GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Fakultät für Physik

Bachelorarbeit

Thermische und Ladungsaspekte von konformen Korrelationsfunktionen

Thermal and charge aspects of conformal correlation functions

angefertigt am Institut für Theoretische Physik
von Lena Wallenhorst aus Göttingen

Bearbeitungszeit: 14. April 2009 bis 21. Juli 2009

Erstgutachter: Prof. Dr. Karl-Henning Rehren

Zweitgutachter: Prof. Dr. Detlev Buchholz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

2 Grundlagen

Im Folgenden möchte ich auf einige Grundlagen eingehen, die wichtig sind, um schließlich mit der konformen Feldtheorie statistische Systeme zu beschreiben. Dazu werde ich mit der (klassischen) konformen Gruppe in zwei Dimensionen beginnen, um dann den Formalismus, in dessen Rahmen die konforme Quantenfeldtheorie stattfindet, zu beschreiben. Weiterhin möchte ich auf den Energie-Impuls Tensor und die daraus erzeugte Algebra eingehen, welche die der konformen Gruppe entsprechenden Symmetriegruppe in einer Quantentheorie beschreibt.

2.1 Die konforme Gruppe in zwei Dimensionen

Die konforme Gruppe ist die Gruppe der winkeltreuen Abbildungen. Dies sind die Transformation $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu$, die

$$\mathrm{d}\tilde{x}_\mu \mathrm{d}\tilde{x}^\mu = w(x)^2 \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu \tag{2.1}$$

erfüllen. Für den Winkel φ zwischen x^μ und y^μ und den Winkel $\tilde{\varphi}$ zwischen den transformierten Vektoren $\tilde{x}^\mu$ und $\tilde{y}^\mu$ gilt dann:

$$\cos(\tilde{\varphi}) = \frac{\mathrm{d}\tilde{x}_\mu \mathrm{d}\tilde{y}^\mu}{\sqrt{\mathrm{d}\tilde{x}_\mu \mathrm{d}\tilde{x}^\mu \mathrm{d}\tilde{y}_\mu \mathrm{d}\tilde{y}^\mu}} = \frac{w^2 \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}y^\mu}{\sqrt{w^2 \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu \cdot w^2 \mathrm{d}y_\mu \mathrm{d}y^\mu}} = \cos(\varphi).$$

Folglich ist die Abbildung winkeltreu.

In zwei Dimensionen (und mit einer euklidischen Metrik) wird die Bedingung (2.1) von allen (anti-)holomorphen Abbildungen erfüllt [9, 12]. Man möchte allerdings eine Gruppenstruktur finden. Dazu müssen die Abbildungen zusätzlich invertierbar sein und die ganze komplexe Ebene (inklusive dem Punkt bei $\pm\infty$) wieder auf die ganze komplexe Ebene abbilden. Diese globalen konformen Transformationen bilden die *Möbius*-Gruppe [9]

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \,, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \tag{2.2}$$

Ihre Untergruppen werden von den Translationen, Dilatationen und speziellen konformen Transformationen erzeugt [9, 12]:

$$g_T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad g_D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \,, \quad g_{SK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} .$$

Physikalisch sind allerdings auch die lokalen Eigenschaften relevant. Daher betrachtet man trotzdem die Algebra der Generatoren *aller* (anti-)holomorphen Abbildungen: Dies ist die *Witt*-Algebra mit Generatoren l_n[1]. Sie erfüllen die Vertauschungsrelation [9, 12]

$$[l_n, l_m] = (n-m) l_{n+m}.$$

Eine endlich-dimensionale Unteralgebra wird von den Elementen $\{l_{\pm 1}, l_0\}$ erzeugt [9]. Dies sind Generatoren der Möbius-Transformationen.

In der konformen Quantenfeldtheorie ist diese Symmetrie allerdings gebrochen, so dass (siehe Abschnitt (2.5)) eine andere Algebra, die *Virasoro*-Algebra, von Bedeutung ist. Die Virasoro-Algebra ist eine zentrale Erweiterung der Witt-Algebra.

2.2 Wightman-Theorie

Die konforme Feldtheorie ist eine axiomatische Quantenfeldtheorie, welche auf der *Wightman*-Theorie basiert. Daher werde ich im Folgenden kurz auf die Wightman-Axiome eingehen[2].

Relativistische Theorie

Man möchte eine relativistische Quantentheorie, daher wird zunächst die Kovarianz unter der Poincaré-Gruppe gefordert. Zustände sind Elemente eines seperablen Hilbertraums $\mathcal{H}$ mit einer unitären Darstellung $U(a, A)$ der Poincaré-Gruppe. Der Generator P_μ der Translationen ist durch $U(a, \mathbb{1}) = \exp(iP_\mu x^\mu)$ gegeben. Es wird

[1] Sowohl die Generatoren der holomorphen als auch die der antiholomorphen Abbildungen bilden jeweils eine Algebra. Da diese isomorph sind, betrachte ich im Folgenden nur einen Fall

[2] Diese findet man beispielsweise in [11, 12]

zusätzlich gefordert, dass sein Spektrum im Abschluss des Vorwärtskegels liegt. Dadurch ist gesichert, dass es nur positive Energien gibt. Weiterhin gibt es einen unter der Wirkung der Poincaré-Gruppe invarianten, eindeutigen Vakuumvektor Ω.

Die Felder

Für jede Testfunktion f existiert ein Multiplett von Feldoperatoren $\varphi_1(f), \ldots, \varphi_n(f)$, welche mit ihren adjungierten Feldern $\varphi_1(f)^\dagger, \ldots, \varphi_n(f)^\dagger$ auf einer in $\mathcal{H}$ dichten Domäne D definiert sind. Diese Domäne enthält den Vakuumvektor Ω. Unter der Poincaré-Gruppe transformieren sich die Felder gemäß

$$\begin{aligned} U(a,A)\varphi_j(f)U(a,A)^* &= \sum_k S_{jk}(A^{-1})\varphi_k\left(\{a,A\}f\right) \qquad \text{mit} \\ \{a,A\}f(x) &= f\left(A^{-1}(x-a)\right). \end{aligned}$$

Hierbei ist S eine endlich-dimensionale Matrixdarstellung der $SL(2,\mathbb{C})$.

Lokalität

Sind die Träger der Testfunktionen f und g raumartig getrennt, so gilt:

$$\begin{aligned} \left[\varphi_j(f), \varphi_k(g)\right]_\pm &= 0 \\ \left[\varphi_j(f), \varphi_k(g)^\dagger\right]_\pm &= 0 \end{aligned}$$

Wightman-Distributionen

Man betrachtet in der Wightman-Theorie hauptsächlich die sogenannten *Wightman-*Distributionen. Dies sind die Vakuumerwartungswerte

$$W^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = (\Omega, \varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)\Omega)$$

Diese Distributionen sind Randwerte von in der Vorwärtsröhre analytischen Funktionen. Weiterhin sind sie invariant unter der Lorentz-Gruppe und unter Translationen. Aus dieser Translationsinvarianz folgt, dass sie nur von den Differenzen der Koordinaten abhängen.

Mit Hilfe des Rekonstruktionstheorems [6] können die Felder aus den Wightman-Distributionen rekonstruiert werden.

2.3 Skaleninvarianz

Ausgehend von der Wightman-Theorie ist die Symmetriegruppe der konformen Quantenfeldtheorie also zunächst die Poincaré-Gruppe, welche zur konformen Gruppe erweitert wird. In einer (1+1)-dimensionalen Theorie reicht bereits die Forderung globaler Skaleninvarianz (zusätzlich zur Poincaré-Invarianz) um zu zeigen, dass die Theorie unter der ganzen (globalen) konformen Gruppe invariant ist [12]. Eine Skalentransformation eines Feldes $\Phi(x)$ ist von der Form:

$$U(\lambda)\Phi(x)U(\lambda)^* = \lambda^h \Phi(\lambda x), \tag{2.3}$$

mit einem unitären Operator $U(\lambda)$. Der Exponent $h \,\epsilon\, \mathbb{R}_+$ wird als *Skalendimension* des Feldes bezeichnet.

