GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Fakultät für Physik

Bachelorarbeit

Positivitätsuntersuchung an chiralen superkonformen Korrelationsfunktionen

Positivity analysis of chiral superconformal correlation functions

angefertigt von

Karen Wintersperger

aus Kassel

am Institut für Theoretische Physik

Bearbeitungszeit: 1. Mai 2012 bis 6. August 2012

Erstgutachter/in: Prof. Dr. Karl-Henning Rehren

Zweitgutachter/in: Prof. Dr. Laura Covi

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die 4-Punkt-Korrelationsfunktion von zwei chiralen und antichiralen superkonformen Feldern aus der skalaren Korrelationsfunktion des führenden Feldes im Supermultiplet berechnet. Durch eine Entwicklung in Grassmann-Variablen wird daraus zunächst eine Korrelationsfunktion der Komponentenfelder im Multiplet bestimmt. Dabei handelt es sich um eine gemischte Korrelation von zwei Skalarfeldern. Mit Hilfe von Partialwellenentwicklung wird eine Positivitätsanalyse dieser Funktion und der Korrelationsfunktion des führenden Feldes durchgeführt. Dadurch kann gezeigt werden, dass eine positive Ausgangsfunktion nicht automatisch zu positiven Komponenten-Korrelationen führt, sondern eine deutliche Verschärfung der Positivitätsbedingungen auftritt. Außerdem wurde die Einhaltung der Polbounds für die Korrelationsfunktion von vier Spinorfeldern überprüft.

Abstract

Within this paper the 4-point-function of two chiral and antichiral superconformal fields is computed using the scalar correlation function of the first component in the supermultiplet. An expansion in Grassmann variables allows the calculation of a mixed scalar correlation function of the component fields. A positivity analysis of this function and the output correlation function is undertaken by means of partial wave expansion. Thereby it can be shown that a positive output function does not automatically lead to positive component correlations. Instead there arises a considerable aggravation of the positivity constraints. Furthermore the compliance with the polbounds was checked for the correlation function of four spinor fields.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Quantenfeldtheorie vereinigt die Quantenmechanik mit der speziellen Relativitätstheorie und führt von einer Beschreibung diskreter Teilchen hin zu Feldern mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Als das wichtigste Resultat kann das Standardmodell der Teilchenphysik bezeichnet werden, welches sich in der experimentellen Überprüfung als überaus erfolgreich erwiesen hat. Jedoch gibt es in den Theorien immer wieder mathematische Unstimmigkeiten wie Divergenzen. Als eine neue Herangehensweise entstand daher die axiomatische Quantenfeldtheorie, die das Ziel hat, aus bestimmten Axiomen eine exakte Theorie abzuleiten. Dabei werden oft stark restriktive Annahmen gemacht, um die möglichen Strukturen der Theorie einzuschränken und die Anzahl an freien Parametern zu begrenzen. Dies kann dadurch geschehen, dass man zusätzliche Symmetrien einführt.

Ist eine physikalische Theorie invariant unter einer Symmetrietransformation, dann muss jede physikalische Gleichung mit den transformierten Größen in Abhängigkeit der transformierten Koordinaten genauso aussehen wie die ursprüngliche Gleichung. Aus der Invarianz unter einer bestimmten Symmetrietransformation folgt gemäß dem Noether-Theorem die Existenz von Erhaltungsgrößen, welche die Generatoren der Transformation sind. Die möglichen Symmetrien einer physikalischen Theorie werden durch das *Coleman-Mandula-Theorem* eingeschränkt. Dieses besagt, dass die einzigen Erhaltungsgrößen einer Theorie mit nicht trivialer Streumatrix in mehr als 1+1 Dimensionen, die sich als Tensoren unter der Lorentz-Gruppe transformieren, die Poincaré-Generatoren und skalare interne Ladungen sind (vgl. [Genov] S.13).

Im Folgenden werden zwei mit dem Theorem verträgliche Erweiterungen der Poincaré-Gruppe betrachtet: Die konforme Symmetrie und die Supersymmetrie. Die Quantenfelder einer supersymmetrischen Theorie sind auf einem *Superraum* definiert, lassen sich aber als Multiplets aus Feldern auf dem Minkowskiraum darstellen. Für diese Komponentenfelder wird nun zusätzlich konforme Invarianz gefordert und die Vererbung bestimmter Eigenschaften vom ersten Feld im Super-Multiplet auf die anderen Felder untersucht.

Die Supersymmetrie wird hier als nicht-gebrochen angenommen und die Felder im Multiplet werden im Fall der reinen Super-Poincaré-Symmetrie mit Elementarteilchen assoziiert. Bisher gibt es keine experimentellen Nachweise für die Existenz der SuSy-Teilchen, aber die Supersymmetrie in lokaler Form ist ein Ausgangspunkt für die Vereinheitlichung von Quantenfeldtheorie mit Gravitation: Sie beinhaltet die Umwandlung von Bosonen und Fermionen und stellt weiterführend den Zusammenhang zu String-Theorien her. Somit ist sie theoretisch von zentraler Bedeutung, was die Untersuchung von supersymmetrischen Modellen motiviert.

Leitet man eine Theorie aus Axiomen ab, so muss man anschließend überprüfen, ob sie bestimmte Eigenschaften besitzt, die eine physikalisch sinnvolle Interpretation erlauben. Eine zentrale Bedingung ist dabei die Existenz eines positiv definiten Skalarprodukts auf dem Hilbertraum, um Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Zuständen zu definieren. In der Quantenfeldtheorie betrachtet man Feldstärken $\phi(x)$, die anschaulich Erzeuger- bzw. Vernichterdichten für die korrespondierenden Teilchen sind. Mathematisch stellen die Felder operatorwertige Distributionen dar. Faltet man sie also mit einer geeigneten Testfunktion f, so entsteht ein Operator auf dem Hilbertraum und durch Anwenden auf das Vakuum dann ein Zustand. Ein Ausdruck der folgenden Form entspricht anschaulich einem Zustand mit zwei gleichartigen Teilchen:

$$\int dx_1\ dx_2\ f(x_1, x_2)\phi(x_2)\phi(x_1)|0\rangle$$

Damit das Skalarprodukt zwischen solchen Zuständen positiv definit ist, muss folgende Relation für die Felder gelten:

$$0 \leq \int\int \bar{f}(x_1, x_2) f(x_3, x_4)\langle 0|\phi^\dagger(x_2)\phi^\dagger(x_1)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle.$$

Der Vakuumerwartungswert der Felder wird als Korrelationsfunktion bezeichnet. Da die Testfunktion f beliebig ist, folgen aus der obigen Ungleichung Bedingungen an die Korrelationsfunktion. Diese Eigenschaft nennt man *Hilbertraum-Positivität*.

In dieser Arbeit wird die Positivität von Korrelationsfunktionen für Felder in einem Supermultiplet untersucht. Die Basis hierfür bildet eine von Holger Knuth im Rahmen seiner Dissertation ([Knu12]) entwickelte Formel - die sogenannte *chirale Ward-Identität*, mit der aus der Korrelationsfunktion des ersten Feldes im Multiplet direkt die Korrelationsfunktionen der anderen Felder berechnet werden können.

Die zentrale Frage ist nun, ob die Positivität dieser Komponenten-Korrelationen automatisch gegeben ist, wenn die Korrelationsfunktion des führenden Feldes die Positivitätsbedingung erfüllt.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 werden die verschiedenen Symmetrien vorgestellt und die konforme Korrelationsfunktion des Ausgangsfeldes bestimmt. Auf diese wird dann im nächsten Teil die chirale Ward-Identität angewendet und daraus die wichtigste Komponenten-Korrelation berechnet. Deren Analyse sowie die Prüfung einer weiteren Korrelationsfunktion erfolgt in Kapitel 4. Schließlich werden in Teil 5 die Ergebnisse nochmals zusammengefasst.

2 Grundlagen

2.1 Symmetrietransformationen

Die Symmetrietransformationen werden durch unitäre Operatoren $\hat{\mathrm{U}}$ auf dem Hilbertraum dargestellt, die Generatoren sind Observablen, also hermitesche Operatoren. Im Folgenden wird die adjungierte Wirkung dieser Darstellung auf die Felder $\phi_A(x)$ betrachtet. Da die Quantenfelder operatorwertige Distributionen sind, transformieren sie sich wie ein Operator auf dem Hilbertraum:

$$\phi'(x') = \hat{\mathrm{U}}\ \phi(x)\ \hat{\mathrm{U}}^\dagger.$$

Mathematisch bilden die Symmetrietransformationen eine Gruppe. Die betrachteten Transformationen sind allesamt kontinuierliche Symmetrien und die Generatoren können als Ableitungen der Transformationen nach dem Parameter in der Nähe der Identität definiert werden. Im Falle der Poincaré-Gruppe und auch der konformen Gruppe bilden die Generatoren eine Lie-Algebra. Liegt nun eine bestimmte Symmetrie vor, so sind die Generatoren Erhaltungsgrößen und den Feldern werden entsprechende Quantenzahlen zugeordnet. Die Werte der Quantenzahlen charakterisieren die verschiedenen Darstellungen der Symmetriegruppe bzw. ihrer Lie-Algebra, unter denen sich die Felder transformieren.

2.2 Poincaré-Symmetrie

Die Poincaré-Gruppe setzt sich aus Lorentztransformationen und Raumzeittranslationen zusammen.

2.2.1 Lorentzgruppe

Lie-Algebra

Allgemeine Lorentztransformationen sind definiert als die Transformationen Λ^{μ}_{ν}, welche die Metrik im Minkowskiraum invariant lassen. Hier wird die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe SO(3,1) betrachtet und im Folgenden kurz als Lorentzgruppe bezeichnet. Die Lie-Algebra der Lorentzgruppe besteht aus dem Drehimpulsvektor **J** und dem Vektor **G** der Boost-Generatoren, die sich kompakt zu einem antisymmetrischen Tensor $M^{\mu\nu}$ zusammenfassen lassen:

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \qquad G_i = M^{io}.$$

Analog werden auch die Parameter der Transformation als Einträge eines antisymmetrischen Tensors $\omega_{\mu\nu}$ geschrieben, sodass $\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}$ für die Transformationen gilt. In dieser Schreibweise lauten die Kommutatorrelationen:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\,(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}). \tag{2.1}$$

Transformation der Felder

Da die Lie-Algebra als Ableitung in der Nähe der Identität definiert ist, betrachtet man infinitesimale Transformationen $\hat{\mathrm{U}}(1+\delta\omega)$. Die Wirkung einer infinitesimalen Transformation auf ein Feld wird durch den Kommutator mit dem Generator vermittelt:

$$\hat{\mathrm{U}}(1+\delta\omega)\ \phi_A(x)\ \hat{\mathrm{U}}^{\dagger}(1+\delta\omega) = \phi_A(x) + \frac{i}{2}(\delta\omega)_{\mu\nu}[M^{\mu\nu}, \phi_A(x)] + \mathcal{O}((\delta\omega)^2).$$

Der gesamte Hilbertraum ist das Tensorprodukt aus dem unendlich dimensionalen Funktionenraum $L^2(S)$ als Eigenraum der Impulszustände und einem endlichdimensionalen Raum, welcher eine irreduzible Darstellung der Lorentzgruppe trägt. Die allgemeine Form für den Kommutator der Generatoren mit einem Feld $\phi_A(x)$ findet man dann, indem man das infinitesimal transformierte Feld nach dem kleinen Parameter ableitet und diesen gleich null setzt. Dabei bezeichnet $(\mathrm{S}^{\mu\nu})_A^B$ die Darstellung der Lorentzgeneratoren auf dem Spinraum und $\mathcal{L}^{\mu\nu} = (x^{\nu}\partial^{\mu} - x^{\mu}\partial^{\nu})$ die auf dem Funktionenraum.

$$[M^{\mu\nu}, \phi_A(x)] = \mathcal{L}^{\mu\nu}\phi_A(x) + (\mathrm{S}^{\mu\nu})_A^B\ \phi_B(x) \tag{2.2}$$

2.2.2 Endlichdimensionale irreduzible Darstellungen der Lorentzgruppe

Die Lie-Algebra der Lorentzgruppe kann in eine Summe aus zwei SU(2)-Algebren zerlegt werden, wenn man die neuen Generatoren N_i und $N_i^\dagger$ einführt:

$$J_i = N_i + N_i^\dagger \qquad G_i = i(N_i - N_i^\dagger).$$

Somit wird jede Darstellung der Lorentz-Algebra durch zwei halb- oder ganzzahlige Parameter (n, n') beschrieben und ihre Dimension beträgt $(2n+1)\cdot(2n'+1)$.
Die möglichen Werte s für den Spin können durch Drehimpuls-Addition bestimmt werden: $s = n + n',\ n + n' - 1,\ ...,\ |n - n'|$.

Skalare

Der Fall $n = 0,\ n' = 0$ ergibt die triviale Darstellung $\hat{\mathrm{U}}(\Lambda) = \mathbb{I}$. Ein Skalarfeld beschreibt also Teilchen mit Spin 0 und transformiert sich folgendermaßen:

$$[M^{\mu\nu}, \varphi(x)] = \mathcal{L}^{\mu\nu}\varphi(x).$$

Linkshändige Weyl-Spinoren

Die Darstellung $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ beschreibt linkshändige Weyl-Spinoren, also Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, und entspricht der natürlichen Darstellung der SU(2) als unitäre 2×2-Matrizen auf dem $\mathbb{C}^2$. Die Lie-Algebra wird von Vielfachen der drei Pauli-Matrizen σ_i gebildet, für die Lorentzgeneratoren gilt also: $J_i = N_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ und $G_i = iN_i = i\frac{1}{2}\sigma_i$. Der Generator-Tensor und die infinitesimale Lorentztransformation lauten dementsprechend:

$$(\mathrm{S}_\mathrm{L}^{\mu\nu})_b^{\ a} := \frac{i}{4}(\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu)_b^{\ a} \qquad L_b^{\ a} := \delta_b^{\ a} + \frac{i}{2}(\delta\omega)_{\mu\nu}(\mathrm{S}_\mathrm{L}^{\mu\nu})_b^{\ a}.$$

Mit $(\sigma^\mu) := (\mathbb{I}_2, \boldsymbol{\sigma})$, $(\tilde{\sigma}^\mu) := (\mathbb{I}_2, -\boldsymbol{\sigma})$. Der Raum der linkshändigen Spinoren ist der $\mathbb{C}^2$ mit einer schiefsymmetrischen Metrik ε_{ab}, welche unter der Wirkung der $L_b^{\ a}$ invariant ist. Das Vorzeichen der Matrix kann dabei beliebig gewählt werden. In Anlehnung an [Knu12] wurde folgende Konvention verwendet:

$$(\varepsilon_{ab}) = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon^{ab}) = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beim Herauf- und Herunterziehen von Spinor-Indices wird immer der hintere Index von ε kontrahiert: $\psi_a = \varepsilon_{ab}\ \psi^b$. Eine indexfreie Schreibweise wird definiert als:

$$(\psi\phi) := \psi^a\ \phi_a = -\psi_a\ \phi^a = \phi^a\ \psi_a = (\phi\psi).$$

Rechtshändige Weyl-Spinoren

Rechtshändige Spinoren transformieren sich in der $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-Darstellung und beschreiben ebenfalls Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$. Gemäß der Definition der N_i ist diese hermitesch konjugiert zur $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$-Darstellung, also gilt $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ und $G_i = -i\frac{1}{2}\sigma_i$. Der Darstellungsraum ist wieder der $\mathbb{C}^2$, aber mit den konjugierten Spinoren:

$$\bar{\psi}_{\dot{a}} := (\psi_a)^\dagger.$$

Der rechtshändige Generator-Tensor und die Lorentztransformationen lauten damit

$$(\mathrm{S}_\mathrm{R}^{\mu\nu})^{\dot{a}}_{\dot{b}} = -\frac{i}{4}(\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{a}}_{\dot{b}} \qquad (\mathrm{S}_\mathrm{R}^{\mu\nu})^{\dot{a}}_{\dot{b}} = -((\mathrm{S}_\mathrm{L}^{\mu\nu})^{a}_{b})^* \qquad R^{\dot{a}}_{\dot{b}} = \delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} + \frac{i}{2}(\delta\omega)_{\mu\nu}(\mathrm{S}_\mathrm{R}^{\mu\nu})^{\dot{a}}_{\dot{b}}.$$

Da die Einträge von ε reell sind, besitzt der konjugierte Darstellungsraum dieselbe Metrik, also gilt

$$\bar{\varepsilon}_{\dot{a}\dot{b}} = \varepsilon_{ab} \qquad \bar{\varepsilon}^{\dot{a}\dot{b}} = \varepsilon^{ab}.$$

Das Heben und Senken der Indices funktioniert somit genauso wie bei den ungepunkteten Spinoren, nur die indexfreie Schreibweise wird umgekehrt definiert:

$$(\bar{\psi}\bar{\phi}) := \bar{\psi}_{\dot{a}}\ \bar{\phi}^{\dot{a}} = -\bar{\psi}^{\dot{a}}\bar{\phi}_{\dot{a}} = \bar{\phi}_{\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}} = (\bar{\phi}\bar{\psi}).$$

Vektoren

Die bereits bekannte Darstellung der Lorentztransformationen auf dem Minkowskiraum findet sich in dieser Klassifizierung als $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$-Darstellung wieder. Der Darstellungsraum ist also das Tensorprodukt aus links- und rechtshändigen Spinoren, was als hermitesche 2×2 Matrizen $A_{a\dot{a}}$ geschrieben werden kann. Diese Matrizen bilden einen vierdimensionalen reellen Vektorraum mit den Pauli-Matrizen σ^μ als Basis. Der Matrix-Vektorraum ist isomorph zum Minkowskiraum, sodass jedem Vektorfeld $v^\mu(x)$ ein Spinor-Tensor-Feld zugeordnet werden kann: $A_{a\dot{a}}(x) = \sigma^\mu_{a\dot{a}} v_\mu(x)$.

Für die Lorentztransformationen muss demnach gelten:

$$A'_{a\dot{a}} = L_a^b \; R_{\dot{a}}^{\dot{b}} \; A_{b\dot{b}} = L_a^b \; R_{\dot{a}}^{\dot{b}} \; \sigma^\nu_{b\dot{b}} v_\nu \stackrel{!}{=} \sigma^\mu_{a\dot{a}} v'_\mu = \sigma^\mu_{a\dot{a}} (\Lambda^{-1})_\mu^{\ \nu} v_\nu \quad \Rightarrow \quad \Lambda_\nu^\rho \; L_a^b \; R_{\dot{a}}^{\dot{b}} \; \sigma^\nu_{b\dot{b}} = \sigma^\rho_{a\dot{a}}.$$

Somit ist $\sigma^\mu_{a\dot{a}}$ genau wie ε_{ab} und $\bar{\varepsilon}_{\dot{a}\dot{b}}$ invariant unter Lorentztransformation aller Indices und gibt die Möglichkeit, Spinor- und Vektor-Indices zu verbinden sowie gepunktete und ungepunktete Spinor-Indices ineinander umzuwandeln. Die bekannten Lorentzgeneratoren können als Tensor umgeschrieben werden mit:

$$(\mathrm{S}_\mathrm{V}^{\mu\nu})^\rho_\tau = \frac{1}{i}(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\tau - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\tau) \qquad \Lambda^\rho_\tau = \delta^\rho_\tau + \frac{i}{2}(\delta\omega)_{\mu\nu}(\mathrm{S}_\mathrm{V}^{\mu\nu})^\rho_\tau. \tag{2.3}$$

2.2.3 Poincaré-Transformationen

Der Generator der Raumzeittranslationen ist der Viererimpuls P_μ. Da die Translationsgruppe abelsch ist, verschwindet sein Kommutator:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \tag{2.4}$$

Der Kommutator mit den Lorentzgeneratoren folgt aus der Tatsache, dass P_μ ein Vierervektor ist, sich also in der Vektordarstellung der Lorentzgruppe transformiert.

$$[M_{\kappa\lambda}, P_\mu] = (\mathrm{S}^\mathrm{V}_{\kappa\lambda})^\rho_\mu P_\rho = i(\eta_{\kappa\mu}P_\lambda - \eta_{\lambda\mu}P_\kappa) \tag{2.5}$$

Die Poincaré-Algebra ist durch die Gl. 2.1, 2.4 und 2.5 vollständig charakterisiert. Der Impulsoperator besitzt nur eine Darstellung als Differentialoperator auf dem Funktionenraum, da die Translation der Felder unabhängig von ihrem Lorentz-Index ist:

$$[P_\mu, \phi_A(x)] = -i\,\partial_\mu \phi_A(x). \tag{2.6}$$

2.3 Konforme Symmetrie

Die erste betrachtete Erweiterung der Poincaré-Gruppe ist die konforme Gruppe, welche zwar weitere Generatoren mit Vierervektor-Indices besitzt, aber unter anderem Skalentransformationen mit einschließt. Für ein skaleninvariantes System kann eine Streumtarix nicht sinnvoll definiert werden (vgl. [Genov] S.35), sodass kein Widerspruch zum Coleman-Mandula-Theorem vorliegt.

