



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

Fakultät für  
Physik 

## Bachelorarbeit

# Positivitätsanalyse einer exotischen 6-Punkt-Korrelationsfunktion in vierdimensionaler konformer Quantenfeldtheorie

## Positivity analysis of an exotic 6-point correlation function in four dimensional conformal quantum field theory

angefertigt von

**Christopher Eckner**

aus Schleiz

am Institut für Theoretische Physik

**Bearbeitungszeit:** 29. April 2013 bis 5. August 2013

**Erstgutachter/in:** Prof. Dr. Karl-Henning Rehren

**Zweitgutachter/in:** Prof. Dr. Laura Covi



## Abstract

Within the Wightman axiomatic approach to quantum field theory Hilbert space positivity is difficult to prove for a given set of correlation functions. However, globally conformal invariant QFTs provide access to a powerful method to examine positivity: partial wave analysis. Nevertheless in four spacetime dimensions explicit partial wave decompositions are hard to obtain. Recent findings in the field of intertwining operators allow to compute single partial waves without knowing the whole decomposition. By using intertwining operators we investigate the positivity of an exotic 6-point correlation function consisting of two biharmonic fields  $V_1(x_1, x_2)$  and  $V_1(x_5, x_6)$  of equal scaling dimension  $d$  as well as of two scalar fields of scaling dimension  $d'$ . We show that this structure violates positivity for  $d' = 2$  and cannot be positive in any combinations of 6-point correlation functions of the same type arising in free theories. Furthermore we give constraints on combinations of the exotic and free structures for  $d' > 2$  that have to hold in a positive theory.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Strukturierung dieser Arbeit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Wightman-Axiome . . . . .	5
2.2	Polarisationsvektoren . . . . .	8
2.3	Global konform invariante Quantenfeldtheorie . . . . .	9
2.4	Korrelationsfunktionen in konformer QFT . . . . .	12
2.4.1	Auswirkungen der konformen Invarianz . . . . .	12
2.4.2	Auswirkungen der global konformen Invarianz . . . . .	14
2.5	Operatorproduktentwicklung und Biharmonizität . . . . .	15
2.6	Nichttrivialität von Korrelationsfunktionen . . . . .	18
2.7	6-Punkt-Funktionen freier biharmonischer Felder . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Reduktion von N-Punkt-Korrelationsfunktionen</b>	<b>25</b>
3.1	Partialwellenentwicklung . . . . .	25
3.2	Positivitätsanalyse durch Verkettungsoperatoren . . . . .	27
3.2.1	Definiton und Wirkung der Verkettungsoperatoren . . . . .	27
3.2.2	Bestimmung der Verkettungsoperatoren . . . . .	28
3.2.3	Anwendung für Positivitätsuntersuchungen . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Automatisierung der Berechnungen mit Maple</b>	<b>35</b>
4.1	Programmteil: Kalkül für Intertwiner . . . . .	35
4.2	Programmteil: Ausführen der Reduktion . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Anwendung und Ergebnisse</b>	<b>43</b>
5.1	Positivitätsverletzung der exotischen Struktur für Skalendimension $d' = 2$ . . . . .	43

## *Inhaltsverzeichnis*

5.2	Ausschluss der Positivität der exotischen Struktur für Skalendimension $d' = 2$ . . . . .	46
5.3	Weitere Ergebnisse für Skalendimensionen $d' > 2$ . . . . .	50
5.3.1	Reduktionen für $d' = 4$ . . . . .	50
5.3.2	Reduktionen für $d' = 6$ . . . . .	51
5.3.3	Reduktionen für $d' = 8$ . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Quellcode</b>	<b>61</b>
A.1	utils.mpl . . . . .	61
A.2	diffsolver.mpl . . . . .	61
A.3	diffops.mpl . . . . .	68

