



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

Fakultät für  
Physik 

**Bachelorarbeit**

**Höhere Korrelationsfunktionen in  
global-konformer QFT**

**Higher-Order Correlation Functions in  
Globally-Conformal QFT**

angefertigt von

**Dirk Rathlev**

aus Kiel

am Institut für Theoretische Physik

**Bearbeitungszeit:** 19. April 2010 bis 26. Juli 2010

**Erstgutachter:** Prof. Dr. Karl-Henning Rehren

**Zweitgutachter:** Prof. Dr. Detlev Buchholz



## Zusammenfassung

Im Rahmen der global-konformen Wightman'schen axiomatischen Quantenfeldtheorie untersuchen wir einen alternativen Zugang zur Partialwellenentwicklung (PWE) höherer Korrelationsfunktionen. Wir zeigen die Orthogonalität eines geeigneten Funktionensystems, um damit einzelne Anteile einer PWE herauszuprojizieren. Wir verwenden dann diese Methode, um die bekannten Ergebnisse im Falle einer einfachen 4-Punktkorrelationsfunktion in  $D = 2$  Raumzeitdimensionen zu reproduzieren. Weiterhin geben wir eine Klassifikation der Twist-2-Anteile der PWE einer Sechspunktfunktion von identischen Feldern der Skalendimension 3 an, um in Zukunft die Wightman-Positivität von Sechspunkt-Beiträgen untersuchen zu können, die für sich bereits die Nichttrivialität der Theorie implizieren.

## Abstract

In the context of globally-conformal Wightman quantum field theory we investigate an alternative approach to partial wave expansion (PWE) of higher-order correlation functions. We prove orthogonality of a suitable system of functions to project specific parts out of a PWE. We use this method to reproduce known results in the case of a simple 4-point function in  $D = 2$  space-time dimensions. Furthermore, we give a classification of all Twist-2 contributions to a PWE of a six point function of identical fields with scaling dimension 3 to allow positivity analysis of certain six-point contributions which cannot arise in a free theory.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Hintergrund und Motivation . . . . .	1
1.2. Aufbau . . . . .	3
<b>2. Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1. Konventionen . . . . .	5
2.1.1. Minkowskimetrik . . . . .	5
2.1.2. Fouriertransformation . . . . .	5
2.2. Symmetriegruppen . . . . .	6
2.2.1. Lorentzgruppe . . . . .	6
2.2.2. Poincarégruppe . . . . .	7
2.2.3. Konforme Gruppe . . . . .	7
2.2.4. Irreduzible Darstellungen . . . . .	8
2.3. Axiomatische Quantenfeldtheorie . . . . .	9
2.3.1. Wightmanaxiome . . . . .	9
2.3.2. Wightmanfunktionen . . . . .	11
2.4. Konforme Quantenfeldtheorie . . . . .	13
2.4.1. Huygens'sches Prinzip und globalkonforme Invarianz . . . . .	13
2.4.2. Wirkung der Generatoren auf Feldoperatoren . . . . .	14
2.4.3. Doppelverhältnisse . . . . .	14
2.4.4. Einschränkungen an die Korrelationsfunktionen . . . . .	15
2.4.5. Diagrammschreibweise für Korrelationsfunktionen . . . . .	16
2.5. Verallgemeinerte freie Felder . . . . .	17
<b>3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen</b>	<b>19</b>
3.1. Partialwellenentwicklung . . . . .	19
3.1.1. Positivität . . . . .	21
3.2. Twist-2-Beiträge der Partialwellenentwicklung . . . . .	21

3.2.1.	Biharmonizität . . . . .	21
3.2.2.	Umrechnung in andere Koordinaten . . . . .	22
3.2.3.	Biharmonische Vervollständigung . . . . .	22
3.3.	Partialwellenentwicklungen von 4-Punktfunktionen durch explizite Form der Partialwellenwellen . . . . .	23
3.3.1.	Chirale Variablen . . . . .	23
3.3.2.	Partialwellen für $D=2$ . . . . .	24
3.3.3.	Partialwellen für $D=4$ . . . . .	25
3.4.	Partialwellenentwicklung durch Orthogonalität . . . . .	25
3.4.1.	Der Casimiroperator . . . . .	26
3.4.2.	Orthogonalität von Partialwellen . . . . .	26
3.4.3.	Orthogonalität in höheren Raumzeitdimensionen . . . . .	29
3.4.4.	Projektionen durch Integralkerne . . . . .	33
3.5.	Klassifikation der Twist-2-Beiträge . . . . .	36
3.6.	Partialwellenentwicklung der Twist-2-Anteile . . . . .	38
<b>4.</b>	<b>Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen</b>	<b>41</b>
4.1.	Partialwellenentwicklung einer Sechspunktfunktion . . . . .	42
4.2.	Bosonische, fermionische und exotische Strukturen . . . . .	42
4.3.	Eine exotische Sechspunktstruktur . . . . .	43
4.4.	Führende Twist-2-Beiträge . . . . .	45
4.5.	Einschränkungen durch die Biharmonizitätsbedingung . . . . .	47
<b>5.</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>57</b>
<b>A.</b>	<b>Anhang</b>	<b>59</b>
A.1.	Entwicklungsformeln von hypergeometrischen Funktionen . . . . .	59
A.2.	Divergenz des Skalarprodukts im Fall $D = 4, \nu = \nu' = 1$ . . . . .	60
A.3.	Integrale über Vierpunktfunktionen . . . . .	60

# Nomenklatur

## Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
diag	Diagonalmatrix
$\mathcal{S}$	Schwartzraum
$\mathbb{M}$	$D$ -dimensionaler Minkowskiraum
$D$	Anzahl der Raumzeitdimensionen
$\eta = \text{diag}(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{(D-1)\text{-mal}})$	metrischer Tensor
$\mathcal{F}$	Fouriertransformation
$O(1, D - 1)$	Lorentzgruppe
$P$	Poincarégruppe
$\text{Conf}(\mathbb{M})$	konforme Gruppe des $D$ -dimensionalen Minkowskiraums
$\text{conf}(\mathbb{M})$	konforme Lie-Algebra
$\rho_{ij} = (ij) = (ij)_\varepsilon$	Abstandsquadrat der Punkte $x_i$ und $x_j$ (als Randwert einer holomorphen Funktion aufgefasst)
$x_{ij}$	$x_i - x_j$
$\partial_j$	partielle Ableitung nach $x_j$
$\partial_{ij}$	partielle Ableitung nach $\rho_{ij}$
$\square_j$	d'Alembert-Operator bezüglich $x_j$
$\mathcal{M}_{\mu\nu}$	infinitesimale Erzeuger der Lorentzgruppe
$\mathcal{P}_\mu$	infinitesimale Erzeuger der Translationen
$\mathcal{D}$	infinitesimaler Erzeuger der Dilatationen
$\mathcal{K}_\mu$	infinitesimaler Erzeuger der speziellen konformen Transformationen
$\mathbb{H}$	Hilbertraum der Theorie
$\mathbb{P}(\mathbb{H})$	Raum der Zustände
$\mathcal{O}(\mathbb{H})$	lineare Operatoren auf $\mathbb{H}$

<b>Abkürzung</b>	<b>Bedeutung</b>
$U(\mathbb{H})$	unitäre Operatoren auf $\mathbb{H}$
$\Omega$	Vakuumvektor
$\text{supp}f$	Träger der Funktion $f$
$V^+$	Vorwärtslichtkegel
$[A, B]$	Kommutator der Operatoren $A$ und $B$
$W_N = \langle \phi_1 \dots \phi_N \rangle$	Wightmandistribution von $N$ Feldern
$C_j, j = 1, 2, 3$	Casimiroperatoren der konformen Lie-Algebra
$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (d, j_1, j_2)$	Quantenzahlen, Eigenwerte der Casimiroperatoren von $\text{conf}(\mathbb{M})$
$\mathbb{H}_\lambda$	Unterraum von $\mathbb{H}$ zur irreduziblen Darstellung $\lambda$
$\Pi_\lambda$	Projektion von $\mathbb{H}$ auf den Unterraum $\mathbb{H}_\lambda$



# 1. Einleitung

## 1.1. Hintergrund und Motivation

Obwohl die Quantenfeldtheorie, insbesondere ihr prominentester Vertreter, die Quantenelektrodynamik, eine der experimentell erfolgreichsten physikalischen Theorien ist, sind viele der ihr zugrundeliegenden mathematischen Strukturen bis heute unverstanden. Dies äußert sich unter anderem durch das häufige Auftreten von Unendlichkeiten und Divergenzen, die mathematisch nur äußerst schwer in den Griff zu bekommen sind und in der Praxis durch eine ganze Reihe von Adhoc-Methoden „wegrenormiert“ werden müssen.

Ein verbreiteter Standpunkt ist, dass die Quantenfeldtheorien, die das Standardmodell der Teilchenphysik bilden, lediglich effektive Theorien bzw. Niedrigenergienäherungen von allgemeineren Theorien sind und die auftretenden Schwierigkeiten daher Artefakte sind, die aus diesen Näherungen resultieren. Es stellt sich dann allerdings die Frage, wie die übergeordnete Theorie auszusehen hat, eine Frage, für deren Beantwortung es bis heute nur sehr vage Hinweise und Vermutungen gibt.

Eine Möglichkeit, weitere Anhaltspunkte zu erhalten, ist die sorgfältige mathematische Analyse der bestehenden quantenfeldtheoretischen Konzepte. Dazu wurden seit den 1950er Jahren verschiedene Axiomensysteme vorgeschlagen, auf deren Grundlage sich eine exakte Quantenfeldtheorie formulieren lassen soll. Eines der ersten Axiomensysteme stammt von Wightman und bildet die Grundlage dieser Arbeit. Eine bequeme Formulierung dieser Axiome bezieht sich auf die  $N$ -Punktfunktionen der Theorie, also Korrelationsfunktionen von  $N$  Quantenfeldern.

Axiomatische Zugänge zur Quantenfeldtheorie ermöglichen zwar das Vermeiden von mathematisch nicht-wohldefinierten Ausdrücken, bringen aber neue Schwierigkeiten mit sich: Ein in sich konsistentes Axiomensystem garantiert noch nicht die Exis-

## 1. Einleitung

tenz von Theorien, die diesen Axiomen genügen. Im Falle physikalischer Theorien ist insbesondere die Frage relevant, ob nicht-triviale Theorien existieren, also Theorien, die Wechselwirkungen beschreiben. Für die Wightmanaxiome sind seit einiger Zeit nicht-triviale Beispiele in  $D = 2$  Raumzeitdimensionen bekannt, wobei wichtige Impulse vor allem aus der statistischen Physik kamen. Im physikalisch interessanteren Fall von  $D = 4$  Raumzeitdimensionen ist die Existenz nicht-trivialer Theorien bislang eine offene Frage [1].

Um die Aufgabe, eine nicht-triviale Theorie zu konstruieren, zu erleichtern, könnte man versuchen, das zugrundeliegende Axiomensystem abzuschwächen. Im Falle der Wightmanaxiome führt dies allerdings in der Regel zu nicht-akzeptablen physikalischen Konsequenzen. Stattdessen wird oft der gegenteilige Ansatz gewählt: Man verschärft die Axiome, um so einen besseren Überblick über die möglichen Theorien zu erhalten, die mit diesen Axiomen verträglich sind.

Eine in gewisser Weise natürliche Verschärfung der Wightmanaxiome ist die Forderung einer erweiterten Symmetrie der Raumzeit. Die in relativistischen Quantenfeldtheorien zentrale Poincaréinvarianz kann auf sogenannte *konforme Symmetrien* erweitert werden. 2001 wurde von Nikolov und Todorov vorgeschlagen, in der Verschärfung der Axiome noch einen Schritt weiterzugehen. Sie setzen sogenannte *global-konforme* Symmetrie voraus, wodurch sich starke Einschränkungen an die Struktur der erlaubten Theorien ergeben [2]. Insbesondere zeigt sich, dass eine global-konforme Wightman-QFT durch eine abzählbare Menge von Parametern vollständig beschrieben werden kann. Trotz großer Fortschritte seit Beginn dieses Programms ist allerdings weder klar, ob diese zusätzlichen Annahmen so stark sind, dass nur noch triviale Theorien übrig bleiben, noch ist die Konstruktion einer nicht-trivialen Theorie gelungen.

In [3] wurde eine 6-Punktstruktur angegeben, die - falls sie mit den Wightmanaxiomen verträglich ist - nicht in einer trivialen Theorie auftreten kann. Für den Beweis, dass sie im Rahmen einer Wightman-QFT zulässig ist, fehlt noch der Nachweis der Hilbertraum-Positivität. Der Nachweis der Positivität ist im Allgemeinen der am schwierigsten zugängliche Aspekt einer Theorie. Für 4-Punktfunktionen wurden in den letzten Jahren bedeutende Fortschritte im Verständnis der Positivität gemacht [4], [5]. Das wertvollste Werkzeug hierbei ist die *Partialwellenentwicklung*, deren Koeffizienten eng mit der Positivität verbunden sind. Für 6-Punktfunktionen steht

eine vergleichbare Methode allerdings nicht zur Verfügung. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, einen Beitrag zu leisten zur Entwicklung einer neuen Methode, die auch für höhere Korrelationsfunktionen die Berechnung von Partialwellenkoeffizienten ermöglicht.

## 1.2. Aufbau

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt: Der erste Teil enthält die wichtigsten Grundlagen der axiomatischen Quantenfeldtheorie nach Wightman und die wichtigsten Ergebnisse der (global-)konformen QFT. Wir geben allerdings keine Beweise der einzelnen Resultate, sondern verweisen hierfür auf die Literatur.

Im zweiten Teil entwickeln wir eine Methode zur Berechnung der Partialwellenkoeffizienten mithilfe eines orthogonalen Funktionensystems. Dies reduziert eine Partialwellenentwicklung auf das Berechnen eines (unter Umständen allerdings sehr komplizierten) Residuenintegrals. Wir schränken uns in diesem Abschnitt weitgehend auf zwei Raumzeitdimensionen ein, da hier einerseits die Berechnungen deutlich einfacher werden, andererseits aber auch in zwei Dimensionen keine geschlossene Form der Partialwellenentwicklung für  $N$ -Punktfunktionen mit  $N > 4$  bekannt ist. Wir zeigen allerdings auch, dass die Orthogonalität zumindest für skalare Felder auch in  $D = 4$  Raumzeitdimensionen gültig ist und geben als erstes Resultat die Normierung des Funktionensystems an. Im Anschluss demonstrieren wir noch das Funktionieren dieses Ansatzes, indem wir die Ergebnisse der 2-dimensionalen Partialwellenentwicklung einer 4-Punktfunktion mit der Integralmethode reproduzieren.

Der dritte Teil enthält Vorbereitungen zur Untersuchung der 6-Punktstruktur, die möglicherweise zur Konstruktion einer nicht-trivialen Theorie beitragen kann. Zu diesem Zweck klassifizieren wir mithilfe eines Computerprogramms Beiträge mit *Twist 2* zur Partialwellenentwicklung einer 6-Punktfunktion, wobei sich der *Twist* aus den Quantenzahlen der konformen Gruppe zusammensetzt. Der *Twist-2*-Anteil einer Partialwellenentwicklung ist besonders attraktiv, da er *biharmonisch* in den Ortskoordinaten ist. Dies ermöglicht in unserem Fall die Bestimmung aller erlaubten *Twist-2*-Anteile.

## *1. Einleitung*

## 2. Grundlagen

### 2.1. Konventionen

Wir legen zunächst einige Konventionen fest.

#### 2.1.1. Minkowskimetrik

Mit  $\eta = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$  wird die Minkowskimetrik in  $D$  Raumzeitdimensionen bezeichnet. Wir verwenden in der gesamten Arbeit die Variante mit Signatur  $(1, D-1)$ . Den Minkowskiraum bezeichnen wir mit  $\mathbb{M}$ . Für das Skalarprodukt zweier Vektoren  $x, y \in \mathbb{M}$  schreiben wir

$$x \cdot y := x_\mu y^\mu = \sum_{\mu, \nu=1}^D \eta_{\nu\mu} x^\nu y^\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - \dots - x^D y^D \quad (2.1)$$

bzw. abkürzend  $x^2$  für  $x \cdot x$ .

#### 2.1.2. Fouriertransformation

Wir definieren die Fouriertransformation für Funktionen  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$  durch

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow k}[f](k) := (2\pi)^{-D} \int dx e^{ix \cdot k} f(x). \quad (2.2)$$

Das Skalarprodukt  $x \cdot k$  ist je nach Kontext entweder das euklidische oder das Minkowski-Skalarprodukt.

## 2. Grundlagen

Falls klar ist, in welcher Variablen fouriertransformiert wird, schreiben wir auch

$$\hat{f}(k) := \mathcal{F}_{x \rightarrow k}[f](k). \quad (2.3)$$

Man kann den Begriff der Fouriertransformation auf Distributionen  $\varphi \in \mathcal{S}'$  ausdehnen. Man definiert dann  $\hat{\varphi}$  punktweise durch

$$\hat{\varphi}(f) := \varphi(\hat{f}) \quad (2.4)$$

für alle Testfunktionen  $f \in \mathcal{S}$ .

## 2.2. Symmetriegruppen

Die Eigenschaften einer physikalischen Theorie werden wesentlich bestimmt durch die ihr zugrundeliegenden Symmetrien. Je größer die Symmetriegruppe einer Theorie ist, desto größere Einschränkungen entstehen a priori an ihre intrinsische Struktur. Wir skizzieren kurz die im Folgenden benötigten Gruppen.

### 2.2.1. Lorentzgruppe

Die Lorentzgruppe  $O(1, D - 1)$  ist definiert als Menge aller linearen invertierbaren Abbildungen  $\Lambda$ , für die gilt

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta. \quad (2.5)$$

Lorentztransformationen lassen also das Minkowski-Skalarprodukt invariant. In der Lorentzgruppe sind  $\frac{(D-1)(D-2)}{2}$  räumliche Drehungen mit den infinitesimalen Generatoren  $\mathcal{L}_i = \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}_{jk}$  und  $(D - 1)$  Lorentzboosts mit den Generatoren  $\mathcal{M}_{0i}$  enthalten.

### 2.2.2. Poincarégruppe

Die Poincarégruppe  $P$  entsteht aus der Lorentzgruppe unter Hinzunahme von Translationen. Sie ist definiert als das semidirekte Produkt  $O(1, D - 1) \rtimes \mathbb{M}$  mit der Gruppenverknüpfung

$$(\Lambda_1, a_1) \cdot (\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, a_2 + \Lambda_2 a_1),$$

wobei  $\Lambda_j \in O(1, D - 1)$  und  $a_j \in \mathbb{M} = \mathbb{R}^D$ . Die  $D$  Generatoren der Translationen bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}_\mu$ .

### 2.2.3. Konforme Gruppe

*Konforme Transformationen* sind diejenigen Transformationen, die an jedem Punkt die Winkel, also infinitesimale Längenverhältnisse, invariant lassen. Es gilt für eine konforme Transformation  $g$

$$\frac{\partial g^\alpha}{\partial x^\mu}(x) \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial g^\beta}{\partial x^\nu}(x) = \omega^2(x) \eta_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

mit einer reellwertigen, glatten Funktion  $\omega$ .