2.3.1 Konforme Koordinatentransformationen und Lie-Algebra

Die konformen Koordinatentransformationen sind definiert als Transformationen, die die Minkowski-Metrik nur um einen Skalenfaktor verändern dürfen, also nicht mehr Längen und Winkel, sondern nur noch Winkel erhalten. Die Poincaré-Gruppe wird um Dilationen, also Skalentransformationen mit dem Parameter λ, und sogenannte spezielle konforme Transformationen mit dem Parameter b^μ ergänzt. Letztere können als Konjugation $I \circ T \circ I$ einer Translation T mit zwei Inversionen I gesehen werden. Die Dilationen werden vom skalaren Operator D generiert, die speziellen konformen Transformationen vom Vektor K_μ. Damit ergeben sich direkt die Kommutatorrelationen mit dem Lorentzgenerator:

$$\begin{aligned} [M_{\kappa\lambda}, K_\mu] &= i(\eta_{\kappa\mu} K_\lambda - \eta_{\lambda\mu} K_\kappa) \\ [M_{\kappa\lambda}, D] &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die übrigen Kommutatoren der konformen Algebra kann man durch die Kombination von jeweils zwei infinitesimalen Transformationen ableiten, was zu folgenden Relationen führt (vgl. [Knu12] S. 112):

$$\begin{aligned} [P_\mu, K_\nu] &= 2i(M_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} D) \\ [D, P_\mu] &= -i P_\mu \\ [D, K_\mu] &= i K_\mu \\ [K_\mu, K_\nu] &= 0 = [D, D]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3.2 Transformation der Felder

Die konforme Gruppe besitzt eine Untergruppe, die den Punkt $x = 0$ invariant lässt und von $M_{\mu\nu}, K_\mu$ und D generiert wird. Wirkt diese Untergruppe auf Felder $\phi_A(x = 0)$, wird deren Argument also nicht verändert. Die entsprechenden Kommutatorrelationen mit $M_{\mu\nu}$ und D spiegeln die Quantenzahlen wider, mit denen die Felder unabhängig von ihrem Argument x charakterisiert werden:

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, \phi_A(0)] &= (\mathrm{S}^{\mu\nu})_A^{\ B}\, \phi_B(0) \\ [D, \phi_A(0)] &= -i\, d\, \phi_A(0) \\ [K_\mu, \phi_A(0)] &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dies sind zum einen der Spin, welcher den Lorentz-Index A des Feldes bestimmt, und zusätzlich nun die Skalendimension d, die das Verhalten unter Dilationen beschreibt:

$$\phi'_A(x) = \lambda^d \phi_A(\lambda x).$$

Um die Wirkung der drei Generatoren auf die Felder an einem beliebigen Raumzeitpunkt x untersuchen, führt man eine Translation durch und wendet die Kommutatorrelationen aller Generatoren mit P_μ an. Dies ergibt dann die folgenden Feld-Transformationen:

$$\begin{aligned}[D,\, \phi_A(x)] &= -i\,(d + x^\mu \partial_\mu)\phi_A(x) \\ [K_\mu,\, \phi_A(x)] &= i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - 2d x_\mu)\phi_A(x) + 2x^\nu (\mathrm{S}_{\mu\nu})_A^{\ B}\, \phi_B(x).\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3.3 Mögliche Darstellungen der konformen Gruppe

Die möglichen Werte für die beiden Quantenzahlen werden für die konforme Symmetrie durch den sogenannten *Unitaritätsbound* festgelegt. Auf dem Hilbertraum wird die konforme Gruppe durch unitäre Transformationen dargestellt. Unter der Annahme positiver Energie ($P^0 \geq 0$) kann man vier verschiedenene Arten von Darstellungen ableiten, bei denen jeweils andere Zusammenhänge zwischen Skalendimension und Spin vorliegen (siehe [Ma77] S.1, 11 f):

- $d \geq j_1 + j_2 + 2$ falls $j_1, j_2 \neq 0$
- $d \geq j_1 + 1$ falls $j_2 = 0$
- $d \geq j_2 + 1$ falls $j_1 = 0$
- $d = 0$ oder $d \geq 1$ falls $j_1 = 0 = j_2$.

Im letzten Fall entspricht $d = 0$ dem trivialen Feld $\phi = \mathbb{I}$ und $d = 1$ dem masselosen Skalarfeld. Man kann auch in der konformen Symmetrie die Felder zu Multiplets zusammenfassen, die durch feste Werte j_1 und j_2 und eine aufsteigende Skalendimension charakterisiert werden. Durch Anwenden der Generatoren K_μ und P_μ erzeugt man ein Feld $\delta\phi$ mit einer um 1 erhöhten bzw. verringerten Skalendimension. Dies folgt direkt aus der Jacobi-Identität von $\phi(x), D$ und P_μ bzw. K_μ, wenn man $\phi' = \phi + \delta\phi$ für die infinitesimale Transformation definiert.

Das Feld mit niedrigster Skalendimension heißt *quasiprimär* und wird in der Wirkung der oben genannten Stabilisatorgruppe für $x = 0$ betrachtet, was man daran sieht, dass der Kommutator von K_μ mit $\phi_A(0)$ verschwindet.

2.4 Supersymmetrie

Die zweite Erweiterung der Poincaré-Gruppe ist die Supersymmetrie, welche mit dem Coleman-Mandula-Theorem verträglich ist, da die zusätzlichen Generatoren Spinor-Indices besitzen, über die im Theorem keine Aussage getroffen wird. Hier wird die Supersymmetrie ohne zentrale Ladung betrachtet, also mit den zwei neuen Generatoren Q_a und $\bar{Q}_{\dot{a}}$.

2.4.1 Generatoren und Supermultiplets

Die Algebra der Supertransformationen ist eine graduierte Lie-Algebra, die aus der Poincaré-Algebra und den Spinor-Generatoren $Q_a, \bar{Q}_{\dot{a}}$ besteht. Diese transformieren sich also in der links- bzw. rechtshändigen Spinordarstellung der Lorentzgruppe, was die ersten beiden Kommutatorrelationen der Super-Algebra ergibt:

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, Q^a] &= \frac{i}{4} Q^b (\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu)_b^{\ a} \\ [M^{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{a}}] &= -\frac{i}{4} (\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{a}}_{\ \dot{b}} \bar{Q}^{\dot{b}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Aus der Graduierung, der Supersymmetrie und der verallgemeinerten Jacobi-Identität als Merkmale der graduierten Lie-Algebra folgen die übrigen Relationen zwischen den Generatoren. Dabei werden die Spinoren untereinander mit Antikommutatoren und mit dem Viererimpuls über Kommutatoren verknüpft (vgl. [Knu12] S. 111):

$$\begin{aligned} [P_\mu, Q_a] &= [P_\mu, \bar{Q}^{\dot{a}}] = 0 \\ \{Q_a, Q_b\} &= \{\bar{Q}^{\dot{a}} \bar{Q}^{\dot{b}}\} = 0 \\ \{Q_a \bar{Q}_{\dot{b}}\} &= 2\, \sigma^\mu_{a\dot{b}} P_\mu. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Die Darstellungen der Supergeneratoren werden über die Masse und den Superspin Y^μ charakterisiert.

$$Y^\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} P^\nu M^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} Q \sigma^\mu \bar{Q}$$

Der endlichdimensionale Teil der Hilbertraums trägt also eine irreduzible Darstellung von Y^μ und wird von Multiplets aus Feldern gebildet. Die Wirkung der Spinor-Generatoren entspricht der von fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, da sie ebenfalls durch Antikommutatorrelationen verknüpft werden.
Die Struktur der Multiplets ist die folgende: Für einen Wert y gibt es $2y+1$ Felder zu den entsprechenden Eigenwerten von Y_3, jeder von ihnen wird durch Anwenden von Q_a ausgelöscht und der korrespondierende Zustand als *Clifford-Vakuum* $|\Omega\rangle$ bezeichnet. Durch Anwenden von $\bar{Q}_{\dot{a}}$ erhält man aus jedem dieser Felder drei weitere, da $\bar{Q}_{\dot{a}}$ mit sich selbst antikommutiert, man also maximal vier verschiedene Kombinationen der Komponenten bilden kann. Durch Anwenden der Super-Algebra kann man zeigen, dass diese vier Felder zu verschiedenen Eigenwerten des "normalen" Spin gehören. Der Eigenwert von S_3 wird im Multiplet um $\Delta s_3 = 0, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ verändert.

2.4.2 Superfelder

Transformationen auf dem Superraum

Durch die Existenz spinorieller Generatoren müssen auch die Parameter der entsprechenden Transformationen Spinor-Indices besitzen, da die Transformation insgesamt ein Lorentzskalar ist. Der Minkowskiraum wird also um Spinor-Koordinaten $\theta_a, \bar{\theta}^{\dot{a}}$ zum *Superraum* erweitert, deren Einträge Grassmann-Zahlen sind, also miteinander antikommutieren.
Die Superfelder $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ sind als Funktionen auf dem Superraum definiert und per Definition Lorentzskalare. Zu jedem der oben beschriebenen Multiplets gehört ein Superfeld, diese werden dann als skalare oder Vektor-Superfelder bezeichnet, je nachdem welchen Wert y besitzt. Für die Darstellung der Supergeneratoren kann man wieder eine infinitesimale Transformation ausführen und nach den Parametern entwickeln, dabei erhält man die Spinorgeneratoren als Differentialoperatoren in $\theta_a, \bar{\theta}^{\dot{a}}$ und x^μ.

Entwicklung der Superfelder

Die Grassmann-Zahlen antikommutieren miteinander, insbesondere also mit sich selbst. Dadurch ist die höchste Potenz, die aus ihnen gebildet werden kann $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$. Somit können die Superfelder in Potenzen der θ und $\bar{\theta}$ entwickelt werden. Die Entwicklungskoeffizienten sind Felder auf dem Minkowskiraum mit passenden Lorentz-Indices.

Unter einer infinitesimalen Supertransformation, generiert von Q und $\bar{Q}$, wird nun jedes Komponentenfeld auf andere Komponentenfelder abgebildet, also anschaulich z.B. ein Spin-0-Teilchen in ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen umgewandelt. Dies entspricht genau dem Auf- und Absteigen in den Multiplets. Das neue Feld $\delta\phi(x)$, das bei der Transformation von $\phi(x)$ entsteht, ist definiert als der gesamte Koeffizient vor der jeweiligen Potenz von θ und $\bar{\theta}$, die in der Entwicklung des Superfeldes hinter $\phi(x)$ steht.

2.4.3 Chirale und Antichirale Superfelder

Im Folgenden werden chirale und antichirale Superfelder betrachtet. Diese beschreiben die irreduziblen Darstellungen der Supergruppe mit $y = 0$, sind also skalare Superfelder. Auf dem Superraum kann man kovariante Ableitungen $D_a, \bar{D}_{\dot{a}}$ definieren, die sich im Gegensatz zu den reinen Spinorableitungen kovariant unter Spinor-Lorentztransformationen verhalten.

$$\begin{aligned} D_a &= \frac{\partial}{\partial\theta^a} - i\sigma^\mu_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \bar{D}_{\dot{a}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{a}}} + i\theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

Chirale und antichirale Superfelder sind nun definiert durch:

$$\bar{D}_{\dot{a}}\Phi = 0 \qquad D_a\Phi^\dagger = 0.$$

Um diese Bedingungen zu vereinfachen, führt man chirale und antichirale Koordinaten $y^\mu, \bar{y}^\mu$ ein:

$$\begin{aligned} y^\mu &= x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\ \bar{y}^\mu &= x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

In diesen Koordinaten nimmt dann die jeweils benötigte kovariante Ableitung eine einfache Gestalt an, so dass man direkte Folgerungen für die Felder erhält:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{a}}(y,\theta,\bar{\theta})\Phi &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{a}}}\Phi = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \Phi = \Phi(y,\theta) \\ D_a(\bar{y},\theta,\bar{\theta})\Phi^\dagger &= \frac{\partial}{\partial\theta^a}\Phi^\dagger = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \Phi^\dagger = \Phi^\dagger(\bar{y},\bar{\theta}). \end{aligned}$$

Dies führt zu einer deutlich vereinfachten Entwicklung der Felder in den Grassmann-Spinoren, da entweder θ oder $\bar{\theta}$ vorkommt und jeweils nur drei verschiedene Potenzen möglich sind.

$$\begin{aligned} \Phi(y,\theta) &= \varphi(y) + \sqrt{2}\theta^a\psi_a(y) + \theta^a\theta_a m(y) \\ \Phi^\dagger(\bar{y},\bar{\theta}) &= \varphi^*(\bar{y}) - \sqrt{2}\bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}}(\bar{y}) - \bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}} m^*(\bar{y}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Man erhält also als Komponenten zwei komplexe Skalarfelder und ein links- bzw. rechtshändiges Spinorfeld. Dies spiegelt die oben beschriebene Struktur der Multiplets für $y = 0$ wider, da sich als S_3-Komponenten $0, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ ergeben würden. Um die Darstellung in normalen Superkoordinaten zu erhalten, kann man die Definition der chiralen und antichiralen Koordinaten einsetzen und jedes Komponentenfeld wie folgt in θ und $\bar{\theta}$ entwickeln:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) - i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\ \partial_\nu f(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\ \partial_\nu\partial^\nu f(x) \\ f(\bar{y}) &= f(x) + i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\ \partial_\nu f(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\ \partial_\nu\partial^\nu f(x). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Somit enthalten das chirale und antichirale Multiplet auch in Superkoordinaten nur drei unabhängige Felder, da alle weiteren Komponenten Ableitungen von diesen sind. Die abgeleiteten Felder besitzen die gleiche Spin-Quantenzahl und die erwähnte Struktur der S_3-Komponenten bleibt auch für die Komponentenfelder auf dem Minkowskiraum erhalten.

2.5 Superkonforme Symmetrie

Analog zur konformen Symmetrie sind die superkonformen Transformationen darüber definiert, dass sie das Längenelement im Superraum nur um einen Skalenfaktor ändern. Die im letzten Abschnitt vorgestellte Super-Poincaré-Symmetrie wird also um supersymmetrische Versionen der konformen Transformationen erweitert.

2.5.1 Superkonforme Transformationen und Algebra

Die Super-Poincaré-Transformationen bestehen aus den bereits vorgestellten Super-Translationen, die von P_μ und den $Q^a, \bar{Q}^{\dot{a}}$ generiert werden, sowie den Super-Lorentztransformationen mit dem bekanten Generator $M_{\mu\nu}$.

Diese wirken auf den Raumzeit-Koordinaten x^μ in der Vektordarstellung, auf den Grassmann-Spinoren aber nur mit einer reduzierten Variante der Spinor-Darstellung. Die superkonformen Transformationen beinhalten zusätzlich dazu Superdilationen und spezielle superkonforme Transformationen. Diese werden analog zu den Super-Translationen vom Vektor K_μ und zwei weiteren spinoriellen Generatoren $S^a, \bar{S}^{\dot{a}}$ erzeugt und besitzen demnach einen reellen und zwei Spinor-Parameter. Die Superdilationen lassen sich in ein Produkt aus normalen Dilationen und sogenannten R-Symmetrie-Transformationen zerlegen, welche die Skalierung mit einem Phasenfaktor beschreiben. Die entsprechende Quantenzahl wird R-Ladung κ genannt und der Generator R addiert sich mit D zum Gesamt-Generator der Superdilationen. Durch die Kombination infinitesimaler Transformationen kann man analog zur konformen Gruppe die superkonformen Algebra herleiten.

2.5.2 Beschreibung der Felder

Wirkung der Generatoren auf die Komponentenfelder

Da die Darstellung der superkonformen Transformationen auf dem Superraum sehr aufwändig ist und für die späteren Berechnungen nicht benötigt wird, betrachtet man hier direkt die Wirkung der Generatoren auf die Komponentenfelder und nicht auf das gesamte Superfeld. Dafür geht man ähnlich vor wie im Fall der konformen Symmetrie: Die Generatoren $M_{\mu\nu}, K_\mu, R$ und D lassen den Punkt $x = 0$ invariant und mischen die verschiedenen Komponentenfelder nicht miteinander. Die Wirkung von $M_{\mu\nu}, R$ und D auf das erste Feld im Multiplet an der Stelle $x = 0$ ist festgelegt durch die Quantenzahlen Spin, R-Ladung und Skalendimension. Man erhält also die gleichen Kommutatorrelationen wie in Gl. 2.9, die noch um die Wirkung des R-Symmetrie-Generators ergänzt werden:

$$[R, \phi_A(0)] = -i\,\kappa\,\phi_A(0). \tag{2.16}$$

Der Kommutator mit K_μ verschwindet wieder, da man ein quasiprimäres Feld betrachtet. Durch Anwenden der Generatoren Q und $\bar{Q}$ erhält man dann die Kommutatoren für die weiteren Felder im Multiplet an der Stelle $x = 0$ als $\delta\phi$ einer infinitesimalen Transformation. Dabei muss man beachten, dass die Wirkung der spinoriellen Generatoren auf Spinorfelder über den Antikommutator beschrieben wird, da ψ_a mit den Spinor-Parametern η_a der Supertranslation antikommutiert. Anschließend führt man eine Translation durch, um die Transformation der Felder für einen allgemeinen Raumzeitpunkt x zu erhalten. Das Verhalten der Felder wird also durch die Relationen der konformen Algebra zwischen $P_\mu, Q, \bar{Q}$ und den vier betrachteten Generatoren bestimmt.

