

Bachelorarbeit

Kombinatorik von Feynman-Graphen und verallgemeinerten Feynman-Graphen

Combinatorics of Feynman Graphs and Generalized Feynman Graphs

angefertigt von

Achim Randelhoff

aus Bad Urach

am Institut für Theoretische Physik

Bearbeitungszeit: 17. Mai 2010 bis 22. August 2010

Erstgutachter/in: Prof. Dr. Karl-Henning Rehren

Zweitgutachter/in: Prof. Dr. Dorothea Bahns

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Nutzen	1
1.2	Eingrenzung und Aufbau der Arbeit	3
2	Gewöhnliche Zustände	5
2.1	Gell-Mann-Low-Formel	5
2.2	Wick-Theorem	6
2.3	Einfache Folgen für gewöhnliche Zustände	7
2.4	Erzeugende Funktionale und zusammenhängende Greensche Funktionen	8
3	Allgemeine Zustände	11
3.1	Kumulanten eines Zustandes	11
3.2	Erzeugendes Funktional im allgemeinen Fall	12
3.3	Graphische Darstellung	13
3.4	Verallgemeinerte Feynman-Regeln	14
3.5	Perturbative nichttriviale Zustände	14
4	Ein-Teilchen-Irreduzibilität	15
4.1	Gewöhnliche Zustände	15
4.1.1	Definition der 1PI-Graphen	15
4.1.2	Struktur der Legendre-Transformation	15
4.2	1PI-Definitionen für allgemeine Zustände	17
4.2.1	„Quasifreie“ Definition	17
4.2.2	„n-Beine“-Definition	17
4.2.3	Alternativen	18
4.3	Zur kombinatorischen Renormierung verallgemeinerter Feynman-Graphen	20

5	Hopf-algebraische Methoden	23
5.1	Symmetrische Hopf-Algebren	23
5.2	Die Algebra der Feldoperatoren	24
5.2.1	Koeins und Zustände einer QFT	24
5.2.2	Koprodukte und Faltung	25
5.2.3	Derivationen und Baumgraphen	27
5.3	Motivation und Interpretation des Hopf-Formalismus'	28
6	Nichtlokale Potentiale	31
6.1	Höhere Kumulanten als formale Wechselwirkungsterme	31
6.2	Verallgemeinerung der Gell-Mann-Low-Formel	32
6.3	Legendre-Transformation im allgemeinen Fall	35
7	Eine Verallgemeinerung der Legendre-Transformation	37
7.1	Resummationstheorem für bipartite Baumgraphen	37
7.2	Konstruktion der verallgemeinerten Legendre-Transformation . . .	38
7.2.1	Rekonstruktion des Standardfalls	40
7.2.2	Fixierung der unbekanntenen Variablen	41
7.3	Berechnung der ersten vier Greens-Funktionen in 1PI-Einheiten . .	43
8	Hopf-algebraische Strukturaussagen	45
8.1	Strukturtheorem für allgemeine Graphen	45
8.2	Bezug zur Legendre-Transformation	48
9	Zusammenfassung und Diskussion	53

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Strukturierung und Zerlegung von Feynman-Graphen, wie sie bei der Berechnung von n -Punkt-Funktionen einer (Euklidischen) Quantenfeldtheorie (QFT) auftreten, in elementarere Einheiten, sogenannte *ein-Teilchen-irreduzible Graphen* (1PI-Graphen).

1.1 Motivation und Nutzen

Mittels Gell-Mann-Low-Formel wird die störungstheoretische Auswertung der Greens-Funktionen einer QFT mit wechselwirkenden Feldern auf die Berechnung formaler Potenzreihen von Vakuumerwartungswerten freier Felder zurückgeführt. Diese Vakuumerwartungswerte von Feldoperatorprodukten lassen sich mit dem Wickschen Theorem sinnvoll und anschaulich als *Feynman-Graphen* darstellen, die nach topologischen Kriterien sortiert werden können. Ein erster Schritt, die Zahl der zur Kenntnis einer Theorie nötigen Graphen zu reduzieren, ist die Beobachtung, dass sich jeder Graph aus zusammenhängenden Graphen zusammensetzen lässt.

Die direkte Auswertung der Greenschen Funktionen einer Theorie wird allerdings dadurch erschwert, dass auch nach Beseitigung von leicht handzuhabenden Divergenzen wie Selbstkontraktionen von Wechselwirkungsvertices (durch Normalordnung der Wechselwirkungsterme) und unverbundenen Vakuumgraphen (durch Normalisierung in der Gell-Mann-Low-Formel) immer noch Renormierung erforderlich ist, deren Kombinatorik ungleich schwieriger ist und die außerhalb des Rahmens dieser Arbeit liegt.

Eine weitere wichtige Beobachtung ist, dass Divergenzen, die der Renormierung bedürfen, dort auftreten, wo die Zahl der in einen Teilgraphen einlaufenden Impulse nicht ausreicht, durch Impulserhaltung an den Wechselwirkungsvertices sämtliche inneren Impulse zu bestimmen. Gesucht ist also die Zerlegung eines zusammenhängenden Graphen in einen Baumgraphen, so dass die *Vertexfunktio-*

1 Einleitung

nen Γ^n solche und nur solche Beiträge in sich vereinen, die Schleifen enthalten – die Kenntnis dieser Vertexfunktionen, und wie sie renormiert werden, wäre dann bereits ausreichend für die Renormierung der Theorie. Der Wert eines Graphen wie in Abbildung 1.1 würde sich dann nach der für die Fourier-Transformation \mathcal{F} gültigen Formel

$$\mathcal{F}[f * g] \sim \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

im Impulsraum im Wesentlichen als das Produkt der beteiligten Vertexfunktionen ergeben. Da im Experiment gerade die Impulse die relevanten Größen sind, liegt hierin der Nutzen einer solchen Zerlegung.

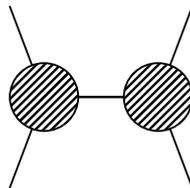


Abb. 1.1: Beispiel für einen Baumgraphen mit den Vertexfunktionen Γ^n , hier als grau schraffierte Kreise dargestellt

Im Standardfall, das heißt im Vakuum $|0\rangle$ der freien Theorie, ist diese Struktur störungstheoretisch gut verstanden. Falls allerdings ein beliebiger Zustand $|\psi\rangle$ vorliegt, lassen sich die freien Greens-Funktionen nicht mehr als Summen von Produkten von einfachen Feynman-Propagatoren schreiben, sondern es müssen höhere elementare, soll heißen nicht weiter zerlegbare, Korrelationen der Felder in Betracht gezogen werden.

Anwendungsgebiete solcher allgemeiner gefassten Zustände liegen einerseits in Bereichen der Festkörperphysik, wie der Begriff der „stark korrelierten Materialien“ bereits andeutet. Andererseits treten auch in der Quantenfeldtheorie Zustände auf, die nicht sinnvoll als Vakuum einer freien Theorie geschrieben werden können. Ein Beispiel hierfür ist der nichtperturbative Grundzustand der Quantenchromodynamik mit einer Vielzahl an nichtverschwindenden Kondensaten. Kleine Störungen um das QCD-Vakuum müssen daher ebenfalls hohe Korrelationen berücksichtigen.

1.2 Eingrenzung und Aufbau der Arbeit

Das Ziel der Arbeit ist es, die Struktur der Greenschen Funktionen in einem so allgemein wie möglich (und nötig, vgl. Abschnitt 3.2) gehaltenen Zustand zu untersuchen (genannt ein *allgemeiner* oder *nichttrivialer Zustand*), d. h. einen Zustand, der bereits für das freie Feld nicht durch ein Pfadintegral bezüglich eines Gaußschen Maßes darzustellen ist. Zustände hingegen, die perturbativ durch eine lokale, polynomiale Wechselwirkung im Vakuum der freien Theorie ausgewertet werden können, sollen als *gewöhnlich* bezeichnet werden.

Nach der Wiederholung einiger grundlegender Tatsachen über QFT im Vakuum in Kapitel 2 wird in Kapitel 3 in die Problematik eingeführt. Kapitel 4 stellt das Konzept von 1PI-Graphen vor und vergleicht verschiedene Möglichkeiten, die Definition von Ein-Teilchen-Irreduzibilität auf nichttriviale Zustände zu verallgemeinern. Kapitel 5 führt eine kompakte Handhabung der Kombinatorik von Feynman-Diagrammen mittels Hopf-Algebren ein und in den Kapiteln 6, 7 und 8 werden die im Rahmen der Arbeit untersuchten Ideen und die Resultate vorgestellt.

1 Einleitung

2 Gewöhnliche Zustände

Zur späteren Referenz und Klärung der Terminologie und Begrifflichkeiten werden nun einige wenige grundlegende Tatsachen über gewöhnliche Zustände wiederholt.

2.1 Gell-Mann-Low-Formel

Seien die Eigenzustände $|\psi_0\rangle$ einer QFT mit einem Hamilton-Operator H_0 bekannt und die einer QFT mit H gesucht, wobei $H - H_0 = V$ in einem gewissen Sinne „klein“ sein soll. Um die Eigenzustände von H aus denen von H_0 zu erhalten,¹ schaltet man die Störung adiabatisch (d. h. in einem geeigneten Sinne langsam) ein:

$$H(t) = H_0 + e^{-\epsilon|t|} V$$

In einem späteren limes $\epsilon \searrow 0$ gilt dann tatsächlich für physikalisch sinnvolle Hamilton-Funktionen die sogenannte Gell-Mann-Low-Formel

$$|\psi\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U(0)|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|U(0)|\psi_0\rangle} \quad (2.1)$$

mit dem Zeitentwicklungsoperator U für das Wechselwirkungspotential V , im Wechselwirkungsbild $H_{int}(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} e^{-\epsilon|t|}$, definiert via

$$i \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H_{int}(t) U(t) \text{ mit } U(-\infty) = 1.$$

Wichtig ist, dass mittels der Gell-Mann-Low-Formel das wechselwirkende durch das freie Feld ersetzt wird, was eine Zerlegung in Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren und damit eine Normalordnung ermöglicht.

¹Abriss an [3] orientiert

2.2 Wick-Theorem

Die Standardform des *Wickschen Theorems* erlaubt die Zerlegung eines zeitgeordneten Feldoperatorprodukts $T[\phi \cdots \phi]$ in eine Summe von Produkten von Wick-Kontraktionen

$$\overline{\phi_1(x)\phi_2(y)} = \langle 0|T[\phi_1(x)\phi_2(y)]|0\rangle =: G_2^{\text{frei}}(x, y),$$

wobei $|0\rangle$ das Vakuum der freien Theorie ist, und normalgeordneten² Feldoperatorprodukten

$$\langle \phi_1 \cdots \phi_k \rangle .$$

Eine Zerlegung nimmt dann beispielsweise folgende Form an:

$$\begin{aligned} T[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] &= \sum_{\text{Kontraktionen}} \langle \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \rangle \\ &= \langle \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \rangle \\ &\quad + \langle \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 \rangle + \langle \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 \rangle + \dots \\ &\quad + \langle \overline{\phi_1\phi_2}\overline{\phi_3\phi_4} \rangle \\ &\quad + \text{Permutationen und weitere Kontraktionen} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dabei kann es im Falle eines Potentials $H_{\text{int}}(\phi) = \int dx \phi(x)^v$ vorkommen, dass $\phi(x_i) = \phi(x_{j \neq i})$ für einige der i, j , dass also Feldoperatoren zusammenfallen. In der Kombinatorik des Wickschen Theorems werden diese zwar als verschiedene Feldoperatoren behandelt, eigentlich stellt ein Term wie $[\phi(x)]^v$ aber den Integralkern einer Distribution *in einer einzigen Variablen* x dar.

Trotzdem sind Selbstkontraktionen eines Wechselwirkungsverteck nicht erwünscht, da ein solcher Term $G_2^{\text{frei}}(x-x) = G_2^{\text{frei}}(0)$ immer divergiert. Eine Kontraktion *innerhalb* eines Produkts von Feldoperatoren lässt sich immer vermeiden, indem man sie normalordnet: Wegen der Definition

$$\langle \phi_1\phi_2 \rangle = T[\phi_1\phi_2] - \langle 0|T[\phi_1\phi_2]|0\rangle, \tag{2.3}$$

²Bei größeren Termen wird die übliche Notation $\phi \cdots \phi$: schnell unübersichtlich; außerdem ist sie typographisch unvorteilhaft. Der Autor hat sich daher und um die Ähnlichkeit zu einer Klammer herzustellen, entschlossen, Normalordnung durchgehend als $\langle \phi \cdots \phi \rangle$ zu notieren.

die sich rekursiv auch auf größere Feldoperatorprodukte anwenden lässt [8], werden die betroffenen Kontraktionen letztlich wieder subtrahiert und fallen heraus.

2.3 Einfache Folgen für gewöhnliche Zustände

Ein gewöhnlicher Zustand $\rho_0 = \langle 0| \cdot |0\rangle$ zeichnet sich nun genau dadurch aus, dass normalgeordnete Produkt von ihm auf Null abgebildet werden: Vernichter-Anteile annihilieren $|0\rangle$ (von links) und Erzeugeranteile vernichten $\langle 0|$ (von rechts), d. h.

$$\rho_0(\langle \phi \cdots \phi \rangle) \equiv 0.$$

Insbesondere heißt das, dass in Gleichung (2.2) nur die Terme ohne normalgeordnete Operatorprodukte überleben: Sämtliche kombinatorisch möglichen Wick-Kontraktionen. Eine direkte Folge daraus ist, dass Greens-Funktionen einer ungeraden Anzahl an Punkten in einer freien Theorie immer verschwinden. Ein typischer Term einer Störungsreihe wäre beispielsweise (siehe Abbildung 2.1)

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left(T \left[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \langle \int dx_5 \phi^4(x_5) \rangle \right] \right) \\ &= 4! \int dx_5 G_2^{\text{frei}}(x_1, x_5) G_2^{\text{frei}}(x_2, x_5) G_2^{\text{frei}}(x_3, x_5) G_2^{\text{frei}}(x_4, x_5). \end{aligned}$$

G_2^{frei} ist hierbei die freie 2-Punkt-Funktion. Man beachte, dass die anderen Terme hier verschwinden, weil sonst zwangsläufig Selbstkontraktionen am Wechselwirkungsvertex auftreten müssten, die von der Normalordnung aber eliminiert werden.

