GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Fakultät für
Physik

Bachelorarbeit

Wechselwirkung zwischen Dirac-Feldern und äußeren Feldern

Interaction between Dirac fields and external fields

angefertigt von

Fabian Schwarzendahl

aus Gütersloh

am Institut für Theoretische Physik

Bearbeitungszeit: 14. Mai 2012 bis 20. August 2012

Erstgutachter: Prof. Dr. Karl-Henning Rehren

Zweitgutachterin: Prof. Dr. Laura Covi

Zusammenfassung

Grundlage dieser Bachelorarbeit ist die Dirac-Gleichung, welche hier als Schrödinger-Gleichung einer relativistischen Quantenmechanik interpretiert wird. Die Gleichung wird im elektromagnetischen- und Gravitationsfeld betrachtet. Im elektromagnetischen Fall wird ein System von Gleichungen hergeleitet, welches die Dirac-Gleichung exakt löst. Hieraus wird eine Näherung hergeleitet, welche mit dem Standard-Verfahren zur Näherung der Dirac-Gleichung verglichen wird (Foldy-Wouthuysen-Transformation). Weiterhin wird die Dirac-Gleichung auf einer gekrümmten Raumzeit hergeleitet. Diese wird dann in einer schwach gekrümmten Raumzeit betrachtet. Daraus wird die auf der schwach gekrümmten Raumzeit exakte Dirac-Gleichung mit dem Verfahren, welches schon im elektromagnetischen Fall benutzt wurde, genähert.

Stichwörter: Dirac-Gleichung im elektromagnetischen- bzw Gravitationsfeld

Inhaltsverzeichnis

Konventionen

Metrik

Die Metriken, sowohl die Minkowski-Metrik, als auch die Metrik auf der gekrümmten Raumzeit, haben die Signatur $(+ - --)$.

Indizes

In der gesamten Arbeit wird die Einsteinsche-Summenkonvention für Indizes benutzt. Hierbei ist zu beachten, dass nur gleiche oben und unten gestellte Indizes kontrahiert werden. Über zwei unten gestellte gleiche Indizes wird nicht summiert, falls das Summenzeichen nicht explizit ausgeschrieben wird. Die Indizes i, j, k laufen in der Regel von 1 bis 3 und werden bezüglich der Euklidischen-Metrik kontrahiert. Die Indizes a, b, c laufen von 0 bis 3 und werden bezüglich der Minkowski-Metrik kontrahiert. Griechische Indizes laufen auch von 0 bis 3 werden jedoch hingegen für gekrümmte Raumzeiten benutzt und müssen somit unter Beachtung der entsprechenden Metrik kontrahiert werden.

Ableitungen

Partielle Ableitungen werden einerseits mit dem üblichen ∂_a bezeichnet, andererseits wird an einigen Stellen eine Ableitung durch ein ”$, a$“ im Index bezeichnet. Kovariante Ableitungen werden durch D_μ bezeichnet.

1. Einleitung

Grundlage dieser Bachelorarbeit ist die Dirac-Gleichung, welche 1928 von Paul Dirac aufgestellt wurde. In dieser Arbeit wird sie als Schrödinger-Gleichung einer relativistischen Quantenmechanik interpretiert, wie es auch von Dirac zunächst vorgeschlagen wurde. Die Dirac-Gleichung beschreibt Fermionen, wie zum Beispiel Elektronen. Hier wird sie in Anwesenheit von elektromagnetischen- und Gravitationsfeldern betrachtet.

Zunächst wird die Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld betrachtet. Hierfür wird ein Gleichungssystem, welches die Dirac-Gleichung exakt löst, hergeleitet. Aus diesem System von Gleichungen ergibt sich dann ein neues Näherungsverfahren. Dieses wird mit dem Standard-Näherungs-Verfahren aus der Literatur verglichen. Hierbei treten aus der Atomphysik bekannte Effekte wie der Zeeman-Effekt oder die Spin-Bahn-Wechselwirkung auf.

Weiterhin wird die Dirac-Gleichung auf einer gekrümmten Raumzeit betrachtet. Hierbei werden zunächst die mathematisch relevanten Werkzeuge vorgestellt und darauf aufbauend die Dirac-Gleichung auf einer gekrümmten Raumzeit hergeleitet. Diese Gleichung wird dann in einer schwach gekrümmten Raumzeit, nämlich in der Newton-Näherung für Gravitationsfelder betrachtet. Die Dirac-Gleichung in der Newton-Näherung wird dann weiter durch das selbe Verfahren, welches für das elektromagnetische Feld benutzt wurde, genähert.

2. Grundlagen zur Dirac-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung beschreibt Quantenmechanische Teilchen, jedoch ist sie nicht relativistisch, eignet sich also nicht für eine relativistische Quantenmechanik. Versucht man eine relativistische Schrödinger-Gleichung zu finden, so ist der erste Ansatz, die Energie in der Schrödinger-Gleichung, durch die eines relativistischen Teilchens zu ersetzen: [1, S.5]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4}\psi. \tag{2.1}$$

Der Wurzel Operator in dieser Gleichung ist nicht lokal, wodurch in einer Entwicklung unendlich hohe Ableitungen auftreten. Eine weitere Möglichkeit eine relativistische Schrödinger-Gleichung aufzustellen, ist die Klein-Gordon-Gleichung [8, S.118]:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4)\psi.$$

Bei dieser Gleichung wurde im Gegensatz zu (2.1), der Wurzel Operator auf der rechten Seite quadriert und auf der linken Seite eine zweite zeitliche Ableitung eingeführt. Das Problem bei dieser Gleichung ist, dass sie einen indefiniten Wahrscheinlichkeitsstrom hat [8, S.120], wodurch Probleme in der Interpretation auftreten. Sie eignet sich jedoch zur Beschreibung von Bosonen im Rahmen einer Quantenfeldtheorie [8, S.283 ff].

Dirac hatte nun die Idee, anstatt der Wurzel in (2.1), eine $N \times N$ Matrix α_k, beziehungsweise β vor jeden Summanden zu schreiben (hierdurch wird auch ψ zu einem N komponentigen Spinor)[8, S.121]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\hbar c}{i}\alpha_k\partial^k + \beta mc^2\right)\psi.$$

Es wird nun gefordert, dass jede Komponente von ψ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Das doppelte Anwenden der Operatoren auf beiden Seiten der Gleichung ergibt[1, S.8]:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(-\frac{\hbar^2c^2}{2}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)\partial^i\partial^j + \frac{\hbar mc^3}{i}(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)\partial^i + \beta^2m^2c^4\right)\psi.$$

Damit diese Gleichung zu der Klein-Gordon-Gleichung wird, müssen die Matrizen α_i und β folgende Bedingungen erfüllen[1, S.8]:

$$\begin{aligned}\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i &= 2\delta_{ij}1\\ \alpha_i\beta+\beta\alpha_i &= 0\\ \alpha_i^2=\beta^2 &= 1.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dies wird durch hermitische Matrizen, welche mindestens die Dimension 4×4 haben erfüllt. (Im Folgenden werden sie immer als 4×4 Matrizen angenommen.) Die Dirac-Gleichung lässt sich auch in Lorentz kovarianter Form schreiben, indem man von links mit β multipliziert. Somit lassen sich neue Matrizen definieren: $\gamma_0=\beta$ und $\gamma_i=\beta\alpha_i$. Mithilfe dieser Matrizen lässt sich die Dirac-Gleichung schreiben als [1, S.18](hier ist auch ein Beweis der Kovarianz zu finden):

$$\left(-i\gamma^a\partial_a+\frac{mc}{\hbar}\right)\psi=0. \tag{2.3}$$

Die γ^a genügen der Clifford-Algebra $\{\gamma^a,\gamma^b\}=2\eta^{ab}$, welche equivalent zu den Bedingungen (2.2) ist. Verschiedene Darstellungen der γ-, α- und β-Matrizen sind in [8, S.385 f] zu finden. Die Kopplung der Dirac-Gleichung an das elektromagnetische Feld ist dadurch gegeben, dass die Ableitung ∂_a durch eine kovariante Ableitung ersetzt wird [1, S.10]:

$$\partial_a\to\partial_a+ieA_a.$$

Hierbei ist A_a das vierer Potential des elektromagnetischen Feldes und e die Ladung des Feldes (zum Beispiel die elementar Ladung). Die Dirac-Gleichung lautet nun [1, S.18]:

$$(\gamma^a(-i\partial_a+eA_a)+\frac{mc}{\hbar})\psi=0. \tag{2.4}$$

2.1. Dirac-Strom

Um zu zeigen, dass der Wahrscheinlichkeitsstrom der Dirac-Gleichung positiv definit ist, benötigen wir den adjungierten Spinor, welcher durch $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ gegeben ist. Wir nehmen nun die Dirac-Gleichung (in natürliche Einheiten, das heißt $\hbar = c = 1$), multiplizieren mit dem adjungierten Spinor von links und zusätzlich die adjungierte Dirac-Gleichungen mit einem Spinor von rechts multipliziert:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(i\partial_a \gamma^a - m)\psi = 0 \\ \psi(i\partial_a \gamma^a + m)\bar{\psi} = 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen subtrahieren wir und benutzen die Produktregel der Differentiation:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\psi}(i\partial_a \gamma^a - m)\psi - \psi(i\partial_a \gamma^a + m)\bar{\psi} \\ &= i(\bar{\psi}\partial_a \gamma^a \psi - \psi \partial_a \gamma^a \bar{\psi}) \\ &= i(\partial_a(\bar{\psi}\gamma^a \psi)). \end{aligned}$$

Hieraus können wir einen vierer Strom definieren:

$$j^a = \bar{\psi}\gamma^a \psi. \tag{2.5}$$

Dieser Strom ist erhalten. Somit ist auch $j^0 = \psi^\dagger \psi$ erhalten und positiv definit und kann analog zum Betragsquadrat der Wellenfunktion aus der Quantenmechanik als Wahrscheinlichkeitsdichte in der relativistischen Quantenmechanik interpretiert werden. Außerdem können wir die anderen Komponenten des vierer Stroms als Wahrscheinlichkeitsstrom identifizieren, wieder analog zur Quantenmechanik. (vgl. [8, S.122])

3. Näherung der Dirac-Gleichung für statische elektromagnetische Felder

Ein Fermion, zum Beispiel ein Elektron, wird durch die Dirac-Gleichung beschrieben. Die Dirac-Gleichung wird hier als relativistische Schrödinger-Gleichung verstanden, nicht als Quantenfeld. Im Folgenden wird sich mit dieser Gleichung in einem äußeren statischen elektromagnetischen Feld beschäftigt. Das elektromagnetische Feld wird in unserem Fall durch die üblichen statischen Maxwell-Gleichungen beschrieben ([7, S.140] und [7, S.187]). Ein Beispiel hierfür ist das Wasserstoff Atom, bei dem sich ein Elektron in dem elektromagnetischem Feld eines Protons befindet, welches approximativ als elektromagnetisches Feld eines ruhenden Punktteilchens angenommen werden kann.

