GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Fakultät für Physik

Bachelorarbeit

Die Hadamard-Bedingung für das Klein-Gordon-Feld auf gekrümmten Raumzeiten

The Hadamard Condition for the Klein-Gordon-Field on Curved Spacetimes

angefertigt von

Danilo Paulikat

aus Wismar

am Mathematischen Institut

Bearbeitungszeit: 23. Juni 2010 bis 29. September 2010

Erstgutachterin: Prof. Dr. Dorothea Bahns

Zweitgutachter: Prof. Dr. Karl-Henning Rehren

Zusammenfassung

In dieser Arbeit berechnen wir den renormierten Energie-Impuls-Tensor des quantisierten Klein-Gordon-Feldes. Wir folgen der „Point-Splitting"-Renormierung und finden so einen Ausdruck in Abhängigkeit der Hadamard-Koeffizienten. Nach Berechnung dieser Koeffizienten steht am Ende ein glatter Energie-Impuls-Tensor, der nach Wahl von physikalischen Anfangsbedingungen und einer Metrik genutzt werden kann, um die Rückwirkung des Quantenfeldes auf die Raumzeit zu studieren.

Abstract

Within this paper we calculate the renormalized energy-momentum-tensor of the quantized Klein-Gordon-Field. Following the "point-splitting"-procedure we get an expression in terms of coefficients of the Hadamard-Distribution. Calculating these coefficients and inserting in this expression yields a smooth energy-momentum-tensor, which can be used to study the backreaction of the quantum field on the spacetime after specifying the metric and the physical conditions.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden zwei große Entdeckungen gemacht. Zum einen fand Max Planck die Existenz von Lichtquanten, was die allmähliche Entwicklung einer Quantentheorie nach sich zog und sich zunächst in einer nichtrelativistischen Quantenmechanik äußerte. In den 30er Jahren wurde dann aber auch begonnen (relativistische) Feldtheorien zu quantisieren. Mit dem heute existierenden Standardmodell der Teilchenphysik können drei der vier fundamentalen Kräfte, die starke, schwache und elektromagnetische Wechselwirkung, bereits gut beschrieben werden. Doch trotz der guten Vorhersagen der Modelle, weist diese Beschreibung Mängel auf, da bei den Berechnungen unphysikalische Divergenzen auftreten, die zwar mathemathisch korrekt renormiert werden können, jedoch Schwächen der Theorie aufzeigen.

Eine unter vielen Physikern verbreitete Meinung ist, dass diese Quantenfeldtheorien nur eine Niedrigenergienäherungen von allgemeinen Theorien sind. Demnach würden diese Divergenzprobleme nicht auftreten, wenn der korrekten Limes von solch einer Theorie genommen wird. Es stellt sich allerdings die Frage, wie diese aussehen sollte. Bis heute ist es noch nicht gelungen eine adäquate Theorie aufzustellen.

Ein weiterer Wermutstropfen im Standardmodell ist das Fehlen der vierten fundamentalen Kraft: der Gravitation. Obgleich die neue Beschreibung Einsteins der Gravitation als Krümmung des Raumes (siehe Abschnitt 2.2) die zweite große Entdeckung Anfang des 20. Jahrhunderts war, blieb sie doch einer konsistenten Quantisierung bisher verschlossen. Diese sollte in einer allgemeinen Theorie aber möglichst enthalten sein.

Ein möglicher Ansatz zum Sammeln von Indizien, wie dieses neue Standardmodell aussehen sollte, ist die Betrachtung einer Quantentheorie auf einer klassischen, aber gekrümmten Raumzeit. Diese vermeidet zwar nicht die Notwenigkeit einer Renormierung, aber es können neue Erkenntnisse im Bezug auf den Casimireffekt, den Hawking Effekt oder die Singularitätstheoreme von Hawking und Penrose gewonnen werden (siehe [9] sowie Referenzen darin).

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der Renormierungstheorie des Klein-Gordon-Feldes auf allgemeinen gekrümmten Raumzeiten. In Kapitel 2 werden dazu zunächst verwendete Konventionen festgelegt und einige Grundlagen diskutiert, auf denen diese Arbeit aufbaut. Dazu gehören die Einstein'schen Feldgleichungen, verschiedene Aspekte der Klein-Gordon-Theorie und einige geometrische Überlegungen.

In Kapitel 3 folgt zunächst die Erläuterung der Verbindung einer Quantentheorie auf einer gekrümmten Raumzeit mit dem Einsteintensor (2.1). Anhand des Klein-Gordon-Feldes wird dann explizit eine Renormierung des Energie-Impuls-Tensors durchgeführt. Am Ende wird dann noch auf das Problem der Spuranomalie eingegangen, die sämtlichen Renormierungsversuchen dieser Theorie gemein ist.

Eine vollständige Analyse des Energie-Impuls-Tensors erfordert nun noch die Berechnung der darin auftretenden Koeffizienten, womit sich Kapitel 4 beschäftigt. Wegen seiner guten Handhabbarkeit, wird der Wärmeleitungskern als technisches Hilfsmittel genutzt. Ein Vergleich von Klein-Gordon-Gleichung und Wärmeleitungsgleichung lässt dann den Schluss auf die sogenannten Hadamard-Koeffizienten zu.

Kapitel 5 enthält am Ende einen kurzen Ausblick darüber, welche Möglichkeiten diese Berechnungen nach sich ziehen.

An dieser soll noch darauf hingewiesen werden, dass es sich hierbei um eine bereits korrigierte Version dieser Arbeit handelt. Die Korrekturen waren nötig, um dem interessierten Leser offensichtliche Unstimmigkeiten zu ersparen.

2 Grundlagen

2.1 Konventionen und wichtige Relationen

Zu Beginn wollen wir einige Konventionen festlegen, die sich durch diese Arbeit hindurchziehen.

2.1.1 Distributionen

Distributionen werden in dieser Arbeit als verallgemeinerte Funktionen behandelt. Die Rechnungen werden formal durchgeführt. Wir verzichten auf eine Verschmierung mit Testfunktionen.

2.1.2 Metrik

Den Großteil dieser Arbeit werden wir auf einer allgemeinen vierdimensionalen Lorentz'schen Mannigfaltigkeit arbeiten. Die dabei auftretende Pseudo-Riemannsche Metrik mit Signatur $(-1, 1, 1, 1)$ wird mit $g_{\mu\nu}(x)$ bezeichnet. Das Argument wird mitunter auch weggelassen, wenn klar ist, an welchem Punkt wir auswerten. Als weitere Annahme an die Mannigfaltigkeit stellen wir globale Hyperbolizität (siehe z.B. [2]), sodass beispielsweise Kausalität gewahrt bleibt, sowie die Existenz eines wohlgestellten Cauchyproblems und globaler Fundamentallösung der Klein-Gordon-Gleichung gesichert ist.

2.1.3 Indizes und Summen

Allgemein werden für Objekte auf Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten griechische Indizes verwendet. Arbeiten wir, wie in Abschnitt (4.1), ausschließlich auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, so werden lateinische Indizes verwendet. Für griechische als auch lateinische gilt durchweg Einsteins Summenkonvention, d.h. über jeweils hoch- und tiefgestellte Indizes wird summiert.

2.1.4 Kovariante Ableitung

Da wir auf gekrümmten Raumzeiten arbeiten, verwenden wir anstatt partieller, kovariante Ableitungen um die Tensoreigenschaften der differenzierten Objekte zu bewahren. Es gilt:

$$\nabla_\mu T^{\sigma\dots}{}_{\tau\dots} = T^{\sigma\dots}{}_{\tau\dots;\mu} = \partial_\mu T^{\sigma\dots}{}_{\tau\dots} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} T^{\rho\dots}{}_{\tau\dots} + \dots - \Gamma^\rho{}_{\tau\mu} T^{\sigma\dots}{}_{\rho\dots} \dots$$

Für unsere Zwecke arbeiten wir ausschließlich mit dem Metrik kompatiblen ($\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$), torsionsfreien ($\mathcal{T}^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \equiv 0$) Levi-Civita-Zusammenhang. Angewendet auf skalare Objekte reduziert sich die kovariante wieder zu der partiellen Ableitung. Für diese gilt für den von uns gewählten Zusammenhang zudem

$$\phi_{;\mu\nu} = \phi_{;\nu\mu}.$$

Auf allgemeinen Tensoren hingegen gilt für das Vertauschen von kovarianten Ableitungen

$$T^{\sigma\dots}{}_{\tau\dots;\mu\nu} = T^{\sigma\dots}{}_{\tau\dots;\nu\mu} + R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} T^{\rho\dots}{}_{\tau\dots} + \dots - R^\rho{}_{\tau\mu\nu} T^{\sigma\dots}{}_{\rho\dots} - \dots$$

mit dem Riemanschen Krümmungstensor

$$R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} = \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\tau} - \partial_\tau \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\Gamma^\rho{}_{\nu\tau} - \Gamma^\mu{}_{\rho\tau}\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}.$$

Zudem werden wir häufig dem Ricci-Tensor $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$, der Spur des Riemann-Tensors begegnen.

2.1.5 Dimension

Wir benutzen hier ein Einheitensystem, in dem $c = \hbar = 1$. Die Gravitationskonstante G wird jedoch nicht dimensionslos gemacht und bekommt damit die Dimension $(Masse)^{-2}$. Insbesondere bedeuted dies, dass eine Differenziation die Dimension $(Masse)^1$ trägt und die Energiedichte $(Masse)^4$.