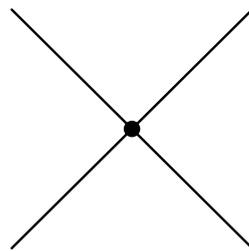


Abb. 2.1: Beispiel für den elementaren Wechselwirkungsvertex der ϕ^4 -Theorie

2.4 Erzeugende Funktionale und zusammenhängende Greensche Funktionen

Mittels der Gell-Mann-Low-Formel lässt sich das erzeugende Funktional der Greenschen Funktionen als formale Potenzreihe

$$Z(j) = \mathcal{N} \rho_0 \left(T \left[e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right] \right) \quad (2.4)$$

angeben, wobei $\mathcal{N} = \rho_0(T[e^{-iH_{int}}])^{-1}$ der entsprechende Normierungsfaktor der Gell-Mann-Low-Formel ist, der die Vakuumgraphen entfernt. Dieses Funktional erzeugt mittels Funktionalableitung sämtliche Feynman-Graphen außer den unverbundenen Vakuumgraphen. Das erzeugende Funktional $W(j)$ der *zusammenhängenden* Graphen hängt damit über die bekannte Formel, das „sogenannte Linked Cluster Theorem“,

$$Z(j) = e^{W(j)} \quad (2.5)$$

zusammen. Die grundlegende Beweisidee ist die folgende (nach [17]): Betrachte einen zusammenhängenden Feynman-Graphen $\gamma_{c,i}$ (Symmetriefaktor $\sigma_{c,i}$ bereits eingeschlossen), i sei Element einer Indexmenge, die die Graphen abzählt. Ein beliebiger Feynman-Graph lässt sich aus solchen Graphen als Produkt

$$\prod_i \frac{1}{n_i!} \gamma_{c,i}^{n_i}$$

mit jeweiliger Vielfachheit n_i zusammensetzen. Der Feynman-Graph erhält dadurch einen Symmetriefaktor $\frac{1}{n_i!}$ für jeden Graphen $\gamma_{c,i}$. Die Aussage folgt dann aus

$$\begin{aligned} Z(j) &= \sum_{\{n_i\}} \prod_i \frac{1}{n_i!} \gamma_{c,i}^{n_i} \\ &= \prod_i \sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} \gamma_{c,i}^{n_i} \\ &= \exp \left(\sum_i \gamma_{c,i} \right). \end{aligned}$$

Eine unmittelbare Folge ist, dass (auch in der wechselwirkenden Theorie) die 2-Punkt-Funktion gleich der zusammenhängenden 2-Punkt-Funktion ist, sofern

2.4 Erzeugende Funktionale und zusammenhängende Greensche Funktionen

die 1-Punkt-Funktion verschwindet. Höhere freie zusammenhängende n-Punkt-Funktionen $G_{n \geq 3, c}^{\text{frei}}$ verschwinden.

2 Gewöhnliche Zustände

3 Allgemeine Zustände

Es werden nun also Zustände $\rho = \langle \psi | \cdot | \psi \rangle$ betrachtet, die auch normalgeordneten Feldoperator-Produkten nichtverschwindende Distributionen zuordnen.

3.1 Kumulanten eines Zustandes

Gemäss einer Entwicklung, wie sie in (2.2) dargestellt ist, wird eine Kumulante D_n von ρ als

$$e^{\sum_n \int dx_1 \dots dx_n D_n(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \dots j(x_n)} := \rho(\langle e^{\int dx j(x)\phi(x)} \rangle) \quad (3.1)$$

definiert.¹ Beispielsweise ist (siehe z. B. [2]), wenn man das Verschwinden von Kumulanten einer ungeraden Anzahl von Argumenten annimmt,

$$\rho(\langle \phi \dots \phi \rangle) = D_4(x_1 \dots x_4) + \sum_{\substack{\{x_1, \dots, x_4\} = P_1 \sqcup P_2 \\ |P_1| = |P_2| = 2}} D_2(P_1) D_2(P_2)$$

mit $D_2(x, y) = \rho(\langle \phi(x)\phi(y) \rangle)$. Die Definition (3.1) wird motiviert wie folgt: Addiert man noch die zweite Kumulante D_2 zum Feynman-Propagator G_2^{frei} dazu, $g = G_2^{\text{frei}} + D_2$, so erhält man

$$\rho(T[\phi(x_1) \dots \phi(x_4)]) = D_4(x_1 \dots x_4) + \sum_{\substack{\{x_1, \dots, x_4\} = P_1 \sqcup P_2 \\ |P_1| = |P_2| = 2}} g(P_1) g(P_2). \quad (3.2)$$

Daran lässt sich bereits erkennen, dass grundlegende strukturelle und kombinatorische Schwierigkeiten erst im Falle von Kumulanten $D_{n \geq 3} \neq 0$ auftreten werden, weil die zweite Kumulante noch als zusätzlicher Beitrag zum Feynman-Propagator

¹Diese Kumulanten sind ebenso wie die Greenschen Funktionen symmetrisch in ihren Argumenten, weil Erzeugungs- sowie Vernichtungsoperatoren nach den kanonischen Kommutationsrelationen jeweils kommutieren und die Normalordnung die Reihenfolge der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren relativ zueinander festlegt.

3 Allgemeine Zustände

behandelt werden kann.² Der Fall, in dem möglicherweise $D_2 \neq 0$, aber $D_{n \geq 3} = 0$, wird daher sinnvollerweise als *quasifrei* bezeichnet.

Je nachdem, was benötigt wird, kann man D_2 also als Kumulante wie die anderen behandeln, um die Invertierbarkeit von G_2^{frei} zu gewährleisten, oder aber (und das wird meistens der Fall sein) man betrachtet die Summe $D_2 + G_2^{\text{frei}}$ als Greensche Funktion und betrachtet die höheren Kumulanten für sich genommen.

3.2 Erzeugendes Funktional im allgemeinen Fall

Der allgemeinste Zustand ρ einer Theorie weist zwei mögliche Komplikationen gegenüber dem standardmäßig betrachteten Fall auf: Erstens Entartungen und zweitens das Nichtverschwinden der erwähnten höheren Kumulanten.

Entartungen lassen sich wie in [2, 15] gezeigt behandeln: Es erfolgt Zeitordnung entlang einer Kontur, die sich über $t = -\infty \rightarrow \infty \rightarrow -\infty$ erstreckt. Das erzeugende Funktional wird dann in zwei Strömen $J = (j_+, j_-)$ gemäß

$$Z(J) = \rho(S^+(j_-)S(j_+)) \quad (3.3)$$

mit $S(j) = T_p \left[e^{-i \int H_{\text{int}} dx + \int j \phi dx} \right]$ definiert, wobei die Zeitordnung T_p nun entlang des geschlossenen Zeitpfades³ ausgeführt wird; der Propagator wird zu einer 2×2 -Matrix⁴

$$G' = \begin{pmatrix} \langle T \phi \phi \rangle & \langle \phi \phi \rangle \\ \langle \phi \phi \rangle & \langle \bar{T} \phi \phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\delta^2}{\delta j_+ \delta j_+} \right|_{J=0} Z(J) & \left. \frac{\delta^2}{\delta j_+ \delta j_-} \right|_{J=0} Z(J) \\ \left. \frac{\delta^2}{\delta j_- \delta j_+} \right|_{J=0} Z(J) & \left. \frac{\delta^2}{\delta j_- \delta j_-} \right|_{J=0} Z(J) \end{pmatrix}.$$

Entartungen sind also prinzipiell kein Problem und sollen der Einfachheit halber im Folgenden ausgeschlossen werden. Es verbleibt als erzeugendes Funktional wie gewohnt $Z(j) = \rho(S(j))$, aus dem sich mittels Funktionalableitung die n-Punkt-Funktionen

$$\left. \frac{\delta^n}{\delta j^n} \right|_{j=0} Z(j) = G_n$$

ergeben. Das erzeugende Funktional der (im topologischen Sinne als solche definierten) *zusammenhängenden* Graphen ist dann bekanntermaßen wie schon im

²Er beeinflusst möglicherweise aber die Invertierbarkeit der 2-Punkt-Funktion.

³Engl. *closed time path* [4].

⁴ \bar{T} sortiert die Zeitargumente aufsteigend, also genau entgegengesetzt zu T .

(quasi-)freien Fall gegeben als

$$W(j) = \log Z(j).$$

Die Beweisidee ist hier wieder vollkommen analog zu der in Abschnitt 2.4 ausgeführten, da die Quasi-Freiheit des Zustandes dort überhaupt nicht benutzt wurde.

3.3 Graphische Darstellung

Die Regeln des Standardfalls zur graphischen Darstellung der Störungstheorie eines allgemeinen Zustands lassen sich weitgehend übernehmen: Jedes Integral $\int dx$ wird durch einen Vertex dargestellt, $\langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle + D_2(x, y)$ durch eine Linie zwischen den Punkten x und y , in die man einen weißen Vertex einfügt. In Anlehnung an [3, 7, 8] kommt nun noch Folgendes hinzu: Eine Kumulante $D_{n \geq 3}(x_1, \dots, x_n)$ wird durch einen weißen Vertex mit n Beinen der entsprechenden Bezeichnungen dargestellt (siehe z. B. Abbildung 3.1). Auf einen Graphen der Art, wie sie in Abbildung 3.2 dargestellt sind, wird im Folgenden mit „verallgemeinerter Feynman-Graph“ Bezug genommen.

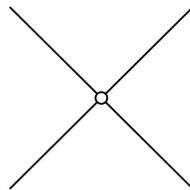


Abb. 3.1: Graphische Darstellung von D_4

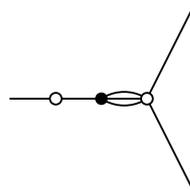


Abb. 3.2: Beispiel für einen verallgemeinerten Feynman-Graphen mit einem ϕ^4 -Wechselwirkungsvertex und zwei Kumulanten $D_2 + G_2^{\text{frei}}$ und D_5

3.4 Verallgemeinerte Feynman-Regeln

Die Regeln, die die Übersetzung eines verallgemeinerten Feynman-Graphen in ihren analytischen Wert ermöglichen, lauten demnach wie folgt:

1. Ordne den n äußeren Beinen die Punkte $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{M}$ zu
2. Ordne den k inneren schwarzen Vertices die Punkte $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{M}$ zu
3. Ordne jedem m -beinigen weißen Vertex, der mit den m Punkten $\{z_1, \dots, z_m\} \subset \mathbb{M}$ verbunden ist, den Wert $D_m(z_1, \dots, z_m)$ zu für $m \geq 3$ und $D_2(z_1, z_2) + G_2^{\text{frei}}(z_1, z_2)$ für $m = 2$
4. Ordne jedem q -beinigen schwarzen Vertex den entsprechenden Vorfaktor zu, der im Potential zu dem Term $\sim \phi^q/q!$ gehört
5. Integriere über alle inneren schwarzen Vertices y_1, \dots, y_k
6. Multipliziere den Wert mit $\frac{1}{(\text{Symmetriefaktor})!}$

3.5 Perturbative nichttriviale Zustände

Ein Beispiel für einen (perturbativen) nichttrivialen Zustand erhält man, wenn man nacheinander zwei verschiedene polynomiale Potentiale, z. B. $H_1 = \langle \phi^4 \rangle$, $H_2 = \langle \phi^3 \rangle$, einschaltet. Dann beschreibt

$$\rho = \mathcal{N} \langle 0 | T \cdot e^{-iH_1} | 0 \rangle$$

einen nichttrivialen Zustand mit nichtverschwindenden Kumulanten

$$e^{D(j)} = \rho(\langle e^{j\phi} \rangle) = \rho \left(T e^{j\phi} - \sum_{\text{Kontraktionen (mindestens eine)}} \langle e^{j\phi} \rangle \right).$$

In einer Entwicklung gemäß Gell-Mann-Low-Formel

$$\rho(e^{j\phi} e^{-iH_2})$$

tauchen dann nur 3-beinige H_2 -Wechselwirkungsverices auf; die weißen Vertices D_{2n} (alle mit einer geraden Anzahl von Beinen – H_1 hat eine gerade Potenz) kodieren H_1 vollständig, denn sie enthalten bereits die n -Punkt-Funktionen.

4 Ein-Teilchen-Irreduzibilität

4.1 Gewöhnliche Zustände

4.1.1 Definition der 1PI-Graphen

Die Definition der ein-Teilchen-irreduziblen Vertexfunktionen im Standardfall ist wohlbekannt: Ein Graph ist genau dann 1PI, wenn er sich durch Durchtrennen einer einzigen Linie nicht in zwei disjunkte Graphen spalten lässt. Ein erzeugendes Funktional für die Vertexfunktionen ist gegeben durch die Legendre-Transformierte von $W(j)$,

$$\Gamma(\tilde{\phi}) = W(j) - \int dx j(x)\tilde{\phi}(x), \quad (4.1)$$

wobei

$$\tilde{\phi}(x) := \frac{\delta W(j)}{\delta j(x)}. \quad (4.2)$$

Insbesondere ist $j = j(\tilde{\phi})$ zu verstehen; die Relation (4.2) muss also invertierbar sein, was im Standardfall perturbativ durch die Invertierbarkeit des Feynman-Propagators gewährleistet ist.

4.1.2 Struktur der Legendre-Transformation

Zwei Beweise, dass Γ wie in (4.1) eingeführt das Gewünschte liefert, sollen vorgestellt werden. Der eine wird in diesem Abschnitt skizziert, da er konstruktiv ist und anschaulich die Baumstruktur zeigt, in die sich die zusammenhängenden Funktionen entwickeln. Der andere liefert sofort eine Identität in allen Ordnungen des erzeugenden Funktionals und wird bei der Verallgemeinerung auf allgemeine Zustände (siehe Abschnitt 4.2) in Kapitel 7 als Nebenprodukt abfallen.

