h. \quad (4.2.21)$$

Wir kommen jetzt noch einmal auf die Reihenentwicklung (4.2.11) zurück. Nach obigen Abschätzungen gilt für $s \geq 3$, $Er \leq 1$ und $E > 2m$:

$$\sum_{\kappa} \|h_{\kappa}^{\pm}\| \|g_{\kappa}^{\pm}\| \leq \sum_{\kappa} \frac{(2Er)^{|\kappa|}}{\sqrt[4]{\kappa!}} \cdot (2Er)^{\frac{s-1}{2}} \cdot \text{const.} \leq \prod_{i=1}^s \sum_{\kappa_i=0}^{\infty} \frac{(2Er)^{\kappa_i}}{\sqrt[4]{\kappa_i!}} \cdot \text{const.}' < \text{const.}'' , \quad (4.2.22)$$

denn die Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt[4]{k!}} \quad (4.2.23)$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ nach dem Quotientenkriterium. Damit kann die Entwicklung (4.2.11) aber auf alle $f^{\pm} \in \mathcal{L}^{\pm}(\mathcal{O}_r)$ und alle $k \in Q(E)\mathcal{K}$ ausgedehnt werden (bisher waren die Funktionen nur aus dichten Teilmengen gewählt). Wir können im Sinne von Normkonvergenz behaupten:

$$Q(E)P_{\mathcal{L}}^{\pm}(r) = \sum_{\kappa} Q(E)|g_{\kappa}^{\pm}\rangle \langle h_{\kappa}^{\pm}| P_{\mathcal{L}}^{\pm}(r). \quad (4.2.24)$$

Tatsächlich benötigen wir für das folgende nur schwache Konvergenz.

Wir numerieren die g^{\pm} und h^{\pm} nun mit natürlichen Zahlen j statt Multiindizes, und zwar derart, daß das aus (4.2.14) resultierende $q^{\pm}(j)$ monoton mit j wächst. Für spätere Anwendungen betrachten wir noch einmal die Summe der Normen dieser Vektoren, wobei wir jetzt die Terme zu niedrigem j fortlassen; mit analogen Argumentationen wie in (4.2.22) erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=n}^{\infty} \|h_j^{\pm}\| \|E^{\frac{1}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}g_j^{\pm}\| \leq (2Er)^{q^{\pm}(n)} \cdot \text{const.} \quad (4.2.25)$$

Daß wir hier die $E^{\frac{1}{2}}\omega^{-\frac{1}{2}}g_j^{\pm}$ statt der die g_j^{\pm} verwenden, macht wegen (4.2.15) keinen Unterschied.

Wir formulieren nun für den allgemeinen Fall als Forderung, was wir für das reelle skalare Feld in $s \geq 3$ Raumdimensionen gezeigt haben:

Eigenschaft 4.1. *Zu $r \leq r_0$, $E \geq E_0$, $Er \leq 1$ gibt es Vektoren $g_j^{\pm}, h_j^{\pm} \in \mathcal{K}$ ($j \in \mathbb{N}$), verträglich⁴ mit den $Q(E)$ bzw. $P_{\mathcal{L}}^{\pm}(r)$, so daß*

$$Q(E) \cdot P_{\mathcal{L}}^{\pm}(r) = \sum_{j=1}^{\infty} Q(E) |g_j^{\pm}\rangle \langle h_j^{\pm}| P_{\mathcal{L}}^{\pm}(r)$$

im Sinne schwacher Konvergenz. Die Funktionen g_j^{\pm} liegen im Definitionsbereich von $\omega^{-\frac{1}{2}}$; die h_j^{\pm} sind invariant unter J . Weiter existieren zwei monoton wachsende Funktionen $q^{\pm} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $q^{\pm}(n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), so daß

$$\sum_{j=n}^{\infty} \|E^{\frac{1}{2}}Q(E)\omega^{-\frac{1}{2}}g_j^{\pm}\| \|P_{\mathcal{L}}^{\pm}(r)h_j^{\pm}\| \leq (cEr)^{q^{\pm}(n)} \cdot \text{const.} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dabei sind E_0, r_0 und c positive Konstanten.

⁴Für eine genauere Formulierung dieser Eigenschaft siehe (4.2.12) und die zugehörige Diskussion.

Aus dieser Eigenschaft folgt offenbar auch im allgemeinen Fall

$$\|E^{\frac{1}{2}}P(E)\omega^{-\frac{1}{2}}g_j^\pm\| \cdot \|P_{\mathcal{L}}^\pm(r)h_j^\pm\| \leq (cEr)^{q^\pm(j)} \cdot \text{const.} \quad (4.2.26)$$

- für das reelle skalare Feld war das bereits klar. Insbesondere sind die $\|E^{\frac{1}{2}}P(E)\omega^{-\frac{1}{2}}g_j^\pm\|$ für $E \rightarrow \infty$ polynomial beschränkt.

4.2.3 Entwicklung nach skalenabhängigen Funktionen

Die oben beschriebene Entwicklung verwendet explizit bekannte Funktionen g_j^\pm und h_j^\pm . Diese sind jedoch nicht orthogonal zueinander; das stellt sich bei der Analyse der $W(f)$ als hinderlich heraus, wenn man Anteile für hohe Teilchenzahlen abschätzen will. Wir benötigen daher eine weitere Entwicklung im Einteilchenraum nach einem Orthonormalsystem; dies lehnt sich an die in [8] verwendete Methode an. Wir betrachten dazu folgende Operatoren:

$$T^\pm(E, r) := \omega^{-\frac{1}{2}}Q(E)P_{\mathcal{L}}^\pm(r). \quad (4.2.27)$$

Die von ihnen geforderte Eigenschaft formulieren wir gleich allgemein:

Eigenschaft 4.2. *Die Operatoren $T^\pm(E, r) = \omega^{-\frac{1}{2}}Q(E)P_{\mathcal{L}}^\pm(r)$ sind in der Spurklasse, und für ihre Spurnormen gilt mit einem $\alpha > 0$:*

$$\|T^\pm(E, r)\|_1 \leq E^{-\frac{1}{2}}(Er)^\alpha \cdot \text{const.} \quad \text{für } r \leq r_0, E \geq E_0, Er \leq 1.$$

Der Nachweis dieser Eigenschaft für das reelle skalare Feld wird in Anhang 4.2.C geführt.

Wir schreiben nun $|T^\pm| = (T^{\pm*}T^\pm)^{\frac{1}{2}}$ und bezeichnen die kleinste obere Schranke⁵ von $|T^+|$ und $|T^-|$ mit T . Dann ist T nach Lemma 4.15 ebenfalls in der Spurklasse, und die Spurnorm erfüllt Schranken vom in Eigenschaft 4.2 genannten Typ. Die der Größe nach geordneten Eigenwerte von T seien $t_j, j \in \mathbb{N}$, und die zugehörigen Eigenvektoren benennen wir mit e_j . Die Involution J vertauscht mit ω und $P_{\mathcal{L}}^\pm$, also auch mit den T^\pm und ihren Adjungierten, damit auch mit $|T^\pm|$ und nach Korollar 4.14 schließlich mit T . Wir können also $Je_j = e_j$ annehmen. Die e_j bilden eine Orthonormalbasis von \mathcal{K} ; daher kann man das interessierende Skalarprodukt zwischen $f^\pm \in \mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r)$ und $k \in Q(E)\mathcal{K}$ so entwickeln:

$$\begin{aligned} \langle f^\pm | k \rangle &= \langle P_{\mathcal{L}}^\pm(r)f^\pm | Q(E)\omega^{-\frac{1}{2}}\omega^{+\frac{1}{2}}k \rangle = \langle f^\pm | T^{\pm*}\omega^{\frac{1}{2}}k \rangle \\ &= \sum_j \langle f^\pm | e_j \rangle \langle e_j | T^{\pm*}\omega^{\frac{1}{2}}k \rangle = \sum_j \langle f^\pm | e_j \rangle \langle \omega^{\frac{1}{2}}T^\pm e_j | k \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

(Man beachte, daß das Bild von T^\pm nach Definition (4.2.27) immer im Definitionsbereich von $\omega^{\frac{1}{2}}$ liegt.) Im Sinne schwacher Konvergenz gilt also

$$Q(E)P_{\mathcal{L}}^\pm(r) = \sum_j Q(E) |\omega^{\frac{1}{2}}T^\pm e_j\rangle \langle e_j | P_{\mathcal{L}}^\pm(r). \quad (4.2.29)$$

Wir wissen dabei, daß

$$\|T^\pm e_j\|^2 = \langle e_j | |T^\pm|^2 e_j \rangle \leq \langle e_j | T^2 e_j \rangle = t_j^2 \leq E^{-1} \cdot (Er)^{2\alpha} \cdot \text{const.} \quad (4.2.30)$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß mit den $T^\pm(E, r)$ auch T und die e_j explizit von E und r abhängen.

⁵Siehe dazu Anhang 4.2.D.

4.2.4 Aufspaltung der Weyloperatoren

Wir übertragen die bewiesenen bzw. vorausgesetzten Eigenschaften der Theorie im Einteilchenraum jetzt auf den Fockraum, indem wir eine Reihenentwicklung für Weyloperatoren $W(f)$ herleiten.

Sei dazu $f \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_r)$. Wir zerlegen f wie in (4.1.1) in „Real- und Imaginärteil“, d.h. wir schreiben $f = f^+ + if^-$ mit J -invarianten Vektoren $f^\pm \in \mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r)$. Der Weyloperator $W(f)$ kann dann wie folgt als Exponentialreihe dargestellt werden:

$$\begin{aligned} W(f) &= e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} e^{ia^*(f)} e^{ia(f)} = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} e^{ia^*(f^+)} e^{-a^*(f^-)} e^{ia(f^+)} e^{+a(f^-)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \sum_{m^\pm, n^\pm \in \mathbb{N}_0} \frac{i^{m^+ + n^+ + 2m^-}}{m^+! m^-! n^+! n^-!} a^*(f^+)^{m^+} a^*(f^-)^{m^-} a(f^+)^{n^+} a(f^-)^{n^-}. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Die Gleichungen sind dabei im Sinne quadratischer Formen auf $\mathcal{H}^0 \times \mathcal{H}^0$ zu verstehen. Um unsere Kenntnisse über die Theorie im Einteilchenraum einbringen zu können, müssen wir die vorkommenden Polynome von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in Operatoren zwischen den n -Teilchen-Räumen zerlegen.⁶ Der Übersichtlichkeit halber beginnen wir mit den einfachsten Monomen:

Lemma 4.3. *Im Sinne von Operatoren von \mathcal{H}^0 nach \mathcal{H}^0 gilt*

$$a^*(f^\pm) = \sum_{w=0}^{\infty} \sqrt{w+1} \text{Symm}\left(|f^\pm\rangle \otimes \mathbf{1}_w\right), \quad a(f^\pm) = \sum_{w=0}^{\infty} \sqrt{w+1} \text{Symm}\left(\langle f^\pm| \otimes \mathbf{1}_w\right).$$

(Dabei ist $\mathbf{1}_w$ der Einsoperator auf \mathcal{H}_w ; die Operatoren unter der Symmetrisierung sind durch 0 auf das orthogonale Komplement von \mathcal{H}_w bzw. \mathcal{H}_{w+1} fortgesetzt.)

Beweis. Zunächst sieht man unmittelbar, daß die formal unendlichen Summen über w nach Anwendung auf einen Vektor aus \mathcal{H}^0 endlich werden und wieder einen Vektor aus \mathcal{H}^0 liefern. Aus Gründen der Linearität reicht es, die Relationen auf Vektoren der Form $\text{Symm}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) \in \mathcal{H}_k$ nachzuprüfen. Dort hat man

$$\begin{aligned} &\sum_{w=0}^{\infty} \sqrt{w+1} \text{Symm}\left(|f^\pm\rangle \otimes \mathbf{1}_w\right) \text{Symm}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) \\ &= \sqrt{k+1} \text{Symm}(f^\pm \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) \stackrel{(4.1.10)}{=} a^*(f^\pm) \text{Symm}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k). \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Damit ist die Relation für Erzeuger gezeigt; diejenige für Vernichter folgt analog. \square

In höheren Monomen $a^*(f^+)^{m^+} a^*(f^-)^{m^-} a(f^+)^{n^+} a(f^-)^{n^-}$ können wir nun jeden Faktor nach Lemma 4.3 entwickeln; die auftretenden Mehrfachsummen reduzieren sich dabei sofort auf eine einzelne Summation, denn es ist

$$\text{Symm}\left(|f^+\rangle \otimes \mathbf{1}_w\right) \cdot \text{Symm}\left(|f^+\rangle \otimes \mathbf{1}_{w'}\right) = \delta_{w, w'+1} \text{Symm}\left(|f^+\rangle^{\otimes 2} \otimes \mathbf{1}_w\right) \quad (4.2.33)$$

und so weiter. Man erhält auf diese Weise:

⁶Das dazu verwendete Konzept ist ein Spezialfall einer allgemeinen Entwicklungsformel für beschränkte Operatoren auf dem Fockraum [1]. Wir benötigen den allgemeinen Formalismus hier jedoch nicht.

Lemma 4.4. *Im Sinne von Operatoren von \mathcal{H}^0 nach \mathcal{H}^0 gilt*

$$\begin{aligned} & a^*(f^+)^{m^+} a^*(f^-)^{m^-} a(f^+)^{n^+} a(f^-)^{n^-} \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(m+w)!(n+w)!}}{w!} \text{Symm} \left(\binom{m^+}{\otimes} |f^+\rangle \binom{m^-}{\otimes} |f^-\rangle \binom{n^+}{\otimes} \langle f^+| \binom{n^-}{\otimes} \langle f^-| \otimes \mathbf{1}_w \right). \end{aligned}$$

Dabei ist $m = m^+ + m^-$, $n = n^+ + n^-$.

Wenn wir die unter der Symmetrisierung auftretenden Einteilchen-Vektoren und -Linearformen noch zusätzlich mit einer Energiebeschränkung versehen, dann können wir die Reihenentwicklung aus Eigenschaft 4.1 einsetzen. So ergibt sich

$$\begin{aligned} & \otimes Q(E) \left(\binom{m^+}{\otimes} |f^+\rangle \binom{m^-}{\otimes} |f^-\rangle \binom{n^+}{\otimes} \langle f^+| \binom{n^-}{\otimes} \langle f^-| \right) \otimes Q(E) \\ &= \sum_{k_i^\pm, l_j^\pm \in \mathbb{N}} \prod \langle f^+ | h_{k_i^+}^+ \rangle \prod \langle f^- | h_{k_i^-}^- \rangle \prod \langle f^+ | h_{l_j^+}^+ \rangle \prod \langle f^- | h_{l_j^-}^- \rangle \\ & \quad \times \otimes Q(E) \left(\binom{m^+}{\otimes} |g_{k_i^+}^+\rangle \binom{m^-}{\otimes} |g_{k_i^-}^-\rangle \binom{n^+}{\otimes} \langle g_{l_j^+}^+| \binom{n^-}{\otimes} \langle g_{l_j^-}^-| \right) \otimes Q(E). \quad (4.2.34) \end{aligned}$$

- hier wird über $m^+ + m^- + n^+ + n^-$ verschiedene Indizes summiert. Wir haben verwendet, daß sowohl die f^\pm wie die h_k^\pm invariant unter J sind, so daß im Skalarprodukt die Seiten vertauscht werden können. Eine entsprechende Entwicklung erhält man auch nach (4.2.29) mit den e_j .

Wir setzen dieses Ergebnis nun in den Ausdruck aus Lemma 4.4 ein; da die Summation über w in Matrixelementen tatsächlich immer endlich ist, läßt sich die Reihenfolge der Summenzeichen ohne weiteres vertauschen. Wir wenden dann Lemma 4.4 erneut an; das ergibt:

$$\begin{aligned} & P(E) a^*(f^+)^{m^+} a^*(f^-)^{m^-} a(f^+)^{n^+} a(f^-)^{n^-} P(E) \\ &= \sum_{k_i^\pm, l_j^\pm \in \mathbb{N}} \prod \langle f^+ | h_{k_i^+}^+ \rangle \prod \langle f^- | h_{k_i^-}^- \rangle \prod \langle f^+ | h_{l_j^+}^+ \rangle \prod \langle f^- | h_{l_j^-}^- \rangle \\ & \quad \times P(E) \prod a^*(g_{k_i^+}^+) \prod a^*(g_{k_i^-}^-) \prod a(g_{l_j^+}^+) \prod a(g_{l_j^-}^-) P(E). \quad (4.2.35) \end{aligned}$$

Um aus diesen Termen nach (4.2.31) Weyloperatoren zu erhalten, muß noch über m^\pm und n^\pm summiert werden. Dazu organisieren wir die Summe um, indem wir

- alle Terme mit gleichen Potenzen von $\langle f^+ | h_j^+ \rangle$ und $\langle f^- | h_j^- \rangle$ zusammenfassen und
- diese Summanden mit zwei Multiindizes $\mu^\pm \in \mathcal{M}^\infty$ numerieren, wobei μ_1^+ die Anzahl der Faktoren $\langle f^+ | h_1^+ \rangle$ zählt usf.

Wir werden μ^+ und μ^- manchmal auch zu einem einzigen Multiindex μ zusammenfassen, wobei wir die Anordnung der Komponenten μ_j so wählen, daß das analog zu (4.2.14) gebildete $q(j)$ monoton mit j wächst.

Auf diese Weise erhält man schließlich

$$P(E)W(f)P(E) = \sum_{\mu^+, \mu^-} e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \langle f^+ | h^+ \rangle^{\mu^+} \langle f^- | h^- \rangle^{\mu^-} \cdot P(E) \phi_{\mu^+ \mu^-} P(E) \quad (4.2.36)$$

mit Operatoren (quadratischen Formen) $\phi_{\mu^+\mu^-}$, die sich ergeben als

$$\phi_{\mu^+\mu^-} = \sum \frac{j^{m^++n^++2m^-}}{m^+!m^-!n^+!n^-!} a^*(g?) \dots a(g?) \dots ; \quad (4.2.37)$$

$a^*(g?) \dots a(g?) \dots$ sind gewisse Produkte von Erzeugern bzw. Vernichtern der g_j^\pm , und zwar mit der durch die Multiindizes μ^+, μ^- beschriebenen Multiplizität. Summiert wird über alle möglichen solchen Produkte; insgesamt enthält die Summe $\frac{|\mu^+||\mu^-|!}{\mu^+!\mu^-!} (|\mu^+|+1)(|\mu^-|+1)$ Terme.⁷ Die Entwicklung (4.2.36) konvergiert im Sinne quadratischer Formen auf $\mathcal{H}^0 \times \mathcal{H}^0$.

Analog kommt man zu einer Entwicklung

$$P(E)W(f)P(E) = \sum_{\mu^+, \mu^-} e^{-\frac{1}{2}\|h\|^2} \langle f^+ | e \rangle^{\mu^+} \langle f^- | e \rangle^{\mu^-} \cdot P(E)\chi_{\mu^+\mu^-}P(E) \quad (4.2.38)$$

mit Operatoren $\chi_{\mu^+\mu^-}$, die aus entsprechenden Summen mit Erzeugern und Vernichtern der $\omega^{\pm\frac{1}{2}}T^\pm e_j$ gebildet werden.

4.2.5 Erweiterung und Normkonvergenz der Reihe

Wir wollen die angegebenen Entwicklungen (4.2.36) und (4.2.38) jetzt auf ganz $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ ausdehnen;⁸ hierzu müssen einerseits die Normen der einzelnen Summanden abgeschätzt werden, andererseits müssen die von f^\pm abhängigen Vorfaktoren durch lineare Funktionale der $W(f)$ ersetzt werden.