2.2 Die Einsteingleichungen

Anfang des 20. Jahrhunderts fand Einstein die Korrespondenz zwischen Krümmung der Raumzeit und Gravitation. Demnach ist die Gravitation eine physikalische Feldtheorie, deren Grundlage geometrische Objekte sind. Das zu betrachtende Feld ist dabei der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$. Im Vakuum haben wir im allgemeinen eine Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{grav}} = (16\pi G)^{-1}R$, die lediglich aus einem Vielfachen des Krümmungsskalars $R = R_\mu{}^\mu$ besteht. Unter gewissen physikalischen Umständen können dieser allerdings weitere Terme beigefügt werden. Um die Wirkung S aufzustellen, verwenden wir das kanonische koordinateninvariante Maß $\sqrt{-g}\,dx$, mit $g = \det g_{\mu\nu}$, zur Integration über Mannigfaltigkeiten.

$$S_{\text{grav}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\,dx$$

Variation nach der Metrik ergibt die Einstein'schen Vakuumgleichungen

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \tag{2.1}$$

Spielt jedoch noch irgendeine Form von Materie eine Rolle, dessen Einflussbereich in der betrachteten Umgebung liegt, so ist diese Beschreibung nicht mehr ausreichend. Die Wirkung muss dann um einen Term $S_{\text{mat}}[g_{\mu\nu}, \Psi]$ erweitert weren. Dieser beschreibt zum einen die Dynamik des Materiefeldes Ψ selbst im gekrümmten Hintergrund (Variation nach Ψ), sowie die Rückwirkung auf das Gravitationsfeld (Variation nach $g_{\mu\nu}$). Letzteres wird im Energie-Impuls-Tensor zum Ausdruck gebracht, der über

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}S_{\text{mat}}$$

definiert ist. Das Prinzip der minimalen Wirkung auf das Gesamtfunktional $S = S_{\text{grav}} + S_{\text{mat}}$ angewendet, führt schließlich auf die Einsteingleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\,T_{\mu\nu}.$$

Zum Schluss dieses Abschnittes wird noch eine wichtige Eigenschaft, die Energie-Impuls-Erhaltung erwähnt. Nach ein wenig Rechnung unter Nutzung der Bianchi-Identität ist ersichtlich, das $G_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$, womit dies auch für die rechte Seite der

Gleichung gelten muss. Wir haben also

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0.$$

Für eine ausführlichere Einführung siehe zum Beispiel [3].

2.3 Die Klein-Gordon-Theorie

Die Klein-Gordon-Theorie beschreibt ein relativistisches, massives Teilchen ohne Spin. Sie wurde zunächst in einer flachen Raumzeit entwickelt. Diese Feldtheorie startet von der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - m^2\phi^2\right)$$

mit der Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$. Diese erhält nur hier in Abschnitt 2.3 die andere übliche Signatur, da frühere Rechnungen mit in Betracht gezogen werden. Im Folgenden können die Ergebnisse durch ein einfachen Vorzeichenwechsel im Potenzial weiter verwendet werden. Die Wirkung hat nun dementsprechend die Form

$$S_{KG} = \int \mathcal{L}_{KG} dx = \frac{1}{2}\int \left(\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - m^2\phi^2\right) dx.$$

Mittels Variation nach ϕ erhalten wir eine Gleichung zur Beschreibung der Dynamik des Feldes. Sie lautet

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0. \tag{2.2}$$

Eine andere Möglichkeit diese Gleichung herzuleiten wäre über die erste Quantisierung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$. Wir benötigen für unsere Zwecke allerdings den eben vorgestellten feldtheoretischen Ansatz.

2.3.1 Der klassische Energie-Impuls-Tensor

Um das Klein-Gordon-Feld in die Materiewirkung der Gravitation aufzunehmen müssen wir zunächst den Einfluss der gekrümmten Raumzeit auf das Feld selbst betrachten. Zum einen müssen hier die partiellen durch kovariante Ableitungen ersetzt werden, zum anderen kann die Lagrangedichte durch geometrische Terme erweitert

und so mit dem Gravitationsfeld gekoppelt werden. Diese Terme müssen im flachen Fall verschwinden, damit sich die Lagrangedichte dann wieder auf ihre ursprüngliche Form reduziert. Üblicherweise wird die einfachste Verallgemeinerung gewählt und so wenig wie möglich zusätzliche Terme verwendet. Für uns bietet es sich allerdings an, einen Term $-\xi R\phi^2$ mit aufzunehmen. ξ ist hierbei ein freier Parameter. Er kann bei Bedarf auch auf 0 gesetzt werden, für $m = 0$ und $\xi = \frac{1}{6}$ allerdings wird die Theorie konform invariant (d.h. konforme Transformationen lassen die Lagrangedichte invariant), was die Berechnungen bzw. weitere Betrachtungen erleichtert.
Wir arbeiten auf gekrümmten Raumzeiten nun also mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) - m^2\phi^2 - \xi R\phi^2\right), \tag{2.3}$$

sowie mit der Feldgleichung

$$\left(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R\right)\phi = 0. \tag{2.4}$$

Aus Gl. (2.3) ergibt sich zudem der Energie-Impuls-Tensor der Klein-Gordon-Theorie (vgl. z.B. S.65 [8]):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} =& (1-2\xi)\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\phi_{;\rho}\phi_{;\sigma} - 2\xi\phi\phi_{;\mu\nu} + 2\xi g_{\mu\nu}\phi\phi_{;\mu}{}^{\mu} \\ &+ \xi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\phi^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\phi^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die Spur dieses Tensors nimmt die Gestalt

$$T_\mu{}^\mu = (6\xi - 1)\phi_{;\mu}\phi^{;\mu} + (6\xi\phi_{;\mu}{}^\mu - \xi R\phi)\phi - 2m^2\phi^2$$

an. Die erwähnte konforme Invarianz für $m = 0$ und $\xi_c = \frac{1}{6}$ hat zur Folge, dass für diese Werte und unter Verwendung von (2.4) die Spur des Energie-Impuls-Tensors identisch verschwindet:

$$T_\mu{}^\mu \equiv 0.$$

2.3.2 Das quantisierte Klein-Gordon-Feld im Minkowskiraum

Betrachten wir nun noch einmal die Dynamik des Feldes selbst. Dies soll zudem im Minkowskiraum geschehen, da sie dort gut verstanden ist und den Ausgangspunkt für ein quantisiertes Feld auf gekrümmten Hintergrund darstellt. Wir verwenden in diesem und nur in diesem Abschnitt also ausschließlich die Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu}$. Für die Fouriertransformation im Minkowskiraum verwenden wir die Konvention

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ik^\mu x_\mu} f(x) dx,$$

sodass wir in den räumlichen Variablen das übliche Minuszeichen bekommen. Wir skizzieren hier nur schemenhaft ein paar Eckpunkte für die Quantisierung des Feldes. Für eine ausführlichere Behandlung siehe z.B. [10].

Die Fouriertransformation der Klein-Gordon-Gleichung (2.2), also

$$(k_\mu k^\mu - m^2)\widehat{\phi}(k) = \left((k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2\right) \widehat{\phi}(k) = 0,$$

gibt uns Auskunft über die Trägereigenschaften des Feldes im Impulsraum. Wir sehen, dass dieser nur auf den Massenhyperboloiden $k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ liegt. Dementsprechend handelt es sich hier insbesondere um eine Distribution.
Man kann das reelle Klein-Gordon-Feld in positive ($\phi^+(x)$) und negative ($\phi^-(x)$) Frequenzlösungen aufteilen. Nach einiger Rechnung erhalten wir für das Feld den Ausdruck

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left(e^{-ik^\mu x_\mu} \phi^+(\vec{k}) + e^{ik^\mu x_\mu} \phi^-(\vec{k})\right),$$

wobei $\phi^\pm(\vec{k}) = ((2\pi)^3 2\omega_k)^{-1/2} \widehat{\phi}^\pm(k)$ und $k^0 = \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ bezeichnet. Im Zuge der kanonischen Quantisierung wird nun $\phi^+(\vec{k})$ als Vernichtungsoperator $a(\vec{k})$ und $\phi^-(\vec{k})$ als Erzeugungsoperator $a^+(\vec{k})$ interpretiert. Diese wirken auf Elemente eines geeignet gewählten Hilbertraumes mit einem teilchenfreien Vakuumvektor $|0\rangle$. Für die Operatoren gelten zudem die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= 0 \\
[a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] &= 0 \\
[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] &= \delta(\vec{k} - \vec{k}')
\end{aligned}$$

mit dem Kommutator $[\cdot, \cdot]$. Das Feld $\phi(x)$ wird somit zur operatorwertigen Distribution.

Die wichtigsten Elemente in der freien Quantenfeldtheorie sind die 2-Punkt-Funktionen. Dies sind die Vakuumerwartungswerte von 2 Feldern. Es gilt

$$\Delta_+(x-x') = -i\langle\phi(x)\phi(x')\rangle_0 = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}e^{-ik(x-x')},$$

was explizit in Form von Hankelfunktionen berechnet und um die Diagonale $x = x'$ entwickelt werden kann. Diese Rechnung ist z.B. in [13] durchgeführt und ergibt

$$\Delta_+(z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{z_\mu z^\mu} - \frac{im^2}{16\pi^2}\log(z_\mu z^\mu) + W(z) \tag{2.6}$$

mit einer glatten Funktion W. Diese Singularitätsstruktur wird als Hadamardform bezeichnet. Insbesondere haben wir noch $i\langle\phi(x')\phi(x)\rangle_0 = \Delta_-(x-x') = -\Delta_+(x'-x)$. Das Objekt, das uns im weiteren noch interessieren wird, ist der Feynmanpropagator, der Kern einer bestimmten Fundamentallösung der Klein-Gordon-Gleichung. Er ist der zeitgeordnete Erwartungswert von zwei Feldoperatoren

$$\begin{aligned} G^F(x,x') &= -i\langle T(\phi(x)\phi(x'))\rangle_0 \\ &= -i\theta(x^0-x'^0)\langle\phi(x)\phi(x')\rangle_0 - i\theta(x'^0-x^0)\langle\phi(x')\phi(x)\rangle_0 \\ &= \theta(x^0-x'^0)\Delta_+(x-x') - \theta(x'^0-x^0)\Delta_-(x-x') \end{aligned}$$

Für kleine Abstände weist der Feynmanpropagator also ebenfalls eine Entwicklung wie (2.6) auf. Allgemein lässt sich somit schreiben:

$$G^F(x,x') = \frac{U(x,x')}{(x-x')_\mu(x-x')^\mu} - V(x,x')\log\left((x-x')_\mu(x-x')^\mu\right) + W(x,x') \tag{2.7}$$

2.4 Der geodätische Abstand

Im letzten Abschnitt verwendeten wir das Minkowskiskalarprodukt um den Abstand zwischen zwei Punkten anzugeben. Auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten ist das nicht mehr möglich. Als sinnvoller Abstandsbegriff bietet sich hier die Länge einer Geodäte an. Eine solche ist in lokalen Koordinaten gegeben durch die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}^\mu(\tau) + \Gamma^\mu{}_{\kappa\rho}\,\dot{x}^\kappa(\tau)\dot{x}^\rho(\tau) = 0.$$

Schränken wir uns auf eine genügend kleine Umgebung um einen gewissen Anfangspunkt ein, so ist diese eindeutig. Die Länge lässt sich dann über

$$s = \int \sqrt{|g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|}d\tau$$

ermitteln. Um die explitzite Berechnung dieses Integrals zu umgehen, wird meist ein darauf aufbauendes Konzept verwendet. Wir zitieren hier nur die wichtigen Resultate. Für eine ausführliche Behandlung siehe z.B. Kapitel 8 von [9] und Referenzen darin.