3.1. Reihenentwicklung der Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung gekoppelt an das elektromagnetische Feld (2.4), mithilfe von α_i und β geschrieben (aus Abschnitt (2)), sowie den elektromagnetischen Potentialen $\vec{A}$ (Vektorpotential für das Magnetfeld) und A_0 (elektrisches Potential), ist gegeben durch [8, S.126] (in Einheiten $\hbar = 1$):

$$i\partial_t \psi = \left(c\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \beta mc^2 + eA_0 \right) \psi. \tag{3.1}$$

Die folgenden Matrizen genügen der Clifford-Algebra, welche in Abschnitt (2) für die α_i und β gefordert wurde (i läuft von 1 bis 3, nummeriert also die Komponenten des Vektors)[8, S.123]:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die σ_i die Pauli-Matrizen sind. Das Einsetzen der $\vec{\alpha}$, β, des kinetischen Impulses $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ und zwei zweikomponentigen Spinoren $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\chi}$ mit $\psi = (\tilde{\varphi}\ \tilde{\chi})^T$ ergibt[8, S.126]:

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\tilde{\chi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\tilde{\varphi} \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix}.$$

Es wird nun die Ruheenergie mc^2 des $\tilde{\varphi}$ Spinors durch folgenden Ansatz weg transformiert [8, S.126]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = e^{imc^2 t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Dadurch ändert sich die Gleichung wie folgt [8, S.126]:

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Es wird nun angenommen, dass unsere elektromagnetischen Potentiale $\vec{A}$ und A_0 und somit auch unser elektromagnetisches Feld zeitunabhängig ist. Durch den üblichen Ansatz $\varphi(\vec{x}, t) = e^{-iEt}\varphi(\vec{x})$ und $\chi(\vec{x}, t) = e^{-iEt}\chi(\vec{x})$ für die Energie E, folgt die zeitunabhängige Gleichung:

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Es folgen nun zwei gekoppelte Gleichungen für die zwei Spinoren:

$$(E - eA_0)\,\varphi = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi \tag{3.2}$$

$$\left(2mc^2 + E - eA_0\right)\chi = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\varphi. \tag{3.3}$$

Umformen der Gleichung (3.3) ergibt Folgendes:

$$\chi = \left(2mc^2 + E - eA_0\right)^{-1} c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\varphi. \tag{3.4}$$

Hieraus ist zunächst zu erkennen, dass die χ Komponente klein gegen φ ist. Es wird sich also weiter mit der φ Komponente beschäftigt, da diese in physikalischen

Prozessen dominiert. Einsetzen der Gleichung (3.4) in die Gleichung (3.2) ergibt:

$$\begin{aligned}(E - eA_0)\,\varphi &= c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\left(2mc^2 + E - eA_0\right)^{-1} c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\varphi \\ &= c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\frac{1}{2mc^2}\left(1 + \frac{E - eA_0}{2mc^2}\right)^{-1} c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\varphi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Es wird nun eine nicht-relativistische Näherung gemacht. Dies ist hier möglich, da für nicht relativistische Energien und entsprechend kleine elektrische Potentiale gilt $1 \gg \frac{E-eA_0}{2mc^2}$. Es folgt mithilfe der Geometrischen-Reihe:

$$\begin{aligned}(E - eA_0)\,\varphi &= c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\frac{1}{2mc^2}\left(1 + \frac{E - eA_0}{2mc^2}\right)^{-1} c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\varphi \\ &= c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\frac{1}{2mc^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)\frac{E - eA_0}{2mc^2}\right)^{n} c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\varphi. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Falls der Operator $1+\frac{E-eA_0}{2mc^2}$ invertierbar ist, so ist die erste Zeile dieser Gleichung exakt. Jedoch gehen in diese Gleichung, im Gegensatz zu der üblichen Form, die Eigenwerte von E in nicht linearer Form ein. Diese Reihe wird nun störungstheoretisch behandelt. Hierzu wird folgender Ansatz für die Energie und den zweikomponentigen Spinor φ gemacht:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^{m} c^{-2k} E^{(k)} \\ \varphi &= \sum_{j=0}^{m} c^{-2j} \varphi^{(j)}. \end{aligned}$$

Somit ergeben sich Energie $E^{(0)}$ und Spinor $\varphi^{(0)}$ plus kleine Störungen. Werden diese nun in Gleichung (3.6) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\left(\sum_{k=0}^{m} c^{-2k} E^{(k)} - eA_0\right)\sum_{j=0}^{m} c^{-2j}\varphi^{(j)}$$

$$= c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\frac{1}{2mc^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)\frac{\sum_{k=0}^{m} c^{-2k}E^{(k)} - eA_0}{2mc^2}\right)^{n} c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\sum_{j=0}^{m} c^{-2j}\varphi^{(j)}. \tag{3.7}$$

Ziel ist es nun einen Koeffizientenvergleich in den Potenzen von c zu machen und somit Gleichungen für alle $E^{(k)}$ und $\varphi^{(j)}$ zu erhalten. Es wird zunächst folgende Summe betrachtet:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)\frac{\sum_{k=0}^{m} c^{-2k}E^{(k)} - eA_0}{2mc^2}\right)^n . \tag{3.8}$$

Diese lässt sich mit dem Multinomialtheorem[3, S.42] schreiben als:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2m}\right)^n c^n \sum_{\substack{n=n_0+\cdots+n_{m+1}\\ n_0,\cdots n_{m+1}\geq 0}} \binom{n}{n_0,\cdots,n_{m+1}} \prod_{k=0}^{m} c^{-2kn_k} E^{(k)n_k} (-eA_0)^{n_{m+1}} .$$

Da in der zweiten Summe die Bedingung $n = n_0 + \cdots + n_{m+1}$ steht, kann man die erste Summe von $n_0 + \cdots + n_{m+1} = 0$ an laufen lassen und die n in den Exponenten ersetzen durch $n_0 + \cdots + n_{m+1}$. Somit wird die Summe (3.8) zu:

$$\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_{m+1}=0\\ n_0,\cdots n_{m+1}\geq 0}}^{\infty} \left(\frac{-1}{2m}\right)^{n_0+\cdots+n_{m+1}} \underbrace{c^{n_0+\cdots+n_{m+1}}}_{=c^{-2n_{m+1}}c^{-2\sum_{k=1}^{m} n_k}} (-eA_0)^{n_{m+1}}$$

$$\binom{n_0+\cdots+n_{m+1}}{n_0,\cdots,n_{m+1}} \underbrace{\prod_{k=0}^{m} c^{-2kn_k}}_{c^{-2\sum_{k=1}^{m} kn_k}} \prod_{k=0}^{m} E^{(k)n_k} .$$

Außerdem wurde das Produkt aufgeteilt. Fasst man nun die Exponenten der c zusammen so ergibt sich:

$$\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_{m+1}=0\\ n_0,\cdots n_{m+1}\geq 0}}^{\infty} \left(\frac{-1}{2m}\right)^{n_0+\cdots+n_{m+1}} (-eA_0)^{n_{m+1}} \binom{n_0+\cdots+n_{m+1}}{n_0,\cdots,n_{m+1}}$$

$$c^{-2(\sum_{k=1}^{m}(k+1)n_k + n_{m+1})} \prod_{k=0}^{m} E^{(k)n_k} .$$

Dies wird nun wieder in Gleichung (3.7) eingesetzt:

$$\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_{m+1}=0\\ n_0,\cdots n_{m+1}\geq 0}}^{\infty}\left(\frac{-1}{2m}\right)^{n_0+\cdots+n_{m+1}}(-eA_0)^{n_{m+1}}\binom{n_0+\cdots+n_{m+1}}{n_0,\cdots,n_{m+1}}$$
$$c^{-2(l+\sum_{k=1}^{m}(k+1)n_k+n_{m+1})}\prod_{k=0}^{m}E^{(k)n_k}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\varphi^{(l)}$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}c^{-2(k+l)}E^{(k)}\varphi^{(l)}-eA_0\sum_{j=0}^{m}c^{-2j}\varphi^{(j)}.$$

Nun ist ein Koeffizienten-Vergleich möglich, wobei wir den Index j (letzter Summand in der letzten Zeile) als vorgegeben ansehen. Somit folgt direkt, dass für die anderen Koeffizienten gelten muss $k+l=j$ und $j=l+\sum_{k=1}^{j}(k+1)n_k+n_{j+1}$. Es folgen also für ein festes c^{-2j} folgende Koeffizienten:

$$\begin{aligned}&-eA_0\varphi^{(j)}+\sum_{j=k+l}E^{(k)}\varphi^{(l)}\\ &=\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\sum_{j=l+\sum_{k=1}^{j}(k+1)n_k+n_{j+1}}\left(\frac{-1}{2m}\right)^{n_0+\cdots+n_{j+1}}(-eA_0)^{n_{j+1}}\\ &\binom{n_0+\cdots+n_{j+1}}{n_0,\cdots,n_{j+1}}\prod_{k=0}^{j}E^{(k)n_k}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\varphi^{(l)}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Dies ist nun ein System von Differentialgleichungen, deren Summe die exakte Lösung der Dirac-Gleichung in einem statischen elektromagnetischen Feld ergibt. Der 0-te Term dieser Gleichung ist die Pauli-Gleichung (siehe Abschnitt 3.2). In der j-ten Gleichung kommt die Energie $E^{(j)}$ nur mit der Wellenfunktion $\varphi^{(0)}$ und die Wellenfunktion $\varphi^{(j)}$ kommt nur mit dem Operator $(H_0-E^{(0)})\varphi^{(j)}$ vor, wobei H_0 der Hamilton-Operator der Pauli-Gleichung ist. Es kann nun $(\varphi^{(0)})^{\dagger}$ von links an die Gleichung multiziert, also das Skalarprodukt gebildet werden. Da der Operator H_0 hermitesch ist, löst $\varphi^{(0)}$ auch die Pauli-Gleichung. Somit fällt der Term, welcher $\varphi^{(j)}$ enthält weg. Es folgt also eine Gleichung für $E^{(j)}$, wobei diese abhängig ist von den bekannten Energien $E^{(k)}$ und den Wellenfunktionen $\varphi^{(k)}$, mit $k<j$. Aus diesem $E^{(j)}$ ergibt sich also eine Bestimmungsgleichung für $\varphi^{(j)}$. Diese legt $\varphi^{(j)}$ bis auf einen Vektor aus dem Kern von H_0 fest, welche ein Vielfaches von $\varphi^{(0)}$ ist, falls es keine

Entartung gibt. Dieser Vektor lässt sich schließlich durch die Normierungsbedingung $\langle \varphi^{(0)}, \varphi^{(j)} \rangle = 0$ fixieren. Bis zur ersten Ordnung wird dies im folgenden Abschnitt (3.2) illustriert.

3.2. Hamilton-Operatoren nullter und erster Ordnung

Wir betrachten zunächst die $j = 0$ Differentialgleichung der Reihe (3.9):

$$-eA_0\varphi^{(0)} + E^{(0)}\varphi^{(0)} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\right)^2 \varphi^{(0)}.$$

Dies ist die Pauli-Gleichung (vgl. [8, S.127]). Somit ist der Hamilton-Operator in 0-ter Ordnung gegeben durch:

$$H_0 = eA_0 + \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\right)^2 . \tag{3.10}$$

Es wird nun eine Identität aus [8, S.127] benutzt:

$$\left(\vec{\sigma}\vec{\pi}\right)^2 = \left(\vec{\pi}^2 - \frac{e}{c}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right). \tag{3.11}$$

Wobei mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ die Eichung für ein statisches magnetisches Feld eingesetzt wurde. Somit folgt für den Hamilton-Operator der Pauli-Gleichung:

$$H_0 = eA_0 + \frac{1}{2m}\left(\vec{\pi}^2 - \frac{e}{c}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right). \tag{3.12}$$

Für $j = 1$ kommen in (3.9) drei Summanten vor, welche Folgendes ergeben:

$$\left(E^{(0)} - eA_0 - \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\right)^2\right)\varphi^{(1)} = \left(-E^{(1)} + \frac{1}{4m^2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\left(eA_0 - E^{(0)}\right)\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\right)\varphi^{(0)}. \tag{3.13}$$

Im Unterschied zu der üblichen Störungstheorie, gibt es auf der rechten Seite der Gleichung einen Term, welcher proportional zu $E^{(0)}\varphi^{(0)}$ ist. Diesen könnte man durch $H_0\varphi^{(0)}$ ersetzen, wodurch sich die übliche Störungstheorie erster Ordnung ergibt. Es erscheint aber ein rechentechnischer Vorteil zu sein, dass bei dem hier vorgeschlagenen rekursiven Vorgehen Ausdrücke der Art $H_0\varphi^{(0)}$ "automatisch evaluiert" als $E^{(0)}\varphi^{(0)}$ erscheinen. Entsprechendes wiederholt sich in den höheren Ordnungen, indem auf der rechten Seite rekursiv die Korrekturen des Eigenwertes anstelle von