Wir betrachten zunächst die Operatoren $P(E)\phi_{\mu^+\mu^-}P(E)$, die eine Summendarstellung wie in (4.2.37) besitzen. Unter Verwendung sogenannter „Energieschranken“ [8, sec. 3.3]

$$\|P(E) \prod_{j=1}^J a^*(\omega^{\frac{1}{2}}b_j) \prod_{k=1}^K a(\omega^{\frac{1}{2}}\hat{b}_k)P(E)\| \leq \prod_{j=1}^J \|b_j\| \prod_{k=1}^K \|\hat{b}_k\| E^{\frac{J+K}{2}}; \quad b_j, \hat{b}_k \in \mathcal{K} \quad (4.2.39)$$

sieht man unmittelbar, daß ihre einzelnen Summanden beschränkt sind; außerdem ist die Schranke für jeden Summanden gleich, da sie sich bei Permutation der g_j^\pm nicht ändert. Zu den Vorfaktoren in (4.2.37) sei bemerkt, daß stets $m^\pm+n^\pm = |\mu^\pm|$ und daher $|\mu^\pm|!/(m^\pm!n^\pm!) \leq 2^{|\mu^\pm|}$ (Binomialkoeffizienten). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\phi_\mu\|_E \equiv \|P(E)\phi_\mu P(E)\| &\leq \frac{2^{|\mu|}}{\mu!} (|\mu^+|+1)(|\mu^-|+1) \|Q(E)\omega^{-\frac{1}{2}}g^+\|^{\mu^+} \|Q(E)\omega^{-\frac{1}{2}}g^-\|^{\mu^-} E^{\frac{|\mu|}{2}} \\ &\leq \frac{4^{|\mu|}}{\mu!} \|E^{\frac{1}{2}}Q(E)\omega^{-\frac{1}{2}}g\|^\mu. \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

Wir haben dabei sehr grob $|\mu^\pm| + 1 \leq 2^{|\mu^\pm|}$ abgeschätzt. Entsprechend erhält man unter Verwendung von (4.2.30):

$$\|\chi_\mu\|_E \equiv \|P(E)\chi_\mu P(E)\| \leq \frac{4^{|\mu|}}{\mu!} t^{\mu^+} t^{\mu^-} E^{\frac{|\mu|}{2}}. \quad (4.2.41)$$

⁷Bei vorgegebenem μ^+ müssen m^+ und n^+ so gewählt werden, daß $m^+ + n^+ = |\mu^+|$; dafür gibt es $(|\mu^+| + 1)$ Möglichkeiten. Sind m^+, n^+ fixiert, dann hat man noch die Einträge von μ^+ auf die einzelnen Erzeuger/Vernichter zu „verteilen“, wofür es per Multinomialkoeffizienten $|\mu^+|!/\mu^+!$ Alternativen gibt. μ^- liefert einen analogen Beitrag.

⁸Für den Ausdruck (4.2.36) wird das nur teilweise gelingen.

Nun werden die von f^\pm abhängigen Faktoren in (4.2.36) betrachtet. Wir nutzen dazu die in Anhang 4.2.B konstruierten speziellen Funktionale aus. Nach Aussage 4.8 lassen sich die fraglichen Faktoren als Auswertung eines Funktionals $\sigma_{\mu^+\mu^-}$ auf $W(f)$ darstellen:

$$\sigma_{\mu^+\mu^-}(W(f)) = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \langle f^+ | h^+ \rangle^{\mu^+} \langle f^- | h^- \rangle^{\mu^-}. \quad (4.2.42)$$

Wir können also diese Funktionale in Formel (4.2.36) einsetzen und erhalten

$$P(E)W(f)P(E) = \sum_{\mu} \sigma_{\mu}(W(f)) \cdot P(E)\phi_{\mu}P(E) \quad (4.2.43)$$

und mit analog (nach Aussage 4.9) gebildeten τ_{μ} zur Entwicklung (4.2.38)

$$P(E)W(f)P(E) = \sum_{\mu} \tau_{\mu}(W(f)) \cdot P(E)\chi_{\mu}P(E). \quad (4.2.44)$$

Beide Entwicklungen lassen sich sofort auf die lineare Hülle der $W(f)$ fortsetzen. Um eine stetige Fortsetzung auf ganz $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ zu ermöglichen, muß noch die Normkonvergenz der obigen Reihen gezeigt werden; wegen der schwachen Stetigkeit der Funktionale σ_{μ} bzw. τ_{μ} reicht es zu zeigen, daß die Reihe der Normen konvergiert. Nach Aussage 4.8 und 4.9 wissen wir, daß

$$\|\sigma_{\mu^+\mu^-}\| \leq 2^{|\mu|} \sqrt{|\mu|!} \|P_{\mathcal{L}}^+(r)h^+\|^{\mu^+} \|P_{\mathcal{L}}^-(r)h^-\|^{\mu^-} \quad ; \quad \|\tau_{\mu^+\mu^-}\| \leq 4^{|\mu|} \sqrt{\mu!}. \quad (4.2.45)$$

Nur im letzteren Fall reichen diese Schranken aus, um die gewünschte Konvergenz zu etablieren: Man erhält

$$\sum_{\mu^+, \mu^-} \|\tau_{\mu^+\mu^-}\| \|\chi_{\mu^+\mu^-}\|_E \leq \sum_{\mu^+, \mu^-} 16^{|\mu^+|+|\mu^-|} \frac{t^{\mu^++\mu^-}}{\sqrt{\mu^+!\mu^-!}} E^{\frac{|\mu|}{2}} = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(16 E^{\frac{1}{2}} t_j)^k}{\sqrt{k!}} \right)^2. \quad (4.2.46)$$

Die Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(16z)^k}{\sqrt{k!}} \quad (4.2.47)$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ nach dem Quotientenkriterium; insbesondere konvergiert die Reihe in (4.2.46). Zur Konvergenz des unendlichen Produkts beachte man, daß $\log F(z)$ eine differenzierbare Funktion ist mit $\log F(0) = 0$, $\log F(x) > 0 \quad \forall x > 0$; daher gibt zu $x_0 > 0$ eine Konstante c' , so daß

$$0 \leq \log F(x) \leq c' \cdot x \quad \forall x \in [0, x_0]. \quad (4.2.48)$$

Man beachte, daß wegen Eigenschaft 4.2 gilt

$$E^{\frac{1}{2}} t_j \leq E^{\frac{1}{2}} \|T\|_1 \leq \text{const.}; \quad (4.2.49)$$

wir können x_0 also unabhängig von E so wählen, daß stets $E^{\frac{1}{2}} t_j \leq x_0$. Mit diesen Abschätzungen wird

$$\log \prod_{j=1}^{\infty} F(E^{\frac{1}{2}} t_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \log F(E^{\frac{1}{2}} t_j) \leq c' \sum_{j=1}^{\infty} E^{\frac{1}{2}} t_j = c' \cdot E^{\frac{1}{2}} \text{tr } T \leq \text{const.} \quad (4.2.50)$$

Die Konvergenz der Summe (4.2.44) ist also gewährleistet, und zwar gleichmäßig im Argument von τ_μ ; wir haben im Sinne der Normkonvergenz von Abbildungen

$$\Xi_{E,r}^* = \sum_{\mu} \tau_{\mu} \cdot P(E) \chi_{\mu} P(E). \quad (4.2.51)$$

Für die Entwicklung nach σ_{μ}, ϕ_{μ} läßt sich aufgrund der schlechteren Abschätzungen für die $\|\sigma_{\mu}\|$ keine derartige Konvergenz für die gesamte Reihe zeigen - der Faktor $\sqrt{|\mu|!}$ statt $\sqrt{\mu!}$ in (4.2.45) verhindert dies. Man kann jedoch die Teilsummen von (4.2.43) bei festen Teilchenzahlen $|\mu^{\pm}|$ betrachten; wegen $m^{\pm} + n^{\pm} = |\mu^{\pm}|$ in (4.2.35) kann man auch sie auf die lineare Hülle der $W(f)$ fortsetzen. Für die Summe der Normen gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{|\mu^{\pm}|=N^{\pm}} \|\sigma_{\mu^+ \mu^-}\| \|\phi_{\mu^+ \mu^-}\|_E \\ & \leq \sum_{|\mu^{\pm}|=N^{\pm}} 8^{|\mu|} \frac{\sqrt{|\mu|!}}{\mu!} \|P_{\mathcal{L}^+}^+(r) h^+\|^{\mu^+} \|P_{\mathcal{L}^-}^-(r) h^-\|^{\mu^-} \|E^{\frac{1}{2}} Q(E) \omega^{-\frac{1}{2}} g^+\|^{\mu^+} \|E^{\frac{1}{2}} Q(E) \omega^{-\frac{1}{2}} g^-\|^{\mu^-} \\ & \leq 8^{N^+ + N^-} \sqrt{(N^+ + N^-)!} \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y_j^+)^k}{k!} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y_j^-)^k}{k!} \\ & \quad \text{mit} \quad y_j^{\pm} := \|P_{\mathcal{L}^{\pm}}^{\pm}(r) h_j^{\pm}\| \|E^{\frac{1}{2}} Q(E) \omega^{-\frac{1}{2}} g_j^{\pm}\|. \quad (4.2.52) \end{aligned}$$

Wir haben dabei die Summation - nach Herausziehen der Vorfaktoren - wieder auf alle Multiindizes ausgedehnt und die Reihe ähnlich wie in (4.2.46) umgeformt. Für die verbleibenden unendliche Summen und Produkte gilt

$$\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y_j^{\pm})^k}{k!} = \prod_{j=1}^{\infty} \exp(y_j^{\pm}) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j^{\pm}\right) \leq \exp((cEr)^{q^{\pm}(1)} \cdot \text{const.}) \stackrel{(Er \leq 1)}{\leq} \text{const.}' \quad (4.2.53)$$

Dies ist nach Eigenschaft 4.1 sichergestellt. Die betrachteten Teilsummen konvergieren damit gleichmäßig auf $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$. Wegen $|\mu| = |\mu^+| + |\mu^-|$ konvergiert für $N_0 \in \mathbb{N}$ dann auch

$$\sum_{|\mu| \leq N_0} \sigma_{\mu} \cdot P(E) \phi_{\mu} P(E) \quad (4.2.54)$$

in der Operatornorm.

Für die uns interessierende Anwendung benötigen wir noch weitere Abschätzungen für die Normen gewisser Teilsummen der beiden Reihenentwicklungen. Dabei beginnen wir wieder mit der Entwicklung nach τ_{μ} und χ_{μ} aus (4.2.44). Wir fixieren ein $j \in \mathbb{N}$ und ein Vorzeichen „ \pm “ und betrachten nur die Summanden, in denen der j -te Eintrag des Multiindex μ^{\pm} mindestens einmal besetzt ist:

$$\sum_{\mu: \mu_j^{\pm} \geq 1} \|\tau_{\mu}\| \|\chi_{\mu}\|_E \leq \sum_{\mu: \mu_j^{\pm} \geq 1} 16^{|\mu|} \frac{(E^{\frac{1}{2}} t)^{\mu^+ + \mu^-}}{\sqrt{\mu!}} \leq 16 E^{\frac{1}{2}} t_j \cdot \sum_{\mu} 16^{|\mu|} \frac{(E^{\frac{1}{2}} t)^{\mu^+ + \mu^-}}{\sqrt{\mu!}} \leq E^{\frac{1}{2}} t_j \cdot \text{const.} \quad (4.2.55)$$

Dabei wird im letzten Schritt wieder über alle μ summiert; die Nenner der Summanden wurden nach unten abgeschätzt. Wir folgern für die Summe über alle an irgendeiner Stelle mindestens einmal besetzten Multiindizes:

$$\begin{aligned} \sum_{|\mu| \geq 1} \|\tau_\mu\| \|\chi_\mu\|_E &\leq \sum_{\pm} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\mu: \mu_{\pm}^j \geq 1} 16^{|\mu|} \frac{(E^{\frac{1}{2}}t)^{\mu^+ + \mu^-}}{\sqrt{\mu!}} \stackrel{(4.2.55)}{\leq} 2 \sum_{j=1}^{\infty} E^{\frac{1}{2}} t_j \cdot \text{const.} \\ &= 2E^{\frac{1}{2}} \|T\|_1 \cdot \text{const.} \leq (Er)^\alpha \cdot \text{const.}' \quad (4.2.56) \end{aligned}$$

nach Eigenschaft 4.2. Nun ergibt sich für die Summe über alle mindestens N_0 -fach besetzten Indizes ($N_0 \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} \sum_{|\mu| \geq N_0} \|\tau_\mu\| \|\chi_\mu\|_E &\leq \sum_{|\mu| \geq N_0} 16^{|\mu|} \frac{(E^{\frac{1}{2}}t)^{\mu^+ + \mu^-}}{\sqrt{\mu!}} \\ &\leq \left(\sum_{|\mu| \geq 1} 16^{|\mu|} \frac{(E^{\frac{1}{2}}t)^{\mu^+ + \mu^-}}{\sqrt{\mu!}} \right)^{N_0} \stackrel{(4.2.56)}{\leq} (Er)^{N_0\alpha} \cdot \text{const.}(N_0), \quad (4.2.57) \end{aligned}$$

denn durch Ausmultiplizieren der Potenz $(\dots)^{N_0}$ ergeben sich höchstens mehr als die gewünschten Terme; im Nenner muß wieder abgeschätzt werden.

Ähnliches berechnen wir jetzt für die Entwicklung nach den σ_μ und χ_μ laut (4.2.43) bzw. (4.2.54). Die Summen konvergieren dabei stets nur, wenn wir die Summation auf $|\mu| \leq N_0$ einschränken; diese Bedingung notieren wir am Summenzeichen als \sum^* . Alle im folgenden auftretenden Konstanten hängen von N_0 ab, was aber nicht explizit notiert wird. Mit denselben Prinzipien wie in (4.2.55) erhalten wir für $j, m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\mu: \mu_j \geq m}^* \|\sigma_\mu\| \|\phi_\mu\|_E \stackrel{(4.2.52)}{\leq} \sum_{\mu: \mu_j \geq m}^* \frac{y^\mu}{\mu!} \cdot \text{const.} \leq y_j^m \sum_{\mu}^* \frac{y^\mu}{\mu!} \cdot \text{const} \leq y_j^m \cdot \text{const.}' \quad (4.2.58)$$

Noch etwas allgemeiner ergibt sich für einen festen Multiindex $\mu^0 \in \mathcal{M}^\infty$

$$\sum_{\mu \geq \mu^0}^* \|\sigma_\mu\| \|\phi_\mu\|_E \leq y^{\mu^0} \cdot \text{const.} \stackrel{(4.2.26)}{\leq} (Er)^{\gamma(\mu^0)} \cdot \text{const.}'(\mu^0), \quad (4.2.59)$$

wobei wir setzen

$$\gamma(\mu) := \sum_j \mu_j q(j). \quad (4.2.60)$$

Wichtig ist für unsere Zwecke noch die Summation über alle μ , die für gegebenes $j_0 \in \mathbb{N}$ mindestens eine Besetzung $\mu_j \geq 1$ für ein $j \geq j_0$ aufweisen. Man erhält als obere Abschätzung

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{\mu: \mu_j \geq 1}^* \|\sigma_\mu\| \|\phi_\mu\|_E \stackrel{(4.2.58)}{\leq} \sum_{j=j_0}^{\infty} y_j \cdot \text{const.} \leq (Er)^{q(j_0)} \cdot \text{const}'(j_0) \quad (4.2.61)$$

unter Verwendung der Normschränken in Eigenschaft 4.1.

4.2.6 Anwendung auf die Abbildung Ξ

Wir werden nun die bisherigen Ergebnisse über Reihenentwicklungen der Abbildung $\Xi_{E,r}^*$ zusammenfassen und sie schließlich zur Approximation der skalenunabhängigen Abbildung Ξ verwenden.

Die für diesen Zweck gewünschten (weil skalenunabhängigen) Approximationsterme sind die $\sigma_\mu \phi_\mu$; wir konnten die Konvergenz der Reihe über diese Terme aber oben nicht etablieren. Geht man jedoch zurück zu (4.2.31) und (4.2.35), dann sieht man, daß für jeden Wert der m^\pm, n^\pm die gewählte Art der Entwicklung der Einteilchenskalärprodukte unabhängig gewählt werden kann. Wegen $m^\pm + n^\pm = |\mu^\pm|$ kann man insbesondere die Terme zu kleinen Teilchenzahlen nach Abschnitt 4.2.2, diejenigen zu hohen Teilchenzahlen nach Abschnitt 4.2.3 entwickeln. Man erhält so eine „gemischte“ Entwicklung

$$\Xi_{E,r}^* = \sum_{|\mu| \leq N_0} \sigma_\mu \cdot P(E) \phi_\mu P(E) + \sum_{|\mu| > N_0} \tau_\mu \cdot P(E) \chi_\mu P(E), \quad (4.2.62)$$

die nach obigen Überlegungen in der Normtopologie konvergiert. N kann dabei beliebig festgesetzt werden. Da die Funktionale σ_μ, τ_μ in $\mathfrak{B}(\mathcal{H})_*$ liegen, erhält man für die „präduale“ Abbildung $\Xi_{E,r}$ wörtlich dieselbe Entwicklung:

$$\Xi_{E,r} = \sum_{|\mu| \leq N_0} P(E) \phi_\mu P(E) \cdot \sigma_\mu + \sum_{|\mu| > N_0} P(E) \chi_\mu P(E) \cdot \tau_\mu. \quad (4.2.63)$$

Im folgenden werden wir die σ_μ auch als σ_l mit natürlichen Zahlen l numerieren (analog die ϕ_l). Dabei soll das aus (4.2.60) resultierende $\gamma(l)$ monoton wachsen, was wegen $q(j) > 0$, $q(j) \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$) möglich ist. Es gilt sogar $\gamma(l) \rightarrow \infty$ ($l \rightarrow \infty$).

Wesentlich ist nun, daß wir die $\sigma_l \phi_l$ als skalenunabhängige Terme ansehen können: Wegen der in Eigenschaft 4.1 genannten „Verträglichkeitsbedingung“ sind die ϕ_l wohldefinierte Linearformen auf $\bigcup_E \Sigma_E$, also Elemente von Θ_1 , denn die polynomialen Energieschranken folgen aus (4.2.26) und (4.2.40). Die Konstruktion der σ_l können wir etwa bei $r = r_0$ fixieren, ohne ihre Einschränkungen auf $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ ($r \leq r_0$) zu ändern.

Es sei nun $k \in \mathbb{N}$ gegeben; wir wollen zeigen, daß

$$d_k(\Xi, \sum_{l=1}^N \sigma_l \phi_l) = 0 \quad (4.2.64)$$

für genügend große N . Dazu wählen wir N derart, daß $\gamma_0 := \gamma(N+1) > k$. Weiter sei N_0 so groß, daß $N_0 \alpha > \gamma_0$ und j_0 groß genug, damit $q(j_0) > \gamma_0$. Für festes $E \geq E_0$, $r \leq r_0$, $Er \leq 1$ erhalten wir dann

$$\|\Xi - \sum_{l=1}^N \sigma_l \phi_l\|_{E,r} \leq \sum_{|\mu| \leq N_0}^{\diamond} \|\phi_\mu\|_E \cdot \|\sigma_\mu[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)]\| + \sum_{|\mu| > N_0} \|\chi_\mu\|_E \cdot \|\tau_\mu\|. \quad (4.2.65)$$

Dabei fehlen in der Summe \sum^{\diamond} alle Terme zu $l \leq N$. Wir wählen nun eine endliche Menge $M \subset \mathcal{M}^\infty$ von Multiindizes mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $\mu \in M$ gilt $\gamma(\mu) \geq \gamma_0$.

- Ist $\mu \in \mathcal{M}^\infty$ ein Multiindex mit $\gamma(\mu) \geq \gamma_0$ und gilt $\mu_j = 0$ für $j \geq j_0$, dann gibt es $\mu^0 \in M$ mit $\mu \geq \mu^0$.