Struktur der Multiplets

Die superkonformen Multiplets enthalten die gleichen Felder wie im Fall der Super-Poincaré-Symmetrie. Allerdings fungieren die Generatoren S und $\bar{S}$ der speziellen superkonformen Transformationen ebenfalls als Auf- und Absteige-Operatoren, wobei ihr Verhalten umgekehrt zu dem der Q ist. Im chiralen Multiplet steigt man mit $\bar{Q}$ oder S auf und mit Q oder $\bar{S}$ ab, beim antichiralen Multiplet genau anders herum. Dabei wird das Feld vor der 0. Ordnung in den Grassmann-Variablen als erstes Feld im Multiplet angenommen.
Neben dem Spin werden die Felder nun außerdem durch die Skalendimension und die R-Ladung gekennzeichnet. Diese werden von Q und $\bar{Q}$ bzw. S und $\bar{S}$, P_μ und K_μ verändert, besitzen also für die verschiedenen Felder in einem Multiplet unterschiedliche Werte. Für das chirale und antichirale Multiplet erhöhen sich die Skalendimension und R-Ladung der Komponentenfelder folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\varphi(x): &\quad \Delta d = 0 \quad \Delta\kappa = 0 & \qquad \varphi^*(x): &\quad \Delta d = 0 \quad \Delta\kappa = 0 \\
\psi_a(x): &\quad \Delta d = \frac{1}{2} \quad \Delta\kappa = \frac{1}{2} & \qquad \bar{\psi}^{\dot{a}}(x): &\quad \Delta d = \frac{1}{2} \quad \Delta\kappa = -\frac{1}{2} \\
m(x): &\quad \Delta d = 1 \quad \Delta\kappa = 1 & \qquad m^*(x): &\quad \Delta d = 1 \quad \Delta\kappa = -1.
\end{aligned}$$

Das Auf- und Absteigen in den Multiplets bezieht sich stets auf die Felder als Funktionen von x^μ, weswegen hier die Komponentenfelder nach der Entwicklung der chiralen und antichiralen Koordinaten betrachtet werden. Die übrigen Felder sind gemäß Gl. 2.15 Ableitungen von φ, ψ und m nach x^μ. Durch das Differenzieren wird die Skalendimension, wie in Abschnitt 3 beschrieben, jeweils um 1 erhöht. Die R-Ladung hingegen wird nicht verändert, da der Viererimpuls P_μ mit dem Generator R vertauscht.

Entwicklung von Korrelationsfunktionen

Das erste Feld im chiralen und antichiralen Multiplet ist ein Skalarfeld $\varphi(x)$ bzw. $\varphi^*(x)$. Für dieses Feld kann die in Kaptiel 1 vorgestellte Korrelationsfunktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)\varphi^*(x_2)\,\varphi(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ bestimmt werden. Mit der chiralen Ward-Identität wird dann aus dieser Ausgangskorrelation die gesamte Korrelationsfunktion von zwei chiralen und antichiralen Superfeldern $\langle 0|\Phi^\dagger(\bar{y}_1)\Phi^\dagger(\bar{y}_2)\Phi(y_3)\,\Phi(y_4)|0\rangle$ berechnet. Nach Einsetzen der Entwicklungen aus Gl. 2.14 für jedes der vier Felder sieht man, dass die Super-Korrelationsfunktion selbst wieder eine Reihe in den Grassmann-Spinoren ist. Dabei sind die Koeffizienten nun Korrelationsfunktionen der Komponentenfelder. Diese können dann durch einen Koeffizientenvergleich in den $\theta, \bar{\theta}$ auf beiden Seiten der Gleichung abgelesen werden.

2.6 Konforme Korrelationsfunktionen

2.6.1 2-Punkt-Funktion von freien Skalarfeldern

Besitzt eine Theorie eine bestimmte Symmetrie, so ist der Vakuumzustand $|0\rangle$ invariant unter allen Transformationen der Gruppe, wird also von allen Generatoren ausgelöscht. Dies kann man verwenden, um die Eigenschaften der Korrelationsfunktionen zu untersuchen, da dann für jeden Generator X gilt:

$$\langle 0|[X,\ \phi\ \phi\ ...\ \phi]|0\rangle = \langle 0|X\ \phi\ \phi\ ...\ \phi|0\rangle - \langle 0|\ \phi\ \phi\ ...\ \phi X|0\rangle = 0.$$

Ist eine Symmetrie jedoch spontan gebrochen, dann ist das Vakuum nicht mehr invariant. Die bisherigen Experimente u.a. an Teilchenbeschleunigern haben gezeigt, dass die Supersymmetrie, falls sie in der Realität existiert, spontan gebrochen wäre, was im Folgenden jedoch nicht betrachtet wird. Für die konforme Symmetrie ist die 2-Punkt-Funktion W_2 von zwei Skalarfeldern bis auf eine Normierungskonstante vollständig festgelegt und kann auf diese Art bestimmt werden, indem die Gleichung nacheinander für jeden konformen Generator ausgewertet wird. Dabei wird auf der linken Seite der entsprechende Kommuator des Generators mit dem Feldprodukt eingesetzt. Man erhält also Relationen für die Ableitungen der Korrelationsfunktion nach den beiden Feldvariablen. Diese vier Bedingungen legen die 2-Punkt Funktion dann auf folgende Gestalt fest:

$$W_2(x_1, x_2) = \langle 0|\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)|0\rangle = \frac{1}{((x_1 - x_2)^2)^d} =: \frac{1}{(x_{12}^2)^d}. \tag{2.17}$$

Die beiden Felder $\varphi_1(x_1)$ und $\varphi_2(x_2)$ müssen außerdem die gleiche Skalendimension d besitzen, sonst verschwindet ihre Korrelation.
Die Funktion in Gl. 2.17 besitzt in der oben präsentierten Form an der Stelle $x_1 = x_2$

eine Singularität. Dies wäre nicht wünschenswert, allerdings muss man hier beachten, dass es sich bei den Quantenfeldern um operatorwertige Distributionen handelt. Den Ausdruck für die 2-Punkt-Funktion eines allgemeinen Feldes kann man auch aus der Darstellung von freien Feldern durch Erzeuger- und Vernichteroperatoren herleiten, da ein allgemeines Feld dieselbe 2-Punkt-Funktion besitzt wie ein freies Feld. Dies wird hier beispielhaft für den Fall des masselosen Skalarfeldes, also für $d = 1$ durchgeführt.
Ein freies Skalarfeld besitzt die Gestalt $\varphi(x) = \int d^3k\ [e^{-ikx}a(\mathbf{k}) + e^{ikx}a^\dagger(\mathbf{k})]$. Für die 2-Punkt-Funktion von zwei identischen Skalarfeldern erhält man dann einen Ausdruck der folgenden Form:

$$\begin{aligned}\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle &\propto \int d^3k \int d^3k'\ \langle 0|e^{-ikx}a(\mathbf{k})e^{ik'y}a^\dagger(\mathbf{k}')|0\rangle \\ &= \int d^3k\ \delta(k^2 - m^2)e^{-ik(x-y)}\Theta(k^0).\end{aligned}$$

Für $m = 0$ steht dort die Fouriertransformierte der Distribution $\delta(k^2)\Theta(k^0)$, die Korrelationsfunktion ist also ebenfalls eine Distribution. Die Fouriertransformierte kann man als Grenzwert schreiben:

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle \propto \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 - (x^0 - y^0 - i\epsilon)^2}.$$

Die Ausdruck in Gl. 2.17 ist also eigentlich als ein solcher distributiver Grenzwert zu verstehen. Da diese Eigenschaft der Korrelationsfunktionen für die hier durchgeführten Rechnungen jedoch nicht von zentraler Bedeutung ist, wird weiterhin die Schreibweise ohne ϵ verwendet.

2.6.2 Eigenschaften konformer Korrelationsfunktionen

Bisher wurden infinitesimale konforme Transformationen betrachtet, die durch die Kommutatoren der Generatoren mit den Feldern vermittelt werden. Für die weiteren Rechnungen wird *Globale Konforme Invarianz* angenommen, die besagt, dass auch eine Darstellung von endlichen konformen Transformationen (nicht nur ihrer Überlagerungsgruppe) auf dem Minkowskiraum definiert ist. Daraus folgt, dass die Korrelationsfunktionen rational sind und Bose-Felder nur ganzzahlige Skalendimension besitzen dürfen (vgl. [NiReTo05], S.267).
Die rationalen Korrelationsfunktionen enthalten Produkte aus Termen der Form in Gl. 2.17 mit Exponenten μ. Diese Exponenten unterliegen bestimmten Schranken,

im Folgenden *Polschranken* genannt. Man betrachtet eine Korrelationsfunktion aus einem System von Feldern $\langle 0|...\phi(x_i)...\psi(x_j)...|0\rangle$. Die Felder $\phi(x_1)$ und $\psi(x_2)$ besitzen die Quantenzahlen (d, j_1, j_2) und (d', j'_1, j'_2). Für jedes solche Paar von Feldern gilt dann die folgende Einschränkung an den Exponenten des Faktors $(x_{12}^2)^{-\mu}$ (siehe [NiTo00] Gl.(4.10)):

$$\mu \leq \left[\!\!\left[\frac{d + j_1 + j_2 + d' + j'_1 + j'_2}{2} - \frac{1 - \delta_{j_1 j'_2}\delta_{j'_1 j_2}\delta_{dd'}}{2} \right]\!\!\right]. \tag{2.18}$$

Dabei ist $[\![a]\!]$ die Gaußklammer, bezeichnet also die größte ganze Zahl N für die gilt $N \leq a$.

2.6.3 Skalare 4-Punkt-Funktion

Wie bereits am Anfang erwähnt, sollen in dieser Arbeit 4-Punkt-Funktionen untersucht werden, die mit Hilfe der chiralen Ward-Identität berechnet wurden. Als Ausgangspunkt für diese Formel dient die 4-Punkt-Funktion des ersten Feldes im chiralen bzw. antichiralen Supermultiplet, also die eines Skalarfeldes $\varphi(x)$. Mit den oben beschriebenen Annahmen kann die skalare 4-Punkt-Funktion für die Skalendimension d als Summe von Produkten aus Potenzen der Abstandsquadrate dargestellt werden (siehe [NiReTo08] S. 227 f).

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi^*(x_1)\varphi^*(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle &= \sum_{\{\mu_{ij}\}} c_{\{\mu_{ij}\}} \prod_{i<j} (x_{ij}^2)^{\mu_{ij}} \\ \text{mit} \qquad \sum_i \mu_{ij} &= -d, \quad \mu_{ij} \geq -d \quad \mu_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall i, j \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Schreibweise $\{\mu_{ij}\}$ bedeutet, dass die ensprechenden Terme für alle nach den obigen Bedingungen möglichen Kombinationen der μ_{ij} aufsummiert werden. Dabei gilt $i, j = 1, ..., 4$ und $\mu_{ij} = \mu_{ji},\ \mu_{ii} = 0$. Hier soll die Korrelationsfunktion für ein Skalarfeld der Skalendimension $d = 3$ berechnet werden. Für einen festen Wert j können die 3 μ_{ij} dann jeweils folgende Werte annehmen:

$$(-1, -1, -1), \quad (-3, 0, 0), \quad (-1, -2, 0), \quad (1, -2, -2).$$

Damit erhält man zunächst eine Summe aus 13 Summanden:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\varphi^*(x_1)\varphi^*(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle &= c_1\frac{1}{x_{12}^2\ x_{34}^2\ x_{13}^2\ x_{24}^2\ x_{14}^2\ x_{23}^2} + c_2\frac{1}{(x_{12}^2)^3(x_{34}^2)^3} \\
&+ c_3\frac{1}{(x_{13}^2)^3(x_{24}^2)^3} + c_4\frac{1}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^3} + c_5\frac{1}{(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2x_{13}^2\ x_{24}^2} + c_6\frac{1}{(x_{13}^2)^2(x_{24}^2)^2x_{12}^2\ x_{34}^2} \\
&+ c_7\frac{1}{(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^2x_{13}^2\ x_{24}^2} + c_8\frac{1}{(x_{13}^2)^2(x_{24}^2)^2x_{14}^2\ x_{23}^2} + c_9\frac{1}{(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^2x_{12}^2\ x_{34}^2} \\
&+ c_{10}\frac{1}{(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2x_{14}^2\ x_{23}^2} + c_{11}\frac{x_{12}^2\ x_{34}^2}{(x_{13}^2)^2(x_{24}^2)^2(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^2} + c_{12}\frac{x_{13}^2\ x_{24}^2}{(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^2} \\
&+ c_{13}\frac{x_{14}^2\ x_{23}^2}{(x_{13}^2)^2(x_{24}^2)^2(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2}.
\end{aligned}$$

Da sowohl φ als auch φ^* bei raumartigen Abständen mit sich selbst kommutieren, muss die Funktion invariant unter der Vertauschung von x_1 mit x_2 bzw. von x_3 mit x_4 sein. Man sieht, dass beide Vertauschungen dasselbe Ergebnis liefern und da dieses gleich der Ausgangsfunktion sein muss, erhält man folgende Relationen zwischen den Koeffizienten:

$$\begin{gathered}
c_3 = c_4 =: A \qquad c_2 =: A' \qquad c_7 = c_8 =: B \qquad c_6 = c_9 =: B' \\
c_5 = c_{10} =: B'' \qquad c_1 =: C \qquad c_{11} = D \qquad c_{12} = c_{13} =: D'.
\end{gathered}$$

Dank konformer Symmetrie (insbesondere Gl. 2.19) können die Korrelationsfunktionen stets durch konform invariante *Cross-Ratios* ausgedrückt werden. Hier werden folgende Definitionen verwendet:

$$s := \frac{x_{12}^2\ x_{34}^2}{x_{13}^2\ x_{24}^2} \quad t := \frac{x_{14}^2\ x_{23}^2}{x_{13}^2\ x_{24}^2}. \tag{2.20}$$

Für die Anwendung der chiralen Ward-Identität wird ein Faktor $(x_{14}^2)^{-3}(x_{23}^2)^{-3}$ ausgeklammert. Unter Verwendung der Definitionen in Gl. 2.20 nimmt die allgemeinste global konform invariante skalare 4-Punkt-Funktion dann folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\varphi^*(x_1)\varphi^*(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle &= \frac{1}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^3}\Bigg[A(1+t^3) + A'\frac{t^3}{s^3} + B(t+t^2) \\
+B'\left(\frac{t^3}{s}+\frac{t}{s}\right) &+ B''\left(\frac{t^3}{s^2}+\frac{t^2}{s^2}\right) + C\frac{t^2}{s} + D(st) + D'\left(\frac{t}{s^2}+\frac{t^4}{s^2}\right)\Bigg] \\
&=: \frac{1}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^3}f(s,t).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

3 Berechnung der Komponentenfunktionen

3.1 Die Chirale Ward-Identität

3.1.1 Superkonforme 4-Punkt-Funktion

Das erste Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der 4-Punkt-Funktion von zwei chiralen und zwei antichiralen Superfeldern mit einer gesamten R-Ladung von 0. Hier wird die chirale Ward-Identität für den Fall verwendet, dass alle vier Felder dieselbe Skalendimension $d = 3$ besitzen, und ergibt dann die folgende Korrelationsfunktion (vgl. [Knu12] S. 83):

$$\langle 0|\Phi^\dagger(\bar{y}_1)\Phi^\dagger(\bar{y}_2)\Phi(y_3)\,\Phi(y_4)|0\rangle = \mathcal{D}\frac{f(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3}. \tag{3.1}$$

Wobei $x^\mu_{\bar{i}j}$ definiert ist als:

$$x^\mu_{\bar{i}j} = \bar{y}^\mu_i - y^\mu_j - 2i\theta_j\sigma^\mu\bar{\theta}_i =: y^\mu_{\bar{i}j} - 2i\theta_j\sigma^\mu\bar{\theta}_i. \tag{3.2}$$

Die Funktion $f(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ der nilpotenten Invarianten $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ geht für $\theta, \bar{\theta} = 0$ in die Funktion $f(s,t)$ aus der skalaren konformen 4-Punkt-Funktion (siehe Gl. 2.21) über. Der universelle Differentialoperator $\mathcal{D}$ ist ein Exponential, welches die Ableitung $\mathcal{I}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{I}_1}$ enthält. Die Entwicklung der Exponentialfunktion liefert folgenden Ausdruck (siehe [Knu12] S.90) für die Anwendung auf f:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)) = \Bigg(&1 + 4iT\mathcal{I}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{I}_1} - 8\left(T\mathcal{I}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{I}_1}\right)^2 - \frac{32}{3}i\left(T\mathcal{I}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{I}_1}\right)^3 \\ &+ \frac{32}{3}\left(T\mathcal{I}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{I}_1}\right)^4\Bigg)f(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Die nilpotente Funktion T ist gegeben durch (vgl.[Knu12] S. 88):

$$T = T_{212} - T_0 - T_{222}. \tag{3.4}$$

Das andere Vorzeichen von T im Vergleich zu [Knu12] ist auf einen Vorzeichenfehler dort zurückzuführen, wie später in Abschnitt 3.5 gezeigt wird. Die Bestandteile von T lauten ([Knu12] S. 72, 74):

$$\begin{aligned}
T_0 &= \rho_{13} - \rho_{12} - \rho_{23} + 2i(\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2) \\
T_{222} &= -\rho_{41} - \rho_{13} - \rho_{34} + 2i(\rho_{41}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{34}^2) \\
T_{212} &= \rho_{14} - \theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\bar{\theta}_{24} - \theta_{13}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21} + \theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21} \\
&\quad - 2i[\rho_{14}^2 + (\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\bar{\theta}_{24})^2 + (\theta_{13}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21})^2 + (\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21})^2 \\
&\quad - 2\ (\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\bar{\theta}_{24} + \theta_{13}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21})\,\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}] \\
&\quad + 16\ \theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}\,\theta_{13}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}\,\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\bar{\theta}_{24}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Hier wurden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\rho_{ij} = \theta_{ij}\tilde{x}_{\bar{i}j}^{-1}\bar{\theta}_{ij} = (\theta_i - \theta_j)\tilde{x}_{\bar{i}j}^{-1}(\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_i) \qquad \tilde{x}_{\bar{i}j} = x_{\bar{i}j}^{\mu}\tilde{\sigma}_\mu \qquad \tilde{x}_{\bar{i}j}^{-1} = \frac{x_{\bar{i}j}^{\mu}\sigma_\mu}{x_{\bar{i}j}^2}. \tag{3.6}$$

Als nächstes muss man die Funktion $f(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ bestimmen, wozu die Definition der Invarianten benötigt wird (siehe [Knu12] S.41).

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \frac{x_{\bar{1}4}^2 x_{\bar{3}2}^2}{x_{\bar{1}2}^2 x_{\bar{3}4}^2} \qquad \to \mathcal{I}_1\Big|_{\theta,\bar{\theta}=0} = \frac{t}{s} \\
\mathcal{I}_2 &= \frac{x_{\bar{1}4}^2 x_{\bar{2}3}^2}{x_{\bar{1}3}^2 x_{\bar{2}4}^2} \qquad \to \mathcal{I}_2\Big|_{\theta,\bar{\theta}=0} = t
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Damit kann man die Funktion aus Gl. 2.21 umschreiben in ihre superkonforme Variante:

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) &= A(1 + \mathcal{I}_2^3) + A'\mathcal{I}_1^3 + B(\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_2^2) + B'(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2^2) \\
&\quad + B''(\mathcal{I}_1^2 + \mathcal{I}_1^2\mathcal{I}_2) + C\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 + D\frac{\mathcal{I}_2^2}{\mathcal{I}_1} + D'\mathcal{I}_1^2\left(\frac{1}{\mathcal{I}_2} + \mathcal{I}_2^2\right).
\end{aligned}$$

Die Anwendung des Differentialoperators aus Gl. 3.3 auf diese Funktion ergibt dann zusammen mit dem Nenner in Gl. 3.1 die superkonforme 4-Punkt-Funktion.