# Nomenklatur

Abkürzung	Bedeutung
QFT	Quantenfeldtheorie
GCI	global konform invariant
OPE	Operatorproduktentwicklung
PWE	Partialwellenentwicklung
CAS	Computeralgebrasystem
$\eta_{\mu\nu}$	metrischer Tensor
$\mathbb{M}$	vierdimensionaler Minkowski-Raum
$x \cdot y$	Lorentz-Skalarprodukt $x^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu}$
$\mathcal{P}$	eigentliche orthochrone Poincaré-Gruppe
$\Omega$	eindeutiger Vakuumvektor einer QFT
$\mathcal{S}(\mathbb{M})$	Raum der Schwartzfunktionen des Minkowski-Raumes
$W_N(x_1, \dots, x_N)$	$N$ -Punkt-Korrelationsfunktion mit Feldinhalt $\varphi_1$ bis $\varphi_N$
$\langle \varphi_1 \dots \varphi_N \rangle$	Vakuumerwartungswert der Felder $\varphi_1$ bis $\varphi_N$ , äquivalent zur $N$ -Punkt-Korrelationsfunktion
$\text{Conf}(\mathbb{M})$	Konforme Gruppe
$2\kappa$	Twist eines Feldes
$L$	Rang eines Tensorfeldes
$(\kappa, L)$	Quantenzahlen, welche die Darstellung eines spurfreien symmetrischen Tensorfeldes in einer GCI QFT beschreiben
$d$	Skalendimension eines Quantenfeldes $\varphi$
$\varphi_{(\kappa, L)}(v, x)$	Tensorfeld $v_{\mu_1} \dots v_{\mu_L} \varphi^{\mu_1 \dots \mu_L}(x)$ mit Darstellung $(\kappa, L)$ in der Raumzeitkoordinate $x$
$\overline{\mathbb{M}}$	konform kompaktifizierter Minkowski-Raum
$x_{ij}$	abkürzende Schreibweise für $(x_i - x_j - i0e_0)$ mit $e_0 = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{M}$
$\rho_{ij}$	abkürzende Schreibweise für $x_{ij}^2$
$[x]$	Gaußklammer, d.h. ganzzahliger Anteil von $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

<b>Abkürzung</b>	<b>Bedeutung</b>
$[\cdot]_0$	harmonischer Anteil der Funktion in Klammern
$V_1(x_1, x_2)$	Twist-2-Bi-Feld
$y_i$	Notation von $\frac{\partial}{\partial x_i}$ als Variable eines Intertwiners
$w_i$	Notation von $\frac{\partial}{\partial v_i}$ als Variable eines Intertwiners
$\nabla_i$	Kurzschreibweise von $\frac{\partial}{\partial y_i}$
$\nabla_{v_i}$	Kurzschreibweise von $\frac{\partial}{\partial w_i}$
$x \wedge y$	Bezeichnung für $x_\mu y_\nu - x_\nu y_\mu$
$\iota_{x_1, x_2}^x$	Abbildung, die die Gleichsetzung $x_1 = x_2 = x$ vornimmt, häufig als $\iota^x$ abgekürzt
$u_{d'}(x_1, \dots, x_6)$	exotische 6-Punkt-Struktur mit skalaren Feldern $\varphi_3$ und $\varphi_4$ der Skalendimension $d'$
$J, J'$	Twist-2-Ströme, d.h. $(\kappa, L) = (1, 1)$
$T^3$	symmetrisches spurfreies Tensorfeld der Darstellung $(1, 3)$
$T^5$	symmetrisches spurfreies Tensorfeld der Darstellung $(1, 5)$
$[\cdot]_{[i,j]}$	Antisymmetrisierung bzgl. der Indizes $i$ und $j$
$[\cdot]_{(i,j)}$	Symmetrisierung bzgl. der Indizes $i$ und $j$

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Schon früh warf die Quantenmechanik schwerwiegende Probleme bei der Betrachtung der kleinsten Strukturen unseres Universums auf. Selbst die Beschreibung von Atomen gelang mit Hilfe dieser Theorie nur für sehr einfache Modelle wie das Wasserstoffatom, versagte aber für komplexere Strukturen. Ein offensichtliches Problem der Quantenmechanik war ihre Formulierung ohne Einbeziehung der speziellen Relativitätstheorie. Bereits Elektronen in Atomen unterliegen relativistischen Effekten. Diese Schwäche konnte jedoch durch Dirac und dessen berühmte Diracgleichung gelöst werden. Dennoch zeigten sich auch unter Verwendung einer relativistischen Quantenmechanik schwer zu interpretierende bis gar widersprüchliche Phänomene. Darunter fallen z.B. Lösungen der Diracgleichung mit negativer Energie. Einer der Hauptgründe für das Auftreten dieser Unannehmlichkeiten ist die Einteilcheninterpretation der Quantenmechanik für massebehaftete Teilchen. Eine rigorose Behandlung quantenmechanischer Vielteilchensysteme, in denen es zulässig ist, Teilchen zu erzeugen oder zu vernichten, führt auf die Quantenfeldtheorie (kurz QFT).