Wegen der geforderten Eigenschaften der Funktionen $q^\pm(j)$ läßt sich so eine Menge M stets finden. Jetzt können wir den ersten Summanden in (4.2.65) so abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{|\mu| \leq N_0}^{\diamond} \|\phi_\mu\|_E \|\sigma_\mu\|_r &\leq \sum_{\mu^0 \in M} \sum_{\mu \geq \mu^0}^* \|\phi_\mu\|_E \|\sigma_\mu\|_r + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{\mu: \mu_j \geq 1}^* \|\phi_\mu\|_E \|\sigma_\mu\|_r \\ &\leq (Er)^{\gamma_0} \cdot \text{const.} + (Er)^{q(j_0)} \cdot \text{const}' \leq (Er)^{\gamma_0} \cdot \text{const.}'' \end{aligned} \quad (4.2.66)$$

Wir haben dabei die Abschätzungen (4.2.59) und (4.2.61) verwendet. Den zweiten Summanden in (4.2.65) können wir mit Hilfe von (4.2.57) kontrollieren. Damit erhalten wir insgesamt

$$\|\Xi - \sum_{l=1}^N \sigma_l \phi_l\|_{E,r} \leq (Er)^{\gamma_0} \cdot \text{const.}, \quad (4.2.67)$$

und zwar für $E \geq E_0$, $r \leq r_0$ und $Er \leq 1$. Die Konstante hängt von den gewählten Parametern N, N_0, j_0 usw. ab, nicht aber von E und r .

Man sieht nun leicht, daß im Limes $r \rightarrow 0$ gilt (denn die Anteile für $E < E_0$ haben keinen Einfluß auf den Grenzwert) :

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{E \leq r^{-1}} ((1+E)r)^{-k} \|\Xi - \sum_{l=1}^N \sigma_l \phi_l\|_{E,r} = 0. \quad (4.2.68)$$

Mithin gilt für jede Nullfolge ρ

$$d[r^k, k, \rho] \left(\Xi, \sum_{l=1}^N \sigma_l \phi_l \right) = 0. \quad (4.2.69)$$

Unser Ergebnis können wir also (unter geringfügiger Änderung der Bezeichnungen) so formulieren:

Satz 4.5. *Wir betrachten ein Modell der freien Feldtheorie, das die Eigenschaften 4.1 und 4.2 besitzt, etwa die Theorie eines reellen skalaren Feldes in $s \geq 3$ Raumdimensionen. Dann gibt es Funktionale $\sigma_j \in \Sigma$ und Linearformen $\phi_j \in \Theta_1$, so daß*

$$\Xi = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \sigma_j$$

im Sinne der in Abschnitt 2.2 definierten Topologie. Eigenschaft 2.1 ist dann gegeben. Genauer hat man für jedes $N \in \mathbb{N}$, $k < \gamma(N+1)$ und beliebige Nullfolgen ρ :

$$d[r^k, k, \rho] \left(\Xi, \sum_{j=1}^N \phi_j \sigma_j \right) = 0.$$

In Abschnitt 4.4.2 werden die ersten Terme der berechneten Reihe für das reelle skalare Feld explizit angeben; die ϕ_j lassen sich dann mit Funktionen des der Theorie zugrundeliegenden Punktfeldes $\phi(x)$ identifizieren.

4.2.A Multiindex-Schreibweise

Um im Zusammenhang mit der freien Feldtheorie die Notation zu verkürzen, ist es an mehreren Stellen sinnvoll, Multiindizes zu verwenden. Wir geben hier einen Überblick über die wichtigsten damit gebildeten Kurzschreibweisen.

Unter einem n -stelligen *Multiindex* verstehen wir ein n -Tupel $\kappa \in (\mathbb{N}_0)^n$. Eine Folge $\mu = (\mu_i)_{i=1}^\infty$ in \mathbb{N}_0 wird als *Multiindex beliebiger Stellenzahl* bezeichnet, vorausgesetzt, daß nur endlich viele μ_i von Null verschieden sind. Die Menge aller n -stelligen Multiindizes bezeichnen wir mit \mathcal{M}^n , die aller Multiindizes beliebiger Stellenzahl mit \mathcal{M}^∞ . Die Zahl

$$|\kappa| := \sum_{i=1}^n \kappa_i$$

heißt *Länge* des Multiindex; bei beliebiger Stellenzahl läuft die Summe formal bis ∞ , ist aber tatsächlich endlich.

Die Mengen \mathcal{M}^n und \mathcal{M}^∞ versehen wir mit einer natürlichen (Halb-)Ordnungsstruktur, indem wir für Multiindizes κ, κ' setzen

$$\kappa \geq \kappa' \quad :\Leftrightarrow \quad \kappa_j \geq \kappa'_j \quad \forall j. \quad (4.2.70)$$

Analog werden die Relationen „ \leq “, „ $>$ “ und „ $<$ “ definiert.

Sei κ ein n -stelliger Multiindex und $x \in \mathbb{R}^n$, dann schreiben wir

$$x^\kappa := x_1^{\kappa_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\kappa_n}. \quad (4.2.71)$$

In ähnlicher Weise kürzen wir Differentialoperatoren ab:

$$\partial_\kappa := \frac{\partial^{\kappa_1}}{\partial x_1^{\kappa_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial^{\kappa_n}}{\partial x_n^{\kappa_n}}. \quad (4.2.72)$$

Addition von Multiindizes sowie die Multiplikation mit Zahlen aus \mathbb{N}_0 werden komponentenweise erklärt. Die Fakultät eines n -stelligen Multiindex κ ist

$$\kappa! := \prod_{j=1}^n \kappa_j!, \quad (4.2.73)$$

entsprechend für Multiindizes beliebiger Stellenzahl.

Wir werden auch diverse andere, suggestive Schreibweisen mit Multiindizes verwenden. Sind beispielsweise $b_1 \dots b_n \in \mathcal{K}$ und wieder $\kappa \in \mathcal{M}^n$, dann notieren wir:

$$b^{\otimes \kappa} = \underbrace{b_1 \otimes \dots \otimes b_1}_{\kappa_1} \otimes \dots \otimes \underbrace{b_n \otimes \dots \otimes b_n}_{\kappa_n}; \quad (4.2.74)$$

$$\|b\|^\kappa = \prod_{j=1}^n \|b_j\|^{\kappa_j}; \quad (4.2.75)$$

$$\langle b|f \rangle^\kappa = \prod_{j=1}^n \langle b_j|f \rangle^{\kappa_j} \quad (f \in \mathcal{K}). \quad (4.2.76)$$

4.2.B Spezielle Funktionale

Für unsere Analyse der freien Feldtheorie im Fockraum benötigen wir spezielle lineare Funktionale, die auf Weyloperatoren $W(f)$ bestimmte vorgegebene Werte annehmen. Wir konstruieren sie mit Hilfe einer erzeugenden Funktion, um die auftretenden kombinatorischen Probleme zu umgehen. Für die Anwendung ist es weiterhin wichtig, die Normen der besagten Funktionale kontrollieren zu können; daher beginnen wir mit der Abschätzung der Normen gewisser Vektoren im Fockraum.

Lemma 4.6. *Seien $b_j \in \mathcal{K}$ ($j \in \mathbb{N}$), κ ein Multiindex und*

$$\psi = a(b_?) \dots a^*(b_?) \dots \Omega,$$

wobei $a(b_?) \dots$ für gewisse Produkte der Vernichter der b_j steht (analog $a^*(b_?) \dots$) und κ_j dabei die Multiplizität von b_j zählt (ohne Unterschied, ob als Erzeuger oder Vernichter). Dann gilt

$$\|\psi\| \leq \sqrt{|\kappa|!} \|b\|^\kappa.$$

Bilden die b_j ein Orthonormalsystem, dann folgt sogar

$$\|\psi\| \leq \sqrt{\kappa!}.$$

Beweis. Wir verwenden Induktion nach der Anzahl n der Vernichter. Für $n = 0$ ist

$$\psi = a^*(b)^\kappa \Omega = \sqrt{|\kappa|!} \text{Symm}(b^{\otimes \kappa}) \quad (4.2.77)$$

und damit

$$\|\psi\|^2 \leq |\kappa|! \|b^{\otimes \kappa}\|^2 = |\kappa|! \|b\|^{2\kappa}. \quad (4.2.78)$$

Bilden die b_j ein Orthonormalsystem, dann hat man explizit

$$\|\text{Symm}(b^{\otimes \kappa})\|^2 = \frac{\kappa!}{|\kappa|!}, \quad (4.2.79)$$

womit der Induktionsanfang gezeigt ist.

Nun nehmen wir ohne Einschränkung an, daß in ψ ein Vernichter $a(b_1)$ vorkommt. Weiter fixieren wir eine Reihenfolge der vorkommenden Erzeuger und nummerieren sie als $a^*(b_{(k)})$. Dann wird

$$\begin{aligned} \|\psi\| &= \|a(b_?) \dots a(b_1) a^*(b_?) \dots \Omega\| = \|a(b_?) \dots \sum_k \langle b_1 | b_{(k)} \rangle \underbrace{a^*(b_?) \dots \Omega}_{\text{ohne } b_{(k)}}\| \\ &\leq \sum_k \|b_1\| \|b_{(k)}\| \|a(b_?) \dots \underbrace{a^*(b_?) \dots \Omega}_{\text{ohne } b_{(k)}}\| \\ &\stackrel{\text{(I.V.)}}{\leq} (|\kappa| - 1) \sqrt{(|\kappa| - 2)!} \|b\|^\kappa \leq \sqrt{|\kappa|!} \|b\|^\kappa. \end{aligned} \quad (4.2.80)$$

Im Fall des Orthonormalsystems ergibt sich nur dann ein Beitrag von $\langle b_1 | b_{(k)} \rangle$, wenn $b_{(k)} = b_1$, und man erhält einen Faktor $\kappa_1 - 1$ statt $|\kappa| - 1$. \square

Als Folgerung ergibt sich:

Lemma 4.7. *Seien $b_j \in \mathcal{K}$ ($j \in \mathbb{N}$), κ ein Multiindex und $\tau \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_*$ das Funktional*

$$\tau(A) = (a(b_?) \dots a^*(b_?) \dots \Omega \mid A a(b_?) \dots a^*(b_?) \dots \Omega),$$

wobei wieder κ_j die Multiplizität von b_j zählt (ohne Unterschied, auf welcher Seite oder ob als Erzeuger oder Vernichter). Dann gilt

$$\|\tau\| \leq \sqrt{|\kappa|!} \|b\|^\kappa.$$

Bilden die b_j ein Orthonormalsystem, dann folgt sogar

$$\|\tau\| \leq \sqrt{\kappa!}.$$

Beweis. Wir teilen κ auf in $\kappa_L + \kappa_R$, die jeweils die Besetzungszahlen auf der linken bzw. rechten Seite beschreiben. Die Norm von τ wird durch die Norm der Vektoren im Skalarprodukt abgeschätzt, und Lemma 4.6 liefert

$$\|\tau\| \leq \sqrt{|\kappa_L|! |\kappa_R|!} \|b\|^\kappa \leq \sqrt{|\kappa|!} \|b\|^\kappa. \quad (4.2.81)$$

Im Fall des Ortonormalsystems gilt entsprechendes, wobei man $\kappa_L! \kappa_R! \leq \kappa!$ beachtet. \square

Nun kommen wir zur Konstruktion der bereits erwähnten Funktionale mit vorgegebenen Werten auf Weyloperatoren. Es seien $k < m \in \mathbb{N}$ und $b_1, \dots, b_m \in \mathcal{K}$. Man betrachte folgendes Funktional:

$$\tau(A) := (\Omega \mid [a(b_1), [\dots [a(b_k), [a^*(b_{k+1}), [\dots [a^*(b_m), A] \dots] \Omega]). \quad (4.2.82)$$

Durch Ausrechnen der Kommutatoren erhält man eine Darstellung der Form

$$\tau(A) = \sum_j (-1)^j (a(b_?) \dots a^*(b_?) \dots a^*(b_k) \Omega \mid A a^*(b_?) \dots \Omega), \quad (4.2.83)$$

wobei jeweils einige der b_{k+1}, \dots, b_m auf der linken, die anderen auf der rechten Seite des Skalarprodukts stehen (angedeutet durch $b_?$) und die Summe über alle möglichen Aufteilungen läuft, insgesamt über 2^{m-k} Terme. Lemma 4.7 liefert dann

$$\|\tau\| \leq 2^m \sqrt{m!} \prod_j \|b_j\|. \quad (4.2.84)$$

Entscheidend ist, daß sich der Wert von τ auf Weyloperatoren $W(f)$ leicht ausrechnen läßt: Mit den Relationen (4.1.14) und (4.1.15) erhält man unmittelbar

$$\tau(W(f)) = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \prod_{j=1}^k \langle b_j \mid i f \rangle \prod_{j=k+1}^m \langle i f \mid b_j \rangle. \quad (4.2.85)$$

Wir gehen nun zu dem Fall über, in dem die b_j auch mehrfach in den Kommutatoren auftreten können; zu Multiindizes $\mu, \nu \in \mathcal{M}^\infty$ („Besetzungszahlen“) können wir dann Funktionale $\tau_{\mu\nu} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_*$ finden, so daß

$$\tau_{\mu\nu}(W(f)) = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \prod_j \langle b_j \mid i f \rangle^{\mu_j} \prod_k \langle i f \mid b_k \rangle^{\nu_k}. \quad (4.2.86)$$

Für ihre Norm gilt

$$\|\tau_{\mu\nu}\| \leq 2^{|\mu|+|\nu|} \sqrt{(|\mu|+|\nu|)!} \|b\|^{\mu+\nu}. \quad (4.2.87)$$

Falls die b_j ein Orthonormalsystem bilden, liefert Lemma 4.7 eine bessere Abschätzung:

$$\|\tau_{\mu\nu}\| \leq 2^{|\mu|+|\nu|} \sqrt{(\mu+\nu)!}. \quad (4.2.88)$$

Es erweist sich als nützlich, die Funktionale $\tau_{\mu\nu}$ aus einer erzeugenden Funktion zu gewinnen: Sei $f \in \mathcal{K}$ fest; man setze

$$G(s, t) := e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \exp\left(\sum_j \langle b_j | if \rangle s_j + \sum_k \langle if | b_k \rangle t_k\right), \quad s, t \in \mathbb{C}^n \text{ (n geeignet)}, \quad (4.2.89)$$

dann gilt

$$\tau_{\mu\nu}(W(f)) = \left. \frac{\partial^\mu}{\partial s^\mu} \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} G(s, t) \right|_{s=0, t=0}. \quad (4.2.90)$$

Wir zerlegen f nun wie in (4.1.1) als $f = f^+ + if^-$ mit $Jf^\pm = f^\pm$. Weiter nehmen wir an, daß auch die b_j invariant unter J sind. Dann können wir $G(s, t)$ folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} G(s, t) &:= e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \exp\left(\sum_j (i \langle b_j | f^+ \rangle - \langle b_j | f^- \rangle) s_j + \sum_k (-i \langle b_k | f^+ \rangle - \langle b_k | f^- \rangle) t_k\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \exp\left(\sum_j \langle b_j | f^+ \rangle \underbrace{(is_j - it_j)}_{=: u_j} + \sum_k \langle b_k | f^- \rangle \underbrace{(-s_k - t_k)}_{=: w_k}\right). \end{aligned} \quad (4.2.91)$$

Die Ableitung nach den „neuen Variablen“ u und w liefert

$$\left. \frac{\partial^\mu}{\partial u^\mu} \frac{\partial^\nu}{\partial w^\nu} G(u, w) \right|_{u=0, w=0} = e^{-\frac{1}{2}\|h\|^2} \prod_j \langle b_j | f^+ \rangle^{\mu_j} \prod_k \langle b_k | f^- \rangle^{\nu_k} =: \sigma_{\mu\nu}(W(f)). \quad (4.2.92)$$

Andererseits lassen sich die Ableitung nach neuen und alten Variablen leicht durcheinander ausdrücken: Man hat offenbar

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s_i} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial}{\partial w_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_i}; \quad (4.2.93)$$

da die numerischen Faktoren konstant sind, erhält man

$$\frac{\partial^\mu}{\partial u^\mu} \frac{\partial^\nu}{\partial w^\nu} = \left(\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu = \sum_{\mu', \nu'} c_{\mu' \nu'} \frac{\partial^{\mu'}}{\partial s^{\mu'}} \frac{\partial^{\nu'}}{\partial t^{\nu'}} \quad (4.2.94)$$

mit Konstanten $c_{\mu' \nu'}$ vom Betrag $2^{-|\mu|-|\nu|}$; summiert wird über solche μ', ν' , die $\mu' + \nu' = \mu + \nu$ erfüllen (eventuell kommt ein solches Paar μ', ν' mehrfach vor); insgesamt hat die Summe $2^{|\mu|+|\nu|}$ Summanden. Dies bedeutet, daß man die Funktionale $\sigma_{\mu\nu}$ auf ganz $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ erweitern kann; sie ergeben sich als Linearkombinationen der $\tau_{\mu\nu}$:

$$\sigma_{\mu\nu} = \sum_{\mu', \nu'} c_{\mu' \nu'} \tau_{\mu' \nu'}. \quad (4.2.95)$$

Mit der bereits bemerkten Abschätzung der Vorfaktoren erhält man

$$\|\sigma_{\mu\nu}\| \leq 2^{|\mu|+|\nu|} \sqrt{(|\mu|+|\nu|)!} \|b\|^{\mu+\nu} \quad \text{bzw.} \quad \|\sigma_{\mu\nu}\| \leq 2^{|\mu|+|\nu|} \sqrt{(\mu+\nu)!} \quad (4.2.96)$$

(letzteres im Fall eines Orthonormalsystems).

Wir können durch Umdefinition der Multiindizes μ, ν auch erreichen, daß in den Skalarprodukten $\langle \cdot | f^+ \rangle$ und $\langle \cdot | f^- \rangle$ die Funktionen b_j unabhängig voneinander gewählt werden können. Somit erhält man:

Aussage 4.8. *Seien μ^+, μ^- Multiindizes beliebiger Stellenzahl, $b_j^\pm \in \mathcal{K}$ mit $Jb_j^\pm = b_j^\pm$. Dann gibt es ein schwach stetiges Funktional $\sigma_{\mu^+\mu^-} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_*$, so daß*

$$\sigma_{\mu^+\mu^-}(W(f)) = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \langle b^+ | f^+ \rangle^{\mu^+} \langle b^- | f^- \rangle^{\mu^-} \quad \forall f \in \mathcal{K}.$$

Es gilt

$$\|\sigma_{\mu^+\mu^-}\| \leq 2^{|\mu^+|+|\mu^-|} \sqrt{(|\mu^+|+|\mu^-|)!} \|b^+\|^{\mu^+} \|b^-\|^{\mu^-}.$$

Auch der Fall des Orthonormalsystems soll noch einmal zusammengefaßt werden:⁹

Aussage 4.9. *Seien μ^+, μ^- Multiindizes beliebiger Stellenzahl, $b_j \in \mathcal{K}$ orthonormal mit $Jb_j = b_j$. Dann gibt es ein schwach stetiges Funktional $\sigma_{\mu^+\mu^-} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_*$, so daß*

$$\sigma_{\mu^+\mu^-}(W(f)) = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \langle b | f^+ \rangle^{\mu^+} \langle b | f^- \rangle^{\mu^-} \quad \forall f \in \mathcal{K}.$$

Es gilt

$$\|\sigma_{\mu^+\mu^-}\| \leq 4^{|\mu^+|+|\mu^-|} \sqrt{\mu^+! \mu^-!}.$$

Wir wollen noch ein weiteres Detail der konstruierten Funktionale fixieren: Falls die Einteilchenvektoren b_j in (4.2.83) energiebeschränkt sind, etwa $b_j \in Q(E)\mathcal{K}$, dann überträgt sich dies auf die Hilbertraum-Vektoren $\psi = a(b_?) \dots a^*(b_?) \dots \Omega$; sie liegen in $P(nE)\mathcal{H}$, wenn insgesamt n Erzeuger auftreten. Für die Funktionale $\sigma_{\mu^+\mu^-}$ ergibt sich so:

Korollar 4.10. *Liegen in Aussage 4.8 oder 4.9 die b_j bzw. b_j^\pm in $Q(E)\mathcal{K}$, dann gilt*

$$\sigma_{\mu^+\mu^-} \in \Sigma_{\hat{E}} \quad \text{mit} \quad \hat{E} = (|\mu^+|+|\mu^-|)E.$$

4.2.C Spurnorm der Operatoren $T^\pm(E, r)$ für das reelle skalare freie Feld

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß für das reelle skalare freie Feld die Einteilchenoperatoren

$$T^\pm(E, r) = Q(E) \omega^{-\frac{1}{2}} P_{\mathcal{L}}^\pm(r) \quad (4.2.97)$$

in der Spurklasse sind, und das Verhalten ihrer Spurnormen mit E und r soll untersucht werden. Dabei verwenden wir folgendes, bereits in [10] angewandte Verfahren: Kann man T^\pm als Produkt von vier Operatoren schreiben,

$$T^\pm = A \cdot B \cdot C \cdot D, \quad (4.2.98)$$

⁹Man verwendet dabei noch die Abschätzung $\frac{(k+l)!}{k!l!} = \binom{k+l}{k} \leq 2^{k+l}$.

wobei A und D beschränkt, B und C Hilbert-Schmidt-Operatoren sind, dann ist T^\pm Spuroperator,¹⁰ und für seine Spurnorm gilt

$$\|T^\pm\|_1 \leq \|A\| \cdot \|B\|_2 \cdot \|C\|_2 \cdot \|D\|. \quad (4.2.99)$$

Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, daß sich die Hilbert-Schmidt-Norm für sogenannte Integralkernoperatoren leicht berechnen läßt (s.u.).