Neben den isometrischen (also den metrischen Tensor invariant lassenden) Transformationen der (eigentlichen) Poincarégruppe existieren als konforme Transformationen noch *Dilatationen*, also Transformationen der Form

$$g_\lambda : x \mapsto \lambda x \quad (2.7)$$

mit  $\lambda > 0$  und infinitesimalem Generator  $\mathcal{D}$ , sowie die sogenannten *speziell-konformen Transformationen*. Speziell-konforme Transformationen sind nichtlineare Abbildungen der Form

$$g_b : x \mapsto \frac{x - x^2 b}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$$

mit  $b \in \mathbb{M}$  und Generatoren  $\mathcal{K}_\mu$ .

Speziell-konforme Transformationen haben offensichtlich Singularitäten an Punkten

## 2. Grundlagen

mit  $1 - 2b \cdot x + b^2 x^2 = 0$ . Analog zur Riemannschen Kompaktifizierung der komplexen Zahlenebene kann man statt  $\mathbb{M}$  den *konform kompaktifizierten* Minkowskiraum  $\overline{\mathbb{M}}$  betrachten, in dem der normale Minkowskiraum als Karte eingebettet ist und deren Komplement Maß Null hat. Die vermeintlichen Singularitäten der konformen Transformationen erweisen sich dann lediglich als Koordinatensingularitäten, die verschwinden, wenn man eine andere Karte verwendet [2].

Zusammen bilden die konformen Transformationen (für  $D > 2$ ) die  $\frac{(D+1)(D+2)}{2}$ -parametrische *konforme Gruppe*  $\text{Conf}(\mathbb{M})$ . In  $D = 2$  Raumzeitdimensionen ist die Gruppe nicht endlich-dimensional [6].

Die Lie-Algebra  $\text{conf}(\mathbb{M})$  der konformen Gruppe wird durch die folgenden Vertauschungsrelationen festgelegt [7]:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] &= 0 \\
[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{M}_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho}\mathcal{P}_\sigma - \eta_{\mu\sigma}\mathcal{P}_\rho) \\
[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{K}_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}\mathcal{D} - \mathcal{M}_{\mu\nu}) \\
[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{D}] &= i\mathcal{P}_\mu \\
[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{M}_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}\mathcal{M}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\mathcal{M}_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\mathcal{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\mathcal{M}_{\mu\rho}) \\
[\mathcal{M}_{\rho\sigma}, \mathcal{K}_\nu] &= i(\eta_{\sigma\nu}\mathcal{K}_\rho - \eta_{\rho\nu}\mathcal{K}_\sigma) \\
[\mathcal{M}_{\rho\sigma}, \mathcal{D}] &= 0 \\
[\mathcal{K}_\mu, \mathcal{K}_\nu] &= 0 \\
[\mathcal{K}_\mu, \mathcal{D}] &= -i\mathcal{K}_\mu.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

### 2.2.4. Irreduzible Darstellungen

Die Lie-Algebra der konformen Gruppe ist vom Rang 3, es existieren also drei unabhängige Casimiroperatoren. Die drei zugehörigen Quantenzahlen, welche die irreduziblen unitären Darstellungen charakterisieren, sind  $\lambda = (d, j_1, j_2)$ .  $d$  bezeichnet man als *Skalendimension* (siehe auch Gl. (2.21)) und  $j_1, j_2$  sind ganz- oder halbzahlige Drehimpulsquantenzahlen.

In [8] wurden alle irreduziblen Darstellungen von  $\text{conf}(\mathbb{M})$  mit positiver Energie<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>d. h.  $U(P^0) > 0$



klassifiziert. Unitarität und Positivität der Energie lassen folgende Möglichkeiten für die Quantenzahlen zu:

- $d = j_1 = j_2 = 0$  (triviale Darstellung)
- $d \geq j_1 + j_2 + 2, j_1 j_2 \neq 0$
- $d \geq j_1 + j_2 + 1, j_1 j_2 = 0.$

## 2.3. Axiomatische Quantenfeldtheorie

Dieser Arbeit wird der axiomatische Zugang zur Quantenfeldtheorie zugrundeliegen. Wir benutzen dazu die Wightmansche Formulierung, also eine Formulierung, in der die Quantenfelder selbst im Vordergrund stehen.

### 2.3.1. Wightmanaxiome

Eine Wightman-QFT (in  $D$  Raumzeitdimensionen) besteht aus einem separablen Hilbertraum  $\mathbb{H}$  bzw. dem zugehörigen projektiven Raum  $\mathbb{P}(\mathbb{H})$  der Zustände, einem normierten Vakuumvektor  $\Omega \in \mathbb{H}$ , einer unitären Darstellung  $U : P \rightarrow U(\mathbb{H})$  der Überlagerungsgruppe der Poincarégruppe  $P$  und einem Satz von Feldern  $\{\phi_j, j \in I\}$ . Die Felder sind operatorwertige Distributionen  $\phi_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^D) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{H})$  mit einer dichten Menge  $D \subset \mathbb{H}$  als gemeinsamem Definitionsbereich (das heißt, der Definitionsbereich  $D_j(f)$  von  $\phi_j(f)$  enthält  $D$  für alle  $j \in I$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$ ).

Diese Daten sollen die folgenden Axiome W1 - W5 erfüllen[9],[6]:

**W1: Kovarianz** Der Vakuumvektor  $\Omega$  und die dichte Menge  $D \subset \mathbb{H}$  sind  $P$ -invariant, d. h.  $U(\Lambda, a)\Omega = \Omega$  und  $U(\Lambda, a)D \subset D$  für alle  $(\Lambda, a) \in P$ . Der Definitionsbereich  $D$  ist zudem invariant unter den Feldern in dem Sinne, dass  $\phi_j(f)D \subset D$  für alle  $j \in I$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$ .

Die Transformation der Feldoperatoren ist durch die unitäre Darstellung  $U$  imple-

## 2. Grundlagen

mentiert:

$$U(\Lambda, a)\phi_j(f)U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_i S_{ij}(\Lambda^{-1})\phi_i(f_{\Lambda, a}), \quad (2.9)$$

wobei  $f_{\Lambda, a}(x) := f(\Lambda^{-1}(x - a))$ .  $S$  ist dabei eine Matrixdarstellung der eigentlichen Lorentzgruppe (bzw. ihrer Überlagerungsgruppe). Für skalare Felder gilt  $S = \mathbb{1}$ .

Gl. (2.9) wird formal (im Sinne verallgemeinerter Funktionen) auch häufig

$$U(\Lambda, a)\phi_j(x)U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_i S_{ij}(\Lambda^{-1})\phi_i(\Lambda x + a) \quad (2.10)$$

geschrieben.

**W2: Lokalität** Es gilt für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$

$$[\phi_i(f), \phi_j(g)] = 0, \quad (2.11)$$

falls  $\text{supp}(f)$  und  $\text{supp}(g)$  raumartig getrennt sind. Formal schreiben wir

$$[\phi_i(x), \phi_j(y)] = 0, \quad \text{falls } (x - y)^2 < 0. \quad (2.12)$$

**W3: Spektrumsbedingung** Das Spektrum der Erzeuger  $\mathcal{P}_\mu$  der Translationen ist im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel  $\overline{V^+}$  enthalten, wobei

$$V^+ = \{k \in \mathbb{R}^D, \quad k^2 > 0, \quad k^0 > 0\}. \quad (2.13)$$

**W4: Eindeutigkeit des Vakuums** Die einzigen Vektoren in  $\mathbb{H}$ , die invariant unter allen Translationen  $U(\mathbb{1}, a)$  sind, sind skalare Vielfache des Vakuums  $\Omega$ .

**W5: Asymptotische Vollständigkeit** Die in der Streutheorie wichtigen eingehenden und ausgehenden freien Zustände sind Fockraumzustände. Die zugehörigen Fockräume  $\mathbb{H}_{in}$  und  $\mathbb{H}_{out}$  werden von diesen Zuständen aufgespannt. Man fordert

die Vollständigkeit des Wellenoperators in dem Sinne, dass

$$\mathbb{H}_{in} \cong \mathbb{H} \cong \mathbb{H}_{out}. \quad (2.14)$$

Die Hilberträume der ein- und ausgehenden Felder sind also unitär-isomorph zu  $\mathbb{H}$ .

### 2.3.2. Wightmanfunktionen

Die *Wightmanfunktionen* oder *N-Punkt-Korrelationsfunktionen*  $W_{j_1 \dots j_N}(x_1, \dots, x_N)$  sind die Vakuumerwartungswerte der Feldoperatoren:

$$W_{j_1 \dots j_N}(x_1, \dots, x_N) = (\Omega, \phi_{j_1}(x_1) \dots \phi_{j_N}(x_N) \Omega).$$

Die Wightmanfunktionen sind temperierte Distributionen auf  $\mathcal{S}(\mathbb{M}^N)$ .

Aus den Wightmanaxiomen lassen sich eine Reihe von Eigenschaften der Korrelationsfunktionen folgern:

**WD1: Kovarianz** Aus dem Transformationsgesetz Gl. (2.10) folgt die Invarianz der Wightmanfunktionen:

$$W_N(x_1, \dots, x_N) = W_N(g(x_1), \dots, g(x_N)) \quad (2.15)$$

für alle  $g \in P$ , wobei wir im Folgenden  $W_N$  für die  $N$ -Punktfunktion von  $N$  beliebigen, aber fixierten Feldern schreiben.

**WD2: Lokalität** Die Lokalität der Felder übersetzt sich in die Bedingung

$$W_N(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_N) = W_N(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_N), \quad \text{falls } (x_j - x_{j+1})^2 < 0. \quad (2.16)$$

## 2. Grundlagen

**WD3: Spektrumsbedingung** Aus der Invarianz der Korrelationsfunktionen unter Translationen folgt die Existenz einer Distribution  $W'_N \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^{(N-1)})$  mit

$$W_N(x_1, \dots, x_N) = W'_N(x_2 - x_1, \dots, x_N - x_{N-1}). \quad (2.17)$$

Die Fouriertransformierte dieser Distribution

$$\widehat{W}'_N(p_1, \dots, p_{N-1}) = (2\pi)^{-D-1} \int_{M^{(N-1)}} dx W'_N(x_1, \dots, x_{N-1}) e^{ip \cdot x} \quad (2.18)$$

hat Träger im  $(N-1)$ -fachen Produkt des Vorwärtslichtkegels, d. h.  $\text{supp } \widehat{W}'_N \subset (\overline{V^+})^{N-1}$ .

**WD4: Positivität** Für jede Folge von Testfunktionen  $\{f_N\}_{N=1}^\infty$ ,  $f_N \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^N)$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{N,M=0}^k W_{M+N}(\overline{f_M} \otimes f_N) \geq 0, \quad (2.19)$$

wobei  $(f \otimes g)(x_1, \dots, x_{M+N}) = f(x_1, \dots, x_M)g(x_{M+1}, \dots, x_{M+N})$ .

Tatsächlich sind die Eigenschaften WD1 bis WD4 äquivalent zu den Wightmanaxiomen W1 bis W5 [6]. Aus der Kenntnis sämtlicher Vakuumerwartungswerte lässt sich die komplette Wightman-QFT rekonstruieren (Rekonstruktionstheorem, [9]).

### Form der Wightmanfunktionen

Die Wightmanfunktionen skalarer Felder sind invariant unter Poincarétransformationen (Gl. (2.15)). Dies impliziert für skalare Korrelationsfunktionen

$$W(x_1, \dots, x_N) = W(\{\rho_{ij}\}_{i,j}) \quad i < j, \quad (2.20)$$

wobei  $\rho_{ij} := (x_i - x_j)^2$  Lorentz'sche Abstandsquadrate bezeichnet. Genauer handelt es sich um homogene Distributionen:  $\rho_{ij} = (x_i - x_j - 0ie_0)^2 =: (ij)_\epsilon =: (ij)$ .

## 2.4. Konforme Quantenfeldtheorie

Um die Konstruktion von Theorien zu erleichtern, kann man die ursprünglich postulierte Poincaré-Symmetrie auf konforme Symmetrien erweitern, also statt der Poincarégruppe die konforme Gruppe als Symmetriegruppe betrachten. Die Matrixdarstellung  $S$  in Gl. (2.10) ist nun für skalare Felder nicht mehr trivial. Es gilt für skalare Felder

$$U(g)\phi(x)U(g)^{-1} = \left| \frac{dg}{dx} \right|^{d/D} \phi(g(x)). \quad (2.21)$$

Hierbei bezeichnet  $d$  die Skalendimension des Feldes (vgl. 2.2.4) und  $D$  die Dimensionalität der Raumzeit.  $\left| \frac{dg}{dx} \right|$  ist die Jacobideterminante von  $g$ . Insbesondere ergibt sich für Dilatationen Gl. (2.7)

$$U(g_\lambda)\phi(x)U(g_\lambda)^{-1} = \lambda^d \phi(\lambda x). \quad (2.22)$$

Die Forderung nach asymptotischer Vollständigkeit W5, wird weggelassen. Konforme Theorien sind keine Teilchentheorien bzw. ihre Streumatrix ist trivial.

### 2.4.1. Huygens'sches Prinzip und globalkonforme Invarianz

Mithilfe konformer Transformationen lässt sich jedes Paar zeitartig getrennter Punkte durch eine unitäre Abbildung auf ein Paar raumartig getrennter Punkte abbilden [2]. Nach Gl. (2.11) kommutieren die Felder an diesen Punkten und damit auch an den ursprünglichen, zeitartig getrennten Punkten. Da Felder an zeitartig getrennten Punkten allerdings keinesfalls kommutieren müssen, scheint hier ein Paradoxon vorzuliegen. Bei genauerer Betrachtung stellt sich aber heraus, dass die QFT nicht auf dem Minkowskiraum bzw. seiner Kompaktifizierung  $\overline{\mathbb{M}}$  definiert werden darf, sondern stattdessen mit einer Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $\overline{\mathbb{M}}$  gearbeitet werden muss [10]. Die transformierten Felder erweisen sich dann als Felder *auf einem anderen Blatt* der Überlagerung bzw. als *nichtlokale* Objekte auf dem ursprünglichen Blatt.

Postuliert man, dass die QFT auf  $\overline{\mathbb{M}}$  selbst definiert ist (d. h. man arbeitet mit  $\overline{\mathbb{M}}$

## 2. Grundlagen

und fordert, dass eine unitäre Darstellung der konformen Gruppe von  $\overline{\mathbb{M}}$  existiert), führt dies zu starken Einschränkungen an die Felder:

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \text{falls } (x - y)^2 \neq 0.$$

Eine solche QFT wird *Huygens* genannt, da Informationsausbreitung ausschließlich auf dem Lichtkegel stattfinden kann. Da die unitäre Darstellung nun eine Darstellung der konformen Gruppe von  $\overline{\mathbb{M}}$  sein muss, ergeben sich Einschränkungen an die Quantenzahlen (Abschnitt 2.2.4). Sowohl  $d$  als auch  $j_1 + j_2$  sind jetzt ganzzahlig. Im Folgenden betrachten wir ausschließlich konforme QFTs mit Huygenseigenschaft - so genannte *global-konform-invariante (GCI) QFTs*.

### 2.4.2. Wirkung der Generatoren auf Feldoperatoren

Wir geben noch die Vertauschungsrelationen der infinitesimalen Generatoren der konformen Gruppe mit den (skalaren) Feldern an. Sie ergeben sich aus Gl. (2.21) durch Differenziation nach dem jeweiligen Gruppenparameter und anschließender Auswertung am Einselement. Es gilt:

$$i[\mathcal{P}_\mu, \phi(x)] = \partial_\mu \phi(x) \quad (2.23)$$

$$i[\mathcal{M}_{\mu\nu}, \phi(x)] = (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi(x) \quad (2.24)$$

$$i[\mathcal{D}, \phi(x)] = (x^\mu \partial_\mu + d) \phi(x) \quad (2.25)$$

$$i[\mathcal{K}_\mu, \phi(x)] = (2x_\mu (x_\nu \partial^\nu) - (x_\nu x^\nu) \partial_\mu + 2d x_\mu) \phi(x). \quad (2.26)$$

### 2.4.3. Doppelverhältnisse

Als *Doppelverhältnisse* oder *Crossratios* bezeichnet man die aus jeweils vier Abstandsquadrate der Raumzeitpunkte  $x_1, \dots, x_4$  gebildeten Variablen

$$s := \frac{\rho_{12}\rho_{34}}{\rho_{13}\rho_{24}}, \quad t := \frac{\rho_{14}\rho_{23}}{\rho_{13}\rho_{24}}. \quad (2.27)$$

$s$  und  $t$  sind invariant unter (gleichzeitigen) konformen Transformationen der Koordinaten  $x_1$  bis  $x_4$ . Falls konforme Invarianten von mehr als vier Punkten benötigt werden, müssen mehr als zwei verschiedene Doppelverhältnisse verwendet werden,

die sich analog bilden lassen.

#### 2.4.4. Einschränkungen an die Korrelationsfunktionen

Die Erweiterung auf konforme Symmetrien ermöglicht es, die Form der Korrelationsfunktionen weiter einzuschränken. Es gilt nach Gl. (2.21) und aufgrund der Annahme global-konformer Invarianz

$$W_N(g(x_1), \dots, g(x_N)) = \left| \frac{dg}{dx} \right|^{d_1/D} \cdot \dots \cdot \left| \frac{dg}{dx} \right|^{d_N/D} W_N(x_1, \dots, x_N), \quad (2.28)$$

wobei  $d_j$  die zum Feld  $\phi_j$  gehörende Skalendimension bezeichnet.

Aus der Dilatationsinvarianz Gl. (2.22) folgt also insbesondere, dass die Wightmanfunktionen homogen vom Grad  $-\sum_j 2d_j$  sind.

#### 1-Punktfunktionen

Die 1-Punktfunktion ist bereits durch ihre Translationsinvarianz bis auf eine Konstante festgelegt. Da die einzige homogene und konstante Funktion die Nullfunktion ist, folgt

$$(\Omega, \phi(x)\Omega) \equiv 0. \quad (2.29)$$

#### 2- und 3-Punktfunktionen

Die skalaren 2- und 3-Punktfunktionen sind durch konforme Kovarianz bis auf Normierung eindeutig festgelegt [1]:

$$W(x_1, x_2) = \delta_{d_1, d_2} \frac{C}{\rho_{12}^{d_1}} \quad (2.30)$$

$$W(x_1, x_2, x_3) = \frac{C}{\rho_{12}^{(d_1+d_2-d_3)/2} \rho_{13}^{(d_1+d_3-d_2)/2} \rho_{23}^{(d_2+d_3-d_1)/2}}. \quad (2.31)$$

## 2. Grundlagen

### Höhere Korrelationsfunktionen

Die allgemeine Form einer möglichen Korrelationsfunktion einer global-konform invarianten Theorie ist [2]

$$W(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\mu} C_{\mu} \prod_{i < j} (\rho_{ij})^{-\mu_{ij}}, \quad (2.32)$$

wobei  $\mu = (\mu_{ij})$  einen Multiindex mit  $i < j$  bezeichnet, der zusätzlich (mit der Notation  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ ) den *Summenregeln*

$$\sum_i \mu_{ij} = d_j \quad (2.33)$$

unterliegt. Die Summenregeln stellen die konforme Invarianz der Korrelationsfunktion sicher.