2.4 Der Energie-Impuls-Tensor

In jeder lokalen Quantenfeldtheorie gibt es einen *Energie-Impuls-Tensor* $T^{\mu\nu}$ [5]. Durch diesen können die Generatoren der Symmetrietransformationen definiert werden. In zwei Dimensionen hat er einige schöne Eigenschaften, die im *Lüscher-Mack*-Theorem [7] zusammengefasst sind. Hierbei wird $T^{\mu\nu}$ als symmetrisches, erhaltenes Tensorfeld, das den Impulsoperator $P^\mu = \int dx^1\, T^{\mu 0}$ definiert, vorausgesetzt. Es folgen die Spurfreiheit und die Skalendimension $h = 2$ von $T^{\mu\nu}$. Weiterhin kann man zwei entkoppelte chirale Felder

$$T(\cdot) = \begin{cases} T_R(t-x) = \frac{1}{2}\left(T^{00} + T^{01}\right)(t-x) \\ T_L(t+x) = \frac{1}{2}\left(T^{00} - T^{01}\right)(t+x) \end{cases}. \tag{2.4}$$

finden. Diese erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [T_R, T_L] &= 0 \quad \text{und} \\ [T(x), T(y)] &= i\left(T(x) + T(y)\right)\delta'(x-y) - \frac{ic}{24\pi}\delta'''(x-y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei $c \geq 0$ eine Konstante ist.

Die Parameter c aus Gleichung (2.6) und h aus (2.3) spielen eine wichtige Rolle bei den *Höchstgewichtsdarstellungen* (siehe Abschnitt (2.5)) der von $\{T^{\mu\nu}, c \cdot \mathbb{1}\}$ erzeugten Algebra $\mathcal{A}$, welche wegen des Entkoppelns der Felder T_R und T_L als Produkt

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_L \otimes \mathcal{A}_R$ geschrieben werden kann.

Wichtige Größen sind die *N-Punkt-Funktionen* $\langle \cdot \rangle = (\Omega, \cdot \Omega)$, wobei Ω der Vakuumvektor ist. Wegen der Translationsinvarianz können diese nur von den Differenzen der Koordinaten $x_i - x_j$ abhängen. Die Zwei-Punkt-Funktion im Vakuum kann man aus der Vertauschungsrelation (2.6) berechnen [12]. Weiterhin lassen sich die N-Punkt Funktionen rekursiv aus den $(N-1)$ und $(N-2)$ Funktionen berechnen [10]. Für $N = 1, 2, 3$ erhält man [10]:

$$\begin{aligned} \langle T(x) \rangle &= 0 \\ \langle T(x_1) T(x_2) \rangle &= \frac{\frac{c}{8\pi^2}}{(x_1 - x_2 - i\varepsilon)^4} \\ \langle T(x_1) T(x_2) T(x_2) \rangle &= \frac{\frac{-c}{8\pi^3}}{(x_1 - x_2 - i\varepsilon)^2 (x_1 - x_3 - i\varepsilon)^2 (x_2 - x_3 - i\varepsilon)^2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Generatoren der Möbius-Gruppe lassen sich durch den Energie-Impuls Tensor definieren [12]:

$$P = \int T(x) dx \ , \quad D = \int x T(x) dx \ , \quad K = \int x^2 T(x) dx.$$

Diese gehorchen den Vertauschungsrelationen

$$[P, D] = iP \ , \quad [P, K] = 2iD \ , \quad [D, K] = iK,$$

wobei x die chirale Koordinate ($x = x^0 \pm x^1$) ist. Dass sie Generatoren der Möbius-Gruppe sind, sieht man durch Exponentieren dieser infinitesimalen Transformationen [12].

2.4.1 Die zentrale Ladung

Die *zentrale Ladung* c in der Vertauschungsrelation (2.6) beschreibt eine Brechung der konformen Symmetrie beim Übergang von einer klassischen Theorie (in der die Generatoren der Symmetrien die Witt-Algebra erzeugen) zur Quantentheorie. Eine wichtige Forderung ist dabei das positive Spektrum des Impulsoperators, welche die Diffeomorphismensymmetrie bricht (siehe Abschnitt (2.5)). Die Symmetrien werden nun durch die *Virasoro*-Algebra beschrieben.

Man kann zeigen [3], dass die zentrale Ladung mit der Casimir-Energie zusammenhängt: Für ein System auf einer Zylinderoberfläche mit Umfang L findet man, dass der Vakuumerwartungswert der Energiedichte nicht mehr gleich Null ist sondern proportional zu $\frac{c}{L}$ (im Grenzfall $L \to \infty$ geht also auch der Erwartungswert wieder gegen Null).

Im Vakuumsektor ist die Möbius-Gruppe weiterhin die ungebrochene Symmetriegruppe [12].

2.5 Die Virasoro-Algebra

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Algebra, die vom Energie-Impuls Tensor erzeugt wird.

Die Fouriertransformation der chiralen Felder (2.4) führt zu [12]:

$$\tilde{T}(z) = \frac{-1}{2\pi} \sum_{n\,\epsilon\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

mit den Operatoren

$$L_n = \frac{1}{2} \int \mathrm{dx}(1-ix)^{1-n}(1+ix)^{1+n} T(x) = L^*_{-n}. \tag{2.7}$$

Die Vertauschungsrelation der L_n ergibt sich aus (2.6):

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}. \tag{2.8}$$

Die von den L_n erzeugte Algebra ist die bereits erwähnte *Virasoro*-Algebra.

In Gleichung (2.7) sieht man, dass die Möbius-Gruppe von

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2}(P+K) \quad \text{und} \\ L_{\pm 1} &= \frac{1}{2}(P-K) \pm iD \end{aligned}$$

erzeugt wird. Der *konforme Hamiltonoperator* L_0 ist in jedem Fall positiv, da P positiv ist. Weil P zu K konjugiert werden kann, ist auch $K > 0$.

Wichtige physikalische Darstellungen dieser Algebra sind unitäre Darstellungen positiver Energie. Die L_n sind Leiteroperatoren für L_0:

$$[L_0, L_n] = -nL_n.$$

Da L_0 ein positives Spektrum hat, muss es einen niedrigsten Eigenwert h mit zugehörigem Eigenvektor $|h\rangle$ geben, so dass $L_n|h\rangle = 0 \,\forall\, n > 0$ ist. Da die L_n Leiteroperatoren für L_0 sind, ist auch der Vektor $L_n|h\rangle$ ein Eigenvektor von L_0 wenn $|h\rangle$ schon ein Eigenvektor ist und somit auch alle weiteren Vektoren der Form

$$L_{-n_k} \cdots L_{-n_1}|h\rangle. \tag{2.9}$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind hierbei $h + \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Dies führt zur *Höchstgewichtsdarstellung* der Virasoro-Algebra. Eine Basis des Darstellungsraumes ist durch den *Verma*-Modul

$$V_h = Span\{L_{-n_k} \cdots L_{-n_1}|h\rangle | n_k \geq \cdots n_1 > 0\}$$

gegeben, wobei die Vektoren $\{L_{-n_k} \cdots L_{-n_1}|h\rangle$ linear unabhängig sind. Der Eigenwert h ist die Skalendimension eines *primären* Feldes $\Phi(x)$ mit der Vertauschungsrelation

$$-i[T(x), \Phi(y)] = -\Phi'(y)\delta(x-y) + h \cdot \Phi(y)\delta'(x-y).$$

Primäre Felder Φ_h sind Felder, die durch die Eigenschaft $\Phi_h(i)|0\rangle = |h\rangle$ aus der Vakuumdarstellung eine Darstellung vom Gewicht h erzeugen [12].