Die konkrete Aufspaltung von T^\pm wird so konstruiert: Wir fixieren eine Testfunktion $\chi(\vec{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$, die $\chi(\vec{x}) = 1$ für $|\vec{x}| \leq 1$ erfüllt, und setzen $\chi_r(\vec{x}) = \chi(r^{-1}\vec{x})$. Die Funktionen χ_r wirken durch Multiplikation als Operatoren „im Ortsraum“. Nach Definition der Räume $\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r)$ hat man nun die Identität

$$\omega^{\mp\frac{1}{2}} \chi_r \chi_r \omega^{\pm\frac{1}{2}} P_{\mathcal{L}}^\pm(r) = P_{\mathcal{L}}^\pm(r) \quad (4.2.100)$$

- das ist zumindest auf einer dichten Menge sofort klar und läßt sich dann stetig fortsetzen. Wir erhalten daraus folgende Zerlegung der T^\pm :

$$T^\pm(E, r) = \underbrace{\left(Q(E) \omega^\alpha (1 + r^2 \omega^2)^{2s} \right)}_A \cdot \underbrace{\left((1 + r^2 \omega^2)^{-2s} \omega^{-\alpha - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}} \chi_r (1 + r^2 \omega^2)^s \right)}_B \cdot \underbrace{\left((1 + r^2 \omega^2)^{-s} \chi_r \omega^{\pm\frac{1}{2}} \right)}_C \cdot \underbrace{P_{\mathcal{L}}^\pm(r)}_D. \quad (4.2.101)$$

Dabei ist α eine zunächst unbestimmte positive Zahl; wir werden später sehen, welche Werte dafür zulässig sind. Man berechnet

$$\|A\| = \|Q(E) \omega^\alpha (1 + r^2 \omega^2)^{2s}\| \leq E^\alpha (1 + (Er)^2)^{2s} \leq E^\alpha \cdot \text{const.} \quad (Er \leq 1); \quad (4.2.102)$$

außerdem ist natürlich $\|D\| = \|P_{\mathcal{L}}^\pm(r)\| = 1$.

Bei B und C handelt es sich, im Impulsraum betrachtet, um *Integralkernoperatoren*, d.h. sie sind von der Form

$$(Bf)(\vec{p}) = \int K_B(\vec{p}, \vec{q}) f(\vec{q}) d^s q \quad (4.2.103)$$

mit einer Funktion $K_B(\vec{p}, \vec{q})$, dem *Integralkern* (analog für C). Die Hilbert-Schmidt-Norm solch eines Operators läßt sich berechnen als

$$\|B\|_2^2 = \int |K_B(\vec{p}, \vec{q})|^2 d^s p d^s q, \quad (4.2.104)$$

und B liegt genau dann in der Hilbert-Schmidt-Klasse, wenn dieser Ausdruck konvergiert. Tatsächlich erhält man die Integralkerne von B und C so: Transformiert man den Operator χ_r in den Impulsraum, dann wirkt er, wie man durch Ausschreiben der Fouriertransformation sieht, als

$$(\chi_r f)(\vec{p}) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int \tilde{\chi}_r(\vec{p} - \vec{q}) f(\vec{q}) d^s q, \quad (4.2.105)$$

¹⁰Das Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren liegt stets in der Spurklasse, und diese ist ein beidseitiges Ideal in $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

wobei $\tilde{\chi}_r$ die Fouriertransformierte von χ_r bezeichnet. Da die übrigen Anteile von B bzw. C durch Multiplikation im Impulsraum wirken, erhält man als Integralkerne:

$$K_B(\vec{p}, \vec{q}) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} (1+r^2\vec{p}^2+r^2m^2)^{-2s} (\vec{p}^2+m^2)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\mp\frac{1}{4}} \tilde{\chi}_r(\vec{p}-\vec{q}) (1+r^2\vec{q}^2+r^2m^2); \quad (4.2.106)$$

$$K_C(\vec{p}, \vec{q}) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} (1+r^2\vec{p}^2+r^2m^2)^{-s} \tilde{\chi}_r(\vec{p}-\vec{q})(\vec{q}^2+m^2)^{\pm\frac{1}{4}}. \quad (4.2.107)$$

Bevor wir zur Abschätzung der Hilbert-Schmidt-Normen kommen, beweisen wir noch eine Hilfsformel: Es gilt

$$\frac{\vec{q}^2+c^2}{\vec{p}^2+c^2} \leq \left(\frac{|\vec{p}-\vec{q}|}{c} + 1 \right)^2 \quad \text{für } \vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^s, c > 0. \quad (4.2.108)$$

Offenbar reicht es durch Skalierung der Vektoren, die Formel für $c = 1$ zu beweisen; wir schreiben $\vec{d} = \vec{q} - \vec{p}$ und erhalten

$$\frac{\vec{q}^2+1}{\vec{p}^2+1} = \frac{(\vec{p}+\vec{d})^2+1}{\vec{p}^2+1} = \frac{\vec{p}^2+\vec{d}^2+2\vec{p}\vec{d}+1}{\vec{p}^2+1} \leq 1 + 2 \underbrace{\frac{|\vec{p}|}{\vec{p}^2+1}}_{\leq 1} (|\vec{d}| + |\vec{d}|^2) \leq (1+|\vec{d}|)^2. \quad (4.2.109)$$

Nun wenden wir uns der Hilbert-Schmidt-Norm von B zu; unter Verwendung von

$$\tilde{\chi}_r(\vec{p}) = r^s \tilde{\chi}(r\vec{p}) \quad (4.2.110)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \|B\|_2^2 &= (2\pi)^{-s} r^{2s} \int d^s p d^s q \left(\frac{1+r^2\vec{q}^2+r^2m^2}{1+r^2\vec{p}^2+r^2m^2} \right)^{2s} \frac{(\vec{p}^2+m^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}}{(1+r^2\vec{p}^2+r^2m^2)^s} |\tilde{\chi}(r(\vec{p}-\vec{q}))|^2 \\ &\stackrel{\text{(Skalierung)}}{=} (2\pi)^{-s} r^{2\alpha+1\pm 1} \int d^s p d^s q \left(\frac{1+\vec{q}^2+r^2m^2}{1+\vec{p}^2+r^2m^2} \right)^{2s} \frac{(\vec{p}^2+r^2m^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}}{(1+\vec{p}^2+r^2m^2)^s} |\tilde{\chi}(\vec{p}-\vec{q})|^2 \\ &\stackrel{(4.2.108)}{\leq} (2\pi)^{-s} r^{2\alpha+1\pm 1} \int d^s p d^s (p-q) \underbrace{(1+|\vec{p}-\vec{q}|)^{2s} |\tilde{\chi}(\vec{p}-\vec{q})|^2}_{(I)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\vec{p}^2)^s |\vec{p}|^{2\alpha+1\pm 1}}}_{(II)}. \end{aligned} \quad (4.2.111)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $rm \geq 0$ abgeschätzt. Da χ Testfunktion ist, existiert das Integral über $(\vec{p}-\vec{q})$. Auch dasjenige über \vec{p} existiert, solange $|\vec{p}|^{-2\alpha-1\mp 1}$ bei $\vec{p} = 0$ integrierbar bleibt; das erfordert

$$2\alpha + 1 \pm 1 < s \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \frac{s-1\mp 1}{2}. \quad (4.2.112)$$

Wir setzen $s \geq 3$ voraus, damit solche (positiven) α existieren. Es gilt dann

$$\|B\|_2 \leq r^{\alpha+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}} \cdot \text{const}. \quad (4.2.113)$$

Für den Operator C gehen wir analog vor:

$$\begin{aligned}
\|C\|_2^2 &= (2\pi)^{-s} r^{2s} \int d^s p d^s q \left(\frac{1}{1+r^2 \vec{p}^2 + r^2 m^2} \right)^{2s} |\tilde{\chi}(r(\vec{p}-\vec{q}))|^2 (\vec{q}^2 + m^2)^{\pm \frac{1}{2}} \\
&\stackrel{\text{(Skalierung)}}{=} (2\pi)^{-s} r^{\mp 1} \int d^s p d^s q \left(\frac{1+\vec{q}^2+r^2 m^2}{1+\vec{p}^2+r^2 m^2} \right)^{2s} |\tilde{\chi}(\vec{p}-\vec{q})|^2 \frac{(\vec{q}^2+r^2 m^2)^{\pm \frac{1}{2}}}{(1+\vec{q}^2+r^2 m^2)^{2s}} \\
&\stackrel{(4.2.108)}{\leq} (2\pi)^{-s} r^{\mp 1} \int d^s(p-q) d^s q \underbrace{(1+|\vec{p}-\vec{q}|)^{2s}}_{\text{(I)}} |\tilde{\chi}(\vec{p}-\vec{q})|^2 \cdot \underbrace{\frac{(\vec{q}^2+r^2 m^2)^{\pm \frac{1}{2}}}{(1+\vec{q}^2)^{2s}}}_{\text{(II)}}. \quad (4.2.114)
\end{aligned}$$

Wieder existiert das Integral über $(\vec{p}-\vec{q})$. Im Term (II) schätzen wir $r^2 m^2$ im Fall „-“ gegen 0 ab, im Fall „+“ setzen wir $mr \leq 1$ voraus; dann erhält man auch für das Integral über q eine r -unabhängige Abschätzung, denn für $s \geq 2$ bleibt $|\vec{q}|^{-1}$ lokal integrierbar. Man hat also insgesamt

$$\|C\|_2 \leq r^{\mp \frac{1}{2}} \cdot \text{const.} \quad (4.2.115)$$

Fassen wir die Ergebnisse nach (4.2.99) zusammen, dann ergibt sich

$$\|T^\pm\|_1 \leq r^{\frac{1}{2}} (Er)^\alpha \cdot \text{const.} \quad \text{für } \alpha < \frac{s-1 \mp 1}{2}, \quad r \leq m^{-1}. \quad (4.2.116)$$

Die Konstante hängt allerdings von α ab. Nach Umbenennung von α können wir folgende Aussage über die Operatoren $T^\pm(E, r)$ formulieren:

Satz 4.11. *Wir betrachten die Theorie eines reellen skalaren freien Feldes in $s \geq 3$ Raumdimensionen. Für $Er \leq 1$, $r \leq \frac{1}{m}$ ($r < \infty$ im Fall $m=0$) sind die Operatoren $T^\pm(E, r)$ in der Spurklasse; ist $0 < \alpha < \frac{s-1}{2}$, dann gibt es eine Konstante c , so daß*

$$\begin{aligned}
\|T^+\|_1 &\leq c \cdot E^{-\frac{1}{2}} (Er)^\alpha, \\
\|T^-\|_1 &\leq c \cdot E^{-\frac{1}{2}} (Er)^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Insbesondere besitzt die betrachtete Theorie die Eigenschaft 4.2.

4.2.D Die kleinste obere Schranke zweier Operatoren

Es seien $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ zwei positive Operatoren. Wir werden im folgenden einen zuerst in [7] beschriebenen Operator C konstruieren, der in gewisser Weise die kleinste obere Schranke von A und B darstellt: C soll der kleinste Operator sein, der die Gleichung

$$C^n \geq A^n, \quad C^n \geq B^n \quad (4.2.117)$$

für alle natürlichen Zahlen n erfüllt, wobei sich „klein“ auf die übliche Ordnungsstruktur selbstadjungierter Operatoren bezieht.

Für einen solchen Operator muß offenbar

$$C \geq \left(\frac{1}{2} A^n + \frac{1}{2} B^n \right)^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.2.118)$$

gelten. Wir versuchen, C als den Grenzwert einer Teilfolge der rechten Seite zu definieren, und setzen dazu

$$C_m := \left(\frac{1}{2}(A^{2^m} + B^{2^m}) \right)^{2^{-m}}. \quad (4.2.119)$$

Lemma 4.12. *Die Folge C_m ist monoton wachsend und gleichmäßig in der Operatornorm beschränkt.*

Beweis. Allgemein gilt für selbstadjungierte Operatoren $D, E \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$:

$$\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}E^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E \right)^2}_{\geq 0} + \left(\frac{1}{2}D - \frac{1}{2}E \right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E \right)^2. \quad (4.2.120)$$

Da die Funktion $x \mapsto x^p$ ($p \leq 1$) operator-monoton ist, folgt speziell mit $D = A^{2^m}$, $E = B^{2^m}$:

$$\left(\frac{1}{2}A^{2^{m+1}} + \frac{1}{2}B^{2^{m+1}} \right)^{2^{-m-1}} \geq \left(\frac{1}{2}A^{2^m} + \frac{1}{2}B^{2^m} \right)^{2^{-m}} \Rightarrow C_{m+1} \geq C_m. \quad (4.2.121)$$

Weiterhin hat man für die Norm der C_m

$$\|C_m\| \leq \left(\frac{1}{2}\|A\|^{2^m} + \frac{1}{2}\|B\|^{2^m} \right)^{2^{-m}} \leq \max\{\|A\|, \|B\|\} \quad (4.2.122)$$

(man betrachte die Ungleichung zunächst mit 2^m exponentiert); damit ist eine gleichmäßige Normschranke gefunden. \square

Aus dem eben bewiesenen Lemma folgt gerade, daß C_n stark gegen einen Operator $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ konvergiert:

$$C := s\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} C_m. \quad (4.2.123)$$

C ist offenbar positiv, da die C_m es sind. Außerdem ist Relation (4.2.117) erfüllt, denn

$$C^n = s\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}A^{2^m} + \frac{1}{2}B^{2^m} \right)^{n2^{-m}} \geq s\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}A^{2^m} + 0 \right)^{n2^{-m}} = A^n \quad (4.2.124)$$

(der Exponent ist kleiner als 1 für große m); analoges gilt für B . Ist D ein weiterer Operator, der (4.2.117) erfüllt, dann folgt wegen (4.2.118):

$$D \geq C_m \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow D \geq C. \quad (4.2.125)$$

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse nun zusammen:

Satz 4.13. *Seien $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ positive Operatoren. Dann ist der Operator*

$$C = s\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}A^{2^m} + \frac{1}{2}B^{2^m} \right)^{2^{-m}}$$

ebenfalls positiv, und er erfüllt

$$C^m \geq A^n, \quad C^n \geq B^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

C ist der kleinste Operator mit dieser Eigenschaft; er heißt kleinste obere Schranke von A und B . Für seine Norm gilt

$$\|C\| \leq \max\{\|A\|, \|B\|\}.$$

Vertauscht $D \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ mit A und B , so auch mit allen C_m und deshalb mit C . Dabei kommt es nicht auf die \mathbb{C} -Linearität von D an, wir können z.B. auch antilineare Operatoren zulassen. Es gilt also das

Korollar 4.14. *Sei D ein \mathbb{R} -linearer, beschränkter Operator mit $[D, A] = [D, B] = 0$. Dann ist auch $[D, C] = 0$.*

Wir nehmen nun an, daß A und B in der Spurklasse liegen. Aus [20] weiß man, daß für beliebige positive Operatoren $D, E \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und $0 < c \leq 1$ gilt

$$\|(D + E)^c\|_1 \leq \|D^c\|_1 + \|E^c\|_1. \quad (4.2.126)$$

Daraus folgt für $m \in \mathbb{N}$:

$$\|C_m\|_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^m} \|(A^{2^m} + B^{2^m})^{2^m}\|_1 \stackrel{(4.2.126)}{\leq} \|A\|_1 + \|B\|_1. \quad (4.2.127)$$

Die Spurnormen $\|C_m\|_1$ sind also gleichmäßig nach oben beschränkt. Sei nun $\{e_j\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} und $N \in \mathbb{N}$ fest; da die C_m positiv sind, folgt

$$\sum_{j=1}^N (e_j | C_m e_j) \leq \|A\|_1 + \|B\|_1, \quad (4.2.128)$$

für $m \rightarrow \infty$ also

$$\sum_{j=1}^N (e_j | C e_j) \leq \|A\|_1 + \|B\|_1. \quad (4.2.129)$$

Die linke Seite konvergiert folglich für $N \rightarrow \infty$, woraus wir schließen, daß auch C Spuroperator ist:

Lemma 4.15. *Seien A, B zwei positive Spurklasseoperatoren und C ihre kleinste obere Schranke. Dann ist C ebenfalls in der Spurklasse, und es gilt*

$$\|C\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

4.3 Untere Abschätzungen

Nachdem wir nun eine Reihenentwicklung der Abbildung Ξ wie in Eigenschaft 2.1 hergeleitet haben, bleibt die Frage, ob die approximierenden Terme „redundant“ sind: Im Verlauf der Konstruktion der Punktfelder müssen eventuell mehrfach Terme aus der Entwicklung entfernt werden, da zwischen ihnen lineare Abhängigkeiten bestehen. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß solche Abhängigkeiten im betrachteten Modell nicht auftreten und daß die berechneten ϕ_j damit bereits die gesuchten lokalen Punktfelder sind.

Um diese Eigenschaft nachzuweisen, würde es nach den auf Satz 2.2 folgenden Bemerkungen ausreichen, die Funktionale σ_j einerseits und die quadratischen Formen ϕ_j andererseits getrennt voneinander zu betrachten; für die ϕ_j hätte man lineare Unabhängigkeit nachzuweisen, für die σ_j eine lineare Unabhängigkeit in einem erweiterten Sinne.

Wir wählen hier jedoch einen etwas anderen, allgemeineren Ansatz: Für beliebige Approximationen $\sum_{j=1}^N \phi_j \sigma_j$ von Ξ zeigen wir, daß sie Ξ nicht besser annähern können als eine gewisse,

von N abhängige untere Schranke. Es stellt sich heraus, daß diese mit den in Abschnitt 4.2.6 berechneten oberen Schranken bis auf Konstanten übereinstimmt. Methodisch interessant an diesem Ansatz ist, daß wir uns nicht explizit auf bereits bekannte obere Abschätzungen beziehen. Dies erfordert zwar einen gewissen Mehraufwand gegenüber der weiter oben skizzierten Möglichkeit; andererseits ist aber zu erwarten, daß alle wesentlichen technischen Komplikationen auch bei getrennter Betrachtung der σ_j und ϕ_j auftreten.