Hinzu kommen noch *universelle Polschranken*

$$\mu_{ij} \leq \left[ \frac{d_i + d_j + \delta_{d_i d_j} - 1}{2} \right], \quad (2.34)$$

die aus der Unitarität folgen.

#### 2.4.5. Diagrammschreibweise für Korrelationsfunktionen

Eine übersichtliche Möglichkeit,  $N$ -Punktkorrelationsfunktionen mit einer überschaubaren Anzahl von Feldern darzustellen, stellt die Diagrammschreibweise dar. Hierfür wird für jeden Summanden in Gl. (2.32) ein Diagramm mit  $N$  Punkten (Vertizes) gezeichnet. Anschließend werden entsprechend der Werte von  $\mu_{ij}$  Verbindungslinien zwischen diesen Punkten gezeichnet. Positive  $\mu_{ij}$ , also Faktoren  $\rho_{ij}$  im Nenner der Korrelationsfunktion, werden mit durchgezogenen Linien gekennzeichnet, wobei genau  $\mu_{ij}$  Linien zwischen den Vertizes  $i$  und  $j$  gezogen werden. Negative  $\mu_{ij}$  gehen analog mit gestrichelten Linien einher, wobei  $-\mu_{ij}$  gestrichelte Linien zwischen  $i$  und  $j$  zu zeichnen sind. In Abb. 2.1 befindet sich als Beispiel das Diagramm, das



zur Vierpunktfunktion

$$W(x_1, \dots, x_4) = \frac{\rho_{14}\rho_{23}}{\rho_{12}^2\rho_{34}^2\rho_{13}^2\rho_{24}^2} \quad (2.35)$$

gehört.

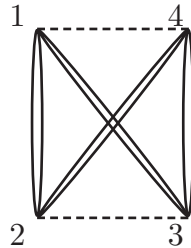


Abb. 2.1.: Beispiel für die Diagrammschreibweise. Diagramm der 4-Punktfunktion Gl. (2.35)

Anhand solcher Diagramme lässt sich sehr schnell erkennen, ob eine gegebene Struktur den Summenregeln und Polstrichen genügt. Im Falle einer Korrelationsfunktion von vier Feldern gleicher Skalendimension  $d$  dürfen maximal  $d$  durchgezogene Linien zwei Vertizes verbinden (Gl. (2.34)). Die Differenz von durchgezogenen und gestrichelten Linien muss der Summenregel Gl. (2.33) zufolge gerade  $d$  sein. Im Beispiel ist also eine Vierpunktfunktion von vier Feldern identischer Skalendimension mit  $d = 3$  dargestellt.

## 2.5. Verallgemeinerte freie Felder

Ein verallgemeinertes freies Feld ist ein Feld, dessen Kommutator an allen Raumzeitpunkten ein Vielfaches des Einheitsoperators ist:

$$[\phi(x), \phi(y)] = c(x, y)\mathbb{1}. \quad (2.36)$$

Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass jede  $N$ -Punktkorrelationsfunktion dieses

## 2. Grundlagen

Feldes sich als Summe über Produkte von 2-Punktfunktionen schreiben lässt:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \rangle = \sum_{\pi} \langle \phi(x_{\pi(1)}) \phi(x_{\pi(2)}) \rangle \cdot \dots \cdot \langle \phi(x_{\pi(N-1)}) \phi(x_{\pi(N)}) \rangle, \quad (2.37)$$

wobei die Summe über alle Permutationen  $\pi$  der  $N$  Ortskoordinaten läuft. Insbesondere verschwindet jede  $N$ -Punktfunktion mit ungeradem  $N$  (da sonst eine 1-Punktfunktion übrig bleibt, die nach Gl. (2.29) verschwindet).

# 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

Eines der wichtigsten Werkzeuge in der Analyse einer Quantenfeldtheorie ist die *Partialwellenentwicklung*. Mit ihrer Hilfen lassen sich Korrelationsfunktionen nach Eigenfunktionen der Casimiroperatoren entwickeln. Da die Partialwellen selbst (nach Wahl einer Normierung) universell sind (d. h. sie sind ausschließlich durch die zugrundeliegenden Axiome festgelegt), ist der physikalische Gehalt einer Theorie in den Koeffizienten kodiert.

Für 4-Punktkorrelationsfunktionen sind die Partialwellen explizit bekannt [4]. In [5] wurde daraufhin ein Algorithmus entwickelt, um die Partialwellenkoeffizienten einer gegebenen 4-Punktfunktion effizient zu berechnen. In diesem Kapitel werden wir diese Resultate kurz zusammenfassen und dann eine alternative Herangehensweise ausarbeiten, um die Partialwellenkoeffizienten zu bestimmen. Wir testen diese Methode, die nicht auf den 4-Punktfall beschränkt ist, dann anhand einer bestimmten 4-Punkt-Struktur.

## 3.1. Partialwellenentwicklung

Zustände der Form  $\phi(x)\Omega$  spannen eine irreduzible Darstellung der konformen Gruppe auf. Der von den Zuständen  $\phi(x)\phi(y)\Omega$  aufgespannte Unterraum ist nicht mehr irreduzibel. Wir können den Eins-Operator auf diesem Unterraum zerlegen in Projektionen auf sämtliche irreduziblen Unterdarstellungen:

$$\mathbb{1} = \sum_{\lambda} \Pi_{\lambda}, \tag{3.1}$$

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

wobei  $\lambda = (d, j_1, j_2) =: (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  die zur Darstellung gehörenden Quantenzahlen bezeichnet.

Da die Casimiroperatoren  $C_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  auf irreduziblen Darstellungen Vielfache des Einheitsoperators sind (Schurs Lemma), gilt

$$C_j \Pi_\lambda \phi(x) \phi(y) \Omega = \lambda_j \Pi_\lambda \phi(x) \phi(y) \Omega. \quad (3.2)$$

Andererseits kann der Casimiroperator, da er ein Polynom in den Generatoren ist, mithilfe der Kommutationsrelationen Gl. (2.26) an den Feldern vorbei permutiert werden, wobei ein Differenzialoperator  $D_j$  in  $x$  und  $y$  entsteht. Es gilt  $C_j \Omega = 0$  und man erhält die partiellen Differenzialgleichungen

$$\lambda_j \Pi_\lambda \phi(x) \phi(y) \Omega = D_j \Pi_\lambda \phi(x) \phi(y) \Omega. \quad (3.3)$$

Diese Differenzialgleichungen können zur Bestimmung der *Partialwellen*

$$\beta_\lambda = \Pi_\lambda \phi(x) \phi(y) \Omega \quad (3.4)$$

verwendet werden.

Die Partialwellenentwicklung einer 4-Punktfunktion identischer Felder ist definiert als die Entwicklung:

$$(\Omega, \phi \phi \phi \phi \Omega) = \sum_\lambda (\Omega, \phi \phi \Pi_\lambda \phi \phi \Omega) = \sum_\lambda B_\lambda \beta_\lambda, \quad (3.5)$$

wobei  $B_\lambda$  die *Partialwellenkoeffizienten* bezeichnet.

In  $D = 4$  sind die Darstellungen von der Form  $\lambda = (d, j, j)$  [11]. Wir definieren  $l := 2j$  als den *Spin* und  $2\kappa := d - l$  als den *Twist*. Dann haben wir durch Umbenennen

$$(\Omega, \phi \phi \phi \phi \Omega) = \sum_{\kappa, l} (\Omega, \phi \phi \Pi_{\kappa l} \phi \phi \Omega) = \sum_{\kappa, l} B_{\kappa l} \beta_{\kappa l}. \quad (3.6)$$

### 3.1.1. Positivität

Die Positivität der 4-Punktfunktionen ist äquivalent dazu, dass alle Partialwellenkoeffizienten nicht-negativ sind [5]:

$$B_{\kappa l} \geq 0. \quad (3.7)$$

Eine positive 4-dimensionale Theorie ist nach Einschränkung auf 2 Raumzeitdimensionen noch immer positiv (da die Einschränkung durch Grenzwerte im Testfunktionsraum geschieht, siehe z. B. [12]). Eine notwendige Bedingung dafür, dass ein Twist-2-Beitrag (die wir im Folgenden primär betrachten werden) einer 4-dimensionalen Korrelationsfunktion positiv ist, ist die Positivität der auf 2 Dimensionen eingeschränkten Struktur. Dieser Beitrag ist dort allerdings kein Twist-2-Beitrag mehr, da jede 4D-Partialwelle im Allgemeinen in unendlich viele 2D-Partialwellen zerfällt [13].

Andersherum geht allerdings durch die Reduktion auf 2 Dimensionen Information verloren: Eine in 2 Raumzeitdimensionen positive Theorie ist nach Fortsetzung auf 4 Dimensionen nicht zwangsläufig positiv. Wir werden dennoch im Folgenden überwiegend in 2 Dimensionen arbeiten, da sich zeigen wird, dass die Rechnungen im 4-Dimensionalen (vorerst) zu kompliziert sind.

## 3.2. Twist-2-Beiträge der Partialwellenentwicklung

### 3.2.1. Biharmonizität

Der Anteil in der Partialwellenentwicklung zum Twist  $\kappa$  in  $x_1$  und  $x_2$  verhält sich (nach [11]) wie

$$\langle \phi(x_N) \dots \phi(x_3) \Pi_{\kappa,l} \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \rho_{12}^{\kappa-d} (1 + O(\rho_{12})) \quad \text{für } \rho_{12} \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

Wir definieren

$$U(x_1, x_2, \dots) := \rho_{12}^{d-1} \langle \phi(x_N) \dots \phi(x_3) \Pi_{2\kappa=2} \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle. \quad (3.9)$$

Die Beiträge zum Twist  $2\kappa = 2$  in den Argumenten  $x_1$  und  $x_2$  in einer Partialwellenentwicklung sind biharmonisch in den Argumenten  $x_1$  und  $x_2$  [11], das heißt

$$\square_1 U(x_1, x_2, \dots) = 0 = \square_2 U(x_1, x_2, \dots). \quad (3.10)$$

#### 3.2.2. Umrechnung in andere Koordinaten

Der Wellenoperator kann als Differenzialoperator in den Lorentzabstandsquadraten  $\rho_{jk}$  dargestellt werden, was seine Anwendung auf rationale  $N$ -Punktkorrelationsfunktionen bedeutend vereinfacht. Mit der Schreibweise  $\partial_{jk} = \partial_{jk} = \frac{\partial}{\partial \rho_{kj}}$  und der Konvention  $\partial_{jj} = 0$  erhalten wir nach [3]

$$\square_1 = -4 \left( \sum_{2 \leq j < k \leq N} \rho_{jk} \partial_{1j} \partial_{1k} \right). \quad (3.11)$$

#### 3.2.3. Biharmonische Vervollständigung

Da der Twist-2-Anteil harmonisch in beiden Argumenten ist und die harmonische Ergänzung einer rationalen Funktion mit Termen niedrigerer Ordnung eindeutig festgelegt ist, ist der Twist-2-Anteil einer PWE durch seine führende Ordnung eindeutig bestimmt [3]. Wir schreiben

$$U(x_1, \dots) = U_0(x_1, \dots) + \rho_{12} \hat{U}(x_1, \dots). \quad (3.12)$$

Die Biharmonizität des Twist-2-Anteils stellt darüber hinaus aber noch eine weitere nicht-triviale Einschränkung an mögliche führende Terme dar: Die harmonischen Ergänzungen in  $x_1$  und  $x_2$  existieren separat und sind eindeutig. Damit allerdings eine *biharmonische* Ergänzung existiert, müssen die beiden harmonischen Ergänzungen in gewisser Weise kompatibel sein. In [3] wurde diese Bedingung in Form eines Differenzialoperators dritter Ordnung für den führenden Anteil des Twist-2-Beitrages

formuliert:

$$(E_1 D_2 - E_2 D_1) U_0 = 0, \quad (3.13)$$

wobei

$$D_1 = \sum_{3 \leq j < k \leq n} \rho_{jk} \partial_{1j} \partial_{1k}, \quad (3.14)$$

$$E_1 = \sum_{3 \leq i \leq n} \rho_{2i} \partial_{1i} \quad (3.15)$$

und  $E_2$  und  $D_2$  analog definiert sind.

### 3.3. Partialwellenentwicklungen von 4-Punktfunktionen durch explizite Form der Partialwellenwellen

Für 4-Punktfunktionen sind die Partialwellen in geschlossener Form bekannt [4]. Dies ermöglicht die Entwicklung eines Algorithmus zur expliziten Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten [5].

#### 3.3.1. Chirale Variablen

Motiviert durch die Vereinfachungen, die in der zweidimensionalen Theorie aus der Verwendung der Lichtkegelvariablen  $x^\pm = t \pm x$  resultieren, definiert man allgemein für  $D$  Raumzeitdimensionen die *chiralen Variablen*  $u$  und  $v$  implizit durch

$$s =: uv, \quad (3.16)$$

$$t =: (1 - u)(1 - v), \quad (3.17)$$

wobei  $s$  und  $t$  Doppelverhältnisse bezeichnen (siehe Gl. (2.27)).

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

Zusätzlich definieren wir noch die Abkürzungen

$$\hat{u} := \frac{u}{1-u} \quad (3.18)$$

$$\hat{v} := \frac{v}{1-v}. \quad (3.19)$$

#### 3.3.2. Partialwellen für D=2

In  $D = 2$  Raumzeitdimensionen haben die Partialwellen  $\beta_{\mu\nu}$  die Form

$$\beta_{\mu\nu} = G_\mu(u)G_\nu(v) \quad (3.20)$$

mit

$$G_m(u) := u^m F(m, m; 2m; u). \quad (3.21)$$

$F$  bezeichnet hier eine hypergeometrische Funktion.

Um die Partialwellenentwicklung einer gegebenen Vierpunktfunktion von vier identischen Feldern zu berechnen, schreibt man diese in der Form

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle = \frac{1}{(12)^d(34)^d} f(s, t) \quad (3.22)$$

und drückt dann  $f$  durch die chiralen Variablen  $u$  und  $v$  (Gl. (3.17)) aus:

$$f(s, t) = \sum_{m,n} (a_{mn}u^m v^n + b_{mn}\hat{u}^m \hat{v}^n). \quad (3.23)$$

Unter Verwendung der Entwicklungsformeln Gl. (A.1) und Gl. (A.2) drückt man  $u$ ,  $v$ ,  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  mit  $G_m$  aus und erhält nach Ausmultiplizieren und Umordnen

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \sum_{\mu,\nu} X_{\mu\nu} G_\mu(u) G_\nu(v) \\ &= \sum_{\mu,\nu} X_{\mu\nu} \beta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.24)$$



### 3.3.3. Partialwellen für $D=4$

In  $D = 4$  Raumzeitdimensionen sind die Partialwellen  $\beta_{\kappa l}$  für Vierpunktfunktionen von skalaren Feldern identischer Skalendimension gegeben durch

$$\beta_{\kappa l} = \frac{uv}{u-v} [G_{\kappa+l}(u)G_{\kappa-1}(v) - G_{\kappa+l}(v)G_{\kappa-1}(u)]. \quad (3.25)$$

Um die Partialwellenentwicklung durchzuführen, gehen wir analog zu oben vor. Aufgrund des Vorfaktors der Partialwellen wird die Korrelationsfunktion noch mit  $(u-v)/(uv)$  multipliziert und dann antisymmetrisch in  $u$  und  $v$  in der Form

$$\frac{u-v}{uv} f(s, t) = \sum_{m,n} (a_{mn} u^m v^n + b_{mn} \hat{u}^m \hat{v}^n - (u \leftrightarrow v)) \quad (3.26)$$

geschrieben. Dann liefert eine Entwicklung in hypergeometrische Funktionen zusammen mit einer analogen Rechnung wie im zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} \frac{u-v}{uv} f(s, t) &= \sum_{\mu>\nu} (X_{\mu\nu} - X_{\nu\mu}) [G_{\mu}(u)G_{\nu}(v) - G_{\mu}(v)G_{\nu}(u)] \\ &= \frac{u-v}{uv} \sum_{\kappa,l} B_{\kappa l} \beta_{\kappa l}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

wobei  $\mu = \kappa + l$  und  $\nu = \kappa - 1$  gesetzt wurden.

## 3.4. Partialwellenentwicklung durch Orthogonalität

Wir entwickeln jetzt eine alternative Herangehensweise. Sofern nicht anders vermerkt, arbeiten wir in allen praktischen Rechnungen in  $D = 2$  Raumzeitdimensionen.

### 3.4.1. Der Casimiroperator

Der quadratische Casimiroperator  $C$  ist für Felder gleicher Skalendimensionen  $d$  gegeben durch ([14])

$$C = (x_{12}^2)^{-d} C' (x_{12}^2)^d, \quad (3.28)$$

wobei

$$C' = x_{12}^2 \partial_1 \cdot \partial_2 - 2(x_{12} \otimes x_{12}) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_2). \quad (3.29)$$

Die Eigenfunktionen des Casimiroperators  $C'$  zum Eigenwert  $\mu(\mu - 1) + \nu(\nu - 1)$  in zwei Dimensionen sind

$$F_{\mu\nu}(x_1, x_2; x_3) := f_{\mu}^{+}(x_1, x_2; x_3) f_{\nu}^{-}(x_1, x_2; x_3) \quad (3.30)$$

mit

$$f_{\mu}^{\pm}(x_1, x_2; x_3) := \frac{(x_1^{\pm} - x_2^{\pm} - i\varepsilon)^{\mu}}{(x_1^{\pm} - x_3^{\pm} - i\varepsilon)^{\mu} (x_2^{\pm} - x_3^{\pm} - i\varepsilon)^{\mu}}. \quad (3.31)$$

Hier bezeichnen  $x_j^{\pm} = t_j \pm x_j$  die Lichtkegelvariablen,  $t_j = x_j^0$ ,  $x_j = x_j^1$ .

In höheren Dimensionen sind die (skalaren) Eigenfunktionen von  $C'$  zum Eigenwert  $2\nu(2\nu - D)$  gegeben durch

$$F_{\nu}(x_1, x_2; x_3) := \left[ \frac{(12)}{(13)(23)} \right]^{\nu}. \quad (3.32)$$

### 3.4.2. Orthogonalität von Partialwellen

Der Casimiroperator  $C'$  ist formal selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts

$$(\cdot, \cdot) = \left( \frac{\cdot}{(12)^{D/2}}, \frac{\cdot}{(12)^{D/2}} \right)_{L^2}. \quad (3.33)$$

Wir erwarten daher, dass seine Eigenfunktionen (zu unterschiedlichen Eigenwerten) bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind. Wir rechnen dies im Folgenden für  $D = 2$  Raumzeitdimensionen nach und untersuchen dann noch den Fall einer

### 3.4. Partialwellenentwicklung durch Orthogonalität

geraden Raumzeitdimension  $D > 2$ , in dem sich die Situation diffiziler darstellt.