Damit die Darstellung zu einer (unitären) Hilbertraumdarstellung wird, muss es ein positiv definites Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ geben, welches durch die Hermitizitätsbedingung $L_n^* = L_{-n}$ bereits in Abhängigkeit von h und c festgelegt ist [12]. Bezüglich $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ sind die Eigenräume $V_h^{(k)} = Span\{L_{-n_k} \cdots L_{-n_1}|h\rangle | \sum n_i = k\}$ paarweise orthogonal und es gilt $V_h = \bigoplus_k V_h^{(k)}$ [13]. Da die Darstellungsräume in eine direkte Summe von endlich-dimensionalen Eigenräumen von L_0 zerfallen, zerfällt auch die Matrix von $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ in eine direkte Summe von endlich dimensionalen Matrizen auf den Eigenräumen. Man kann also Bedingungen für die Positivität der Matrix von $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ durch Betrachten der einzelnen Summanden finden. Dies geschieht mit Hilfe der *Kac-Determinantenformel* [13]. Man findet, dass $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ positiv definit ist für $c > 1$ und $h > 0$. Im Fall $0 < c < 1$ ist das Skalarprodukt indefinit mit Ausnahme einiger diskreter Werte $h_{p,q}$ für h, bei denen $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ semidefinit ist. In diesem Bereich für c haben also die Verma-Moduln nichttriviale Kerne, sodass die Darstellung reduzibel ist. Eine irreduzible Höchstgewichtsdarstellung erhält man durch Bildung des Quotientenraums des Verma-Moduls und des Kerns von $(\cdot,\cdot)_{h,c}$. Insgesamt ist die (Semi-)Definitheit (und somit die Unitarität der Darstellung) gegeben für [12]

- $c > 1,\ h > 0$ (positiv definit)
- $c > 1,\ h = 0$ (positiv semidefinit)
- $c = 1,\ 0 \leq h \neq \frac{k^2}{4}$ (positiv definit) und $c = 1, h = \frac{k^2}{4}$ (semidefinit)
-

$$\begin{aligned} 0 < c < 1\ ,\quad c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)}\ , \\ h = h_{p,q} &= \frac{(pm - q(m+1))^2 - 1}{4m(m+1)} \quad \text{(semidefinit)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

mit $p,\, q \,\epsilon\, \mathbb{N}$, $1 \leq pq \leq k = \sum n_i$ und $m \geq 2$.

Symmetriebrechung

In der Vertauschungsrelation (2.8) sieht man sehr schön, dass durch die Forderung von positiven Energien die Diffeomorphismensymmetrie gebrochen ist: Durch die daraus resultierende Bedingung $L_n|h\rangle = 0\ \forall n$ wird für $n,\ m > 0$ die linke Seite der Gleichung in jedem Fall Null, auf der rechten Seite bleibt jedoch noch ein konstanter Term proportional zu c, welcher nur für $m = 0, \pm 1$ verschwindet (Möbius-Invarianz im Vakuum). Die zentrale Ladung c ist proportional zur Zwei-Punkt-Funktion $\langle T(x)T(y)\rangle$. Im Fall $c = 0$ wäre nach dem *Reeh-Schlieder-Theorem* [12] allerdings mit $T(x)\Omega = 0$ schon $T(x) = 0$.

2.6 Transformationen des Energie-Impuls-Tensors

Um reale Systeme beschreiben zu können (beispielsweise Systeme mit endlicher Länge), muss es möglich sein, die Felder (2.4) zu transformieren. Man möchte also, dass für diffeomorphe Koordinatentransformationen die Transformation der Energie-Impuls-Dichten Automorphismen sind.

Betrachtet man Diffeomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \gamma(x)$, so findet man, dass die Abbildung

$$\tilde{T}(\gamma(x)) = \alpha\left(T(x)\right) = \gamma'(x)^2 \cdot T\left(\gamma(x)\right) - \frac{c}{24\pi} D\gamma(x) \tag{2.11}$$

mit der *Schwarzschen* Ableitung

$$D\gamma = \frac{\gamma'''}{\gamma'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\gamma''}{\gamma'}\right)^2$$

ein Automorphismus von Lie-Algebren[3] ist. Die Schwarzsche Ableitung erfüllt

$$D\gamma(x) = -\gamma'(x)^2 Dx(\gamma). \tag{2.12}$$

Die Automorphismuseigenschaft sieht man mit der Vertauschungsrelation (2.6) wie folgt:

$$\begin{aligned}\left[\alpha\left(T(x)\right), \alpha\left(T(y)\right)\right] = &\, i\gamma'(x)^2\gamma'(y)^2 \cdot \left(T\left(\gamma(x)\right) + T\left(\gamma(y)\right)\right)\delta'\left(\gamma(x) - \gamma(y)\right) \\ & - \frac{ic}{24\pi}\left(\gamma'(x)\right)^2\left(\gamma'(y)\right)^2 \cdot \delta'''\left(\gamma(x) - \gamma(y)\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\alpha\left(\left[T(x), T(y)\right]\right) = &\, i\left(\gamma'(x)^2 T\left(\gamma(x)\right) + \gamma'(y)^2 T\gamma(y)\right)\delta'\left(x - y\right) \\ & - \frac{ic}{24\pi}\left(\left(D\gamma(x) + D\gamma(y)\right)\delta'(x-y) + \delta'''(x-y)\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Zu zeigen ist also die Gleichheit der Gleichungen (2.13) und (2.14). Um die Gleichheit der Terme mit Vorfaktor $\frac{ic}{24\pi}$ zu zeigen, kann man mit der Identität

$$\delta\left(\gamma(x) - \gamma(y)\right) = \frac{1}{\gamma'(x)}\delta(x-y)$$

beginnen. Durch Ableiten nach x und zweifachem Ableiten nach y erhält man:

$$\begin{aligned}\left(\gamma'(x)\right)^2\left(\gamma'(y)\right)^2\delta'''\left(\gamma(x) - \gamma(y)\right) = &\, \delta'''(x-y) + \left(\frac{\gamma''(y)}{\gamma'(y)} - \frac{\gamma''(x)}{\gamma'(x)}\right)\delta''(x-y) \\ & - \frac{\gamma''(x)\gamma''(y)}{\gamma'(x)\gamma'(y)}\delta'(x-y). \end{aligned} \tag{2.15}$$

[3] Automorphismusbedingung: $\alpha\left(\left[T(x), T(y)\right]\right) = \left[\alpha\left(T(x)\right), \alpha\left(T(y)\right)\right]$

Für eine beliebige Funktion f gilt: $(f(x) - f(y))\,\delta(x-y) = (f(x) - f(x))\,\delta(x-y) = 0$. Durch Ableiten nach x und nach y wird dies zu

$$(f(x) - f(y))\,\delta''(x-y) - (f'(x) + f'(y))\,\delta'(x-y) = 0.$$

Für $f = \frac{\gamma''}{\gamma'}$ folgt:

$$\left(\frac{\gamma''(y)}{\gamma'(y)} - \frac{\gamma''(x)}{\gamma'(x)}\right)\delta''(x-y) = \left(\frac{\gamma'''(x)}{\gamma'(x)} + \frac{\gamma'''(y)}{\gamma'(y)} - \left(\frac{\gamma''(x)}{\gamma'(x)}\right)^2 - \left(\frac{\gamma''(y)}{\gamma'(y)}\right)^2\right)\delta'(x-y) \tag{2.16}$$

Weiterhin folgt aus $(f(x) - f(y))^2\,\delta(x-y) = 0$ durch Ableiten (nach x oder y) auch $(f(x) - f(y))^2\,\delta'(x-y) = 0$ und somit:

$$\frac{\gamma''(x)\gamma''(y)}{\gamma'(x)\gamma'(y)}\delta'(x-y) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\gamma''(x)}{\gamma'(x)}\right)^2 - \left(\frac{\gamma''(y)}{\gamma'(y)}\right)^2\right)\delta'(x-y) \tag{2.17}$$

Setzt man nun (2.16) und (2.17) in (2.15) ein, so erhält man:

$$(\gamma'(x))^2\,(\gamma'(y))^2\,\delta'''\,(\gamma(x) - \gamma(y)) = \delta'''(x-y) + (D\gamma(x) + D\gamma(y))\,\delta'(x-y)$$

Die Terme in (2.13) und (2.14) mit Vorfaktor $\frac{ic}{24\pi}$ stimmen demnach überein.