4.3.1 Vorgehensweise

Wir betrachten nun eine beliebig vorgegebene Approximation von $\Xi : \bigcup_E \Sigma_E \hookrightarrow \Sigma$ durch Rang-1-Operatoren:

$$\Xi_N = \sum_{j=1}^N \phi_j \sigma_j, \quad \phi_j \in \Theta_1, \sigma_j \in \Sigma. \quad (4.3.1)$$

Uns interessieren untere Abschätzungen für folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \|\Xi - \Xi_N\|_{E,r} &= \sup_{\tau} \left\| \Xi(\tau) - \sum_{j=1}^N \tau(\phi_j) \sigma_j \right\|_r \quad (\tau \in \Sigma_E, \|\tau\| \leq 1) \\ &= \sup_{\tau} \sup_A \left| \tau(A) - \sum_{j=1}^N \tau(\phi_j) \sigma_j(A) \right| \quad (A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r), \|A\| \leq 1). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Können wir nun zu jeder Wahl von σ_j, ϕ_j und jedem E, r ein $\tau \in \Sigma_E$ und ein $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ angeben (beide normiert), speziell etwa $A \in \bigcap \text{Kern } \sigma_j$, so daß

$$|\tau(A)| \geq \text{const.} \cdot (Er)^\gamma, \quad (4.3.3)$$

dann haben wir als untere Schranke für die „Approximationsgüte“ von Ξ_N erhalten:

$$\|\Xi - \Xi_N\|_{E,r} \geq \text{const.} \cdot (Er)^\gamma \quad \Rightarrow \quad d[r^\gamma, \gamma, \rho](\Xi, \Xi_N) > 0 \quad \text{für jede Nullfolge } \rho. \quad (4.3.4)$$

Die σ_j sind Linearformen auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$; der Kern von σ_j hat also Kodimension 1 (er ist eine Hyperebene), mithin hat $\bigcap \text{Kern } \sigma_j$ eine Kodimension von höchstens N . Seien nun $f_0 \dots f_N \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_r)$ fest gewählt und paarweise verschieden; dann gibt es $a_0 \dots a_N \in \mathbb{C}$ (nicht alle 0), so daß

$$A := a_0 W(f_0) + \dots + a_N W(f_N) \in \bigcap_{j=1}^N \text{Kern } \sigma_j. \quad (4.3.5)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei A normiert. Man hat dann

$$1 = \|A\| = \left\| \sum_{i=0}^N a_i W(f_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^N |a_i| \|W(f_i)\| = \sum_{i=0}^N |a_i|. \quad (4.3.6)$$

Unser Ziel ist es, Zustände $\tau_j \in \Sigma_E$ ($j = 0 \dots N$) zu finden, so daß

$$|\tau_j(A)| \geq \text{const.} \cdot \left| \sum_i C_{ij} a_i \right| (Er)^\gamma. \quad (4.3.7)$$

Dabei sind die C_{ij} Konstanten. Wir wollen dann zeigen, daß diese Abschätzungen in einem gewissen Sinne unabhängig von den (in unserem Zugang unbestimmten) a_i sind.¹¹ Dazu ist folgende Aussage nützlich:

Lemma 4.16. *Sei $C = (C_{ij})$ eine invertierbare $n \times n$ -Matrix. Dann gibt es $d > 0$, so daß aus*

$$a \in \mathbb{C}^n, b_i > 0, \left| \sum_{j=1}^n C_{ij} a_j \right| < b_i \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

stets folgt

$$\max_i |a_i| < d \cdot \max_i b_i.$$

Beweis. Seien a, b_i wie oben; man berechnet

$$\begin{aligned} \max_i b_i^2 &> \max_i \left| \sum_j C_{ij} a_j \right|^2 \geq \frac{1}{n} \sum_i \left| \sum_j C_{ij} a_j \right|^2 = \frac{1}{n} \|Ca\|^2 \\ &\geq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\|C^{-1}\|} \|a\| \right)^2 \geq \underbrace{\frac{1}{n \|C^{-1}\|^2}}_{=: d^2} \max_i |a_i|^2. \quad \square \quad (4.3.8) \end{aligned}$$

Wir nehmen die Matrix (C_{ij}) in (4.3.7) nun als invertierbar an; nach Multiplikation mit $(Er)^{-\gamma}$ können wir das Lemma anwenden. Da wegen (4.3.6) hier $\max_i |a_i| \geq \frac{1}{N+1}$ gilt, erhalten wir ein j mit

$$|\tau_j(A)| \geq (Er)^\gamma \cdot \text{const}. \quad (4.3.9)$$

Unter den genannten Voraussetzungen an C_{ij} haben wir damit untere Abschätzungen der Form (4.3.4) etabliert.

Es müssen nun die speziellen Funktionen¹² f_i und Funktionale τ_j konstruiert werden, wobei die letzteren wie in den oberen Abschätzungen auf Matrixelemente mit Einteilchen-Wellenfunktionen g_j zurückgeführt werden. Wir beginnen daher wieder mit der Konstruktion gewisser Funktionen im Einteilchenraum.

4.3.2 Funktionen im Einteilchenraum

Unser Vorgehen ist in mancher Hinsicht sehr ähnlich (aber nicht identisch) zu dem in Abschnitt 4.2.2. Wir fixieren eine Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $|\vec{x}| > 1$; dann setzen wir für $r > 0$:

$$f_r(\vec{x}) := f(r^{-1}|\vec{x}|). \quad (4.3.10)$$

f_r ist dann in der Kugel vom Radius r um 0 lokalisiert; damit ist f_r ein Kandidat für die Konstruktion der Weyloperatoren aus $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$.

¹¹Das Auftreten der a_i in den Abschätzungen (4.3.7) ist in gewissem Sinne der „generische Fall“, da die τ_j immer linear sind.

¹²Wir werden sie später mit f_i^* bezeichnen.

Weiterhin benötigen wir energiebeschränkte Funktionen im Impulsraum. Dazu sei für $E > m$

$$g_E(\vec{p}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega(\vec{p}) \leq E, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \quad g_E \in Q(E)\mathcal{K}. \quad (4.3.11)$$

Wir betrachten im folgenden für s -stellige Multiindizes¹³ κ, λ die Funktionen

$$\omega^{\pm\frac{1}{2}} p^\kappa g_E \quad \text{und} \quad \omega^{\mp\frac{1}{2}} p^\lambda \tilde{f}_r. \quad (4.3.12)$$

Man beachte, daß dabei die Energiebeschränktheit erhalten bleibt; außerdem stört der Faktor p^λ die Lokalisierung des Trägers nicht, da er sich als Ableitung $-i\partial_\lambda$ in den Ortsraum „überwälzen“ läßt. Die Funktionen sind linear unabhängig. Wir berechnen nun diverse Skalarprodukte zwischen ihnen, zunächst diejenigen zwischen den f 's:

$$\begin{aligned} & \langle \omega^{\mp\frac{1}{2}} p^\kappa \tilde{f}_r | \omega^{\mp\frac{1}{2}} p^\lambda \tilde{f}_r \rangle \\ &= \int d^s p \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}^{\mp 1} p^{\kappa+\lambda} (2\pi)^{-s} \int d^s x d^s y \overline{f(r^{-1}|\vec{x}|)} f(r^{-1}|\vec{y}|) e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \\ & \stackrel{\text{(Skalierung)}}{=} \frac{r^{-|\lambda|-|\kappa|+s\pm 1}}{(2\pi)^s} \int d^s p \sqrt{\vec{p}^2 + (rm)^2}^{\mp 1} p^{\kappa+\lambda} \int d^s x d^s y \overline{f(\vec{x})} f(\vec{y}) e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Wir betrachten diesen Ausdruck im Limes $rm \rightarrow 0$. Der Term $(\vec{p}^2 + (rm)^2)^{\mp\frac{1}{2}}$ kann gleichmäßig in rm abgeschätzt werden (es ergibt sich höchstens eine Singularität wie $|\vec{p}|^{-1}$, die für $s \geq 2$ integrierbar bleibt); der vom Integral über x und y herrührende Term fällt mit $|\vec{p}|$ sehr schnell ab (f ist Testfunktion). Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz kann man den Limes also unter dem Integral ausführen und erhält

$$\langle \omega^{\mp\frac{1}{2}} p^\kappa \tilde{f}_r | \omega^{\mp\frac{1}{2}} p^\lambda \tilde{f}_r \rangle r^{|\kappa|+|\lambda|-(s\pm 1)} \xrightarrow{rm \rightarrow 0} \text{const.}, \quad (4.3.14)$$

wobei die Konstante nur noch von κ und λ abhängt; sie verschwindet nicht, falls $\kappa = \lambda$.

Das Skalarprodukt zwischen den g 's ergibt sich so:

$$\begin{aligned} \langle \omega^{\pm\frac{1}{2}} p^\kappa g_E | \omega^{\pm\frac{1}{2}} p^\lambda g_E \rangle &= \int_{\omega \leq E} d^s p \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}^{\pm 1} p^{\kappa+\lambda} \\ &= \int_0^{\sqrt{E^2 - m^2}} d|\vec{p}| \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}^{\pm 1} |\vec{p}|^{|\kappa|+|\lambda|+s-1} \underbrace{\int d\Omega(p) \frac{p^{\kappa+\lambda}}{|\vec{p}|^{|\kappa|+|\lambda|}}}_{=:\Delta(\kappa+\lambda)} \\ & \stackrel{\text{(Skalierung)}}{=} E^{|\kappa|+|\lambda|+s\pm 1} \Delta(\kappa+\lambda) \int_0^{\sqrt{1-m^2/E^2}} dq \sqrt{q^2 + \left(\frac{m}{E}\right)^2} q^{|\kappa|+|\lambda|+s-1}. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

¹³Zur Multiindex-Schreibweise siehe wiederum Anhang 4.2.A.

Der oben definierte Ausdruck $\Delta(\kappa + \lambda)$ wird in Anhang 4.3.A näher untersucht. Wieder läßt sich im Limes $\frac{E}{m} \rightarrow \infty$ der Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden, womit sich ergibt, daß

$$(\omega^{\pm \frac{1}{2}} p^\kappa g_E | \omega^{\pm \frac{1}{2}} p^\lambda g_E) E^{-|\kappa| - |\lambda| - (s \pm 1)} \xrightarrow{\frac{E}{m} \rightarrow \infty} \text{const.} \quad (4.3.16)$$

Auch diese Konstante ist nicht 0, falls $\kappa = \lambda$.

Nun berechnen wir das Skalarprodukt zwischen einem f und einem g :

$$\begin{aligned} \langle \omega^{\pm \frac{1}{2}} p^\kappa g_E | \omega^{\mp \frac{1}{2}} p^\lambda \tilde{f}_r \rangle &= \langle p^\kappa g_E | p^\lambda \tilde{f}_r \rangle = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int_{\omega \leq E} d^s p p^{\kappa + \lambda} \int_{|x| \leq r} d^s x e^{-i\vec{p}\vec{x}} f(r^{-1}|\vec{x}|) \\ &\stackrel{\text{(Skalierung)}}{=} r^{-|\kappa| - |\lambda|} \int_{\vec{p}^2 \leq (E^2 - m^2)r^2} d^s p p^{\kappa + \lambda} (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \underbrace{\int_{|x| \leq 1} d^s x e^{-i\vec{p}\vec{x}} f(|\vec{x}|)}_{=\tilde{f}(\vec{p})} \\ &\quad (\tilde{f}(\vec{p}) \text{ hängt nur von } |\vec{p}| \text{ ab.}) \\ &\stackrel{\text{(Skalierung)}}{=} r^{-|\kappa| - |\lambda|} (Er)^{s + |\kappa| + |\lambda|} \int_{|\vec{p}| \leq 1 - m^2/E^2} d|\vec{p}| |\vec{p}|^{|\kappa| + |\lambda| + s - 1} \tilde{f}(|\vec{p}| \cdot Er) \int d\Omega(p) \frac{p^{\kappa + \lambda}}{|p|^{|\kappa| + |\lambda|}} \\ &= r^s E^{s + |\kappa| + |\lambda|} \Delta(\kappa + \lambda) \int_0^{\sqrt{1 - m^2/E^2}} q^{|\kappa| + |\lambda| + s - 1} \tilde{f}(q \cdot Er) dq. \quad (4.3.17) \end{aligned}$$

Im Limes $Er \rightarrow 0$, $\frac{E}{m} \rightarrow \infty$ kann noch einmal der Satz von der majorisierten Konvergenz angewandt werden; Ausführen der Integration ergibt dann

$$\langle \omega^{\pm \frac{1}{2}} p^\kappa g_E | \omega^{\mp \frac{1}{2}} p^\lambda \tilde{f}_r \rangle r^{-s} E^{-s - |\kappa| - |\lambda|} \xrightarrow{Er \rightarrow 0} \frac{\Delta(\kappa + \lambda)}{s + |\kappa| + |\lambda|} \tilde{f}(0). \quad (4.3.18)$$

Die Funktion f war so gewählt, daß $\tilde{f}(0) \neq 0$.

Wir normieren nun die oben betrachteten Funktionen:

$$f_\kappa^\pm := \frac{i^{|\kappa|} \omega^{\mp \frac{1}{2}} p^\kappa \tilde{f}_r}{\|\omega^{\mp \frac{1}{2}} p^\kappa \tilde{f}_r\|} \in \mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r) \quad ; \quad g_\kappa^\pm := \frac{i^{|\kappa|} \omega^{\pm \frac{1}{2}} p^\kappa g_E}{\|\omega^{\pm \frac{1}{2}} p^\kappa g_E\|} \in Q(E)\mathcal{K}. \quad (4.3.19)$$

Die f_κ^\pm sind dann linear unabhängig und invariant unter J , denn man hat $[J, \omega] = 0$ und $Jp_k = -p_k J$. Entsprechendes gilt für die g_κ^\pm . Unter Verwendung der Ergebnisse (4.3.14) und (4.3.16) erhält man:¹⁴

$$\langle g_\kappa^\pm | g_\lambda^\pm \rangle \xrightarrow[\frac{E}{m} \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(\kappa, \lambda); \quad (4.3.20)$$

$$\langle f_\kappa^\pm | f_\lambda^\pm \rangle \xrightarrow[\frac{E}{m} \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.'}(\kappa, \lambda). \quad (4.3.21)$$

¹⁴Man beachte, daß $Er \rightarrow 0$, $\frac{E}{m} \rightarrow \infty$ auch $rm \rightarrow 0$ impliziert.

Die Konstanten $const.(\kappa, \lambda)$ und $const.'(\kappa, \lambda)$ sind gleich 1, falls $\kappa = \lambda$. Für die gemischten Skalarprodukte hat man

$$\langle f_\kappa^\pm | g_\lambda^\pm \rangle (Er)^{-q^\pm(\kappa)} \xrightarrow[\frac{E}{m} \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} b_1(\kappa) \frac{\Delta(\kappa + \lambda)}{s + |\kappa| + |\lambda|} b_2(\lambda) ; \quad (4.3.22)$$

dabei ist

$$q^\pm(\kappa) := |\kappa| + \frac{s \mp 1}{2}, \quad (4.3.23)$$

die $b_1(\kappa), b_2(\lambda)$ sind wiederum nichtverschwindende Konstanten. Läßt man κ und λ über eine endliche Menge M von Multiindizes laufen, dann ist die Matrix

$$\frac{\Delta(\kappa + \lambda)}{s + |\kappa| + |\lambda|} \quad (\kappa, \lambda \in M) \quad (4.3.24)$$

nach Lemma 4.21 in Anhang 4.3.A invertierbar; die Multiplikation mit den $b_1(\kappa), b_2(\lambda)$ kann als Multiplikation mit zwei Diagonalmatrizen aufgefaßt werden, die ihrerseits invertierbar sind. Die rechte Seite von (4.3.22) bildet somit eine nichtsinguläre Matrix $B_{\kappa\lambda}$.

Wir können auf die Details der Funktionen $f_\kappa^\pm, g_\lambda^\pm$ jetzt verzichten und numerieren sie daher mit natürlichen Zahlen j durch, wobei wir die Reihenfolge so wählen, daß das resultierende $q^\pm(j)$ monoton mit j wächst. Die im folgenden relevanten Ergebnisse fassen wir noch einmal zusammen bzw. formulieren sie für beliebigen Einteilchenraum als Forderung:

Eigenschaft 4.17. *Zu $E \geq E_0, r \leq r_0, Er \leq 1$ gibt es J -invariante Vektoren*

$$f_j^\pm \in \mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r), \quad g_j^\pm \in Q(E)\mathcal{K} \quad (j \in \mathbb{N}),$$

die in $\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r)$ bzw. $Q(E)\mathcal{K}$ linear unabhängig sind. Weiterhin existieren zwei monoton wachsende Funktionen $q^\pm : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $q^\pm(j) \rightarrow \infty$ für $j \rightarrow \infty$, so daß

$$\begin{aligned} \langle f_j^\pm | f_k^\pm \rangle &\xrightarrow[\frac{E}{m} \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} c_f^\pm(j, k), \\ \langle g_j^\pm | g_k^\pm \rangle &\xrightarrow[\frac{E}{m} \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} c_g^\pm(j, k), \\ \langle g_j^\pm | f_k^\pm \rangle (Er)^{-q^\pm(k)} &\xrightarrow[\frac{E}{m} \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} B_{jk}^\pm. \end{aligned}$$

Die Konstanten $c_f^\pm(j, k)$ und $c_g^\pm(j, k)$ verschwinden nicht, falls $j = k$; die Matrix B_{jk}^\pm ($j, k \leq N$) ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ invertierbar. E_0 und r_0 sind positive Konstanten.

Wie interessieren uns besonders für den Fall, in dem die q^\pm mit den in Eigenschaft 4.1 erwähnten Funktionen übereinstimmen, wie dies beim reellen skalaren Feld der Fall ist; unsere Überlegungen sind aber unabhängig davon. Die Tatsache der Invertierbarkeit der Matrix B_{jk} soll noch etwas umformuliert werden, bevor wir sie im folgenden verwenden:

Lemma 4.18. *Sei $N \in \mathbb{N}$ und*

$$g = \sum_{j=1}^N c_j(E, r) g_j^\pm, \quad \text{wobei} \quad c_j(E, r) \xrightarrow[\frac{E}{m} \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} c_j^0$$

mit Konstanten c_j^0 , die nicht alle verschwinden. Dann gilt für $1 \leq k \leq N$

$$\langle g | f_k^\pm \rangle (Er)^{-q^\pm(k)} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} d_k^0$$

mit Konstanten d_k^0 , die ebenfalls nicht alle verschwinden.

Beweis. Man hat nach Eigenschaft 4.17:

$$\langle g | f_k^\pm \rangle (Er)^{-q^\pm(k)} = \sum_{j=1}^N \overline{c_j(E, r)} \langle g_j^\pm | f_k^\pm \rangle (Er)^{-q^\pm(k)} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \overline{c_j^0} B_{jk}^\pm =: d_k^0. \quad (4.3.25)$$

Wegen der Invertierbarkeit von B_{jk}^\pm können nicht alle d_k^0 verschwinden. \square

4.3.3 Verallgemeinertes Gram-Schmidt-Verfahren

Das Verhalten der Skalarprodukte $\langle f_j^\pm | g_k^\pm \rangle$ für große E und kleine Er ist nach Eigenschaft 4.17 bekannt. Für das folgende erweist es sich aber als günstig, über noch einfachere Relationen für diese Ausdrücke zu verfügen, etwa $\langle f_j^\pm | g_k^\pm \rangle \propto \delta_{jk}$. Wir werden dies durch eine Variante des bekannten Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens erreichen. Die Vorzeichen \pm werden im folgenden fortgelassen, die Konstruktion verläuft in beiden Fällen völlig gleich.