Der quadratische geodätische Abstand zwischen den Punkten x und x' ist definiert durch

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2}s^2.$$

Diese Funktion hat die schöne Eigenschaft, dass $\sigma^{;\mu}$ der Tangentenvektor bzgl. x an der Geodäte mit Länge s ist und sie der Differenzialgleichung

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma^{;\mu}\sigma_{;\mu} \tag{2.8}$$

genügt. Die wichtigen Objekte, die wir in dieser Arbeit benötigen, sind die kovarianten Ableitungen von σ nach x, ausgewertet an der Stelle $x = x'$. Sie werden in eckigen Klammern angegeben ($[\sigma] = \sigma(x, x)$). Es gilt:

$$\begin{aligned}
[\sigma] &= 0 \\
[\sigma_{;\mu}] &= 0 \\
[\sigma_{;\mu\nu}] &= g_{\mu\nu} \\
[\sigma_{;\mu\nu\kappa}] &= 0 \\
[\sigma_{;\mu\nu\kappa\rho}] &= \frac{1}{3}(R_{\kappa\mu\nu\rho} + R_{\rho\mu\nu\kappa}) \\
[\sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\nu}{}^{\nu}{}_{\kappa}{}^{\kappa}] &= -\frac{4}{15}R_{\mu\nu\kappa\rho}R^{\mu\nu\kappa\rho} + \frac{4}{15}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{8}{5}R_{;\mu}{}^{\mu}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Die hier explizit angegebene Darstellung von $[\sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\nu}{}^{\nu}{}_{\kappa}{}^{\kappa}]$ findet sich in dieser Form in [1]. Sind die Werte auf der Diagonale bekannt, lässt sich ein (Bi-)Tensor auch in eine kovariante Taylorreihe entwickeln (siehe dazu z.B. [4]). Beispielsweise hat $\sigma_{;\mu\nu}$ eine

Entwicklung der Form

$$\sigma_{;\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta} \sigma^{;\alpha} \sigma^{;\beta} + \mathcal{O}(\sigma^{3/2}). \qquad (2.10)$$

Das Angeben der Ordnung in $\sigma^{1/2}$ ist dabei eine Konvention, die aus 2.8 resultiert.

3 Der Energie-Impuls-Tensor des quantisierten Klein-Gordon-Feldes

Während in einer semiklassischen Theorie die Geometrie als ganzes erhalten bleibt, wird die Materie quantisiert. Dies hat zur Folge, dass die beschreibenden klassischen Felder in Feldoperatoren übergehen. Die Einträge des Energie-Impuls-Tensors werden damit ebenfalls zu operatorwertigen Distributionen. Damit dieser dennoch mit dem Einsteintensor $G_{\mu\nu}$ (Gl. (2.1)) verglichen werden kann, wird sein renormierter Erwartungswert zu einem geeigneten Zustand im Hilbertraum benötigt. Um diesen zu erhalten, folgen wir hier zum großen Teil dem Vorgehen von [6].

3.1 Der Hadamard-Zustand

Damit die semiklassischen Einsteingleichungen

$$G_{\mu\nu}(x) = 8\pi G \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_\omega$$

sinnvoll werden, muss der Zustand ω näher charakterisiert werden, da wir im gekrümmten Raum wegen fehlender Darstellung der Lorentzgruppe keinen ausgezeichneten Vakuumvektor mehr haben.

Mathematisch gesehen ist ein Quantenzustand ω ein lineares Funktional auf der $*$-Algebra $\mathcal{A}$ der Observablen über der Raumzeit, welches normiert und positiv ist. Laut GNS-Theorem gibt es zu solch einem Zustand einen Hilbertraum $\mathcal{H}_\omega$ und eine Darstellung Π_ω von $\mathcal{A}$ in der $*$-Algebra der unbeschränkten Operatoren über $\mathcal{H}_\omega$, sowie (wenigstens) einen ausgezeichneten Vektor Ω_ω für den gilt $\Pi(\mathcal{A})\Omega_\omega = \mathcal{D}_\omega$ mit $\mathcal{D}_\omega \subset \mathcal{H}_\omega$ dicht (siehe z.B. [11]). So ein ω wird nun Hadamard-Zustand genannt, wenn der Feynmanpropagator des Klein-Gordon-Feldes, also die zeitgeordnete 2-Punkt-Funktion bezüglich Ω_ω, die aus dem flachen Fall bekannte Hadamard-

Singularitätsstruktur besitzt (für vier Raumzeitdimensionen siehe Gl. 2.7)). Im gekrümmten Raum gilt nun explizit [6]

$$G^F_\omega(x,x') = \frac{i}{8\pi^2}\left[\frac{U(x,x')}{\sigma(x,x')} + V(x,x')\log\sigma(x,x') + W(x,x')\right], \tag{3.1}$$

wobei die Koeffizienten U V und W glatte, symmetrische, biskalare Funktionen sind. U und V lassen sich unter Verwendung der Klein-Gordon-Gleichung (2.2) in rein geometrischen Termen bestimmen, die auch nicht von der Wahl eines bestimmten Hadamard-Zustandes abhängen. Damit sind die Singularitäten in (3.1) eindeutig festgelegt, womit diese somit renormiert werden können. Der glatte Term W ist, wie wir sehen werden, erst durch physikalisch sinnvolle Randbedingungen eindeutig bestimmbar.
Im Folgenden wird das Subskript ω unterdrückt, da die Minimalanforderung an eine Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit ein Hadamardzustand ist, jedoch kein speziell ausgezeichneter.

3.2 Der Feynmanpropagator

In diesem Abschnitt werden die Relationen zwischen den Hadamardkoeffizienten U, V und W untersucht. Genauere Berechnungen dazu werden in Kapitel 4 durchgeführt, nachdem sich herausgestellt hat welche Teile wir genau benötigen.
Eine Fundamentallösung der Klein-Gordon-Gleichung hat folgende Gleichung zu erfüllen:

$$(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R(x))G(x,x') = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta(x-x').$$

Insbesondere gilt also für $x \neq x'$

$$(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R(x))G(x,x') = 0.$$

Wir wählen den Feynmanpropagator G^F aus Gleichung (3.1), der diese Bedingung erfüllt und können nun die Koeffizienten U, V und W bestimmen. Einsetzen des

Ausdrucks (3.1) für den Feynmanpropagator ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2 - \xi R)\left[\frac{U}{\sigma} + V \log\sigma + W\right] \\
&= \nabla^\mu \left(\frac{U_{;\mu}}{\sigma} - \frac{U\sigma_{;\mu}}{\sigma^2} + V_{;\mu}\log\sigma + \frac{V\sigma_{;\mu}}{\sigma} + W_{;\mu}\right) - (m^2 + \xi R)\left[\frac{U}{\sigma} + V\log\sigma + W\right] \\
&= \log\sigma \left(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R\right) V - \sigma^{-2}\left(2U_{;\mu}\sigma^{;\mu} + (\sigma_{;\mu}^{\ \mu} - 4)U\right) \\
&\qquad \sigma^{-1}\left((\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R)U + V_{;\mu}2\sigma^{;\mu} + (\sigma_{;\mu}^{\ \mu} - 2)V + \sigma(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R)W\right).
\end{aligned}$$

Verschwindet jede Ordnung von σ separat, so finden wir, dass V die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R\right) V = 0, \tag{3.2}$$

löst, U der Differenzialgleichung

$$2U_{;\mu}\sigma^{;\mu} + (\sigma_{;\mu}^{\ \mu} - 4)U = 0 \tag{3.3}$$

genügt und die Gleichung

$$(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R)U + V_{;\mu}2\sigma^{;\mu} + (\sigma_{;\mu}^{\ \mu} - 2)V + \sigma(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2 - \xi R)W = 0 \tag{3.4}$$

zu erfüllen ist. Gleichung (3.3) wird durch $U(x,x') = \Delta^{1/2}(x,x')$ gelöst, wobei

$$\Delta(x,x') = -[-g(x)]^{-\frac{1}{2}} \det(-\sigma_{;\mu\nu'}(x,x'))[-g(x')]^{-\frac{1}{2}}$$

die Van Vleck-Morette Determinante bezeichnet. Um Näheres über den logarithmischen Term zu erfahren, entwickeln wir V in eine Potenzreihe im quadratischen geodätischem Abstand σ.

$$V(x,x') = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x,x')\sigma^n(x,x') \tag{3.5}$$

Die $V_n(x,x')$ sind hierbei wie $V(x,x')$ selbst glatte, symmetrische, biskalare Funktionen. Mittels Einsetzen in Gleichung (3.2) kann die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
&(n+1)(2n+4)V_{n+1} + 2(n+1)V_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} \\
&\qquad + (n+1)(\sigma_{;\mu}^{\ \mu} - 4)V_{n+1} = -V_{n;\mu}{}^{\mu} + (m^2 + \xi R)V_n
\end{aligned}$$

für die Koeffizienten ermittelt werden. Durch das Einsetzen der Potenzreihe in die dritte erhaltene Gleichung (3.4) zeigt sich zum einen die Bestimmungsgleichung

$$2V_0 + 2\sigma^{;\mu}V_{0;\mu} + (\sigma_{;\mu}{}^{\mu} - 4)V_0 = -U_{;\mu}{}^{\mu} + (m^2 + \xi R)U$$

für V_0 auf, zum anderen vereinfacht sich die Gleichung (3.4) zur Bestimmung von W zu