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\Phi^\dagger(\bar{y}_1)\Phi^\dagger(\bar{y}_2)\Phi(y_3)\,\Phi(y_4)|0\rangle(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\theta_3,\theta_4)\\
&=\frac{1}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3}\Bigg[A(1+\mathcal{I}_2^3)+B(\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_2^2)\\
&+B'\mathcal{I}_1(1+\mathcal{I}_2^2)\left(1+4iT-8T^2-\frac{32}{3}iT^3+\frac{32}{3}T^4\right)\\
&+C\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\left(1+4iT-8T^2-\frac{32}{3}iT^3+\frac{32}{3}T^4\right)\\
&+D\frac{\mathcal{I}_2^2}{\mathcal{I}_1}\left(1-4iT-8T^2+\frac{32}{3}iT^3+\frac{32}{3}T^4\right)\\
&+B''\mathcal{I}_1^2(1+\mathcal{I}_2)\left(1+8iT-32T^2-\frac{256}{3}iT^3+\frac{512}{3}T^4\right)\\
&+D'\mathcal{I}_1^2\left(\frac{1}{\mathcal{I}_2}+\mathcal{I}_2^2\right)\left(1+8iT-32T^2-\frac{256}{3}iT^3+\frac{512}{3}T^4\right)\\
&+A'\mathcal{I}_1^3\left(1+12iT-72T^2-288iT^3+864T^4\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

3.1.2 Rechnung in chiralen und antichiralen Koordinaten

Bisher wurden die chiralen und antichiralen Superfelder, und damit ihre 4-Punkt-Funktion, in den chiralen bzw. antichiralen Koordinaten $y_i^\mu, \bar{y}_i^\mu$ ausgedrückt. Zur Analyse der Korrelationsfunktionen der Komponentenfelder müssen diese allerdings als Funktionen von x^μ vorliegen. Die Entwicklung der y_i^μ bzw. $\bar{y}_i^\mu$ in den Grassmann-Spinoren liefert Ableitungen der Felder φ, ψ, m, wie man in Gl. 2.15 sieht. Die Korrelationsfunktionen der entsprechenden Kombinationen von abgeleiteten Feldern kann man als Ableitungen der Korrelationsfunktionen der ursprünglichen Felder schreiben. Somit müssen nur die Korrelationen der 0. Ordnung der Taylorentwicklung berechnet werden, die genau den Funktionen in chiralen/antichiralen Koordinaten mit $\theta, \bar{\theta} = 0$ entsprechen. Also kann man die Entwicklung der rechten Seite von Gl. 3.8 in chiralen und antichiralen Koordinaten durchführen und am Ende dann alle $y_{\bar{i}j}$ mit x_{ij} ersetzen.

Die 0. Ordnung der Entwicklung von $\bar{y}_1, \bar{y}_2, y_3$ und y_4 als Argumente der Komponentenfelder kann nur die Grassmann-Spinoren $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \theta_3, \theta_4$ enthalten, die in Gl. 2.14 als Faktoren vor den Feldern stehen. Somit sind auch auf der rechten Seite von Gl. 3.8 nur die Summanden interessant, die aus Kombinationen dieser vier Variablen bestehen.

Allerdings sollte eine Gleichung wie 3.8 auch in chiralen und antichiralen Koordinaten gelten. Somit müssten sich bei der Berechnung der rechten Seite alle Terme, in denen $\bar{\theta}_3, \bar{\theta}_4, \theta_1$ und θ_2 vorkommen, gegenseitig wegheben. Diese treten gemäß den Definitionen sowohl in T als auch in $\mathcal{I}_1$ auf. Da das Weglassen aller Terme mit mindestens einem dieser Spinoren die Rechnung erheblich verkürzt, wurden T und $\mathcal{I}_1$ jeweils nur bis zur 2. Ordnung in $\theta, \bar{\theta}$ vollständig entwickelt. Für alle höheren Ordnungen habe ich nur Summanden berechnet, die ausschließlich $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \theta_3$ und θ_4 beinhalten. Als stichprobenartiger Test der chiralen Ward-Identität und der Entwicklung von T und $\mathcal{I}_1$ wurde die Gültigkeit von Gl. 3.8 in chiralen/antichiralen Koordinaten dann in 2. Ordnung überprüft. Dafür mussten außerdem alle auftretenden Terme mit chiralen und antichiralen Variablen durch $\bar{y}_1, \bar{y}_2, y_3$ und y_4 ausgedrückt werden.

3.2 Wichtige Identitäten

Bei der Anwendung der chiralen Ward-Identität treten bestimmte Strukturen aus Grassmann-Variablen und Paulimatrizen wiederholt auf. Die wichtigsten Identitäten, die bei der Berechnung der Komponenten-Korrelationsfunktion benötigt werden, sind im Folgenden hergeleitet.

3.2.1 Produkt von zwei Paulimatrizen und Spinoren

Bei der Entwicklung in Grassmann-Spinoren erhält man Produkte von Termen der Form $(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})$. Aus der Definition der Paulimatrizen und der Spinormetrik sieht man, dass folgender Zusamenhang gilt (siehe [Knu12] S.107):

$$\varepsilon^{ab}\,\bar{\varepsilon}^{\dot{a}\dot{b}}\,\sigma_{\mu b\dot{b}} = \tilde{\sigma}_\mu^{\dot{a}a}.$$

Des Weiteren kann das Produkt von zwei Komponenten eines Grassmann-Spinors in einen kontrahierten Ausdruck umgeschrieben werden ([Knu12] S.18):

$$\theta^a\theta^b = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ab}(\theta\theta) \qquad\qquad \bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{b}} = \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}^{\dot{a}\dot{b}}(\bar{\theta}\bar{\theta}).$$

Unter Verwendung dieser Beziehung kann man nun das Produkt von zwei Paulimatrizen berechnen, die jeweils mit den gleichen Spinoren kontrahiert sind.

$$
\begin{aligned}
(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\ \theta^b\sigma^\nu_{b\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}} = -\sigma^\mu_{a\dot{a}}\theta^a\,\theta^b\ \bar{\theta}^{\dot{a}}\ \bar{\theta}^{\dot{b}}\ \sigma^\nu_{b\dot{b}} \\
&= \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\ \sigma^\mu_{a\dot{a}}\,\varepsilon^{ab}\,\bar{\varepsilon}^{\dot{a}\dot{b}}\ \sigma^\nu_{b\dot{b}} = \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\ \sigma^\mu_{a\dot{a}}\ \tilde{\sigma}^{\nu\dot{a}a}
\end{aligned}
$$

Für die Spur von zwei Paulimatrizen gilt $(\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu)^a_a = 2\eta^{\mu\nu}$. Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$
(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\,(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}). \tag{3.9}
$$

Die Herleitung eines analogen Ausdrucks zu Gl. 3.9 mit vier verschiedenen Spinoren in [KaSo97] auf S.370 f. beruht auf einer falschen Relation für das Produkt von zwei Paulimatrizen und ist somit nicht verwendbar.

3.2.2 Produkt von drei Paulimatrizen mit Vierervektoren

In diesem Fall werden die Paulimatrizen in ihrer Eigenschaft als Vierervektoren betrachtet. Für die Verwendung der chiralen Ward-Identität benötigt man das Produkt $x_\mu\sigma^\mu\ y_\nu\tilde{\sigma}^\nu\ z_\lambda\sigma^\lambda$ mit allgemeinen Vierervektoren x, y, z. Die Spinorindices der Paulimatrizen werden hier weggelassen, da sie bei der gesamten Rechnung unverändert bleiben. Für die Berechnung ist es nützlich, die Summen in räumliche und zeitliche Teile aufzutrennen, da für die drei räumlichen Paulimatrizen gilt:

$$
\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbb{I}_2 + i\epsilon^{ijk}\sigma^k \qquad\qquad \tilde{\sigma}^i = -\sigma^i.
$$

Dabei ist ϵ das Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen, wobei der doppelte Index kontrahiert ist. Nach Ausmultiplizieren der drei aufgetrennten Summen und Anwenden dieses Zusammenhangs erhält man folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
x_\mu\sigma^\mu\ y_\nu\tilde{\sigma}^\nu\ z_\lambda\sigma^\lambda = &\ (x_\mu y^\mu)z_\nu\sigma^\nu - (x_\mu z^\mu)y_\nu\sigma^\nu + (y_\mu z^\mu)x_\nu\sigma^\nu \\
&- i\Big(\sigma_0\epsilon^{ijk}x_i y_j z_k - \sigma_k\epsilon^{ijk}x_0 y_i z_j + \sigma_k\epsilon^{ijk}x_i y_0 z_j - \sigma_k\epsilon^{ijk}x_i y_j z_0\Big) \\
&+ y_i z_i x_k\sigma^k - x_i z_i y_k\sigma^k + \epsilon^{ijk}\epsilon^{kml}x_i y_j z_m\sigma^l.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Dies kann man weiter vereinfachen, indem man zunächst das Produkt der beiden Epsilon-Tensoren durch δ-Funktionen ausdrückt: $\epsilon^{ijk}\epsilon^{kml} = \epsilon^{kij}\epsilon^{kml} = \delta^{im}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jm}$.

Außerdem kann man das vierdimensionale Levi-Civita-Symbol verwenden, welches ebenfalls antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Indices ist. Hier muss auf die Stellung der Indices geachtet werden und es wird die Konvention $\epsilon^{0123} = 1$ verwendet. Kontrahiert man das Levi-Civita-Symbol mit vier Vektoren, so kann man die Summe in einem beliebigen Index auseinander ziehen und erhält:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\sigma_\mu x_\nu y_\lambda z_\rho = \epsilon^{0\nu\lambda\rho}\,\sigma_0 x_\nu y_\lambda z_\rho + \epsilon^{i\nu\lambda\rho}\,\sigma_i x_\nu y_\lambda z_\rho = \epsilon^{0ijk}\,\sigma_0 x_i y_j z_k + \epsilon^{i\nu\lambda\rho}\,\sigma_i x_\nu y_\lambda z_\rho .$$

Führt man dies sukzessive für jeden der vier Indices durch ergibt sich unter Beachtung von $\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk}$ genau der Ausdruck in Klammern in der zweiten Zeile von Gl. 3.10. Damit erhält man schließlich für das Produkt der drei kontrahierten Paulimatrizen:

$$x_\mu\sigma^\mu\; y_\nu\tilde{\sigma}^\nu\; z_\lambda\sigma^\lambda = (x_\mu y^\mu) z_\nu\sigma^\nu - (x_\mu z^\mu) y_\nu\sigma^\nu + (y_\mu z^\mu) x_\nu\sigma^\nu - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\sigma_\mu x_\nu y_\lambda z_\rho . \tag{3.11}$$

3.2.3 Kontraktionen des Epsilon-Tensors

Möchte man das Produkt von Termen wie dem in Gl. 3.11 bilden, kann man die folgende Identität für zwei Epsilon-Tensoren benutzen:

$$\det(\eta)\;\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\;\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det\begin{pmatrix} \eta^{\mu\alpha} & \eta^{\mu\beta} & \eta^{\mu\gamma} & \eta^{\mu\delta} \\ \eta^{\nu\alpha} & \eta^{\nu\beta} & \eta^{\nu\gamma} & \eta^{\nu\delta} \\ \eta^{\lambda\alpha} & \eta^{\lambda\beta} & \eta^{\lambda\gamma} & \eta^{\lambda\delta} \\ \eta^{\rho\alpha} & \eta^{\rho\beta} & \eta^{\rho\gamma} & \eta^{\rho\delta} \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung von Gl. 3.9 ohne die kontrahierten Spinoren ergibt sich dann für das Quadrat des Imaginärteils von Gl. 3.11:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\;\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\;\eta_{\mu\alpha}\;x_\nu\,y_\lambda\,z_\rho\;x_\beta\,y_\gamma\,z_\delta = {} & -x^2y^2z^2 + (xz)^2y^2 + (yz)^2x^2 \\ & + (xy)^2z^2 - 2(xy)(xz)(yz).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Dabei ist $(xy) = x_\mu y^\mu$ und $x^2 = x_\mu x^\mu$. Ein weiterer wichtiger Zusammenhang ist der zwischen dem Levi-Civita-Symbol und der Determinante einer Matrix $A = (a_{ij})$:

$$\det(A) = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\; a_{0\mu}\; a_{1\nu}\; a_{2\lambda}\; a_{3\rho}. \tag{3.13}$$

Ein Ausdruck der Form $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\, a_\mu b_\nu c_\lambda d_\rho$ entspricht somit der Determinante einer Matrix mit den Zeilen- oder Spaltenvektoren a, b, c, d. Sobald die vier Vektoren nicht linear unabhängig sind, verschwindet der Term dementsprechend.

3.2.4 Entwicklung der superkonformen 2-Punkt-Funktion

Die Berechnung der superkonformen 4-Punkt-Funktion enthält als einen wichtigen Grundbaustein den Term $(x_{\bar{i}j}^2)^{-k}$ sowohl mit positiven als auch negativen Werten für k. Dieser Term entspricht der superkonformen 2-Punkt-Funktion $\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle$ von einem chiralen und einem antichiralen Superfeld, wobei beide Felder die Skalendimension $d = k$ besitzen müssen (siehe [Knu12], S.78). Im Folgenden wird er für einen allgemeinen Exponenten k als Reihe in den Grassmann-Spinoren entwickelt und durch die chiralen und antichiralen Koordinaten ausgedrückt. Dafür berechnet man zunächst das Quadrat unter Verwendung von Gl. 3.9 und $\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = (\eta^2)^\mu_\mu = 4$.

$$x_{\bar{i}j}^2 = (y_{\bar{i}j} - 2i\,\theta_j\sigma\bar{\theta}_i)^2 = y_{\bar{i}j}^2 - 4i\,y_{\bar{i}j}^\mu\,\theta_j\sigma_\mu\bar{\theta}_i - 8(\theta_j\theta_j)(\bar{\theta}_i\bar{\theta}_i)$$

Nach Ausklammern von $(y_{\bar{i}j}^2)^{-k}$ im Gesamtterm kann der Rest als geometrische Reihe geschrieben werden:

$$\frac{1}{(x_{\bar{i}j}^2)^k} = \frac{1}{(y_{\bar{i}j}^2)^k}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{4i\,y_{\bar{i}j}^\mu}{y_{\bar{i}j}^2}\,\theta_j\sigma_\mu\bar{\theta}_i + \frac{8}{y_{\bar{i}j}^2}(\theta_j\theta_j)(\bar{\theta}_i\bar{\theta}_i)\right)^m\right]^k .$$

Die zweite Ordnung der Reihe berechnet sich als Quadrat des ersten Summanden zu $-\frac{8}{y_{\bar{i}j}^2}(\theta_j\theta_j)(\bar{\theta}_i\bar{\theta}_i)$, wodurch alle höheren Ordnungen wegfallen. Den entstehenden Term kann man dann weiter als binomische Reihe ausdrücken.

$$\frac{1}{(x_{\bar{i}j}^2)^k} = \frac{1}{(y_{\bar{i}j}^2)^k}\left(1 + \frac{4i\,y_{\bar{i}j}^\mu}{y_{\bar{i}j}^2}\theta_j\sigma_\mu\bar{\theta}_i\right)^k = \frac{1}{(y_{\bar{i}j}^2)^k}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{k}{m}\left(\frac{4i\,y_{\bar{i}j}^\mu}{y_{\bar{i}j}^2}\theta_j\sigma_\mu\bar{\theta}_i\right)^m$$

Für die zweite Ordnung ergibt sich wieder derselbe Ausdruck, die Reihe bricht also hier ab, was dann zu folgendem Ergebnis führt:

$$\frac{1}{(x_{\bar{i}j}^2)^k} = \frac{1}{(y_{\bar{i}j}^2)^k}\left(1 + \frac{4i\,k\,y_{\bar{i}j}^\mu}{y_{\bar{i}j}^2}\,\theta_j\sigma_\mu\bar{\theta}_i - \frac{4k(k-1)}{y_{\bar{i}j}^2}(\theta_j\theta_j)(\bar{\theta}_i\bar{\theta}_i)\right). \tag{3.14}$$

3.3 Vorgehensweise

3.3.1 Auswahl der Komponenten-Korrelationen

Für die anschließende Analyse sind vor allem die skalaren Korrelationsfunktionen interessant, also solche, die ausschließlich Kombinationen der Felder φ und m enthalten. Die Positivitätsanalyse ist bisher nur für Skalarfelder möglich, außerdem muss die Korrelationsfunktion dafür vom Typ $\langle 0|A^* B^* B\, A|0\rangle$ sein, da es sich um ein Skalarprodukt des Vektors $\int f\, BA|0\rangle$ handelt. Für diese Funktionen kann dann untersucht werden, wie sich die Bedingungen für die Positivität im Vergleich zur Ausgangsfunktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)\varphi^*(x_2)\,\varphi(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ verändert haben.

Da die Berechnung aller Komponenten-Korrelationsfunktionen sehr aufwändig ist, habe ich mich zunächst auf eine prototypische Funktion konzentriert, deren Analyse möglicherweise interessante Ergebnisse liefern könnte. Dies war die skalare Funktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)m^*(x_2)m(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle$, da hier eine vollständige Positivitätsanalyse möglich ist.

Die umgekehrte Funktion $\langle 0|m^*(x_1)\varphi^*(x_2)\varphi(x_3)m(x_4)|0\rangle$ sollte die selbe Struktur besitzen, wenn man x_1 mit x_2 und x_3 mit x_4 vertauscht und muss somit nicht noch einmal berechnet werden. Bei der Positivitätsuntersuchung wurde außerdem die Einhaltung der Bedingungen durch den Unitaritätsbound überprüft sowie die durch Gl. 2.18 gegebenen Polschranken. Für die anderen Funktionen, die nicht der Positivitätsanalyse zugänglich sind, kann zumindest die Einhaltung der Polschranken untersucht werden. Dies wurde hier am Beispiel der rein fermionischen Korrelationsfunktion $\langle 0|\bar\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\psi(x_3)\psi(x_4)|0\rangle$ durchgeführt.

3.3.2 Zugehörige Grassmann-Kombinationen

Die beiden gewählten Komponenten-Korrelationen entsprechen bestimmten Kombinationen von Grassmann-Spinoren in der Entwicklung auf der rechten Seite von Gl. 3.8. Um herauszufinden, welche Koeffizienten man berechnen muss, setzt man auf der linken Seite die Entwicklung der Superfelder ein:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\Phi^\dagger(\bar y_1)\Phi^\dagger(\bar y_2)\,\Phi(y_3)\,\Phi(y_4)|0\rangle = \langle 0|[\varphi^*(\bar y_1) - \sqrt{2}\bar\theta_{1\dot a}\bar\psi^{\dot a}(\bar y_1) - (\bar\theta_1\bar\theta_1)m^*(\bar y_1)] \\
&\cdot [\varphi^*(\bar y_2) - \sqrt{2}\bar\theta_{2\dot b}\bar\psi^{\dot b}(\bar y_2) - (\bar\theta_2\bar\theta_2)m^*(\bar y_2)] \cdot [\varphi(y_3) + \sqrt{2}\theta_3^a\psi_a(y_3) + (\theta_3\theta_3)m(y_3))] \\
&\cdot [\varphi(y_4) + \sqrt{2}\theta_4^b\psi_b(y_4) + (\theta_4\theta_4)m(y_4)]|0\rangle. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Damit sieht man, dass die beiden gesuchten Korrelationsfunktionen die Koeffizienten folgender Kombinationen sind:

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\varphi^*(\bar{y}_1)m^*(\bar{y}_2)m(y_3)\varphi(y_4)|0\rangle &\quad\rightarrow\quad -(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2) \\
\langle 0|\bar{\psi}^{\dot{a}}(\bar{y}_1)\bar{\psi}^{\dot{b}}(\bar{y}_2)\psi_a(y_3)\psi_b(y_4)|0\rangle &\quad\rightarrow\quad \theta_3^a\,\theta_4^b\,\bar{\theta}_{1\dot{a}}\,\bar{\theta}_{2\dot{b}}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Dementsprechend wurden dann nur diese beiden Summanden in den Grassmann-variablen betrachtet. Auf der rechten Seite von Gl. 3.8 treten die θ_i und $\bar{\theta}_i$ immer paarweise auf, wie man an den Definitionen in Gl. 3.2 und Gl. 3.6 sehen kann. Also enthält jeder Summand eine gerade Anzahl von Grassmann-Varibalen, wobei stets gleich viele rechts- wie linkshändige Spinoren vorkommen.