Der induktive Beweis ist derjenige Beweis, der normalerweise in Lehrbüchern zu finden ist (siehe z. B. [12]) und geht auf [14] zurück. Er verläuft grob so: Die erste Ableitung ergibt sich zu

$$\frac{\delta\Gamma(\tilde{\phi})}{\delta\tilde{\phi}(x)} = -j(x),$$

die zweite zu

$$\delta(x_1 - x_2) = \int dy \frac{\delta\tilde{\phi}(x_1)}{\delta j(y)} \frac{\delta j(y)}{\delta\tilde{\phi}(x_2)} = - \int dy \frac{\delta^2 W(j)}{\delta j(y)\delta j(x_1)} \frac{\delta^2 \Gamma(\tilde{\phi})}{\delta\tilde{\phi}(x_2)\delta\tilde{\phi}(y)}.$$

Durch weitere Funktionalableitung nach $j(z)$ ergibt sich schließlich die bekannte amputierte Struktur der 3-Punkt-Funktion zu

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 W(j)}{\delta j^3}(x_1, x_2, x_3) &= \int dy_1 dy_2 dy_3 \frac{\delta^3 \Gamma(\tilde{\phi})}{\delta\tilde{\phi}(y_1)\delta\tilde{\phi}(y_2)\delta\tilde{\phi}(y_3)} \times \\ &\frac{\delta^2 W(j)}{\delta j(x_1)\delta j(y_1)} \frac{\delta^2 W(j)}{\delta j(x_2)\delta j(y_2)} \frac{\delta^2 W(j)}{\delta j(x_3)\delta j(y_3)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die entscheidende Beobachtung ist nun die, dass mit weiterer Funktionalableitung

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} = \int dy \frac{\delta^2 W(j)}{\delta j(x)j(y)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}(y)}$$

und der Produktregel die höheren Terme $\delta^n W/\delta j^n$ nur noch *baumartige* Verzweigungen liefern. Die Vollständigkeit der Zerlegung, d. h. die Tatsache, dass die so erhaltenen Bäume tatsächlich alle möglichen zusammenhängenden Graphen geliefert werden, wird dabei dadurch sichergestellt, dass den „führenden“ Termen, also den unverzweigten Anteilen

$$\Gamma_n = (G_n^c - \text{Baumgraphen})|_{\text{amputiert}}$$

eben gerade nur die angehängten äußeren 2-Punkt-Funktionen fehlen und ansonsten alle Information erhalten bleibt.

4.2 1PI-Definitionen für allgemeine Zustände

Ein großer Teil der vorliegenden Arbeit bestand darin, den in Unterabschnitt 4.1.1 gegebenen Begriff eines ein-Teilchen-irreduziblen Graphen auf den Fall von nicht-verschwindenden höheren Kumulanten auszudehnen. Dabei stellen sich mehrere Fragen bezüglich der Art der Zerlegung der zusammenhängenden Diagramme in Baumgraphen, wie sie in Abschnitt 1.1 motiviert wurde. Insbesondere stellt sich die Frage danach, ob die Vertexfunktionen weiterhin nur durch 2-Teilchen-Funktionen oder auch durch höhere Kumulanten verbunden sein dürfen oder ob gar die weißen Vertices D_n als eigene Vertexfunktionen der Zerlegung betrachtet werden sollten.

4.2.1 „Quasifreie“ Definition

Wie in Abschnitt 6.1 gezeigt werden wird, lässt sich auch in allgemeinen Zuständen mittels Einführung zusätzlicher Hilfsgrößen wenigstens formal die Struktur einer quasifreien, wechselwirkenden Theorie *mit invertierbarem Propagator* erreichen (siehe [2]). Das motiviert die folgende Definition (Beispiele in Abbildung 4.1):

Definition 4.1 Sei $D_2 + G_2^{\text{frei}}$ durch eine schwarze Linie zwischen zwei schwarzen Vertices und $D_{n \geq 3}$ als weißer Vertex zwischen den adjazenten schwarzen Vertices dargestellt. Ein verallgemeinerter Feynman-Graph heiße genau dann **quasifrei-ein-Teilchen-irreduzibel** (Q1PI), wenn er beim Durchschneiden einer 2-Punkt-Propagatorlinie nicht in zwei disjunkte Graphen zerfällt.

4.2.2 „n-Beine“-Definition

In [3] wird eine andere Definition (dort aber nicht unter diesem speziellen Namen) gegeben, die eine Faktorisierung zusammenhängender Graphen in Vertexfunktionen Γ_n und weiße Vertices liefert (Beispiele in Abbildung 4.2):

Definition 4.2 Seien die $D_{n \geq 3}$ als n -beinige weiße Vertices und $G_2^{\text{frei}} + D_2$ als 2-beiniger weißer Vertex dargestellt. Ein verallgemeinerter Feynman-Graph heiße genau dann **n -Beine-ein-Teilen-irreduzibel** (N1PI), wenn er bei der Entfernung eines beliebigen weißen n -beinigen Vertex nicht in genau n Graphen zerfällt. Dabei zählt auch der Endpunkt

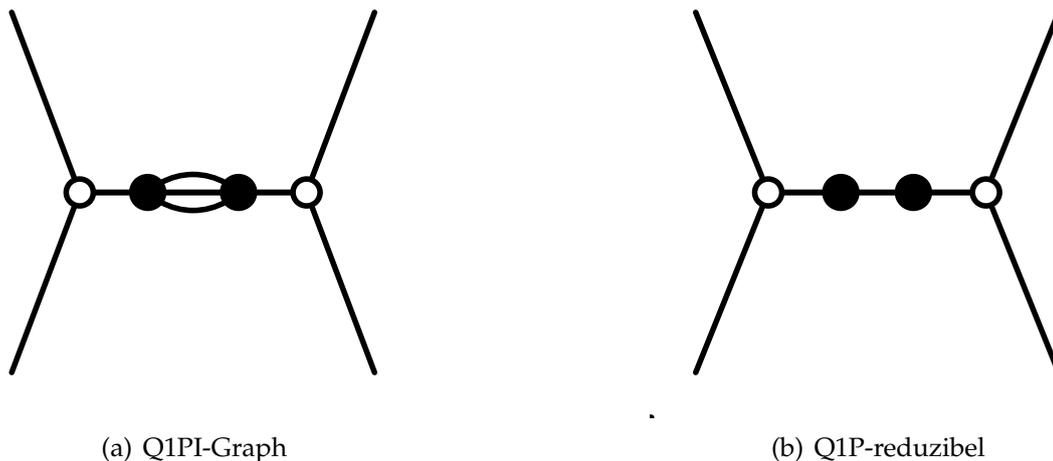


Abb. 4.1: Beispiele zur Definition 4.1

eines äußeren Beins als Untergraph (bestehend aus einem einzigen Vertex). Eine Ausnahme, die einer gesonderten Definition zugrundeliegt, ist die folgende: Alle D_n und G_2^{frei} , d. h. Graphen, die nur aus einem (verallgemeinerten) Propagator bestehen, gelten als N1PI (vergleiche auch Abschnitt 8.1, wo sich dieses Detail als wichtig herausstellen wird).

Die letzte Klausel, dass einzelne weiße Vertices als N1PI definiert sind, ist genau auf den Hopf-Algebren-Formalismus aus Abschnitt 8.1 zugeschnitten. In Kapitel 7 wird die N1PI-Definition ohne diese Sonderregel angewandt werden; an der entscheidenden Stelle wird allerdings auch noch einmal darauf hingewiesen werden.

4.2.3 Alternativen

Es bleiben noch zwei Definitionen, die die Begrifflichkeit des Standardfalls direkt verallgemeinern und die hier der Vollständigkeit halber aufgeführt werden sollen, aber nicht den gewünschten Nutzen bringen (siehe die Abbildungen 4.3(a) und 4.3(b)).

Definition 4.3 Seien wie in Definition 4.2 die $D_{n \geq 3}$ als n -beinige weiße Vertices und $G_2^{\text{frei}} + D_2$ als 2-beiniger weißer Vertex dargestellt. Ein verallgemeinerter Feynman-Graph soll genau dann **Propagator-ein-Teilchen-irreduzibel** (P1PI) heißen, wenn er beim Entfernen eines beliebigen weißen Vertex nicht in disjunkte Graphen zerfällt.

4.2 1PI-Definitionen für allgemeine Zustände

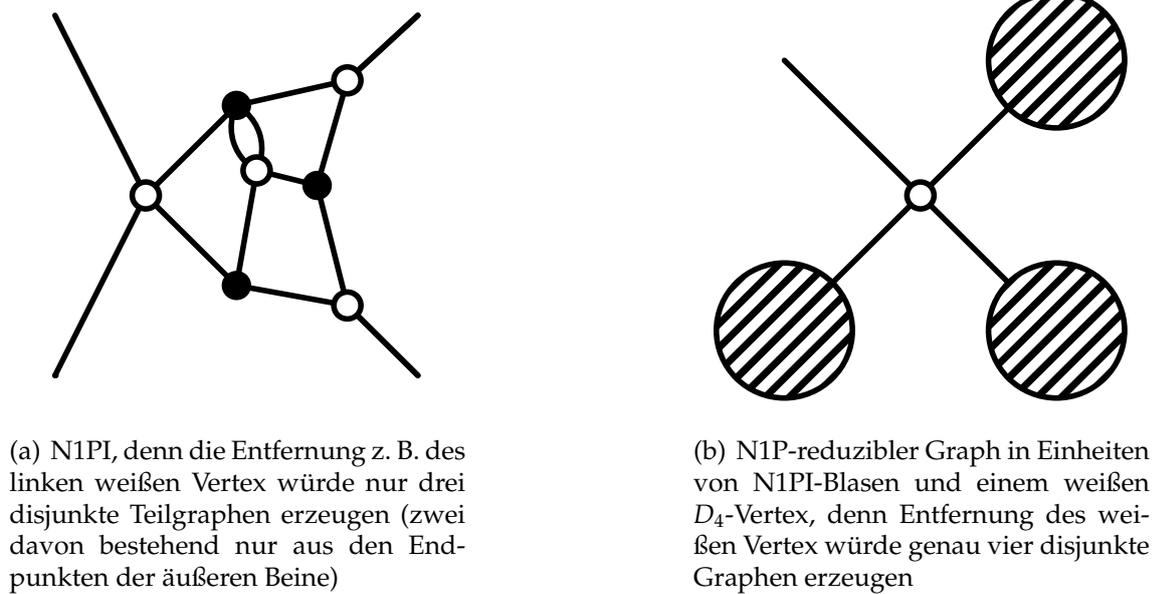


Abb. 4.2: Beispiele zur Definition 4.2

Definition 4.4 Seien die $D_{n \geq 2}$ als weiße Vertices und G_2^{frei} als Linie zwischen zwei schwarzen Vertices dargestellt. Ein verallgemeinerter Feynman-Graph soll genau dann **schwarz-weiß-ein-Teilchen-irreduzibel (SW1PI)** heißen, wenn er beim Entfernen einer beliebigen Linie (auch zwischen einem schwarzem und einem weißem Vertex) in disjunkte Graphen zerfällt.

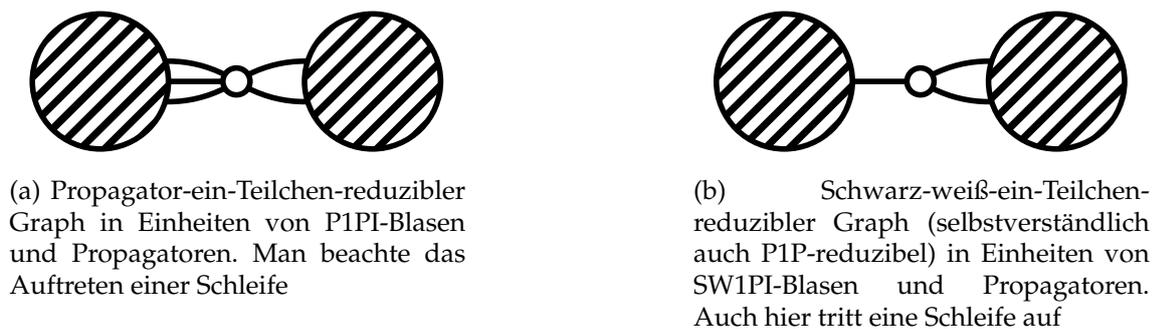


Abb. 4.3: Beispiele zu den Definitionen 4.3 und 4.4

Zwei beispielhafte Graphen sind in Abbildung 4.3 aufgeführt. An beiden Graphen ist zu sehen, dass diese Begriffe von Ein-Teilchen-Irreduzibilität keine Zerlegung in die gewünschten Baumgraphen liefert. Im ersten Falle 4.3(a) treten noch

Schleifengraphen auf, im zweiten Falle bekommt man fragwürdige Graphen, in denen ein Bein eines weißen Vertex¹ amputiert wird, was aufgrund der fehlenden inneren Struktur der D_n dem graphischen Kalkül Schwierigkeiten bereitet. Davon abgesehen entstehen auch mit der SW1PI-Definition Schleifengraphen, wie in 4.3(b) zu sehen ist.

4.3 Zur kombinatorischen Renormierung verallgemeinerter Feynman-Graphen

Die (umfassende) Renormierung verallgemeinerter Feynman-Graphen liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit. Wie man aber schon im Standardfall an der Gell-Mann-Low-Formel (2.1) sieht, ist die Entfernung simpler Divergenzen bereits auf kombinatorischer Ebene möglich: In einem ersten Schritt werden durch den Normierungsfaktor die unverbundenen Vakuumgraphen entfernt.

Ein zweiter Schritt besteht in der Normalordnung von $H_{int}(\phi) \mapsto \langle H_{int}(\phi) \rangle$, um bekanntermaßen divergente Terme wie $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle_{H_{int}} \Big|_{x=y} = G_2(0)$ zu eliminieren. Da die verallgemeinerten Propagatoren D_n für $n \geq 3$ glatt sind [13], müssen Terme der Art $D_n(x_1, \dots, x_n)$ für zusammenfallende $x_i = x_{j \neq i}$ nicht wegen etwaiger punktwiser Divergenz eliminiert werden. Was natürlich trotzdem noch möglich ist, sind UV-Divergenzen der Art, wie sie in den gewöhnlichen Schleifendiagrammen auftreten (s. Abbildung 4.4):

$$\int dx D_3(x_1, x, x)G(x, x_2) = \int_{\text{im Impulsraum mit } k_1=k_2=0} dk_1 dk_2 dk dq \tilde{D}_3(k_1, k, -(k+q)) \tilde{G}_2(q, k_2) e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2}$$

$$\implies \int dk \tilde{D}_3(0, k, -k) \frac{1}{m^2}$$

Die Konvergenz oder Divergenz dieses Ausdruckes hängt nun komplett vom Verhalten von D_3 ab.

¹Die Beine eines weißen Vertex entsprechen aber gar keinen analytischen Objekten, was schon zeigt, woran die SW1PI-Definition krankt.

4.3 Zur kombinatorischen Renormierung verallgemeinerter Feynman-Graphen



(a) Schleifengraph einer gewöhnlichen QFT mit logarithmischer Divergenz



(b) Schleifengraph, wie er in einem allgemeinen Zustand auftreten könnte.