Der Quantenfeldtheorie und insbesondere dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist es in den vergangenen Jahrzehnten gelungen, viele Prozesse auf der Ebene von Elementarteilchen zu beschreiben und deren Ausgang korrekt vorherzusagen. Dies täuscht jedoch nicht darüber hinweg, dass ein großer Aufwand nötig ist, um die Theorie mathematisch zu fundieren (Renormierung, Higgs-Mechanismus, Quantisierung der Felder masseloser Teilchen wie der des Photons). Trotzdem können bei Weitem nicht alle auftretenden Probleme behoben werden. Der Grund dafür ist unter anderem im genutzten Zugang zur Quantenfeldtheorie zu sehen, nämlich der Quantisierung klassischer Felder und der Verwendung von Lagrangedichten, um störungstheoretische Berechnungen von Wechselwirkungen zu ermöglichen.

Aufgrund der Schwierigkeiten dieses Weges zur Konstruktion von Quantenfeldtheorien wurden schon in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts andere Zugänge zu

## 1 Einleitung

diesem Themengebiet erforscht. Eine der prominentesten Alternativen ist die axiomatische Quantenfeldtheorie nach ARTHUR S. WIGHTMAN. Wightman fasste die grundlegendsten Eigenschaften, die eine relativistische Quantenfeldtheorie haben muss, zusammen und erhob diese zu Axiomen. In dieser Axiomatik kann zum Beispiel das Spin-Statistik-Theorem oder die PCT-Symmetrie der Quantenfeldtheorien streng mathematisch bewiesen werden (siehe [14]). Diese axiomatische Methode birgt aber Gefahren: Es ist a priori nicht klar, ob es Theorien gibt, die den Axiomen genügen können; möglicherweise lassen sich zulässige Theorien finden, die jedoch nur freie Felder beschreiben, d.h. keine Wechselwirkungen beinhalten. Zumindest in zwei Raumzeitdimensionen erweist sich die Axiomatisierung als erfolgreich und es wurden viele Beispiele nichttrivialer Theorien gefunden [3]. In vier Raumzeitdimensionen konnten diese Erfolge noch nicht erzielt werden. Hier existieren zur Zeit lediglich Theorien freier Felder [3].

Aufgrund der allgemeinen Schwierigkeit der Konstruktion konkreter Theorien basierend auf den Wightman-Axiomen greift man auf eine radikale Methode zurück: Die Axiome werden noch weiter verstärkt, um die Struktur der erlaubten Modelle zu vereinfachen und vor allem, um die mögliche Anzahl dieser einzuschränken. Eine Möglichkeit zur Verstärkung der Axiome ist die Einführung zusätzlicher Symmetrien der Raumzeit. Häufig wird die konforme Symmetrie dafür gewählt. Eine Theorie ist konform invariant, wenn alle konformen Transformationen, d.h. winkeln- und orientierungserhaltende Transformationen, Symmetrietransformationen sind. Für vier Raumzeitdimensionen, also dem physikalisch interessanten Fall, scheint diese Symmetrie, der alltäglichen Beobachtung stark zu widersprechen. Die Natur zeigt kein konformes Verhalten, dennoch könnte es bei sehr hohen Energien zu Tage treten [3]. Noch weiter geht der Vorschlag von NIKOLAY M. NIKOLOV und IVAN T. TODOROV aus dem Jahr 2001, *global konform invariante* Theorien zu betrachten, d.h. Theorien, die nicht nur in der vierdimensionalen Raumzeit (dem Minkowski-Raum) konform invariant sind, sondern auch auf dem konform kompaktifizierten Minkowski-Raum (siehe [7]). Diese hochgradig restriktive Forderung hat vor allem Auswirkungen auf die sogenannten  $N$ -Punkt-Korrelationsfunktionen, d.h. die Vakuumerwartungswerte von  $N$  Quantenfeldern. Es folgt, dass sie rationale Funktionen sein müssen und die Quantenfelder dieser Korrelationen kommutieren für zeit- und raumartigen Abstand (Huygensches Prinzip) [7]. Mit Hilfe der Korrelationsfunktionen lässt sich ein Modell innerhalb einer global konform invarianten Theorie also recht leicht formulieren. Allerdings ist noch nicht klar, ob die gemachten Annahmen zu stark sind, so dass

lediglich freie Theorien konstruiert werden können.