Bei den beiden interessanten Summanden handelt es sich um Terme 4. Ordnung, die durch Multiplikation einer 0. Ordnung mit einer 4.Ordnung oder umgekehrt und durch Kombination zweier Summanden 2. Ordnung zustande kommen können. Für die Polynome in T in den runden Klammern in Gl. 3.8 und für die entsprechenden Vorfaktoren mit den Invarianten $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ mussten also nur Terme bis zur 4. Ordnung bestimmt werden. Da der Ausdruck T direkt mit der 2. Ordnung in θ beginnt, tritt die 0. Ordnung im Polynom nur durch den Summanden 1 auf. Die 2. Ordnung kommt somit nur in T vor, die 4. Ordnung in T und T^2. Die höheren Potenzen beginnen entsprechend mit der 6. bzw. 8. Ordnung. Für die Überprüfung der Gültigkeit der chiralen und antichiralen Koordinaten wird die 2. Ordnung komplett benötigt. Da die unerwünschten Grassmann-Variablen jedoch nur in $\mathcal{I}_1$ und T auftreten, müssen dafür nur diese beiden Teile betrachtet werden.

Ausgehend von diesen Überlegungen wurden von allen Bestandteilen des Ausdrucks T die vollständige 2. Ordnung und von der 4. Ordnung zunächst der Summand $(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)$ bestimmt. Die 4. Ordnung in T^2 ergibt sich dann als Quadrat der 2. Ordnung. Zur Überprüfung der Polbounds ist es nicht nötig, die fermionische Korrelationsfunktion vollständig zu berechnen. Es sind lediglich die maximalen Potenzen der x_{ij}^2 wichtig, die im Nenner auftreten, jedoch nicht die Terme im Zähler.

Entsteht durch diese maximalen Potenzen eine Verletzung der Schranken, kann für den entsprechenden Teil dann auch der Zähler entwickelt werden, um festzustellen, ob sich die verbotenen Teile herauskürzen. Somit wurden zunächst für alle Summanden mit der Spinor-Kombination $\theta_3, \theta_4, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ die jeweiligen Nenner bestimmt.

Die Invarianten $\mathcal{I}_1$ und $\frac{1}{\mathcal{I}_1}$ wurden zunächst bis zur 2. Ordnung vollständig berechnet. Nach der Überprüfung der chiralen Ward-Identität folgte dann die Berechnung der Korrelationsfunktion, wofür die folgenden Kombinationen bis zu den erwähnten Termen 4. Ordnung in den vier chiralen Grassmann-Variablen entwickelt wurden:

$$\frac{1}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3}, \qquad \frac{\mathcal{I}_1}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3}, \qquad \frac{\mathcal{I}_1^2}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3},$$
$$\frac{\mathcal{I}_1^3}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3}, \qquad \mathcal{I}_2, \qquad \frac{\mathcal{I}_2^2}{\mathcal{I}_1}, \qquad \left(\frac{1}{\mathcal{I}_2} + \mathcal{I}_2^2\right). \tag{3.17}$$

3.4 Berechnung der benötigten Teile von T

Zunächst werden alle Terme mit chiralen und antichiralen Koordinaten so umgeformt, dass sie nur noch die vier Variablen $\bar{y}_1, \bar{y}_2, y_3, y_4$ enthalten. Dafür müssen chirale durch antichirale Variablen ausgedrückt werden und umgekehrt, wozu man ihre Definition aus Gl. 2.13 benötigt. Bei der Berechnung von T treten mehrere Terme mit unerwünschten y_i auf, deren Bestandteile wie folgt umgeschrieben werden können:

$$\begin{aligned}
x_{\bar{1}2}^\mu &= y_{\bar{1}\bar{2}}^\mu - 2i\ \theta_2\sigma^\mu(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) & x_{\bar{2}1}^\mu &= -y_{\bar{1}\bar{2}}^\mu - 2i\ \theta_1\sigma^\mu(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1) \\
x_{\bar{3}4}^\mu &= y_{34}^\mu - 2i\ (\theta_4 - \theta_3)\sigma^\mu\bar{\theta}_3 & x_{\bar{4}3}^\mu &= -y_{34}^\mu - 2i\ (\theta_3 - \theta_4)\sigma^\mu\bar{\theta}_4. \\
x_{\bar{4}1}^\mu &= -y_{\bar{1}4}^\mu + 2i\ \theta_1\sigma^\mu(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_4) + 2i\ \theta_4\sigma^\mu\bar{\theta}_4.
\end{aligned}$$

3.4.1 Zweite Ordnung

Alle Summanden in den drei Bestandteilen von T beginnen mit Termen $\propto \theta_i$ und enden mit Termen $\propto \bar{\theta}_i$. Die zweite Ordnung in den Grassmann-Spinoren wird also durch Multiplikation dieser äußeren Faktoren mit der 0. Ordnung des Teils dazwischen erzeugt. Für die Terme ρ_{ij} und die analogen Strukturen mit gemischten Indices in T_{212} ist diese von der Form

$$\frac{y_{\bar{i}j\mu}\sigma^\mu}{y_{\bar{i}j}^2}.$$

Dies wird deutlich, wenn man die Definition aus Gl. 3.6 sowie die Entwicklung der 2-Punkt-Funktion aus Gl. 3.14 mit $k = 1$ einsetzt. Alle Summanden der Form ρ_{ij}^2 enthalten dementsprechend keine Terme der 2. Ordnung mehr.

In T_{212} tritt außerdem der Term $\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}$ auf. Für die Berechnung der 2. Ordnung wird hier entsprechend die 0. Ordnung des Produkts $\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}$ benötigt. Die Differenzen θ_{ij} außen bestehen nur aus den Spinoren $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \theta_3, \theta_4$. Somit enthält die 2. Ordnung keine unerwünschten Grassmann-Variablen und bei der Berechnung des Terms können diese direkt weggelassen werden. Mit der in Gl. 3.11 gegebenen Identität für das Produkt von drei Paulimatrizen $x_\mu\sigma^\mu\, y_\nu\tilde{\sigma^\nu}\, z_\lambda\sigma^\lambda$ erhält man man folgenden Ausdruck unter Vernachlässigung aller Terme mit unerwünschten Grassmann-Spinoren:

$$\begin{aligned}\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21} = \frac{1}{y_{\bar{1}\bar{2}}^2 y_{34}^2}(\theta_4-\theta_3)\Big[&(y_{34\mu}y_{\bar{2}3}^{\mu} - 2i\ y_{34\mu}\theta_3\sigma^\mu\bar{\theta}_2)y_{\bar{1}\bar{2}\nu}\sigma^\nu \\ &- y_{34\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu}(y_{\bar{2}3\nu} - 2i\ \theta_3\sigma_\nu\bar{\theta}_2)\sigma^\nu + (y_{\bar{2}3\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu} - 2i\ y_{\bar{1}\bar{2}\mu}\theta_3\sigma^\mu\bar{\theta}_2)y_{34\nu}\sigma^\nu \\ &- i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\ \sigma_\mu\ y_{34\nu}\ (y_{\bar{2}3\lambda} - 2i\ \theta_3\sigma_\lambda\bar{\theta}_2)\ y_{\bar{1}\bar{2}\rho} + (\ldots)\Big](\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_1).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Für die 2. Ordnung benötigt man also den ersten Teil von jedem Summanden in der eckigen Klammer. Die weiteren Summanden in T_{212} sind Produkte von mindestens zwei der vier ersten Terme, enthalten also keine 2. Ordnung mehr. Die Terme der 2. Ordnung mit den nicht-chiralen Grassmann-Variablen lauten dann:

$$\begin{aligned}&4i\frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{1}3}^2}\ \theta_2\sigma^\nu(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_3) + 4i\frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_3 \\ &- 4i\frac{y_{\bar{1}\bar{2}\nu}}{y_{\bar{1}\bar{2}}^2}\ \theta_2\sigma^\nu(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2) - 4i\frac{y_{34\nu}}{y_{34}^2}\ (\theta_4-\theta_3)\sigma^\nu\bar{\theta}_3.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Die 2. Ordnung in den vier Grassmann-Variablen $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \theta_3, \theta_4$ ergibt sich als:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_{\bar{1}\bar{2}}^2 y_{34}^2}\Bigg[&\bigg(\Big(y_{34\mu}y_{\bar{2}3}^{\mu} + y_{34}^2\Big)\,y_{\bar{1}\bar{2}\nu} - y_{34\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu}\ y_{\bar{2}3\nu} + y_{\bar{2}3\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu}\ y_{34\nu}\bigg)\theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_1 \\ &+ \Bigg(\bigg(y_{34\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu} - \frac{y_{\bar{1}\bar{2}}^2 y_{34}^2}{y_{\bar{2}3\nu}^2}\bigg)\,y_{\bar{2}3\nu} - \Big(y_{34\mu}y_{\bar{2}3}^{\mu} + y_{34}^2\Big)\,y_{\bar{1}\bar{2}\nu} - \Big(y_{\bar{2}3\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu} + y_{\bar{1}\bar{2}}^2\Big)\,y_{34\nu}\Bigg)\theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2 \\ &+ \Big(y_{34\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu}\ y_{\bar{2}3\nu} - y_{34\mu}y_{\bar{2}3}^{\mu}\ y_{\bar{1}\bar{2}\nu} - y_{\bar{2}3\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu}\ y_{34\nu}\Big)\theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1 \\ &+ \Big(y_{34\mu}y_{\bar{2}3}^{\mu}\ y_{\bar{1}\bar{2}\nu} - y_{34\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu}\ y_{\bar{2}3\nu} + \Big(y_{\bar{2}3\mu}y_{\bar{1}\bar{2}}^{\mu} + y_{\bar{1}\bar{2}}^2\Big)\ \ y_{34\nu}\Big)\theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_2 \\ &- i\ \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\ (\theta_4-\theta_3)\sigma_\mu(\bar{\theta}_2-\bar{\theta}_1)\ y_{34\nu}\ y_{\bar{2}3\lambda}\ y_{\bar{1}\bar{2}\rho}\Bigg].\end{aligned} \tag{3.20}$$

Wie man sieht, besitzen alle Summanden hier den gleichen Nenner.

3.4.2 Vierte Ordnung

Zunächst werden die Terme 4. Ordnung berechnet, die direkt in T auftreten, anschließend die Quadrate der 2. Ordnung von T, die in T^2 stehen. Dabei wurden, wie bereits erwähnt, nur die Summanden betrachtet, die $(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)$ enthalten. Für alle Teile, in denen die Spinor-Kombination $\theta_3, \theta_4, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ auftritt, wurde der maximal auftretende Nenner ermittelt.

Koeffizienten von $(\boldsymbol{\theta_3\theta_3})(\boldsymbol{\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2})$

In den Teilen T_0 und T_{222} treten diese nur bei ρ_{23} bzw. ρ_{23}^2 auf und sind dementsprechend proportional zu $\frac{1}{y_{\bar{2}3}^2}$. Für die Untersuchung von T_{212} betrachtet man zunächst die ersten vier Summanden, wobei hier nur der Teil in Gl. 3.18 selbst die gesuchte vierte Ordnung enthält. Die Terme $\theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2$ treten jedoch in allen Ausdrücken außer ρ_{14} auf, weswegen nun die entsprechenden Quadrate und Produkte in den Zeilen darunter in Gl. 3.5 hinzugezogen werden müssen.
Die Beiträge aus $-2i(\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\bar{\theta}_{24})^2 - 2i(\theta_{13}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21})^2$ kann man direkt als Quadrate der Koeffizienten von $\theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2$ in ihren Wurzeln ablesen. Um diese Terme in $\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}$ zu quadrieren, benötigt man die beiden Identitäten in Gl. 3.12 und Gl. 3.13. Die erste liefert direkt das Quadrat des Teils $\propto \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$. Für den gemischten Term erhält man nach Anwenden von Gl. 3.9 Ausdrücke folgender Form:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} X_\mu\, y_{34\nu}\, y_{\bar{2}3\lambda}\, y_{\bar{1}\bar{2}\rho} \quad \text{mit} \quad X_\mu = \{y_{34\mu},\; y_{\bar{2}3\mu},\; y_{\bar{1}\bar{2}\mu}\}.$$

Dies beschreibt die Determinante einer Matrix, in der jeweils zwei Zeilen- oder Spaltenvektoren identisch sind, und ist damit gleich 0. Analog berechnet man die beiden Produkte in der dritten Zeile von T_{212} in Gl. 3.5. Der letzte Summand von T_{212} ist ein Produkt von drei Termen mindestens 2. Ordnung und enthält damit nur Terme 6. und 8. Ordnung.
Für die spätere Untersuchung der Korrelationsfunktion ist es nötig, die Koeffizienten vollständig durch Quadrate $y_{\bar{i}j}^2$ auszudrücken. Die Konktraktionen von verschiedenen $y_{\bar{i}j}$ können dabei durch Anwenden der Binomischen Formel aufgelöst werden. Eine häufig auftretende Kombination ist zum Beispiel:

$$y_{34\mu}\, y_{\bar{2}3}^\mu = \frac{1}{2}\Big((y_{\bar{2}3} + y_{34})^2 - y_{34}^2 - y_{\bar{2}3}^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(y_{\bar{2}4}^2 - y_{34}^2 - y_{\bar{2}3}^2\Big).$$

Dies ist für alle Kombinationen der verschiedenen $y_{\bar{i}j}$ durchführbar, da jede Differenz dieser Form als Summe der anderen möglichen Differenzen ausgedrückt werden kann. Damit lauten die gesuchten Terme in T:

$$\left(i\,\frac{1}{y_{2\bar{3}}^2} - i\,\frac{y_{\bar{1}4}^2}{y_{1\bar{2}}^2 y_{\bar{3}4}^2}\right)(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2). \tag{3.21}$$

Durch Quadrieren der Summanden $\propto \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2$ in Gl 3.20 ergibt sich dann der folgende Beitrag in T^2:

$$\frac{1}{2}\,\frac{y_{\bar{1}3}^2\;y_{\bar{2}4}^2}{y_{1\bar{2}}^2\;y_{2\bar{3}}^2\;y_{\bar{3}4}^2}(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2). \tag{3.22}$$

Summanden mit $\boldsymbol{\theta_3, \theta_4, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2}$

Zunächst werden die Summanden in T untersucht, welche die 4. Ordnung in Form von $\theta_3, \theta_4, \bar{\theta}_1$ und $\bar{\theta}_2$ enthalten. Diese Terme sind eine Mischung aus allen vier chiralen Grassmann-Spinoren und können damit nicht in den Ausdrücken ρ_{ij} auftreten, da dort jeweils nur zwei von diesen Variablen vorkommen. Somit liefern T_0 und T_{222} für die 4. Ordnung in T keinen Beitrag. Im Teil T_{212} sind nur der Summand $\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}$ und die drei Produkte mit ihm wichtig. Dies sieht man bereits an den Indices der anderen beiden Terme: In $\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\bar{\theta}_{24}$ treten an erwünschten Variablen nur θ_3 und $\bar{\theta}_2$ auf, für die gesuchte Kombination fehlen θ_4 und $\bar{\theta}_1$. Der andere Summand $\theta_{13}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}$ enthält $\theta_3, \bar{\theta}_2$ und $\bar{\theta}_1$, es fehlt also θ_4.

Die auftretenden Nenner in T kann man nun durch eine Strukturbetrachtung ermitteln. Der Term $\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}$ enthält zwei Ausdrücke der Form $\tilde{x}_{\bar{i}j}^{-1}$, in denen gemäß den Definitionen in Gl. 3.6 jeweils die superkonforme 2-Punkt-Funktion mit $k = 1$ auftritt. Nun setzt man die Entwicklung aus Gl. 3.14 ein und drückt alle y_{ij}-Kombinationen wie am Anfang dieses Kapitels beschrieben durch die chiralen und antichiralen Variablen aus. Für jeden dieser beiden Einzelausdrücke ist dann nur noch die 0. Ordnung interessant, da die zweite bereits in jedem Summanden nichtchirale Grassmann-Variablen enthält. Die gesuchte Spinor-Kombination 4. Ordnung entsteht durch Muliplikation der äußeren Grassmann-Spinoren $\theta_{43}, \bar{\theta}_{21}$ mit denen aus der Entwicklung von $\tilde{x}_{\bar{2}3}$, wobei dieser Term gemäß Gl. 3.6 nur Terme im Zähler liefert. Somit kommen insgesamt im Nenner maximal die Potenzen $\bar{y}_{12}^2$ und y_{34}^2 vor, wie man an den Indices $_{\bar{4}3}$ und $_{\bar{2}1}$ sieht.

Den maximalen Nenner in $(\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\tilde{x}_{\bar{2}3}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21})^2$ identifiziert man dann entsprechend als $(\bar{y}_{12}^2)^2(y_{34}^2)^2$. Analog zu den obigen Betrachtungen sieht man, dass in der Entwicklung von $\theta_{43}\tilde{x}_{\bar{4}3}^{-1}\bar{\theta}_{24}$ die höchste Ordnung im Nenner y_{34}^2 ist, bei $\theta_{13}\tilde{x}_{\bar{2}1}^{-1}\bar{\theta}_{21}$ ist dies $\bar{y}_{12}^2$.

Die beiden Produkte in der 3. Zeile von Gl. 3.5 tragen also mit den maximalen Potenzen $\bar{y}_{12}^2(y_{34}^2)^2$ und $(\bar{y}_{12}^2)^2 y_{34}^2$ bei.
Die 4. Ordnung in T^2 ergibt sich als Quadrat der 2. Ordnung in T. Wie in Gl. 3.20 erkennbar, besitzten alle Terme dort höchstens den Nenner $\bar{y}_{12}^2 y_{34}^2$, was für die gesuchte Spinor-Kombinationen in T^2 einen maximalen Nenner von $(\bar{y}_{12}^2)^2(y_{34}^2)^2$ ergibt.