Abb. 4.4: Beispiele für Schleifengraphen

5 Hopf-algebraische Methoden

Es stellt sich heraus, dass sich die Kombinatorik der Auswertung einer Störungsreihe nach Gell-Mann-Low – die Summe über alle topologisch möglichen Graphen – kompakt in einer Hopf-Algebra kodieren lässt.

5.1 Symmetrische Hopf-Algebren

Der Einfachheit halber soll sich die Arbeit auf skalare, ungeladene Teilchen konzentrieren, was die Beschränkung auf symmetrische Hopf-Algebren mit sich bringt. Seien also \mathbb{M} der Minkowski-Raum, $V = \text{span}_{x \in \mathbb{M}}(\phi(x))$ ein Vektorraum über \mathbb{C} , der von den Symbolen $\phi(x)$ ¹ aufgespannt wird, \mathcal{S}_n die symmetrische Gruppe und $\mathcal{S}^n(V) = V^{\otimes n} / \mathcal{S}_n$ das symmetrisierte n-fache Tensorprodukt von V . Dann ist die symmetrische Algebra

$$U = S(V) = \bigoplus_n \mathcal{S}^n(V) \quad (5.1)$$

eine Hopf-Algebra, was im Wesentlichen bedeutet, dass $S(V)$ eine Bialgebra mit Koeins $\epsilon : S(V) \rightarrow \mathbb{C}$, Koproduct $\Delta : S(V) \rightarrow S(V) \otimes S(V)$, Eins $\eta : \mathbb{C} \rightarrow S(V)$ und Produkt $\nabla : S(V) \otimes S(V) \rightarrow S(V)$ (alle diese Abbildungen sollen Homomorphismen sein, die die 1 erhalten) ist, die überdies eine Antipode $S : S(V) \rightarrow S(V)$ besitzt, die einem geeigneten Sinne verträglich mit den restlichen Operationen ist. Da die Antipode im Folgenden aber nicht benötigt werden wird, braucht darauf nicht näher eingegangen zu werden. Das Koproduct wird mithilfe der summenzeichenlosen Sweedler-Notation als $\Delta(u) = u_{(1)} \otimes u_{(2)}$ geschrieben und ist definiert über die Erweiterung von $\Delta(\phi(x)) := \phi(x) \otimes 1 + 1 \otimes \phi(x)$ als Homomorphismus auf ganz $S(V)$.

¹Natürlich denkt man hierbei an die Feldoperatoren, siehe Abschnitt 5.2.

Das iterierte Koproduct

$$\begin{aligned}
 \Delta^k &: V \rightarrow V^{\otimes(k+1)} \\
 \Delta^0 &= \text{id} \\
 \Delta^1 &= \Delta \\
 \Delta^k &= (\text{id} \otimes \Delta)\Delta^{k-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

wird entsprechend als $u_{(1)} \otimes \cdots \otimes u_{(k+1)}$ notiert.

5.2 Die Algebra der Feldoperatoren

Jetzt soll eine Hopf-Algebra $(\mathcal{H}, \epsilon, \eta, \Delta, \nabla, S) = S(U) = S(S(V))$ ² vorgestellt werden, deren Elemente Partitionen von Produkten von Feldoperatoren der QFT sind und die zusammen mit einem geeigneten Koproduct die bekannte Feynman-Kombinatorik liefert. Das Produkt in $S(V)$ wird einfach als $\nabla_{S(V)}(u, v) = uv$, das Produkt in $S(U)$ als $\nabla_{S(U)}(u, v) = u \vee v$ notiert.

5.2.1 Koeins und Zustände einer QFT

Die Koeins ϵ ist ein auf 1 normierter Homomorphismus nach \mathbb{C} , definiert via $\epsilon(1) = 1, \epsilon(u) = 0$ für $u \in \mathcal{S}^{n \geq 1}(V)$. Als Zustand ρ , d.h. normierte Form auf \mathcal{H} wird ein (ansonsten beliebiges) lineares Funktional mit $\rho(1) = 1$ bezeichnet, eine Form mit $\rho(1) = 0$ hingegen als infinitesimale Form.

Aufgrund der Homomorphismuseigenschaft wird ein Zustand ρ sich multiplikativ von $S(V)$ auf $S(U)$ fortsetzen, d. h. für $u, v \in S(V)$ ist

$$\rho(u \vee v) = \rho(u)\rho(v).$$

Die Algebra $S(U)$ bekommt so ihre Rechtfertigung, da sie die Auswertung von Feynman-Graphen auf Untergraphen (Partitionen der Feldoperatoren) ermöglichen wird.

²Die Konstruktion und Einführung der gewünschten Hopf-algebra wird im Wesentlichen [3] folgen.

5.2.2 Koproducte und Faltung

Das Koproduct Δ , definiert wie in Abschnitt 5.1 und als Homomorphismus auf $S(U)$ fortgesetzt, liefert eine Partitionierung in einzelne Feldoperatoren. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \Delta(\phi(x_1)\phi^2(x_2)) &= \phi(x_1)\phi^2(x_2) \vee 1 + 1 \vee \phi(x_1)\phi^2(x_2) \\ &+ \phi(x_1) \vee \phi^2(x_2) + \phi^2(x_2) \vee \phi(x_1) \\ &+ 2(\phi(x_1)\phi(x_2) \vee \phi(x_2) + \phi(x_2) \vee \phi(x_1)\phi(x_2)) \end{aligned}$$

mit den entsprechenden Vielfachheiten. Definiert man nun die *Faltung* zweier Formen ρ, σ bezüglich dieses Koproducts als

$$\rho * \sigma = \nabla_{S(V)} \circ (\rho \vee \sigma) \circ \Delta_{S(V)} \quad (5.3)$$

$$\rho * \sigma(u) = \rho(u_{(1)})\sigma(u_{(2)}) \quad (5.4)$$

für alle $u \in S(V)$ und erweitert dies als Homomorphismus auf $S(U)$, so erhält man eine *Faltungs-Exponential-Abbildung*

$$e^{*\rho} = \sum_n \frac{1}{n!} \overbrace{\rho * \dots * \rho}^{n \text{ mal}} \quad (5.5)$$

mit einer „nullten Potenz“ $\rho^{*0} := \epsilon$. Der Faltungs-Logarithmus dieser Abbildung ist demgemäß als *-Potenzreihe in $\sigma - \epsilon$ gegeben:

$$\log^* \rho = \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\rho - \epsilon)^{*n}$$

Das Faltungsexponential erfüllt die gewohnten Relationen für Exponentialfunktionen wie z. B. $e^{*a} * e^{*b} = e^{*(a+b)}$. Die Signifikanz dieser Definitionen ist durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 5.1 [3] Sei ρ ein Zustand mit Kumulanten D_n wie in Abschnitt 3.1 und die infinitesimale Form r durch $r(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) = D_n(x_1, \dots, x_n) \forall u \in S(V)$ definiert. Dann gilt

$$\rho = e^{*r}.$$

Satz 5.1 ist als das Wick-Theorem eines allgemeinen Zustandes ρ zu verstehen, denn er liefert die Zerlegung von $\rho(u)$ in Summen von Produkten von (verallgemeinerten) Propagatoren. Ein Beispiel stellt (3.2) dar. Die Anwendung des Satzes 5.1 auf ein Element $Te^{j\phi}e^{-iH_{int}}$ reproduziert also die bekannte Auswertungsregel der „Summe über alle möglichen topologisch verschiedenen Graphen“.

Nun ist aber in gewissen Anwendungen auch wichtig, ein Feldoperatoren-Produkt der Form $(\phi(x))^n$ als solches zu erhalten.³ Nach [3] wird das folgende *trennende Koproduct*⁴ δ eingeführt für alle $u = \phi^{n_1}(x_1) \cdots \phi^{n_k}(x_k) \in S(V)$, wobei alle x_i paarweise verschieden sind:

$$\delta u = \begin{cases} 1 \vee u + u \vee 1 & k = 1 \\ \delta(\phi^{n_1}(x_1)) \cdots \delta(\phi^{n_k}(x_k)) & k > 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

Der Name ist etwas irreführend, denn es handelt sich bei δ nicht um ein echtes Koproduct, da es kein Algebrenmorphismus ist, denn z. B. $\delta(\phi(x)^2) \neq \delta(\phi(x))^2$ (gleichwohl aber koassoziativ und kokommutativ [3]). Auch das iterierte trennende Koproduct, definiert analog zu Gleichung 5.2, wird als

$$\delta^k(u) = u_{\{1\}} \vee \cdots \vee u_{\{k+1\}}$$

notiert.

Die Faltung bezüglich des trennenden Koproducts

$$\rho \tilde{\sigma} = \nabla_{S(V)} \circ (\rho \vee \sigma) \circ \delta \quad (5.7)$$

$$\rho \tilde{\sigma}(u) = \rho(u_{\{1\}}) \sigma(u_{\{2\}}) \quad (5.8)$$

ermöglicht dann wieder die Einführung einer Faltungs-Exponential-Abbildung $e^{\tilde{\sigma}\rho}$ wie in Gleichung (5.5). Es existiert wiederum ein Theorem ähnlich zu Satz 5.1:

Satz 5.2 [3] *Sei ρ ein Zustand und ρ_c als diejenige Abbildung definiert, für die $\rho_c(u)$ die*

³Dies entspricht der Nicht-Aufspaltung eines einzelnen Vertex.

⁴Dieser Name ist irreführend, weil es ja genau darum geht, Wechselwirkungsverices **nicht** aufzutrennen. Allerdings wollte der Autor sich an die Nomenklatur *disconnecting coproduct* im ursprünglichen Artikel halten. Diese ist eventuell dadurch motiviert, dass zwei Terme, die von δ in verschiedene Tensorfaktoren in $S(U)$ gesteckt wurden, nicht mehr durch eine Derivation A_n verbunden werden können, sodass in diesem Sinne Wechselwirkungsverices als ganzes voneinander getrennt werden. Zu Derivationen siehe Gleichung 5.9.

Summe aller zusammenhängender Terme in $\rho(u) \forall u \in S(U)$ ist. Dann gilt

$$\rho = e^{\tilde{\rho}_c}.$$

Dieser Satz ermöglicht also via

$$\rho(u) = \epsilon(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \rho_c(u_{\{1\}}) \cdots \rho_c(u_{\{n\}})$$

für die Elemente $u = \frac{1}{n!} T\phi \cdots \phi V^n$ einer Störungsreihe die Zerlegung einer vollständigen Greenschen Funktion in ihre zusammenhängenden Untergraphen.

Aus Satz 5.2 folgt direkt das *Linked-Cluster-Theorem* $Z = e^W$ für allgemeine Zustände [3].

5.2.3 Derivationen und Baumgraphen

Die Ergebnisse der vorigen Absätze ermöglichen nun eine kompakte Notation der bekannten Wick-Kombinatorik, alle möglichen Kombinationen der Feldoperatoren zu bilden. Der zweite wesentliche Schritt ist, die Partitionen in geeigneter Weise zu verbinden, sodass eine Baumgraphenentwicklung in 1PI-Einheiten durchgeführt werden kann. Dazu werden in [3] Derivationen auf der Hopf-Algebra benutzt:

$$A_m : S^k(U) \rightarrow S^{k+m}(U)$$

$$A_m(u) := \frac{1}{m!} \sum_{x_1, \dots, x_m} D_m(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial u_{\{1\}}}{\partial \phi(x_1)} \vee \cdots \vee \frac{\partial u_{\{m\}}}{\partial \phi(x_m)} \quad (5.9)$$

Anschaulich bedeutet eine so definierte Derivation, dass ein Produkt von Feldoperatoren in eine Summe aller möglicher Partitionen aufgespalten wird, wobei die einzelnen Teilmengen in unterschiedlichen Tensorfaktoren $S^n(S(V))$ von $S(U) = S(S(V))$ liegen, und dann unter Entfernung eines Feldoperators im jeweiligen Tensorfaktor mit einem verallgemeinerten Propagator verbunden werden. Zu beachten ist natürlich die Rolle des Tensorprodukts \vee in $S(U)$, das gerade dafür sorgt, dass eine Derivation, wenn sie erneut angewandt wird, gemäß der Produktregel auf jede einzelne Teilmenge der Partition wirkt (das ist die Erweiterung von $S(V)$ auf $S(U)$).

$$A_3(u) = \frac{1}{3!} \sum_{x_1, x_2, x_3} D_3(x_1, x_2, x_3) \frac{\delta u_{\{1\}}}{\delta \phi(x_1)} \vee \frac{\delta u_{\{2\}}}{\delta \phi(x_2)} \vee \frac{\delta u_{\{3\}}}{\delta \phi(x_3)}$$

$$A_3 \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) = \frac{1}{3!} \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

Abb. 5.1: Wirkung einer Derivation A_3 auf ein $u \in S(V)$. Jeder schwarze Punkt entspricht einem $\frac{\delta u_{\{i\}}}{\delta \phi(x_i)}$, wobei i von 1 bis zur Anzahl der schwarzen Punkte im Diagramm, hier also 3, läuft. Der schwarze Punkt auf der linken Seite der zweiten Zeile entspräche dann zum Beispiel $\phi^3 \phi^3 \phi^4$, die schwarzen Punkte auf der rechten hingegen $3\phi^2$, $3\phi^2$ bzw. $4\phi^3$. Der weiße Vertex repräsentiert den Propagator D_3 .

Die in Gleichung (5.9) gegebene Summe $\sum_{x,y}$ ist natürlich im kontinuierlichen Falle $x \in \mathbb{R}^n$ als Integral mit Lebesgue-Maß zu verstehen. Diese Ausdehnung an sich birgt zwar eventuell analytische (Renormierungs-)Probleme, weil im Limes kleiner Gitterkonstanten neue Divergenzen auftreten könnten, ist für den kombinatorischen Rahmen der vorliegenden Arbeit aber vernünftig und soll im Folgenden auch so aufgefasst werden.

Da, wie schon erwähnt, einmal durch das Koproduct getrennte Vertices von den Derivationen fortan getrennt „behandelt“ werden, entstehen durch Anwendung der Derivationen Baumgraphen. Dies wird später wichtig, wenn ein zusammenhängender Graph in seine N1PI-Vertexfunktionen zerlegt werden soll. Außerdem lässt sich mit den Derivationen verstehen, dass ein wesentlicher Vorteil des trennenden Koproducts gegenüber dem normalen Koproduct der ist, dass er Selbstkontraktionen an einem Wechselwirkungsvertex vermeidet.