Auf ähnliche Weise kann man die Gleichheit der ersten Summanden zeigen. Man beginnt wieder mit

$$\delta\,(\gamma(x) - \gamma(y)) = \frac{1}{\gamma'(x)}\delta(x-y) \quad \text{bzw.} \quad \delta\,(\gamma(x) - \gamma(y)) = \frac{1}{\gamma'(y)}\delta(x-y)$$

und bekommt durch Ableiten nach x bzw. y:

$$\begin{aligned}\gamma'(x)^2\delta'\,(\gamma(x) - \gamma(y)) &= \delta'(x-y) - \frac{1}{\gamma'(x)}\delta(x-y) \quad \text{bzw.}\\ \gamma'(y)^2\delta'\,(\gamma(x) - \gamma(y)) &= \delta'(x-y) + \frac{1}{\gamma'(y)}\delta(x-y).\end{aligned}$$

Damit und erneut mit $(f(x) - f(y))\,\delta(x-y) = 0$ erhält man:

$$\gamma'(x)^2\gamma'(y)^2 \cdot (T\,(\gamma(x)) + T\,(\gamma(y)))\,\delta'\,(\gamma(x) - \gamma(y))$$

$$= \left(\gamma'(x)^2 T\,(\gamma(x)) + \gamma'(y)^2 T\,(\gamma(y))\right)\delta'(x-y)$$

$$+\left(\gamma'(x)^2\frac{1}{\gamma(y)}T\left(\gamma(x)\right)-\gamma'(y)^2\frac{1}{\gamma(x)}T\left(\gamma(y)\right)\right)\delta(x-y)$$
$$=\left(\gamma'(x)^2T\left(\gamma(x)\right)+\gamma'(y)^2T\left(\gamma(y)\right)\right)\delta'(x-y)$$

Die Transformation (2.11) definiert also einen Automorphismus:

$$\alpha\left([T(x),T(y)]\right)=\left[\alpha\left(T(x)\right),\alpha\left(T(y)\right)\right]$$

2.6.1 Cayley-Transformation

Eine wichtige Transformation dieser Art ist die *Cayley*-Transformation. Diese bildet $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ auf den komplexen Einheitskreis S^1 ab:

$$z=\frac{1+ix}{1-ix}. \tag{2.18}$$

Betrachtet man nun eine Möbius-Transformation (2.2) für $x=i\frac{1-z}{z+1}$, so bekommt man:

$$z=\frac{1+ix}{1-ix}\mapsto\frac{1+i\left(\frac{a\cdot i\frac{1-z}{z+1}+b}{c\cdot i\frac{1-z}{z+1}+d}\right)}{1-i\left(\frac{a\cdot i\frac{1-z}{z+1}+b}{c\cdot i\frac{1-z}{z+1}+d}\right)}=\frac{(d+a+i(b-c))\cdot z+(d+a+i(c+b))}{(d-a-i(c+b))\cdot z+(d+a-i(b-c))}.$$

Die Möbius-Transformationen (2.2) sind also äquivalent zu

$$z\mapsto\frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}},\qquad\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\bar{\alpha}&\bar{\beta}\end{pmatrix}\;\in\;SU(1,1)$$

mit $\alpha=\frac{1}{2}\left((d+a)+i(b-c)\right)$ und $\beta=\frac{1}{2}\left((d-a)+i(c+b)\right)$ (wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ nötig ist, um $det=1$ zu bekommen).

Die Cayley-Transformation ist beispielsweise wichtig, um ein System auf eine Zylinderoberfläche zu transformieren. Dies ist ein Modell für ein System mit einer begrenzten Raumkoordinate (wobei die Länge des Intervalls gleich dem Zylinderumfang ist) mit periodischen Randbedingungen und Zeitkoordinate $t\in(-\infty,\infty)$.

3 Systeme im Kasten

Anwendung findet die konforme Feldtheorie unter anderem in der statistischen Mechanik. Beispielsweise beim kritischen Verhalten bei Phasenübergängen zweiter Ordnung ist die Skaleninvarianz realisiert. Die zu betrachtenden statistischen Systeme haben allerdings eine endliche Ausdehnung, welche man auch bei der Beschreibung in der konformen Feldtheorie beachten muss. Solche Systeme mit begrenzter Raumkoordinate stehen im folgenden Kapitel im Vordergrund.

3.1 Der konforme Hamiltonoperator

Im Folgenden betrachte ich ein System mit endlicher Länge L und periodischen Randbedingungen, also $T\left(-\frac{L}{2}\right) = T\left(\frac{L}{2}\right)$.

Um dies zu beschreiben, kann man zunächst den zweidimensionalen Minkowskiraum M auf einen Zylinder mit Umfang L transformieren: $M \to \tilde{M} = S^1 \times \mathbb{R}$. Dieser Raum lässt sich dann wieder auf ein System der Länge L in der Ebene abbilden:

$$u \mapsto \frac{1+iu}{1-iu} = e^{2i \arctan u} = e^{2i\pi \frac{\xi}{L}}$$

Folglich ist $\xi := f(u) = \frac{L}{\pi} \arctan(u)$ bzw. $u = \tan\left(\frac{\pi}{L}\xi\right)$. Daraus folgt mit der Transformation (2.11) und mit der Identität (2.12)für den Energie-Impuls-Tensor:

$$T(f(u)) = T(\xi) = f'(u)^{-2} \left(\tilde{T}(u) + \frac{c}{24\pi} Df(u)\right)$$

Mit $f'(u) = \frac{L}{\pi}(1+u^2)^{-1}$, $1+u^2 = \cos^{-2}\left(\frac{\pi}{L}\xi\right)$ und

$$\begin{aligned} Df(u) &= \frac{f'''(u)}{f'(u)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(u)}{f'(u)}\right)^2 = (\partial_u \ln(f'(u)))' - \frac{1}{2}(\partial_u \ln(f'(u))) \\ &= \frac{-2}{(1+u^2)^2}. \end{aligned}$$

erhält man:

$$T(\xi) = \frac{\pi^2}{L^2}\cos^{-4}\left(\frac{\pi}{L}\xi\right)\left(\tilde{T}\left(\tan\left(\frac{\pi}{L}\xi\right)\right) - \frac{c}{12\pi}\cos^4\left(\frac{\pi}{L}\xi\right)\right)$$

Der Hamiltonoperator berechnet sich daraus:

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}\xi T_{00} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}u T_+(u) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}u T_-(u) \\ &= \frac{1}{2}(P_+ + P_-), \end{aligned}$$

wobei $T_\pm(u) = T(t \pm x)$ die chiralen Felder (2.4) bezeichnet.

Durch Integration über ξ ergibt sich mit $u = \tan\left(\frac{\pi}{L}\xi\right) \implies \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{L}\cos^2\left(\frac{\pi}{L}\xi\right)\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned} P_\pm &= \frac{\pi}{L}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}u \cos^{-2}\left(\frac{\pi}{L}\xi\right)\left(\tilde{T}_\pm(u) - \frac{c}{12\pi}\cdot(1+u^2)^{-2}\right) \\ &= \frac{\pi}{L}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}u (1+u^2)\tilde{T}_\pm(u) - \frac{\pi c}{12L\pi}\left[\arctan(u)\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{2\pi}{L}\left(L_{0\pm} - \frac{c}{24}\right) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich aus der Definition (2.7) der Generatoren der Virasoro-Algebra. Der Hamiltonoperator ist also:

$$\boxed{H = \frac{\pi}{L}\left(L_{0+} + L_{0-} - \frac{c}{12}\right)} \qquad (3.1)$$

3.2 Von der Quantenfeldtheorie zur statistischen Mechanik

Ein Vorteil in der Quantenfeldtheorie ist die Tatsache, dass es (oft) möglich ist, exakte Lösungen für die betrachteten Modelle anzugeben. Diese exakten Methoden möchte man gerne verwenden, um thermodynamische Größen in statistischen Systemen zu berechnen. Interessanterweise findet man [4], dass eine euklidische Quantenfeldtheorie im Pfadintegralformalismus einem statistischen System entspricht.