Operatoren auftreten. Für $j = 2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\left(E^{(0)} - eA_0 - \frac{1}{2m}(\sigma\pi)^2\right)\varphi^{(2)} \\
&= -\left[\left(\frac{1}{2m}\right)^2 (\sigma\pi)\left(E^{(0)} - eA_0\right)(\sigma\pi) - E^{(1)}\right]\varphi^{(1)} \\
&+ \left[\left(\frac{1}{2m}\right)^3 (\sigma\pi)\left((E^{(0)})^2 + e^2A_0^2\right)(\sigma\pi) - \left(\frac{1}{2m}\right)^2 (\sigma\pi)\, E^{(1)}\,(\sigma\pi)\,. - E^{(2)}\right]\varphi^0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Hieran ist die Struktur der Gleichungen zu erkennen. Die linke Seite der Gleichung (3.13) ist der Pauli-Operator $H_0 - E^{(0)}$. Diese wird von $\varphi^{(0)}$ gelöst. Da die Gleichung hermitisch ist, wird sie auch von $\varphi^{(0)\dagger}$ gelöst. Es wird nun von links mit $\varphi^{(0)\dagger}$ multipliziert:

$$0 = \varphi^{(0)\dagger}\left(-E^{(1)} + \frac{1}{4m^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\left(eA_0 - E^{(0)}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\right)\varphi^{(0)}.$$

Es folgt für die Energie $E^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)\dagger}E^{(1)}\varphi^{(0)} &= \varphi^{(0)\dagger}\left(\frac{1}{4m^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\left(eA_0 - E^{(0)}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\right)\varphi^{(0)} \\
&= \varphi^{(0)\dagger}\left(\frac{1}{4m^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}eA_0\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} - \frac{1}{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2E^{(0)} - \frac{1}{2}E^{(0)}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\right)\varphi^{(0)}.
\end{aligned}$$

Da hier nun der $\varphi^{(0)}$ Spinor betrachtet wird, ist es möglich den Hamilton-Operator (3.10) für die Energie einzusetzen:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)\dagger}E^{(1)}\varphi^{(0)} &= \varphi^{(0)\dagger}\frac{1}{4m^2}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}eA_0\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\right)\varphi^{(0)} \\
&- \varphi^{(0)\dagger}\frac{1}{4m^2}\left(\frac{1}{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\left(eA_0 - \frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\right)\right)\varphi^{(0)} \\
&- \varphi^{(0)\dagger}\frac{1}{4m^2}\left(\frac{1}{2}\left(eA_0 - \frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\right)(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2\right)\varphi^{(0)} \\
&= \varphi^{(0)\dagger}\frac{1}{4m^2}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}eA_0\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\right)\varphi^{(0)} \\
&- \varphi^{(0)\dagger}\frac{1}{4m^2}\left(\frac{1}{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2eA_0 + \frac{1}{2}eA_0(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 + \frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^4\right)\varphi^{(0)}.
\end{aligned}$$

Die Störung des Hamilton-Operators (3.10) in erster Ordnung ist also gegeben durch:

$$H_1 = \frac{1}{4m^2}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}eA_0\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} - \frac{1}{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2eA_0 - \frac{1}{2}eA_0(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 - \frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^4\right). \quad (3.15)$$

3.3. Vergleich mit dem Standard-Verfahren gemäß der Literatur

Das Standard-Verfahren um den Hamilton-Operator (3.15) zu berechnen ist die Foldy-Wouthuysen-Transformation [8, siehe S.189]. Hierbei wird eine kanonische Transformation benutzt, um die große Komponente φ und die kleine Komponente χ zu trennen. Man erhält dadurch eine nicht-relativistische Gleichung für φ und eine Gleichung für χ, welche die negativen Energiezustände, welche aus der Dirac-Gleichung folgen, beschreibt. Es werden nun alle vier Terme des Hamilton-Operators (3.10) und der Störung (3.15) explizit ausgerechnet, um einen Vergleich mit der Foldy-Wouthuysen-Transformation zu ziehen. Zunächst wird der erste Term aus dem Hamilton-Operator (3.15) betrachtet, wobei folgende Identität benutzt wird:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\vec{\sigma}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}), \quad (3.16)$$

wobei auf die Ordnung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu achten ist, falls diese Operatoren sind. Somit folgt für den ersten Term aus (3.15):

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\pi}eA_0)\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} &= \vec{\pi}\cdot eA_0\vec{\pi} - i\vec{\sigma}\cdot(\vec{\pi}eA_0\times\vec{\pi})\\ &= \left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot eA_0\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right) - i\vec{\sigma}\cdot\left(\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)eA_0\times\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\right)\\ &= \vec{p}\cdot eA_0\vec{p} - i\vec{\sigma}\cdot\vec{p}eA_0\times\vec{\pi} + \mathcal{O}(\frac{e^2}{c})\\ &= \vec{p}\cdot eA_0\vec{p} + e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi} + \mathcal{O}(\frac{e^2}{c}).\end{aligned} \quad (3.17)$$

Hierbei wurde zunächst alles der Ordnung $\frac{e^2}{c}$ vernachlässigt. In der letzten Zeile wurde die Eichung eines statischen elektrischen Feldes eingesetzt mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}A_0$ und die Ortsdarstellung von $\vec{p}$ benutzt. Für den zweiten Term aus (3.15) folgt mithilfe der Identität (3.11):

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 eA_0 &= -\frac{1}{2}\left(\vec{\pi}^2 - \frac{e}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right) eA_0 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\vec{p}^2 eA_0 - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{p}eA_0 - \vec{p}\cdot\frac{e}{c}\vec{A}eA_0 + \left(\frac{e}{c}\vec{A}\right) eA_0 - \frac{e}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}eA_0\right) \\
&= -\frac{1}{2}\vec{p}^2 eA_0 + \mathcal{O}\left(\frac{e^2}{c}\right). \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurden wieder Terme der Ordnung $\frac{e^2}{c}$ vernachlässigt. Für den dritten Term aus (3.15) folgt:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}eA_0(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 &= \frac{1}{2}eA_0\left(\vec{\pi}^2 - \frac{e}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right) \\
&= -\frac{1}{2}eA_0\left(\vec{p}^2 - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\frac{e}{c}\vec{A} + \left(\frac{e}{c}\vec{A}\right) - \frac{e}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right) \\
&= -\frac{1}{2}eA_0\vec{p}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{e^2}{c}\right). \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Auch hier wurde wieder alles von der Ordnung $\frac{e^2}{c}$ vernachlässigt. Die ersten drei Terme (3.17), (3.18) und (3.19) ergeben zusammengenommen:

$$
\begin{aligned}
& e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi} + \vec{p}\cdot eA_0\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{p}^2 eA_0 - \frac{1}{2}eA_0\vec{p}^2 \\
=& e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi} + \frac{1}{2}\vec{p}\cdot eA_0\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{p}^2 eA_0 + \frac{1}{2}\vec{p}\cdot eA_0\vec{p} - \frac{1}{2}eA_0\vec{p}^2 \\
=& e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi} + \frac{1}{2}e\vec{p}\underbrace{[A_0,\vec{p}]}_{=i\vec{\nabla}A_0=i\vec{E}} + \frac{1}{2}e\underbrace{[\vec{p},A_0]}_{=-i\vec{\nabla}A_0=-i\vec{E}}\vec{p} \\
=& e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi} + \frac{1}{2}e[\vec{p},i\vec{E}] \\
=& e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi} - \frac{1}{2}e\vec{\nabla}\vec{E}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurden zunächst die Operatoren $\vec{p}$ und A_0 zusammengefasst zu zwei Kommutatoren, welche dann ausgewertet wurden. Daraus entstand ein weiterer Kommutator für das elektrische Feld $\vec{E}$, welcher ebenfalls ausgewertet wurde. Schließlich berechnet sich der vierte Term der Hamilton-Operators (3.15) mit der Identität

(3.11):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\vec{\pi})^4 &= \frac{1}{2m}\left(\vec{\pi}^2 - \frac{e}{c}\vec{\sigma}\vec{B}\right)\left(\vec{\pi}^2 - \frac{e}{c}\vec{\sigma}\vec{B}\right) \\
&= \frac{1}{2m}\vec{\pi}^4 + \mathcal{O}\left(\frac{e}{cm}\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^4 + \mathcal{O}\left(\frac{e}{cm}\right) \\
&= \frac{1}{2m}\vec{p}^4 + \mathcal{O}\left(\frac{e}{cm}\right). \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Die Störung des Hamilton-Operators in erster Ordnung lässt sich mithilfe der Näherungen (3.20) und (3.21) schreiben als:

$$
H_1 = \frac{1}{4m^2}e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi} - \frac{1}{8m^2}e\vec{\nabla}\vec{E} - \frac{1}{8m^3}\vec{p}^4. \qquad (3.22)
$$

Diese drei Terme sind die selben Korrekturen zu der Pauli-Gleichung, welche auftreten, wenn die Foldy-Wouthuysen-Transformation benutzt wird, wie in [8, S189]. Der gesamte Hamilton-Operator ist gegeben durch die Summe von dem Pauli-Hamilton-Operator (3.12) und dem Hamilton-Operator erster Ordnung (3.22):

$$
\begin{aligned}
H &= H_0 + \frac{1}{c^2}H_1 \\
&= eA_0 + \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + \frac{1}{4m^2c^2}e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi} - \frac{1}{8m^2c^2}e\vec{\nabla}\vec{E} - \frac{1}{8m^3c^2}\vec{p}^4.
\end{aligned}
\qquad (3.23)
$$

Im gesamten Hamilton-Operator treten also drei Terme aus der Pauli-Gleichung auf:

1. $H_0^{(1)} = eA_0$ ist ein äußeres elektromagnetisches Potential.
2. $H_0^{(2)} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ ist die kinetische Energie des Teilchens.
3. $H_0^{(3)} = -\frac{e}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ entspricht dem Zeeman-Term, welcher durch ein äußeres Magnetfeld induziert wird.

Die drei Terme welche in der Energie-Korrektur auftreten sind auch bekannt:

1. $H_1^{(1)} = \frac{1}{4m^2}e\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{\pi}$ ist die Spin-Bahn-Kopplung der Teilchens. Wenn hier das Coulomb-Potential eingesetzt wird, so ist das Elektrische Feld $\vec{E}$ parallel zu dem Potential. Somit ist die Spin-Bahn-Kopplung proportional zu $\vec{E}\times\vec{p}$, welches sich als Vielfaches von $\vec{x}\times\vec{p} = \vec{L}$ schreiben lässt [8, S.190].

2. $H_1^{(2)} = -\frac{1}{8m^2} e\vec{\nabla}\vec{E}$ ist der Darwin-Term, welcher eine Zitterbewegung des Teilchens beschreibt.

3. $H_1^{(3)} = -\frac{1}{8m^3}\vec{p}^4$ ist eine relativistische Massenkorrektur des Teilchens.

Insgesamt ist also der Hamilton-Operator (3.23) nahezu derselbe wie der aus [8, S.189]. Die Unterschiede bestehen darin, dass in unserem Fall die Ruheenergie in Abschnitt (3.1) weg transformiert wurde und deshalb in dem Hamilton-Operator nicht mehr auftritt. Außerdem wurde in Abschnitt (3.1) (und auch beim Einsetzen der Eichung für elektrische und magnetische Felder) angenommen, dass das elektromagnetische Feld statisch ist. Schließlich treten jedoch alle Terme aus [8, S.189], bis auf die Ruheenergie des Teilchens in dem Hamilton-Operator (3.23), auf.