5.3 Motivation und Interpretation des Hopf-Formalismus'

Die Kombinatorik des Koproducts entspricht gerade dem „Aufteilen einer Multimenge⁵ in alle möglichen Partitionen“, was einer der Gründe für den Erfolg von Hopf-Algebren im kombinatorischen Kontext ist. Konkret ist die zentrale Beob-

⁵Engl. *multiset*, soll heißen eine Menge, in der Objekte mit einer Vielfachheit größer Eins vorkommen können.

5.3 Motivation und Interpretation des Hopf-Formalismus'

achtung, wie das Koproduct Δ auf ein Element $\phi_1\phi_2$ einer Hopfalgebra wirkt, folgende:

$$\Delta(\phi_1\phi_2) = \phi_1\phi_2 \otimes 1 + \phi_1 \otimes \phi_2 + \phi_2 \otimes \phi_1 + 1 \otimes \phi_1\phi_2.$$

In Anbetracht der Vielfältigkeit kombinatorischer Hopf-Algebren [9, 10] ist noch die Bemerkung angebracht, dass insbesondere die Bedeutung erlangende Hopf-Struktur der Renormierung nach Connes und Kreimer [6, 16], die die Zimmermann-Formel (*forest formula*) [5] algebraisch umformuliert, eine andere ist als die, die für diese Arbeit relevant ist und in diesem Kapitel eingeführt wurde.

6 Nichtlokale Potentiale

6.1 Höhere Kumulanten als formale Wechselwirkungsterme

Um ausgehend vom erzeugenden Funktional $Z(j)$ der vollständigen Greensfunktionen dasjenige der Vertexfunktionen zu erhalten, wird zunächst die Q1PI-Definition von Irreduzibilität betrachtet. Sei der Zustand ρ nicht entartet und die zweite Kumulante in G_2^{frei} absorbiert (vgl. Abschnitt 3.1). Es werden nun analog zur Ersetzung

$$\langle T[e^{j\phi} e^{-iH_{\text{int}}(\phi)}] \rangle \rightarrow e^{-iH_{\text{int}}(\frac{\delta}{\delta j})} Z_0(j)$$

auch die höheren Kumulanten in einen Wechselwirkungsterm umgeschrieben. Es ist [4]

$$T[e^{j\phi}] = Z_0(j) \langle e^{j\phi} \rangle \quad (6.1)$$

mit dem erzeugenden Funktional $Z_0(j) = e^{-\frac{1}{2} \int j(x) G_2^{\text{frei}}(x,y) j(y) dx dy}$, sodass man schließlich zu

$$Z(J) = \langle T[e^{j\phi} e^{-iV(\phi)}] \rangle_D = e^{-iH_{\text{int}}(\frac{\delta}{\delta j})} e^{D(\frac{\delta}{\delta k})} Z_0(J) \quad (6.2)$$

gelangt [2], wobei $J = (j, k)$,

$$Z_0(J) = e^{-\frac{1}{2} \int dx dy J(x) \bar{G}(x,y) J(y)} = e^{-\frac{1}{2} \int dx dy j(x) G_2^{\text{frei}}(x,y) j(y) + \int dx j(x) k(x)}$$

die quasi-freie Greensche Funktion,

$$\bar{G}(x-y) = \begin{pmatrix} G_2^{\text{frei}}(x-y) & -\delta(x-y) \\ -\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}$$

der verallgemeinerte und insbesondere invertierbare¹ Propagator und $G_2^{\text{frei}} = \langle 0|T\phi\phi|0\rangle + D_2$ der freie Propagator der Theorie sind.

Die Erweiterung auf entartete Zustände liefert strukturell keine Änderungen und ändert auch nichts an der Invertierbarkeit des verallgemeinerten Propagators (siehe auch Abschnitt 3.1), weswegen diese Verallgemeinerung hier nicht betrachtet werden soll.

6.2 Verallgemeinerung der Gell-Mann-Low-Formel

Was letztlich also bei diesem Ansatz geschieht, ist die Umwandlung der Kumulantenfunktion D eines Zustandes, definiert via

$$e^{D(j)} = \rho(\langle e^{j\phi} \rangle)$$

wie in Gleichung (6.1), in einen Wechselwirkungsterm eines gewöhnlichen Zustandes. Diese Beobachtung führt auf die folgende Idee: *Die höheren Kumulanten eines Zustandes rühren von einem nichtlokalen Potential her, das im Gegensatz zu Summanden wie $\int dx \phi(x)^v$ nun solche der Art $\int dx_1 \cdots dx_n D_n(x_1, \dots, x_n) \psi(x_1) \cdots \psi(x_n)$ enthält.* In einem Analogon der Gell-Mann-Low-Formel kann man dann die folgende Aussage treffen:

Satz 6.1 *Sei ρ ein allgemeiner, nichtentarteter Zustand in einem Potential H_{int} mit Kumulantenfunktion D . Dann gilt*

$$Z(j) = \langle T e^{\int dx \phi(x)j(x)} \rangle_{H_{\text{int}}, \rho} = \mathcal{N} \langle 0|T e^{\int dx \phi(x)j(x)} e^{-iH_{\text{int}}(\phi)} e^{D(\psi)} |0\rangle \quad (6.3)$$

mit einem Hilfsfeld ψ , einem Normierungsfaktor

$$\mathcal{N} = \rho(e^{-iH_{\text{int}}(\phi)})^{-1},$$

¹Die Inverse ist durch

$$G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & G_2 \end{pmatrix}$$

gegeben und existiert demnach auch in Fällen, in denen G_2 selbst eine Matrix ist, d. h. insbesondere in entarteten Zuständen. Siehe auch Abschnitt 3.2.

6.2 Verallgemeinerung der Gell-Mann-Low-Formel

der die unverbundenen Vakuumgraphen entfernt, und dem verallgemeinerten Propagator

$$\begin{pmatrix} \langle 0|T\phi\phi|0\rangle & \langle 0|T\phi\psi|0\rangle \\ \langle 0|T\psi\phi|0\rangle & \langle 0|T\psi\psi|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2^{\text{frei}} & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweisen lässt sich die Formel mittels folgender Überlegung: Zum einen hat man nach (6.1)

$$Z(j) = e^{D(j)} Z_0(j). \quad (6.4)$$

Andererseits kann man das erzeugende Funktional nach Potenzen von j sortieren und in eine Summe

$$Z(j) = \sum_n G_n j^n$$

schreiben. Es soll die Identität (6.3) Term für Term gezeigt werden, zunächst für ein Potential $H_{\text{int}} \equiv 0$. Der Term $\sim j^n$ auf der linken Seite ist dann

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle 0|T[\overbrace{j\phi \cdots j\phi}^{k \text{ mal}}]|0\rangle \sum_{|\alpha|=n-k} \frac{1}{\alpha!} \int dx^\alpha \rho_\alpha j^\alpha. \quad (6.5)$$

Die Notation für den Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist die folgende:

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sum_i \alpha_i \\ \alpha! &= \prod_i \alpha_i! \\ dx^\alpha &= \prod_i \prod_{j=1}^{|\alpha_i|} dx_{\alpha_i, j} \\ \rho_\alpha &= \prod_i \rho_{\alpha_i}(x_{\alpha_i, 1}, \dots, x_{\alpha_i, |\alpha_i|}) \\ j^\alpha &= \prod_i \prod_{j=1}^{|\alpha_i|} j(x_{\alpha_i, j}). \end{aligned}$$

Jeder dieser Terme aus (6.5) kommt in der Reihenentwicklung von $e^{D(j)} = e^{\rho_2 j j} e^{\rho_3 j j j} \dots$ genau einmal vor, weswegen keine weiteren kombinatorischen Vorfaktoren nötig sind. Beachte allerdings den Faktor $\binom{n}{k}$, der nötig ist, um abzuzählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus den n Strömen k auszuwählen.

6 Nichtlokale Potentiale

Nun betrachten wir den Term $\sim j^n$ auf der rechten Seite von (6.3):

$$\overbrace{\langle 0|T[j\phi \cdots j\phi e^{D(\psi)}]|0\rangle}^{n \text{ mal}}$$

Wir wählen für ein $k \leq n$ alle Terme $\sim \psi^{n-k}$ aus. Da wiederum jede Kombination der ρ_i in der Reihenentwicklung von $e^{D(\psi)}$ genau ein Mal vorkommt (siehe auch oben), erhält man nach Kontraktion der ψ mit den verbleibenden ϕ (k Stück) einen Faktor

$$\sum_{|\alpha|=n-k} \frac{1}{\alpha!} \int dx^\alpha \rho_\alpha j^\alpha,$$

der noch mit dem Faktor $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ erweitert werden muss, da er die verschiedenen Möglichkeiten abzählt, Kontraktionen $\langle T\phi\psi \rangle \sim \delta$ herzustellen. Insgesamt ergibt sich die rechte Seite von (6.3) also zu

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \overbrace{\langle 0|T[j\phi \cdots j\phi]|0\rangle}^{k \text{ mal}} \sum_{|\alpha|=n-k} \frac{1}{\alpha!} \int dx^\alpha \rho_\alpha j^\alpha. \quad (6.6)$$

Durch Vergleich von (6.6) mit (6.5) sieht man die Richtigkeit von Satz 6.1 ein, da sich ein Potential $H_{int} \neq 0$ durch Anwendung von $e^{-iH_{int}(\delta_j)}$ auf beide Seiten der Gleichung einbeziehen lässt.

Satz 6.1 liefert für den Spezialfall einer invertierbaren 2-Punkt-Funktion $G_2 = -\Gamma_2^{-1}$ (das heißt also insbesondere, falls D_2 in den Kumulantenterm D absorbiert wird, siehe Abschnitt 3.1) eine weitere Aussage, die ohne ein etwaiges Hilfsfeld ψ auskommt:

$$Z(j) = \langle T[e^{\int dx \phi(x)j(x)}] \rangle_{\rho, H_{int}} = \mathcal{N} \langle 0|T[e^{\int dx \phi(x)j(x)} e^{-H_{int}(\phi)} \triangleleft e^{D(-\int dy \Gamma_2(\cdot, y)\phi(y))} \triangleright]|0\rangle \quad (6.7)$$

Die Normalordnung des Kumulantentermes übernimmt dabei die Aufgabe des verschwindenden Propagators $\langle T\psi\psi \rangle = 0$ aus 6.1, Kontraktionen zwischen weißen Vertices zu vermeiden. Der Term $-\Gamma_2\phi$ liefert bei Kontraktion mit einem anderen ϕ ein $-\langle 0|\Gamma_2\phi\phi|0\rangle = \delta$, entsprechend dem Propagator $\langle 0|T\psi\phi|0\rangle = \delta$. Der Beweis verläuft dementsprechend vollkommen analog.

Letztlich stellen sowohl Satz 6.1 als auch Gleichung (6.7) „nur“ die algebraische Notation für die bekannten Feynmanregeln „schreibe alle möglichen Kombinationen weißer und schwarzer Vertices auf, dann verbinde sie in jeder möglichen

Kombination und summiere über alle mit den entsprechenden Symmetriefaktoren“ dar.

6.3 Legendre-Transformation im allgemeinen Fall

Der direkte Versuch, die Legendre-Transformierte von $W(j)$ auch im allgemeinen Fall zu benutzen, ist einen Blick wert: Definiere ein erzeugendes Funktional für eine Theorie via (6.7), d. h. $Z(j) = \langle Te^{j\phi} \rangle_{H_{int}}$, $W = \log Z$, $\tilde{\phi} = \frac{\delta W}{\delta j}$. Dann ist

$$\Gamma(\tilde{\phi}) = W(j) - \int dx j(x)\tilde{\phi}(x) \quad (6.8)$$

das erzeugende Funktional der Q1PI-Graphen der Theorie mit $\Gamma_2 = -G_2^{-1}$. Das ist sofort klar, wenn man sich die iterative Baumgraphenentwicklung aus Unterabschnitt 4.1.2 und Satz 6.1 anschaut.

Mit dem Ansatz (6.2) werden natürlich auch Legendre-Transformationen nach

$$\tilde{\Phi} := \frac{\delta W(J)}{\delta J}; \quad J = (j, k)$$

möglich, da der verallgemeinerte Propagator ja immer invertierbar ist. Wiederum ergibt sich eine Baumgraphenzerlegung in die Vertexfunktionen

$$(\Gamma_n)_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\delta^n}{\delta \tilde{\Phi}^n} \Gamma(\tilde{\Phi}) \Big|_{\tilde{\Phi}=0}$$

und verallgemeinerte 2-Punkt-Funktionen. Die relevanten Anteile einer solchen Entwicklung der zusammenhängenden n -Punkt-Funktionen sind durch die $(1, \dots, 1)$ -Anteile von $\delta^n W(J)/\delta J^n|_{J=0}$ gegeben; durch die Matrixmultiplikationen sind die δ -Anteile des verallgemeinerten 2×2 -Matrix-Propagators in sie hineingemischt.

Satz 6.1 bedeutet insbesondere, dass eine zweite Legendre-Transformation von (6.8) nach

$$\bar{\psi}(x) = \frac{\delta}{\delta k(x)} \log \left(\langle Te^{\int dx \phi(x)j(x)} e^{\int dx \psi(x)k(x)} \rangle_{H_{int}, \rho} \right)$$

nämlich

$$\Gamma(\tilde{\Phi}) = W(J) - \int dx J(x) \cdot \tilde{\Phi}(x), \quad (6.9)$$

wobei $\tilde{\Phi} = (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$, genau das gleiche Ergebnis liefert. (6.9) ist dann das erzeugen-

6 Nichtlokale Potentiale

de Funktional der SW1PI-Graphen, da die Legendre-Transformation ja gerade 1PI-Graphen bezüglich der Propagatoren der Theorie liefert, die in diesem Fall eben durch die 2×2 -Matrix zwischen Vertices $(\phi(x_1), \psi(x_1))$ und $(\phi(x_2), \psi(x_2))$ aus Satz 6.1 gegeben ist. Diese ist aber den Ausführungen von Unterabschnitt 4.2.3 entsprechend nicht nützlich.

7 Eine Verallgemeinerung der Legendre-Transformation

7.1 Resummationstheorem für bipartite Baumgraphen

Man betrachte einfach zusammenhängende bipartite Baumgraphen γ , bestehend aus Quadraten und Kreisen als Vertices (siehe Abbildung 7.1). Einem solchen Graphen γ mit durchnummerierten Linien wird ein Wert $w(\gamma)$ zugeordnet, indem für jeden n -beinigen Kreis (jedes n -beinige Quadrat) eine *symmetrische* Funktion $K_n(x_1, \dots, x_n)$ ($Q_n(y_1, \dots, y_n)$) in ein Produkt unter ein Integral geschrieben wird, wobei die x_i, y_i die Bezeichnungen der jeweils n adjazenten Beine sind.