Die (euklidische) Raumzeit, in der Quantenfelder existieren, kann durch Gitterpunkte approximiert werden. Auf diesem Gitter wird eine Zeittranslation durch die *Transfer*-Matrix beschrieben. Drückt man die Übergangswahrscheinlichkeiten approximativ durch die Matrixelemente der Transfer-Matrix aus, so kann man zeigen

[4], dass im Grenzfall eines gegen Null gehenden Gitterabstands dies gerade dem Pfadintegral entspricht. Es gibt also einen Zusammenhang zwischen dem Spektrum des Hamiltonoperators und dem Spektrum der Transfermatrix, so dass die beiden Ansätze (das statistische Systeme und die euklidische Quantenfeldtheorie im Pfadintegralformalismus) identifizierbar sind. Im Grenzfall eines unendlich ausgedehnten Gitters ergeben sich aus dem Pfadintegral die Vakuumerwartungswerte, was einem thermodynamisches System mit einer Temperatur $T = 0$ entspricht. Endliche Temperaturen ergeben sich aus einer Quantenfeldtheorie in einem endlichen euklidischen Zeitintervall.

Die euklidische Formulierung wird hierbei gewählt, um Pfadintegrale als Grenzwerte von Integralen über eine diskrete Raumzeit schreiben zu können, die, anders als im Minkowski-Raum, wohldefiniert sind.

3.3 Zustandssummen im Kasten

Mit Hilfe des Hamiltonoperators kann man nun für das System auf dem Zylinder Zustandssummen berechnen, aus denen wiederum die Zustandsgleichungen abgeleitet werden können. Da der Hamiltonoperator die Form (3.1) hat ergeben sich diese Zustandssummen aus den Charakteren χ_h der Virasoro-Algebra. Allgmein hat eine Zustandssumme für ein System im Kasten der Länge L die folgende Form [12]:

$$\begin{aligned} Z(T,L) &= Tr\left(e^{-\beta H}\right) = \chi_{h+} \otimes \chi_{h-} \\ &= \underbrace{e^{\frac{\beta\pi}{L}\cdot\frac{c}{12}}}_{=:A} \cdot Tr(\underbrace{e^{\frac{-\beta\pi}{L}\cdot L_{0+}}}_{=:t^{L_0}} \otimes e^{\frac{-\beta\pi}{L}\cdot L_{0-}}) \\ &= A \cdot Tr\left(t^{L_0}\right)^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei β proportional zur inversen Temperatur ist.

Die Charaktere lassen sich demnach über die Eigenwerte von L_0 berechnen. Sind keine Nullvektoren in den entsprechenden Verma-Moduln, so sind sie von der Form [12]

$$\chi_h(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{h+k}, \tag{3.3}$$

wobei $k = \sum_{i=1}^{r} n_i$ der Eigenwert von L_0 zu den entsprechenden Eigenvektoren (2.9) ist. Der Faktor a_k ist der Entartungsgrad (oft gibt es mehrere Möglichkeiten, aus den n_i denselben Eigenwert zu bekommen). Dies führt zu:

$$\chi_h(t) = t^h \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}. \tag{3.4}$$

Zum Berechnen der Zustandssummen müsste man also unendliche Produkte berechnen. Da dies recht schwierig ist, werden im Folgenden nur die Grenzfälle für hohe und tiefe Temperaturen betrachtet. Bei tiefen Temperaturen ($\beta \to \infty$) werden die $t^n = e^{-\frac{\pi}{L}\cdot n\beta}$ sehr schnell sehr klein, so dass man Näherungen machen kann. Bei hohen Temperaturen kann man das *modulare Transformationsverhalten* der Charaktere nutzen (siehe Kapitel (3.3.2)), um aus dem Grenzfall tiefer Temperaturen den Grenzfall hoher Temperaturen zu berechnen.

Weiterhin ergeben sich aus den Zustandssummen die innere Energie E und, über die freie Energie F, auch der Druck des Systems:

$$\begin{aligned} E &= -\partial_\beta \ln(Z) && (3.5)\\ F &= -\beta^{-1} \ln(Z) && (3.6)\\ p &= -\partial_L F = \beta^{-1}\partial_L \ln(Z) \end{aligned}$$

3.3.1 Grenzfall: Tiefe Temperaturen

Tiefe Temperaturen mit $c > 1$

Zunächst möchte ich Zustandssummen für tiefe Temperaturen mit einer zentralen Ladung $c > 1$ betrachten. In diesem Bereich kann h beliebige Werte annehmen und man muss (außer für $h = 0$) keine Nullvektoren in den Verma-Moduln beachten.

In der Vakuumdarstellung gibt es nur einen Nullvektor, der sich aus der Möbius-Invarianz ergibt: $L_{-1}|0\rangle = 0$. Der Verma-Modul wird also erzeugt von Vektoren der Form $L_{-k_r} \cdots L_{-k_2} L_{-k_1}|0\rangle$ mit $k_r \geqslant \cdots k_1 \geqslant 2$ und man bekommt für die Zustandssumme:

$$Z(T, L) = t^{\frac{c}{12}} \cdot \left(1 + \prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}\right)^2$$

Da wegen $\beta \to \infty$ die t^k sehr schnell gegen Null gehen, kann man die Zustandssumme und den Logarithmus dieser Zustandssumme nähern:

$$\begin{aligned} \ln Z(T,L) &= \ln\left(t^{\frac{c}{12}}\left(1+t^2+t^3+\mathcal{O}(t^4)\right)^2\right) \\ &\approx 2\cdot\frac{\beta\pi}{L}\left(-\frac{c}{24}+e^{-\frac{2\beta\pi}{L}}+e^{-\frac{3\beta\pi}{L}}\right) \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (3.5) und (3.7) ergeben sich nun Energie und Druck:

$$E = \frac{2\pi}{L}\left(-\frac{c}{24}+2\cdot e^{-\frac{2\beta\pi}{L}}+3\cdot e^{-\frac{3\beta\pi}{L}}\right) \tag{3.7}$$

$$p = \frac{2\pi}{L^2}\left(-\frac{c}{24}+2\cdot e^{-\frac{2\beta\pi}{L}}+3\cdot e^{-\frac{3\beta\pi}{L}}\right) \tag{3.8}$$

Vergleicht man (3.7) und (3.8), so sieht man, dass gilt:

$$p = \frac{E}{L}.$$

Dieser Zusammenhang kann für alle Systeme mit einer Zustandssumme, die nur von dem Verhältnis β/L abhängen, gefunden werden:

$$\begin{aligned} E &= -\partial_\beta \ln\left(Z\left(\frac{\beta}{L}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{Z\left(\frac{\beta}{L}\right)}\cdot\frac{1}{L}\cdot\left(\partial_{\left(\frac{\beta}{L}\right)}Z\right)\left(\frac{\beta}{L}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\beta}\partial_L \ln\left(Z\left(\frac{\beta}{L}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\beta}\frac{1}{Z\left(\frac{\beta}{L}\right)}\cdot\frac{-\beta}{L^2}\cdot\left(\partial_{\left(\frac{\beta}{L}\right)}Z\right)\left(\frac{\beta}{L}\right) \\ &= \frac{1}{L}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{Z\left(\frac{\beta}{L}\right)}\cdot\frac{1}{L}\cdot\left(\partial_{\left(\frac{\beta}{L}\right)}Z\right)\left(\frac{\beta}{L}\right)\right)}_{=E} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{p = \frac{E}{L}} \tag{3.9}$$

Tiefe Temperaturen mit $0 < c < 1$

Im Fall $0 < c < 1$ kann h nur die diskreten Werte $h = h_{p,q}$ aus der Klassifizierung (2.11) annehmen. Da das Skalarprodukt an diesen Punkten nur positiv semi-definit ist [12, 13], müssen wegen der Nullvektoren in den Verma-Moduln Korrekturfaktoren berücksichtigt werden.