Vorher stellen wir noch fest, dass Folgendes gilt:

$$\frac{(t - i\varepsilon_1)^2 - \vec{x}^2}{(t - i\varepsilon_2)^2 - \vec{x}^2} = 1 + O(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (3.34)$$

Für infinitesimale  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  können wir also Ausdrücke der Art  $(ij)_\varepsilon$  unabhängig von der genauen Gestalt gegeneinander kürzen.

Wir haben das Integral

$$W(x_3, x_4) = \int d^2x_1 d^2x_2 \left[ \frac{F_{\mu\nu}(x_1, x_2; x_3)}{(12)} \right] \left[ \frac{F_{\mu'\nu'}(x_1, x_2; x_4)}{(12)} \right] \quad (3.35)$$

zu berechnen.

Das Integral faktorisiert in zwei Integrale:

$$4W(x_3, x_4) = \left[ \int dv du f_{\mu\mu'}(u, v, x_3^+, x_4^+) \right] \cdot \left[ \int dv du f_{\nu\nu'}(u, v, x_3^-, x_4^-) \right], \quad (3.36)$$

wobei

$$f_{\mu\mu'}(u, v, x, y) = \frac{(u - v + i\varepsilon)^{\mu-1} (u - v - i\varepsilon)^{\mu'-1}}{(u - x + i\varepsilon)^\mu (v - x + i\varepsilon)^\mu (u - y - i\varepsilon)^{\mu'} (v - y - i\varepsilon)^{\mu'}} \quad (3.37)$$

und der Faktor 4 von der Jacobideterminante stammt.

Seien zunächst  $\mu, \mu' > 1$  und o. B. d. A.  $\mu \geq \mu'$ . Wir betrachten das vordere Integral und führen zunächst die  $u$ -Integration aus. Für  $\mu, \mu' > 1$  ist der einzige Pol mit positivem Imaginärteil

$$u_0 = i\varepsilon + x_4^+. \quad (3.38)$$

Es handelt sich um eine  $\mu'$ -fache Polstelle, das Residuum ist also gegeben durch

$$\text{res}_{u=u_0} = \frac{1}{(\mu' - 1)!} \frac{1}{(v - x_3^+ + i\varepsilon)^\mu (v - x_4^+ - i\varepsilon)^{\mu'}} \partial_u^{\mu'-1} \frac{(u - v)^{\mu+\mu'-2}}{(u - x_3^+ + i\varepsilon)^\mu} \Big|_{u=u_0}. \quad (3.39)$$

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

Durch die Ableitung werden Terme der Bauart

$$\frac{(v - x_4^+ - i\varepsilon)^{\mu+\mu'-2-n_1}}{(x_{43}^+ + i\varepsilon)^{\mu-n_2}} \quad (3.40)$$

produziert, wobei  $n_1 + n_2 = \mu' - 1$ . Falls  $\mu + \mu' - 2 - n_1 \geq \mu'$  ist, wird der Integrand für  $v$  in der oberen Halbebene regulär und das Integral Gl. (3.36) ergibt 0. Wegen  $n_1 \leq \mu' - 1$  haben wir also als Bedingung für ein nichtverschwindendes Integral  $\mu - \mu' - 1 < 0$ , was wegen  $\mu \geq \mu'$  nur für  $\mu = \mu'$  möglich ist. Das Ergebnis in diesem Fall können wir explizit angeben: Alle Ableitungen in Gl. (3.39) müssen auf den Zähler fallen. Für das Integral ergibt sich also:

$$\int dv du f(u, v, x_3^+, x_4^+) = \int dv 2\pi i \operatorname{res}_{u=u_0} \quad (3.41)$$

$$= \frac{(-1)^{\mu-1} (2\mu-2)!}{(\mu-1)!^2} \int dv \frac{1}{(v - x_3^+ + i\varepsilon)^\mu (v - x_4^+ - i\varepsilon) (x_{43}^+ + i\varepsilon)^\mu}, \quad (3.42)$$

wobei der kombinatorische Vorfaktor aus der Berechnung des Residuums und das Vorzeichen vom negativen Vorzeichen von  $v$  in Gl. (3.39) stammt. Es bleibt ein einfacher Pol in der oberen Halbebene für

$$v = x_4^+ + i\varepsilon. \quad (3.43)$$

Wir erhalten also

$$\int dv du f_{\mu\mu'}(u, v, t_3, x_3, t_4, x_4) = -\delta_{\mu\mu'} 4\pi^2 \frac{(-1)^{\mu-1} (2\mu-2)!}{(\mu-1)!^2} \frac{1}{(x_{43}^+)^{2\mu}} \quad (3.44)$$

und somit

$$W(x_3, x_4) = (-1)^{\mu+\nu} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} 4\pi^4 \frac{(2\mu-2)! (2\nu-2)!}{(\mu-1)!^2 (\nu-1)!^2} \frac{1}{[(x_{34}^+)]^{2\mu} [(x_{34}^-)]^{2\nu}}. \quad (3.45)$$

Es bleiben noch die Fälle  $\mu = \mu' = 0$ ,  $\mu = 1, \mu' = 0$  und  $\mu = \mu' = 1$  zu betrachten. Im ersten Fall divergiert das Integral. Das Verschwinden des Integrals für  $\mu = 1, \mu' = 0$  zeigt sich nach einer kurzen Rechnung, wobei in diesem Fall wichtig ist, dass (12) =  $(t_1 - t_2 + 2i\varepsilon)^2 - (x_1 - x_2)^2$  gesetzt wird<sup>1</sup>. Das Ergebnis für  $\mu = \mu' = 1$  ist mit obigem

<sup>1</sup>Der verbleibende Faktor (12) im Nenner stammt aus dem Skalarprodukt Gl. (3.33), kann also

Resultat kompatibel.

Damit haben wir für  $(\mu, \mu') \neq 0, (\nu, \nu') \neq 0$  die Orthogonalitätsrelation

$$\int d^2x_1 d^2x_2 \overline{F_{\mu\nu}(x_1, x_2; x_3)} \frac{1}{|x_{12}|^2} F_{\mu'\nu'}(x_1, x_2; x_4) = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \frac{(-1)^{\mu+\nu} C_{\mu\nu}}{(x_{43}^+)^{2\mu} (x_{43}^-)^{2\nu}} \quad (3.46)$$

mit  $C_{\mu\nu} > 0$  wie in Gl. (3.45) angegeben.

**Bemerkung** Die Distribution  $(-i/(x - x_0 - i\varepsilon))^\mu$  ist (im distributionellen Sinne) positiv. Also ist  $(-1)^\mu (1/(x - x_0 - i\varepsilon))^{2\mu} = (-i/(x - x_0 - i\varepsilon))^{2\mu}$  positiv und die Funktionen  $F_{\mu\nu}$  bilden zusammen mit dem Skalarprodukt Gl. (3.33) ein *positives* Orthogonalsystem.

### 3.4.3. Orthogonalität in höheren Raumzeitdimensionen

Wir schränken uns nun auf skalare Felder ein. Das Integral

$$W(x_3, x_4) = \int d^Dx_1 d^Dx_2 \left[ \frac{(12)}{(13)(23)} \right]^\nu \frac{1}{|(12)|^D} \left[ \frac{(12)}{(14)(24)} \right]^{\nu'} \quad (3.47)$$

lässt sich mithilfe der vorhandenen Symmetrien vereinfachen.

Die Translationsinvarianz liefert mit  $x_1 \rightarrow x_1 + x_4, x_2 \rightarrow x_2 + x_4$ :

$$W(x_3, x_4) = \int d^Dx_1 d^Dx_2 \left[ \frac{(12)}{(x_1 - x_{34})^2 (x_2 - x_{34})^2} \right]^\nu \frac{1}{|(12)|^D} \left[ \frac{(12)}{x_1^2 x_2^2} \right]^{\nu'}. \quad (3.48)$$

Sei o.B.d.A.  $x_{34}^2 > 0$ . Sei weiterhin  $\Lambda$  die Lorentztransformation mit  $\Lambda^{-1}x_{34} = \sqrt{x_{34}^2} e_t$ . Dann führt die Transformation

$$x_1 \rightarrow \Lambda x_1, \quad x_2 \rightarrow \Lambda x_2 \quad (3.49)$$

---

direkt kontrolliert werden.

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

auf

$$(x_1 - x_{34})^2 \rightarrow (t_1 - \sqrt{x_{34}^2})^2 - \vec{x}_1^2 \quad (3.50)$$

$$(x_2 - x_{34})^2 \rightarrow (t_2 - \sqrt{x_{34}^2})^2 - \vec{x}_2^2. \quad (3.51)$$

Jetzt skalieren wir die Integrationsvariablen

$$x_1 \rightarrow \sqrt{x_{34}^2} x_1, \quad x_2 \rightarrow \sqrt{x_{34}^2} x_2 \quad (3.52)$$

und klammern die gemeinsamen Vorfaktoren aus:

$$W(x_3, x_4) = (x_{34}^2)^{-(\nu+\nu')} \int d^D x_1 d^D x_2 \left[ \frac{(12)}{((t_1 - 1 + i\varepsilon)^2 - \vec{x}_1^2)((t_2 - 1 + i\varepsilon)^2 - \vec{x}_2^2)} \right]^\nu \frac{1}{|(12)|^D} \left[ \frac{(12)}{x_1^2 x_2^2} \right]^{\nu'}. \quad (3.53)$$

$W(x_3, x_4)$  ist also eine Zweipunktfunktion mit Skalendimension  $\nu + \nu'$ . Ein ähnliches Argument, wie das, das zum Verschwinden von Zweipunktfunktionen von Feldern unterschiedlicher Skalendimension (Gl. (2.30)) führt, ergibt nun Folgendes: Sei  $T$  eine speziell-konforme Transformation.

Es gilt [1]

$$(T(x) - T(y))^2 = \frac{(x - y)^2}{N_x N_y} \quad (3.54)$$

mit

$$N_x = \left| \frac{dT(x)}{dx} \right|^{-1/D}. \quad (3.55)$$

Damit folgt aus Gl. (3.47)

$$W(T(x), T(y)) = N_x^{2\nu} N_y^{2\nu'} W(x, y) \quad (3.56)$$

und andererseits aus Gl. (3.53)

$$W(T(x), T(y)) = N_x^{\nu+\nu'} N_y^{\nu+\nu'} W(x, x). \quad (3.57)$$

Also gibt es drei Möglichkeiten, diese Gleichheit zu erfüllen: Entweder ist  $\nu = \nu'$  oder  $W \equiv 0$  oder das Integral in Gl. (3.53) divergiert.

Für  $D = 4$  rechnen wir dieses Integral explizit aus. Sei zunächst  $\nu + \nu' \geq 4$ . Wenn wir für die räumliche Integration Polarkoordinaten  $(r_j, \varphi_j, \vartheta_j)$  einführen und das  $\vec{x}_2$ -Koordinatensystem so drehen, dass  $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = r_1 r_2 \cos \vartheta_1$  ist, ist nur der Zähler in Gl. (3.53) von  $\vartheta_1$  abhängig, weitere Winkelabhängigkeiten gibt es nicht. Es gilt für  $\lambda = \nu + \nu' - 4$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi d\vartheta (t_{12}^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2)^\lambda \sin \vartheta \\ &= \int_0^\pi d\vartheta (t_{12}^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \vartheta)^\lambda \sin \vartheta \\ &= \frac{1}{(\lambda + 1)2r_1 r_2} \left[ (t_{12}^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1 r_2)^{\lambda+1} - (t_{12}^2 - r_1^2 - r_2^2 - 2r_1 r_2)^{\lambda+1} \right] \\ &= \frac{1}{(\lambda + 1)2r_1 r_2} \left[ (t_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2)^{\lambda+1} - (t_{12}^2 - (r_1 + r_2)^2)^{\lambda+1} \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty dr_1 (t_{12}^2 - (r_1 + r_2)^2)^{\lambda+1} r_1 \\ &= \int_{-\infty}^0 dr_1 (t_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2)^{\lambda+1} r_1, \end{aligned} \quad (3.59)$$

und demnach

$$\begin{aligned} (x_{34}^2)^{(\nu+\nu')} W(x_3, x_4) &= \frac{4\pi^2}{\lambda + 1} \int_{-\infty}^\infty dt_2 \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_0^\infty dr_2 \int_{-\infty}^\infty dr_1 \\ & \frac{r_1 r_2 (t_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2)^{\nu+\nu'-3}}{((t_1 - 1 + i\varepsilon)^2 - r_1^2)^\nu ((t_2 - 1 + i\varepsilon)^2 - r_2^2)^\nu ((t_1 - i\varepsilon)^2 - r_1^2)^{\nu'} ((t_2 - i\varepsilon)^2 - r_2^2)^{\nu'}}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

Der Integrand ist symmetrisch unter der Transformation  $r_2 \rightarrow -r_2$ , also

$$(x_{34}^2)^{(\nu+\nu')} W(x_3, x_4) = \frac{2\pi^2}{\lambda+1} \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dr_2 \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 \frac{r_1 r_2 (t_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2)^{\nu+\nu'-3}}{((t_1 - 1 + i\varepsilon)^2 - r_1^2)^\nu ((t_2 - 1 + i\varepsilon)^2 - r_2^2)^\nu ((t_1 - i\varepsilon)^2 - r_1^2)^{\nu'} ((t_2 - i\varepsilon)^2 - r_2^2)^{\nu'}}. \quad (3.61)$$

Da  $4r_1 r_2 = (x_1^+ - x_1^-)(x_2^+ - x_2^-)$  gilt, zerfällt das Integral in vier Summanden, die jeweils in chiralen Variablen in Integrale der Bauart

$$\int dudv \frac{u^\alpha v^\beta (u-v)^{\nu+\nu'-3}}{(u-1+i\varepsilon)^\nu (v-1+i\varepsilon)^\nu (u-i\varepsilon)^{\nu'} (v-i\varepsilon)^{\nu'}} \quad (3.62)$$

faktorisieren, wobei  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ . Sei wie oben o. B. d. A.  $\nu \geq \nu'$ . Im Fall  $\alpha = \beta = 1$  wird das  $v$ -Integral nach der  $u$ -Integration zwangsläufig regulär in einer Halbebene, verschwindet also. Zwei der vier Summanden des Gesamtintegrals sind folglich Null. Es bleibt der Teil mit  $-x_1^+ x_2^- - x_1^- x_2^+$  zu berechnen. Diese beiden Integrale verschwinden mit der gleichen Argumentation wie im zweidimensionalen Fall für  $\nu \neq \nu'$  und lassen sich im Fall  $\nu = \nu'$  leicht berechnen. Es ergibt sich für  $\alpha = 1, \beta = 0$  und für  $\alpha = 0, \beta = 1$

$$\int dudv \frac{u^\alpha v^\beta (u-v)^{2\nu-3}}{(u-1+i\varepsilon)^\nu (v-1+i\varepsilon)^\nu (u-i\varepsilon)^\nu (v-i\varepsilon)^\nu} = 4\pi^2 \frac{(-1)^{\nu-\beta} (2\nu-3)!}{(\nu-2)! (\nu-1)!}. \quad (3.63)$$

Da in beiden Summanden ein Faktor das Vorzeichen  $(-1)^\nu$  und der andere das Vorzeichen  $(-1)^{\nu-1}$  hat, ist das Integral insgesamt immer positiv.

Wir erhalten also

$$W(x_3, x_4) = \delta_{\nu\nu'} (x_{34}^2)^{-2\nu} 4\pi^6 \left[ \frac{(2\nu-3)!(2\nu-4)!}{(\nu-2)!^2 (\nu-1)!^2} \right]. \quad (3.64)$$

Es bleiben noch die Fälle mit  $\nu + \nu' < 4$ . Falls  $\nu = \nu' = 0$  divergiert das Integral wie im zweidimensionalen Fall. Die Fälle  $\nu = 0, \nu' = 1, 2$  lassen sich durch direkte Rechnung verifizieren. Der Fall  $\nu + \nu' = 3$  führt in Gl. (3.58) auf Logarithmen; wir



erhalten dann für  $\nu = 2$ ,  $\nu' = 1$  das Integral

$$\int du dv \frac{u^\alpha v^\beta \log(u - v - 2i\varepsilon)}{(u - 1 + i\varepsilon)^\nu (v - 1 + i\varepsilon)^\nu (u - i\varepsilon)^{\nu'} (v - i\varepsilon)^{\nu'}}. \quad (3.65)$$

Wir wählen den Zweig des Logarithmus, der holomorph außerhalb der negativen reellen Achse ist. Dann muss die  $u$ -Integration in der unteren und die  $v$ -Integration in der oberen Halbebene geschlossen werden. Das Integral ergibt also sofort 0, falls  $\beta = 1$ . Dies wird aber zumindest in einem der beiden Faktoren in jedem Summanden passieren.

Wir bemerken noch, dass für  $\nu = \nu' = 1$  in  $D = 4$  Dimensionen ebenfalls eine Divergenz vorliegt. Die Divergenz geschieht allerdings (anders als im Fall  $\nu = \nu' = 0$ ) erst im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Für eine genauere Untersuchung siehe A.2 im Anhang.

Obwohl wir in der Lage waren, die Orthogonalität in 4 Raumzeitdimensionen zu verifizieren, schränken wir uns im Folgenden auf den Fall  $D = 2$  ein, was mit signifikanten Vereinfachungen in den Rechnungen einhergeht.

### 3.4.4. Projektionen durch Integralkerne

Wir betrachten im Folgenden die  $2D$ -Partialwellenentwicklung einer skalaren Korrelationsfunktion  $\phi$  mit Skalendimension  $d$ . Sei  $\Pi_{\mu\nu}$  die Projektion auf den von  $\phi_{\mu\nu}|0\rangle$  aufgespannten Unterraum, wobei  $\phi_{\mu\nu}$  ein Feld mit Skalendimensionen  $(\mu, \nu)$  bezeichnet. Dann können wir  $\Pi_{\mu\nu}$  wie folgt darstellen:

$$\Pi_{\mu\nu} = c \int dz_1 dz_2 |\phi_{\mu\nu}(z_1)\rangle K_{\mu\nu}(z_1, z_2) \langle \phi_{\mu\nu}(z_2)|, \quad (3.66)$$

wobei der Integralkern durch

$$K_{\mu\nu}(z_1, z_2) = K_\mu(z_1^+, z_2^+) K_\nu(z_1^-, z_2^-) \quad (3.67)$$

$$K_\mu(x, y) = \Theta(x - y) (x - y - i\varepsilon)^{\mu-2} \quad (3.68)$$

gegeben ist und  $c$  eine Konstante ist<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Der genaue Wert von  $c$  ergibt sich im Beweis, ist aber für die weiteren Betrachtungen nicht relevant.