Wir konstruieren nun rekursiv Funktionen \hat{f}_n, \hat{g}_n , die folgende Eigenschaften erfüllen sollen:

$$J\hat{f}_n = \hat{f}_n; \quad J\hat{g}_n = \hat{g}_n \quad (4.3.26)$$

$$\text{Span}(f_1 \dots f_n) = \text{Span}(\hat{f}_1 \dots \hat{f}_n) \quad (4.3.27)$$

$$\text{Span}(g_1 \dots g_n) = \text{Span}(\hat{g}_1 \dots \hat{g}_n) \quad (4.3.28)$$

$$\langle f_k | \hat{f}_n \rangle \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(k, n) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.3.29)$$

$$\langle \hat{f}_k | \hat{f}_n \rangle \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(k, n) \quad \forall k \leq n \quad (4.3.30)$$

$$\langle g_k | \hat{g}_n \rangle \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(k, n) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.3.31)$$

$$\langle \hat{g}_k | \hat{g}_n \rangle \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(k, n) \quad \forall k \leq n \quad (4.3.32)$$

$$\langle g_k | \hat{f}_n \rangle (Er)^{-q(n)} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(k, n) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.3.33)$$

$$\langle \hat{g}_n | f_k \rangle (Er)^{-q(k)} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(k, n) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.3.34)$$

$$\langle \hat{g}_n | \hat{f}_k \rangle = 0 \quad \forall k < n \quad (4.3.35)$$

$$\langle \hat{g}_k | \hat{f}_n \rangle = 0 \quad \forall k < n \quad (4.3.36)$$

$$\langle \hat{g}_n | \hat{f}_n \rangle (Er)^{-q(n)} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(n) \neq 0 \quad (4.3.37)$$

Induktionsanfang ($n = 1$): Wir setzen

$$\hat{f}_1 := f_1, \quad \hat{g}_1 := g_1. \quad (4.3.38)$$

(4.3.27) und (4.3.28) sind trivial erfüllt; (4.3.29) - (4.3.37) ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften der f_j und g_j .

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$): Wir definieren

$$\hat{f}_n := f_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \hat{f}_j, \quad (4.3.39)$$

$$\hat{g}_n := g_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle g_n | \hat{f}_j \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \hat{g}_j. \quad (4.3.40)$$

(Die Nenner sind nach Induktionsvoraussetzung (4.3.37) nicht 0 für genügend kleine Er und große E .) Diese Funktionen sind wieder invariant unter J , denn die skalaren Faktoren sind reell.

(4.3.27) ist erfüllt, denn einerseits gilt $\hat{f}_n \in \text{Span}(f_1 \dots f_n)$ nach Definition, andererseits ist $\hat{f}_n \notin \text{Span}(f_1 \dots f_{n-1})$, weil die f_j linear unabhängig sind; also wird der von den \hat{f} erzeugte Unterraum echt größer. Ebenso folgt (4.3.28).

Zu (4.3.29): Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f_k | \hat{f}_n \rangle &= \langle f_k | f_n \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \langle f_k | \hat{f}_j \rangle \\ &= \langle f_k | f_n \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle (Er)^{-q(n)}}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle (Er)^{-q(j)}} (Er)^{\overbrace{q(n)-q(j)}^{\geq 0}} \langle f_k | \hat{f}_j \rangle \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.} \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

nach Induktionsvoraussetzung (4.3.29), (4.3.34) und (4.3.37). Ebenso erhält man (4.3.31).

Zu (4.3.30): Sei $k \leq n$, dann ist

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}_k | \hat{f}_n \rangle &= \langle f_k | f_n \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \langle \hat{f}_j | f_k \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_k \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \langle \hat{f}_j | f_n \rangle \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \frac{\langle \hat{g}_l | f_k \rangle}{\langle \hat{g}_l | \hat{f}_l \rangle} \langle \hat{f}_j | \hat{f}_l \rangle \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.} \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

unter Verwendung von (4.3.29), (4.3.30), (4.3.34) und (4.3.37). Genauso ergibt sich (4.3.32).

Zu (4.3.33): Für $k \in \mathbb{N}$ berechnet man

$$\begin{aligned} \langle g_k | \hat{f}_n \rangle (Er)^{-q(n)} &= \langle g_k | f_n \rangle (Er)^{-q(n)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle (Er)^{-q(n)}}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle (Er)^{-q(j)}} \langle g_k | \hat{f}_j \rangle (Er)^{-q(j)} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.} \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

mit Voraussetzung (4.3.33), (4.3.34) und (4.3.37). Gleichung (4.3.34) folgt analog.

Zu (4.3.36): Es sei $k \leq n$; dann gilt identisch für alle E und r :

$$\langle \hat{g}_k | \hat{f}_n \rangle = \langle \hat{g}_k | f_n \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \underbrace{\langle \hat{g}_k | \hat{f}_j \rangle}_{\propto \delta_{jk}} = \langle \hat{g}_k | f_n \rangle - \frac{\langle \hat{g}_k | f_n \rangle}{\langle \hat{g}_k | \hat{f}_k \rangle} \langle \hat{g}_k | \hat{f}_k \rangle = 0. \quad (4.3.44)$$

Eine ähnliche Rechnung zeigt (4.3.35).

Zu (4.3.37): Man hat aufgrund von Voraussetzung (4.3.33) - (4.3.37)

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_n | \hat{f}_n \rangle (Er)^{-q(n)} &= \langle g_n | f_n \rangle (Er)^{-q(n)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \langle g_n | \hat{f}_j \rangle (Er)^{-q(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle g_n | \hat{f}_j \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \langle \hat{g}_j | f_n \rangle (Er)^{-q(n)} \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \frac{\langle g_n | \hat{f}_k \rangle}{\langle \hat{g}_k | \hat{f}_k \rangle} \underbrace{\langle \hat{g}_k | \hat{f}_j \rangle}_{\propto \delta_{jk}} (Er)^{-q(n)} \\ &\quad \text{(Die drei Summen sind also gleich!)} \\ &= \langle g_n | f_n \rangle (Er)^{-q(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \hat{g}_j | f_n \rangle (Er)^{-q(n)} \langle g_n | \hat{f}_j \rangle (Er)^{-q(j)}}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle (Er)^{-q(j)}} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.} \quad (4.3.45) \end{aligned}$$

Zu zeigen ist noch, daß diese Konstante nicht verschwindet. Dazu nehmen wir an, daß $\langle \hat{g}_n | \hat{f}_n \rangle (Er)^{-q(n)} \rightarrow 0$. Wegen (4.3.35) gilt dann $\langle \hat{g}_n | \hat{f}_k \rangle (Er)^{-q(k)} \rightarrow 0 \forall k \leq n$, und aufgrund von (4.3.27) auch $\langle \hat{g}_n | f_k \rangle (Er)^{-q(k)} \rightarrow 0 \forall k \leq n$. Andererseits erfüllt

$$\hat{g}_n = g_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle g_n | \hat{f}_j \rangle}{\langle \hat{g}_j | \hat{f}_j \rangle} \hat{g}_j \quad (4.3.46)$$

die Voraussetzungen des Lemmas 4.18; daher gibt es ein k mit $\langle \hat{g}_n | f_k \rangle (Er)^{-q(k)} \not\rightarrow 0$. Damit ist ein Widerspruch erreicht.

Die Konstruktion der \hat{f}_n und \hat{g}_n ist nun abgeschlossen. Wir lassen das „Dach“ über den Symbolen wieder weg und verfügen damit über Funktionen f_n^\pm und g_n^\pm , deren Eigenschaften sich wie folgt zusammenfassen lassen:

$$f_n^\pm \in \mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r); \quad g_n^\pm \in Q(E)\mathcal{K} \quad (4.3.47)$$

$$Jf_n^\pm = f_n^\pm; \quad Jg_n^\pm = g_n^\pm \quad (4.3.48)$$

$$\langle f_k^\pm | f_n^\pm \rangle \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(k, n); \quad \langle g_k^\pm | g_n^\pm \rangle \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(k, n) \quad (4.3.49)$$

$$\langle g_k^\pm | f_n^\pm \rangle = 0 \quad \text{für } k \neq n \quad (4.3.50)$$

$$\langle g_n^\pm | f_n^\pm \rangle (Er)^{-q^\pm(n)} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} \text{const.}(n) \quad (4.3.51)$$

Die Konstante in der letzten Gleichung verschwindet nicht.

4.3.4 Zweite Quantisierung

Nachdem wir die Situation im Einteilchenraum festgestellt und um einiges vereinfacht haben, bleiben noch die gewünschten energiebeschränkten Funktionale τ_j und die lokalen Weyloperatoren $W(f_j)$ zu konstruieren.

Wir beginnen auf der Seite der Funktionale: Mit Hilfe von Aussage 4.8 in Anhang 4.2.B verschaffen wir uns zu Multiindizes μ^+, μ^- beliebiger Stellenzahl ein Funktional $\tau_{\mu^+ \mu^-}$, das auf Weyloperatoren $W(f)$ die Werte

$$\tau_{\mu^+ \mu^-}(W(f)) = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \prod_j \langle f^+ | g_j^+ \rangle^{\mu_j^+} \prod_k \langle f^- | g_k^- \rangle^{\mu_k^-} \quad (4.3.52)$$

annimmt. Da die g_j^\pm energiebeschränkt sind, liefert Korollar 4.10, daß $\tau_{\mu^+ \mu^-} \in \Sigma_{\hat{E}}$ mit $\hat{E} = (|\mu^+| + |\mu^-|)E$; außerdem erhält man $\|\tau_{\mu^+ \mu^-}\| \leq \text{const.}(\mu^+, \mu^-)$ für große E und kleine Er , wenn man die Abschätzung der Normen der g_j^\pm aus (4.3.49) berücksichtigt.

Zur Konstruktion der Weyloperatoren setzen wir für Multiindizes ν^+, ν^- :

$$f_{\nu^+ \nu^-}^* := \sum_j \nu_j^+ f_j^+ + i \sum_k \nu_k^- f_k^-. \quad (4.3.53)$$

Das liegt stets in $\mathcal{L}(\mathcal{O}_r)$. Analog zu (4.3.5) betrachten wir Summen

$$A = \sum_{(\nu^+, \nu^-) \in M} a_{\nu^+ \nu^-} W(f_{\nu^+ \nu^-}^*) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r). \quad (4.3.54)$$

Dabei ist $M \subset \mathcal{M}^\infty \times \mathcal{M}^\infty$ eine endliche Teilmenge, die wir erst später spezifizieren werden. Die Auswertung des Funktionals $\tau_{\mu^+ \mu^-}$ auf A ergibt wegen der Orthogonalitätsrelation (4.3.50):

$$\begin{aligned} \tau_{\mu^+ \mu^-}(A) &= \sum_{\nu^+, \nu^-} a_{\nu^+ \nu^-} e^{-\frac{1}{2}\|f_{\nu^+ \nu^-}^*\|^2} \prod_j \langle \nu_j^+ f_j^+ | g_j^+ \rangle^{\mu_j^+} \prod_k \langle \nu_k^- f_k^- | g_k^- \rangle^{\mu_k^-} \\ &=: \sum_{\nu^+, \nu^-} a_{\nu^+ \nu^-} C_{\mu^+ \mu^- | \nu^+ \nu^-}(Er). \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

Setzen wir nun

$$\gamma(\mu^+, \mu^-) := \sum_j \left(\mu_j^+ q^+(j) + \mu_j^- q^-(j) \right), \quad (4.3.56)$$

dann erhalten wir aufgrund des in (4.3.51) beschriebenen Grenzwertverhaltens:

$$\begin{aligned} C_{\mu^+ \mu^- | \nu^+ \nu^-}(Er)^{-\gamma(\mu^+, \mu^-)} \\ \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} c_1(\nu^+, \nu^-) \cdot \prod_j (\nu_j^+)^{\mu_j^+} \prod_k (\nu_k^-)^{\mu_k^-} \cdot c_2(\mu^+, \mu^-) =: C_{\mu^+ \mu^- | \nu^+ \nu^-}^0. \end{aligned} \quad (4.3.57)$$

$c_1(\nu^+, \nu^-)$ und $c_2(\mu^+, \mu^-)$ sind nichtverschwindende Konstanten.

Wir fassen die Multiindizes μ^+, μ^- nun wie in den oberen Abschätzungen zu nur einem Multiindex μ zusammen (entsprechend auch ν^\pm) und bilden aus den $q^\pm(j)$ ein entsprechendes $q(j)$, das monoton wachsen soll. Mit dieser Umbenennung lautet die Relation (4.3.57) jetzt

$$C_{\mu\nu} (Er)^{-\gamma(\mu)} \xrightarrow[E \rightarrow \infty]{Er \rightarrow 0} c_1(\nu) \cdot \prod_j \nu_j^{\mu_j} \cdot c_2(\mu) = C_{\mu\nu}^0. \quad (4.3.58)$$

Die Multiplikation mit $c_1(\nu)$ und $c_2(\mu)$ entspricht der Multiplikation des mittleren Terms mit je einer invertierbaren Diagonalmatrix. Zu betrachten bleibt die Matrix $C_{\mu\nu}^P := \prod_j \nu_j^{\mu_j}$. Wir können diese Matrix ohne Einschränkung als invertierbar annehmen, und zwar in folgendem Sinne:

Falls $C_{\mu\nu}^P$ nicht invertierbar ist, dann ersetze man alle nichtverschwindenden Einträge der Multiindizes ν durch Variablen $x_j^{(\nu)}$ und betrachte das entsprechend gebildete $C_{\mu\nu}^P(x_j^{(\nu)})$. Die Determinante dieser Matrix ist ein Polynom in den Variablen $x_j^{(\nu)}$, und zwar nicht das Nullpolynom, denn beispielsweise tritt das Monom

$$\prod_{\nu \in M; j} \left(x_j^{(\nu)}\right)^{\nu_j}$$

nur in dem Term auf, der von der Diagonalen der Matrix herrührt. Mithin kann man für $x_j^{(\nu)}$ Werte finden (sogar in beliebiger Nähe der ursprünglichen), so daß die Determinante nicht verschwindet und damit $C_{\mu\nu}^P$ invertierbar wird. Startet man aber in (4.3.53) mit den geänderten Werten statt der ganzzahligen ν_j^\pm , dann verläuft die Konstruktion wie zuvor.

Insgesamt ist die Matrix $C_{\mu\nu}^0$ also (ohne Einschränkung) invertierbar. Da sowohl die Determinante als auch die Komponenten der inversen Matrix stetig in den Einträgen von C sind, ist für genügend kleine Er und große E auch $C_{\mu\nu}(E, r)$ invertierbar, und die in Lemma 4.16 erwähnte Konstante d kann gleichmäßig gewählt werden. Man kann den in Abschnitt 4.3.1 skizzierten Gedankengang also anwenden;¹⁵ dabei wählt man den Exponenten γ so, daß

$$\gamma \geq \gamma(\mu) \quad \forall \mu \in M. \quad (4.3.59)$$

Die Menge M kann noch geeignet gewählt werden, um γ möglichst klein werden zu lassen (sie muß mindestens $N+1$ Multiindizes enthalten). Um das Ergebnis einfacher formulieren zu können, numerieren wir nun auch die τ_μ und f_μ^* mit natürlichen Zahlen j statt Multiindizes, wobei $\gamma(j)$ wieder monoton wachsen soll - das ist wegen $q^\pm \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$ stets möglich. Unter Präzisierung der bisherigen Formulierung „für große E und kleine Er “ erhalten wir dann folgende Aussage:

Satz 4.19. *Wir betrachten ein Modell der freien Feldtheorie, das die Eigenschaft 4.17 besitzt, etwa die Theorie eines reellen skalaren Feldes in $s \geq 2$ Raumdimensionen. Zu $N \in \mathbb{N}$ gibt es dann Konstanten E_0, w_0 und c , so daß für $E \geq E_0, Er \leq w_0$ gilt*

$$\|\Xi - \sum_{j=1}^N \phi_j \sigma_j\|_{E,r} \geq c \cdot (Er)^{\gamma(N+1)},$$

wobei $\sigma_j \in \Sigma$ und $\phi_j \in \Theta_1$ beliebig gewählt werden können.

¹⁵Dazu müssen die Funktionale τ_μ noch normiert und die Energieskala um einen konstanten Faktor geändert werden. Dies läßt sich aber in den im Endergebnis erwähnten Konstanten auffangen.

Wir wenden dies noch auf die Pseudometriken $d[r^\gamma, \gamma, \rho]$ an:

Korollar 4.20. *Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\sigma_j \in \Sigma$, $\phi_j \in \Theta_1$ ($j=1 \dots N$). Dann gilt für jede Nullfolge ρ und alle $\gamma \geq \gamma(N+1)$:*

$$d[r^\gamma, \gamma, \rho]\left(\Xi, \sum_{j=1}^N \phi_j \sigma_j\right) > 0.$$

Mit diesem Resultat können wir die Konstruktion der Basen der Feld- und Zustandskeime in Abschnitt 2.3 (deren Ergebnis Satz 2.2 war) nun vollständig kontrollieren. Man bemerkt dazu, daß die oben definierte Funktion $\gamma(j)$ mit derjenigen aus Abschnitt 4.2 übereinstimmt, vorausgesetzt, daß die q^\pm in Eigenschaft 4.1 und Eigenschaft 4.17 identisch sind. Wir bezeichnen jetzt die von $\gamma(j)$ angenommenen *verschiedenen* Werte mit $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ (streng monoton wachsend) - jedes dieser γ_ν wird von der Funktion $\gamma(j)$ eventuell mehrfach erreicht. Weiter wählen wir natürliche Zahlen N_ν maximal, so daß

$$\gamma(1), \dots, \gamma(N_\nu) \leq \gamma_\nu. \quad (4.3.60)$$

Aus Satz 4.5 (oder direkt aus der vorangegangenen Konstruktion) ist klar, daß für die in den oberen Abschätzungen konstruierten Funktionale σ_j gilt

$$\|\sigma_j\|_r \leq \frac{r^{\gamma(j)}}{\rho}, \quad (4.3.61)$$

wobei ρ eine beliebige Nullfolge ist. Weiter wissen wir aus Satz 4.5, daß

$$d[r^{\gamma_\nu}, \gamma_\nu, \rho]\left(\Xi, \sum_{j=1}^{N_\nu} \phi_j \sigma_j\right) = 0. \quad (4.3.62)$$

Andererseits gilt nach Korollar 4.20

$$d[r^{\gamma_\nu}, \gamma_\nu, \rho]\left(\Xi, \sum_{j=1}^{N_\nu-1} \phi_j \sigma_j\right) > 0. \quad (4.3.63)$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$d[r^{\gamma_\nu}, \gamma_\nu, \rho](\phi_{N_\nu} \sigma_{N_\nu}, 0) > 0; \quad (4.3.64)$$

durch Permutation der Approximationsterme gilt dasselbe für andere Indizes j statt N_ν (wobei $N_{\nu-1} < j \leq N_\nu$). Zusammen mit (4.3.61) folgt

$$\|\sigma_j\|_r \sim \frac{r^{\gamma(j)}}{\rho} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.3.65)$$

Die Funktionen $\eta_\nu(r)$ sind hier also zu wählen als

$$\eta_\nu(r) = r^{\gamma_\nu}. \quad (4.3.66)$$

Korollar 4.20 besagt gerade, daß in der Konstruktion zu Satz 2.2 niemals „linear abhängige Terme“ entfernt werden müssen. Wir erhalten daher Satz 2.2 direkt mit den in den oberen Abschätzungen (Abschnitt 4.2) konstruierten Funktionalen σ_j und Linearformen ϕ_j . Die $\eta_\nu(r)$ und N_ν sind oben angegeben. Die Nullfolgen ρ_ν spielen in diesem Modell keine Rolle; sie sind alle gleich einem festen ρ , und dieses kann beliebig vorgegeben werden.

Ein Beispiel für die ersten Terme der Approximationsreihe und die zugehörigen γ_ν und N_ν ist in Abschnitt 4.4.2 angegeben.