Die Zustandssumme lässt sich schreiben als:

$$Z(t) = t^{2\left(h - \frac{c}{24\pi}\right)} \cdot p(t)^{-2} \cdot \eta(t)^2,$$

mit $p(t) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - t^k)$ und dem Korrekturfaktor [12]

$$\eta(t) = \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} t^{n^2 m(m+1)} \left(t^{n(p(m+1)-qm)} - t^{n(p(m+1)+qm)+pq}\right).$$

Da $t \ll 1$, ist von η nur der Summand mit dem kleinsten Exponenten wichtig, also nur derjenige mit $n = 0$: $\eta_0(t) = 1 - t^{pq}$. Damit und mit der Potenzreihenentwicklung von $\ln(P(t)^{-2}$ ergibt sich nun für den Logarithmus der Zustandssumme:

$$\ln(Z) \approx -\frac{2\beta\pi}{L}\left(h - \frac{c}{24\pi}\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}t^{j\cdot k} - 2t^{pq}$$

Somit sind Energie und Druck:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\pi}{L}\left(h - \frac{c}{24\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} kt^{jk} - pqt^{pq}\right) \\ &= p\,L. \end{aligned}$$

Der Korrekturterm in der Zustandssumme macht sich also erst bemerkbar, wenn die Näherung für tiefe Temperaturen bis zur Ordnung $k = pq$ durchgeführt wird.

3.3.2 Grenzfall: Hohe Temperaturen

Im Grenzfall hoher Temperaturen ($\beta \to 0$, $t \to \infty$) können nicht ohne Weiteres Näherungen durchgeführt werden. Um dennoch etwas über diesen Grenzfall aussagen zu können, kann man die *modulare Invarianz* der Zustandssumme nutzen. Im Folgenden werde ich zunächst kurz auf diese Symmtrie eingehen, um dann mit ihrer

Hilfe das Hochtemperaturverhalten der Zustandssumme zu bestimmen.

Modulare Symmetrie

Zunächst möchte ich die modulare Symmetrie auf einem Torus betrachten[1].

Eine mögliche Definition eines Torus geschieht über zwei linear unabhängige Gittervektoren, wobei die Punkte diejenigen sind, die sich um eine Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten von diesen Vektoren unterscheiden. Betrachtet man ein Gitter in der komplexen Ebene, welches von zwei senkrecht aufeinanderstehenden Vektoren $\vec{L}_1$ und $\vec{L}_2$ aufgespannt wird, so kann allgemeiner ein Torus auch durch die Perioden $\lambda_1 = L_1$ und $\lambda_2 = L_2 \cdot ie^{-i\alpha}$ eines nicht-orthogonalen Gitters erzeugt werden. Die Wahl der Perioden ist allerdings nicht eindeutig: Neben (λ_1, λ_2) kann dasselbe Gitter auch durch (λ'_1, λ'_2) beschrieben werden, wobei diese Linearkombinationen ganzahliger Vielfache von $\lambda_{1,2}$ sein müssen und umgekehrt. Es muss also gelten:

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Da das Volumen der Einheitszelle gleich eins sein soll, kommt als Gruppe nur die *modulare* Gruppe $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ in Frage. Das Verhältnis τ der Perioden transformiert sich durch

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Generatoren dieser Gruppe sind

$$\mathcal{T} : \tau \mapsto \tau + 1$$
$$\mathcal{S} : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}.$$

Diese Symmetrie möchte man nun auch bei den Zustandssummen auf dem Zylinder realisiert haben. Die Zustandssumme lässt sich durch die Charaktere der Virasoro-Algebra berechnen:

$$Z = \sum_{h_l, h_r} M_{h_l, h_r} \chi_{h_l}(t) \chi_{h_r}(\bar{t})$$

[1] Zu diesem Abschnitt siehe [2, 9].

mit $t = e^{2i\pi\tau}$ und den Multiplizitäten M_{h_l,h_r}, weil sich der Darstellungsraum schreiben lässt als

$$\bigoplus_{h_l,h_r} M_{h_l,h_r} V_{h_l} \otimes V_{h_r},\ \ M_{h_l,h_r} \in \mathbb{N}_0.$$

Es soll also gelten: $Z(\tau+1) = Z(\tau)$ und $Z(-1/\tau) = Z(\tau)$. Dies stellt Bedingungen an das Transformationsverhalten der Charaktere: $\chi_h\left((e^{2i\pi(\tau+1)}\right) = \mathcal{T}_{h,h'}\chi_{h'}\left(e^{2i\pi\tau}\right)$ und $\chi_h\left(e^{2i\pi\tau^{-1}}\right) = \mathcal{S}_{h,h'}\chi_{h'}\left(e^{2i\pi\tau}\right)$ mit $\mathcal{T}M = M\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}M = M\mathcal{S}$. Aus der ersten Relation folgt, dass nur für $h_l - h_r \in \mathbb{Z}$ die Multiplizität $M_{h_l,h_r} \neq 0$ sein kann.

Insbesondere die Transformation $\mathcal{S}$ wird im Folgenden von Bedeutung sein, da sie einen Zusammenhang zwischen dem Hoch- und Tieftemperaturverhalten der Zustandssumme herstellt.

Hohe Temperaturen mit $c > 1$

Für $c > 1$ ist $h \geq 0$ beliebig, wobei für $h = 0$ wieder der Nullvektor $L_{-1}|h\rangle$ beachtet werden muss.

Die Zustandssumme lässt sich schreiben als [2, 12]

$$Z(T,L) = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-t^k\right)\right)^{-2}}_{=:f(\delta)^{-2}} \cdot t^{2h-c/12}. \tag{3.10}$$

mit $t := e^{-2\pi\delta}$. Für tiefe Temperaturen kann man wieder eine Näherung machen: $f(T,L) \approx 1-t$ (für $h \neq 0$, sonst: $f(T,L) \approx 1-t^2$). Um nun aus dem Grenzfall für tiefe Temperaturen die Zustandssummen für hohe Temperaturen zu bekommen, kann man das modulare Transformationsverhalten ausnutzen (mit $\delta = \beta/2L$) [2]:

$$f(\delta) = \delta^{-1/2} \cdot e^{\frac{\pi}{12}(\delta-\delta^{-1})} \cdot f(\delta^{-1}) \tag{3.11}$$

Also ist für hohe Temperaturen

$$f\left(\frac{\beta}{2L}\right) = \left(\frac{\beta}{2L}\right)^{-1/2} \cdot e^{\frac{\pi}{12}\left(\frac{\beta}{2L}-\frac{2L}{\beta}\right)} \cdot f\left(\frac{2L}{\beta}\right)$$

und es ergibt sich für den Logarithmus der Zustandssumme:

$$
\begin{aligned}
\ln Z(T,L) &\approx \frac{\beta\pi}{L}\left(\frac{c}{12}-2h\right)+\ln(\beta)-\ln(2L)-\frac{\pi}{6}\left(\frac{\beta}{2L}-\frac{2L}{\beta}\right)+2\ln\left(1+e^{-4\pi L\beta^{-1}}\right)\\
&\approx \ln(\beta)+\frac{\pi L}{3\beta}+\frac{\pi\beta}{L}\left(\frac{c}{12}-2h-\frac{1}{12}\right)+2e^{-4\pi L\beta^{-1}}-\ln(2L)
\end{aligned}
$$

Energie und Druck bei hohen Temperaturen sind demnach:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\pi L}{3\beta^2}-\frac{1}{\beta}-\frac{8\pi L}{\beta^2}\cdot e^{-4\pi L\beta^{-1}}+\frac{\pi}{L}\left(2h-\frac{c}{12}+\frac{1}{12}\right)\\
&= L\cdot p
\end{aligned}
$$

Im Grenzfall $\beta\to\infty$ sind also, anders als im Fall $\beta\to 0$, die konstanten Terme vernachlässigbar.

Hohe Temperaturen mit $0<c<1$

Für $0<c<1$ müssen wegen der Nullvektoren in den Verma-Moduln wieder Korrekturen berücksichtigt werden, so dass die Transformation (3.11) nicht mehr ohne Weiteres gilt. Der Parameter h kann erneut nur die diskreten Werte aus (2.11) annehmen.