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{z_1 \rightarrow k} \left[ \int dz_2 \frac{K_\mu(z_1, z_2)}{(z_2 - y - i\varepsilon)^\mu} \right] (k) &= \mathcal{F}_{z_1 \rightarrow k} \left[ ((\Theta(\cdot)(\cdot - i\varepsilon)^{\mu-2}) * ((\cdot - y - i\varepsilon)^{-\mu}))(z_1) \right] (k) \\
&= \mathcal{F}_{z_1 \rightarrow k} \left[ (\Theta(z_1)(z_1 - i\varepsilon)^{\mu-2}) \right] (k) \mathcal{F}_{z_1 \rightarrow k} \left[ ((z_1 - y - i\varepsilon)^{-\mu}) \right] (k) \\
&= i \frac{(\mu-2)!}{(k-i\varepsilon)^{\mu-1}} e^{-iky} (-i\pi) \frac{(-i(k-i\varepsilon))^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \Theta(k) \\
&= -\pi (-i)^{\mu+1} \Theta(k) \frac{e^{-iky}}{\mu-1} \tag{3.69}
\end{aligned}$$

Wir haben  $\langle \phi_{\mu\nu} \phi_{\mu'\nu'} \rangle = 0$  falls  $(\mu, \nu) \neq (\mu', \nu')$ . Für  $\phi'$  mit Skalendimensionen  $(\mu, \nu)$  ist  $\langle \phi_{\mu\nu} \phi' \rangle = C \langle \phi_{\mu\nu} \phi \rangle$  mit  $C \in \mathbb{C}$  und es gilt

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} |\phi'(x)\rangle &= \int dz_1 dz_2 |\phi_{\mu\nu}(z_1)\rangle K_{\mu\nu}(z_1, z_2) \langle \phi_{\mu\nu}(z_2) \phi'(y) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int dz_1 |\phi_{\mu\nu}(z_1)\rangle \left( \int dz_2^+ K_\mu(z_1^+, z_2^+) \langle \phi_{\mu\nu}(z_2^+) \phi'(y^+) \rangle_+ \right) \\
&\quad \left( \int dz_2^- K_\mu(z_1^-, z_2^-) \langle \phi_{\mu\nu}(z_2^-) \phi'(y^-) \rangle_- \right) \\
&= C' \int dz_1 |\phi_{\mu\nu}(z_1)\rangle \left( \int dk^+ \Theta(k^+) e^{-ik^+ y^+} e^{ik^+ z_1^+} \right) \left( \int dk^- \Theta(k^-) e^{-ik^- y^-} e^{ik^- z_1^-} \right) \\
&= C' \int dz_1 \int dk'^+ \int dk'^- e^{i(z_1+k'^++z_1-k'^-)} |\hat{\phi}_{\mu\nu}(k'^+, k'^-)\rangle \\
&\quad \left( \int dk^+ \Theta(k^+) e^{-ik^+ y^+} e^{ik^+ z_1^+} \right) \left( \int dk^- \Theta(k^-) e^{-ik^- y^-} e^{ik^- z_1^-} \right) \\
&= C'' \int dk'^+ \int dk'^- |\hat{\phi}_{\mu\nu}(k'^+, k'^-)\rangle \\
&\quad \left( \int dk^+ \delta(k^+ + k'^+) \Theta(k^+) e^{-ik^+ y^+} \right) \left( \int dk^- \delta(k^+ + k'^+) \Theta(k^-) e^{-ik^- y^-} \right) \\
&= C'' \int dk'^+ \int dk'^- e^{ik'^+ y^+} e^{ik'^- y^-} |\hat{\phi}_{\mu\nu}(k'^+, k'^-)\rangle \\
&= C''' |\phi(y)\rangle. \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde ausgenutzt, dass der Träger der Fouriertransformierten von  $\phi_{\mu\nu}$  im Vorwärtslichtkegel liegt (siehe 2.3.2). Dies impliziert, dass der Träger der Fouriertransformierten in chiralen Variablen im positiven Quadranten lokalisiert ist und somit die  $\Theta$ -Funktionen absorbiert werden.  $\square$

Aus diesem Ergebnis folgt

$$\langle \dots \Pi_{\mu\nu} \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = c \int dz_1 dz_2 \langle \dots \phi(z_1) \phi_{\mu\nu}(z_2) \rangle K(z_1, z_2) \langle \phi_{\mu\nu}(z_2) \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \quad (3.71)$$

und wir haben die Möglichkeit, mit der Orthogonalität Gl. (3.46) einzelne Teile der Partialwellenentwicklung herauszuprojizieren:

$$\begin{aligned} & \int dx_1 dx_2 \left[ \frac{\langle \dots \Pi_{\mu\nu} \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle}{\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle} \right] \frac{1}{|(12)|^2} F_{\mu'\nu'}(x_1, x_2; x_5) \\ &= \int dz_1 dz_2 c \langle \dots \phi(z_1) \phi_{\mu\nu}(z_2) \rangle K_{\mu\nu}(z_1, z_2) \int dx_1 dx_2 \overline{F_{\mu\nu}(x_1, x_2; z_2)} \frac{1}{|(12)|^2} F_{\mu'\nu'}(x_1, x_2; x_5) \\ &= \int dz_1 dz_2 c \langle \dots \phi(z_1) \phi(z_2) \rangle K_{\mu\nu}(z_1, z_2) \delta_{\mu,\mu'} \delta_{\nu,\nu'} \frac{(-1)^{\mu+\nu} C_{\mu\nu}}{[(z_2^+ - x_5^+)]^{2\mu} [(z_2^- - x_5^-)]^{2\nu}} \\ &= (-1)^{\mu+\nu} C C_{\mu\nu} \delta_{\mu,\mu'} \delta_{\nu,\nu'} \langle \dots \phi_{\mu\nu}(x_5) \rangle, \end{aligned} \quad (3.72)$$

wobei im letzten Schritt die Projekteureigenschaft von  $K_{\mu\nu}$  benutzt wurde. Man beachte, dass mit unseren Definitionen

$$\frac{\langle \phi_{\mu\nu}(x_3) \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle}{\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle} \propto \overline{F_{\mu\nu}(x_1, x_2; x_3)} \quad (3.73)$$

gilt (s. Gl. (2.30), Gl. (2.31) und Gl. (3.30)). Die komplexe Konjugation ist eine Folge der Tatsache, dass  $(ij) = \overline{(ji)}$  gilt.

Somit haben wir die Möglichkeit, die Projektionen in Gl. (3.5) auch ohne die explizite Kenntnis der Partialwellen durchzuführen.

### 3.5. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von Vierpunktfunktionen mit identischen Skalendimensionen $d = 3$

Wir testen jetzt die eben entwickelte Integralmethode anhand einer Vierpunktfunktion der Form  $\langle \phi\phi\phi\phi \rangle$  von vier Feldern identischer Skalendimension  $d = 3$ .

Die möglichen Beiträge dieser Vierpunktfunktion müssen den Polschranken und Summenregeln gehorchen und sind einfach zu klassifizieren. Die gültigen Strukturen sind in Abb. 3.1 dargestellt. Wir haben die Strukturen in *bosonische* (keine  $\rho_{ij}$  im Zähler, also keine gestrichelten Linien in den Diagrammen) und *fermionische* (u. a. auch  $\rho_{ij}$  im Zähler bzw. gestrichelte Linien) unterteilt. Zusätzlich wurden die Strukturen nach ihrer Ordnung in  $\rho_{12}$  geordnet. Nach Gl. (3.8) haben wir damit die führenden Beiträge der Twist-0- bis Twist-3-Anteile identifiziert. Durch die Diagramme mit zwei durchgezogenen Linien zwischen 1 und 2 ist also möglicherweise die führende Ordnung eines Twist-2-Beitrags gegeben.<sup>3</sup>

Da Twist-2-Beiträge (nach einer Multiplikation mit  $(12)^2$ ) biharmonisch in  $x_1$  und  $x_2$  sein müssen, lassen sich die vollständigen Twist-2-Beiträge angeben. Die beiden bosonischen Strukturen sind bereits biharmonisch, die beiden fermionischen lassen sich durch Terme niedrigerer Ordnung separat biharmonisch ergänzen. Wir erhalten die vier Twist-2-Beiträge

$$W_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{(12)^2(34)^2(14)(23)} \quad (3.74)$$

$$W_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{(12)^2(34)^2(13)(24)} \quad (3.75)$$

$$W_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(13)(24) - (12)(34)}{(12)^2(34)^2(14)^2(23)^2} \quad (3.76)$$

$$W_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(14)(23) - (12)(34)}{(12)^2(34)^2(13)^2(24)^2} \quad (3.77)$$

---

<sup>3</sup>Die Existenz einer biharmonischen Ergänzung ist nicht a priori sichergestellt, in diesem Fall aber einfach zu überprüfen.

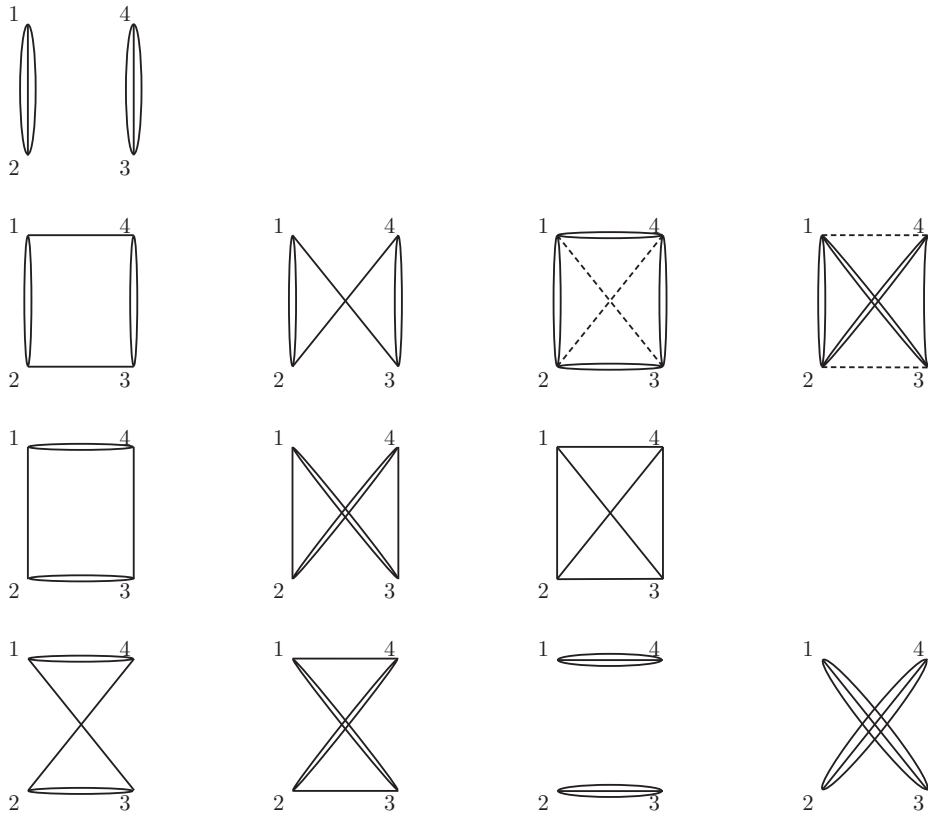


Abb. 3.1.: Einzelbeiträge zur Partialwellenentwicklung der Vierpunktfunktion, sortiert nach Twist in  $x_1, x_2$

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

wobei  $W_1$  und  $W_2$  die bosonischen und  $W_3$  und  $W_4$  die fermionischen Beiträge bezeichnen.

## 3.6. Partialwellenentwicklung der Twist-2-Anteile

Wir definieren als Abkürzung

$$W'_j(x_1, x_2, x_3, x_4) = (12)^3(34)^3 W_j(x_1, x_2, x_3, x_4). \quad (3.78)$$

Mithilfe der Definitionen Gl. (2.27) und Gl. (3.17) drücken wir die vier Strukturen durch Doppelverhältnisse und dann durch chirale Variablen aus. Wir erhalten

$$W'_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{s}{t} = \hat{u}\hat{v} \quad (3.79)$$

$$W'_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = s = uv \quad (3.80)$$

$$W'_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = st - s^2 = uv - u^2v - uv^2 \quad (3.81)$$

$$W'_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{s - s^2}{t^2} = \hat{u}\hat{v} - \hat{u}^2\hat{v} - \hat{u}\hat{v}^2. \quad (3.82)$$

Als nächstes berechnen wir mithilfe des in Abschnitt 3.3.3 beschriebenen Algorithmus die 4D-Partialwellenentwicklung der vier Strukturen. Das Ergebnis ist

$$B_{1l}^1 = \frac{l!^2}{(2l)!} r \quad (3.83)$$

$$B_{1l}^2 = (-1)^l \frac{l!^2}{(2l)!} \quad (3.84)$$

$$B_{1l}^3 = (-1)^{l+1} \frac{l!^2}{(2l)!} l(l+1) \quad (3.85)$$

$$B_{1l}^4 = \frac{l!^2}{(2l)!} l(l+1). \quad (3.86)$$

Es gibt sowohl Strukturen mit ausschließlich positiven Koeffizienten als auch Strukturen mit alternierenden Vorzeichen. Die symmetrischen und antisymmetrischen Kombinationen von  $B_{1l}^1$  und  $B_{1l}^2$  bzw.  $B_{1l}^3$  und  $B_{1l}^4$  sind allerdings positiv und müssen daher in der Partialwellenentwicklung auch mit positivem Vorfaktor auftreten.

Außerdem beobachtet man ein schnelleres Wachstum (oder besser: einen langsameren Abfall) der fermionischen Beiträge. Die Hoffnung ist, dass beide Beobachtungen weiterhin gültig sind, wenn wir die Theorie auf zwei Raumzeitdimensionen einschränken.

Wir benutzen Gl. (3.24), um diese Frage zu beantworten und finden

$$X_{\mu\nu}^1 = \frac{(\mu-1)!^2(\nu-1)!^2}{(2\mu-2)!(2\nu-2)!} \quad (3.87)$$

$$X_{\mu\nu}^2 = (-1)^{\mu+\nu} \frac{(\mu-1)!^2(\nu-1)!^2}{(2\mu-2)!(2\nu-2)!} \quad (3.88)$$

$$X_{\mu\nu}^3 = (-1)^{\mu+\nu} \frac{(\mu-1)!^2(\nu-1)!^2}{(2\mu-2)!(2\nu-2)!} (1 + \mu(\mu-1) + \nu(\nu-1)) \quad (3.89)$$

$$X_{\mu\nu}^4 = \frac{(\mu-1)!^2(\nu-1)!^2}{(2\mu-2)!(2\nu-2)!} (1 + \mu(\mu-1) + \nu(\nu-1)). \quad (3.90)$$

Die unterschiedlichen Abfalleigenschaften von bosonischen und fermionischen Strukturen bleiben also bei der Reduktion auf zwei Dimensionen erhalten.

Als nächstes benutzen wir die Vierpunkt-Strukturen, um die in Abschnitt 3.4.4 entwickelte Projektionsmethode mittels Integralkernen zu testen. Eine Skizze der jeweiligen Rechnungen findet sich in Anhang A.3.

Wir beginnen mit  $W_1$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int dx_3 dx_4 \frac{\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle}{\langle \phi(x_3)\phi(x_4) \rangle} \frac{1}{(34)^2} F_{\mu\nu}(x_3, x_4; x_5) \\ &= (-1)^{\mu+\nu} 4\pi^4 (12)^{-3} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+ x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^- x_{25}^-} \right]^\nu. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Wir benutzen die Normierung aus Gl. (3.46), um zumindest sämtliche Proportionalitätskonstanten bis auf eine universelle zu eliminieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\Pi_{\mu\nu}\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle \\ & \propto \frac{(\mu-1)!^2(\nu-1)!^2}{(2\mu-2)!(2\nu-2)!} (12)^{-3} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+ x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^- x_{25}^-} \right]^\nu \end{aligned} \quad (3.92)$$

Das Resultat für  $W_2$  lässt sich jetzt sofort angeben. Wir müssen in obigem Ergebnis

### 3. Partialwellenentwicklung und Positivität für 4-Punktfunktionen

lediglich  $x_3$  und  $x_4$  vertauschen:

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\Pi_{\mu\nu}\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle \\ & \propto (-1)^{\mu+\nu} \frac{(\mu-1)!^2(\nu-1)!^2}{(2\mu-2)!(2\nu-2)!} (12)^{-3} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^-x_{25}^-} \right]^\nu. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Als erstes Zwischenergebnis bleibt also festzuhalten, dass sämtliche Vorfaktoren aus Gl. (3.87) und Gl. (3.88) inklusive des alternierenden Vorzeichens von der Integralprojektionsmethode korrekt wiedergegeben werden.

Wir wenden uns nun den fermionischen Strukturen zu. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int dx_3 dx_4 \frac{W_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle} \frac{1}{(34)^2} F_{\mu\nu}(x_3, x_4; x_5) \\ & = (1 + \mu(\mu-1) + \nu(\nu-1)) 4\pi^4 (12)^{-3} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^-x_{25}^-} \right]^\nu. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\Pi_{\mu\nu}\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle \propto (-1)^{\mu+\nu} \frac{(\mu-1)!^2(\nu-1)!^2}{(2\mu-2)!(2\nu-2)!} \\ & \cdot (1 + \mu(\mu-1) + \nu(\nu-1)) (12)^{-3} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^-x_{25}^-} \right]^\nu. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Erneut erhalten wir das Ergebnis für  $W_4$  durch Vertauschen von  $x_3$  und  $x_4$ :

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\Pi_{\mu\nu}\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle \propto \\ & \frac{(\mu-1)!^2(\nu-1)!^2}{(2\mu-2)!(2\nu-2)!} (1 + \mu(\mu-1) + \nu(\nu-1)) (12)^{-3} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^-x_{25}^-} \right]^\nu. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Auch im fermionischen Fall produziert die Integralmethode also die korrekten Ergebnisse.



# 4. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen

Wir betrachten im Folgenden die Twist-2-Beiträge zur Partialwellenentwicklung von 6-Punktkorrelationsfunktionen  $\langle \phi\phi\phi\phi\phi\phi \rangle$  von identischen skalaren Feldern der Skalendimension 3. In [3] ist ein Beispiel einer 6-Punktstruktur gefunden worden, das nicht in einer trivialen Theorie (im Sinne von Abschnitt 2.5) auftreten kann. Da die direkte Berechnung der Partialwellenkoeffizienten im 6-Punktfall allerdings nicht zur Verfügung steht, liegen noch keine Ergebnisse über die Positivität einer 6-Punktfunktion vor, die diese Struktur enthält. Um die in Kap. 3 entwickelte Integralmethode dazu verwenden zu können, ein Auftreten solcher *exotischer* 6-Punktstrukturen in positiven Theorien auszuschließen, können die Partialwellenkoeffizienten zum Twist 2 verwendet werden. Zeigt sich wie in Abschnitt 3.6 bei den fermionischen Strukturen ein alternierendes Vorzeichen in diesen Koeffizienten und fallen diese zusätzlich mit wachsendem Spin langsamer ab als fermionische und bosonische Beiträge, so kann die exotische Struktur (zumindest allein) nicht Teil einer gültigen 6-Punktfunktion sein, da die Koeffizienten  $B_{\kappa l}$  für hinreichend große  $l$  nicht mehr positiv sein können (s. Gl. (3.7)). Wir werden in dieser Arbeit als ersten Schritt dieser Untersuchung alle möglichen Twist-2-Beiträge (unter gewissen Symmetrieeinschränkungen) klassifizieren.