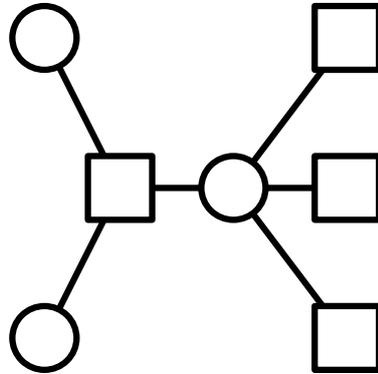


Abb. 7.1: Beispiel für einen bipartiten Baumgraphen mit Vertexfunktionen Q_n für n -beinige Quadrate und K_n für n -beinige Kreise

Der Graph aus Abbildung 7.1 beispielsweise erhielte den Wert

$$w(\gamma) = \int dx_1 \cdots dx_6 K_1(x_1)K_1(x_2)Q_3(x_1, x_2, x_3)K_4(x_3, x_4, x_5, x_6)Q_1(x_4)Q_1(x_5)Q_1(x_6).$$

In der späteren Anwendung des nun folgenden Theorems denkt man bei den

7 Eine Verallgemeinerung der Legendre-Transformation

Kreisen im Wesentlichen an die 1PI-Vertexfunktionen und bei den Quadraten an die Propagatoren.

Definiere

$$\tau := \sum_{\gamma} w(\gamma)$$

$$Q(k) := \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n Q_n(x_1 \dots x_n) k(x_1) \dots k(x_n) \quad (7.1)$$

$$K(q) := \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n K_n(x_1 \dots x_n) q(x_1) \dots q(x_n)$$

$$\bar{Q} := \frac{\delta \tau}{\delta K_1}$$

$$\bar{K} := \frac{\delta \tau}{\delta Q_1}, \quad (7.2)$$

wobei k und q geeignete Funktionen sind („Hilfsströme“ für die erzeugenden Funktionale). Es gilt das folgende Theorem:

Satz 7.1 [11] Seien die Größen wie in (7.1) und (7.2) gegeben. Dann gilt:

$$\tau = K(\bar{Q}) + Q(\bar{K}) - \int \bar{Q} \bar{K} dx \quad (7.3)$$

$$\bar{Q} = \left. \frac{\delta Q(k)}{\delta k} \right|_{k=\bar{K}} \quad \bar{K} = \left. \frac{\delta K(q)}{\delta q} \right|_{q=\bar{Q}}. \quad (7.4)$$

Die Idee ist also, die Summe aller Graphen in die Summe von erzeugenden Funktionalen der Vertexfunktionen und der Kumulanten zu zerlegen.

7.2 Konstruktion der verallgemeinerten Legendre-Transformation

Das Theorem 7.1 wird nun benutzt, um eine Verallgemeinerung der Legendre-Transformation zu konstruieren, die im Falle eines gewöhnlichen Zustandes wieder auf die ursprüngliche Legendre-Transformierte führt.

7.2 Konstruktion der verallgemeinerten Legendre-Transformation

Setze dazu

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0 \\ Q_2 &= G_2^{\text{frei}} + D_2 \\ Q_n &= D_n \text{ für } n \geq 3 \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= j \\ K_2 &= 0 \\ K_n &= \Gamma_n \text{ für } n \geq 3. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Insbesondere bedeuten diese Forderungen, dass in der Theorie die 1-Punkt-Funktionen, die nur eine Verschiebung der Amplituden um einen konstanten Summanden bedeuten, bereits abgezogen wurden. Dies soll im Folgenden immer vorausgesetzt werden. Da man als *Forderung an die Vertexfunktionen* in Graphen wie Abbildung 7.1 stellen kann, dass die Ströme j nur über (verallgemeinerte) Propagatoren an sie koppeln dürfen, liefert der Vergleich mit (7.2) sofort

$$\tilde{\phi} := \frac{\delta W(j)}{\delta j} \equiv \frac{\delta \tau}{\delta K_1} = \bar{Q}. \quad (7.7)$$

Die durch die Forderung $Q_1 = 0$ erzwungene amputierte Struktur der Γ_n ergibt sich also nicht aus einer wie auch immer gearteten Invertierbarkeit von G_2 , sondern aus der Tatsache, dass Terme $\int j\phi dx$ des erzeugenden Funktionals nie Bestandteil eines Wechselwirkungsvertex $\int \phi^v dx$ sind und die Vertexfunktion somit immer über „Weglassen“ der äußeren Propagatorlinien amputiert werden kann.

Das erzeugende Funktional der Vertexfunktionen ist also

$$K(\bar{Q}) = \int dx \tilde{\phi}(x) j(x) + \Gamma(\phi) - \frac{1}{2} \int dx dy \Gamma_2(x, y) \tilde{\phi}(x) \tilde{\phi}(y) \quad (7.8)$$

und zusammen mit dem erzeugenden Funktional Q der verallgemeinerten Pro-

pagatoren ist nach Satz 7.1

$$\begin{aligned} \Gamma(\tilde{\phi}) = & W(j) - \int dx \tilde{\phi}(x) j(x) + \frac{1}{2} \int dx dy \Gamma_2(x, y) \tilde{\phi}(x) \tilde{\phi}(y) \\ & - Q(\tilde{K}) + \int dx \tilde{\phi}(x) \tilde{K}(x) \end{aligned} \quad (7.9)$$

das erzeugende Funktional der N1PI-Graphen. Hier ist allerdings zu beachten, dass durch die Konstruktion der Baumgraphen die gesonderte Definition einzelner weißer Vertices als N1PI (vgl. Definition 4.2) nicht zutrifft.

7.2.1 Rekonstruktion des Standardfalls

Der Standardfall ergibt sich aus einer ganz ähnlichen Überlegung [11], wenn man statt (7.5)

$$\begin{aligned} Q_2 &= G_2 \\ Q_n &= 0 \text{ für } n \neq 2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

setzt und mit $\Gamma_2 = -G_2^{-1}$ die Terme aus Gleichung (4.2)

$$\begin{aligned} Q(\tilde{K}) - \int dx \tilde{\phi}(x) \tilde{K}(x) &= Q(\tilde{K}) - \int dx \tilde{K} \left. \frac{\delta Q(k)}{\delta k} \right|_{k=\tilde{K}} \\ &= \frac{1}{2} \int dx dy G_2 \tilde{K} \tilde{K} - \int dx dy G_2 \tilde{K} \tilde{K} \\ &= \frac{1}{2} \int dx dy \Gamma_2(x, y) \tilde{\phi}(x) \tilde{\phi}(y), \end{aligned}$$

die die Abweichung von der gewöhnlichen Legendre-Transformation liefern, sich gerade zu 0 addieren. Man beachte, dass in diesem Zugang die Gleichung $\Gamma_2 = -G_2^{-1}$ eine zusätzliche Forderung war und sich nicht erst später ergeben hat. Genau sie bedingt, dass Γ die Legendre-Transformierte von W wird. In der gewöhnlichen Herangehensweise der Lehrbücher (siehe Unterabschnitt 4.1.2) ist die Schlussweise andersherum: Zuerst wird die Legendre-Transformation durchgeführt und dann gezeigt, dass Γ_2 gerade das Inverse der 2-Punkt-Funktion ist.

7.2.2 Fixierung der unbekanntenen Variablen

Es bleibt noch, den Zusammenhang von \bar{K} und Γ_2 mit den restlichen Größen zu klären. Nach Definition und weil Q_1 identisch verschwindet, ist \bar{K} durch die Summe aller Graphen¹ gegeben, die eine unverbundene Linien ausgehend von einem Kreis K_n haben. Nach Satz 7.1 gilt sogar

$$\bar{K}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_{n-1} K_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x) \tilde{\phi}(x_1) \cdots \tilde{\phi}(x_{n-1}). \quad (7.11)$$

Die auftretenden Funktionalableitungen eines erzeugenden Funktionals F sind nach dem Schema

$$\frac{\delta^n F(f)}{\delta f^n} = \frac{\delta^n F(q)}{\delta q^n} \Big|_{q=f} \quad (7.12)$$

mit einer Testfunktion q zu verstehen.

Die praktische Berechnung von \bar{K} kann nun aber immer noch nicht ohne Weiteres durchgeführt werden. Um das zu bewerkstelligen, betrachten wir Satz 6.1. Wenn (6.3) mit der Funktion $Q_1 := D_1$ ausgeschrieben wird, lautet die Gleichung explizit

$$Z(j, p) = \mathcal{N} \langle 0 | T e^{\int dx \phi(x) j(x)} e^{\int dx \psi(x) p(x)} e^{-iH_{int}(\phi)} e^{D(\psi)} | 0 \rangle, \quad (7.13)$$

wobei $p := D_1$ aus dem Kumulantenterm herausgezogen wurde. p ist somit erzeugender Strom für die Felder ψ und kann damit für die Berechnung von \bar{K} benutzt werden:

$$\bar{K} \stackrel{(7.2)}{=} \frac{\delta \tau}{\delta Q_1} \stackrel{(7.13)}{=} \frac{\delta Z(j, p)}{\delta p} \Big|_{p=0} = \mathcal{N} \langle 0 | T \psi e^{\int \phi j} e^{-iH_{int}(\phi)} e^{D(\psi)} | 0 \rangle \quad (7.14)$$

Die Gültigkeit des Theorems wird nicht beeinflusst, wenn wir

$$\Gamma_2 := 0$$

setzen. Das hat nur zur Folge, dass das erzeugende Funktional nun keinen Term in quadratischer Ordnung hat, was aber nicht weiter stört, denn in der gesuchten Baumgraphenentwicklung würden diese wegen der Wahl $K_2 = 0$ ohnehin nicht auftauchen.

Nun sollen die Legendre-Transformationen (Integrationen werden der Über-

¹Ohne weitere kombinatorische Vorfaktoren außer denen, die bereits in $W(j)$ auftauchen.

7 Eine Verallgemeinerung der Legendre-Transformation

sichtlichkeit halber implizit verstanden)

$$\begin{aligned} \text{LT}[W(j)] &= W(j) - j\tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\delta W(j)}{\delta j} \\ E(\tilde{\phi}) := \text{LT}[Q(\bar{K})] &= Q(\bar{K}) - \tilde{\phi}\bar{K}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\delta Q(\bar{K})}{\delta \bar{K}} \end{aligned} \quad (7.15)$$

betrachtet werden. (7.8) wird damit zu

$$\Gamma(\tilde{\phi}) = \text{LT}[W(j)] - \text{LT}[Q(\bar{K})]. \quad (7.16)$$

Diese Beobachtung an sich nützt noch nicht sehr, denn Ableitung von Gleichung 7.8 nach $\tilde{\phi}$ liefert nur die triviale Identität

$$\frac{\delta \Gamma(\tilde{\phi})}{\delta \tilde{\phi}} = \bar{K} - j \Leftrightarrow -j = -j. \quad (7.17)$$

Mit der Umformung²

$$\begin{aligned} \text{LT}[W(j)] &= \Gamma(\tilde{\phi}) + \text{LT}[Q(\bar{K})] \\ \Leftrightarrow W(j) &= \text{LT}[\Gamma(\tilde{\phi}) + \text{LT}[Q(\bar{K})]] \\ &= \text{LT}[\Gamma(\tilde{\phi}) + E(\tilde{\phi})] \\ &= \text{LT}[\gamma(\tilde{\phi})] \end{aligned} \quad (7.18)$$

mit

$$\gamma(\tilde{\phi}) := \Gamma(\tilde{\phi}) + E(\tilde{\phi}) \quad (7.19)$$

entsteht aber plötzlich eine sehr nützliche Gleichung, wie Abschnitt 7.3 demonstrieren wird.

Als Ergebnis soll festgehalten werden:

Satz 7.2 Sei W das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Graphen einer QFT, $\tilde{\phi} := \delta W(j)/\delta j$, Q das erzeugende Funktional der Kumulanten $D_{n \geq 3}$ und der 2-Punkt-Funktion G_2 . Es gelten die Definitionen aus (7.15) und (7.19) und (7.14); die Legendre-Transformation sei mit $\text{LT}[\cdot]$ bezeichnet. Dann ist

$$\Gamma(\tilde{\phi}) = \text{LT}[W(j)] - \text{LT}[Q(\bar{K})]$$

²nach K.-H. Rehren, private Mitteilung

7.3 Berechnung der ersten vier Greens-Funktionen in 1PI-Einheiten

das erzeugende Funktional der N1PI-Graphen (ohne die 2-Punkt-Vertexfunktion und abzüglich von Graphen, die nur aus einzelnen weißen Vertices bestehen) dieser Theorie und es ist

$$W(j) = \text{LT} \left[\gamma(\tilde{\phi}) \right].$$

Die Klausel „abzüglich von Graphen, die nur aus einzelnen weißen Vertices bestehen“ spiegelt erneut die Tatsache wider, dass die gesonderte Definition in Definition 4.2 speziell für Kapitel 8 gemacht wurde.