Man kann wieder das modulare Transformationsverhalten der Charaktere χ_h nutzen: Für die Zustandssumme in einer Darstellung mit $h=h_{p,q}=\bar{h}_{\bar{p},\bar{q}}$ gilt [1]:

$$
Z(\delta)=\sum_{h'}\left(S_{hh'}\chi_{h'}\left(\delta^{-1}\right)\right)^2 \tag{3.12}
$$

mit

$$
S_{hh'}=2\cdot\left(\frac{2}{m(m+1)}\right)^{1/2}(-1)^{(p+q)(p'+q')}\sin\left(\frac{\pi pp'}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi qq'}{m+1}\right). \tag{3.13}
$$

Hierbei sind $1\le q\le p\le m-1$ und $1\le q'\le p'\le m-1$.

Bei niedrigen Temperaturen kann man nun wieder nähern: $\chi_{h'}\left(\delta^{-1}\right)\approx t'^{\left(h'-\frac{c}{24\pi}\right)}(1-t')^{-1}\approx t'^{\left(h'-\frac{c}{24\pi}\right)}(1+t')$. Es lassen sich also wieder die Zustandssummen für den Grenzfall hoher Temperaturen aus dem Grenzfall tiefer Temperaturen berechnen.

Beispielsweise ergibt sich für den Fall $m = 3$ ($c = \frac{1}{2}$ und $h = 0, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{16}$) die Matrix

$$S_{hh'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Charaktere bekommt man:

$$\chi_h(T,L) \approx \left(1 + e^{-4\pi\frac{L}{\beta}}\right)\left(e^{-4\pi\frac{L}{\beta}}\right)^{-\frac{c}{24}} \cdot \left(S_{h,0} + S_{h,\frac{1}{2}}\left(e^{-4\pi\frac{L}{\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} + S_{h,\frac{1}{16}}\left(e^{-4\pi\frac{L}{\beta}}\right)^{\frac{1}{16}}\right).$$

Somit ergeben sich Energie und Druck zu

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi L}{\beta^2}\left(-\frac{1}{2}S_{h,\frac{1}{16}}e^{-\pi\frac{L}{4\beta}} - 4S_{h,\frac{1}{2}}e^{-2\pi\frac{L}{\beta}} + \left(\frac{c}{3} - 8\right)e^{-4\pi\frac{L}{\beta}}\right) \\ &= p \cdot L. \end{aligned}$$

3.3.3 Korrelationsfunktionen

Weitere wichtige Größen sind die Korrelationsfunktionen. Um diese zu berechnen, kann man nutzen, dass die Zustände $\langle\cdot\rangle_\beta : A \mapsto \langle A\rangle_\beta$ sogenannte *KMS*[2]-Zustände sind. Daher werde ich im folgenden Abschnitt zunächst auf KMS-Zustände eingehen um diese Eigenschaft beim Berechnen der 1-, 2-, und[3] 3-Punkt-Funktion zu nutzen.

KMS-Zustände

Im thermodynamischen Grenzfall ist es im allgemeinen nicht mehr ohne weiteres möglich, Gleichgewichtszustände zu charakterisieren. Beispielsweise könnte eine Dichtematrix $\varrho = e^{-\beta H}$ für ein kontinuierliches Spektrum des Hamiltonoperators kein Spurklasseoperator sein [8].

Um Gleichgewichtszustände dennoch charakterisieren zu können, hat man die KMS-Bedingung formuliert. Diese besagt [10], dass zwei beliebige Felder A und B mit einem Zeitentwicklungsautomorphismus α_t die Erwartungswerte $\langle A\alpha_t B\rangle_\beta$ die Randbedingung

$$\langle A\alpha_{t+i\beta}B\rangle_\beta = \langle\alpha_t(B)A\rangle_\beta \tag{3.14}$$

erfüllen müssen.

[2]Kubo-Martin-Schwinger
[3]fehtlt noch

Für $\alpha_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$ und $\langle \cdot \rangle_\beta = Tr(\varrho \cdot) = Tr(e^{-\beta H} \cdot)$ ist dies wegen der Zyklizität der Spur erfüllt [8]:

$$\begin{aligned} \langle AB(t+is) \rangle_\beta &= Tr\left(e^{-\beta H} A e^{i(t+is)H} B e^{-i(t+is)H}\right) \\ &= Tr\left(e^{(s-\beta)H} A e^{-sH} e^{itH} B e^{-itH}\right) \end{aligned}$$

Dies existiert (und ist analytisch) für $0 < s < \beta$, also lässt sich in diesem Bereich $\langle AB(t) \rangle_\beta$ als Randwert einer analytischen Funktion schreiben. Auch die Randbedingung (3.14) ist erfüllt:

$$\begin{aligned} \langle A\alpha_{(t+i\beta)}(B) \rangle_\beta &= Tr\left((e^{-\beta H} e^{itH} B e^{-itH} A\right) \\ &= \langle B(t) A \rangle_\beta . \end{aligned}$$

Erwartungswerte

Im Folgenden ist die Länge des Kastens $L = 2\pi$.

Die Korrelationsfunktionen

$$\langle T(x_1) \cdots T(x_N) \rangle_\beta = Tr\left(e^{-\beta H} T(x_1) \cdots T(x_N)\right)$$

hängen wegen der Translationsinvarianz nur von den Koodinatendifferenzen $x_i - x_j$ ab. Im Fall $N = 1$ sind sie also konstant:

$$\langle T(x) \rangle_\beta = \frac{1}{2\pi} \langle H \rangle_\beta = -\frac{1}{2\pi} \partial_\beta \left(\ln(Z(\beta))\right).$$

Für die Zwei-Punkt-Funktion bekommt man aus der Vertauschungsrelation (2.6) einen Zusammenhang zwischen $\langle T(x)T(y) \rangle$ und $\langle T(y)T(x) \rangle$ (mit $\varrho = e^{-\beta H}$):

$$\begin{aligned} Tr\left(\varrho\, [T(x), T(y)]\right) &= i\left(Tr\left(\varrho T(x)\right) + Tr\left(\varrho T(y)\right)\right) \delta'(x-y) - \frac{ic}{24\pi} Tr(\varrho) \delta'''(x-y) \\ &= Tr\left(\varrho T(x) T(y)\right) - Tr\left(\varrho T(y) T(x)\right). \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\langle T(x)T(y) \rangle_\beta = 2i \langle T(x) \rangle \delta'(x-y) - \frac{ic}{24\pi} \delta'''(x-y) + \langle T(y) T(x) \rangle_\beta .$$

Bei einer Fourierzerlegung erhält man für $n \neq 0$ einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten f_n und f_{-n} (mit $\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} e^{in(x-y)}$):

$$\begin{aligned}
\langle T(y)T(x)\rangle_\beta &= f(y-x) = \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} f_n e^{-in(x-y)} \\
&= \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} f_{-n} e^{in(x-y)} \\
&= \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} f_n e^{in(x-y)} - \frac{i}{\pi}\langle T(x)\rangle_\beta \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} ine^{in(x-y)} + \frac{ic}{48\pi^2} \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} (in)^3 e^{in(x-y)} \\
&= \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} e^{in(x-y)} \left(f_n + \frac{n}{\pi}\langle T(x)\rangle_\beta + \frac{cn^3}{48\pi^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad f_{-n} = f_n + \frac{n}{\pi}\langle T(x)\rangle_\beta + \frac{cn^3}{48\pi^2} \tag{3.15}$$

Um eine weitere Relation zwischen f_n und f_{-n} zu finden, kann man ausnutzen, dass $\langle T(x)T(y)\rangle_\beta$ ein KMS-Zustand ist:

$$\langle T(x)T(y+i\beta)\rangle = \langle T(y)T(x)\rangle$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
f(x-y-i\beta) &= \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} f_n e^{in(x-y-i\beta)} = \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} f_n e^{n\beta} e^{in(x-y)} \\
&= f(y-x) = \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} f_n e^{in(y-x)} = \sum_{n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} f_{-n} e^{in(x-y)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad f_n = e^{-n\beta} f_{-n} \tag{3.16}$$