4. Dirac-Gleichung auf gekrümmten Raumzeiten

4.1. Paralleltransport eines Vektorfeldes in Vierbein-Notation

4.1.1. Vierbein-Notation

Um die Dirac-Gleichung auf gekrümmten Raumzeiten zu bestimmen wird zunächst die Vierbein-Notation benötigt. Dies sind vier linear unabhängige Vektoren e_a^μ (a läuft von 0 bis 3), welche an jedem Raumzeit-Punkt einer gekrümmten Raumzeit, ein lokales Minkowski-Koordinatensystem aufspannen. Die Vierbeine für eine Raumzeit mit der Metrik $g_{\mu\nu}$ sind durch folgende Relation definiert [6, S. 248]:

$$e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}. \tag{4.1}$$

Außerdem gibt es die inversen Vierbeine, welche definiert sind durch [6, S. 248]:

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b. \tag{4.2}$$

Hieraus folgt nach [6, S. 249]:

$$e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}. \tag{4.3}$$

Somit lässt sich ein Vektorfeld V^μ in einem lokalen Minkowski-Koordinatensystem ausdrücken:

$$V^\mu = e_a^\mu V^a. \tag{4.4}$$

Beziehungsweise ein lokales Vektorfeld V^a durch ein Vektorfeld auf einer gekrümmten Raumzeit:

$$V^a = e^a_\mu V^\mu. \tag{4.5}$$

Die Vierbeine sind außerdem Tensoren, somit lassen sich ihre Indizes mit der entsprechenden Metrik herauf und herunter ziehen:

$$\begin{aligned} e_{a\mu} &= e^b_\mu \eta_{ba} \\ e_{a\mu} &= e^\nu_a g_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

4.1.2. Spin-Zusammenhang

Es wird nun der Parallel-Transport eines Vektorfeldes, welches durch die Vierbeine ausgedrückt ist, berechnet. Hierzu wird zunächst der Parallel-Transport eines Vektorfelds V^μ um eine infinitesimale Strecke dx auf einer Riemannsche-Mannigfaltigkeit mit dem Levi-Civita-Zusammenhang betrachtet[4, S.31]:

$$V^\mu(x + \mathrm{d}x) = V^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda(x) \mathrm{d}x^\nu.$$

Hierbei sind die $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ die üblichen Christoffel-Symbole. Bei der Verschiebung eines lokalen Vektorfeldes V^a, kann die Relation (4.5) benutzt werden:

$$\begin{aligned} V^a(x + \mathrm{d}x) &= V^\mu(x + \mathrm{d}x) e^a_\mu(x + \mathrm{d}x) \\ &= \left(V^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda(x)\mathrm{d}x^\nu\right)\left(e^a_\mu + e^a_{\mu,\nu}\mathrm{d}x^\nu\right) \\ &= V^\mu(x)e^a_\mu(x) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda(x) e^a_\mu(x)\mathrm{d}x^\nu + V^\mu(x) e^a_{\mu,\nu}\mathrm{d}x^\nu + \mathcal{O}(\mathrm{d}x^2) \\ &= V^a(x) + e^\mu_b\left(-\Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho + e^a_{\mu,\nu}\right) V^b(x)\mathrm{d}x^\nu. \end{aligned}$$

Hieraus wird der Spin-Zusammenhang definiert:

$$-\omega^a_{b\nu} := e^\mu_b\left(-\Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho + e^a_{\mu,\nu}\right). \tag{4.6}$$

Für den Spin-Zusammenhang folgt mithilfe der Produktregel der Differentiation[4, vgl. S.171]:

$$\begin{aligned}
\omega^a_{b\nu} &= e^\mu_b \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho - e^\mu_b e^a_{\mu,\nu} \\
&= e^\mu_b \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho - \partial_\nu \underbrace{\left(e^\mu_b e^a_\mu\right)}_{\delta^a_b} + e^\mu_{b,\nu} e^a_\mu \\
&= e^a_\mu \left(e^\mu_{b,\nu} + e^\sigma_b \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\right).
\end{aligned}$$

Es wird nun gezeigt, dass der Spin-Zusammenhang antisymmetrisch in den Minkowski-Indizes (hier a und b) ist. Hierzu wird zunächst der obenstehende Minkowski-Index herunter gezogen und es wird $e^a_\mu = e^\lambda_a g_{\lambda\mu}$ eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\omega_{ab\nu} &= e^\lambda_a g_{\lambda\mu} \left(e^\mu_{b,\nu} + e^\sigma_b \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\right) \\
\omega_{ba\nu} &= e^\lambda_b g_{\lambda\mu} \left(e^\mu_{a,\nu} + e^\sigma_a \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\right).
\end{aligned}$$

Falls die Antisymmetrie gilt, so ist $\omega_{ab\nu} + \omega_{ba\nu} = 0$. Es werden jetzt die Christoffel-Symbole mit ihren Vorfaktoren in der Summe $\omega_{ab\nu} + \omega_{ba\nu}$ betrachtet:

$$\begin{aligned}
e^\lambda_a g_{\lambda\mu} e^\sigma_b \Gamma^\mu_{\sigma\nu} + e^\lambda_b g_{\lambda\mu} e^\sigma_a \Gamma^\mu_{\sigma\nu} &= e^\mu_a e^\sigma_b \Gamma_{\mu\sigma\nu} + e^\mu_b e^\sigma_a \Gamma_{\mu\sigma\nu} \\
&= e^\sigma_a e^\mu_b \left(\Gamma_{\sigma\mu\nu} + \Gamma_{\mu\sigma\nu}\right) \\
&= e^\sigma_a e^\mu_b \frac{1}{2} \left(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\sigma\nu,\mu}\right) \\
&= e^\sigma_a e^\mu_b g_{\mu\sigma,\nu}.
\end{aligned}$$

Somit folgt für die gesamte Summe mithilfe der Produktregel der Differentiation:

$$\begin{aligned}
\omega_{ab\nu} + \omega_{ba\nu} &= e^\lambda_a g_{\lambda\mu} e^\mu_{b,\nu} + e^\lambda_b g_{\lambda\mu} e^\mu_{a,\nu} + e^\sigma_a e^\mu_b g_{\mu\sigma,\nu} \\
&= \left(e^\lambda_a g_{\lambda\mu} e^\mu_b\right)_{,\nu} \\
&= \left(e_{a\mu} e^\mu_b\right)_{,\nu} \\
&= \eta_{ab,\nu} = 0.
\end{aligned}$$

Folglich gilt $\omega_{ab\nu} = -\omega_{ba\nu}$, womit gezeigt ist, dass der Spin-Zusammenhang antisymmetrisch in den Minkowski-Indizes ist.

4.2. Paralleltransport eines Dirac-Spinors

Die Parallelverschiebung eines Dirac-Spinors sei von der Form [4, S.172]:

$$\psi(x + \mathrm{d}x) = \psi(x) - \Omega_\nu(x)\psi(x)\mathrm{d}x^\nu.$$

Hierbei ist Ω_ν der Zusammenhang, wobei zu beachten ist, das dieser eine 4x4 Matrix im Spinor-Raum ist, welcher nun bestimmt wird. Für den adjungierten Spinor $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ folgt [4, S.172]:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x + \mathrm{d}x) &= \bar{\psi}(x) - \psi^\dagger\Omega_\nu(x)\gamma^0\mathrm{d}x^\nu \\ &= \bar{\psi}(x) - \bar{\psi}\gamma^0\Omega_\nu(x)\gamma^0\mathrm{d}x^\nu.\end{aligned}$$

Es wird nun gefordert, dass die skalare Größe $\bar{\psi}\psi$ invariant unter einem Parallel-Transport ist [4, S.172]:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x + \mathrm{d}x)\psi(x + \mathrm{d}x) &= \left(\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}\gamma^0\Omega_\nu(x)\gamma^0\mathrm{d}x^\nu\right)\left(\psi(x) - \Omega_\nu(x)\psi(x)\mathrm{d}x^\nu\right) \\ &= \bar{\psi}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\left(\gamma^0\Omega_\nu(x)\gamma^0 + \Omega_\nu(x)\right)\psi(x)\mathrm{d}x^\nu + \mathcal{O}(\mathrm{d}x^2) \\ &\overset{!}{=} \bar{\psi}(x)\psi(x) \\ \Rightarrow 0 &= \gamma^0\Omega_\nu(x)\gamma^0 + \Omega_\nu(x).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Hingegen sollte eine Größe wie $\bar{\psi}\gamma^a\psi$ Parallel-Transportiert werden wie ein Vektorfeld. Zunächst wird der Parallel-Transport dieser Größe in Abhängigkeit von Ω_ν bestimmt, wobei die Relation (4.7) benutzt wird [4, S.172]:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x + \mathrm{d}x)\gamma^a\psi(x + \mathrm{d}x) &= \left(\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}\gamma^0\Omega_\nu(x)\gamma^0\mathrm{d}x^\nu\right)\gamma^a\left(\psi(x) - \Omega_\nu(x)\psi(x)\mathrm{d}x^\nu\right) \\ &= \bar{\psi}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\left(\gamma^a\gamma^0\Omega_\nu(x)\gamma^0 + \gamma^a\Omega_\nu(x)\right)\psi(x)\mathrm{d}x^\nu + \mathcal{O}(\mathrm{d}x^2) \\ &= \bar{\psi}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\left[\gamma^a, \Omega_\nu(x)\right]\psi(x)\mathrm{d}x^\nu.\end{aligned}$$

Da nun $\bar{\psi}\gamma^a\psi$ transportiert werden sollte wie das Vektorfeld V^a, aus dem Abschnitt (4.1.2), folgt [4, S.172]:

$$[\gamma^a, \Omega_\nu(x)] = \omega^a_{b\nu}\gamma^b. \tag{4.8}$$

Diese Relation (4.8) wird erfüllt für Folgendes Ω_ν [4, S.172]:

$$\Omega_\nu(x) = \frac{1}{8}\omega_{ab\nu}[\gamma^a, \gamma^b]. \tag{4.9}$$

Dies wird gezeigt mithilfe der Clifford-Algebra $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$, welche für die Dirac γ-Matrizen gilt und unter Ausnutzung der Antisymmetrie des Spin-Zusammenhangs (siehe Abschnitt (4.1.2)):

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^c, \frac{1}{8}\omega_{ab\nu}[\gamma^a, \gamma^b]\right] &= \frac{1}{8}\omega_{ab\nu}\left(\gamma^c\gamma^a\gamma^b - \gamma^c\gamma^b\gamma^a - \gamma^a\gamma^b\gamma^c + \gamma^b\gamma^a\gamma^c\right) \\
&= \frac{1}{8}\omega_{ab\nu}\left(\gamma^c\gamma^a\gamma^b - \gamma^c(-\gamma^a\gamma^b + 2\eta^{ba}) - \gamma^a\gamma^b\gamma^c + (-\gamma^a\gamma^b + 2\eta^{ba})\gamma^c\right) \\
&= \frac{1}{4}\omega_{ab\nu}\left(\gamma^c\gamma^a\gamma^b - \gamma^a\gamma^b\gamma^c\right) \\
&= \frac{1}{4}\omega_{ab\nu}\left((-\gamma^a\gamma^c + 2\eta^{ca})\gamma^b - \gamma^a\gamma^b\gamma^c\right) \\
&= \frac{1}{4}\omega_{ab\nu}\left(-\gamma^a(-\gamma^b\gamma^c + 2\eta^{cb}) + 2\eta^{ca}\gamma^b - \gamma^a\gamma^b\gamma^c\right) \\
&= -\frac{1}{2}\omega_{ab\nu}\eta^{cb}\gamma^a + \frac{1}{2}\omega_{ab\nu}\eta^{ca}\gamma^b \\
&= \frac{1}{2}\omega_{ba\nu}\eta^{cb}\gamma^a + \frac{1}{2}\omega_{ab\nu}\eta^{ca}\gamma^b \\
&= \omega^c_{b\nu}\gamma^b.
\end{aligned}$$

Folglich ist die kovariante Ableitung eines Spinors gegeben durch [4, S.172]:

$$D_\mu\psi = \partial_\mu + \Omega_\mu\psi. \tag{4.10}$$

Für die Dirac-Gleichung auf gekrümmten Raumzeiten müssen auch die Dirac-Matrizen auf eine gekrümmte Raumzeit übertragen werden. Sie sollten dann der Bedingung $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ genügen. Diese "gekrümmten" γ-Matrizen lassen sich jedoch mithilfe der Vierbeine aus Abschnitt (4.1.1) zurückführen auf die "flachen" γ-Matrizen:

$$\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= e^\mu_a e^\nu_b\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2g^{\mu\nu} = 2e^a_\mu e^b_\nu\eta_{ab} \\
\Rightarrow \{\gamma^a, \gamma^b\} &= 2\eta^{ab}.
\end{aligned}$$

Somit erfüllen die "flachen" γ-Matrizen die übliche Clifford-Algebra. Es können also die γ-Matrizen auf gekrümmten Raumzeiten mithilfe der Vierbeine durch die "flachen" γ-Matrizen ausgedrückt werden:

$$\gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a. \tag{4.11}$$

Somit ist die Dirac-Gleichung auf gekrümmten Raumzeiten mit den entsprechenden γ-Matrizen (4.11) und der kovarianten Ableitung (4.10) gegeben durch (in Einheiten $\hbar = c = 1$) [4, S.172]:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi = 0. \tag{4.12}$$

Diese Gleichung sieht zunächst aus wie die Gleichung für den elektromagnetischen Fall, mit einem anderen Potential. Jedoch muss hier beachtet werden, dass die γ-Matrizen die Metrik enthalten und somit die Ableitungen auch mit der Metrik multipliziert werden. Da die Metrik hier, im Vergleich zum elektromagnetischen Fall, das Potential ist, gibt es also Terme bei denen das Potential mit den Ableitungen multipliziert wird.