## 4.1. Partialwellenentwicklung einer Sechspunktfunktion

Anders als in Gl. (3.5) können jetzt an mehr als einer Stelle Projektionsoperatoren  $\Pi_{\mu\nu}$  eingefügt werden (aufgrund der Irreduzibilität der von  $\phi(x)\Omega$  aufgespannten Unterdarstellung sind Projektionen nach dem ersten und vor dem letzten Feldoperator trivial). Eine Partialwelle ist jetzt von der Form

$$\langle \phi_1 \phi_2 \Pi_{\lambda_1} \phi_3 \Pi_{\lambda_2} \phi_4 \Pi_{\lambda_3} \phi_5 \phi_6 \rangle. \quad (4.1)$$

Da anders als im Vierpunktfall keine geschlossene Form der Partialwellen bekannt ist, verfolgen wir hier eine andere Strategie: Die Projektionen auf  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$  werden durch die Integralmethode durchgeführt. Die dann verbleibende Vierpunktfunktion kann dann mit bekannten Methoden untersucht werden. Wir werden allerdings in dieser Arbeit nicht mehr dazu kommen, die Integrationen durchzuführen, da zunächst einige Vorbereitungen nötig sind.

## 4.2. Bosonische, fermionische und exotische Strukturen

Anders als im Vierpunktfall unterscheiden wir die Beiträge jetzt noch zusätzlich bzgl. der *Doppelpoleigenschaft*. Wir nennen eine Struktur *exotisch in  $i$* , falls sie einen Doppelpol enthält, d. h. falls  $\mu_{ij} > 0$  für mehr als zwei  $j$  in Gl. (2.32) gilt<sup>1</sup>. Das Diagramm einer exotischen Struktur enthält also mindestens einen Vertex, von dem drei oder mehr durchgezogene Linien ausgehen.

Wir werden im Folgenden sämtliche Beiträge in der Partialwellenentwicklung der 6-Punktfunktionen identifizieren, die in  $x_1, x_2$  und in  $x_5, x_6$  sowohl vom Twist 2 als auch nicht-exotisch sind.

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnung Doppelpol statt Dreifachpol rührt von der Tatsache her, dass einige singuläre Faktoren häufig abgespalten werden, siehe z. B. Gl. (3.9).

### 4.3. Eine exotische Sechspunktstruktur

In [3] wird argumentiert, dass exotische Strukturen im Twist-2-Anteil der Partialwellenentwicklung einer 6-Punktfunktion ein hinreichendes Kriterium für Nichttrivialität der Theorie sind. Dies liegt daran, dass nach Abschnitt 2.5 die Korrelationsfunktionen verallgemeinerter freier Felder durch 2-Punktfunktionen dargestellt werden können, welche keine Doppelpole enthalten.

Die biharmonische Ergänzung eines exotischen Twist-2-Beitrags führender Ordnung ist eine transzendente Funktion bzw. eine unendliche Reihe. Die darin auftretenden Einzelstrukturen müssen nicht mehr den Polschranken und Summenregeln genügen.

Ebenfalls in [3] wurde ein Beispiel für eine 6-Punktstruktur gegeben, die die Differenzialgleichung Gl. (3.13) sowohl in  $x_1, x_2$  als auch in  $x_5, x_6$  löst und damit führender Term eines Twist-2-Beitrages in diesen beiden Koordinatenpaaren ist. Sie lautet (nach Multiplikation mit  $(12)^2(56)^2$ )

$$u_{ex.}(x_1, \dots, x_6) = \frac{[(15)(26)(34) - 2(15)(23)(46) - 2(15)(24)(36)]_{[1,2][5,6]}}{(13)(14)(23)(24)(35)(45)(36)(46)}, \quad (4.2)$$

wobei  $[i, j]$  für Antisymmetrisierung in  $x_i$  und  $x_j$  steht.

Die vollständige Struktur ist mit den Doppelverhältnissen

$$s = \frac{(12)(34)}{(13)(24)}, \quad t = \frac{(14)(23)}{(13)(24)} \quad (4.3)$$

$$s' = \frac{(56)(34)}{(35)(46)}, \quad t' = \frac{(45)(36)}{(35)(46)} \quad (4.4)$$

gegeben durch

$$v_{ex.}(x_1, \dots, x_6) = u_{ex.}(x_1, \dots, x_6)g(s, t)g(s', t') + 2 \frac{[(13)(24)(35)(46)]_{[1,2][5,6]}}{(13)(14)(23)(24)(34)(35)(45)(36)(46)}(1 - g(s, t)g(s', t')), \quad (4.5)$$

#### 4. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen

wobei  $g$  durch

$$\begin{aligned} g(s, t) &= \int_0^1 dx \left[ \frac{1 - (u + v - uv)x}{(1 - ux)(1 - vx)} \right]^2 \\ &= 1 + \sum_{a,b} \frac{2ab}{(a+b)((a+b)^2 - 1)} u^a v^b \quad \text{für } |u|, |v| < 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

gegeben ist [14].  $u$  und  $v$  bezeichnen dabei die chiralen Variablen zu  $s$  und  $t$ , wie in Gl. (3.17) definiert. Diese Funktion ist tetraharmonisch in  $x_1, x_2, x_5, x_6$ .

Diese exotische Sechspunktstruktur genügt den Polschranken und Summenregeln. Völlig unklar ist jedoch, ob exotische Strukturen und insbesondere das obige Beispiel der Forderung nach Positivität der Wightmanfunktionen Gl. (2.19) genügen. Die im Vierpunktfall bei der Positivitätsanalyse sehr erfolgreiche Partialwellenentwicklung steht in ihrer klassischen Form hier nicht zur Verfügung. Die explizite Form der Partialwellen ist für Sechspunktfunktionen nicht einmal für  $D = 2$  Raumzeitdimensionen bekannt und es ist im Hinblick auf die Komplexität der zugehörigen Differenzialgleichungen unwahrscheinlich, dass die Partialwellen mit dieser Strategie bestimmt werden können. [13]

Vielversprechender ist der in Kapitel 3 entwickelte Ansatz über Integralprojektionen, der im Vierpunktfall zumindest in  $D = 2$  die korrekten Ergebnisse produziert hat und aller Voraussicht nach auch in höheren Dimensionen funktioniert, falls die auftretenden Integrale handhabbar bleiben. Im Sechspunktfall kann dieser Ansatz möglicherweise dazu verwendet werden, die Korrelationsfunktion schrittweise auf eine Vierpunktfunktion zu reduzieren, um auf diese dann übliche Positivitätsanalysen anwenden zu können.

Um mithilfe der beschriebenen Methode die Wachstumseigenschaften der zu den bosonischen, fermionischen und exotischen Einzelbeiträgen gehörenden Partialwellenkoeffizienten zu untersuchen, müssen diese allerdings zunächst klassifiziert werden. Nur auf diese Weise kann z. B. ausgeschlossen werden, dass alternierende Vorzeichen in den Koeffizienten einer exotischen Struktur durch Beiträge einer nicht-exotischen ausgeglichen werden.

## 4.4. Führende Twist-2-Beiträge

Als ersten Schritt geben wir eine komplette Klassifizierung von gültigen 6-Punktstrukturen an, die sowohl in  $x_1, x_2$  als auch in  $x_5, x_6$  führende Terme eines Twist-2-Beitrags sind, d. h. wir identifizieren sämtliche Strukturen, die zusätzlich zu Pol-schranken und Summenregeln noch der Bedingung  $\mu_{12} = \mu_{56} = 2$  gehorchen. Zusätzlich schließen wir alle Strukturen aus, für die  $\mu_{ij} = 3$  für  $i, j \neq 3, 4$  ist. Diese gehören zur trivialen Darstellung  $\lambda = (0, 0, 0)$ . Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, dass Strukturen mit  $\mu_{12} = 3$  zum Twist 0 in  $x_1, x_2$  gehören und damit zur trivialen Darstellung  $\lambda = (0, 0, 0)$  und die Felder für nicht-lichtartige Abstände kommutieren. Dann kann aber einer der Vertizes ( $ij$ ) so permutiert werden, dass  $i, j = 1, 2$  oder  $i, j = 5, 6$  gilt.

Die durchzuführende Klassifikation ist zwar noch von Hand möglich, wir entscheiden uns allerdings - auch im Hinblick auf spätere Untersuchungen - für eine automatisierte Behandlung dieses Problems mithilfe eines Computerprogramms. Zu diesem Zweck durchmustert ein rekursiver Algorithmus sämtliche denkbaren Strukturen. Das Problem ist in dem Sinne in Dreiecksgestalt, dass wenn die Struktur in  $x_j, j \leq k$  den Summenregeln und Polschranken gehorcht ( $\mu_{ij} \leq 3$  für  $i, j \leq k$ ), dann wird sie das auch weiterhin tun, wenn im Folgenden nur noch  $\mu_{ij}$  mit  $i, j > k$  verändert werden. Diese Beobachtung ermöglicht einen einfachen und hinreichend effizienten Algorithmus, der alle gültigen Strukturen für eine gegebene (niedrige) Skalendimension mit  $n$  Vertizes identifiziert.

Es ergeben sich vier bosonische und 22 fermionische Strukturen, die den Summenregeln und Polschranken gehorchen (Abb. 4.1 und 4.2), zuzüglich Permutationen der Vertizes ( $1 \leftrightarrow 2$ ), ( $3 \leftrightarrow 4$ ), ( $5 \leftrightarrow 6$ ) sowie ( $12 \leftrightarrow 56$ ).

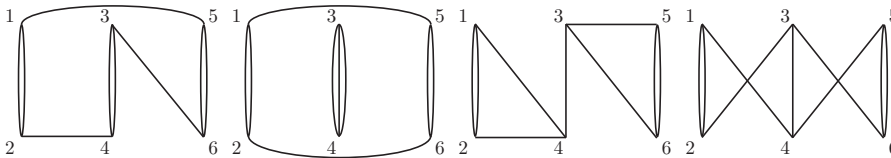


Abb. 4.1.: Bosonische Einzelbeiträge zur Partialwellenentwicklung der Sechspunkt-funktion, Twist 2 in  $x_1, x_2$  und  $x_5, x_6$

4. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen

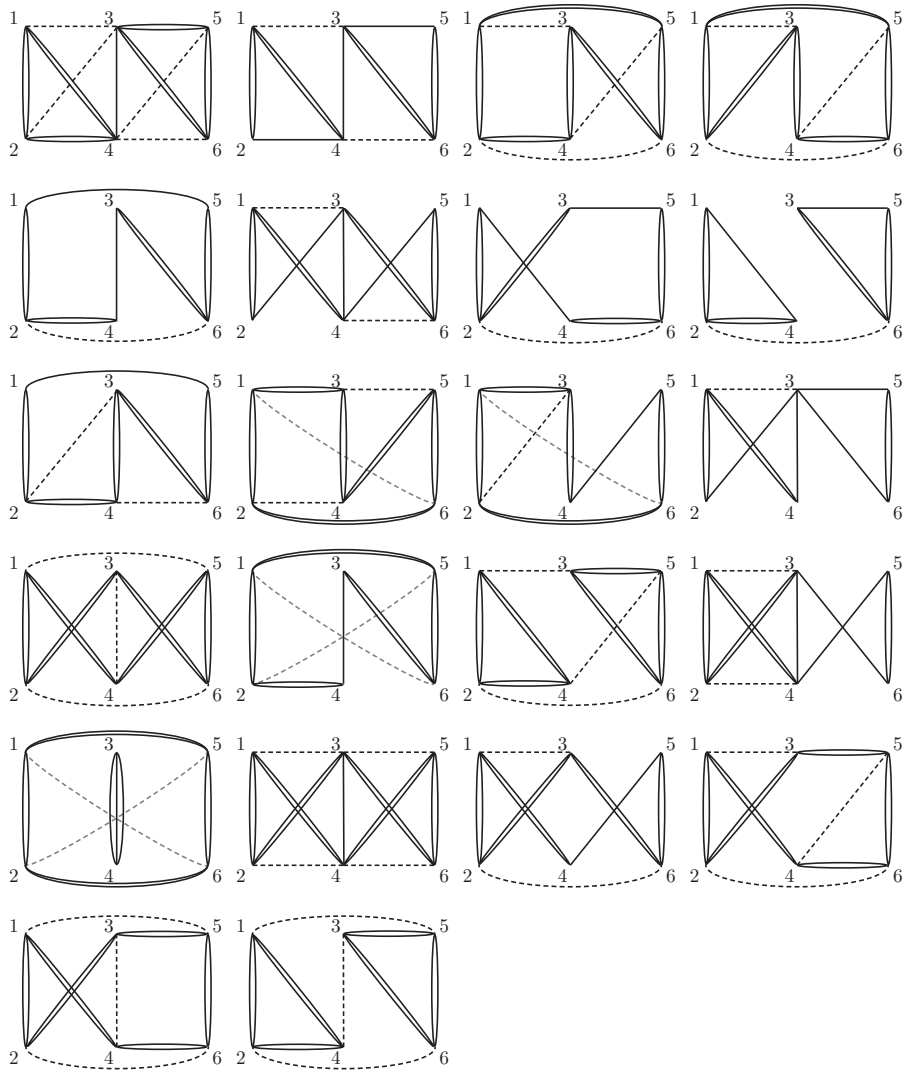


Abb. 4.2.: Fermionische Einzelbeiträge zur Partialwellenentwicklung der Sechspunktfunktion, Twist 2 in  $x_1, x_2$  und  $x_5, x_6$

## 4.5. Einschränkungen durch die Biharmonizitätsbedingung

Wenn ab hier von der Harmonizität einer Struktur die Rede ist, so ist damit immer die Struktur gemeint, die nach Multiplikation mit  $(12)^2(56)^2$  entsteht.

Wir suchen Beiträge, die sowohl in  $x_1, x_2$  als auch in  $x_5, x_6$  Twist 2 sind, das heisst tetraharmonische rationale Funktionen  $U$  mit

$$\square_1 U(x_1, \dots, x_6) = \square_2 U(x_1, \dots, x_6) = \square_5 U(x_1, \dots, x_6) = \square_6 U(x_1, \dots, x_6) = 0. \quad (4.7)$$

Die vier bosonischen Strukturen sind bereits tetraharmonisch und können daher einzeln im Twist-2-Anteil einer Partialwellenentwicklung auftreten. Die fermionischen Beiträge sind nicht automatisch tetraharmonisch, können aber unter Umständen mit Termen niedrigerer Ordnung tetraharmonisch ergänzt werden.

Betrachtet man auch Strukturen als unabhängig, die sich durch solche Permutationen wie oben angegeben unterscheiden, ergeben sich 172 fermionische Strukturen. Damit ein führender Twist-2-Term biharmonisch ergänzt werden kann, muss er im Kern des Differenzialoperator Gl. (3.13) liegen.

Eine effiziente Möglichkeit, den Kern dieses Operators zu bestimmen, ist der Einsatz von Matlab zusammen mit einfacher linearer Algebra. Ein Anwenden des Differenzialoperators auf eine der 172 Strukturen ergibt (im Allgemeinen) eine Summe aus mehreren Termen. Aus den Einzeltermen, die durch Anwenden des Operators auf alle 172 Strukturen entstanden sind, erhalten wir durch Aussortieren aller Wiederholungen eine Menge von 189 linear unabhängigen (Teil-) Strukturen, die wir als Bildraumbasis verwenden können. Jetzt können wir den Differenzialoperator als Matrix darstellen und Matlab verwenden, um seinen Kern zu bestimmen.

Auf diese Weise sind wir prinzipiell in der Lage, die Linearkombinationen von Strukturen innerhalb der 172 fermionischen Strukturen zu identifizieren, die sich in  $x_1, x_2$  bzw. in  $x_5, x_6$  jeweils biharmonisch ergänzen lassen. Der Schnitt dieser beiden Räume ergibt dann die Strukturen, die sich tetraharmonisch in  $x_1, x_2, x_5, x_6$  ergänzen lassen. Hier treten allerdings zwei Probleme auf:

#### 4. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen

A	=	$\frac{(13)(25)(46)}{(12)^2(16)^2(24)^2(34)^2(35)^2(56)^2}$	M	=	$\frac{(13)(25)}{(12)^2(14)^2(23)^2(35)^2(46)(56)^2}$
B	=	$\frac{(13)(25)(46)}{(12)^2(23)^2(34)^2(45)^2(56)^2}$	N	=	$\frac{(25)}{(12)^2(14)(24)^2(35)^2(36)(56)^2}$
C	=	$\frac{(13)(26)(45)}{(12)^2(16)^2(24)^2(34)^2(35)^2(56)^2}$	O	=	$\frac{(25)}{(12)^2(14)(23)^2(36)(45)^2(56)^2}$
D	=	$\frac{(15)(23)(46)}{(12)^2(16)^2(24)^2(34)^2(35)^2(56)^2}$	P	=	$\frac{(25)(36)}{(12)^2(14)(23)^2(35)^2(46)^2(56)^2}$
E	=	$\frac{(15)(36)}{(12)^2(16)^2(24)(34)^2(35)^2(56)^2}$	Q	=	$\frac{(15)(26)(34)}{(12)^2(14)^2(24)^2(35)^2(36)^2(56)^2}$
F	=	$\frac{(15)(26)}{(12)^2(16)^2(24)^2(34)(35)^2(56)^2}$	R	=	$\frac{(15)(26)(34)}{(12)^2(14)^2(23)^2(36)^2(45)^2(56)^2}$
G	=	$\frac{(23)(45)}{(12)^2(16)(24)^2(34)^2(35)^2(56)^2}$	S	=	$\frac{(15)(26)(34)}{(12)^2(14)^2(23)^2(35)^2(46)^2(56)^2}$
H	=	$\frac{(25)}{(12)^2(16)(24)^2(34)(35)^2(56)^2}$	T	=	$\frac{(13)(26)}{(12)^2(16)^2(23)^2(34)^2(45)(56)^2}$
I	=	$\frac{(13)(46)}{(12)^2(14)^2(24)(35)(36)^2(56)^2}$	U	=	$\frac{(15)(26)}{(12)^2(16)^2(25)^2(34)^3(56)^2}$
J	=	$\frac{(13)(46)}{(12)^2(14)^2(23)(34)(36)^2(45)(56)^2}$	V	=	$\frac{(13)(24)(35)(46)}{(12)^2(14)^2(23)^2(34)(36)^2(45)^2(56)^2}$
K	=	$\frac{(13)(25)(46)}{(12)^2(14)^2(24)^2(35)^2(36)^2(56)^2}$	W	=	$\frac{(13)(24)}{(12)^2(14)^2(23)^2(34)(36)(45)(56)^2}$
L	=	$\frac{(13)(25)(46)}{(12)^2(14)^2(23)^2(36)^2(45)^2(56)^2}$	X	=	$\frac{(35)(46)}{(12)^2(14)(23)(34)(36)^2(45)^2(56)^2}$

Tab. 4.1.: Bezeichnungen der 24 unabhängigen Twist-2-Strukturen führender Ordnung nach (Anti-)Symmetrisierung

Die erste Schwierigkeit ist die große Menge an zu untersuchenden Strukturen. Da wir die Berechnungen nicht von Hand ausführen und die Dimensionalität der Aufgabe noch kein Problem für einen Computer darstellt, könnten wir diesen Aspekt zunächst ignorieren. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und da die tetraharmonischen Ergänzungen selbst nicht automatisiert durchgeführt werden, schränken wir uns aber auf Strukturen ein, die (zumindest teilweise) vom gleichen Symmetrietyp sind wie die exotische Sechspunktfunktion, zu deren Untersuchung diese Klassifizierung benutzt werden soll.