4.3.A Die Δ -Symbole

Die hier als „ Δ -Symbole“ bezeichneten Ausdrücke definieren wir wie folgt: Sei κ ein s -stelliger Multiindex, dann ist

$$\Delta(\kappa) := \int_{|\vec{x}|=1} d\Omega(x) x^\kappa; \quad (4.3.67)$$

das Integral läuft über die Einheitssphäre im \mathbb{R}^s . Wir bemerken folgende Eigenschaften:

$$\Delta(\kappa) \geq 0; \quad (4.3.68)$$

$$\Delta(\kappa) = 0 \Leftrightarrow \kappa \text{ besitzt einen ungeraden Eintrag,} \quad (4.3.69)$$

$$\text{insbesondere: } \Delta(2\kappa) > 0. \quad (4.3.70)$$

Das folgende Lemma stellt sich für unsere Anwendungen als wichtig heraus.

Lemma 4.21. *Sei $M \subset \mathcal{M}^s$ eine endliche Teilmenge; dann ist die Matrix*

$$B_{\kappa\lambda} = \frac{\Delta(\kappa + \lambda)}{s + |\kappa| + |\lambda|}, \quad \kappa, \lambda \in M$$

positiv definit, insbesondere ist sie invertierbar.

Beweis. Man betrachte die Funktionen

$$f_\kappa(\vec{x}) = x^\kappa \chi_{[0,1]}(|\vec{x}|) = \begin{cases} x^\kappa & \text{für } |\vec{x}| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \quad \kappa \in M. \quad (4.3.71)$$

Sie sind offenbar linear unabhängig. Bezeichnet $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das gewöhnliche $L^2(\mathbb{R}^s)$ -Skalarprodukt, dann gilt

$$\langle f_\kappa | f_\lambda \rangle = B_{\kappa\lambda}, \quad (4.3.72)$$

wie man leicht berechnet. $B_{\kappa\lambda}$ ist also die Matrixdarstellung des Skalarprodukts auf dem Teilraum $\text{Span}\{f_\kappa\}$ und deshalb positiv definit. \square

4.4 Freie Wightman-Felder

Wir haben bisher das betrachtete Modell der freien Feldtheorie vollständig im algebraischen Rahmen formuliert und das Verhalten der Theorie „am Punkt“ analysiert, so daß wir nach Abschnitt 2.4 lokale Punktfelder erhalten. Historisch wurde die freie Feldtheorie aber zuerst durch Punktfelder (bzw. durch „ausgeschmierte“ operatorwertige Distributionen) definiert und später auf die algebraische Theorie übertragen.

Wir geben in diesem Abschnitt zunächst einen Überblick über die Formulierung der freien Feldtheorie im Wightman'schen Rahmen und zeigen, wie die algebraische Sichtweise daraus hervorgeht. Dabei beschränken wir uns auf das reelle skalare Feld; nur dort hatten wir den Einteilchenraum und die „lokalen“ Unterräume $\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r)$ konkret definiert. Anschließend geben wir die ersten Terme der in Abschnitt 4.2.6 hergeleiteten Reihenentwicklung explizit an; wir deuten die darin vorkommenden quadratischen Formen als Punktfelder und zeigen, daß man nach Ausintegration tatsächlich das Feld $\phi(f)$ zurückerhält, mit dessen Hilfe die Theorie definiert wurde.

4.4.1 Das reelle skalare Feld im Wightman-Rahmen

Ein reelles skalares Feld ist in der Wightman'schen Quantenfeldtheorie eine hermitesche operatorwertige Distribution

$$\phi(f)^* \supset \phi(f), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1}). \quad (4.4.1)$$

Dabei betrachten wir wieder reellwertige Testfunktionen f . Das Feld ϕ soll (im Sinne von Distributionen) die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen:

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (4.4.2)$$

Genügt ein solches Feld allen in Abschnitt 1.3 aufgeführten Wightman-Axiomen, einschließlich der dort genannten Vollständigkeitsbedingung, dann erfüllt es notwendigerweise [24] die Vertauschungsrelationen

$$[\phi(f), \phi(g)] = (\langle f|g \rangle_+ - \langle g|f \rangle_+) \cdot \mathbf{1} \quad (4.4.3)$$

mit

$$\langle f|g \rangle_+ = \int d^{s+1}x \int d^{s+1}y f(x) g(y) \Delta_+(x-y); \quad (4.4.4)$$

hierbei ist Δ_+ die Distribution

$$\Delta_+(z) = (2\pi)^{-s} \int d^s p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) e^{-ipz}. \quad (4.4.5)$$

Dadurch ist das Feld $\phi(f)$ bis auf Unitäräquivalenz eindeutig festgelegt. Es kann in der üblichen Fockraumdarstellung konstruiert werden [19]; dort läßt es sich in die bekannten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^* und a zerlegen:

$$\phi(f) = a^*(f) + a(f). \quad (4.4.6)$$

Um die lokalen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ zu erhalten, muß man beschränkte Funktionen der $\phi(f)$ betrachten. Da die $\phi(f)$ sogar (wesentlich) selbstadjungiert sind, bieten sich dazu die unitären Weyl-Operatoren

$$W(f) = e^{i\phi(f)}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1}) \quad (4.4.7)$$

an. Sie erfüllen wegen (4.4.3) die Relation

$$W(f)W(g) = e^{-i \operatorname{Im}\langle f|g \rangle_+} W(f+g). \quad (4.4.8)$$

Um alle in \mathcal{O} lokalisierten Observablen zu erhalten, muß man offenbar die im Ortsraum im Gebiet \mathcal{O} lokalisierten Testfunktionen f und Funktionen der zugehörigen Felder $\phi(f)$ betrachten, also

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \{W(f) \mid f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O})\}'' \quad (4.4.9)$$

Es ist dabei aber nicht notwendig, f tatsächlich durch ganz $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O})$ laufen zu lassen. Man bemerkt nämlich

$$\phi((\square + m^2)f) = ((\square + m^2)\phi)(f) \stackrel{(4.4.2)}{=} 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{s+1}); \quad (4.4.10)$$

folglich reicht es aus, Restklassen $[f]$ aus dem Quotientenraum $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O})/(\square+m^2)\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{s+1})$ zu betrachten. Einem solchen $[f]$ können wir seine s -dimensionale Fouriertransformierte zuordnen:

$$\tilde{f}(\vec{p}) := (2\pi)^{-s/2} \int d^{s+1}x f(x) e^{i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p}\vec{x})} \quad (\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}). \quad (4.4.11)$$

Diese Zuordnung $[f] \mapsto \tilde{f}$ ist wohldefiniert und injektiv, denn für $f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{s+1})$ gilt

$$\int d^{s+1}x f(x) e^{i(\omega x^0 - \vec{p}\vec{x})} = 0 \quad \forall \vec{p} \quad \Leftrightarrow \quad f \in (\square+m^2)\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{s+1}). \quad (4.4.12)$$

(Die Richtung „ \Rightarrow “ folgt dabei mit Hilfe funktionentheoretischer Argumente - man beachte, daß wegen der Trägereigenschaften von f seine $(s+1)$ -dimensionale Fouriertransformierte ganz analytisch ist.)

Wir zerlegen \tilde{f} nun in J -invariante Funktionen (J wird wie in (4.1.5) definiert):

$$\tilde{f} = \tilde{f}^+ + i\omega\tilde{f}^- \quad \text{mit} \quad \tilde{f}^+ = \frac{1}{2}(\tilde{f} + J\tilde{f}), \quad \tilde{f}^- = \frac{1}{2i\omega}(\tilde{f} - J\tilde{f}); \quad (4.4.13)$$

diese Zerlegung ist eindeutig. Wichtig ist nun, daß sich die Lokalisierung von f an den \tilde{f}^{\pm} ablesen läßt: Es sei speziell $\mathcal{O} = \mathcal{O}_r$ ein Standard-Doppelkegel; dann gehören vorgegebene J -invariante Testfunktionen \tilde{f}^{\pm} genau dann zu einem $[f] \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_r)/(\square+m^2)\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{s+1})$, wenn der Träger der Fourierrücktransformierten

$$f^{\pm}(\vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int d^s p e^{i\vec{p}\vec{x}} \tilde{f}^{\pm}(\vec{p}) \quad (4.4.14)$$

innerhalb der Kugel $|\vec{x}| < r$ liegt. Wir erhalten also eine eindeutige Zuordnung $[f] \mapsto \tilde{f} = \tilde{f}^+ + i\omega\tilde{f}^-$, wobei die \tilde{f}^{\pm} die genannten Eigenschaften haben. Betrachtet man das Feld nun als Funktion von \tilde{f} statt $[f]$, dann lautet die Weylrelation (4.4.8)

$$W(\tilde{f})W(\tilde{g}) = e^{-i\text{Im}\langle\tilde{f}|\tilde{g}\rangle} W(\tilde{f} + \tilde{g}) \quad (4.4.15)$$

mit

$$\langle\tilde{f}|\tilde{g}\rangle = \int \frac{d^s p}{2\omega(\vec{p})} \overline{\tilde{f}(\vec{p})} \tilde{g}(\vec{p}) = \langle f|g\rangle_+. \quad (4.4.16)$$

Zur Vereinfachung der Rechnungen ziehen wir den Faktor $(2\omega)^{-\frac{1}{2}}$ im Integrationsmaß noch zu den Funktionen, d.h. wir setzen

$$\hat{f}(\vec{p}) := (2\omega)^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}(\vec{p}) \quad (4.4.17)$$

und erhalten

$$W(\hat{f})W(\hat{g}) = e^{-i\text{Im}\langle\hat{f}|\hat{g}\rangle} W(\hat{f} + \hat{g}) \quad \text{mit} \quad \langle\hat{f}|\hat{g}\rangle = \int d^s p \overline{\hat{f}(\vec{p})} \hat{g}(\vec{p}); \quad (4.4.18)$$

auf eine Neubezeichnung des Skalarprodukts verzichten wir dabei. Die lokale Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ wird nun erzeugt von den Weyl-Operatoren

$$W(\hat{f}), \quad \hat{f} = \omega^{-\frac{1}{2}} \hat{f}^+ + i\omega^{\frac{1}{2}} \hat{f}^-, \quad (4.4.19)$$

wobei \hat{f}^{\pm} im Ortsraum reell und in $|\vec{x}| < r$ lokalisiert sind. Das stimmt bis auf Bildung topologischer Abschlüsse mit unserer bisherigen Definition in Abschnitt 4.1 überein.

4.4.2 Rekonstruktion des Feldes

Wir hatten in Abschnitt 2.4 gesehen, daß die quadratischen Formen ϕ_j in der Entwicklung

$$\Xi = \sum_j \sigma_j \phi_j \quad (4.4.20)$$

als lokale Wightmanfelder interpretiert werden können. Für das reelle skalare Feld hatten wir solch eine Reihenentwicklung in Abschnitt 4.2.6 hergeleitet. Es ist instruktiv, die ersten Terme dieser Reihe explizit auszurechnen. Um die Notation aus Abschnitt 4.2 etwas zu vereinfachen, setzen wir $h = h_{\kappa=0}^+$ und $g = g_{\kappa=0}^+$. Man erhält dann im Fall physikalischer Raumzeit:¹⁶

$$\begin{aligned} \Xi_{E,r} = & (\Omega| \cdot |\Omega) && \cdot P(E) \mathbf{1} P(E) \\ & + \frac{1}{2} \left((h| \cdot |\Omega) + (\Omega| \cdot |h) \right) && \cdot P(E) \left(a(g) + a^*(g) \right) P(E) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left((x_j h| \cdot |\Omega) + (\Omega| \cdot |x_j h) \right) && \cdot P(E) \left(a(-ip_j g) + a^*(-ip_j g) \right) P(E) \\ & + \frac{1}{2i} \left((\omega^{-1} h| \cdot |\Omega) - (\Omega| \cdot |\omega^{-1} h) \right) && \cdot P(E) \left(a(i\omega g) + a^*(i\omega g) \right) P(E) \\ & + \left(\dots \clubsuit \dots \right) && \cdot P(E) \left(a(g)^2 + a^*(g)^2 + 2a^*(g)a(g) \right) P(E) \\ & + \dots && \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Die Schreibweise $x_j h$ ist dabei etwas symbolisch und müßte genauer $\omega^{-\frac{1}{2}} x_j \omega^{+\frac{1}{2}} h$ heißen. Das lineare Funktional \clubsuit ist bereits recht kompliziert und deshalb nicht explizit ausgeschrieben.

Intuitiv erkennt man in den Approximationstermen bereits das Punktfeld $\phi(0)$ wieder; in etwas suggestiver Schreibweise lautet die obige Gleichung

$$\begin{aligned} \Xi_{E,r} = & (\Omega| \cdot |\Omega) && \cdot P(E) \mathbf{1} P(E) && (\gamma = 0) \\ & + \frac{1}{2} \left((h| \cdot |\Omega) + (\Omega| \cdot |h) \right) && \cdot P(E) \phi(0) P(E) && (\gamma = 1) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left((x_j h| \cdot |\Omega) + (\Omega| \cdot |x_j h) \right) && \cdot P(E) \partial_j \phi(0) P(E) && (\gamma = 2) \\ & + \frac{1}{2i} \left((\omega^{-1} h| \cdot |\Omega) - (\Omega| \cdot |\omega^{-1} h) \right) && \cdot P(E) \partial_t \phi(0) P(E) && (\gamma = 2) \\ & + \left(\dots \clubsuit \dots \right) && \cdot P(E) : \phi^2 : (0) P(E) && (\gamma = 2) \\ & + \dots && && \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Wir haben hier explizit $\gamma_\nu = \nu - 1$, $N_1 = 1$, $N_2 = 1$, $N_3 = 5$. Die Terme für $\nu > 3$ sind nicht aufgeführt. In der Reihenentwicklung treten neben dem Feld ϕ auch seine räumlichen und zeitlichen Ableitungen sowie das Wickprodukt $:\phi^2:$ auf. Bei den höheren (nicht gezeigten) Termen handelt es sich entsprechend um höhere Ableitungen des Feldes (auch gemischte räumliche und zeitliche) sowie deren Wickprodukte. Zweite oder höhere Zeitableitungen treten allerdings nicht auf - das ist Ausdruck der Feldgleichung (4.4.2).

¹⁶Für $s > 3$ ändert sich eventuell die Reihenfolge der Terme; der Term mit dem Wick-Quadrat des Feldes gehört zu $\gamma = s - 1$, während die Terme mit den ersten Ableitungen $\gamma = 1 + \frac{s-1}{2}$ aufweisen.

Man beachte, daß die hier aufgeschriebenen ersten Terme der Reihenentwicklung mit dem Ergebnis der heuristischen Rechnung in [17] im wesentlichen übereinstimmen; die Form der Funktionale σ_j ist jedoch etwas aufwendiger als dort vermutet.

Die Schreibweise $a^*(g) + a(g) = \phi(0)$ usw., zu verstehen im Sinne quadratischer Formen auf $\bigcup_E (\mathcal{H}_E \times \mathcal{H}_E)$, ist zwar heuristisch unmittelbar einleuchtend; streng genommen bleibt aber noch zu zeigen, daß die aus den ϕ_j nach Integration (Abschnitt 2.5) erhaltenen Wightman-Felder tatsächlich mit dem definierenden Feld $\phi(f)$ und seinen Ableitungen übereinstimmen. Wir führen den Beweis hier für das Feld selbst (2. Term der Entwicklung (4.4.22)); für die Ableitungen und Wickprodukte läßt sich eine analoge Argumentation durchführen. Im folgenden sei wieder $s \geq 3$ beliebig.

Zu zeigen ist die Gleichheit der quadratischen Form $a^*(g) + a(g)$ mit dem Feld $\phi(f)$ nach Ausintegration, und zwar als Operatoren auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$. Es reicht jedoch aus, die Identität auf einer dichten Menge im Sinne von quadratischen Formen nachzuprüfen. Seien also

$$\psi = b_1 \otimes \cdots \otimes b_m \in P(E)\mathcal{H}, \quad \xi = c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \in P(E)\mathcal{H}; \quad (4.4.23)$$

dabei sind $b_j, c_k \in Q(E)\mathcal{K}$. Wir haben zu zeigen, daß

$$\int (\psi | U(x) (a^*(g) + a(g)) U(-x) \xi) f(x) d^{s+1}x = (\psi | \phi(f) \xi). \quad (4.4.24)$$

Schreibt man die rechte Seite nach (4.4.6) als Erzeuger und Vernichter aus, dann reicht es, folgendes nachzuweisen:

$$\int d^{s+1}x f(x) (U(-x)\psi | a^\sharp(g)U(-x)\xi) = (\psi | a^\sharp(\hat{f}) \xi). \quad (4.4.25)$$

Dabei ist a^\sharp entweder a oder a^* ; wir behandeln den Fall $a^\sharp = a^*$, der andere ergibt sich entsprechend. Interessant ist dann nur $m = n + 1$, andernfalls verschwinden beide Seiten von (4.4.25). Man hat nun

$$\begin{aligned} & \int d^{s+1}x f(x) (U(-x)\psi | a^*(g)U(-x)\xi) \\ &= \int d^{s+1}x f(x) (\text{Symm} \otimes_j U_{\mathcal{K}}(-x)b_j | a^*(g) \text{Symm} \otimes_k U_{\mathcal{K}}(-x)c_k) \\ & \stackrel{(4.1.10)}{=} \sqrt{n+1} \int d^{s+1}x f(x) (\text{Symm} \otimes_j U_{\mathcal{K}}(-x)b_j | \text{Symm}(g \otimes \otimes_k U_{\mathcal{K}}(-x)c_k)) \\ &= \sqrt{n+1} \text{Symm} \left(\prod_{j=1}^n \langle b_j | c_j \rangle \cdot \int d^{s+1}x f(x) \int d^s p e^{i(\omega x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \overline{b_{n+1}(\vec{p})} (2\pi)^{-\frac{s}{2}} (2\omega)^{-\frac{1}{2}} \chi_E(\vec{p}) \right). \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Die Symmetrisierung läuft dabei über die Indizes der b_j . Da das Integral über $d^s p$ nur über ein endliches Gebiet läuft und der Integrand auch bezüglich x genügend schnell abfällt (f ist Testfunktion), kann die Integrationsreihenfolge vertauscht werden. Außerdem kann die

Multiplikation mit $\chi_E(\vec{p})$ entfallen, da bereits $b_{n+1} \in Q(E)\mathcal{K}$. Man erhält so

$$\begin{aligned} & \int d^{s+1}x f(x) (U(-x)\psi | a^*(g)U(-x)\xi) \\ &= \sqrt{n+1} \text{Symm} \left(\prod_{j=1}^n \langle b_j | c_j \rangle \cdot \int d^s p \overline{b_{n+1}(\vec{p})} \hat{f}(\vec{p}) \right) \\ &= \sqrt{n+1} \text{Symm} \left(\prod_{j=1}^n \langle b_j | c_j \rangle \cdot \langle b_{n+1} | \hat{f} \rangle \right) = (\psi | a^*(\hat{f}) \xi), \quad (4.4.27) \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{f}(\vec{p}) = (2\omega)^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \int d^{s+1}x f(x) e^{i(\omega x^0 - \vec{p} \vec{x})}. \quad (4.4.28)$$

Damit ist schließlich gezeigt, daß

$$\int d^{s+1}x f(x) U(x) (a^*(g) + a(g)) U(-x) = \phi(f) \quad (4.4.29)$$

im bereits diskutierten Sinne.

4.5 Andere Modelle

Die Analyse der freien Feldtheorie haben wir bisher nur für das reelle skalare Feld in $s \geq 3$ Raumdimensionen vollständig durchgeführt. In diesem Abschnitt wird diskutiert, inwieweit sich die Ergebnisse auch auf andere Modelle übertragen lassen, und welche Umstände einer Rekonstruktion von Punktfeldern in unserem Sinne entgegenstehen können.