4.3. Erhaltener Dirac-Strom

Die Dirac-Gleichung auf gekümmten Raumzeiten ist gegeben durch:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi = 0. \tag{4.13}$$

Adjungiert man diese Gleichung so erhält man:

$$\bar{\psi}\,(iD_\mu \gamma^\mu + m) = 0, \tag{4.14}$$

Wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ bezüglich der flachen γ^0-Matrix gebildet wird. Das Umformen dieser Gleichungen ergibt:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(D_\mu \psi) = -im\bar{\psi}\psi \tag{4.15}$$

$$(\bar{\psi}D_\mu)\gamma^\mu \psi = im\bar{\psi}\psi. \tag{4.16}$$

Außerdem gilt $D_\mu \gamma^\mu = 0$. Mithilfe der Relationen (4.16) folgt ein kovarianter Dirac-Strom:

$$D_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu(D_\mu\psi) + (\bar{\psi}D_\mu)\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}(D_\mu\gamma^\mu)\psi \tag{4.17}$$
$$= im\bar{\psi}\psi - im\bar{\psi}\psi = 0. \tag{4.18}$$

Explizit lässt sich dies berechnen durch:

$$\begin{aligned}
D_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \bar{\psi}\gamma^\mu(D_\mu\psi) + (\bar{\psi}D_\mu)\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}(D_\mu\gamma^\mu)\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) + \bar{\psi}\gamma^\mu(\Omega_\mu\psi) + (\bar{\psi}\partial_\mu)\gamma^\mu\psi - (\bar{\psi}\Omega_\mu)\gamma^\mu\psi \\
&+ \bar{\psi}(\partial_\mu\gamma^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\mu}\gamma^\lambda + \Omega_\mu\gamma^\mu - \gamma^\mu\Omega_\mu)\psi \\
&= \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \bar{\psi}\Gamma^\mu_{\lambda\mu}\gamma^\lambda\psi \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.
\end{aligned}$$

Bei dem ersten Gleichheitszeichen wurde die Produktregel der Differentiation benutzt, bei dem Zweiten die kovariante Ableitung eingesetzt und bei dem Vierten eine andere Formulierung der kovarianten Ableitung für ein Vektorfeld benutzt, wobei g die Determinante der Metrik bezeichnet. Es folgt also schließlich aus dem kovarianten Strom ein naiv erhaltener Strom welcher gegeben ist durch:

$$j^\mu = \sqrt{-g}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{4.19}$$

Aufgrund des Satzes von Gauss folgt schließlich, dass das Integral über die nullte Komponente erhalten und positiv definit ist[5, S.46]:

$$\langle\psi,\psi\rangle = \int \sqrt{-g}\bar{\psi}\gamma^0\psi \mathrm{d}^4x. \tag{4.20}$$

(γ^0 ist hier die "gekrümmte" γ-Matrix) Dies wird als Sesquilinearform auf der gekrümmten Raumzeit interpretiert. Für physikalisch sinnvolle Raumzeiten, ist $\sqrt{-g}$ immer positiv, da sich die Metrik hier immer in einem Punkt auf diagonalform bringen lässt und dann die übliche Signatur $(+---)$ hat. Somit ist auch das Produkt $\sqrt{-g}\sqrt{g^{00}}$ welches in der Sesquilinearform (4.20) vorkommt, wenn die "flachen" γ-Matrizen benutzt werden, positiv definit, da $\sqrt{g^{00}}$, das inverse von $\sqrt{g_{00}}$ auch positiv ist. Da somit die Sesquilinearform (4.20) positiv definit ist, ist die Interpretation als Wahrscheinlichkeit, analog zur Quantenmechanik gegeben.

5. Newton-Näherung der Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung auf gekrümmter Raumzeit (4.12) ist in ausgeschriebener Form gegeben durch (in Einheiten $\hbar = c = 1$):

$$(ie^{\mu}_{c}\gamma^{c}\partial_{\mu} + ie^{\nu}_{c}\gamma^{c}\frac{1}{8}(\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}e_{a\mu}e^{\lambda}_{b} + e^{\mu}_{b,\nu}e_{a\mu})[\gamma^{a},\gamma^{b}] - m)\psi = 0. \tag{5.1}$$

Es wird nun eine Raumzeit vorgegeben, welche der Minkowski-Raumzeit entspricht, plus eine kleine Störung. Die Metrik ist dann gegeben durch:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{5.2}$$

Hierbei wird angenommen, dass die kleine Störung $h_{\mu\nu}$ Diagonalform hat. Außerdem sollen alle Terme von Ordnung h^2 verschwinden. Somit ergibt sich für die inverse Metrik:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{5.3}$$

Hierbei sind die Einträge von $h^{\mu\nu}$ identisch mit den Einträgen von $h_{\mu\nu}$. Ein Beispiel für eine solche Metrik ist die Schwarzschild-Metrik eines schwachen gravitativen Objektes, wie zum Beispiel der Erde, bei welcher der Schwarzschild-Radius entsprechend klein ist. Um die Dirac-Gleichung in dieser Raumzeit zu bestimmen, werden nun zunächst die Vierbeine und die Christoffel-Symbole benötigt. Die Vierbeine und ihre Inversen zu der Metrik (5.2) sind gegeben durch:

$$e^{\mu}_{a} = \delta^{\mu}_{a}\sqrt{1-h^{\mu}} \tag{5.4}$$

$$e^{\mu a} = \eta^{\mu a}\sqrt{1-h^{\mu}} \tag{5.5}$$

$$e^{a}_{\mu} = \delta^{a}_{\mu}\sqrt{1+h_{\mu}} \tag{5.6}$$

$$e_{a\mu} = \eta_{a\mu}\sqrt{1+h_{\mu}}. \tag{5.7}$$

Wobei h_μ wie folgt definiert ist:

$$(h_\mu) = (h^\mu) = \begin{pmatrix} h_{00} \\ -h_{11} \\ -h_{22} \\ -h_{33} \end{pmatrix}.$$

Ein Beweis, dass diese richtig sind findet sich in Anhang A. Außerdem berechnen wir noch die Christoffel-Symbole zu der Metrik. Die Christoffel-Symbole sind definiert durch:

$$\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}(g_{\kappa\lambda,\nu} + g_{\kappa\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\kappa}).$$

Einsetzen der Metrik (5.2) und der inversen Metrik (5.3) ergibt die Christoffel-Symbole bis zur Ordnung h^2:

$$\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\kappa}(h_{\kappa\lambda,\nu} + h_{\kappa\nu,\lambda} - h_{\nu\lambda,\kappa}) + \mathcal{O}(h^2).$$

5.1. Einsetzen in Dirac-Gleichung

Es werden nun die Vierbeine und die Christoffel-Symbole aus Abschnitt (5) in die Dirac-Gleichung (5.1) eingesetzt. Hierzu wird zunächst folgender Term betrachtet:

$$ie^\nu_c \gamma^c \frac{1}{8}(\Gamma^\mu_{\lambda\nu} e_{a\mu} e^\lambda_b + e^\mu_{b,\nu} e_{a\mu})[\gamma^a, \gamma^b] = \frac{i}{8} e^\nu_c \gamma^c \Gamma^\mu_{\lambda\nu} e_{a\mu} e^\lambda_b [\gamma^a, \gamma^b] + \frac{i}{8} e^\nu_c \gamma^c e^\mu_{b,\nu} e_{a\mu} [\gamma^a, \gamma^b]. \tag{5.8}$$

Die γ-Matrizen sind hier und im Folgenden immer "flache" γ-Matrizen. Es wird zunächst der erste Term aus (5.8) berechnet. Die Christoffel-Symbole sind von der Ordnung h und die Vierbeine von der Ordnung $1 + h$. Somit kann man die Terme der Ordnung h^2, welche aus dem Produkt von Christoffel-Symbolen und Vierbeinen entstehen, direkt vernachlässigen. Es müssen also für die Vierbeine nur noch δ, beziehungsweise η eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
e_c^\nu \gamma^c \Gamma^\mu_{\lambda\nu} e_{a\mu} e_b^\lambda [\gamma^a, \gamma^b] &= \delta_c^\nu \gamma^c \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \eta_{a\mu} \delta_b^\lambda [\gamma^a, \gamma^b] \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\kappa} (h_{\kappa\nu,\lambda} + h_{\kappa\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\kappa}) \gamma^\nu [\gamma^a, \gamma^\lambda] \eta_{a\mu} \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\kappa} (h_{\kappa\nu,\lambda} - h_{\nu\lambda,\kappa}) \gamma^\nu [\gamma^a, \gamma^\lambda] \eta_{a\mu}.
\end{aligned}
$$

Der Term $h_{\kappa\lambda,\nu}$ fällt weg, da durch ihn nur zwei gleiche γ-Matrizen in dem Antikommutator stehen können. Werden nun die Summen über die η explizit ausgeführt, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
e_c^\nu \gamma^c \Gamma^\mu_{\lambda\nu} e_{a\mu} e_b^\lambda [\gamma^a, \gamma^b] &= \frac{1}{2} h_{00,\lambda} \gamma^0 [\gamma^0, \gamma^\lambda] - \frac{1}{2} h_{\nu\lambda,0} \gamma^\nu [\gamma^0, \gamma^\lambda] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{2} h_{ii,\lambda} \gamma^i [\gamma^i, \gamma^\lambda] - \frac{1}{2} h_{\nu\lambda,i} \gamma^\nu [\gamma^i, \gamma^\lambda] \right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{2} h_{00,i} \gamma^0 [\gamma^0, \gamma^i] - \frac{1}{2} h_{ii,0} \gamma^i [\gamma^0, \gamma^i] \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{2} h_{ii,0} \gamma^i [\gamma^i, \gamma^0] + \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} h_{ii,j} \gamma^i [\gamma^i, \gamma^j] \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{2} h_{00,i} \gamma^0 [\gamma^i, \gamma^0] - \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} h_{jj,i} \gamma^j [\gamma^i, \gamma^j] \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} h_{ii,j} \gamma^i [\gamma^i, \gamma^j] + \sum_{i=1}^{3} h_{00,i} \gamma^0 [\gamma^0, \gamma^i] + \sum_{i=1}^{3} h_{ii,0} \gamma^i [\gamma^i, \gamma^0].
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Es werden nun die γ-Matrizen berechnet. Aus der Clifford-Algebra $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$ folgen, wenn a und b von 0 bis 3 laufen, die Kommutatoren (Die Indizes i und j laufen hier von 1 bis 3):

$$\gamma^i [\gamma^i, \gamma^j] = -2\gamma^j + 2\gamma^i \delta^{ij} \tag{5.10}$$

$$\gamma^0 [\gamma^0, \gamma^i] = 2\gamma^i \tag{5.11}$$

$$\gamma^i [\gamma^i, \gamma^0] = -2\gamma^0. \tag{5.12}$$

Somit folgt für (5.9):

$$e_c^\nu \gamma^c \Gamma^\mu_{\lambda\nu} e_{a\mu} e_b^\lambda [\gamma^a, \gamma^b] = \sum_{i \neq j} -2 h_{ii,j} \gamma^j + 2 \sum_{i=1}^{3} h_{00,i} \gamma^i - 2 \sum_{i=1}^{3} h_{ii,0} \gamma^0 .$$

Nun wird der zweite Term in (5.1) betrachtet:

$$e_c^\nu \gamma^c e^\mu_{b,\nu} e_{a\mu} [\gamma^a, \gamma^b]. \tag{5.13}$$

Da $e^\mu_{b,\nu}$ und $e_{a\mu}$ Diagonalform haben, muss auch gelten, dass $a = b$ ist. Somit ist der Term (5.13) aufgrund des Kommutators der zwei gleichen γ-Matrizen gleich null. Somit ist nur noch der erste Term aus (5.8) in der Dirac-Gleichung vorhanden. Schließlich wird noch das Vierbein explizit durch die Metrik ausgedrückt, wodurch die Dirac-Gleichung auf gekrümmten Raumzeiten in der Newton-Näherung ergibt:

$$\begin{aligned} &(i\sqrt{1-h_{00}}\gamma^0 \partial_0 + i \sum_i \sqrt{1+h_{ii}} \gamma^i \partial_i \\ &- \frac{i}{4} \sum_{i \neq j} h_{ii,j} \gamma^j + \frac{i}{4} \sum_{i=1}^{3} h_{00,i} \gamma^i - \frac{i}{4} \sum_{i=1}^{3} h_{ii,0} \gamma^0 - m)\psi = 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Die Terme $-\frac{i}{4} \sum_{i \neq j} h_{ii,j} \gamma^j + \frac{i}{4} \sum_{i=1}^{3} h_{00,i} \gamma^i - \frac{i}{4} \sum_{i=1}^{3} h_{ii,0} \gamma^0$ entsprechen hierbei einem gravitations Potential, analog zu dem elektromagnetischen Potential in Gleichung (2.4). Jedoch gibt es in dieser Gleichung einen entscheidenden Unterschied zum elektromagnetischen Fall. Die Ableitungen werden nämlich auch mit dem Potential multipliziert. Der Massenterm entspricht schließlich genau dem elektromagnetischem Massenterm.