3.5 Überprüfung der chiralen Ward-Identität in 2.Ordnung

Nun soll stichprobenartig überprüft werden, ob die Gleichung 3.8 auch in chiralen und antichiralen Koordinaten gilt, also alle Terme mit $\bar{\theta}_3, \bar{\theta}_4, \theta_1$ und θ_2 wegfallen. Diese treten wie beschrieben nur in T und $\mathcal{I}_1$ auf. Dementsprechend dürfen bereits die Produkte aus den Potenzen von $\mathcal{I}_1$ und den Polynomen in T in jeder Zeile von Gl. 3.8 diese Variablen nicht mehr enthalten, ohne die Multiplikation mit dem Vorfaktor oder mit $\mathcal{I}_2$.
Da die Überprüfung nur in der 2. Ordnung stattfindet, wurden zunächst $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_1^{-1}$ bis zur 2. Ordnung in den Grassmann-Spinoren entwickelt. Zur Berechnung kann man wieder die Formel für die superkonforme 2-Punkt-Funktion aus Gl. 3.14 für $k = 1$ und $k = -1$ verwenden und erhält:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 = \frac{y_{\bar{1}4}^2\ y_{\bar{2}3}^2}{y_{\bar{1}\bar{2}}^2\ y_{34}^2}\Bigg[& 1 + 4i\frac{y_{\bar{1}\bar{2}\nu}}{y_{\bar{1}\bar{2}}^2}\ \theta_2\sigma^\nu(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) - 4i\frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1 - 4i\frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_3 \\ & - 4i\frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{1}3}^2}\ \theta_2\sigma^\nu(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_3) + 4i\frac{y_{34\nu}}{y_{34}^2}\ (\theta_4 - \theta_3)\sigma^\nu\bar{\theta}_3 + (...)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{I}_1} = \frac{y_{\bar{1}\bar{2}}^2\ y_{34}^2}{y_{\bar{1}4}^2\ y_{\bar{2}3}^2}\Bigg[& 1 - 4i\frac{y_{\bar{1}\bar{2}\nu}}{y_{\bar{1}\bar{2}}^2}\ \theta_2\sigma^\nu(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) + 4i\frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1 + 4i\frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_3 \\ & + 4i\frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{1}3}^2}\ \theta_2\sigma^\nu(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_3) - 4i\frac{y_{34\nu}}{y_{34}^2}\ (\theta_4 - \theta_3)\sigma^\nu\bar{\theta}_3 + (...)\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Vergleicht man Gl. 3.23 mit den Summanden in T aus Gl. 3.19, so sieht man direkt, dass alle Terme mit den Variablen $\bar{\theta}_3, \bar{\theta}_4, \theta_1, \theta_2$ dort mit den selben $y_{\bar{i}j}$-Faktoren aber genau mit umgekehrten Vorzeichen auftreten. Außerdem fehlt ihnen der Faktor $4i$. Nun betrachtet man das erste Produkt $\mathcal{I}_1(1 + 4i\ T + (...))$ aus Gl. 3.8, welches in insgesamt drei Summanden der Korrelationsfunktion auftritt. Die 2. Ordnung ergibt sich aus Multiplikation der 0. Ordnung in einem Faktor mit der 2. Ordnung des anderen Faktors. Die 0. Ordnung ist in beiden Fällen einfach 1, sodass man die Terme in Gl. 3.23 und 3.19 lediglich addieren muss, wobei Letztere den Faktor $4i$ erhalten und alle Teile mit nicht-chiralen Grassmann-Spinoren wegfallen.

Auch im nächsten Produkt $\mathcal{I}_1^2(1 + 8i\ T + (...))$ verschwinden alle unerwünschten Terme. Dies sieht man direkt an Gl. 3.23: Die 2. Ordnung ihres Quadrats ist $2\cdot$ (2. Ordnung $(\mathcal{I}_1)$), also werden alle Terme verdoppelt und haben dann den passenden Faktor $8i$, der im entsprechenden Polynom von T steht.

Das dritte Produkt ist $\mathcal{I}_1^3(1+12i\ T+(...))$. Für die dritte Potenz von $\mathcal{I}_1$ addiert man dann analog die 2. Ordnung von $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_1^2$ und erhält damit den globalen Faktor $12i$, sodass wieder alle Terme in Gl. 3.19 ausgelöscht werden. Die letzte zu untersuchende Struktur ist dann $\mathcal{I}_1^{-1}(1-4i\ T+(...))$. Hier liegen die gleichen Terme vor wie im ersten Produkt, nur sind bei beiden Faktoren die Vorzeichen umgedreht (siehe Gl 3.24). Somit heben sich wieder alle Summanden mit unerwünschten Grassmann-Variablen weg.

Alle Angaben zu T beruhen auf der Definition in Gl. 3.4. In der mir vorliegenden Version der Dissertation von Herrn Knuth waren in dieser Formel alle Vorzeichen umgekehrt und im Stichproben-Test haben sich die Summanden mit $\bar{\theta}_3, \bar{\theta}_4, \theta_1, \theta_2$ dann genau verdoppelt.

Dadurch konnte gezeigt werden, dass hier in [Knu12] ein Vorzeichenfehler vorliegt, welcher dann auch vom Autor bestätigt und in der elektronisch publizierten Version korrigiert wurde, sodass die hier präsentierte Variante von T richtig ist.

3.6 Entwicklung der Invarianten und des Vorfaktors

Nachdem die Vorzeichenwahl von T in der Dissertation korrigiert und die Definition mit Gl. 3.4 ersetzt wurde, konnte mit den hier gegebenen Formeln die gesuchte Korrelationsfunktion berechnet werden. Dafür fehlen noch die Beiträge der Invarianten $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_1$ und des Vorfaktors. Hier wurden analog zur Entwicklung von T die gesamte 2. Ordnung in den richtigen Grassmann-Spinoren sowie in 4. Ordnung die Terme mit $(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)$ bestimmt. Da es sich bei allen drei Termen um Quotienten von 2-Punkt-Funktionen handelt, verwendet man wieder Gl. 3.14 mit den entsprechenden Werten von k.

Die benötigten Teile der in Gl. 3.17 gegebenen Kombinationen sind im Folgenden aufgeführt.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3} &= \frac{1}{(y_{\bar{1}4}^2)^3(y_{\bar{2}3}^2)^3}\Bigg[1+12i\ \frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2+12i\ \frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1 \\ &\quad -24\ \frac{1}{y_{\bar{2}3}^2}(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)+(...)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{I}_1}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3} &= \frac{1}{(y_{\bar{1}4}^2)^2(y_{\bar{2}3}^2)^2 y_{\bar{1}\bar{2}}^2\ y_{34}^2}\Bigg[1+12i\ \frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2+8i\ \frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1 \\ &\quad -24\ \frac{1}{y_{\bar{2}3}^2}(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)+(...)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{I}_1^2}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3} &= \frac{1}{y_{\bar{1}4}^2\ y_{\bar{2}3}^2(y_{\bar{1}\bar{2}}^2)^2(y_{34}^2)^2}\Bigg[1+12i\ \frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2+4i\ \frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1 \\ &\quad -24\ \frac{1}{y_{\bar{2}3}^2}(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)+(...)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\frac{\mathcal{I}_1^3}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3} = \frac{1}{(y_{\bar{1}\bar{2}}^2)^3(y_{34}^2)^3}\Bigg[1+12i\ \frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2-24\ \frac{1}{y_{\bar{2}3}^2}(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)+(...)\Bigg] \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &= \frac{y_{\bar{1}4}^2\ y_{\bar{2}3}^2}{y_{\bar{1}3}^2\ y_{\bar{2}4}^2}\Bigg[1+4i\ \frac{y_{\bar{1}3\nu}}{y_{\bar{1}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_1-4i\ \frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2 \\ &\quad -4i\ \frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1+4i\ \frac{y_{\bar{2}4\nu}}{y_{\bar{2}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_2-8\ \frac{1}{y_{\bar{2}3}^2}(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)+(...)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{I}_2^2}{\mathcal{I}_1} &= \frac{y_{\bar{1}\bar{2}}^2\ y_{34}^2\ y_{\bar{1}4}^2\ y_{\bar{2}3}^2}{(y_{\bar{1}3}^2)^2(y_{\bar{2}4}^2)^2}\Bigg[1+8i\ \frac{y_{\bar{1}3\nu}}{y_{\bar{1}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_1-8i\ \frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2 \\ &\quad -4i\ \frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1+8i\ \frac{y_{\bar{2}4\nu}}{y_{\bar{2}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_2-24\ \frac{1}{y_{\bar{2}3}^2}(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{I}_2}+\mathcal{I}_2^2 &= \left(\frac{(y_{\bar{1}4}^2)^2(y_{\bar{2}3}^2)^2}{(y_{\bar{1}3}^2)^2(y_{\bar{2}4}^2)^2}+\frac{y_{\bar{1}3}^2\ y_{\bar{2}4}^2}{y_{\bar{1}4}^2\ y_{\bar{2}3}^2}\right)+4i\left(2\frac{(y_{\bar{1}4}^2)^2(y_{\bar{2}3}^2)^2}{(y_{\bar{1}3}^2)^2(y_{\bar{2}4}^2)^2}-\frac{y_{\bar{1}3}^2\ y_{\bar{2}4}^2}{y_{\bar{1}4}^2\ y_{\bar{2}3}^2}\right) \\ &\quad \cdot\left(\frac{y_{\bar{1}3\nu}}{y_{\bar{1}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_1-\frac{y_{\bar{2}3\nu}}{y_{\bar{2}3}^2}\ \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2-\frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1+\frac{y_{\bar{2}4\nu}}{y_{\bar{2}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_2\right) \\ &\quad -24\ \frac{(y_{\bar{1}4}^2)^2 y_{\bar{2}3}^2}{(y_{\bar{1}3}^2)^2(y_{\bar{2}4}^2)^2}(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)+(...) \end{aligned} \tag{3.31}$$

3.7 Skalare Komponenten-Korrelation

Um nun die gesuchte Korrelationsfunktion zu berechnen, betrachtet man in jedem Summanden in Gl. 3.8, wie dieser Term als Produkt aus den Vorfaktorkombinationen und dem jeweiligen Polynom in T zustande kommt. In der 2. Ordnung benötigt man jeweils nur die Terme $\propto \theta_3\sigma^\nu\bar{\theta}_2$, in der 4. Ordnung entsprechend $(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)$. Die Korrelationsfunktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)m^*(x_2)\,m(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ ergibt sich gemäß Gl. 3.16 dann aus dem negativen Koeffizienten des Terms $(\theta_3\theta_3)(\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2)$, was zu folgendem Ergebnis geführt hat:

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\varphi^*(x_1)m^*(x_2)\,m(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle = \langle 0|\varphi^*(\bar{y}_1)m^*(\bar{y}_2)\,m(y_3)\,\varphi(y_4)|0\rangle\Big|_{\theta,\bar{\theta}=0}\\
&= A\frac{24}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^4} + A'\,24\frac{x_{14}^2}{(x_{12}^2)^4(x_{34}^2)^4} + B\frac{8}{(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^3x_{13}^2\,x_{24}^2}\\
&+ B'\left[\frac{8}{x_{14}^2\,(x_{23}^2)^2(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2} + \frac{8}{(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^3x_{12}^2\,x_{34}^2}\left(2 - \frac{x_{13}^2\,x_{24}^2}{x_{12}^2\,x_{34}^2}\right)\right]\\
&+ B''\left[\frac{8}{(x_{12}^2)^3(x_{34}^2)^3}\left(\frac{x_{14}^2}{x_{13}^2\,x_{24}^2} + \frac{2}{x_{23}^2}\right) + \frac{8}{x_{14}^2\,(x_{23}^2)^2(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2}\left(1 - \frac{x_{13}^2\,x_{24}^2}{x_{12}^2\,x_{34}^2}\right)\right]\\
&+ C\left[\frac{4}{x_{23}^2\,x_{13}^2\,x_{24}^2\,(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2}\left(1 + \frac{x_{12}^2\,x_{34}^2}{x_{14}^2\,x_{23}^2}\right) - \frac{4}{x_{14}^2\,(x_{23}^2)^2(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2}\right]\\
&+ D\frac{8}{(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^3x_{13}^2\,x_{24}^2} + D'\left[24\frac{x_{13}^2\,x_{24}^2}{x_{14}^2\,(x_{23}^2)^2(x_{12}^2)^3(x_{34}^2)^3}\left(1 + \frac{x_{12}^2\,x_{34}^2}{x_{14}^2\,x_{23}^2}\right)\right.\\
&\left. - 16\frac{(x_{13}^2)^2(x_{24}^2)^2}{(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^3(x_{12}^2)^3(x_{34}^2)^3} + 8\frac{x_{14}^2}{x_{13}^2\,x_{24}^2\,(x_{12}^2)^3(x_{34}^2)^3}\right]. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Die unterschiedlichen Bedingungen an die Funktion können dazu führen, dass einige der Koeffizienten verschwinden müssen. Um unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden, wird zunächst die Analyse dieser Funktion durchgeführt, bevor dann in Kapitel 4.4 für die verbleibenden Summanden die Polbounds der fermionischen Korrelationsfunktion überprüft werden.

4 Analyse der Ergebnisse

4.1 Positivität von konformen Korrelationsfunktionen

In Kapitel 1 wurde beschrieben, wie aus den Quantenfeldern $\phi(x)$ Zustände auf dem Hilbertraum konstruiert werden können. Die Forderung nach einem positiv-semidefiniten Skalarprodukt zwischen diesen Zuständen ergab die folgende Positivitätsbedingung.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\left|\int dx_1\ dx_2\ f(x_1,x_2)\phi(x_1)\xi(x_2)|0\rangle\right|\right|^2 \\
&= \int\int \bar{f}(x_1,x_2)f(x_3,x_4)\langle 0|\xi^\dagger(x_2)\phi^\dagger(x_1)\phi(x_3)\xi(x_4)|0\rangle \\
&= \int\int \bar{f}(x_2,x_1)f(x_3,x_4)\langle 0|\xi^\dagger(x_1)\phi^\dagger(x_2)\phi(x_3)\xi(x_4)|0\rangle
\end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1.1 Überprüfung der Positivität

Nun soll diese Bedingung für global konform invariante Korrelationsfunktionen untersucht werden. Der gesamte Hilbertraum setzt also sich zusammen aus Untervektorräumen, die zu verschiedenen irreduziblen Darstellungen der konformen Gruppe gehören. Die Operatoren Π_α sind Projektionsoperatoren auf diese Unterräume, wobei $\alpha = (d, j_1, j_2)$ die jeweilige Darstellung bezeichnet. Auf jedem Unterraum soll ebenfalls ein positiv-semidefinites Skalarprodukt existieren, sodass Gl. 4.1 auch für die Projektionen der Felder gilt:

$$0 \leq \int\int \bar{f}(x_2,x_1)f(x_3,x_4)\ \langle 0|\xi^\dagger(x_1)\,\phi^\dagger(x_2)\,\Pi_\alpha\,\phi(x_3)\,\xi(x_4)|0\rangle. \tag{4.2}$$

Die projizierten Korrelationsfunktionen können weiter spezifiziert werden, indem man den *Casimir-Operator* der konformen Gruppe verwendet. Für jede Lie-Algebra kann man einen solchen Operator definieren, der mit allen Elementen der Algebra kommutiert. Dementsprechend ist er in jeder Darstellung proportional zur Identität und seine Eigenwerte charakterisieren die jeweilige Darstellung.

Der Casimir-Operator der konformen Algebra lautet (siehe [Knu12] S.12):

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Big(P_\mu K^\mu + K_\mu P^\mu\Big) - D^2.$$

In jeder irreduziblen Darstellung der konformen Gruppe hat er dann die Form $\mathcal{C} = \lambda_\alpha \mathbb{I}$, was mit Hilfe der Projektoren geschrieben werden kann als $\mathcal{C}\ \Pi_\alpha = \lambda_\alpha \Pi_\alpha$. Für die projizierte Korrelationsfunktion bedeutet dies

$$\langle 0|\xi^\dagger(x_1)\,\phi^\dagger(x_2)\,\mathcal{C}\ \Pi_\alpha\,\phi(x_3)\,\xi(x_4)|0\rangle = \lambda_\alpha \langle 0|\xi^\dagger(x_1)\,\phi^\dagger(x_2)\,\Pi_\alpha\,\phi(x_3)\,\xi(x_4)|0\rangle. \tag{4.3}$$

Nun zieht man den Casimir-Operator vor die Korrelationsfunktion. Dazu drückt man ihn wie oben angegeben durch die konformen Generatoren aus, deren Kommutatorrelationen mit den Feldern durch Gl. 2.2, 2.6 und 2.10 gegeben sind. Die Generatoren löschen den Vakuumzustand auf der linken Seite aus, sodass lediglich die Ableitungen der Felder übrig bleiben, die hier zusammengefasst werden zum Differentialoperator $\mathfrak{D}$. Man erhält also die Eigenwertgleichung:

$$\mathfrak{D}\langle 0|\xi^\dagger(x_1)\,\phi^\dagger(x_2)\,\Pi_\alpha\,\phi(x_3)\,\xi(x_4)|0\rangle = \lambda_\alpha \langle 0|\xi^\dagger(x_1)\,\phi^\dagger(x_2)\,\Pi_\alpha\,\phi(x_3)\,\xi(x_4)|0\rangle.$$

Für Skalarfelder ist diese Gleichung eindeutig durch so genannte *Partialwellen* lösbar (siehe [DoOs04] S. 493 f). Die projizierte Korrelationsfunktion ist dann von der Form

$$\langle 0|\xi^\dagger(x_1)\,\phi^\dagger(x_2)\,\Pi_\alpha\,\phi(x_3)\,\xi(x_4)|0\rangle = \mathcal{B}_\alpha \beta_\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Dabei sind die Partialwellen β_α explizit bekannt und ihre Koeffizienten $\mathcal{B}_\alpha$ sind Funktionen der Vorfaktoren c_{ij} in der konformen Korrelationsfunktion aus Gl. 2.19. Man kann die Partialwellen nun so wählen, dass das Integral in Gl. 4.2 positiv ist:

$$\int\int \bar{f}(x_2, x_1) f(x_3, x_4) \beta_\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) > 0. \tag{4.4}$$

Damit Gl. 4.2 erfüllt ist, muss also für die Koeffzienten gelten:

$$\mathcal{B}_\alpha \geq 0 \quad \forall\ \alpha. \tag{4.5}$$

Dann ist auch automatisch Gl. 4.1 erfüllt, da die gesamte Korrelationsfunktion die Summe ihrer projizierten Anteile ist.

$$\begin{aligned}\int\!\!\int \bar{f}f\ \langle 0|\,\xi^\dagger\phi^\dagger\phi\,\xi\,|0\rangle &= \sum_\alpha \int\!\!\int \bar{f}f\langle 0|\,\xi^\dagger\phi^\dagger\,\Pi_\alpha\,\phi\,\xi\,|0\rangle \\ &= \sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha \int\!\!\int \bar{f}f\ \beta_\alpha \geq 0\end{aligned}$$

Außerdem stellt die Positivität der Partialwellen-Koeffizienten sicher, dass die Beiträge von positiven Unterdarstellungen mit den richtigen Vorzeichen in die 4-Punkt-Funktion eingehen. Um die Positivität zu untersuchen, muss man also die Korrelationsfunktion in den Partialwellen entwickeln und die Koeffizienten $\mathcal{B}_\alpha$ berechnen. Aus der Forderung in Gl. 4.5 erhält man dann Ungleichungen für die Koeffizienten c_{ij} der Korrelationsfunktion untereinander. Diese Ungleichungen sollen für die Ausgangsfunktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)\varphi^*(x_2)\,\varphi(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ und die aus der chiralen Ward-Identität erhaltene Komponentenfunktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)m^*(x_2)\,m(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ verglichen werden.