Zunächst basieren sowohl die oberen wie die unteren Abschätzungen auf gewissen Eigenschaften des Einteilchenraum der Theorie; wir haben sie nur für das reelle skalare Feld explizit nachgewiesen, aber für beliebige Einteilchenräume ist klar, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, um das Konstruktionsverfahren anwenden zu können. Insbesondere für Theorien, deren Einteilchenraum sich als direkte Summe der Einteilchenräume reeller skalarer Felder darstellen läßt, ist die Verallgemeinerung fast offensichtlich. Wir können auf diese Weise leicht auch Theorien mit

- mehreren (jedoch endlich vielen) Teilchensorten,
- Bosonen von höherem Spin,
- geladenen Teilchen (komplexen Feldern)

behandeln.

Eine subtile Schwierigkeit zeigt sich allerdings im Fall niedriger Raumdimensionen ($s < 3$). Bereits Buchholz und Porrman [8] hatten gesehen, daß das reelle skalare masselose Feld in $s = 2$ Dimensionen gewisse Phasenraumbedingungen nicht erfüllt, und zwar wegen seines schlechten Infrarotverhaltens. Auch im hier verwendeten Konstruktionsverfahren treten diese Schwierigkeiten auf: Gewisse Integrale, etwa (4.2.13) und (4.2.111), divergieren für $s < 3$. Es liegt daher nahe, daß sich zumindest die masselose Theorie in $s \leq 2$ Raumdimensionen nicht mit unserer Methode behandeln läßt.

Auch im massiven 2- oder 1-dimensionalen Fall treten in der Konstruktion die genannten Schwierigkeiten auf, obwohl die in [8] aufgestellte Phasenraumbedingung bei $m > 0$ für alle $s \geq 1$ erfüllt ist. Der Grund liegt darin, daß wir, um skalenunabhängige Entwicklungen der Abbildung Ξ zu erhalten, in Abschätzungen wie (4.2.13) stets den Limes $E \rightarrow \infty$ betrachten. Im Ultraviolettbereich geht die massive Theorie aber in die masselose über, in dem Sinne, daß die gleichen Integralkonvergenzen auftreten.

Man könnte einwenden, daß dies ein Nachteil des verwendeten Konstruktionsverfahrens sei. Zumindest für $s = 1$ aber sind die erwarteten Ergebnisse - unabhängig vom Beweisverfahren - nicht mehr ausreichend: Die Funktion q^+ in Eigenschaft 4.1 wäre bei formal gleichen Ergebnissen nicht mehr strikt positiv (man hat $q^+(\kappa) = |\kappa| + \frac{s-1}{2}$); infolgedessen erhielte man in der Reihenentwicklung (4.2.62) beliebig viele Terme zum Er -Verhalten $\gamma = 0$, nämlich die Wick-Potenzen $:\phi^n:$ des Feldes; die Reihe könnte nicht mehr in der betrachteten Topologie konvergieren.

Außerdem gibt es Verallgemeinerungen des freien Feldes, die einer Rekonstruktion von Punktfeldern aus anderen, intrinsischen Gründen entgegenstehen. So betrachtet Lutz [21] ein Unternetz einer reellen skalaren masselosen Theorie, bei der jedoch die $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$ für kleine r quasi „ausgedünnt“ werden: Man hat¹⁷

$$\mathcal{L}^\pm(\mathcal{O}_r) = \overline{\omega^{\mp\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \right)^{n(r)} \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_r)} \quad (4.5.1)$$

mit einer Funktion $n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$, die für $r \rightarrow 0$ beliebig wächst. In diesem Modell brechen die unteren Abschätzungen aus Abschnitt 4.3 - mangels verfügbarer Funktionen f_j^\pm - zusammen. Tatsächlich ändern sich die oberen Abschätzungen so: Durch partielle Integration in (4.2.9) sieht man, daß der Beitrag von h_κ^\pm in der Einteilchenraumentwicklung verschwindet, falls $\kappa_s < 2n(r)$. Somit entfällt außer dem Anteil des Einsoperators jeder festgehaltene Term $\sigma_\mu \phi_\mu$ in der Reihenentwicklung für $\Xi_{E,r}$, wenn man r genügend klein wählt; man erhält

$$d_k(\Xi, (\Omega | \cdot | \Omega) \mathbf{1}) = 0 \quad \forall k > 0. \quad (4.5.2)$$

Eigenschaft 2.1 ist trivialerweise gegeben. Die spezielle Phasenraumstruktur dieses Netzes führt also zum Fehlen jeglicher nichttrivialer Punktfelder in der Theorie.

Alle bisher betrachteten Modelle waren Theorien freier Bosonen. Die Rekonstruktion fermionischer Felder $\psi(x)$ ist im hier behandelten Rahmen aus prinzipiellen Gründen nicht möglich: Wir betrachten nur Felder, die sich als Grenzwerte observabler Größen darstellen lassen. Nicht-observable Fermifelder können in den Feldkeimen also nicht auftreten; allenfalls wären observable Funktionen der Felder sichtbar, etwa $:\overline{\psi(x)}\gamma^\mu\psi(x):$ im Falle eines Dirac-Feldes. Allerdings sollte es möglich sein, auch fermionische Modelle zu analysieren, indem man statt der Observablenalgebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ die Feldalgebren $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$ betrachtet [4, sec. 5.4.3]. Die Vertauschungsrelationen der so erhaltenen Punktfelder, die ja bisher quasi als Limes der Vertauschungsrelationen in $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ gewonnen wurden, wären dann automatisch z.T. durch Antikommutatorrelationen ersetzt.

¹⁷Die Notation ist gegenüber [21] leicht verändert und unseren Konventionen angepaßt.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Araki: *A Lattice of von Neumann Algebras Associated with the Quantum Theory of a Free Bose Field*, section 6: *Creation and Annihilation Operators*; J. Math. Phys. **4**, 1963, pp. 1351-1353.
- [2] H. Baumgärtel, M. Wollenberg: *Causal Nets of Operator Algebras*; Akademie Verlag, Berlin 1992.
- [3] H. J. Borchers, J. Yngvason: *Positivity of Wightman Functionals and the Existence of Local Nets*; Comm. Math. Phys. **127**, 1990, p. 607.
- [4] O. Bratelli, D. W. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*; Springer, New York 1981.
- [5] D. Buchholz: Unveröffentlichte Arbeit, 1995. (Es handelt sich um die in [17] als Ref. 7 zitierten „unpublished notes“.)
- [6] D. Buchholz, K. Fredenhagen: *Dilations and interactions*; J. Math. Phys. **18**, 1977, p. 1107.
- [7] D. Buchholz, P. Jacobi: *On the Nuclearity Condition for Massless Fields*; Lett. Math. Phys. **13**, 1987, p. 313.
- [8] D. Buchholz, M. Poppmann: *How small is the phase space in quantum field theory?* Ann. Inst. H. Poincaré **52**, 1990, p. 237.
- [9] D. Buchholz, R. Verch: *Scaling Algebras and Renormalization Group in Algebraic Quantum Field Theory*; Rev. Math. Phys. **7**, 1995, p. 1195. *Hier*: Beweis zu Lemma 4.1, p. 1215.
- [10] D. Buchholz, E. H. Wichmann: *Causal Independence and the Energy-Level Density of States in Local Quantum Field Theory*; Comm. Math. Phys. **106**, 1986, p. 321.
- [11] W. Driessler, J. Fröhlich: *The reconstruction of local observable algebras from the Euclidean Green's functions of relativistic quantum field theory*; Ann. Inst. H. Poincaré **27**, 1977, p. 221.
- [12] K. Fredenhagen, J. Hertel: Unveröffentlichte Arbeit, 1979 (in [8] als Ref. 4 zitiert).
- [13] K. Fredenhagen, J. Hertel: *Local Algebras of Observables and Pointlike Localized Fields*; Comm. Math. Phys. **80**, 1981, p. 555.

-
- [14] K. Fredenhagen, M. Jörß: *Conformal Haag-Kastler Nets, Pointlike Localized Fields and the Existence of Operator Product Expansions*; Comm. Math. Phys. **176**, 1996, p. 541.
- [15] R. Haag: *Local Quantum Physics and Models*; Comm. Math. Phys. **155**, 1993, p. 199.
- [16] R. Haag: *Local Quantum Physics*, 2nd edition; Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1996.
- [17] R. Haag, I. Ojima: *On the problem of defining a specific theory within the frame of local quantum physics*; Ann. Inst. H. Poincaré **64**, 1996, p. 385.
- [18] M. Jörß: *The Construction of Pointlike Localized Charged Fields from Conformal Haag-Kastler Nets*; Lett. Math. Phys. **38**, 1996, p. 257.
- [19] R. Jost: *The General Theory of Quantized Fields*; American Mathematical Society, Providence (Rhode Island) 1965.
- [20] H. Kosaki: *On the Continuity of the Map $\varphi \rightarrow |\varphi|$ from the Predual of a W^* -Algebra*; J. Funct. Anal. **59**, 1984, p. 123. *Hier*: Lemma 3, p. 125.
- [21] M. Lutz: *Ein lokales Netz ohne Ultraviolettfixpunkte der Renormierungsgruppe*; Diplomarbeit, Universität Hamburg 1997.
- [22] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*; Academic Press, New York - San Francisco - London 1975.
- [23] J. Rehberg, M. Wollenberg: *Quantum fields as pointlike localized objects*; Math. Nachr. **125**, 1986, p. 259.
- [24] D. W. Robinson: *Support of a field in momentum space*; Helv. Phys. Acta **35**, 1962, p. 403.
- [25] R. F. Streater, A. S. Wightman: *PCT, Spin and Statistics, and All That*; Benjamin, New York 1964.
- [26] M. Wollenberg: *On the relation between quantum fields and local algebras of observables*; Rep. Math. Phys. **22**, 1985, p. 409.

Notationskonventionen

Wir verwenden den Minkowskiraum \mathbb{R}^{s+1} ; Elemente x, p werden als (x^0, \vec{x}) bzw. (p^0, \vec{p}) geschrieben. Das indefinite Skalarprodukt lautet $px = p_\mu x^\mu = p^0 x^0 - \vec{p} \vec{x}$, $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$. Dagegen bezeichnet $\|p\| = ((p^0)^2 + \vec{p}^2)^{\frac{1}{2}}$ die euklidische Norm. Differentialoperatoren sind häufig abgekürzt als

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

wobei die Ableitung ∂_0 nach der Zeitkoordinate auch als ∂_t notiert wird.

Die Fouriertransformation wird mit folgender Vorzeichenkonvention verwendet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^s, d^s x) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^s, d^s p); & f(\vec{x}) &\mapsto \tilde{f}(\vec{p}) = (2\pi)^{-s/2} \int e^{-i\vec{p}\vec{x}} f(\vec{x}) d^s x \\ \mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^s, d^s p) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^s, d^s x); & \tilde{f}(\vec{p}) &\mapsto f(\vec{x}) = (2\pi)^{-s/2} \int e^{+i\vec{p}\vec{x}} \tilde{f}(\vec{p}) d^s p \end{aligned}$$

Um die Notation nicht zu überfrachten, ist im Text die Tilde über der Fouriertransformierten nur selten notiert; manchmal bezeichnet sie auch die Rücktransformierte. Aus dem Zusammenhang und besonders aus der Bezeichnung des Funktionsarguments sollte stets klar sein, ob Orts- oder Impulsraum gemeint ist.

In Kapitel 4 werden an diversen Stellen Multiindex-Schreibweisen angewandt; sie sind in Anhang 4.2.A erläutert.

Die Längen-, Massen- und Energieskalen folgen der Konvention $\hbar = 1, c = 1$.

Im folgenden sind die wichtigsten derjenigen Symbole und Schreibweisen aufgelistet, die mehr als nur „lokal“ im Text verwendet werden. Eingeklammerte Zahlen verweisen auf Gleichungen, solche ohne Klammern auf (Unter-)Abschnitte.

Symbol	Beschreibung	Referenz
$a^*(f), a(f)$	Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator auf \mathcal{H}	(4.1.9)
$\text{ad } P(E)$	$= P(E) \cdot P(E)$ (Adjunktion mit $P(E)$)	
$\mathfrak{A}(\mathcal{O})$	lokale Algebra	1.2
\mathfrak{A}_E	$= P(E)\mathfrak{B}(\mathcal{H})P(E)$	(1.2.12)
$\mathfrak{A}_E(\mathcal{O})$	$= P(E)\mathfrak{A}(\mathcal{O})P(E)$	(1.2.12)
\mathfrak{A}^ν	Feldkeim; $\mathfrak{A}^\nu = \Sigma^{\nu*}$	3.1
$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$	Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf \mathcal{H}	
$d(\cdot, \cdot)$	Pseudometrik auf Θ ; $d = \sum 2^{-k} d_k$	(2.2.13)
$d_k(\cdot, \cdot)$	Pseudometrik auf Θ ; $d_k = d[r^k, k, \rho]$	(2.2.12)
$d[f, k, \rho](\cdot, \cdot)$	Pseudometrik auf Θ	(2.B.2)

\mathcal{D}	gemeinsamer Definitionsbereich der Wightman-Felder	1.3
$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(r)$	komplexwertige Testfunktionen mit Träger in $ \vec{x} < r$	
$\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O})$	reellwertige Testfunktionen mit kompaktem Träger in \mathcal{O}	
\mathcal{F}	Operator der Fouriertransformation	siehe oben
H	Energieoperator (Hamiltonoperator) auf \mathcal{H}	1.2
\mathcal{H}	Hilbertraum; speziell: (symmetrischer) Fockraum	1.2, (4.1.7)
\mathcal{H}_E	$= P(E)\mathcal{H}$	
\mathcal{H}_n	n -Teilchen-Raum	(4.1.6)
\mathcal{H}^0	Raum der Vektoren endlicher Teilchenzahl	(4.1.8)
J	antiunitäre Involution auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ / auf \mathcal{K}	3.2 / 4.1.1
\mathcal{K}	Einteilchenraum	4.1.1
\mathcal{L}	Lorentzgruppe	1.2, Fn. 3
$\mathcal{L}(\mathcal{O}), \mathcal{L}^{\pm}(\mathcal{O})$	„lokale“ Unterräume von \mathcal{K}	4.1.3
\mathcal{M}^n	Menge der n -stelligen Multiindizes	4.2.A
\mathcal{M}^{∞}	Menge der Multiindizes beliebiger Stellenzahl	4.2.A
N_{ν}	Dimension des Zustandskeims Σ^{ν}	Satz 2.2
$\mathcal{N}[\eta, \rho]$	„Nullraum“ in den Halmen von Σ	(3.A.5)
\mathcal{N}_{ν}	$= \mathcal{N}[\eta_{\nu}, \rho_{\nu}]$	(3.1.1)
\mathbb{N}	$= \{1, 2, 3, \dots\}$	
\mathbb{N}_0	$= \{0, 1, 2, \dots\}$	
\mathcal{O}	offenes Gebiet im Minkowskiraum \mathbb{R}^{s+1}	
\mathcal{O}_r	Standard-Doppelkegel mit Mittelpunkt 0 und Radius r	(2.1.1)
p^{ν}	kanonische Projektion auf Σ^{ν}	(3.1.2)
p_E^{ν}	$= p^{\nu} _{\Sigma_E}$	3.1.11
P_{μ}	Impulsoperatoren auf \mathcal{H} ; $P_0 = H$.	1.2
$P(E)$	Spektralprojektor des Hamiltonoperators H	1.2
$P_{\mathcal{L}}^{\pm}(r)$	Projektor auf $\mathcal{L}^{\pm}(\mathcal{O}_r)$	4.1.3
\mathfrak{P}	Poincaré-Gruppe	1.2, Fn. 3
$Q(E)$	Spektralprojektor des Einteilchen-Energieoperators ω	4.1.1
R	$= (1 + H)^{-1}$	2.C
\mathbb{R}^+	$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	
\mathbb{R}_0^+	$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	
s	Zahl der räumlichen Dimensionen	
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Raum der Schwartz'schen Testfunktionen auf \mathbb{R}^n	
$\text{Span}(\dots)$	lineare Hülle einer Menge von Vektoren	
$\text{supp}(f)$	Träger einer Funktion f	
$\text{tr}(A)$	Spur eines Operators A	
$U(\Lambda, x)$	Darsteller der Poincarétransformationen auf \mathcal{H}	(1.2.5)
$U_{\mathcal{K}}(\Lambda, x)$	Darsteller der Poincarétransformationen auf \mathcal{K}	4.1.1
$W(f)$	Weyloperator	(4.1.11)
$Z(x)$	$= \frac{x}{1+x}$ ($x > 0$)	2.B

$\alpha_{\Lambda,x}$	Darsteller der Poincarégruppe auf $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ bzw. $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$	(1.2.4)
$\Delta(\kappa)$	„Delta-Symbol“	4.3.A
η_ν	zu Σ^ν gehörendes r -Verhalten	Satz 2.2
Θ	Raum von Abbildungen $\bigcup_E \Sigma_E \rightarrow \Sigma$	(2.2.2)
Θ_1	Raum von Linearformen auf $\bigcup_E \Sigma_E$	(2.2.4)
Λ	Lorentztransformation, $\Lambda \in \mathcal{L}$	
Ξ	Inklusionsabbildung $\bigcup_E \Sigma_E \hookrightarrow \Sigma$	2.2
$\Xi_{E,r}$	Restriktion von Ξ auf Σ_E und $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)$	(2.1.2)
ρ_ν	zu Σ^ν assoziierte Nullfolge	Satz 2.2
σ_j	Basis der Zustandskeime	Satz 2.2
$\Sigma, \Sigma(\mathcal{O})$	Raum der normalen Funktionale auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ bzw. $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$	1.2
$\Sigma_E, \Sigma_E(\mathcal{O})$	$= P(E)\Sigma P(E)$ bzw. $P(E)\Sigma P(E)[\mathfrak{A}(\mathcal{O})]$	(1.2.11)
Σ^ν	Zustandskeim	(3.1.3)
ϕ_j	Basis der Feldkeime	Satz 2.2
ϕ_j^W	hermitesche Basis der Feldkeime	(3.2.27)
ω	Energieoperator im Einteilchenraum \mathcal{K}	4.1.1
Ω	Vakuumvektor in \mathcal{H}	1.2
$\mathbf{1}$	Einsoperator, Identität	
\square	D'Alembert-Operator; $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \sum_{j=1}^s \partial_j^2$	
Δ	Laplace-Operator; $\Delta = \sum_{j=1}^s \partial_j^2$	
\hookrightarrow	Inklusionsabbildung; allgemeiner: injektive Abbildung	
$\langle \cdot \cdot \rangle$	Skalarprodukt in \mathcal{K}	4.1.1
$(\cdot \cdot)$	Skalarprodukt in \mathcal{H}	4.1.2
$[\cdot, \cdot]$	Kommutator; $[A, B] = AB - BA$	
$(v; v^*)$	Anwendung von $v^* \in V^*$ auf $v \in V$ (V ein top. Vektorraum)	
$\ \cdot \ $	gewöhnliche (Supremums-)Norm eines Operators	
$\ \cdot \ _1$	Spurnorm eines Operators	
$\ \cdot \ _2$	Hilbert-Schmidt-Norm eines Operators	
$\ \cdot \ _{E,r}$	$\ \vartheta\ _{E,r} = \ \vartheta[\Sigma_E, \mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)]\ $ ($\vartheta \in \Theta$)	(2.2.5)
$\ \cdot \ _E$	$\ \vartheta_1\ _E = \ \vartheta_1[\Sigma_E]\ $ ($\vartheta_1 \in \Theta_1$)	(2.2.6)
$\ \cdot \ _r$	$\ \sigma\ _r = \ \sigma[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_r)]\ $ ($\sigma \in \Sigma$)	(2.2.7)

Danksagung

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Buchholz für die interessante Themenstellung, die engagierte Betreuung und seine Geduld in Diskussionen, die oft länger dauerten als erwartet.

Außerdem geht mein Dank an Herrn Prof. Reeh, ohne dessen Vermittlung diese Diplomarbeit nicht zustandegekommen wäre.