5.2. Analogon zur Reihenentwicklung der Dirac-Gleichung im elektromagnetischem Feld

Im Folgenden wird es das Ziel sein, die Dirac-Gleichung auf gekrümmter Raumzeit in der Newton-Näherung (5.14) analog zu der Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld in Abschnitt (3.1) auszurechnen. Hierzu werden Einheiten benutzt in denen $\hbar = 1$ ist und $c \neq 1$, sodass wieder eine Reihe für große c berechnet werden kann. Es wird davon ausgegangen, dass die Störung der Metrik h von der Ordnung $1/c$ ist. Außerdem wird $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$ und $\beta = \gamma^0$ eingesetzt, welches die selben Matrizen wie in Abschnitt (3.1) sind, da in Gleichung (5.14) bereits die “flachen” γ-Matrizen eingesetzt wurden. Somit lässt sich Gleichung (5.14) schreiben als:

$$
\begin{aligned}
&(i\sqrt{1-h_{00}}\partial_0)\psi \\
&= (-i\sum_i \sqrt{1+h_{ii}}c\alpha^i\partial_i + c\frac{i}{4}\sum_{i\neq j} h_{ii,j}\alpha^j - c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{00,i}\alpha^i + c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0} + \beta mc^2)\psi.
\end{aligned}
$$

Das einsetzen von zwei Spinoren mit $\psi = (\tilde{\varphi}\ \tilde{\chi})^T$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
&(i\sqrt{1-h_{00}}\partial_0)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} \\
&= (-i\sum_i \sqrt{1+h_{ii}}c\alpha^i\partial_i + c\frac{i}{4}\sum_{i\neq j} h_{ii,j}\alpha^j - c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{00,i}\alpha^i + c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0} + \beta mc^2)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Werden nun noch die α_i und β aus Abschnitt (3.1) eingesetzt so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(i\sqrt{1-h_{00}}\partial_0)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}(-i\sum_i \sqrt{1+h_{ii}}c\sigma^i\partial_i + c\frac{i}{4}\sum_{i\neq j} h_{ii,j}\sigma^j - c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{00,i}\sigma^i)\tilde{\chi}\\ (-i\sum_i \sqrt{1+h_{ii}}c\sigma^i\partial_i + c\frac{i}{4}\sum_{i\neq j} h_{ii,j}\sigma^j - c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{00,i}\sigma^i)\tilde{\varphi}\end{pmatrix} \\
&\quad + c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\tilde{\chi}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nun folgt eine Definition um die Gleichung übersichtlicher zu gestalten:

$$
c\Omega := -i\sum_i \sqrt{1+h_{ii}}c\sigma^i\partial_i + c\frac{i}{4}\sum_{i\neq j} h_{ii,j}\sigma^j - c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{00,i}\sigma^i.
$$

Durch Einsetzen der Definition in die Gleichung folgt:

$$
(i\sqrt{1-h_{00}}\partial_0)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\Omega\tilde{\chi}\\ c\Omega\tilde{\varphi}\end{pmatrix} + c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\tilde{\chi}\end{pmatrix}.
$$

Nun versuchen wir die Ruheenergie der $\tilde{\varphi}$ Komponente analog zu Abschnitt (3.1) durch folgenden Ansatz weg zu transformieren:

$$
\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = e^{imc^2t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}.
$$

Das einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$(i\sqrt{1-h_{00}}\partial_0)\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}+mc^2\sqrt{1-h_{00}}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\Omega\chi\\ c\Omega\varphi\end{pmatrix}+c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}+mc^2\begin{pmatrix}\varphi\\ -\chi\end{pmatrix}.$$

Im Gegensatz zu Abschnitt (3.1), kürzt sich die Ruheenergie nicht genau weg, da vor der zeitlichen Ableitung noch die Wurzel aus der Metrik steht. Es wird der stationäre Ansatz $\varphi(\vec{x},t)=e^{-iE(x)t}\varphi(\vec{x})$ und $\chi(\vec{x},t)=e^{-iE(x)t}\chi(\vec{x})$ mit der Energie $E(x)=E\sqrt{1-h_{00}}$ gemacht:

$$E(x)\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\Omega\chi\\ c\Omega\varphi\end{pmatrix}+c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}-mc^2\sqrt{1-h_{00}}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}+mc^2\begin{pmatrix}\varphi\\ -\chi\end{pmatrix}.$$

Somit folgen zwei gekoppelte Gleichungen:

$$E(x)\varphi=c\Omega\chi+\left(mc^2\left(1-\sqrt{1-h_{00}}\right)+c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right)\varphi \tag{5.15}$$

$$E(x)\chi+\left(mc^2\left(1+\sqrt{1-h_{00}}\right)-c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right)\chi=c\Omega\varphi. \tag{5.16}$$

Es wird nun der Term $c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\chi$ aus Gleichung (5.16) vernachlässigt, da χ klein gegen φ ist und h_{ii} von der Ordnung $1/c^2$ ist. Weiteres Umformen ergibt:

$$\chi=\left(E(x)+mc^2\left(1+\sqrt{1-h_{00}}\right)\right)^{-1}c\Omega\varphi. \tag{5.17}$$

Das Einsetzen von χ in die Gleichung (5.15) ergibt somit:

$$\begin{aligned}&\left(E(x)-mc^2\left(1-\sqrt{1-h_{00}}\right)-c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right)\varphi\\ &=c\Omega\left(E(x)+mc^2\left(1+\sqrt{1-h_{00}}\right)\right)^{-1}c\Omega\varphi.\end{aligned}$$

Wenn nun $A_0 := mc^2(1 - \sqrt{1 - h_{00}})$ definiert wird, so hat die Gleichung fast die selbe Form wie im elektromagnetischen Fall (Gleichung (3.5)):

$$\left(E(x) - A_0 - c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}\right)\varphi = c\Omega\left(E(x) + 2mc^2 - A_0\right)^{-1} c\Omega\varphi$$
$$= \frac{1}{2m}\Omega\left(1 + \frac{E(x) - A_0}{2mc^2}\right)^{-1}\Omega\varphi. \tag{5.18}$$

Der Unterschied liegt in dem Term $-c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}$. Diesen haben wir in Gleichung (5.17) vernachlässigt. Hätten wir diesem noch beibehalten, so hätte man ihn in die Definition von A_0 ziehen können, wodurch die Gleichung die selbe Form wie im elektromagnetischen Fall gehabt hätte. Natürlich gibt es aber in der Gleichung einen weiteren Unterschied: Die Energie ist hier abhängig von der Metrik. Die physikalisch sinnvolle Energie ist hingegen durch $E = E(x)/\sqrt{1 - h_{00}}$ gegeben.

5.3. Hamilton-Operator erster Ordnung

Es wird der Hamilton-Operator zur Gleichung (5.18) ausgerechnet. Dazu wird zuächst die Energie $E(x) = E\sqrt{1 - h_{00}}$ und dann die Geometrische-Reihe bis zur ersten Ordnung ausgerechnet:

$$\left(\sqrt{1 - h_{00}}E - A_0 - c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}\right)\varphi \tag{5.19}$$
$$= \frac{1}{2m}\Omega\left(1 + \frac{A_0}{2mc^2}\right)\Omega\varphi - \frac{1}{2m}\Omega\left(\frac{\sqrt{1 - h_{00}}}{2mc^2}\right)\Omega E\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{5.20}$$

Nun wird die Wurzel aus der Metrik approximiert durch $\sqrt{1 - h_{00}} \approx 1 - \frac{h_{00}}{2}$ (ist möglich da Anfangs $h^2 \approx 0$ angenommen wurde) und auch $A_0 = mc^2\left(1 - \sqrt{1 - h_{00}}\right) \approx mc^2\frac{h_{00}}{2}$ wird eingesetzt:

$$\left(\left(1 - \frac{h_{00}}{2}\right)E - mc^2\frac{h_{00}}{2} - c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}\right)\varphi$$
$$= \frac{1}{2m}\Omega\left(1 + \frac{h_{00}}{4}\right)\Omega\varphi - \frac{1}{4m^2c^2}\Omega\left(\left(1 - \frac{h_{00}}{2}\right)\right)\Omega E\varphi. \tag{5.21}$$

Da h_{00} von der Ordnung $1/c^2$ ist, kann der letzte Term aus Gleichung (5.21) weggelassen werden, da dieser somit von der Ordnung $1/c^4$ ist. Sortieren der Gleichung

(5.21) nach der Energie E ergibt dann:

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{h_{00}}{2}+\frac{\Omega^2}{4m^2c^2}\right)E\varphi = \\ &\left(\frac{1}{2m}\Omega\left(1+\frac{h_{00}}{4}\right)\Omega + mc^2\frac{h_{00}}{2} + c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right)\varphi.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Invertieren des Operators auf der linken Seite der Gleichung (5.22) ergibt dann den Hamilton-Operator:

$$\begin{aligned}H\varphi = &\left(1-\frac{h_{00}}{2}+\frac{\Omega^2}{4m^2c^2}\right)^{-1} \\ &\left(\frac{1}{2m}\Omega\left(1+\frac{h_{00}}{4}\right)\Omega + mc^2\frac{h_{00}}{2} + c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right)\varphi.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Hier wird wieder die Geometrische-Reihe bis zur ersten Ordnung benutzt:

$$\begin{aligned}H\varphi = &\left(1+\frac{h_{00}}{2}-\frac{\Omega^2}{4m^2c^2}\right) \\ &\left(\frac{1}{2m}\Omega\left(1+\frac{h_{00}}{4}\right)\Omega + mc^2\frac{h_{00}}{2} + c\frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right)\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right).\end{aligned} \tag{5.24}$$

Das Ausmultiplizieren und Vernachlässigen von Termen der Ordnung $1/c^3$ ergibt dann schließlich den Hamilton-Operator in erster Ordnung:

$$\begin{aligned}H = \frac{1}{2m}&\left(\Omega^2 + \Omega\frac{h_{00}}{4}\Omega + \frac{h_{00}}{2}\Omega^2 - \Omega^2\frac{h_{00}}{4} + \frac{\Omega^4}{4m^2c^2} + m^2c^2h_{00}\right. \\ &\left. + m^2c^2\frac{h_{00}^2}{2} + mc\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right).\end{aligned} \tag{5.25}$$

Dies ist nun abhängig von Ω, in welchem der Wurzel-Term genähert werden kann:

$$\begin{aligned}\Omega &= -i\sum_i\sqrt{1+h_{ii}}\sigma^i\partial_i + \frac{i}{4}\sum_{i\neq j}h_{ii,j}\sigma^j - \frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{00,i}\sigma^i \\ &= \underbrace{-i\sum_i\sigma^i\partial_i}_{:=\Omega_0}\underbrace{-\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3}h_{ii}\sigma^i\partial_i + \frac{i}{4}\sum_{i\neq j}h_{ii,j}\sigma^j - \frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{00,i}\sigma^i}_{:=\Omega_1}.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Hierbei wurden nun Ω_0 und Ω_1 definiert, wobei Ω_1 von der Ordnung $1/c^2$ ist, da h von der Ordnung $1/c^2$ ist. Einsetzen von Ω in den Hamilton-Operator (5.27) ergibt:

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2m} \Bigg(& \Omega_0^2 + \Omega_0\Omega_1 + \Omega_1\Omega_0 + \Omega_0 \frac{h_{00}}{4}\Omega_0 + \frac{h_{00}}{2}\Omega_0^2 - \Omega_0^2 \frac{h_{00}}{4} + \frac{\Omega_0^4}{4m^2c^2} + m^2c^2h_{00} \\ & + m^2c^2\frac{h_{00}^2}{2} + mc\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0} \Bigg) . \end{aligned} \tag{5.27}$$

In diesem Hamilton-Operator lassen sich vier verschiedene Arten von Termen, analog zum elektromagnetischen Fall, identifizieren:

1. Ω_0^2 entspricht der kinetischen Energie des Teilchens.