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2 - \xi R)W = -6V_1 - 2V_{1;\mu}\sigma^{;\mu} + \mathcal{O}(\sigma). \tag{3.6}$$

Es wurden hier zusätzlich die Relationen (2.8) und (2.10) verwendet. Um die linke Seite auch nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\sigma)$ anzugeben, entwickeln wir W in eine kovariante Taylorreihe der Form

$$W(x,x') = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x)\sigma^{;\alpha_1}(x,x')\ldots\sigma^{;\alpha_n}(x,x'). \tag{3.7}$$

Es ist darauf zu achten, dass in der Summe selbst für die einzelnen Indizes Einsteins Summenkonvention verwendet wird. Der Faktor $(-1)^n$ ist Konvention und wurde eingefügt, um die Relationen (3.8) in dieser Form angeben zu können. Der Summand $w(x)$ kann hier als physikalische Bedingung angesehen werden, und bleibt solange unbestimmt bis passende Randbedingungen vorgegeben werden.
Wegen der Symmetrie unter Vertauschung von x und x' muss die Ableitung von W auf der Diagonalen ($x = x'$) verschwinden und die ungeraden Koeffizienten können durch die geraden ausgedrückt werden (siehe z.B. [6]). Unter anderem gilt

$$\begin{aligned} w_\alpha &= \frac{1}{2} w_{;\alpha}, \\ w_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} &= \frac{3}{2} w_{(\alpha_1\alpha_2;\alpha_3)} - \frac{1}{4} w_{;(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Runde Klammern in den Indizes bedeuten die Symmetrisierung des Ausdrucks. Insbesondere bekommen wir mit der ersten Relation und (2.10) die Gleichheit

$$w_{\mu\nu}(x) = \lim_{x' \to x} W_{;\mu\nu}(x,x').$$

Zwecks Koeffizientenvergleich in (3.6) wird V_1 ebenfalls in eine kovariante Taylorreihe entwickelt. Dies bedeutet, dass V_1 die Form

$$V_1(x,x') = v_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} v_{1\,\alpha_1...\alpha_n}(x)\sigma^{;\alpha_1}(x,x')...\sigma^{;\alpha_n}(x,x') \tag{3.9}$$

annimmt. Selbiges wird auch mit den anderen V_n durchgeführt. Insbesondere heißt das:

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \lim_{x'\to x} V_n(x,x') \\ v_{n\,\mu\nu} &= \lim_{x'\to x} V_{n;\mu\nu}(x,x') \end{aligned}$$

Nach dem Einfügen der Taylorreihen (3.7) und (3.9) in Gleichung (3.6) und dem Vergleich der Koeffizienten in den Ordnungen σ^0 und $\sigma^{1/2}$ ergeben sich unter Verwendung von (3.8) folgende Relationen:

$$\begin{aligned} w^{\rho}{}_{\rho} &= (m^2 + \xi R)w - 6v_1 \\ w^{\rho}{}_{\mu;\rho} &= \frac{1}{4} w^{;\rho}{}_{\rho\mu} + \frac{1}{2} w^{\rho}{}_{\rho;\mu} + \frac{1}{2} R^{\rho}{}_{\mu} w_{;\rho} - \frac{1}{2}(m^2 - \xi R) w_{;\mu} + 2v_{1;\mu}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

oder kombiniert zu

$$w^{\rho}{}_{\mu;\rho} = \frac{1}{4} w^{;\rho}{}_{\rho\mu} + \frac{1}{2} R^{\rho}{}_{\mu} w_{;\rho} + \frac{1}{2} \xi R_{;\mu} w - v_{1;\mu}. \tag{3.11}$$

Diese Ergebnisse über die Funktion W werden sich im nächsten Abschnitt noch als nützlich erweisen.

3.3 Point-Splitting-Renormierung

Wie bereits erwähnt ist der Energie-Impuls-Tensor in seiner quantisierten Form eine operatorwertige Distribution. Selbst wenn der Erwartungswert bzgl. eines Hadamardzustandes genommen wird, bleibt das Problem der Divergenzen bestehen. Da diese jedoch unphysikalisch sind, müssen wir den Tensor noch renormieren. Dazu gibt es verschiedene Ansätze. Zum Beispiel kann es über lokale Wickprodukte versucht werden (siehe z.B. [11]), wobei sich dort die weitere Schwierigkeit stellt, die Wickprodukte auf Lorentz'schen Mannigfaltigkeiten richtig zu definieren. Eine weitere Möglichkeit ist die Pauli-Villars Methode [14]. Wir wählen hier einen dritten Weg, das „point-splitting“ Verfahren [6]. Die Feldoperatoren einer quantisierten Form von Gleichung (2.5) werden dazu zunächst an unterschiedlichen Raumzeitpunkten ausgewertet und erst am Schluss mittels Grenzübergang wieder zusammengeführt. Der vorläufige Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors nimmt damit folgende Gestalt an:

$$\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle_\omega = \lim_{x'\to x} D_{\mu\nu}(x,x')\left[-iG^F_\omega(x,x')\right].$$

Die Verwendung des symmetrischen Feynmanpropagators anstatt der einfachen 2-Punkt-Funktion erspart uns hier die übliche Symmetrisierung des Differenzialoperators $D_{\mu\nu}(x,x')$. Diese müsste sonst durchgeführt werden, da aufgrund der Symmetrie des Einsteintensors auch der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch sein muss. Durch das Trennen der Punkte muss in den Ausdruck aus Gleichung (2.5) ein Paralelltransport eingebunden werden. Der Differenzialoperator ergibt sich zu

$$D_{\mu\nu} =(1-2\xi)g_\nu{}^{\nu'}\nabla_\mu\nabla_{\nu'} + \left(2\xi-\frac{1}{2}\right)g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma'}\nabla_\rho\nabla_{\sigma'} - 2\xi g_\mu{}^{\mu'}g_\nu{}^{\nu'}\nabla_{\mu'}\nabla_{\nu'} \tag{3.12}$$

$$+ 2\xi g_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\rho + \xi\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2. \tag{3.13}$$

Operatoren mit gestrichenen Indizes wirken dabei auch auf das gestrichene Argument im Feynmanpropagator. $g_\mu{}^{\nu'}$ bezeichnet den Paralleltransport von x nach x' und ist über die Gleichung

$$g_{\mu\nu';\rho}\sigma^{;\rho} = 0$$
$$\lim_{x'\to x} g_{\mu\nu'} = g_{\mu\nu}$$

definiert. Eine wichtige und in diesem Zusammenhang benötigte Relation ist die Entwicklung [4]

$$g_\nu{}^{\nu'}\sigma_{\mu\nu'} = -g_{\mu\nu} - \frac{1}{6}R_{\mu\alpha\nu\beta}\sigma^{;\alpha}\sigma^\beta + \mathcal{O}(\sigma^{3/2}). \tag{3.14}$$

Da die Singularität in G^F, wie oben erwähnt, rein geometrischer Natur ist und nur davon abhängig ist, dass ein Hadamardzustand als Grundvorraussetzung einer vernünftigen Theorie verwendet wird, können wir die Singularität vom Feynmanpropagator abziehen ohne dabei den physikalischen Gehalt zu verändern. So entsteht, zunächst jedoch nur als Zwischenprodukt, ein glatter Energie-Impuls-Tensor

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle &= \lim_{x'\to x} -iD_{\mu\nu}(x,x')\left[G^F(x,x') - G^F_{\text{sing}}(x,x')\right]\\ &= \lim_{x'\to x} \frac{1}{8\pi^2} D_{\mu\nu}(x,x')W(x,x').\end{aligned}$$

Dieser ist allerdings nicht mit der Energie-Impuls-Erhaltung $\langle T_{\mu\nu}\rangle^{;\nu} = 0$ verträglich, welche auch in der quantisierten Theorie gelten sollte. Neben dieser schlug Wald 1977 in seinem Paper [15] noch vier weitere Axiome vor, die der Erwartungswert des Energie-Impuls-Operators erfüllen sollte. Mit der Zeit haben sich drei von den insgesamt fünf Axiomen durchgesetzt und sind weit akzeptiert (für eine Diskussion dieser siehe z.B. [9]). Um die Energie-Impuls-Erhaltung nun zu korrigieren ist wieder ein nur von m^2 und dem Krümmungstensor $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, jedoch nicht vom gewählten Zustand abhängigen Tensor $\Theta_{\mu\nu}(x)$ hinzu zu addieren:

$$\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle_{\text{ren}} = \lim_{x'\to x} \frac{1}{8\pi^2} D_{\mu\nu}(x,x')W(x,x') + \Theta_{\mu\nu}(x)$$

Mittels der kovarianten Taylorreihe für W und dem Differenzialoperator (3.13) ist der fehlende Teil zur Erhaltung dieses Tensors bestimmbar. Im nachfolgendem Ausdruck werden die Terme, die im Limes verschwinden sofort unterdrückt um die Übersicht zu erhalten. Die Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{8\pi^2}\lim_{x'\to x}\Big[&(1-2\xi)g_\nu{}^{\nu'}(-w_{\alpha;\mu}\sigma^{;\alpha}{}_{\nu'} + w_{\alpha\beta}\sigma^{;\alpha}{}_{\nu'}\sigma^{;\beta}{}_{\mu})\\ &+\left(2\xi - \frac{1}{2}\right)g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma'}(-w_{\alpha;\rho}\sigma^{;\alpha}{}_{\sigma'} + w_{\alpha\beta}\sigma^{;\alpha}{}_{\sigma'}\sigma^{;\beta}{}_{\rho})\\ &-2\xi g_\mu{}^{\mu'}g_\nu{}^{\nu'}w_{\alpha\beta}\sigma^{;\alpha}{}_{\nu'}\sigma^{;\beta}{}_{\mu'} + 2\xi g_{\mu\nu}(w_{;\rho}{}^{\rho} - 2w_{\alpha;\rho}\sigma^{;\alpha\rho} + w_{\alpha\beta}\sigma^{;\alpha\rho}\sigma^{;\beta}{}_{\rho})\\ &+\left(\xi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\right)w\Big] + \Theta_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (2.9), (2.10), (3.8), (3.10) und (3.14) vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}} &= \frac{1}{8\pi^2}\Big[(1-2\xi)(w_{\nu;\mu} - w_{\mu\nu}) + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu}({w_\rho}^{;\rho} - {w_\rho}^{\rho}) - 2\xi w_{\mu\nu} + 2\xi {w_\rho}^{\rho} \\
&\quad + \left(\xi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\right) w\Big] + \Theta_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\Big[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}{w_\rho}^{\rho} - w_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(1-2\xi)w_{;\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu}{w_{;\rho}}^{\rho} \\
&\quad + \left(\xi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\right) w\Big] + \Theta_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\Big[-w_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(1-2\xi)w_{;\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu}{w_{;\rho}}^{\rho} + \xi R_{\mu\nu}w - 3g_{\mu\nu}v_1\Big] + \Theta_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Ableiten des zuvor gewonnenen Ausdrucks liefert