Nun muss noch f_0 berechnet werden: Da $H = \int_{-L/2}^{L/2} T(x)dx$, ist $f_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(x-y)dx = \frac{1}{2\pi}\langle HT(y)\rangle_\beta$ und somit

$$f_0 = \frac{1}{4\pi^2}\langle H^2\rangle_\beta = -\frac{1}{4\pi^2}\partial_\beta^2 \left(\ln(Z(\beta))\right). \tag{3.17}$$

Aus (3.15), (3.17)und (3.16) folgt nun die Zwei-Punkt-Funktion:

$$\langle T(x)T(y)\rangle_\beta = \frac{1}{4\pi^2}\langle H^2\rangle_\beta - \sum_{0 \neq n \,\epsilon\, \mathbb{Z}} \frac{1}{1-e^{n\beta}} \left(\frac{n}{\pi}\langle T(x)\rangle_\beta + \frac{cn^3}{48\pi^2} \right) e^{in(x-y)}. \tag{3.18}$$

Für den Grenzfall $T \to 0$, $\beta \to \infty$ sollte diese gegen den Vakuumerwartungswert konvergieren. Die Zwei-Punkt-Funktion (2.7) im Vakuum auf einer Zylinderoberfläche ergibt sich mit der Transformation (2.11). Mit $z = e^{ix}$ ist

$$z' = i\frac{1-z}{1+z} = i\frac{1-e^{ix}}{1+e^{ix}}$$

und somit

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z(x)} = \frac{2e^{ix}}{(1+e^{ix})^2}.$$

Demnach ist der transformierte Vakuumerwartungswert:

$$\begin{aligned}
\langle T(x)T(y)\rangle &= \frac{2^4 e^{2i(x-y-i\varepsilon)}}{\left(1+e^{ix}\right)^4\left(1+e^{i(y+i\varepsilon)}\right)^4 \cdot \frac{\frac{c}{8\pi^2}}{\left(i\frac{1-e^{ix}}{(1+e^{ix})} - i\frac{1-e^{i(y+i\varepsilon)}}{1+e^{i(y+i\varepsilon)}}\right)^4}} \\
&= \frac{2^4 e^{2i(x-y-i\varepsilon)}}{\left(1+e^{ix}\right)^4\left(1+e^{i(y+i\varepsilon)}\right)^4} \cdot \frac{\frac{c}{8\pi^2}}{2^4\frac{\left(e^{i(y+i\varepsilon)}-e^{ix}\right)^4}{(1+e^{ix})^4\left(1+e^{i(y+i\varepsilon)}\right)^4}} \\
&= \frac{c}{8\cdot 2^4\pi^2}\cdot\left(e^{i/2(y-x+i\varepsilon)} - e^{-i/2(y-x+i\varepsilon)}\right)^{-4}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \langle T(x)T(y)\rangle = \frac{c}{8\cdot 2^4\pi^2}\sin^{-4}\left(\frac{x-y-i\varepsilon}{2}\right) \tag{3.19}$$

Andererseits ist der Grenzwert für $\beta \to \infty$

$$\langle T(x)T(y)\rangle_\infty = -\sum_{n<0}\left(\frac{n}{\pi}\langle T(x)\rangle_\infty + \frac{cn^3}{48\pi^2}\right)e^{in(x-y+i\varepsilon)}$$

$$\langle T(x)T(y)\rangle_\infty = \sum_{n>0}\left(\frac{n}{\pi}\langle T(x)\rangle_\infty + \frac{cn^3}{48\pi^2}\right)e^{in(y-x-i\varepsilon)}.$$

Weil $\mid e^{i(y-x-i\varepsilon)} \mid < 1$ ist, erhält man für den Term proportional zu $ne^{in(y-x-i\varepsilon)}$ mit $\varphi = y - x - i\varepsilon$:

$$\sum_{n>0} ne^{in\varphi} = i\partial_\varphi \left(-1 + \sum_{n>0} \left(e^{i\varphi}\right)^n \right) \tag{3.20}$$

$$= i\partial_\varphi \frac{1}{1-e^{i\varphi}} = \frac{e^{i\varphi}}{\left(1-e^{i\varphi}\right)^2}$$
$$= -\frac{1}{4}\sin^{-2}\left(-\frac{\varphi}{2}\right). \tag{3.21}$$

Analog folgt für den anderen Term:

$$\sum_{n>0} n^3 e^{in\varphi} = -i\partial_\varphi^3 \left(-1 + \sum_{n>0} \left(e^{i\varphi}\right)^n \right) \tag{3.22}$$

$$= -i\partial_\varphi^3 \frac{1}{1-e^{i\varphi}} = -\frac{e^{i\varphi}}{\left(1-e^{i\varphi}\right)^2} + 6\left(\frac{e^{2i\varphi}}{\left(1-e^{i\varphi}\right)^3} + \frac{e^{3i\varphi}}{\left(1-e^{i\varphi}\right)^4} \right)$$
$$= -\frac{e^{i\varphi}}{\left(1-e^{i\varphi}\right)^2} + 6\frac{e^{2i\varphi}}{\left(1-e^{i\varphi}\right)^4}$$
$$= \frac{1}{4}\sin^{-2}\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + 6\cdot 2^{-4}\sin^{-4}\left(-\frac{\varphi}{2}\right). \tag{3.23}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \langle T(x)\rangle_\infty &= \frac{1}{2\pi}\langle H\rangle_\infty = \frac{1}{2\pi}\langle L_0\rangle_\infty - \frac{c}{48\pi} \\ &= \frac{-c}{48\pi}. \end{aligned}$$

Im Grenzfall $\beta \to \infty,\ \varepsilon \to 0$ erhält man also für die Zwei-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned} \langle T(x)T(y)\rangle_\infty &= -\frac{c}{48\pi^2}\frac{1}{4}\sin^{-2}\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{c}{48\pi^2}\frac{1}{4}\sin^{-2}\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{c}{48\pi^2}\cdot 6\cdot 2^{-4}\sin^{-4}\left(\frac{-\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{c}{2^4\cdot 8\pi^2}\cdot\sin^{-4}\left(\frac{x-y+i\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

und stimmt somit mit dem auf den Zylinder transformierten Vakuumerwartungswert (3.19) überein.

4 Zusammenfassung

Literaturverzeichnis

[1] J.-B. Zuber C. Itzykson. Two-dimensional conformal invariant theories on a torus. *Nuclear Physics*, B275:580–616, 1986.

[2] J. L. Cardy. Operator content of two-dimensional conformally invariant theories. *Nuclear Physics*, B270:186–204, 1986.

[3] M. P. Nightingale H. W. J. Blöte, J. L. Cardy. Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality. *Physical Review Letters*, 56:742–745, 1986.

[4] G. Münster I. Montvay. *Quantum fields on a lattice*. Cambridge University Press, 1994.

[5] Y. S. Stanev I. T. Todorov. *Chiral Current Algebras and 2-Dimensional Conformal Models*, volume A of *Troisième Cycle de la Physique en Suisse Romande*. Lausanne Lectures, 1992.

[6] J. Lopuszanski. *An Introduction to Symmetry and Supersymmetry in Quantum Field Theory*. World Scientific, 1991.

[7] G. Mack. Introduction to conformal invariant quantum field theory in two and more dimensions. In G. 'tHooft et al, editor, *Nonperturbative Quantum Field Theory*, pages 353–383. Plenum Press, 1988.

[8] G. Morandi. *Statistical Mechanics*. World Scientific, 1995.

[9] D. Sénéchal P. Di Francesco, P. Mathieu. *Conformal field theory*. Springer-Verlag, 1997.

[10] I. T. Todorov P. Furlan, G. M. Sotkov. *Two-Dimensional conformal quantum field theory*, volume 12:6 of *3*, pages 1–202. Rivista Nuovo Cimento, 1989.

[11] A. S. Wightman R. F. Streater. *PCT, spin and statistics, and all that.* W. A. Benjamin, New York, 1964.

[12] K.-H. Rehren. Konforme Quantenfeldtheorie, Skript zur Vorlesung. 1997/1998.

[13] A. K. Raina V. G. Kac. *Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie Algebras.* World Scientific, 1987.

Erklärung nach §13(8)der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.
Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nicht bestandenen Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 16. Juli 2009

(Lena Wallenhorst)