2. $\frac{\Omega_0^4}{4m^2c^2}$ entspricht der relativistischen Massenkorrektur.

3. $\Omega_0\Omega_1 + \Omega_1\Omega_0 + \Omega_0\frac{h_{00}}{4}\Omega_0 + \frac{h_{00}}{2}\Omega_0^2 - \Omega_0^2\frac{h_{00}}{4}$ entspricht Spin-Bahn-Kopplungs-, Zeeman-, beziehungsweise Darwin-Termen. (Hierbei ist darauf zu achten, dass in Ω_1 alle Terme ein h enthalten)

4. $m^2c^2h_{00} + m^2c^2\frac{h_{00}^2}{2} + mc\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}$ entspricht äußeren Potentialen.

5.4. Hermitezität des Hamilton-Operators in erster Ordnung

Für den Hamilton-Operator (5.27) ist es nicht offensichtlich, dass er hermitesch ist, da zum Beispiel $\Omega_0\Omega_1$ nicht hermitesch ist. Der Hamilton-Operator muss auch nicht im naiven Sinne hermitesch sein, sondern bezüglich der Sesquilinearform auf der gekrümmten Raumzeit. Diese wurde bereits in Abschnitt (4.3) durch Gleichung (4.20) definiert. Die Sesquilinearform lässt sich auch durch φ und χ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \langle\psi,\psi\rangle &= \int \sqrt{-g}\bar{\psi}\gamma^0\psi \mathrm{d}^4x \\ &= \int \sqrt{-g}\bar{\psi}e_0^0\gamma^0\psi \mathrm{d}^4x \\ &= \int \sqrt{-g}\sqrt{g^{00}}\bar{\psi}\gamma^0\psi \mathrm{d}^4x \\ &= \int \sqrt{-g}\sqrt{g^{00}}(\bar{\varphi}\varphi + \bar{\chi}\chi)\mathrm{d}^4x. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Hierbei wurde im ersten Schritt die “flache” γ^0-Matrix für die “gekrümmte” eingesetzt. Die Wurzel aus der Determinante der Metrik ist aufgrund der Diagonalform der Metrik gegeben durch die Wurzel aus dem Produkt der Einträge der Metrik. Multipliziert mit $\sqrt{g^{00}}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\sqrt{g^{00}} &= \sqrt{\prod_{i=0}^{3} -(\eta_{ii}+h_{ii})} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} h_{ii} + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Dies wird nun in die Sesquilinearform (5.28) eingesetzt:

$$\langle\psi,\psi\rangle = \int \left(1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} h_{ii}\right)(\bar{\varphi}\varphi + \bar{\chi}\chi)\mathrm{d}^4x. \tag{5.29}$$

Nun lässt sich χ mithilfe der Gleichung (5.17) durch φ ausdrücken. Mit der Geometrischen Reihe ergibt sich auch die Näherung erster Ordnung:

$$\begin{aligned}\chi &= \left(E(x) + mc^2\left(1+\sqrt{1-h_{00}}\right) - c\frac{i}{8}\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}\right)^{-1} c\Omega\varphi \\ &= \frac{1}{2mc^2}\left(1 - \frac{E}{2mc^2} + \frac{1}{4}h_{00}\right)c\Omega\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right).\end{aligned} \tag{5.30}$$

Wird nun noch Ω aus Gleichung (5.26) in Gleichung (5.30) eingesetzt so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\chi &= \left(1 - \frac{E}{2mc^2} + \frac{1}{4}h_{00}\right)\left(\frac{\Omega_0}{2mc} + \frac{\Omega_1}{2mc}\right)\varphi \\ &= \frac{\Omega_0}{2mc}\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right).\end{aligned} \tag{5.31}$$

Hiermit lässt sich die Sesquilinearform (5.29) nur in Abhängigkeit von φ ausdrücken, wobei ausgenutzt wird, dass Ω_0 hermitesch ist:

$$\begin{aligned}\langle\psi,\psi\rangle &= \int \left(1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} h_{ii}\right)\left(\bar{\varphi}\varphi + \bar{\varphi}\left(\frac{\Omega_0}{2mc}\right)^2\varphi\right)\mathrm{d}^4x \\ &= \int \bar{\varphi}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} h_{ii} + \left(\frac{\Omega_0}{2mc}\right)^2\right)}_{=:M}\varphi\mathrm{d}^4x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right) \\ &= \langle\varphi, M\varphi\rangle.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Die Zeitableitung der Sesquilinearform (5.32) ist gleich Null, somit folgt:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\varphi, M\varphi\rangle = \langle\varphi, \left(iH^\dagger M - iMH + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M\right)\varphi\rangle.$$

Somit ergibt sich die hermitezitäts Bedingung für den Hamilton-Operator:

$$H^\dagger M - MH = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M. \tag{5.33}$$

Es wird zunächst die Rechte Seite der Bedingung (5.33) berechnet:

$$\begin{aligned}
H^\dagger M - MH = &\frac{1}{2m}\left(\Omega_0^2 + \Omega_1^\dagger\Omega_0 + \Omega_0\Omega_1^\dagger + \Omega_0\frac{h_{00}}{4}\Omega_0 + \Omega_0^2\frac{h_{00}}{2} - \frac{h_{00}}{4}\Omega_0^2 + \frac{\Omega_0^4}{4m^2c^2}\right.\\
&\left.+m^2c^2h_{00} + m^2c^2\frac{h_{00}^2}{2} + mc\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}h_{ii} + \left(\frac{\Omega_0}{2mc}\right)^2\right)\\
&-\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}h_{ii} + \left(\frac{\Omega_0}{2mc}\right)^2\right)\\
&\frac{1}{2m}\left(\Omega_0^2 + \Omega_0\Omega_1 + \Omega_1\Omega_0 + \Omega_0\frac{h_{00}}{4}\Omega_0 + \frac{h_{00}}{2}\Omega_0^2 - \Omega_0^2\frac{h_{00}}{4} + \frac{\Omega_0^4}{4m^2c^2}\right.\\
&\left.+m^2c^2h_{00} + m^2c^2\frac{h_{00}^2}{2} + mc\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right)\\
&= \frac{1}{2m}\left(\Omega_0\left(\Omega_1^\dagger - \Omega_1\right) + \left(\Omega_1^\dagger - \Omega_1\right)\Omega_0\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}[\Omega_0^2, h_{00}] + \frac{1}{2}[\Omega_0^2, \sum_{i=1}^{3}h_{ii}] - mci\sum_{i=1}^{3}h_{ii,0}\right) + \mathcal{O}(\frac{1}{c^3}).
\end{aligned}$$

Es wird nun zunächst $\Omega_1^\dagger - \Omega_1$ ausgerechnet:

$$\begin{aligned}
\Omega_1^\dagger - \Omega_1 = &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}p_ih_{ii}\sigma^i - \frac{i}{4}\sum_{i\neq j}h_{ii,j}\sigma^j + \frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{00,i}\sigma^i\\
&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}h_{ii}p_i\sigma^i - \frac{i}{4}\sum_{i\neq j}h_{ii,j}\sigma^j + \frac{i}{4}\sum_{i=1}^{3}h_{00,i}\sigma^i\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sigma^i\underbrace{[p_i, h_{ii}]}_{-ih_{ii,i}} - \frac{i}{2}\sum_{i\neq j}h_{ii,j}\sigma^j + \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3}h_{00,i}\sigma^i
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma^i h_{ii,j} + \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3} h_{00,i}\sigma^i \tag{5.34}$$

$$= \frac{1}{2}[\Omega_0, \sum_{i=1}^{3} h_{ii}] - \frac{1}{2}[\Omega_0, h_{00}]. \tag{5.35}$$

Wird dies nun in (5.34) eingesetzt so ergibt sich:

$$\begin{aligned} H^\dagger M - MH = \frac{1}{2m}\Bigg(&\frac{1}{2}\Omega_0[\Omega_0, \sum_{i=1}^{3} h_{ii}] - \frac{1}{2}\Omega_0[\Omega_0, h_{00}] + \frac{1}{2}[\Omega_0, \sum_{i=1}^{3} h_{ii}]\Omega_0 - \frac{1}{2}[\Omega_0, h_{00}]\Omega_0 \\ &+\frac{1}{2}[\Omega_0^2, h_{00}] + \frac{1}{2}[\Omega_0^2, \sum_{i=1}^{3} h_{ii}] - mci\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}\Bigg) \\ &= -ci\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0} = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{3} h_{ii} = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Der Hamilton-Operator (5.27) ist also hermitesch. Somit hat dieser reelle Eigenwerte, also sind die Energien zu dem Hamilton-Operator reell. Alternativ lässt sich auch die Wellenfunktion umdefinieren, sodass der Hamilton-Operator im naiven Sinne hermitesch ist:

$$\tilde{\varphi} := \sqrt{M}\varphi.$$

Somit ist das Sesquilinearform gegeben durch die standard L_2 Sesquilinearform. Um den passenden Hamilton-Operator zu definieren, wird die zeitliche Ableitung von $\tilde{\varphi}$ betrachtet:

$$\begin{aligned} i\partial_t\left(\sqrt{M}\varphi\right) &= i\left(\partial_t\sqrt{M}\right)\varphi + \sqrt{M}H\varphi \\ &= \left[i\left(\partial_t\sqrt{M}\right)\frac{1}{\sqrt{M}} + \sqrt{M}H\frac{1}{\sqrt{M}}\right]\tilde{\varphi} \\ &=: \tilde{H}\tilde{\varphi}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

In erster Ordnung ergibt sich also für den Hamilton Operator:

$$\tilde{H} = H + \frac{1}{8m}[\Omega_0^2, \sum_{i=1}^{3} h_{ii}] + \frac{1}{16m}[\Omega_0^2, h_{00}] - \frac{i}{4}c\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}. \tag{5.38}$$

Durch die Kommutatoren in diesem Hamilton-Operator werden die Spin-Bahn-Terme $\Omega_0\Omega_1 + \Omega_1\Omega_0 + \Omega_0 \frac{h_{00}}{4}\Omega_0 + \frac{h_{00}}{2}\Omega_0^2 - \Omega_0^2\frac{h_{00}}{4}$ aus dem Hamilton-Operator (5.27) hermitesch und der Term $-\frac{i}{4}c\sum_{i=1}^{3} h_{ii,0}$ kürzt sich weg. Die restlichen Terme sind schon vorher hermitesch gewesen.