4.1.2 Entwicklung der Korrelationsfunktion in Partialwellen

Die Entwicklung der 4-Punkt-Funktion in Partialwellen wurde nach der in [NiReTo05] vorgestellten Methode durchgeführt. Dafür muss die Funktion vom Typ $\langle 0|A^*B^*B\,A|0\rangle$ sein, wobei die Felder A und B die Skalendimensionen d_A und d_B haben sollen. Zunächst klammert man wie in Gl. 2.21 einen Vorfaktor aus und drückt die verbleibende Funktion f durch die konformen Cross-Ratios s und t in Gl. 2.20 aus.

$$\begin{aligned}\langle 0|A^*(x_1)B^*(x_2)B(x_3)A(x_4)|0\rangle &=: \frac{f(s,t)}{(x_{14}^2)^{d_A}(x_{23}^2)^{d_B}} \\ &= \left(\frac{s}{t}\right)^{d_A} \frac{f(s,t)}{(x_{12}^2)^{d_A}(x_{23}^2)^{d_B-d_A}(x_{34}^2)^{d_A}}\end{aligned} \tag{4.6}$$

Die Partialwellen werden mit drei Indices gekennzeichnet: $\beta^\delta_{\kappa L}$.
Dabei ist $\delta := d_B - d_A$. Durch L sowie den Twist κ werden die irreduziblen Darstellungen charakterisiert, wobei nur solche mit $j_1 = j_2 = j$ auftreten.

$$\begin{aligned}&\alpha = (d, j_1, j_2) = (L + 2\kappa,\ {}^L\!/\!_2,\ {}^L\!/\!_2) \\ \Rightarrow\quad &\kappa = \frac{d}{2} - \frac{L}{2} \qquad L = 2j\end{aligned}$$

Diese Darstellungen müssen dem in Kapitel 2 beschriebenen Unitaritätsbound genügen, da sie andernfalls ein indefinites Skalarprodukt besitzen würden. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen an die Werte von κ und L:

$$\begin{aligned}
&\text{Für } L > 0: \quad d \geq L + 2 \quad \Rightarrow \quad \kappa \geq 1 \\
&\text{Für } L = 0: \quad d \geq 1 \quad \text{oder} \quad d = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa \geq \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \kappa = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Außerdem folgt aus der Rationalität der 4-Punkt-Funktion, dass $(\kappa - \delta/2)$ ganzzahlig sein muss. Die Entwicklung der Funktion in Partialwellen ist von folgender Form (siehe [NiReTo05] S.289 ff):

$$\begin{aligned}
\langle 0|A^*(x_1)B^*(x_2)B(x_3)A(x_4)|0\rangle &= \frac{1}{(x_{12}^2)^{d_A}(x_{23}^2)^{\delta}(x_{34}^2)^{d_A}} \sum_{\kappa,L} \mathcal{B}_{\kappa L}\ \beta_{\kappa L}^{\delta}(s,t) \\
\Rightarrow \left(\frac{s}{t}\right)^{d_A} f(s,t) &= \sum_{\kappa,L} \mathcal{B}_{\kappa L}\ \beta_{\kappa L}^{\delta}(s,t).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Für die weitere Rechnung werden die chiralen Variablen u und v verwendet, die Funktionen der Cross-Ratios sind.

$$s = u \cdot v \qquad\qquad t = (1-u)\cdot(1-v) \tag{4.9}$$

Die Partialwellen selbst sind durch folgende Kombinationen von hypergeometrischen Funktionen ${}_2F_1(a,b;c;z)$ darstellbar:

$$\beta_{\kappa L}^{\delta} = \frac{uv}{u-v}\Big(G_{\kappa+L-\delta/2}^{\delta}(u)\ G_{\kappa-1-\delta/2}^{\delta}(v) - G_{\kappa+L-\delta/2}^{\delta}(v)\ G_{\kappa-1-\delta/2}^{\delta}(u)\Big). \tag{4.10}$$

Dabei sind die Funktionen $G_{\nu}^{\delta}(z)$ definiert als:

$$G_{\nu}^{\delta}(z) := z^{\nu} \cdot {}_2F_1(\nu,\, \nu;\, 2\nu+\delta;\, z).$$

Durch Einsetzen von Gl. 4.10 in Gl. 4.8 ergibt sich dann:

$$\frac{u-v}{uv}\left(\frac{s}{t}\right)^{d_A} f(s,t) = \sum_{\kappa,L} \mathcal{B}_{\kappa,L}\Big(G_{\kappa+L-\delta/2}^{\delta}(u)\ G_{\kappa-1-\delta/2}^{\delta}(v) - G_{\kappa+L-\delta/2}^{\delta}(v)\ G_{\kappa-1-\delta/2}^{\delta}(u)\Big). \tag{4.11}$$

Drückt man auch die linke Seite der Gleichung durch die chiralen Variablen u und v aus, so wird diese bis auf einen möglichen Term $\propto \frac{(u-v)}{uv}$ zu einer endlichen Summe aus Kombinationen der Form

$$\left(u^i \text{ oder } \hat{u}^i\right) \cdot \left(v^j \text{ oder } \hat{v}^j\right) - \left(v^i \text{ oder } \hat{v}^i\right) \cdot \left(u^j \text{ oder } \hat{u}^j\right), \quad i,j \geq 0 \quad \hat{z} := \frac{z}{1-z}.$$

Diese Kombinationen können ebenfalls als Reihen in den erweiterten hypergeometrischen Funktionen $G^\delta_\nu(z)$ entwickelt werden. Für $\delta \geq 0$ lautet diese Entwicklung:

$$\begin{aligned} z^\nu &= \sum_{\nu \in p+\mathbb{N}_0} \frac{(-1)^{\nu-p}\ ((p)_{\nu-p})^2}{(\nu-p)!\ (\nu+p+\delta-1)_{\nu-p}}\ G^\delta_\nu(z) \\ \hat{z}^\nu &= \sum_{\nu \in p+\mathbb{N}_0} \frac{(p)_{\nu-p}\ (p+\delta)_{\nu-p}}{(\nu-p)!\ (\nu+p+\delta-1)_{\nu-p}}\ G^\delta_\nu(z). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dabei bezeichnet $(q)_n$ das Pochhammer-Symbol:

$$(q)_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ q \cdot (q+1) \cdot \ldots \cdot (q+n-1) & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Setzt man dies auf der linken Seite von Gl. 4.11 ein, so ergibt sich dort (ohne den gesonderten Term) eine Summe $\sum_{\mu\nu} X_{\mu\nu}\left(G^\delta_\mu(u)\ G^\delta_\nu(v) - G^\delta_\nu(v)\ G^\delta_\mu(u)\right)$. Jetzt kann man einen Koeffizientenvergleich in den $G^\delta_\nu(z)$ durchführen und die Entwicklungskoeffizienten $\mathcal{B}_{\kappa L}$ ablesen. Dafür muss man die Indices μ und ν folgendermaßen durch κ und L ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mu &= \kappa + L - \frac{\delta}{2} \qquad \nu = \kappa - 1 - \frac{\delta}{2} \quad \text{falls} \quad \mu > \nu \\ \mu &= \kappa - 1 - \frac{\delta}{2} \qquad \nu = \kappa + L - \frac{\delta}{2} \quad \text{falls} \quad \mu < \nu. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\mathcal{B}_{\kappa L}$ lauten also:

$$\mathcal{B}_{\kappa L} = X_{\kappa+L-\delta/2,\ \kappa-1-\delta/2} - X_{\kappa-1-\delta/2,\ \kappa+L-\delta/2}.$$

4.2 Vollständige Analyse der gemischten skalaren Funktion

4.2.1 Prüfung der Polschranken und des Unitaritätsbounds

Wie im letzten Abschnitt beschrieben, wird die Korrelationsfunktion auf die verschiedenen irreduziblen Darstellungen der konformen Gruppe projiziert, die durch die Zahlen κ und L charakterisiert sind. In Gl. 4.7 sind die möglichen Kombinationen dieser Werte aufgelistet, die dem Unitaritätsbound genügen.
Ergibt nun ein Summand in der Korrelationsfunktion bei seiner Entwicklung gemäß Gl. 4.12 verbotene Kombinationen von κ und L, so muss sein Koeffizient verschwinden. Durch die Betrachtung der in Gl. 2.18 gegebenen Polschranken kann dies bereits zum Teil überprüft werden: Verletzt ein Summand der Korrelationsfunktion diese Schranken, so würden in seiner Partialwellenentwicklung Darstellungen auftreten, die nicht den Unitariätsbound erfüllen. Deshalb wird als erstes die Einhaltung der Polschranken für alle möglichen Paare von Feldern in der Korrelation überprüft. Das erste Feld im Multiplet $\varphi(x)$ hat eine Skalendimension von $d = 3$ und das Komponentenfeld $m(x)$ dementsprechend $d' = 4$.
Außerdem sind beide Skalarfelder, also sind alle Spinquantenzahlen 0. Dasselbe gilt für die komplex konjugierten Felder, wodurch sich die folgenden Polschranken für die Korrelationen zwischen den Feldern ergeben:

$$\begin{aligned} &\varphi^*(x_1) \leftrightarrow \varphi(x_4): \quad \mu_{\max} = 3 \qquad && m^*(x_2) \leftrightarrow m(x_3): \quad \mu_{\max} = 4 \\ &\varphi^*(x_1) \leftrightarrow m(x_3): \quad \mu_{\max} = 3 \qquad && m^*(x_2) \leftrightarrow \varphi(x_4): \quad \mu_{\max} = 3 \\ &\varphi^*(x_1) \leftrightarrow m^*(x_2): \quad \mu_{\max} = 3 \qquad && m(x_3) \leftrightarrow \varphi(x_4): \quad \mu_{\max} = 3. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Somit dürfen in der Korrelationsfunktion in Gl. 3.32 die Terme x_{13}^2, x_{24}^2, x_{12}^2, x_{34}^2 und x_{14}^2 im Nenner maximal mit dem Exponenten 3 vorkommen, der Term x_{23}^2 maximal mit dem Exponenten 4. Im zweiten Summand steht $(x_{12}^2)^4(x_{34}^2)^4$ im Nenner. Da dies die Polschranken verletzt, muss der Term wegfallen, was allgemein nur erreicht werden kann durch die Bedingung

$$A' = 0. \tag{4.15}$$

Die übrigen Terme genügen zwar den Polschranken, in ihrer Entwicklung können aber trotzdem noch verbotene Partialwellen vorkommen. Dies kann man an den auftretenden Potenzen von s und t nach der Multiplikation der Funktion mit $(s/t)^{d_A}$ sehen. Die Potenz des führenden Terms in s gibt den Startwert für κ an, der dazugehörige Faktor in t ist von der Form $(1-t)^L \cdot (1+\mathcal{O}(1-t))$ (siehe [NiReTo05] S.289). Um die Funktion in Gl. 3.32 in die Form von Gl. 4.6 zu bringen, klammert man den Faktor $(x_{14}^2)^{-3}(x_{23}^2)^{-4}$ aus, da $d_A = 3$ und $d_B = 4$ gilt.

$$\begin{aligned}\langle 0|\varphi^*(x_1)m^*(x_2)\ m(x_3)\ \varphi(x_4)|0\rangle = \frac{1}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^4}\Bigg[& 24\,A + 8(B+D) \\ & + 8B'\left(\frac{t^2}{s^2} + 2\frac{t}{s} - \frac{t}{s^2}\right) \\ & + 8B''\left(2\frac{t^3}{s^3} + \frac{t^4}{s^3} + \frac{t^2}{s^2} - \frac{t^2}{s^3}\right) \\ & + 4C\left(\frac{t^3}{s^2} + \frac{t^2}{s} - \frac{t^2}{s^2}\right) \\ & + 8D'\left(3\frac{t^2}{s^3} + 3\frac{t}{s^2} - 2\frac{t}{s^3} + \frac{t^4}{s^3}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{4.16}$$

Die führende Ordnung von s nach der Multiplikation mit $(s/t)^3$ ist hier s^0, was einem Wert von $\kappa = 0$ entspricht. Dann muss auch $L = 0$ sein, in den Termen ohne s darf also auch kein t vorkommen. In Gl. 4.16 sollten entsprechend Ausdrücke $\propto s^{-3}$ nur die Potenz t^3 enthalten, da dies nach der Multiplikation mit $(s/t)^3$ von der Dimension 1 ist. In den Summanden mit B'' und D' treten jedoch die Terme t^4/s^3, t^2/s^3 und t/s^3 auf, die zu verbotenen Partialwellen führen würden. Somit dürfen diese beiden Summanden nicht in der Korrelationsfunktion stehen und ihre Koeffizienten müssen ebenfalls verschwinden:

$$B'' = 0 \qquad D' = 0. \tag{4.17}$$

Die Bedingungen in Gl. 4.15 und 4.17 zeigen bereits, dass eine positive Ausgangsfunktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)\varphi^*(x_2)\,\varphi(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ nicht automatisch zu positiven Komponenten-Korrelationen führen kann.

4.2.2 Positivitäts-Analyse

Für die Partialwellenentwicklung der dank Gl. 4.15 und 4.17 bereits stark vereinfachten Korrelationsfunktion berechnet man zunächst den in Gl. 4.11 gegebenen Teil.

Dabei müssen alle Terme so umgeschrieben werden, dass keine Produkte von u mit $\hat{u}$ oder v mit $\hat{v}$ vorkommen. Für die Funktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)m^*(x_2)\,m(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ sieht dieser Teil dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\frac{u-v}{uv}\left(\frac{s}{t}\right)^{d_A} f(s,t) = \frac{u-v}{uv}\left(\frac{s}{t}\right)^{3} \Bigg[& 24\,A + 8(B+D)t \\
& + 8B'\left(\frac{t^2}{s^2} + 2\frac{t}{s} - \frac{t}{s^2}\right) + 4C\left(\frac{t^3}{s^2} + \frac{t^2}{s} - \frac{t^2}{s^2}\right)\Bigg] \\
= {} & 24\,A\Big(\hat{u}^3\hat{v}^2 - \hat{u}^2\hat{v}^3\Big) \\
& + 8(B+D)\Big(\hat{u}^2(\hat{v}-v) - \hat{v}^2(\hat{u}-u)\Big) \\
& + 8B'\Big(\hat{u}^2(\hat{v}-1) - \hat{v}^2(\hat{u}-1)\Big) \\
& + 4C\Big(\hat{u}(v-1) - \hat{v}(u-1) + u - v\Big).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Nun können die Entwicklungen aus Gl. 4.12 mit den entsprechenden Werten für p und $\delta = 1$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
& \frac{u-v}{uv}\left(\frac{s}{t}\right)^{3} f(s,t) = 24\,A \sum_{\mu=3}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(3)_{\mu-3}\;(4)_{\mu-3}}{(\mu-3)!\;(\mu+3)_{\mu-3}} \cdot \frac{(2)_{\nu-2}\;(3)_{\nu-2}}{(\nu-2)!\;(\nu+2)_{\nu-2}} \\
& \cdot \Big(G^1_\mu(u)\,G^1_\nu(v) - G^1_\nu(u)\,G^1_\mu(v)\Big) \\
& + 8(B+D) \sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2)_{\mu-2}\;(3)_{\mu-2}}{(\mu-2)!\;(\mu+2)_{\mu-2}} \cdot \frac{(2)_{\nu-1} - (\nu-1)!(-1)^{\nu-1}}{(\nu+1)_{\nu-1}} \\
& \cdot \Big(G^1_\mu(u)\,G^1_\nu(v) - G^1_\nu(u)\,G^1_\mu(v)\Big) \\
& + 8B'\Bigg[\sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2)_{\mu-2}\;(3)_{\mu-2}}{(\mu-2)!\;(\mu+2)_{\mu-2}} \cdot \frac{(2)_{\nu-1}}{(\nu+1)_{\nu-1}} \cdot \Big(G^1_\mu(u)\,G^1_\nu(v) \\
& - G^1_\nu(u)\,G^1_\mu(v)\Big) - \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{(2)_{\mu-2}\;(3)_{\mu-2}}{(\mu-2)!\;(\mu+2)_{\mu-2}} \cdot \Big(G^1_\mu(u)\,G^1_0(v) - G^1_0(u)\,G^1_\mu(v)\Big)\Bigg] \\
& + 4C\Bigg[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2)_{\mu-1}}{(\mu+1)_{\mu-1}} \cdot \frac{(\nu-1)!(-1)^{\nu-1}}{(\nu+1)_{\nu-1}} \cdot \Big(G^1_\mu(u)\,G^1_\nu(v) - G^1_\nu(u)\,G^1_\mu(v)\Big) \\
& + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(\mu-1)!(-1)^{\mu-1} - (2)_{\mu-1}}{(\mu+1)_{\mu-1}} \cdot \Big(G^1_\mu(u)\,G^1_0(v) - G^1_0(u)\,G^1_\mu(v)\Big)\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Dabei wurde verwendet, dass $(1)_{\nu-1} = (\nu-1)!$ und $G_0^1(z) = z^0 \cdot {}_2F_1(0,0;1;z) = 1$ gilt. Somit können die Summen mit nur einem Index interpretiert werden als Teil der Doppelsumme für $\nu = 0$.

Da $\kappa - \delta/2 = \kappa - 1/2$ ganzzahlig sein soll, muss κ halbzahlig sein, wobei für $\kappa = 1/2$ nur der Wert $L = 0$ erlaubt ist. In allen anderen Fällen kann L jede nicht-negative ganze Zahl sein. Wie man sieht, gibt es beliebig viele Koeffizienten $\mathcal{B}_{\kappa L}$, jedoch entstehen für größere Werte von κ und L schwächere Ungleichungen als für kleine Werte, sodass man keine neuen Informationen mehr erhält. Im Folgenden sind die relevanten Kombinationen von κ und L mit den aus Gl. 4.19 berechneten Koeffizienten aufgelistet.

$$\begin{aligned}
&a) \quad \kappa = \frac{3}{2} \quad L = 1 \quad X_{20} - X_{02} = -8B' - 4C \geq 0 \\
&b) \quad \kappa = \frac{3}{2} \quad L = 2 \quad X_{30} - X_{03} = -\frac{48}{5}B' - \frac{4}{5}C \geq 0 \\
&c) \quad \kappa = \frac{5}{2} \quad L = 0 \quad X_{21} - X_{12} = 8B' + 4C \geq 0 \\
&d) \quad \kappa = \frac{5}{2} \quad L = 1 \quad X_{31} - X_{13} = \frac{48}{5}B' + \frac{4}{5}C \geq 0 \\
&e) \quad \kappa = \frac{7}{2} \quad L = 0 \quad X_{32} - X_{23} = 24A + 8(B+D) + 4B' - \frac{2}{3}C \geq 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Kombiniert man die Ungleichungen *a*) und *c*) sowie *b*) und *d*), so erhält man folgende Bedingungen:

$$8B' + 4C = 0 \;\Leftrightarrow\; B' = -\frac{1}{2}C$$
$$\frac{48}{5}B' + \frac{4}{5}C = 0 \;\Leftrightarrow\; B' = -\frac{1}{12}C$$

Woraus sich zwangsläufig ergibt dass

$$C = 0 \qquad \text{und} \qquad B' = 0. \tag{4.21}$$

Somit wurde die Korrelationsfunktion $\langle 0|\varphi^*(x_1) m^*(x_2)\, m(x_3)\, \varphi(x_4)|0\rangle$ auf drei Summanden reduziert.

Bei Betrachtung der Funktion fällt zudem auf, dass die Positivitätsanalyse hier nur Relationen zwischen A und $(B+D)$ ergeben kann, jedoch keine für B und D untereinander. Die verbleibende Ungleichung in e) lautet nun:

$$24\,A + 8(B+D) \geq 0. \tag{4.22}$$

4.3 Vergleich von Ausgangsfunktion und Komponentenfunktion

4.3.1 Positivitätsanalyse der Ausgangsfunktion

Die Ausgangsfunktion $\langle 0|\varphi^*(x_1)\varphi^*(x_2)\,\varphi(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ entspricht der 0. Ordnung in den Grassmann-Variablen bei der Entwicklung der superkonformen 4-Punkt-Funktion und wird dementsprechend nicht verändert. Die Überprüfung der Polschranken und der Einhaltung des Unitaritätsbounds für die gemischte skalare Funktion hat ergeben, dass die Koeffizienten A', B'' und D' alle verschwinden müssen. Deshalb wird die Positivitätsanalyse für die Ausgangsfunktion ebenfalls ohne die zugehörigen Terme durchgeführt. In dieser Funktion würde normalerweise der oben erwähnte Sonderterm $\propto \frac{u-v}{uv}$ auftreten. Da dieser jedoch zum Koeffizienten A' gehört, kann die Partialwellenentwicklung problemlos durchgeführt werden. Hier sind die Felder A und B gleich, dementsprechend gilt $d_A = d_B = 3$, also $\delta = 0$.