$$\begin{aligned}
8\pi^2 {\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}}}^{;\nu} &= -{w_{\mu\nu}}^{;\nu} + \frac{1}{2}(1-2\xi){w_{;\mu\nu}}^{\nu} + \frac{1}{2}\left(2\xi - \frac{1}{2}\right) {w_{;\rho}}^{\rho\nu} + \xi {R_{\mu\nu}}^{;\nu} w \\
&\quad + \xi R_{\mu\nu}w^{;\nu} - 3g_{\mu\nu}{v_1}^{\nu} + {\Theta_{\mu\nu}}^{;\nu} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \xi\right) {w_{;\mu\nu}}^{\nu} + \xi {R_{\mu\nu}}^{;\nu} w - \frac{1}{2}{w^{;\nu}}_{\nu\mu} + \xi {w^{;\rho}}_{\rho\mu} - \left(\frac{1}{2} - \xi\right) R_{\mu\nu}w^{;\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2}\xi R_{;\mu}w - 2g_{\mu\nu}{v_1}^{\nu} + {\Theta_{\mu\nu}}^{;\nu} \\
&= -2g_{\mu\nu}{v_1}^{;\nu} + {\Theta_{\mu\nu}}^{;\nu}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei für den ersten Term die Regeln zum Vertauschen kovarianter Ableitungen verwendet, sowie die Bianchi Identität für den zweiten Term. Soll nun ${\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}}}^{;\nu} = 0$ gelten, so finden wir

$$\Theta_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}v_1 + \theta_{\mu\nu},$$

wobei $\theta_{\mu\nu}$ ein geometrischer Tensor, also ein aus rein geometrischen Objekten zusammengesetzter Tensor, mit ${\theta_{\mu\nu}}^{;\nu} = 0$ ist. Insgesamt hat der renormierte Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors also folgende Gestalt:

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{8\pi^2}\Big[-w_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(1-2\xi)w_{;\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu}{w_{;\rho}}^{\rho} + \xi R_{\mu\nu}w - g_{\mu\nu}v_1\Big] + \theta_{\mu\nu}. \tag{3.15}$$

Es sei hier darauf hingewiesen, dass dies der vollständige Tensor ist und nicht nur eine Approximation, da die in den Rechnungen nicht betrachteten höheren Ordnungen im geodätischen Abstand im Limes gleicher Raumzeitpunkte verschwinden. Das gleiche Ergebnis wurde unter anderem auch von [6] ermittelt.

3.4 Massen-Renormierung

Das eben erlangte Resultat ist jedoch noch immer nur eindeutig bis auf einen lokal erhaltenen, geometrischen Tensor $\theta_{\mu\nu}$. Da Energiedichte in der vierdimensionalen Raumzeit und unserem Einheitensystem von der Dimension $(Masse)^4$ ist, sind die Möglichkeiten für Terme, die in $\theta_{\mu\nu}$ auftreten können, begrenzt. Dabei werden allerdings nur Größen betrachtet, die im Limes verschwindender Masse endlich bleiben, da hier gleichzeitig auch der masselose Fall betrachtet werden soll. Der Krümmungstensor trägt zur Dimension den Teil $(Masse)^2$ bei, da jede Differenziation der Metrik die Potenz um eins erhöht. Die Metrik selbst ist allerdings dimensionslos.
Da der Energie-Impuls-Tensor durch Variation nach der Metrik gewonnen wird, erhalten wir auch einen Tensor mit $(Masse)^4$ wenn wir mit einer Lagrangefunktion von eben dieser Dimension starten. Davon gibt es fünf verschiedene, wenngleich nicht unabhängige. Diese sind

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= m^4, \\
\mathcal{L}_2 &= m^2 R, \\
\mathcal{L}_3 &= R^2, \\
\mathcal{L}_4 &= R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}, \\
\mathcal{L}_5 &= R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}.
\end{aligned}$$

Durch die Eulerzahl ($\int \sqrt{-g}(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma})dx$), eine topologische Invariante, kann die Zahl der unabhängigen Lagrangefunktionen auf vier reduziert werden. Diese werden wir hier aber nicht verwenden, da die Koeffizienten im Ausdruck (3.18) dadurch komplizierter werden würden. Durch die Variation der eben genannten Lagrangefunktionen erhalten wir

$$\begin{aligned}
t^1_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}m^4 g_{\mu\nu},\\
t^2_{\mu\nu} &= m^2\left(\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right),\\
t^3_{\mu\nu} &= 2R_{;\mu\nu} - 2RR_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}R^2 - 2R_{;\rho}{}^{\rho}\right),\\
t^4_{\mu\nu} &= R_{;\mu\nu} - R_{\mu\nu;\rho}{}^{\rho} - 2R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - R_{;\rho}{}^{\rho}),\\
t^5_{\mu\nu} &= 2R_{;\mu\nu} - 4R_{\mu\nu;\rho}{}^{\rho} + 4R^{\rho}{}_{\mu}R_{\rho\nu} - 4R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} - 2R^{\rho\sigma\tau}{}_{\mu}R_{\rho\sigma\tau\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\kappa\rho\sigma\tau}R^{\kappa\rho\sigma\tau},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

welches die möglichen Beiträge zu $\theta_{\mu\nu}$ sind.

Eine oft getroffene Wahl für $\theta_{\mu\nu}$ kommt durch die Einführung einer Massenskala M^2 zu Stande und folgt aus der Forderung, das Argument des Logarithmus in Gleichung (3.1) dimensionslos zu machen. Wir führen also die Ersetzung $V\log\sigma \to V\log(M^2\sigma)$ durch. Damit einhergehend folgt

$$W \longrightarrow W - V\log M^2$$

um den eben hinzugefügten Term wieder auszugleichen. Mittels Einsetzen der Potenz- (3.5) und Taylorreihen (3.7), (3.9) für V und W finden wir für dessen Koeffizienten

$$\begin{aligned}
w &\to w - v_0 \log M^2,\\
w_{\mu\nu} &\to w_{\mu\nu} - (v_{0\mu\nu} + g_{\mu\nu}v_1)\log M^2.
\end{aligned}$$

Die Ersetzungen die wir dann in (3.15) vornehmen müssen, führen zu

$$\theta^{M^2}_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi^2}\left[-(v_{0\mu\nu} + g_{\mu\nu}v_1) + \frac{1}{2}(1-2\xi)v_{0;\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(2\xi - \frac{1}{2}\right)g_{\mu\nu}v_{0;\rho}{}^{\rho} + \xi R_{\mu\nu}v_0\right]\log M^2. \tag{3.17}$$

Es kann gezeigt werden, dass dieser durch die in (3.16) hergeleiteten Ausdrücke die Form

$$\theta^{M^2}_{\mu\nu} = \frac{\log M^2}{16\pi^2}\left[\frac{1}{2}t^1_{\mu\nu} + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)t^2_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 t^3_{\mu\nu} - \frac{1}{180}t^4_{\mu\nu} + \frac{1}{180}t^5_{\mu\nu}\right]. \tag{3.18}$$

annimmt. Dass die beiden Tensoren (3.18) und (3.17) wirklich übereinstimmen ist ersichtlich, sobald wir die Koeffizienten der Hadamard-Distribution berechnet haben.

3.5 Spuranomalie

Nun haben wir den Energie-Impuls-Tensor vollständig (bis auf die Berechnung der Koeffizienten) charakterisiert. Ein dabei auftretendes Problem soll aber nicht verschwiegen werden. Während im klassischen Fall bei konformer Kopplung, also $\xi_c = \frac{1}{6}$ und $m = 0$ wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben $T^{\mu}_{\ \mu} = 0$ gilt, ist dies in der semiklassischen Beschreibung nicht mehr der Fall. Die Spur von Gleichung (3.15) genommen, führt zunächst zu

$$\langle T^{\mu}_{\ \mu} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{8\pi^2} \left[-w_{\mu}^{\ \mu} + 3\left(\xi - \frac{1}{6}\right) w_{;\rho}^{\ \ \rho} + \xi R w + 2v_1 \right] + \theta_{\mu}^{\ \mu}.$$

Ersetzen wir nun noch den ersten Term in der Klammer mit dem in (3.10) hergeleiteten Ausdruck, so ergibt sich

$$\langle T^{\mu}_{\ \mu} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{8\pi^2} \left[-m^2 w + 3\left(\xi - \frac{1}{6}\right) w_{;\rho}^{\ \ \rho} + 2v_1 \right] + \theta_{\mu}^{\ \mu}$$

Mit $\xi = \xi_c$ und $m = 0$ bleibt für die Spur

$$\langle T^{\mu}_{\ \mu} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi^2} v_1 + \theta_{\mu}^{\ \mu}$$

übrig, welche verschieden von 0 ist. Bei einem Blick auf (3.16) zeigt sich, dass

$$\begin{aligned} t^{i\ \mu}_{\ \mu} &= 0 \qquad &\text{für} \quad i = 1, 2 \\ t^{i\ \mu}_{\ \mu} &= cR_{;\mu}^{\ \ \mu} \qquad &\text{für} \quad i = 3, 4, 5 \end{aligned}$$

mit einer Konstanten c und deshalb

$$\theta_{\mu}^{\ \mu} = cR_{;\mu}^{\ \ \mu}$$

gelten muss. Somit wird der Tensor $\theta_{\mu\nu}$ diesen Mangel nicht ausgleichen können, sofern v_1 noch andere Terme als Vielfache von $R_{;\mu}^{\ \ \mu}$ umfasst. Dies wird sich auch später bewahrheiten (vgl. (4.18)).