5.5. Hamilton-Operator für die Schwarzschild-Metrik

Im Folgenden wird die Schwarzschild-Metrik genähert, um sie auf die Form der Metrik (5.2) zu bringen. In kartesischen Koordinaten lässt sich das Linienelement der Metrik darstellen als [6, S.363]:

$$\mathrm{d}s^2 = \left[\frac{1-\frac{r_s}{4\rho}}{1+\frac{r_s}{4\rho}}\right]^2 c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1+\frac{r_s}{4\rho}\right)^4 \left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right) \tag{5.39}$$

$$\text{mit } r = \rho\left(1+\frac{r_s}{4\rho}\right). \tag{5.40}$$

Hierbei ist r_s der Schwarzschild-Radius und r der durch Kugelkoordinaten definierte Radius. Wenn nun (5.40) nach ρ aufgelöst, in (5.39) eingesetzt und die Näherung $r_s \ll r$ benutzt wird, so ergibt sich für das Linienelement:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1+\frac{r_s}{r}\right)\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right). \tag{5.41}$$

Wird dies nun mit der Metrik (5.2) verglichen, so folgt für die h:

$$h_{00} = -\frac{r_s}{r} \tag{5.42}$$

$$h_{ii} = -\frac{r_s}{r}. \tag{5.43}$$

Hiermit kann nun Ω_1 berechnet werden:

$$\Omega_1 = -\frac{r_s}{2r}\vec{\sigma}\cdot\vec{p} + \frac{i}{4}\frac{r_s}{r^3}\vec{\sigma}\cdot\vec{x}. \tag{5.44}$$

Schließlich können wir dies in den Hamilton-Operator (5.27) einsetzen:

$$H = \frac{1}{2m}\Bigg((\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 + \frac{1}{m^2c^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^4 - \frac{3}{4}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\frac{r_s}{r}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) - \frac{r_s}{r}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 \\ + \frac{1}{4}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2\frac{r_s}{r} + \frac{i}{4}\left[(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\frac{r_s}{r^3}(\vec{\sigma}\cdot\vec{x}) + \frac{r_s}{r^3}(\vec{\sigma}\cdot\vec{x})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\right] - m^2c^2\frac{r_s}{r} + \frac{m^2c^2}{2}\frac{r_s^2}{r^2}\Bigg). \tag{5.45}$$

Mithilfe der Identität (3.16) lässt sich der Hamilon-Operator schreiben als:

$$H = \frac{1}{2m}\Bigg(\vec{p}^2 + \frac{\vec{p}^4}{4m^2c^2} - \frac{i}{4}\frac{r_s}{r^3}\vec{x}\cdot\vec{p} + \frac{3}{4}\Delta\frac{r_s}{r} - \frac{1}{4}\vec{\sigma}\cdot\left(\frac{r_s}{r^3}\vec{x}\times\vec{p}\right) \\ - \frac{1}{4}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}\times\frac{r_s}{r^3}\vec{x}\right) - m^2c^2\frac{r_s}{r} + \frac{m^2c^2}{2}\frac{r_s^2}{r^2}\Bigg). \tag{5.46}$$

Hier lassen sich Terme analog zum elektromagnetischen Fall identifizieren:

1. $\vec{p}^2$ ist die kinetische Energie des Teilchens.
2. $\frac{\vec{p}^4}{m^2c^2}$ ist die relativistische Massenkorrektur des Teilchens.
3. $\frac{3}{4}\Delta\frac{r_s}{r}$ entspricht einem Darwin Term.
4. $-\frac{1}{4}\vec{\sigma}\left(\frac{r_s}{r^3}\vec{x}\times\vec{p}\right)$ entspricht einer Spin-Bahn-Kopplung.
5. $-m^2c^2\frac{r_s}{r} + \frac{m^2c^2}{2}\frac{r_s^2}{r^2}$ entspricht einem äußeren Potential.

Die restlichen Terme haben kein Analogon zum Elektromagnetismus.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Für die Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines äußeren statischen elektromagnetischen Feldes wurde mit der Gleichung (3.9) ein System von Differentialgleichungen hergeleitet, welches eine exakte Lösung der Dirac-Gleichung ist. Dies wurde bis zur ersten Ordnung berechnet und mit der Literatur verglichen (Abschnitt (3.2) und (3.3)). In dem Hamilton-Operator, welcher somit gefunden wurde, konnten Terme identifiziert werden, welche aus der Atomphysik bekannt sind, wie der Zeeman-Term, die Spin-Bahn-Kopplung oder der Darwin-Term. Weiterführent kann die Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld auch quantisiert werden. Dies wurde bereits im Rahmen der Quantenelektrodynamik gemacht.

Die Dirac-Gleichung auf einer gekrümmten Raumzeit wurde hergeleitet und es wurde eine Wahrscheinlichkeits-Interpretation analog zur Quantenmechanik gegeben. Weiterhin wurde diese Gleichung in einer schwach gekrümmten Raumzeit, in der Newton-Näherung berechnet. Die hieraus gewonnene Gleichung wurde weiter genähert, mit dem Verfahren, welches schon im elektromagnetischen Fall benutzt wurde. Es wurde der Hamilton-Operator zu dieser Gleichung in erster Ordnung berechnet und gezeigt, dass dieser hermitesch ist. Außerdem konnte eine Analogie zum Elektromagnetischen Fall gezogen werden, in dem Sinn, dass in dem Hamilton-Operator Terme auftraten, welche ähnlich sind zu den Spin-Bahn-Kopplungs- beziehungsweise Darwin-Termen. In weiterer Untersuchung bedarf es zu sehen ob sich in dem Gravitationsfeld der Erde (approximativ durch die Schwarzschild-Metrik beschrieben) derartige Effekte messen lassen, oder ob diese zu schwach sind. Auch die Dirac-Gleichung auf gerkümmten Raumzeiten lässt sich quantisieren. Die Grundlagen hierfür wurden von [5] und [2] gelegt. Interessant wäre es hierbei die Dirac-Gleichung in der Newton-Näherung (5.14) zu quantisieren.

A. Beweis der Vierbeine

Es wird nun überprüft ob die Vierbeine (5.4) und (5.5) stimmen, indem die Relationen (4.1) und (4.3) überprüft werden. Hinzu müssen dieselben Relationen natürlich auch für die inversen Vierbeine (5.6) und (5.7) gelten, mit dem Unterschied, dass die inverse Metrik benutzt, beziehungsweise herauskommen muss. Zunächst wird (5.4) mit der Relation (4.1) überprüft:

$$e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \delta_a^\mu \sqrt{1-h^\mu}\delta_b^\nu \sqrt{1-h^\nu}(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})$$

Falls $\mu \neq \nu$, ist der Ausdruck aufgrund der Diagonalform von der Metrik gleich null. Damit die δ nicht null sind muss nur $a = b$ betrachtet werden (Wobei weiterhin über a summiert wird):

$$\delta_a^a \sqrt{1-h^a}\delta_a^a \sqrt{1-h^a}(\eta_{aa}+h_{aa}) = (1-h^a)(\eta_{aa}+h_{aa}) = \eta_{aa} \pm h_{aa}^2 = \eta_{aa} + \mathcal{O}(h^2)$$

Somit folgt dass $e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}$ (bis zur Ordnung h^2), womit die Relation (4.1) erfüllt ist. Nun wird die Relation (4.3) überprüft:

$$e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} = \delta_a^\mu \sqrt{1-h^\mu}\delta_b^\nu \sqrt{1-h^\nu}\eta^{ab}$$

Falls nun $a \neq b$ ist, ist der Ausdruck gleich Null, da η_{ab} Diagonalform hat. Es kann also $a = b$ gesetzt werden. Da die δ auch Diagonalform haben, muss nur $\mu = a$, $\nu = b$ und somit $\mu = \nu$ betrachtet werden:

$$\delta_\mu^\mu \sqrt{1-h^\mu}\delta_\mu^\mu \sqrt{1-h^\mu}\eta^{\mu\mu} = \sqrt{1-h^\mu}\eta_{\mu\mu}\sqrt{1-h^\mu} = \eta^{\mu\mu}(1+h^\mu) = \eta^{\mu\mu} + h^{\mu\mu} = g^{\mu\mu}$$

Es gilt also $e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu}$ (bis zur Ordnung h^2), womit die Relation (4.3) erfüllt wäre. Um zu zeigen, dass auch das Vierbein (5.5) richtig ist, führen wir dieses auf das Vierbein (5.4) zurück:

$$e^{\mu a} = e^{\mu}_{b}\eta^{ba}$$

Somit folgt direkt, dass auch (5.5) stimmen muss. Analog folgt auch, dass (5.7) richtig ist, falls das Vierbein (5.6) stimmt. Es wird nun also die Relation (4.1) für (5.6) überprüft, wobei die inverse Metrik eingesetzt wird und die inverse Minkowski Metrik herauskommen sollte.

$$e^{a}_{\mu}e^{b}_{\nu}g^{\mu\nu} = \delta^{a}_{\mu}\sqrt{1+h_{\mu}}\delta^{b}_{\nu}\sqrt{1+h_{\nu}}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})$$

Falls nun $\mu \neq \nu$ ist, so ist der gesamte Ausdruck gleich null, da die Metrik Diagonalform hat. Deshalb gilt $\mu = a$, $\nu = b$ und somit muss nur $a = b$ betrachtet werden:

$$\delta^{a}_{a}\sqrt{1+h_{a}}(\eta^{aa} - h^{aa})\delta^{a}_{a}\sqrt{1+h_{a}} = (1-h_{a})(\eta^{aa} + h^{aa}) = \eta^{aa} \pm (h^{aa})^2 = \eta^{aa} + \mathcal{O}(h^2)$$

Es wird nun noch die Relation (4.3) mit inverser Metrik und Minkowskimetrik überprüft:

$$e^{a}_{\mu}e^{b}_{\nu}\eta_{ab} = \delta^{a}_{\mu}\sqrt{1+h_{\mu}}\delta^{b}_{\nu}\sqrt{1+h_{\nu}}\eta^{ab}$$

Falls nun $a \neq b$ ist, so ist die Minkowskimetrik gleich Null und somit auch der gesamte Ausdruck. Aufgrund der δ muss auch $a = \mu$, $b = \nu$ ein und somit nur $\mu = \nu$ betrachtet werden:

$$\delta^{\mu}_{\mu}\sqrt{1+h_{\mu}}\delta^{\mu}_{\mu}\sqrt{1+h_{\mu}}\eta^{\mu\mu} = \sqrt{1+h_{\mu}}\sqrt{1+h_{\mu}}\eta_{\mu\mu} = \eta_{\mu\mu}(1+h_{\mu}) = \eta_{\mu\mu} + h_{\mu\mu} = g_{\mu\mu}$$

Es folgt also, dass die Relation $e^{a}_{\mu}e^{b}_{\nu}\eta_{ab} = g_{\mu\nu}$ erfüllt ist. Schließlich sind also die Vierbeine (5.4) bis (5.7) alle richtig bis zur Ordnung h^2. Um die Dirac Gleichung (5.1) zu berechnen benötigen wir noch die Ableitung des Vierbeins (5.7):

$$\begin{aligned} e_{a\mu,\nu} &= \eta_{a\mu}\partial_{\nu}\sqrt{1+h_{\mu}} \\ &= \eta_{a\mu}\frac{1}{\sqrt{1+h_{\mu}}}h_{\mu,\nu} \\ &= \eta_{a\mu}h_{\mu,\nu} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Literaturverzeichnis

[1] Bjorken and Drell. Relativistic Quantum Mechanics. McGraw-Hill Book Company, New York San Francisco Toronto London, 1. Auflage edition, 1964.

[2] J. Dimock. Dirac quantum fields on a manifold. Transactions of the American Mathematical Society, 269:133–147, 1982.

[3] Aime Fuchs Dominique Foata. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Birkhäuser, 1. Auflage edition, 1999.

[4] Ian D. Lawrie. A Unified Grand Tour of Theoretical Physics. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1. Auflage edition, 1990.

[5] André Lichnerowicz. Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale. Bulletin de la S.M.F., 92:11–100, 1964. URL http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__11_0.

[6] L.D. Landau E.M. Lifschitz. Lehrbuch der theoretischen Physik Band II Klassische Feldtheorie. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 12. Auflage edition, 1997.

[7] Wolfgang Nolting. Grundkurs Theoretische Physik 3 Elektrodynamik. Springer-VerlagBerlinHeidelbergNewYork, 8. Auflage edition, 2007.

[8] Schwabl. Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II). Springer, Berlin Heidelberg New York, 4. Auflage edition, 2005.

Danksagung

Ich danke meinen Eltern für die Unterstützung in meinem Studium. Außerdem möchte ich Prof. Dr. Karl-Henning Rehren danken für das ermöglichen dieser Bachelorarbeit und für die gute Betreuung.

Erklärung nach §13(8) der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.
Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nichtbestandenen Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 29. Juli 2012

(Fabian Schwarzendahl)