In Gl. 2.21 ist somit bereits der richtige Vorfaktor ausgeklammert und man kann die dortige Form der Funktion $f(s,t)$ verwenden. Der Term für die Partialwellenentwicklung lautet damit:

$$\begin{aligned}
\frac{u-v}{uv}\left(\frac{s}{t}\right)^3 f(s,t) = A&\Big(u^3v^2 + \hat{u}^3\hat{v}^2 - u^2v^3 + \hat{u}^2\hat{v}^3\Big)\\
&+ B\Big((u^2-\hat{u}^2)(v-\hat{v}) - (v^2-\hat{v}^2)(u-\hat{u})\Big)\\
&+ B'\Big(u^2v + \hat{u}^2\hat{v} - uv^2 - \hat{u}\hat{v}^2\Big)\\
&+ C\Big(\hat{u}v - u\hat{v}\Big)\\
&+ D\Big((u^2-\hat{u}^2)(\hat{v}^2+v-\hat{v}) - (v^2-\hat{v}^2)(\hat{u}^2+u-\hat{u})\Big).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Nach Einsetzen der Entwicklung aus Gl. 4.12 erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\frac{u-v}{uv}\left(\frac{s}{t}\right)^3 f(s,t) = A \sum_{\mu=3}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{((3)_{\mu-3})^2}{(\mu-3)!\;(\mu+2)_{\mu-3}} \cdot \frac{((2)_{\nu-2})^2}{(\nu-2)!\;(\nu+1)_{\nu-2}} \\
&\cdot \Big((-1)^{\mu-3+\nu-2}+1\Big) \cdot \Big(G^0_\mu(u)\,G^0_\nu(v) - G^0_\nu(u)\,G^0_\mu(v)\Big) \\
&+ B \sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{((2)_{\mu-2})^2}{(\mu-2)!\;(\mu+1)_{\mu-2}} \cdot \frac{(\nu-1)!}{(\nu)_{\nu-1}} \cdot \Big((-1)^{\mu-2}-1\Big)\Big((-1)^{\nu-1}-1\Big) \\
&\cdot \Big(G^0_\mu(u)\,G^0_\nu(v) - G^0_\nu(u)\,G^0_\mu(v)\Big) \\
&+ B' \sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{((2)_{\mu-2})^2}{(\mu-2)!\;(\mu+1)_{\mu-2}} \cdot \frac{(\nu-1)!}{(\nu)_{\nu-1}} \cdot \Big((-1)^{\mu-2+\nu-1}+1\Big) \\
&\cdot \Big(G^0_\mu(u)\,G^0_\nu(v) - G^0_\nu(u)\,G^0_\mu(v)\Big) \\
&+ B'' \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(\mu-1)!}{(\mu)_{\mu-1}} \cdot \Big((-1)^{\mu-1}+1\Big) \cdot \Big(G^0_\mu(u)\,G^0_0(v) - G^0_0(u)\,G^0_\mu(v)\Big) \\
&+ C \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\mu-1)!}{(\mu)_{\mu-1}} \cdot \frac{(\nu-1)!(-1)^{\nu-1}}{(\nu)_{\nu-1}} \cdot \Big(G^0_\mu(u)\,G^0_\nu(v) - G^0_\nu(u)\,G^0_\mu(v)\Big) \\
&+ D \Bigg[\sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{((2)_{\mu-2})^2}{(\mu-2)!\;(\mu+1)_{\mu-2}} \cdot \frac{((2)_{\nu-2})^2}{(\nu-2)!\;(\nu+1)_{\nu-2}} \cdot \Big((-1)^{\mu-2}-1\Big) \\
&\cdot \Big(G^0_\mu(u)\,G^0_\nu(v) - G^0_\nu(u)\,G^0_\mu(v)\Big) \\
&+ \sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{((2)_{\mu-2})^2}{(\mu-2)!\;(\mu+1)_{\mu-2}} \cdot \frac{(\nu-1)!}{(\nu)_{\nu-1}} \cdot \Big((-1)^{\mu-2}-1\Big)\Big((-1)^{\nu-1}-1\Big) \\
&\cdot \Big(G^0_\mu(u)\,G^0_\nu(v) - G^0_\nu(u)\,G^0_\mu(v)\Big)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Da in diesem Fall $\delta = 0$ gilt, darf κ nur ganzzahlige Werte ≥ 1 annehmen. Die ersten drei Koeffizienten, die nicht-triviale Informationen ergeben, sind im folgenden aufgeführt.

$$\begin{aligned}
&f) \qquad \kappa = 2 \quad L = 0 \qquad X_{21} - X_{12} = 2B' + C \geq 0 \\
&g) \qquad \kappa = 3 \quad L = 0 \qquad X_{32} - X_{23} = 2A + 2B + \frac{2}{3}B' - \frac{1}{6}C \geq 0 \\
&h) \qquad \kappa = 4 \quad L = 0 \qquad X_{43} - X_{34} = \frac{9}{5}A - \frac{1}{5}B + \frac{1}{10}B' + \frac{1}{60}C + D \geq 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

4.3.2 Vergleich der Positivitätsbedingungen

Die Bedingung $B' = 0 = C$ aus der Analyse der Komponenten-Korrelationsfunktion bedeutet eine deutliche Positivitätsverschärfung im Vergleich zur Ausgangsfunktion. Dort entstehen lediglich Ungleichungen zwischen diesen Variablen, wie man in $f)$ sieht.

Setzt man in den Termen in Gl. 4.25 $B' = 0 = C$, kann man die verbleibenden Relationen vergleichen. Man kann die Korrelationsfunktion so normieren, dass $A = 1$ gilt. Dann ergibt die Analyse der Ausgangsfunktion:

$$B \geq -1 \qquad B \leq 5D + 9.$$

Aus Gl. 4.22 erhält man in diesem Fall

$$B \geq -3 - D.$$

Betrachtet man jeweils nur noch einen der beiden Parameter, so sieht man, dass keine weitere Positivitätsverschärfung auftritt. Mit (I) sind dabei die Bedingungen aus der Analyse der Ausgangsfunktion gekennzeichnet, mit (II) die aus der Analyse der Komponentenfunktion.

$$\begin{array}{lll}
D = 0: & \text{(I)} \quad 9 \geq B \geq -1 & \text{(II)} \quad B \geq -3 \\
B = 0: & \text{(I)} \quad D \geq -\dfrac{9}{5} & \text{(II)} \quad D \geq -3
\end{array}$$

4.4 Überprüfung der Polschranken der fermionischen Funktion

Da die Positivitätsanalyse mittels Partialwellenentwicklung bisher nur für Korrelationsfunktionen von Skalarfeldern möglich ist, kann für die rein fermionische Funktion lediglich das Einhalten der Polschranken überprüft werden. Das linkshändige Spinorfeld hat die Quantenzahlen $(d, j_1, j_2) = (3/2, 1/2, 0)$, das rechtshändige Feld $(3/2, 0, 1/2)$. Eingesetzt in Gl. 2.18 ergibt dies die folgenden Polschranken:

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}(x_1) \leftrightarrow \psi(x_4): \quad \mu_{\max} = 4 && \bar{\psi}(x_2) \leftrightarrow \psi(x_3): \quad \mu_{\max} = 4 \\
&\bar{\psi}(x_1) \leftrightarrow \psi(x_3): \quad \mu_{\max} = 4 && \bar{\psi}(x_2) \leftrightarrow \psi(x_4): \quad \mu_{\max} = 4 \\
&\bar{\psi}(x_1) \leftrightarrow \bar{\psi}(x_2): \quad \mu_{\max} = 3 && \psi(x_3) \leftrightarrow \psi(x_4): \quad \mu_{\max} = 3.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Dementsprechend dürfen die Terme x_{14}^2, x_{23}^2, x_{13}^2 und x_{24}^2 im Nenner maximal mit der Potenz 4 auftreten, die Terme x_{12}^2 und x_{34}^2 nur mit der Potenz 3.

Wie bereits beschrieben, muss die Funktion zur Überprüfung dieser Schranken nicht vollständig entwickelt werden, sondern es genügt, die auftretenden Nenner zu betrachten. Durch die Analyse der skalaren Komponenten-Korrelation sind bereits alle Koeffizienten in Gl. 3.8 bis auf A, B und D weggefallen, sodass alle weiteren Korrelationsfunktionen höchstens diese drei Teile enthalten können.

Die Summanden mit den Faktoren A und B bestehen nur aus Potenzen von $\mathcal{I}_2$, multipliziert mit dem Gesamtvorfaktor der superkonformen 4-Punkt-Funktion. Die Invariante $\mathcal{I}_2$ ist ein Quotient aus superkonformen 2-Punkt-Funktionen mit $k = 1$, der Vorfaktor entsprechend mit $k = 3$. Wie man an der Entwicklung in Gl. 3.14 sieht, ist die höchste mögliche Potenz im Nenner $k + 1$. Die ergibt dann für die vier Summanden der Koeffizienten A und B die folgenden minimalen Vorfaktoren:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^3} && \rightarrow \quad \frac{1}{(x_{14}^2)^4(x_{23}^2)^4} \\
&\frac{\mathcal{I}_2}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^3} = \frac{1}{(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^2 x_{13}^2 x_{24}^2} && \rightarrow \quad \frac{1}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^3(x_{13}^2)^2(x_{24}^2)^2} \\
&\frac{\mathcal{I}_2^2}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^3} = \frac{1}{x_{14}^2 x_{23}^2 (x_{13}^2)^2(x_{24}^2)^2} && \rightarrow \quad \frac{1}{(x_{14}^2)^2(x_{23}^2)^2(x_{13}^2)^3(x_{24}^2)^3} \\
&\frac{\mathcal{I}_2^3}{(x_{14}^2)^3(x_{23}^2)^3} = \frac{1}{(x_{13}^2)^3(x_{24}^2)^3} && \rightarrow \quad \frac{1}{(x_{13}^2)^4(x_{24}^2)^4}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Wie man sieht, tritt in diesen Termen keine Verletzung der Polbounds auf.
Für den Summanden D benötigt man zusätzlich die Entwicklung von $\mathcal{I}_1^{-1}$. Lässt man alle Teile mit nicht-chiralen Grassmann-Spinoren in Gl. 3.24 weg, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\mathcal{I}_1} = \frac{y_{1\bar{2}}^2\ y_{\bar{3}4}^2}{y_{\bar{1}4}^2\ y_{\bar{2}3}^2}\left[1 + 4i\frac{y_{\bar{1}4\nu}}{y_{\bar{1}4}^2}\ \theta_4\sigma^\nu\bar{\theta}_1 + (...)\right].$$

Die maximale Potenz im Nenner ist also $(x_{14}^2)^2x_{23}^2$ und für den gesamten Vorfaktor des Koeffizienten D erhält man:

$$\frac{\mathcal{I}_2^2}{\mathcal{I}_1}\frac{1}{(x_{\bar{1}4}^2)^3(x_{\bar{2}3}^2)^3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(x_{14}^2)^4(x_{23}^2)^3(x_{13}^2)^3(x_{24}^2)^3}. \tag{4.28}$$

Dies wird nun mit dem entsprechenden Polynom in T aus Gl. 3.8 mulipliziert, wobei dort nur die Terme bis zur 4.Ordnung mit der Grassmann-Kombination $\theta_3, \theta_4, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ bentötigt werden. Die entsprechenden maximalen Nenner wurden in Kapitel 3.4 ermittelt, was dann qualitativ die folgende Struktur für das Polynom ergibt:

$$\begin{aligned}1 - 4iT - 8T^2 \quad \rightarrow \quad & 1 - 4i\left[\frac{(...)}{\bar{y}_{12}^2 y_{34}^2}\mathcal{O}(\theta\bar{\theta}) + \left(\frac{(...)}{\bar{y}_{12}^2 y_{34}^2} - 2i\frac{(...)}{(\bar{y}_{12}^2)^2(y_{34}^2)^2} + 4i\frac{(...)}{\bar{y}_{12}^2(y_{34}^2)^2}\right.\right.\\ & \left.\left. + 4i\frac{(...)}{(\bar{y}_{12}^2)^2 y_{34}^2}\right)\mathcal{O}(\theta_3\theta_4\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2)\right] - 8\left[\frac{(...)}{(\bar{y}_{12}^2)^2(y_{34}^2)^2}\mathcal{O}(\theta_3\theta_4\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2)\right].\end{aligned} \tag{4.29}$$

Hier trägt also $(x_{12}^2)^2(x_{34}^2)^2$ als höchste Potenz im Nenner zur Korrelationsfunktion bei, sodass auch nach Mulitplikation mit dem Bruch aus Gl. 4.28 keine Verletzung der Polschranken entstehen kann. Somit bedingt die rein fermionische Korrelation keine weiteren Einschränkungen an die Koeffizienten.
Die Betrachtungen zu den Teilen A, B und dem Vorfaktor von D gelten allgemein. Um die Polschranken weiterer Korrelationsfunktionen zu überprüfen, müsste man dann noch die entsprechenden Teile aus T für den vollständigen Term D untersuchen.

5 Zusammenfassung und Diskussion

In Kapitel 2.6 wurde zunächst die allgemeinste, global konform invariante 4-Punkt-Funktion von einem komplexen Skalarfeld mit der Skalendimension 3 bestimmt. Sie diente als Ausgangspunkt für die Berechnung der superkonformen Korrelationsfunktion. Die Dimension 3 wurde als Testfall gewählt, da die Funktion hinreichend komplex ist, um eine Vielzahl an möglichen Effekten überprüfen zu können, aber auch hinreichend einfach, um die Berechnung übersichtlich zu halten. Durch Anwenden der chiralen Ward-Identität, konkret also des Differentialoperators aus Gl. 3.1, auf diese Funktion wurde der allgemeine Ausdruck in Gl. 3.8 für die 4-Punkt-Funktion von zwei chiralen und zwei antichiralen Superfeldern gefunden. Von dessen Entwicklung in den Grassmann-Spinoren wurden dann die Summanden untersucht, deren Koeffizienten der gemischten 4-Punkt-Funktion der beiden Skalarfelder φ und m und der rein fermionischen Funktion des Feldes ψ entsprechen.

Die vollständige Entwicklung der superkonformen Korrelationsfunktion in den chiralen Grassmann-Spinoren $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \theta_3, \theta_4$ würde 19 Summanden ergeben, woran man bereits sieht, dass 62 der 81 möglichen Komponenten-Korrelationen in Gl. 3.17 null sein müssen. Die Berechnung aller Entwicklungsterme wäre sehr aufwändig, da bereits der Ausdruck T eine lange Darstellung in Grassmann-Spinoren besitzt und von diesem dann noch höhere Potenzen bestimmt werden müssten. Für eine solche Rechnung würde sich die Verwendung eines Computers anbieten, da die eigentliche Entwicklung hauptsächlich aus dem Ausmultiplizieren von Termen unter Berücksichtigung der in Kapitel 3.2 vorgestellten Identitäten besteht.

Wie man aber in dieser Arbeit sieht, ist es sinnvoll, zunächst nur die einfachste skalare Komponenten-Korrelation $\langle 0|\varphi^* m^*\, m\, \varphi\, |0\rangle$ zu berechnen. Ihr zugehöriges Produkt aus Grassmann-Spinoren ist lediglich von 4. Ordnung und sie ist der Positivitätsuntersuchung zugänglich. Durch die Analyse der Funktion sind fünf von acht Koeffizienten weggefallen, wodurch sich die Berechnung weiterer Komponenten-Korrelationen deutlich vereinfacht. Insbesondere enthält die superkonforme 4-Punkt-Funktion nur noch einen Summanden mit Potenzen von T.

In der mir zur Verfügung stehenden Zeit konnten darüber hinaus nur noch die Polschranken der rein fermionischen Funktion untersucht werden, was keine weiteren Einschränkungen ergab. Eine andere interessante Funktion wäre noch die skalare Korrelation $\langle 0|m^* \, m^* \, m \, m \,|0\rangle$, da auch sie einem Positivitätstest unterzogen werden könnte.
Die zentrale Frage, ob die Positivität der Ausgangsfunktion $\langle 0|\varphi^* \, \varphi^* \, \varphi \, \, \varphi \,|0\rangle$ dazu führt, dass auch alle weiteren 4-Punkt-Funktionen der Felder im Multiplet positiv sind, kann nach der Analyse in Kapitel 4.2 eindeutig mit Nein beantwortet werden. Würden alle Komponenten-Korrelationen automatisch die Positivitäts-Bedingungen erfüllen, müsste man dieselben oder schwächere Relationen zwischen den Koeffizienten erhalten. Hier sind jedoch bereits bei der Prüfung des Unitaritätsbounds die Koeffizienten A', B'' und D' weggefallen und bei der Positivitätsanalyse nochmals B' und C.
Somit besteht die global konform invariante 4-Punkt-Funktion eines komplexen Skalarfeldes φ nur noch aus maximal drei Summanden, wenn man das Feld in ein chirales oder antichirales Supermultiplet einbettet und die Positivität der skalaren Komponentenkorrelationen fordert, die sich mit der chiralen Ward-Identität ergeben. Außerdem darf das führende Feld nicht mehr reell sein, da die entsprechende Funktion $\langle 0|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\,\varphi(x_3)\,\varphi(x_4)|0\rangle$ invariant unter Vertauschung aller Argumente ist, also $A = A' = 0$, $B = B' = B'' = 0$ und $D = D' = 0$ gelten und die Korrelation demnach verschwinden würde. Die Forderung nach Invarianz unter der superkonformen Gruppe führt also im Bereich der skalaren 4-Punkt-Korrelationsfunktionen zu stärkeren Einschränkungen der Theorie als durch die konforme Symmetrie.

Literaturverzeichnis

[Knu12] Holger Knuth: Superconformal Invariants and Correlation Functions, `http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/forschung/qft/theses/diss/Knuth.pdf`, 2012

[KaSo97] Harald Kalka, Gerhard Soff: Supersymmetrie, *B.G. Teubner*, 1997

[Genov] Luigi Genovese: Conformal Invariance in Quantum Field Theory, *Dissertation, Universität Rom*

[NiReTo05] Nikolay M. Nikolov, Karl-Henning Rehren, Ivan T. Todorov: Partial wave expansion and Wightman positivity in conformal field theory, *Nuclear Physics B* 722 [PM] 266–296, 2005

[Ma77] G. Mack: All Unitary Ray Representations of the Conformal Group SU(2,2) with Positive Energy, *Communications in Mathematical Physics* 55,1—28, 1977

[NiTo00] Nikolay M. Nikolov, Ivan T. Todorov: Rationality of conformally invariant local correlation functions on compactified Minkowski space, *Communications in Mathematical Physics* 218, 417–436, 2001

[NiReTo08] Nikolay M. Nikolov, Karl-Henning Rehren, Ivan T. Todorov: Harmonic Bilocal Fields Generated by Globally Conformal Invariant Scalar Fields, *Communications in Mathematical Physics* 279, 225–250, 2008

[DoOs04] F.A. Dolan, H. Osborn: Conformal partial waves and the operator product expansion, *Nuclear Physics B* 678 491–507, 2004

Erklärung nach §13(8) der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.
Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nichtbestandenen Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 6. August 2012

(Karen Wintersperger)

Danksagung

In erster Linie danke ich Herrn Prof. Karl-Henning Rehren für die Möglichkeit, meine Bachelorarbeit über ein interessantes Thema zu schreiben und einen Einblick in die Forschung in der Quantenfeldtheorie zu erhalten, sowie für die vielen hilfreichen Erklärungen und die geduldige Beantwortung meiner Fragen.

Außerdem möchte ich mich bei Frau Prof. Laura Covi bedanken, die bereitwillig die Zweitkorrektur meiner Arbeit übernommen hat.

Nicht zuletzt gilt mein Dank Ture Hinrichsen für das Korrekturlesen dieser Arbeit.