Dieses Phänomen, dass wider Erwarten $\langle T^{\mu}_{\ \mu} \rangle_{\text{ren}} \neq 0$ ist, wird Spuranomalie genannt und ist allen Renormierungsansätzen gemein. Es kann wahrscheinlich auch nicht vor einer Quantisierung der Gravitation gelöst werden.

4 Hadamard-Entwicklung

Wie sich im letzten Abschnitt herauskristallisiert hat, benötigen wir die Objekte $v_0(x)$, $v_{0\mu\nu}(x)$, $v_{0;\mu}{}^{\mu}(x)$, $v_1(x)$ und $w_{\mu\nu}(x)$. Diese wiederum stimmen mit den Diagonalelementen $[V_0] = V_0(x,x)$, $[V_{0;\mu\nu}]$, $[V_{0;\mu}{}^{\mu}]$, $[V_1]$ und $[W_{;\mu\nu}]$ überein. Ziel dieses Abschnitts ist es, diese zu berechnen.

4.1 Der Wärmeleitungskern

Um die Koeffizienten der Hadamard-Distribution zu berechnen, bedienen wir uns der Entwicklung des Wärmeleitungskerns als technisches Hilfsmittel. Dieser ist die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung und erfüllt demnach

$$\begin{aligned} \partial_t H(t,x,y) &= -K_{(x)} H(t,x,y) \quad \text{für} \quad t > 0 \\ H(t,x,y) &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(x-y) \quad \text{für} \quad t \to 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

K bezeichnet hier einen formal selbstadjungierten, elliptischen Differenzialoperator zweiter Ordnung. Für den Zweck dieser Arbeit ist es ausreichend, sich auf einen Operator der Form

$$K\phi(x) = -\nabla^j \nabla_j \phi(x) + V(x)\phi(x)$$

auf einer Riemanschen Mannigfaltigkeit zu beschränken (dies sichert die Konvergenz von Gl. (4.2)). Das Potenzial wird später die Form $V = m^2 + \xi R$ annehmen. Zunächst soll allerdings die allgemeine Form bestehen bleiben, da der Faktor m^2 auch extra behandelt werden kann, sowie, falls gewünscht, auch weitere Terme im Potenzial ergänzt werden können.
Es ist bekannt (siehe [9] und Referenzen darin), dass der Wärmeleitungskern für

diesen Operator folgende asymptotische Entwicklung für x nahe y und t nahe 0 hat:

$$H(t,x,y) \sim (4\pi t)^{-d/2} e^{-\sigma(x,y)/2t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,y) t^n \tag{4.2}$$

Um die Koeffizienten zu berechnen orientieren wir uns an der Vorgehensweise von [9]. Im Folgenden wird hier die übliche Annahme gemacht, dass

$$a_n \equiv 0 \qquad \forall n < 0. \tag{4.3}$$

Insbesondere gilt für $x = y$

$$H(t,x,x) \sim (4\pi t)^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n] t^n,$$

wobei die Koeffizienten $[a_n] = a_n(x,x)$ im Grenzfall gleicher Orte in eckigen Klammern angegeben wurden. An diesen sind wir auch hauptsächlich interessiert, da sie explizit im renormierten Energie-Impuls-Tensor auftauchen. Um sie zu berechnen hat sich bewährt, die Entwicklung (4.2) in die Wärmeleitungsgleichung (4.1) einzusetzen und daraus eine Rekursionsformel abzuleiten. Dazu ist die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 =& (4\pi t)^{-d/2} e^{-\sigma(x,y)/2t} \left\{ \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\sigma^{;j}\sigma_{;j}\right) a_0 t^{-2} + \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\sigma^{;j}\sigma_{;j}\right) a_1 t^{-1} \right. \\ & + \left(\sigma_{;j} {a_0}^{;j} + \frac{1}{2}({\sigma_{;j}}^{j} - d) a_0\right) t^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\sigma^{;j}\sigma_{;j}\right) a_{n+2} + \sigma_{;j} {a_{n+1}}^{;j} \right. \\ & \left.\left. + (n+1) a_{n+1} + \frac{1}{2}({\sigma_{;j}}^{j} - d) a_{n+1} - {a_{n;j}}^{j} + V a_n \right] \right\} \end{aligned}$$

zu erfüllen. Aufgrund der Relation (2.8) fallen die ersten beiden Terme sowie der Term proportional zu a_{n+2} in der Summe weg. Es bleibt die Rekursionsformel

$$\sigma_{;j} {a_{n+1}}^{;j} + (n+1) a_{n+1} + \frac{1}{2}({\sigma_{;j}}^{j} - d) a_{n+1} = {a_{n;j}}^{j} - V a_n \tag{4.4}$$

und die Differenzialgleichung

$$\sigma_{;j} {a_0}^{;j} + \frac{1}{2}({\sigma_{;j}}^{j} - d) a_0 = 0 \tag{4.5}$$

zur Bestimmung des ersten Gliedes a_0 übrig. Dies ist die gleiche Formel wie zur Bestimmung des Koeffizienten $U(x,x')$ der Hadamard-Distribution (3.3) und wird durch $a_0(x,x') = \Delta^{1/2}(x,x')$ gelöst. Zu Erinnerung geben wir hier die Formel der

Van Vleck-Morette Determinante noch einmal an.

$$\Delta(x,x') = -[-g(x)]^{-\frac{1}{2}} \det(-\sigma_{;\mu\nu'}(x,x'))[-g(x')]^{-\frac{1}{2}}$$

Mit ihren Werten auf der Diagonale $\lim_{x'\to x} \Delta(x,x') = 1$ legt sie den Grundstein für die Berechnungen und gibt dem ersten Diagonalkoeffizenten des Wärmeleitungskerns den Wert

$$[a_0] = 1. \tag{4.6}$$

Für die weiteren Betrachtungen rufe man sich die Relationen $[\sigma_{;j}] = 0$, $[\sigma_{;j}{}^{j}] = d$ und die weiteren Eigenschaften von σ aus Kapitel 2.4 in Erinnerung. Folglich zeigt der Grenzwert gleicher Orte in der Rekursionsformel (4.4) auf, was noch benötigt wird um die nächsten Glieder zu berechnen. Zwei Terme fallen dabei heraus und übrig bleibt

$$(n+1)[a_{n+1}] = [a_{n;j}{}^{j}] - V[a_n]. \tag{4.7}$$

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass zunächst differenziert werden muss und danach erst der Limes $x' \to x$ ausgeführt werden darf. Um $[a_1]$ zu bestimmen müssen wir zunächst $[a_{0;j}{}^{j}]$ finden. Dazu bietet es sich an, (4.4) zwei Mal abzuleiten und daraus den Laplaceoperator zu bilden. Da sie später noch benötigt werden, sollen die Koeffizienten $[a_{0;k}]$ und $[a_{0;kl}]$ ebenfalls berechnet werden. Einmaliges Differenzieren ergibt nun die Formel

$$\begin{aligned}\sigma_{;jk}a_{n+1}{}^{;j} + \sigma_{;j}a_{n+1}{}^{;j}{}_{k} + (n+1)a_{n+1;k}\\ +\frac{1}{2}\sigma_{;j}{}^{j}{}_{k}a_{n+1} + \frac{1}{2}(\sigma_{;j}{}^{j} - d)a_{n+1;k} = a_{n;j}{}^{j}{}_{k} - V_{;k}a_n - Va_{n;k},\end{aligned}$$

was im Grenzwert auf

$$(n+2)[a_{n+1;k}] = [a_{n;j}{}^{j}{}_{k}] - V_{;k}[a_n] - V[a_{n;k}]$$

führt. Für $n = -1$ und der in Gleichung (4.3) gemachten Annahme ergibt das somit einen Koeffizienten von

$$[a_{0;k}] = 0. \tag{4.8}$$

Nochmaliges differenzieren ergibt die Formel

$$\begin{aligned}\sigma_{;jkl}a_{n+1}{}^{;j} + \sigma_{;jk}a_{n+1}{}^{;j}{}_{l} + \sigma_{;jl}a_{n+1}{}^{;j}{}_{k} + \sigma_{;j}a_{n+1}{}^{;j}{}_{kl} + (n+1)a_{n+1;kl}\\ +\frac{1}{2}\sigma_{;j}{}^{j}{}_{kl}a_{n+1} + \frac{1}{2}\sigma_{;j}{}^{j}{}_{k}a_{n+1;l} + \frac{1}{2}\sigma_{;j}{}^{j}{}_{l}a_{n+1;k} + \frac{1}{2}(\sigma_{;j}{}^{j} - d)a_{n+1;kl}\\ = a_{n;j}{}^{j}{}_{kl} - V_{;kl}a_n - V_{;k}a_{n;l} - V_{;l}a_{n;k} - Va_{n;kl}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Wiederum für $n = -1$ und unter Berücksichtigung der Relationen in Kapitel 2.4 folgt der nächste Koeffizient mit

$$[a_{0;kl}] = \frac{1}{6}R_{kl}. \tag{4.10}$$

Aus Gleichung (4.9) ist der kovariante Laplaceoperator leicht zu bilden und somit der zunächst gewünschte Koeffizient $[a_{0;k}{}^{k}]$ bestimmbar. Wir erhalten

$$(n+3)[a_{n+1;j}{}^{j}] = \frac{1}{3}R[a_{n+1}] + [a_{n;j}{}^{j}{}_{k}{}^{k}] - V[a_{n;k}{}^{k}] - 2V^{;k}[a_{n;k}] - V_{;k}{}^{k}[a_n] \tag{4.11}$$

woraus

$$[a_{0;k}{}^{k}] = \frac{1}{6}R \tag{4.12}$$

folgt. Ein Rückblick auf Gleichung (4.7) erlaubt nun den Schluss auf das nächste Glied in der Potenzreihenentwicklung. Daraus resultiert