Nach Symmetrisieren der 172 fermionischen Strukturen in  $x_3$  und  $x_4$  sowie Antisymmetrisieren in  $x_1$  und  $x_2$  bzw. in  $x_5$  und  $x_6$  bleiben 24 unabhängige übrig (siehe Abb. 4.3 und Tab. 4.1, wobei die (Anti-)Symmetrisierung jeweils nicht mit angegeben wurde), das Problem ist also nun deutlich handhabbarer.

Das zweite Problem ist, dass wir nur Strukturen identifiziert haben, für die  $\mu_{12} = 2$  und  $\mu_{56} = 2$  gilt. Ein Twist-2-Beitrag in  $x_1, x_2$  führender Ordnung, auf den sich die



#### 4.5. Einschränkungen durch die Biharmonizitätsbedingung

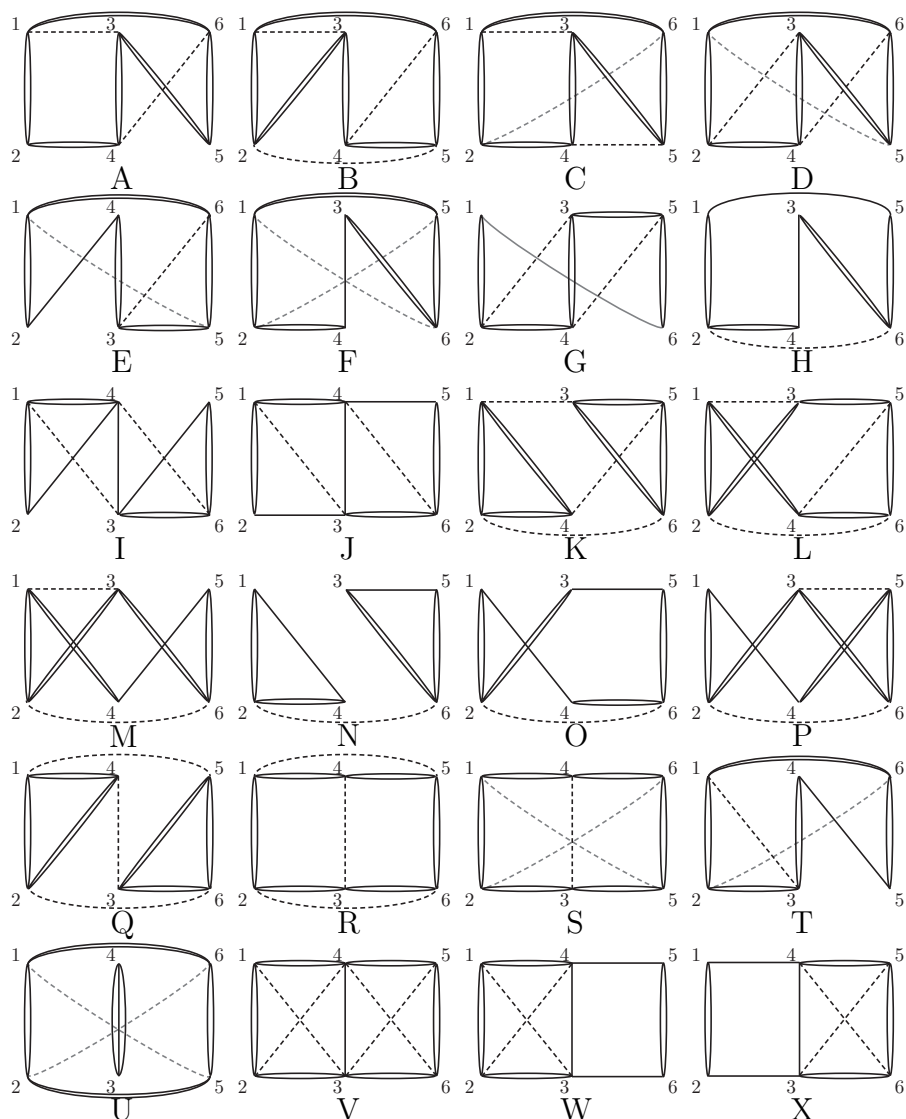


Abb. 4.3.: Bezeichnungen der 24 unabhängigen Twist-2-Strukturen führender Ordnung nach (Anti-) Symmetrisierung

Aussage bzgl. des Differentialoperators  $E_1D_2 - E_2D_1$  bezieht, kann allerdings auch Terme mit  $\mu_{56} \neq 2$  enthalten. Analoges gilt für den Operator  $E_5D_6 - E_6D_5$  und Beiträge mit Twist 2 in  $x_5, x_6$ .

Dieses Problem umgehen wir, indem wir den Kern von  $E_1D_2 - E_2D_1$  nur bis auf Summanden bestimmen, für die  $\mu_{56} \neq 0$  gilt, und den Kern von  $E_5D_6 - E_6D_5$  nur bis auf Summanden, für die analog  $\mu_{12} \neq 0$  ist. Dann funktioniert folgendes Argument:

#### 4. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen

Sei  $T(x_1, \dots, x_6)$  tetraharmonisch. Wir zerlegen  $T$

$$T = A + (12)B + (56)C + D,$$

wobei  $A$  weder (12) noch (56),  $B$  kein (56) und  $C$  kein (12) enthält.  $D$  bezeichnet den Rest. Dann ist  $A + (56)C$  führender Ordnung für Twist 2 in  $x_1, x_2$ , d. h. es gilt

$$(E_1D_2 - E_2D_1)(A + (56)C) = 0.$$

Da der Differenzialoperator  $\mu_{56}$  nur verringern kann, gilt  $\mu_{56} < 0$  für  $(E_1D_2 - E_2D_1)A$ . Wir schreiben  $(E_1D_2 - E_2D_1)A \sim (56)$ . Analog folgt  $(E_5D_6 - E_6D_5)A \sim (12)$ . Wenn wir also nach Anwendung von  $E_1D_2 - E_2D_1$  alle Terme mit  $\mu_{56} < 0$  ignorieren (Terme mit  $\mu_{56} > 0$  kann es ohnehin nicht geben), erhalten wir als notwendige Bedingung dafür, dass sich eine gegebene Struktur aus der Menge der 24 fermionischen Beiträge tetraharmonisch ergänzen lässt, dass sie im Schnitt der Kerne von  $E_1D_2 - E_2D_1$  und  $E_5D_6 - E_6D_5$  liegt.

Wir nummerieren die 24 (anti-)symmetrisierten Strukturen wie in Abb. 4.3 bzw. in Tab. 4.1 angegeben mit den Buchstaben A bis X. Beide Kerne sind 15-dimensional. Der Kern von  $E_1D_2 - E_2D_1$  modulo (56) wird von den Basisvektoren  $\{v_j\}$  aufgespannt, der Kern von  $E_5D_6 - E_6D_5$  modulo (12) von den Basisvektoren  $\{w_j\}$ , wie in der folgenden Tabelle angegeben:

#### 4.5. Einschränkungen durch die Biharmonizitätsbedingung

$$\begin{array}{ll}
 v_1 = A - B - C & w_1 = A - B - D \\
 v_2 = E & w_2 = E \\
 v_3 = D - F & w_3 = C - F \\
 v_4 = G - H & w_4 = G - H \\
 v_5 = I - N & w_5 = J + M \\
 v_6 = J - O & w_6 = I - N \\
 v_7 = J + P & w_7 = J - O \\
 v_8 = 2K + Q & w_8 = 2K + Q \\
 v_9 = 2M + R & w_9 = 2P + R \\
 v_{10} = 2L + S & w_{10} = 2L + S \\
 v_{11} = T & w_{11} = T \\
 v_{12} = U & w_{12} = U \\
 v_{13} = V & w_{13} = V \\
 v_{14} = W & w_{14} = W \\
 v_{15} = X & w_{15} = X
 \end{array}$$

Der Schnitt dieser beiden Untervektorräume lässt sich leicht berechnen. Er ist 13-dimensional und wird von der Basis  $\{u_j\}$  aufgespannt:

$$\begin{array}{ll}
 u_1 = A - B - C - D + F & u_8 = R + 2P + 2L + 2J \\
 u_2 = E & u_9 = T \\
 u_3 = G - H & u_{10} = U \\
 u_4 = I - N & u_{11} = V \\
 u_5 = J - O & u_{12} = W \\
 u_6 = 2K + Q & u_{13} = X \\
 u_7 = 2L + S &
 \end{array}$$

Die Bedingung, im Schnitt der beiden Kerne zu liegen, ist a priori nur notwendig für die Existenz einer tetraharmonischen Ergänzung. Es ist allerdings gelungen, für alle 13 potenziellen Kombinationen tetraharmonische Ergänzungen zu finden [14].

#### 4. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen

Die kompletten tetraharmonischen Twist-2-Beiträge lauten

$$U_1 = A - B - C - D + F + A \frac{(12)(36)(45) + (14)(23)(56) - (12)(34)(56)}{(13)(25)(46)}$$

$$U_2 = E \left( 1 - \frac{(13)(56)}{(15)(36)} \right)$$

$$U_3 = G - H$$

$$U_4 = I - N$$

$$U_5 = J - O$$

$$U_6 = 2K + Q$$

$$U_7 = 2L + S$$

$$U_8 = R + 2P + 2L + 2J + R \frac{(12)(36)(45) + (14)(23)(56)}{(15)(26)(34)}$$

$$U_9 = T \left( 1 - \frac{(12)(36)}{(13)(26)} \right)$$

$$U_{10} = U \left( 1 - \frac{(12)(56)}{(15)(26)} \right)$$

$$\begin{aligned} U_{11} &= V \left( 1 - \frac{(12)(34)}{(13)(24)} - \frac{(34)(56)}{(46)(35)} - \frac{(12)(34)^2(56)}{(13)(24)(35)(46)} \right) \\ &= V \left( 1 - \frac{(12)(34)}{(13)(24)} \right) \left( 1 - \frac{(34)(56)}{(35)(46)} \right) \end{aligned}$$

$$U_{12} = W \left( 1 - \frac{(12)(34)}{(13)(24)} \right)$$

$$U_{13} = X \left( 1 - \frac{(34)(56)}{(35)(46)} \right).$$

In den Abb. 4.4, 4.5 und 4.6 sind die zugehörigen Rechnungen noch einmal mit Diagrammen dargestellt. Abweichende Vorzeichen und fehlende Vorfaktoren sind auf die (Anti-) Symmetrisierung zurückzuführen.

4.5. Einschränkungen durch die Biharmonizitätsbedingung

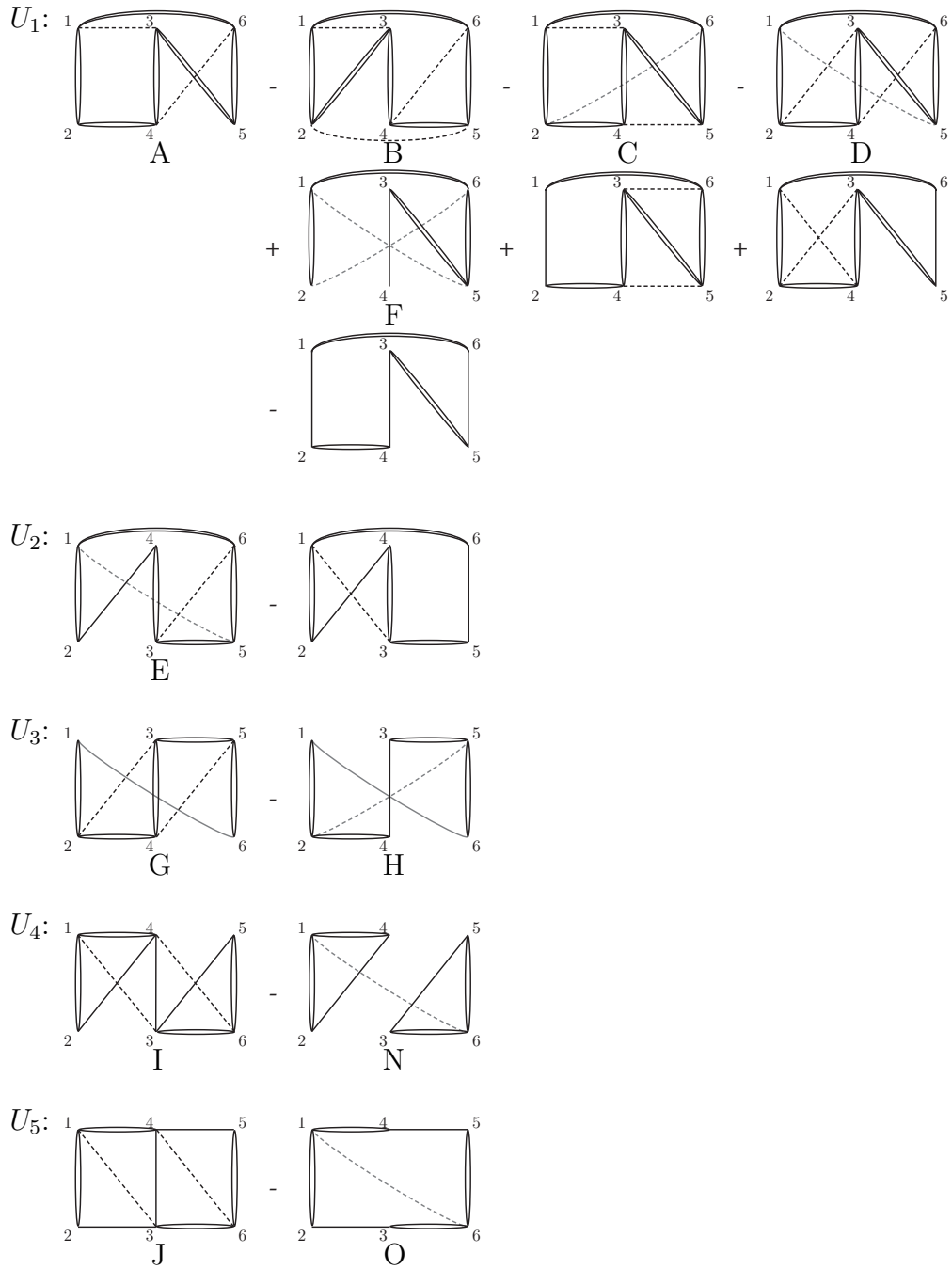


Abb. 4.4.: Tetraharmonische Kombinationen in Diagrammschreibweise,  $U_1$  bis  $U_5$

4. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen

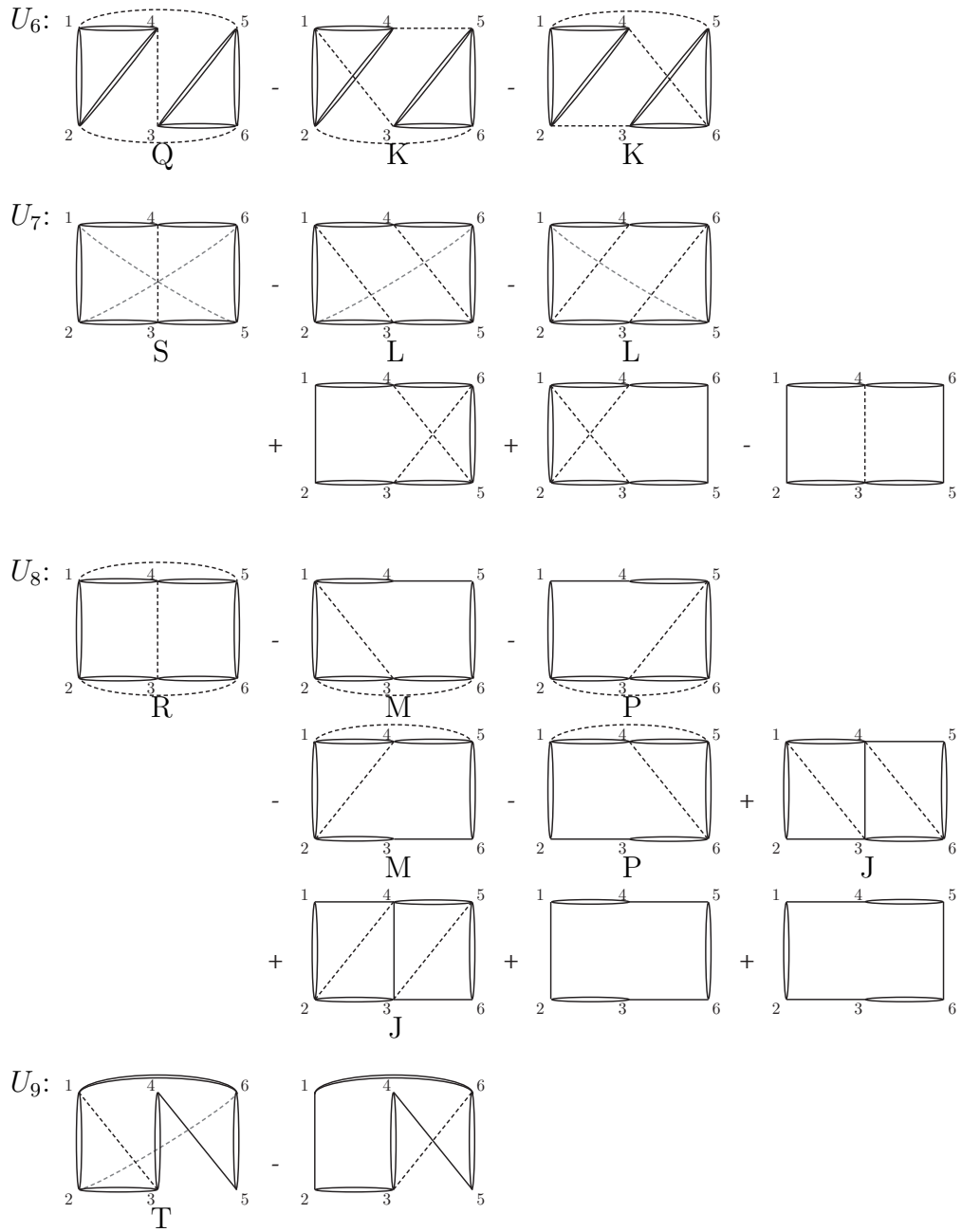


Abb. 4.5.: Tetraharmonische Kombinationen in Diagrammschreibweise,  $U_6$  bis  $U_9$