7.3 Berechnung der ersten vier Greens-Funktionen in 1PI-Einheiten

Zu illustrativen Zwecken und Rechtfertigung der Umformung (7.18) wird nun noch veranschaulicht, wie sich aus (7.2) die gesuchte Baumentwicklung ergibt. Mit den gleichen Rechnungen wie in Unterabschnitt 4.1.2 ist

$$\begin{aligned} \frac{\delta \gamma(\tilde{\phi})}{\delta \tilde{\phi}} &= -j \\ \frac{\delta^2 \gamma(\tilde{\phi})}{\delta \tilde{\phi}^2} \frac{\delta^2 W(j)}{\delta j^2} &= -\delta \\ \frac{\delta^3 \gamma(\tilde{\phi})}{\delta \tilde{\phi}^3} \left(\frac{\delta^2 W(j)}{\delta j^2} \right)^3 &= -\frac{\delta^3 W(j)}{\delta j^3}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Die dritte Gleichung von (7.20) ist am Punkt $j = 0$ diagrammatisch in Abbildung 7.2 dargestellt. Hierbei wird \tilde{D}_3 als *dekoriertes* weißer Vertex bezeichnet und ist via

$$\tilde{D}_n := \left. \frac{\delta^n E(\tilde{\phi})}{\delta \tilde{\phi}^n} \right|_{j=0} \quad \forall n \geq 3$$

definiert. Ebenfalls nach genau den gleichen Rechnungen wie in Unterabschnitt 4.1.2 ergeben sich diese dekorierten weißen Vertices zu

$$\begin{aligned} \frac{\delta E(\tilde{\phi})}{\delta \tilde{\phi}} &= -\bar{K} \\ \frac{\delta^2 E(\tilde{\phi})}{\delta \tilde{\phi}^2} \frac{\delta^2 Q(\bar{K})}{\delta \bar{K}^2} &= -\delta \end{aligned}$$

7 Eine Verallgemeinerung der Legendre-Transformation

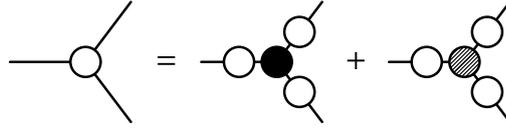


Abb. 7.2: Diagrammatische Darstellung der 3-Punkt-Funktion (wei\ss e Blase) als Summe von 3-Punkt-Vertexfunktion Γ_3 (schwarze Blase) mit au\ss eren Propagatoren und dekoriertem wei\ss en Dreier-Vertex \tilde{D}_3 , (schraffierte Blase), ebenfalls mit angeh\ngten au\ss eren Propagatoren.

$$-\frac{\delta^3 E(\tilde{\phi})}{\delta \tilde{\phi}^3} \left(\frac{\delta^2 Q(\bar{K})}{\delta \bar{K}^2} \right)^3 = \frac{\delta^3 Q(\bar{K})}{\delta \bar{K}^3} \text{ usw.}$$

H\ohere dekorierte wei\ss e Vertices sind demnach Baumgraphen, bestehend aus den wei\ss en Vertices als Vertexfunktionen. Die dekorierten wei\ss en Vertices sorgen also in der Tat daf\ur, dass im Gegensatz zur Q1PI-Definition aus den N1PI-Vertexfunktionen s\amtlliche Baumanteile entfernt werden.

Zu sehen ist in Abbildung 7.2, dass sich die zusammenh\ngende 3-Punkt-Funktion aus der Vertexfunktion Γ_3 mit angeh\ngten au\ss eren Propagatoren und einem dekorierten wei\ss en Dreier-Vertex D_3 zusammensetzt. Die vierte Ableitung sieht dann analog zum Standardfall folgenderma\ss en aus:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4 W(j)}{\delta j^4} &= \frac{\delta^4 \gamma(\tilde{\phi}, \bar{K})}{\delta \tilde{\phi}^4} \left(\frac{\delta^2 W(j)}{\delta j^2} \right)^4 \\ &+ \left(\frac{\delta^2 W(j)}{\delta j^2} \right)^2 \frac{\delta^3 \gamma(\tilde{\phi}, \bar{K})}{\delta \tilde{\phi}^3} \left(\frac{\delta^2 W(j)}{\delta j^2} \right) \frac{\delta^3 \gamma(\tilde{\phi}, \bar{K})}{\delta \tilde{\phi}^3} \left(\frac{\delta^2 W(j)}{\delta j^2} \right)^2 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Die niedrigeren Ableitungen sind bereits oben bestimmt worden und m\ussen nur noch eingesetzt werden. Zur Vier-Punkt-Vertexfunktion tritt noch der entsprechende dekorierte wei\ss e Vierervertex hinzu.

Die Ausf\uhrungen in diesem Abschnitt sind keinesfalls als Beweis zu verstehen. Dass die so berechneten $\delta^n W / \delta j^n |_{j=0}$ letztlich tats\ac hlich die n-Punkt-Funktionen darstellen, liegt vielmehr an der genauen Konstruktion der Transformation gem\ass Satz 7.1.

8 Hopf-algebraische Strukturaussagen

8.1 Strukturtheorem für allgemeine Graphen

Es soll nun die N1PI-Definition 4.2 (mit der Definition von einzelnen weißen Vertices als N1PI) zugrundegelegt und mit dem Hopf-Algebra-Apparat aus Kapitel 5 ein Strukturtheorem über den Zusammenhang von Summen von N1PI- und zusammenhängenden Graphen hergeleitet werden. Sei ρ_c gegeben wie in Satz 5.2, A_n wie in Unterabschnitt 5.2.3. Definiere $\rho_I(u)$ als Summe aller N1PI-Graphen in $\rho_c(u)$ für alle $u \in S(U)$. Die Überlegung, dass Anwendung von $\rho_I \circ A_n$ auf einen Term in $S(V)$ gerade eine Summe von solchen Graphen liefert, die beim Entfernen von D_n in n N1PI-irreduzible Graphen zerfallen (siehe Abbildung 5.1), führt laut [3] unter Beachtung der kombinatorischen Vorfaktoren auf den folgenden Satz :

$$\rho_c = \rho_I \circ e^{\sum_n A_n} \quad (8.1)$$

Es zeigt sich allerdings, dass diese Formel nicht ohne Weiteres (entgegen den Behauptungen in [3]) auf den gewohnten Kalkül der perturbativen QFT mit Funktionalableitungen übertragen werden kann. Um das zu verdeutlichen, soll nun der Standardfall betrachtet werden.

Seien also $A_{n \geq 3} = 0$ und die Derivation, die zum Feynman-Propagator gehört, definiert $\forall u_1, \dots, u_n \in S(V)$ als

$$F(u_1 \vee \dots \vee u_n) = \sum_i \frac{1}{2} \sum_{x \neq y} D_2(x, y) u_1 \vee \dots \vee \left(\frac{\partial u_{i,\{1\}}}{\partial \phi(x)} \vee \frac{\partial u_{i,\{2\}}}{\partial \phi(y)} \right) \vee \dots \vee u_n.$$

Die Formel (8.1) lautet dann

$$\rho_c = \rho_I \circ e^F. \quad (8.2)$$

8 Hopf-algebraische Strukturaussagen

Nun betrachten wir einen Term $u = \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\phi(x_5)\phi(x_6)$ und den F^1 -Term in der Reihenentwicklung von Gleichung (8.2). Dieser erzeugt unter anderem den Summanden $\rho_I \circ F(u) = \dots + D_2(x_3, x_4)\rho_I(\phi(x_1)\phi(x_2) \vee \phi(x_5)\phi(x_6)) + \dots$, der, da nicht zusammenhängend, offensichtlich nicht in der Feynman-Graphen-Entwicklung von $\rho_c(u)$ auftauchen kann. Würde man stattdessen verlangen, dass auch einzelne D_n reduzibel seien, so entstünde das Problem, dass sich $\rho_c(\phi\phi) = D_2 \neq 0 = \rho_I(\phi\phi) + D_2\rho(1)$ nicht mehr erzeugen ließe (genau wie ρ_c ist ja auch ρ_I eine infinitesimale Form).

$$\begin{aligned} \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\phi(x_5)\phi(x_6) &= \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \\ &\xrightarrow{F} \dots + \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \right) + \dots \xrightarrow{\rho_I} \dots + \begin{array}{ccc} | & | & | \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} + \dots \end{aligned}$$

Abb. 8.1: Veranschaulichung des Gegenbeispiels zu Gleichung 8.2. Die Ellipsen markieren die verschiedenen Tensorfaktoren. Es ist relevant, dass $\rho_I(\phi\phi) = D_2$ als N1PI definiert ist.

Dieses Problem besteht ganz allgemein so lange, wie es die Derivation F ermöglicht, in sich abgeschlossene Untergraphen eines gegebenen $u \in S(V)$ zu erzeugen. Anders ausgedrückt: In (8.1) würden Graphen zu oft gezählt werden, da äußere Beine gemäß der N1PI-Definition Definition 4.2 ja gar nicht Teil der N1PI-Einheiten der betrachteten Baumgraphen-Zerlegung sind.¹

Mehr oder weniger ad hoc kann dieses Problem, gerade weil es sich vollständig auf kombinatorisches Überabzählen zurückführen lässt, durch Einführung einer modifizierten Ableitung $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}\phi$ gelöst werden, die die Anwendung der Ableitungen

¹Eine andere Möglichkeit zur Interpretation dieses Fehlers wird in [1] angedeutet: Es muss nicht zwangsläufig $\phi^0(x)$ als $1 \in S(V)$ interpretiert werden. Ein Artikel mit einer Bewertung der sich daraus ergebenden Konsequenzen und weiterer Resultate bezüglich der vorgestellten Hopf-Algebra-Techniken wird derzeit von Ch. Brouder und F. Patras geschrieben (private Korrespondenz). Zu einer, in gewissem Sinne ad-hoc- und daher auf struktureller Ebene nur mäßig befriedigenden Lösung, die aber leistet, was sie soll, kann man allerdings auch schon gelangen, wenn man eine modifizierte Ableitung einführt (s. weiterer Text).

auf einzelne Feldoperatoren verhindert.

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi(x)} : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes(n-1)} \quad \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi(x)} (\phi^n(y)) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \phi^n(y) & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$$

mit produktregelgemäßer Ausweitung auf ganz $S(V)$:

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi(x)} (u_1 \cdots u_n) = \sum_i u_1 \cdots \left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi(x)} u_i \right) \cdots u_n \quad (8.3)$$

Diese *modifizierte Ableitung* ist keine Derivation im Leibnizschen Sinne mehr, wenn man Multiplikationen $\phi^n(x)\phi^m(x) = \phi^{n+m}(x)$ von Distributionen in abhängigen Variablen aus verschiedenen Tensorfaktoren von $S(V)$ haben will, denn dann ist z. B.

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi(x)} (\phi(y)\phi(y)) = 0 \neq 2\phi(y)\delta(x-y) = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi(x)} (\phi^2(y)). \quad (8.4)$$

Um solche Doppeldeutigkeiten zu vermeiden, sollen Elemente $u \in S(V)$ immer als $\phi^{n_1}(x_1) \cdots \phi^{n_k}(x_k)$ mit paarweise verschiedenen x_i verstanden werden. Die definitionsgemäß richtige Interpretation von (8.4) ist somit die rechte Seite. Die Derivation (5.9) wird dann zur *modifizierten Derivation*

$$\mathfrak{A}_m(u) := \frac{1}{m!} \int dx_1 \cdots dx_m D_m(x_1, \dots, x_m) \frac{\mathfrak{d}u_{\{1\}}}{\mathfrak{d}\phi(x_1)} \vee \cdots \vee \frac{\mathfrak{d}u_{\{m\}}}{\mathfrak{d}\phi(x_m)}. \quad (8.5)$$

So ist die Richtigkeit der Formel

$$\rho_c = \rho_I \circ e^{\sum_n \mathfrak{A}_n} \quad (8.6)$$

wieder sichergestellt. Das Argument funktioniert wie folgt: Betrachte $u \in S(V)$. $\rho_I \circ \mathfrak{A}_n(u)$ erzeugt daraus einen Baumgraphen mit n N1PI-Einheiten und einem n -beinigen weißen Vertex. Durch Kombination aller möglicher modifizierten Derivationen \mathfrak{A}_n samt ihrer Symmetriefaktoren entsteht die Summe

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \prod_i \mathfrak{A}_i^{\alpha_i} = e^{\sum_n \mathfrak{A}_n},$$

wobei \prod_i als Verknüpfung der Derivationen zu sehen ist. Es ist auch klar, dass sich jeder zusammenhängende Graph als Baumgraph seiner N1PI-Teile konstru-

ieren lässt, also folgt (8.6). Genau an der Stelle, dass das Resultat ein Baumgraph ist, scheitert das Argument aus [3], denn es können dort mit der gewöhnlichen Derivation auch unverbundene Graphen entstehen.

8.2 Bezug zur Legendre-Transformation

(8.6) sollte im Standardfall einen der Legendre-Transformation wenigstens ähnlichen Zusammenhang zwischen den erzeugenden Funktionalen der zusammenhängenden und der 1PI-Graphen implizieren. Zunächst werden die Rechnungen aber noch im allgemeinen Fall durchgeführt. Um die Kombinatorik zu erleichtern, wird anstelle von $S(U) = S(S(V))$ die (ebenfalls graduierte) Tensoralgebra $\mathcal{T}(U) = \bigoplus_n U^{\vee n}$ betrachtet, das heißt, es wird nicht länger die Permutationsgruppe \mathcal{S}_n aus den einzelnen Summanden herausgeteilt. Die einzige Änderung, die am in Kapitel 5 und Abschnitt 8.1 vorgestellten Konzept vorgenommen werden muss, ist der Wegfall des kombinatorischen Vorfaktors $1/m!$ in den Ableitungen (8.5). Der Vorteil dieser Modifikation ist aber, dass $u \vee v \neq v \vee u$ und man deswegen auf die Positionen der Tensorfaktoren im Tensorprodukt Bezug nehmen kann. Es ist mit $u_j := T e^{j\phi} e^{-iH_{int}}$ und einem Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots)$:

$$\begin{aligned} W(j) &= \rho_c(u_j) = \rho_I \circ e^{\sum_n \mathfrak{A}_n(u_j)} \\ &= \rho_I \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \prod_i \mathfrak{A}_i^{\alpha_i}(u_j) \right) \end{aligned}$$

Es darf aber nur über auch tatsächlich verschiedene Summanden summiert werden. Das bedeutet, dass für jedes j mit $D_j \equiv 0$ auch $\alpha_j = 0$ fixiert werden muss, um ungewünschte Summanden zu entsorgen.

Nun wird versucht, $W(j)$ in obiger Darstellung in geeigneter Weise zu resumieren.

$$\prod_i \mathfrak{A}_i^{\alpha_i}(u_j) = T_1^{(\alpha)} + T_2^{(\alpha)} + \dots$$

$T_l^{(\alpha)}$ für $l \leq |\alpha|$ ist dabei die Summe aller Terme, in denen der Tensorfaktor aus $\mathcal{T}(U)$, der am weitesten links steht, mit l weißen Vertices verbunden ist. Dieser Tensorfaktor soll mit $\hat{\Gamma}_l^{\alpha}$ bezeichnet werden.

Da die Hamilton-Dichte $-iH_{int}(x) + j(x)\phi(x)$ ein primitives Element bezüglich δ

ist (Wechselwirkungsverices werden unter δ nicht getrennt), d. h.

$$\delta\left(-iH_{int}(x) + j(x)\phi(x)\right) = 1 \vee \left(-iH_{int}(x) + j(x)\phi(x)\right) + \left(-iH_{int}(x) + j(x)\phi(x)\right) \vee 1,$$

ist $u_j = T e^{-\int dx (iH_{int}(x) + j(x)\phi(x))}$ gruppenartig, d. h.

$$\delta(u_j) = u_j \vee u_j.$$

Das setzt sich auch auf die iterierten Koprodukte fort.