$$[a_1] = \frac{1}{6}R - V. \tag{4.13}$$

Um nun noch $[a_2]$ zu bestimmen benötigen wir offensichtlich $[a_{1;j}{}^{j}]$. Obgleich später der Koeffizient $[a_{1;jk}]$ Verwendung findet, wird nur die Berechnung des Laplaceoperators von a_1 aufgezeigt und der Wert für $[a_{1;jk}]$ lediglich zitiert, da die Berechnungen von diesem noch ausgedehnter sind.
Ein Blick auf Gleichung (4.11) zeigt nun, dass für die geplanten Berechnungen der Wert von $[a_{0;j}{}^{j}{}_{k}{}^{k}]$ erforderlich ist. Für diesen ist es notwendig ein weiteres Mal den kovarianten Laplaceoperator auf Gleichung (4.9) (mit $k = l$ und einer der Indizes hochgestellt) anzuwenden. Dies führt, für $n = -1$, zur Gleichung

$$-4[a_{0;j}{}^{j}{}_{k}{}^{k}] = 2[a_0{}^{kl}]\left(R_{kl} + [\sigma_{;k}{}^{j}{}_{jl}] + [\sigma_{;kl}{}^{j}{}_{j}] + [\sigma_{;j}{}^{j}{}_{kl}]\right) + [\sigma_{;j}{}^{j}{}_{k}{}^{k}][a_{0;l}{}^{l}] + \frac{1}{2}[\sigma_{;j}{}^{j}{}_{k}{}^{k}{}_{l}{}^{l}]$$

für $[a_{0;j}{}^{j}{}_{k}{}^{k}]$, woraus durch Einsetzen von (2.9), (4.8), (4.10) und (4.12)

$$[a_{0;j}{}^{j}{}_{k}{}^{k}] = \frac{1}{30}R_{jklm}R^{jklm} + \frac{1}{30}R_{kl}R^{kl} + \frac{1}{36}R^2 + \frac{1}{5}R_{;j}^{\ j}$$

entsteht. Nun ist es leicht mit den gegebenen Werten $[a_{1;j}{}^{j}]$ zu berechnen.

$$[a_{1;j}{}^{j}] = \frac{1}{90}R_{jklm}R^{jklm} - \frac{1}{90}R_{jk}R^{jk} + \frac{1}{36}R^2 + \frac{1}{15}R_{;j}^{\ j} - \frac{1}{6}RV - \frac{1}{3}V_{;j}{}^{j}$$

Das Ergebnis von $[a_{1;jk}]$ findet sich unter anderem in [5]. Es gilt

$$\begin{aligned}[a_{1;jk}] = &\frac{1}{90}R_{lmnj}R^{lmn}{}_{k} + \frac{1}{90}R_{ljmk}R^{lm} - \frac{1}{45}R^{l}{}_{j}R_{lk} + \frac{1}{36}RR_{jk} \\ &+ \frac{1}{20}R_{;jk} + \frac{1}{60}R_{jk;l}{}^{l} - \frac{1}{6}R_{jk}V - \frac{1}{3}V_{;jk}.\end{aligned}$$

Dies war der letzte Schritt der Berechnung des gewünschten Koeffizienten $[a_2]$, welcher schlussendlich folgende Form annimmt:

$$[a_2] = \frac{1}{180}R_{jklm}R^{jklm} - \frac{1}{180}R_{jk}R^{jk} + \frac{1}{72}R^2 + \frac{1}{30}R_{;j}^{\ j} - \frac{1}{6}RV - \frac{1}{6}V_{;j}{}^{j} - \frac{1}{2}V^2. \tag{4.14}$$

4.2 DeWitt-Schwinger Darstellung

Mit der DeWitt-Schwinger-Gleichung

$$(i\partial_s + \nabla_\mu\nabla^\mu - V(x))\phi(s,x) = 0$$

ist nun eine Verbindung zwischen Wärmeleitungsgleichung und Klein-Gordon-Theorie herzustellen. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass griechische Indizes auch wieder die Verwendung einer Lorentzmetrik bedeuted und x einen Vierervektor bezeichnet. Außerdem wird fortan das für die Klein-Gordon-Theorie übliche Potenzial $V(x) = m^2 + \xi R(x)$ verwendet.
Erfüllt nun $H(s,x,x')$

$$\begin{aligned}(i\partial_s + \nabla_{\mu\,(x)}\nabla^{\mu}_{(x)} - m^2 - \xi R(x))H(s,x,x') = 0 \quad &\text{für} \quad s > 0 \\ H(s,x,x') \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{g}}\delta(x-x') \quad &\text{für} \quad s \to 0,\end{aligned}$$

so ist

$$G^F_{DS}(x,x') = i\int_0^\infty H(s,x,x')ds$$

eine Fundamentallösung der Klein-Gordon-Gleichung. H kann, zumindest formal, ebenfalls in eine Reihe der Form aus Gleichung (4.2) entwickelt werden:

$$H(t,x,x') \sim i(4\pi is)^{-2}e^{-i\sigma(x,x')/2t}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,x')(is)^n$$

Für die Koeffizienten a_n ergibt sich damit auch im hyperbolischen Fall dieselbe Rekursionsformel wie für die der Wärmeleitungsgleichung (4.4) und somit auch dieselben Diagonalelemente. Also selbst wenn wir die Konvergenz mittels Abschneidefunktionen erzwingen müssen, so bleiben die Werte der Koeffizienten, sowie deren Ableitungen auf der Diagonale korrekt.

4.3 Hadamard Darstellung

Die typische Darstellung des Feynmanpropagators ist allerdings die oben verwendete Hadamard-Darstellung. Sie sieht unterschiedlich aus in Raumzeiten mit gerader und ungerader Dimension. Da wir aber in einer vierdimensionalen Raumzeit arbeiten, gilt (vgl. 3.1)

$$G^F_H(x,x') = \frac{i}{8\pi}\left[\frac{U(x,x')}{\sigma(x,x')} + V(x,x')\log\sigma(x,x') + W(x,x')\right]$$

mit den im Grenzübergang $x' \to x$ regulären, symmetrischen, biskalaren Funktionen U, V und W. Die beiden Letzteren können des Weiteren in Potenzreihen im quadratischen geodätischen Abstand entwickelt werden.

$$\begin{aligned} V(x,x') &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x,x')\sigma^n(x,x') \\ W(x,x') &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x,x')\sigma^n(x,x') \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Funktion U könnte theoretisch ebenso entwickelt werden, jedoch würde der entsprechende Term im Feynmanpropagator ab dem ersten Glied glatt werden, womit er in die ohnehin schon glatte Funktion W integrierbar wäre.

Die Differenzialgleichung zur Bestimmung von U,

$$(\sigma_{;\mu}{}^{\mu} - 4)U + 2\sigma^{;\mu}U_{;\mu} = 0,$$

mit der Lösung

$$U(x, x') = \Delta^{1/2}(x, x')$$

wurde schon in Abschnitt 3.2 hergeleitet. Ebenso eine Rekursionsformel mit Randbedingung für die V_n. Die Forderung des Verschwindens des Koeffizienten vor σ^{-1} brachte die Differenzialgleichung

$$2V_0 + 2\sigma^{;\mu}V_{0;\mu} + (\sigma_{;\mu}^{\ \mu} - 4)V_0 = -U_{;\mu}^{\ \mu} + (m^2 + \xi R)U \tag{4.16}$$

für V_0 zum Vorschein. Für den Limes gleicher Raumzeitpunkte ist V_0 hier schon berechenbar. Unter Berücksichtigung von Gleichung (4.12) ergibt sich

$$[V_0] = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)R,$$

was, im Vergleich mit Gleichung (4.13), dem negativen Halben von $[a_1]$ entspricht. Für die restlichen V_n fanden wir die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}(n+1)(2n+4)V_{n+1} + 2(n+1)V_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu}& \\ +(n+1)(\sigma_{;\mu}^{\ \mu} - 4)V_{n+1} &= -V_{n;\mu}{}^{\mu} + (m^2 + \xi R)V_n.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Ein Vergleich von (4.17) mit (4.4) und dem Wissen, dass $V_0 = -\frac{1}{2}a_1$ ist, zeigt, dass sich die die Hadamard- und Wärmeleitungskoeffizienten lediglich in einem Faktor unterscheiden können. Um diesen zu berechnen setzen wir in (4.17) den Ansatz $V_n = c_n a_{n+1}$ ein, wobei Gleichung (4.4) mit der Ersetzung $n \to n+1$ erfüllt sein muss. Mittels Koeffizientenvergleich in jedem Term lesen wir die folgenden drei Gleichungen ab:

$$\begin{array}{lcll} (i) & n+2 & = & -\frac{c_{n+1}}{c_n}(n+1)(2n+4) \\ (ii) & 1 & = & -\frac{c_{n+1}}{c_n}2(n+1) \\ (iii) & 1 & = & -\frac{c_{n+1}}{c_n}2(n+1) \end{array}$$