4.5. Einschränkungen durch die Biharmonizitätsbedingung

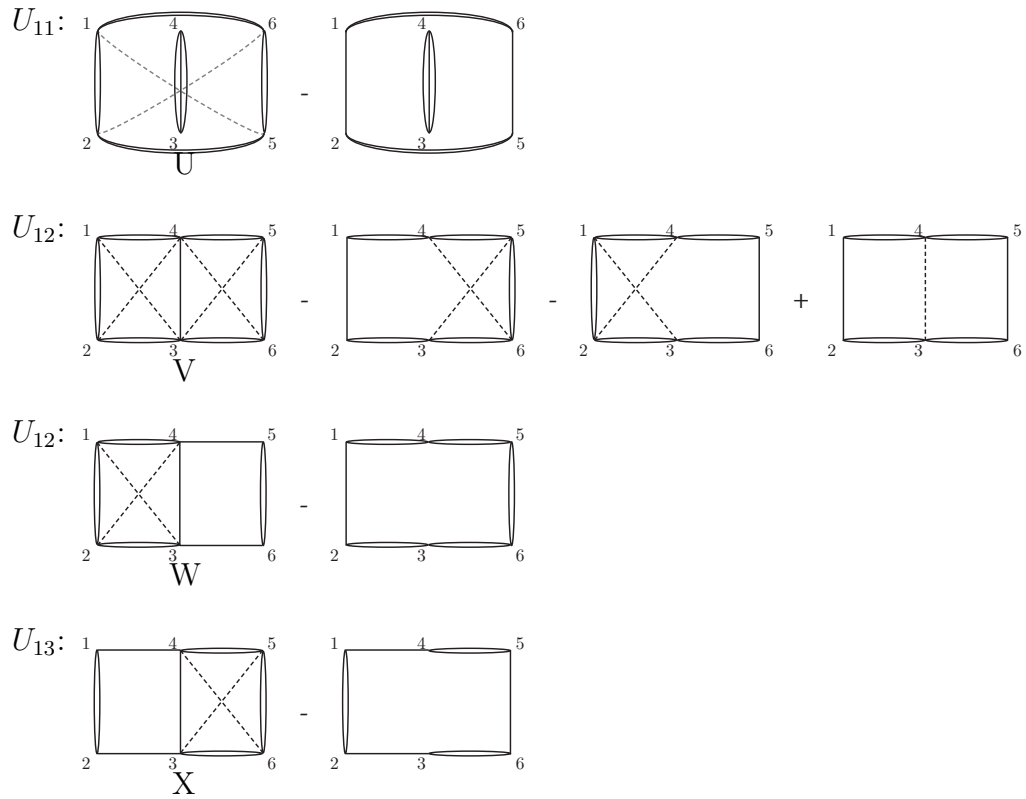


Abb. 4.6.: Tetraharmonische Kombinationen in Diagrammschreibweise,  $U_{10}$  bis  $U_{13}$

#### 4. Klassifikation der Twist-2-Beiträge von 6-Punktfunktionen



## 5. Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 3 wurde eine Methode entwickelt und getestet, die das Bestimmen von Partialwellenkoeffizienten durch Integrationen ermöglicht. Zu diesem Zweck wurde in  $D = 2$  Raumzeitdimensionen die Orthogonalität sämtlicher möglicher Partialwellenbeiträge verifiziert und die Normierungskonstanten bestimmt. In  $D = 4$  Raumzeitdimensionen wurde die gleiche Aufgabe nur für skalare Felder durchgeführt und erwies sich bereits hier als deutlich aufwendiger als im zweidimensionalen Fall. Tensorfelder wurden nicht betrachtet; es kann daher auch keine Abschätzung der zugehörigen Komplexität gegeben werden.

Die Partialwellenkoeffizienten einer Vierpunktfunktion von Feldern mit identischer Skalendimension  $d = 3$  wurden sowohl für  $D = 2$  als auch für  $D = 4$  mithilfe bekannter Algorithmen berechnet. In beiden Fällen treten sowohl Beiträge mit konstantem als auch solche mit alternierendem Vorzeichen auf. Ebenfalls zeigte sich in beiden Fällen ein unterschiedliches Abfallverhalten von bosonischen und fermionischen Strukturen mit wachsendem Spin  $l$  ( $D = 4$ ) bzw. wachsenden rechts- und linksseitigen Skalendimensionen  $\mu$  und  $\nu$  ( $D = 2$ ), wobei die fermionischen um einen Faktor  $l^2$  bzw.  $\mu^2$  langsamer abfallen als die bosonischen.

Die  $2D$ -Partialwellenkoeffizienten werden durch die Integrationsmethode exakt wiedergegeben. In  $D = 4$  wurde die Integrationsmethode aus Zeitgründen nicht mehr getestet; es gibt jedoch keinen Grund, warum sie dort fehlschlagen sollte. Die auftretenden Integrale (vgl. z. B. Gl. (A.10) für  $D = 2$ ) ergeben 3-Punktfunktionen mit Skalendimensionen  $d_1 = d_2 = 1$  und  $d_3 = 2\mu$  (siehe Gl. (2.31)). Beim Nachrechnen der Orthogonalität skalarer Felder für  $D = 4$  hat sich gezeigt, dass die Rechnungen sich bedeutend vereinfachen, wenn man den Integranden auf die „Standardform“ bringt, die von der Form der 2-Punktfunktion vorgegeben ist (s. Abschnitt 3.4.3). Wahrscheinlich ist ein ähnlicher Ansatz in Bezug auf die Form der 3-Punktfunktion in diesem Fall ebenfalls hilfreich.

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 4 wurde mit Vorbereitungen begonnen, um die in Kapitel 3 entwickelten Methoden auf die Untersuchung einer exotischen Sechspunktstruktur anwenden zu können. Zu diesem Zweck wurden sämtliche möglichen Twist-2-Beiträge in einer (momentan nicht direkt zugänglichen) Partialwellenentwicklung einer Sechspunktfunktion von sechs Feldern identischer Skalendimension  $d = 3$  angegeben, die einigen durch die exotische Struktur gegebenen Symmetrieeigenschaften genügen. Für diese Aufgabe wurde ein Computerprogramm entwickelt, das sowohl gültige Strukturen bzgl. Summenregeln und Polschranken durchmustern kann als auch in der Lage ist, die für die Charakterisierung von Twist-2-Beiträgen benutzten Differentialoperatoren Gl. (3.11) und Gl. (3.13) in Matrixform zu berechnen. Neben dem unmittelbaren Nutzen der Klassifikation dient dieses Vorgehen zugleich als ein Proof-of-Concept, dass im Rahmen eines starken axiomatischen Frameworks, in dem viele Klassifikationsprobleme sich auf endliche oder zumindest abzählbare Probleme reduzieren, der Einsatz von Computerprogrammen eine wertvolle Ergänzung zu rein manuellen Methoden darstellt.

Die resultierenden Twist-2-Strukturen sind Kombinationen von mehreren Einzeltermen. Die zugehörigen Projektionsintegrale sind für einige dieser Diagramme mit Sicherheit deutlich aufwendiger zu berechnen als im Vierpunktfall. Die kritischste offene Frage in diesem Zusammenhang ist wahrscheinlich, ob die Integrale, die zur exotischen Struktur Gl. (4.5) gehören, in geschlossener Form ausführbar sind. Hierfür müssen nach Gl. (4.6) Integrale der Form

$$\int dx_1 dx_2 dx_5 dx_6 u^a v^b W(x_1, \dots, x_6) \frac{1}{|(12)|^2} F_{\mu\nu}(x_1, x_2; z) \quad (5.1)$$

für beliebige  $a, b, \mu, \nu \in \mathbb{N}$  berechnet werden.  $W$  bezeichnet hierbei eine der rationalen Funktionen von Lorentzabstandsquadraten in Gl. (4.5).

In Anbetracht der Komplexität und Menge der bevorstehenden Berechnungen wäre die Möglichkeit zu begrüßen, solche Berechnungen von Computer-Algebra-Systemen ausführen zu lassen. Deren Standardmethoden zur Berechnung von Residuenintegralen sind dafür allerdings höchstwahrscheinlich nicht ausreichend.

# A. Anhang

## A.1. Entwicklungsformeln von hypergeometrischen Funktionen

Es gilt [5]:

$$u^m = \sum_{\mu=m}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-m}}{(\mu-m)!} \frac{((m)_{\mu-m})^2}{(\mu+m-1)_{\mu-m}} G_{\mu}(u) \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{u}^m = \left( \frac{u}{1-u} \right)^m = \sum_{\mu=m}^{\infty} \frac{1}{(\mu-m)!} \frac{((m)_{\mu-m})^2}{(\mu+m-1)_{\mu-m}} G_{\mu}(u). \quad (\text{A.2})$$

$(m)_{\mu}$  bezeichnet hierbei *Pochhammersymbole*:

$$(m)_{\mu} := \frac{\Gamma(m+\mu)}{\Gamma(m)} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{(m+\mu-1)!}{(m-1)!}, \quad \text{falls } m, \mu \text{ ganzzahlig, } m > 0, m+\mu > 0. \quad (\text{A.4})$$

Insbesondere gilt

$$(1)_{\mu} = \mu!, \quad (\text{A.5})$$

falls  $\mu$  eine nicht-negative ganze Zahl ist.

## A.2. Divergenz des Skalarprodukts im Fall $D = 4$ ,

$$\nu = \nu' = 1$$

Wir betrachten zunächst die beiden Summanden, in denen in einem Faktor  $\alpha = \beta = 1$  auftritt. In diesem Fall ergibt sich das Integral

$$\int dudv \frac{1}{(u-1+i\varepsilon)(v-1+i\varepsilon)(u-v+2i\varepsilon)(u-v-2i\varepsilon)}. \quad (\text{A.6})$$

Es gibt für  $u$  nur einen Pol in der oberen Halbebene:  $u = v + 2i\varepsilon$ . Nach Ausführen des  $u$ -Integrals (mit Integrationsweg in der oberen Halbebene) ist das  $v$ -Integral regulär in der oberen Halbebene, verschwindet also.

Es bleiben die Summanden, die Faktoren mit  $\alpha = 1, \beta = 0$  bzw.  $\alpha = 0, \beta = 1$  enthalten. Wir betrachten den ersten Fall (der zweite ist analog mit  $u \leftrightarrow v$ ):

$$\int dudv \frac{1}{(u-1+i\varepsilon)(v-1+i\varepsilon)(u-v+2i\varepsilon)(u-v-2i\varepsilon)(v-i\varepsilon)}. \quad (\text{A.7})$$

Wir führen wie oben die  $u$ -Integration um  $u = v + 2i\varepsilon$  aus und erhalten:

$$\begin{aligned} 2\pi i \int dv \frac{1}{4i\varepsilon(v-1+i\varepsilon)^2(v-i\varepsilon)} \\ = \frac{-4\pi^2}{4i\varepsilon} = i \frac{\pi^2}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Es liegt also eine  $1/\varepsilon$ -Divergenz in jedem der beiden Faktoren vor. Das Gesamtintegral verhält sich somit wie  $1/\varepsilon^2$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## A.3. Integrale über Vierpunktfunktionen

Wir skizzieren die Rechnungen zu Gl. (3.91) und Gl. (3.94).

Die Summanden beider Integrale faktorisieren. Gl. (3.91) führt dann auf das Integral

$$\begin{aligned}
& \int dudv \frac{(u-v)^{\mu-1}}{(u-t_2+x_2+i\varepsilon)(v-t_1+x_1+i\varepsilon)(u-t_5+x_5-i\varepsilon)^\mu(v-t_5+x_5-i\varepsilon)^\mu} \\
&= -2\pi i \int dv \frac{(t_2-x_1-v)^{\mu-1}}{(v-t_1+x_1+i\varepsilon)(t_{25}-x_{25}-i\varepsilon)^\mu(v-t_5+x_5-i\varepsilon)^\mu} \\
&= -4\pi^2 \frac{(t_{21}-x_{21})^{\mu-1}}{(t_{25}-x_{25}-i\varepsilon)^\mu(t_{15}-x_{15}-i\varepsilon)^\mu}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Das Gesamtintegral ist also

$$\int dx_3 dx_4 \frac{1}{(14)(23)} \frac{F_{\mu\nu}(x_3, x_4; x_5)}{(34)} = (-1)^{\mu+\nu} 4\pi^4 (12)^{-1} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+ x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^- x_{25}^-} \right]^\nu. \tag{A.10}$$

Von Gl. (3.94) berechnen wir zunächst das hintere Integral. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \int dudv \frac{(u-v)^\mu}{(u-t_1+x_1+i\varepsilon)^2(v-t_2+x_2+i\varepsilon)^2(u-t_5+x_5-i\varepsilon)^\mu(v-t_5+x_5-i\varepsilon)^\mu} \\
&= -2\pi i \mu \int dv \frac{(t_1-x_3-v)^\mu}{(v-t_2+x_4+i\varepsilon)^2(t_{15}-x_{35}-i\varepsilon)^\mu(v-t_5+x_5-i\varepsilon)^\mu} \\
&\quad \cdot \left[ \frac{1}{(t_1-x_1-v)} - \frac{1}{(v-t_5+x_5-i\varepsilon)} \right] \\
&= 4\pi^2 (\mu(\mu-1)) \frac{(t_{12}-x_{12})^{\mu-1}}{(t_{25}-x_{25}-i\varepsilon)^\mu(t_{15}-x_{15}-i\varepsilon)^\mu}, \tag{A.11}
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt einige Cancellations im zweiten Residuum nicht extra aufgeführt wurden. Der zweite Summand des Gesamtintegrals ergibt also

$$\begin{aligned}
& \int dx_3 dx_4 \frac{1}{(14)^2(23)^2} \frac{F_{\mu\nu}(x_3, x_4; x_5)}{(34)} \\
&= (\mu(\mu-1))(\nu(\nu-1)) 4\pi^4 (12)^{-1} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+ x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^- x_{25}^-} \right]^\nu. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Der erste Summand in Gl. (3.94) führt auf

$$\int dudv \frac{(u-t_1+x_1)(v-t_2+x_2)(u-v)^{\mu-1}}{(v-t_1+x_1+i\varepsilon)^2(u-t_2+x_2+i\varepsilon)^2(u-t_5+x_5-i\varepsilon)^\mu(v-t_5+x_5-i\varepsilon)^\mu}.$$

## A. Anhang

Das zweite Residuum ist dann

$$\begin{aligned}
\text{res} &= \frac{(t_{12} - x_{12})^{\mu-2}}{(t_{15} - x_{15})^\mu (t_{25} - x_{25})^\mu} \left[ (\mu - 1)^2 (t_{12} - x_{12}) - \mu(\mu - 1) \frac{(t_{12} - x_{12})^2}{(t_{15} - x_{15})} \right. \\
&\quad \left. + \mu(t_{12} - x_{12}) + \mu^2 \frac{(t_{12} - x_{12})^2}{(t_{25} - x_{25})} - \mu \frac{(t_{12} - x_{12})^2}{(t_{15} - x_{15})} - \mu^2 \frac{(t_{12} - x_{12})^3}{(t_{15} - x_{15})(t_{25} - x_{25})} \right] \\
&= \frac{(t_{12} - x_{12})^{\mu-1}}{(t_{15} - x_{15})^\mu (t_{25} - x_{25})^\mu} (\mu^2 - \mu + 1). \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int dx_3 dx_4 \frac{(13)(24)}{(14)^2 (23)^2} \frac{F_{\mu\nu}(x_3, x_4; x_5)}{(34)} \\
&= (\mu^2 - \mu + 1)(\nu^2 - \nu + 1) 4\pi^4 (12)^{-1} \left[ \frac{x_{12}^+}{x_{15}^+ x_{25}^+} \right]^\mu \left[ \frac{x_{12}^-}{x_{15}^- x_{25}^-} \right]^\nu. \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Der Vorfaktor des Gesamtintegrals ist also proportional zu

$$(\mu^2 - \mu + 1)(\nu^2 - \nu + 1) - (\mu(\mu - 1))(\nu(\nu - 1)) = (1 + \mu(\mu - 1) + \nu(\nu - 1)). \tag{A.15}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] P. DiFrancesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal Field Theory*. Springer, 1996.
- [2] N. Nikolov and I. Todorov. Rationality of Conformally Invariant Local Correlation Functions on Compactified Minkowski Space. *Commun. Math. Phys.*, 218: 417–436, 2001.
- [3] K.H. Rehren, N. M. Nikolov, and I. Todorov. Pole structure and biharmonic fields in conformal QFT in four dimensions. *Lie Theory and Its Applications in Physics VII*, 2008.
- [4] F. A. Dolan and H. Osborn. Conformal four point functions and the operator product expansion. *Nucl. Phys. B*, 599:459–496, 2001.
- [5] N.M. Nikolov, K.H. Rehren, and I.T. Todorov. Partial wave expansion and Wightman positivity in conformal field theory. *Nucl. Phys. B*, 722:266–296, 2005.
- [6] M. Schottenloher. *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*. Springer, 2008.
- [7] S. Ferrara, R. Gatto, and A.F. Grillo. *Conformal Algebra in Space-Time*, volume 67 of *Springer Tracts in Modern Physics*. Springer, 1973.
- [8] M. Lüscher and G. Mack. All Unitary Ray Representations of the Conformal Group  $SU(2,2)$  with Positive Energy. *Commun. Math. Phys.*, 55:1–28, 1977.
- [9] R. F. Streater and A. S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and all that*. W. A. Benjamin, INC., 1964.
- [10] M. Lüscher and G. Mack. Global conformal invariance in quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, 41:203–234, 1971.

- [11] N.M. Nikolov, Ya.S. Stanev, and I.T. Todorov. Globally conformal invariant gauge field theory with rational correlation functions. *Nucl. Phys. B*, 670:373–400, 2003.
- [12] M. Bischoff, D. Meise, K.H. Rehren, and I. Wagner. Conformal quantum field theory in various dimensions. *Bulg. J. Phys.*, 36:170–185, 2009.
- [13] D. Meise. Relations between 2D and 4D Conformal Quantum Field Theory. Master’s thesis, Universität Göttingen, 2010.
- [14] K.H. Rehren. Private Mitteilung.



# Danksagung

In erster Linie danke ich Herrn Prof. Karl-Henning Rehren für die Möglichkeit, meine Bachelorarbeit über ein sehr umfangreiches und interessantes Thema zu schreiben sowie für seine große Geduld beim Beantworten meiner Fragen.

Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Detlev Buchholz für die Übernahme des Koreferendariats.

Mein Dank gilt weiterhin Nils-Arne Pohlandt für seine große Hilfe beim Erstellen der Abbildungen in dieser Arbeit, die dem abstrakten Stoff zumindest etwas Anschaulichkeit verleihen, und Helene Dallmann für ihre kompetente Kurzeinführung in Matlab, die mir viel Programmierarbeit erspart hat.

Zum Schluss danke ich Helene Dallmann und Danilo Paulikat für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

**Erklärung** nach §13(8) der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.

Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nichtbestanden Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 14. Juli 2011

(Dirk Rathlev)