Nun betrachten wir die Zerlegung (Integrationen werden hier wie auch im Folgenden implizit verstanden und nicht ausgeschrieben, um die Notation übersichtlich zu gestalten) mit der Notation $\#\beta := \sum_i \beta_i(i-1)$

$$T_l^{(\alpha)} = \sum_{\substack{|\beta|=l \\ \alpha \geq \beta}} \left(\prod_i D_i^{\beta_i} \right) \bar{\Gamma}_l^\alpha \vee \prod_i \mathfrak{R}_i^{\alpha_i - \beta_i} \overbrace{\left(T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \vee \dots \vee T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right)}^{\#\beta \text{ mal}}.$$

Im Folgenden wird

$$\tilde{u}_\beta := \overbrace{\left(T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \vee \dots \vee T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right)}^{\#\beta \text{ mal}} \quad (8.7)$$

abgekürzt.

Mit der obigen Überlegung, dass u_j gruppenartig ist, wird auch klar, dass $\hat{\Gamma}_l^\alpha =: \hat{\Gamma}_l$ nur von l abhängt, denn es folgt, dass auch der linke Tensorfaktor im Wesentlichen aus Ableitungen angewandt auf u_j besteht:

$$\hat{\Gamma}_l = \left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} \right)^l u_j. \quad (8.8)$$

Nun werden die $T_l^{(\alpha)}$ in allen Ordnungen gesammelt und in $W(j)$ eingesetzt:

$$W(j) = \rho_I \left(\sum_{\alpha, l} \frac{1}{\alpha!} T_l^\alpha \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \rho_I(\hat{\Gamma}_l) \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\substack{|\beta|=l \\ \alpha \geq \beta}} \left(\prod_i D_i^{\beta_i} \right) \rho_I \left(\prod_i \mathfrak{R}_i^{\alpha_i - \beta_i}(\tilde{u}_\beta) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l \sum_{|\beta|=l} \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \geq \beta}} \frac{1}{\beta!} \frac{\beta!}{\alpha!} \left(\prod_i D_i^{\beta_i} \right) \rho_I \left(\prod_i \mathfrak{X}_i^{\alpha_i - \beta_i}(\tilde{u}_\beta) \right) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l \sum_{|\beta|=l} \left(\frac{1}{\beta!} \prod_i D_i^{\beta_i} \right) \rho_I \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \prod_i \mathfrak{X}_i^{\alpha_i}(\tilde{u}_\beta) \right) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l \sum_{|\beta|=l} \left(\frac{1}{\beta!} \prod_i D_i^{\beta_i} \right) \rho_I \left(e^{\sum_n \mathfrak{X}_n}(\tilde{u}_\beta) \right) \\
&\stackrel{(8.6)}{=} \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l \sum_{|\beta|=l} \left(\frac{1}{\beta!} \prod_i D_i^{\beta_i} \right) \rho_c(\tilde{u}_\beta) \\
&\stackrel{(8.7)}{=} \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l \sum_{|\beta|=l} \left(\frac{1}{\beta!} \prod_i D_i^{\beta_i} \right) \left[\rho_c \left(T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) \right]^{\#\beta}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde in der zweiten Zeile $\Gamma_l := \rho_I(\hat{\Gamma}_l)$ definiert, in der dritten die Indexverschiebung $\alpha \geq \beta \mapsto \alpha \geq (0, \dots)$ vorgenommen und in der fünften wieder das Strukturtheorem (8.6) angewandt.

Nun soll das Hilfsfeld ψ mit den entsprechenden Propagatoren $\langle 0|T\phi\psi|0\rangle = \delta$ und $\langle 0|T\psi\psi|0\rangle = 0$, das bereits aus Abschnitt 6.2 bekannt ist, als Ersatz für die modifizierten Ableitungen benutzt werden. Die Terminologie für ρ_c und ρ_I bleibt die gleiche: Propagatoren $r(\psi\phi)$ und $r(\psi\psi)$ werden in Bezug auf den Zusammenhang von Feynman-Diagrammen genau gleich behandelt wie die Propagatoren $r(T\phi\phi)$. Es wird allerdings immer nur ein solches ψ in einem ρ auftauchen können, um den nicht definierten Fall eines Auftauchens von $r(\psi \cdots \psi\phi \cdots \phi)$ mit mehreren ψ zu vermeiden.

$$\rho_I \left(T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) = \rho_I \left(T\psi e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) - \rho_I \left(T\psi e^{j\phi} \right) = \rho_I \left(T\psi e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) - \overbrace{\rho_I(T\psi j\phi)}^{=j} \quad (8.9)$$

Das liegt daran, dass die Kombinatorik von „Ableiten nach ϕ “ die gleiche ist wie die von „alle möglichen Kontraktionen von ϕ mit ψ zu δ “, denn in beiden Fällen verringert sich die Anzahl der Feldoperatoren um eins und es wird ein kombinatorischer Vorfaktor entsprechend der Anzahl der Möglichkeiten dazu eingefügt. Die in (8.9) nicht berücksichtigten Kontraktionen mit den Termen aus $e^{j\phi}$ werden dadurch ausgeschlossen, dass eine solche Kontraktion einen nicht-zusammenhängenden Graphen liefern würde (es sei denn, diese Kontraktion

wäre der einzige Bestandteil des Graphen) und somit nicht in der Entwicklung von ρ_l in Feynman-Graphen auftaucht. Die gleiche Argumentation gilt bei

$$\rho_c \left(T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) \stackrel{(8.9)}{=} \rho_c \left(T \psi e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) - j \stackrel{(7.14)}{=} \bar{K} - j,$$

da ρ_c ebenfalls unzusammenhängende Graphen ausschließt.

Mit (8.8) ist tatsächlich

$$\Gamma_l = \rho_l(\bar{\Gamma}_l) = \rho_l \left(T \frac{\mathfrak{d}^l}{\mathfrak{d}\phi^l} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right)$$

die amputierte l -Punkt-Vertexfunktion, denn sie „koppelt“ nur direkt an Wechselwirkungs-Vertices. Allerdings hängt sie mitunter noch von j ab, denn beispielsweise durch

$$\frac{1}{3!} \frac{\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{d}\phi^2} \phi^3 \sim \phi$$

kann ein Term $j\rho_l(\phi\phi)$ entstehen, sie sind also nicht als echte N1PI-Einheiten einer Baumgraphenzerlegung zu betrachten.

Die oben hergeleitete Resummation von $W(j)$ war

$$W(j) = \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l \sum_{|\beta|=l} \frac{1}{\beta!} \prod_i D_i^{\beta_i} \left(\rho_c \left(T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) \right)^{\beta_i(i-1)}. \quad (8.10)$$

Im Standardfall reduziert sich der Multiindex auf $\beta_{n \neq 2} = 0$, $\beta! = l!$. Leider ist dann (mit $Q(k) = \frac{1}{2}G_2k^2$)

$$D_2 \rho_c \left(T \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\phi} e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) \neq D_2 \rho_c \left(T \psi e^{j\phi} e^{-iH_{int}} \right) = D_2 \bar{K} \stackrel{(7.4)}{=} \tilde{\phi} = \frac{\delta W(j)}{\delta j},$$

außerdem hängt auch die 1-Punkt-Vertexfunktion nicht von j ab (das Potential H_{int} beginnt in mindestens kubischer Ordnung), da Graphen mit äußeren Propagatoren nicht N1PI sind – ganz abgesehen davon, dass die Γ_l von j abhängen können und damit auch nicht als echte Vertexfunktionen zu betrachten sind. Das bedeutet, dass das Ergebnis keine Legendre-Transformation ist. Da in diesem Ansatz aber auch Γ_2 ein „richtiger“ irreduzibler Graph ist (anstatt nur das Inverse der 2-Punkt-Funktion zu sein wie etwa in Abschnitt 4.1) und Graphen, die nur einzelne Propagatoren sind, ebenfalls als 1PI gelten, verwundern die Unterschiede nicht

8 Hopf-algebraische Strukturaussagen

sehr.

9 Zusammenfassung und Diskussion

Zunächst wurden verschiedene Erweiterungen der 1PI-Definition für gewöhnliche Zustände auf den allgemeinen Fall besprochen. Zwei brauchbare Definitionen haben sich herausgestellt: Eine, die wie im gewöhnlichen Falle nur Zerlegungen entlang der 2-Punkt-Funktion betrachtet (quasifrei-ein-Teilchen-reduzibel), und eine zweite, die auch maximale Zerlegungen¹ entlang von verallgemeinerten Propagatoren (höhere Kumulanten) berücksichtigt und deswegen natürlicher erscheint (n-Beine-ein-Teilchen-reduzibel).

In Analogie zur Gell-Mann-Low-Formel wurden in Satz 6.1 höhere Kumulanten in nichtlokale Potentiale umgewandelt, um so auch allgemeine Zustände ρ mittels eines freien Vakuumzustandes beschreiben zu können.

Die Legendre-Transformation von $W(j)$ liefert offensichtlich direkt das erzeugende Funktional der Q1PI-Graphen. Im Falle von N1PI-Graphen gestaltet sich die Sachlage schwieriger. Mit einem Resummationstheorem für bipartite Graphen wurde herausgearbeitet, dass sich auch im allgemeinen Fall das gesuchte erzeugende Funktional der N1PI-Graphen als eine Verkettung von Legendre-Transformationen der beteiligten Funktionale schreiben lässt.

Es wurde weiterhin ein Hopf-Algebraischer Ansatz untersucht, der eine extrem kompakte Notation der Feynman-Kombinatorik ermöglicht. Nach einer kleineren Korrektur an einem Strukturtheorem aus [3] wurde es dazu benutzt, eine Resummation des erzeugenden Funktionals der zusammenhängenden Greens-Funktionen durchzuführen. Die Korrespondenz zur Legendre-Transformation des Standardfalls konnte nicht hergestellt werden, da sich augenscheinlich kleinere Unterschiede in den zugrundeliegenden Definitionen bemerkbar machten.

Die herkömmliche Struktur der Legendre-Transformationen aus Kapitel 7 legt nahe, dass sie auf struktureller Ebene besser geeignet ist, um Korresponden-

¹Soll heißen: Zerlegungen, die die maximale Zahl von disjunkten Subgraphen erzeugen

9 Zusammenfassung und Diskussion

zen zwischen erzeugenden Funktionalen zusammenhängender und irreduzibler Graphen zu beschreiben, als die Hopf-Algebra-Struktur, da dort allerlei Sonderdefinitionen nötig waren (Sonderrolle einzelner weißer Vertices, Verwendung modifizierter Ableitungen).

Die Rechnung aus Kapitel 8 war nur einer von mehreren möglichen Ansätzen, $W(j)$ zu resumieren (andere Ansätze konnte aufgrund der begrenzten Zeit nicht überprüft werden). Es ist also nicht die grundsätzliche Unverträglichkeit des Strukturtheorems mit der Legendre-Transformation gezeigt worden. Außerdem stellt sich die Frage, ob sich mit einer anderen, natürlicheren N1PI-Definition (z. B. ohne die Sonderrolle der einzelnen weißen Vertices) und den echten Ableitungen $\delta/\delta\phi$ nicht auch ein Strukturtheorem ähnlich zu (8.6) herleiten ließe – eine kompakte Form wie $e^{\Sigma A_n}$ müsste dann aber wohl aufgegeben werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Ch. Brouder. Quantum Field Theory meets Hopf Algebra. *Math. Nachr.*, 282 (12):1664 – 1690, 2007.
- [2] Ch. Brouder. The Structure of Green Functions in Quantum Field Theory with a General State, 2007. URL [arXiv:hep-th/0710.5652v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/0710.5652v1).
- [3] Ch. Brouder, A. Frabetti, and F. Patras. One-Particle Irreducibility with Initial Correlations, 2008. URL [arXiv:cond-mat.str-el/0803.3747v2](https://arxiv.org/abs/cond-mat.str-el/0803.3747v2).
- [4] K.C. Chou, Z.B. Su, B.L. Hao, and L. Yu. Equilibrium and Non-Equilibrium Formalisms Made Unified. *Phys. Repts.*, 118:1–131, 1985.
- [5] J. C. Collins. *Renormalization: An Introduction to Renormalization*. Cambridge University Press, 1985.
- [6] A. Connes and D. Kreimer. Hopf Algebras, Renormalization and Non-commutative Geometry. *Commun. Math. Phys.*, 199:203–242, 1998. URL [arXiv:hep-th/9808042](https://arxiv.org/abs/hep-th/9808042).
- [7] S.H. Djah, H. Gottschalk, and H. Ouerdiane. Feynman Graph Representation of the Perturbation Series for General Functional Measures. *J. Funct. Anal.*, 227:153–187, 2004. URL [arXiv:math-ph/0408031v1](https://arxiv.org/abs/math-ph/0408031v1).
- [8] S.H. Djah, H. Gottschalk, and H. Ouerdiane. Feynman Graphs for Non-Gaussian Measures, 2005. URL [arXiv:math-ph/0501030v3](https://arxiv.org/abs/math-ph/0501030v3).
- [9] G.H.E. Duchamp, P. Blasiak, A. Horzela, K.A. Penson, and A.I. Solomon. Hopf algebras in general and in combinatorial physics: a practical introduction, 2008. URL [arXiv:0802.0249](https://arxiv.org/abs/0802.0249).
- [10] H. Figueroa and J.M. Gracia-Bonda. Combinatorial Hopf algebras in Quantum Field Theory I. *Rev. Math. Phys.*, 17:881, 2005.

Literaturverzeichnis

- [11] R. Friedberg. Dual trees and resummation theorems. *J. Math Phys.*, 1974.
- [12] W. Greiner. *Feldquantisierung*. Springer, 1993.
- [13] S. Hollands and W. Ruan. The State Space of Perturbative Quantum Field Theory in Curved Spacetimes. *Annales Henri Poincare*, 2002.
- [14] G. Jona-Lasinio. Relativistic Field Theories with Symmetry-Breaking Solutions. *Nuovo Cimento*, 34:1790–95, 1964.
- [15] L.V. Keldysh. Diagram Technique for Nonequilibrium Processes. *Soviet Phys. JETP*, 20:1018–26, 1965.
- [16] D. Kreimer. *Knots and Feynman diagrams*. Cambridge University Press, 2000.
- [17] M. Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge Univ. Press, 2007.

Erklärung nach §13(8) der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.

Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nichtbestandenen Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 11. August 2010

(Achim Randelhoff)