Aus der zweiten bzw. dritten Gleichung ergibt sich $c_{n+1} = -\frac{c_n}{2(n+1)}$, womit auch die erste Gleichung identisch erfüllt ist. Mit dem schon bestimmten $c_0 = -\frac{1}{2}$ ist V_n mit a_{n+1} über den Faktor $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}n!}$ verbunden. Damit gilt schließlich

$$V_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}n!} a_{n+1},$$

was insbesondere bedeutet, dass die neben $[V_0]$ gesuchten Koeffizienten die Werte

$$\begin{aligned}
[V_{0;\mu\nu}] &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{90}R_{\rho\sigma\tau\mu}R^{\rho\sigma\tau}{}_{\nu} + \frac{1}{90}R_{\rho\mu\sigma\nu}R^{\rho\sigma} - \frac{1}{45}R^{\rho}{}_{\mu}R_{\rho\nu} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)RR_{\mu\nu}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{20}-\xi\right)R_{;\mu\nu} + \frac{1}{60}R_{\mu\nu;\rho}{}^{\rho} - \frac{1}{6}m^2R_{\mu\nu}\right] \\
[V_{0;\mu}{}^{\mu}] &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{90}R_{\mu\rho\sigma\tau}R^{\mu\rho\sigma\tau} - \frac{1}{90}R_{\mu\rho}R^{\mu\rho} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)R^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\xi\right)R_{;\mu}^{\;\mu} - \frac{1}{6}Rm^2\right] \\
[V_1] &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{180}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{180}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)^2R^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}-\xi\right)R_{;\mu}^{\;\mu}\right. \\
&\qquad \left. - \left(\xi - \frac{1}{6}\right)Rm^2 + \frac{1}{2}m^4\right]
\end{aligned}$$

besitzen. Diese stimmen mit denen von [5] überein. Nun fehlt nur noch der Koeffizient $[W_{;\mu\nu}]$. Am Anfang dieses Abschnittes in Gl. (4.15) wurde bereits erwähnt, das W in eine Potenzreihe im quadratischen geodätischen Abstand entwickelt werden kann. Damit geht für den gesuchten Wert die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned}
[W_{;\mu\nu}] &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}(W_n\sigma^n)_{;\mu\nu}\right] \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\Big(W_{n;\mu\nu}\sigma^n + nW_{n;\mu}\sigma_{;\nu}\sigma^{n-1} + nW_{n;\nu}\sigma_{;\mu}\sigma^{n-1}\right. \\
&\qquad \left. + nW_n\sigma_{;\mu\nu}\sigma^{n-1} + n(n-1)W_n\sigma_{;\mu}\sigma_{;\nu}\sigma^{n-2}\Big)\right] \\
&= [W_{0;\mu\nu}] + [W_1]g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

hervor. Der Wert von $[W_1]$ lässt sich wieder rekursiv ermitteln. Dazu setzen wir die Potenzreihen (4.15) in den früher ermittelten Ausdruck (3.4) ein und erhalten für jede Ordnung von σ

$$\begin{aligned}
&(n+1)(2n+4)W_{n+1} + 2(n+1)W_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} + (n+1)(\sigma_{;\mu}^{\;\mu} - 4)W_{n+1} \\
&\qquad + (4n+6)V_{n+1} + 2V_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} + (n+1)(\sigma_{;\mu}^{\;\mu} - 4)V_{n+1} = -W_{n;\mu}{}^{\mu} + (m^2+\xi R)W_n.
\end{aligned}$$

Für $n = 0$ und im Limes gleicher Raumzeitpunkte vereinfacht sich dies zu

$$[W_1] = -\frac{3}{2}[V_1] - \frac{1}{4}[W_{0;\mu}{}^{\mu}] + \frac{1}{4}(m^2 + \xi R)[W_0].$$

Damit folgt dann letzlich

$$[W_{;\mu\nu}] = [W_{0;\mu\nu}] - \frac{3}{2}[V_1]g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}[W_{0;\rho}{}^{\rho}]g_{\mu\nu} + \frac{1}{4}(m^2 + \xi R)[W_0]g_{\mu\nu}.$$

4.4 Explizite Darstellung der in Kapitel 3 gewonnenen Ergebnisse

Der Vollständigkeit halber setzen wir die eben berechneten Koeffizienten in Gleichung (3.15) mit $\theta_{\mu\nu}$ gewählt wie in (3.17) ein, um den renormierten Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors explizit anzugeben:

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}\rangle \mathrm{ren} = \frac{1}{8\pi}\Bigg\{ & \frac{1}{2}(1-2\xi)[W_0]_{;\mu\nu} - [W_{0;\mu\nu}] + \xi R_{\mu\nu}[W_0] \\
& + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\left(2\xi - \frac{1}{2}\right)[W_0]_{;\rho}{}^{\rho} - \frac{1}{2}(m^2 + \xi R)[W_0] + \frac{1}{2}[W_{0;\rho}{}^{\rho}]\right) \\
& + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \log M^2\right) g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{180}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{180}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} - \xi\right) R_{;\mu}^{\ \mu} - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) Rm^2 + \frac{1}{2}m^4\right) \\
& - logM^2\left(\frac{1}{180}R_{\rho\sigma\tau\mu}R^{\rho\sigma\tau}{}_{\nu} + \frac{1}{180}R_{\rho\mu\sigma\nu}R^{\rho\sigma} - \frac{1}{90}R^{\rho}{}_{\mu}R_{\rho\nu}\right. \\
& + \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 R_{\mu\nu}R + \frac{1}{120}R_{\mu\nu;\rho}{}^{\rho} + \frac{1}{4}\left(2\xi - \frac{1}{2}\right)\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R_{;\rho}{}^{\rho} \\
& \left. - \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \frac{1}{3}\xi - \frac{1}{30}\right) R_{;\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right) m^2 R_{\mu\nu}\right)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Die zweite Formel, dessen Wert hier explizit angeben werden soll, ist die Spur des Energie-Impuls-Tensors im masselosen, konform invarianten Fall. Dazu ergibt mit dem von uns gewählten $\theta_{\mu\nu}^{M^2}$ (3.17) unter Verwendung von $[V_{0;\rho}{}^{\rho}] = -4[V_1] + (m^2 + \xi R)[V_0]$ (vgl. Gl. (4.17) für $x' \to x$ und $n = 0$) zunächst

$$g^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu}^{M^2} = -\frac{1}{8\pi^2}\left(-m^2[V_0] + 3\left(\xi - \frac{1}{6}\right)[V_0]_{;\rho}{}^{\rho}\right)\log M^2.$$

Für $\xi = \frac{1}{6}$ und $m = 0$ verschwindet dieser Ausdruck also. Die Spuranomalie nimmt somit in geometrischen Termen den Wert

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}\rangle_{ren} = \frac{1}{4\pi^2}[V_1] = \frac{1}{2880\pi^2}\left(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{;\mu}{}^{\mu}\right)$$

an. Insbesondere verifizieren wir damit die in Abschnitt 3.5 aufgestellte Behauptung, dass sich die Spuranomalie auch nicht durch eine andere Wahl eines lokal erhaltenen geometrischen Tensors $\theta_{\mu\nu}$ beheben lässt.

5 Ausblick

Das Ergebnis (4.18) stellt einen allgemeinen, vollständig charakterisierten Energie-Impuls-Tensor für Untersuchungen der Wechselwirkung quantisierter Materie mit der Raumzeit zur Verfügung. Nach Wahl einer Hintergrundmetrik und physikalischen Rand- oder Anfangsbedingungen für das Klein-Gordon-Feld lassen sich die Einsteingleichungen für Betrachtungen der Rückwirkung des Feldes auf die Geometrie explizit aufstellen und studieren. Im Fall des räumlich flachen Robertson-Walker Universums besteht ein Ansantz dazu von Eltzner und Gottschalk [7]. Da sie in den räumlichen Hyperflächen konstanter Zeit die Standard-Fouriertransformation zur Verfügung haben, entwickeln sie die Dynamik des Feldes in Fourier-Moden und erlangen am Ende eine Gleichung für den Skalenparameter $a(t)$ in diesem Universum.

Eine numerische Behandlung dieses Problems ist ebenfalls vorstellbar. Mittlerweile gibt es für einige Fragestellungen, zum Beispiel zwei sich Umkreisende Schwarze Löcher [12], stabile Algorithmen zur Simulation der Einsteingleichungen. Eventuell könnten diese oder ähnliche Algorithmen auch auf diese Fragestellung angewendet werden.

Des weiteren haben wir hier nur eine massive, skalare Feldtheorie betrachtet. Nächste Schritte könnten sein, sich ein elektromagnetisches Feld oder Diracfeld in gekrümmten Raumzeiten anzuschauen. Dort müssen die Felder zum Beispiel als Schnitte in Vektorbündeln dargestellt weren. Damit reicht der Levi-Civita-Zusammenhang nicht mehr aus, den wir hier ausschließlich verwendet haben, sondern ein weiterer Zusammenhang wird nötig um eine kovariante Ableitung auf dem Vektorbündel zu definieren. In dem Zuge stellt sich ebenfalls die Frage, was mit den Eigenschaften dieser Theorien dabei geschieht.

Literaturverzeichnis

[1] L.S. Brown. Stress-tensor trace anomaly in a gravitational metric: Scalar fields. *Phys. Rev. D*, 15:1469, 1977.

[2] C. Bär, N. Ginoux, and F. Pfäffle. *Wave equations on Lorentzian manifolds and quantization*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society, 2007.

[3] S.M. Carroll. Lecture notes on general relativity, 1997. [arXiv:gr-qc/9712019v1].

[4] S.M. Christensen. Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method. *Phys. Rev. D*, 14: 2490, 1976.

[5] Y. Décanini and A. Folacci. Off-diagonal coefficients of the dewitt-schwinger and hadamard representation of the feynman propagator. *Phys. Rev. D*, 73: 044027, 2006.

[6] Y. Décanini and A. Folacci. Hadamard renormalization of the stress-energy tensor for a quantized scalar field in a general spacetime of arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, 78:044025, 2008.

[7] B. Eltzner and H. Gottschalk. Dynamical backreaction in robertson-walker spacetime, 2010. [arXiv:1003.3630v2].

[8] M. Forger and H. Römer. Currents and the energy-momentum tensor in classical field theory: A fresh look at an old problem, 2003. [arXiv:hep-th/0307199v1].

[9] S.A. Fulling. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. Cambrige University Press, 1989.

[10] W. Greiner and J. Reinhardt. *Feldquantisierung*, volume 7A of *Theoretische Physik*. Harri Deutsch, 2003.

[11] V. Moretti. Comments on the stress-energy tensor operator in curved spacetime, 2002. [arXiv:gr-qc/0109048v2].

[12] Frans Pretorius. Evolution of binary black-hole spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, 95:121101, 2005.

[13] O. Steinmann. *Pertubative Quantum Electrodynamics and Axiomatic Field Theory*. Springer, 2000.

[14] A. Vilenkin. Pauli-villars regularization and trace anomalies. *Il Nuovo Cimento A*, 44:441, 1978.

[15] Robert M. Wald. The back reaction effect in particle creation in curved spacetime. *Comm. Math. Phys*, 54:1, 1977.

Danksagung

Vor allem danke ich Frau Prof. Dorothea Bahns, dass sie mir mit ihrer guten Betreuung einen Einblick in ein sonst so wenig behandeltes Thema gegeben hat.

Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Karl-Henning Rehren für die Übernahme des Koreferendariats.

Letztlich danke ich noch Dirk Rathlev, Sven Ebert, sowie Isabel Bejenke für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Erklärung nach §13(8) der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.
Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nichtbestandenen Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 31. Januar 2011

(Danilo Paulikat)