Es sind bereits Korrelationsfunktionen bekannt, die definitiv nicht in einer freien Theorie auftreten können. Eine dieser exotischen Strukturen ist eine 6-Punkt-Korrelationsfunktion, welche prinzipiell aus sechs skalaren Quantenfeldern besteht [12]. Diese Funktion erfüllt fast alle Wightman-Axiome automatisch, bis auf die Positivität. Diese Eigenschaft einer Quantenfeldtheorie ist mit den bisher zu Verfügung stehenden Mitteln äußerst kompliziert zu testen. Ein gängiger Positivitätstest für Korrelationsfunktionen basiert auf ihrer Partialwellenentwicklung unter Verwendung von Casimiroperatoren der Generatoren der Symmetriegruppe des zugrundeliegenden Modells. Dieses Verfahren scheidet aber in vier Raumzeitdimensionen an den auszuführenden Rechnungen, weil sie zu kompliziert sind. Einen vielversprechenden neuen Ansatz bietet hingegen die Methode der Verkettungsoperatoren (engl. *intertwining operators*), welche 2012 von LENA M. WALLENHORST in ihrer Masterarbeit ausgearbeitet wurde [15]. Die Anwendung von Verkettungsoperatoren oder kurz Intertwinern ermöglicht ebenfalls, einzelne Beiträge zur Partialwellenentwicklung einer Korrelationsfunktion zu erhalten, jedoch sind die Operatoren lediglich Polynome einfacher Ableitungen. Dies verringert den Aufwand erheblich und macht Positivitätstests zugänglicher.

In dieser Arbeit wollen wir mit Hilfe der neuen vielversprechenden Methode der Intertwiner die Positivität der exotischen 6-Punkt-Struktur untersuchen und dafür die nötigen Rechnungen mit einem Computeralgebrasystem (CAS) automatisieren.

## 1.2 Strukturierung dieser Arbeit

In Kap. 2 werden wir zunächst die Wightman-Axiome für Korrelationsfunktionen einführen und die dabei notwendigen Notationen festlegen. Ferner stellen wir die zusätzlichen Symmetrien für eine global konform invariante Quantenfeldtheorie zusammen, geben einen Überblick über die Lie-Algebra der so geformten *Konformen Gruppe* und beschreiben deren Auswirkungen auf die Elemente einer Wightmantheorie. Weiterhin wird die Operatorproduktentwicklung (kurz OPE) vorgestellt und aufgezeigt, woher die exotische 6-Punkt-Funktion stammt und wie die Polstruktur mit der Nichttrivialität einer Theorie zusammenhängt. Außerdem geben wir zusätzliche freie 6-Punkt-Strukturen an, die den selben Feldinhalt wie die exotische Struktur besitzen.

Kap. 3 stellt die möglichen Methoden einer Positivitätsanalyse in vier Raumzeitdi-

## 1 Einleitung

mensionen vor. Dies sind die Partialwellenentwicklung unter der Verwendung von Casimiroperatoren und die Reduktion von  $N$ -Punkt-Funktionen auf Zwei-Punkt-Funktionen durch Verkettungsoperatoren. Für die letztere Methode beschreiben wir die Berechnung der notwendigen Operatoren und geben eine Verfahrensweise an, um damit die Positivität zu überprüfen.

Die Automatisierung dieser Rechnungen mit Hilfe des Computeralgebrasystems **Maple** wird in Kap. 4 beschrieben. Die Ergebnisse der Positivitätsuntersuchungen sind in Kap. 5 dokumentiert und schließlich fassen wir unsere Ergebnisse in Kap. 6 zusammen.

## 2 Grundlagen

Der verbreitetste Zugang zu einer relativistischen Quantenfeldtheorie über die kanonische Quantisierung klassischer Felder mündet in einer Vielzahl mathematischer Ungereimtheiten sowie komplexer Konstruktionen, um diese zu beheben. Dennoch ist die so gewonnene Theorie in ihrer Struktur noch nicht zufriedenstellend. Aus diesem Anlass entstanden andere Entwürfe zur Konstruktion relativistischer Quantenfeldtheorien.

Im folgenden Kapitel wollen wir uns näher mit dem Wightmanschen Zugang zur QFT befassen. Das so entstehende Grundgerüst ist mathematisch befriedigend und erfüllt all jene Anforderungen, wie z.B. Lokalität, Kausalität und die Existenz einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation, die eine physikalische Theorie relativistischer Quantenfelder beinhalten sollte. Vor allem die Korrelationsfunktionen werden im Folgenden die wesentliche Rolle spielen, da aus ihnen alle Informationen über die zugrundeliegende Theorie gewonnen werden können [14].

In dieser Arbeit werden wir ausschließlich in vier Raumzeitdimensionen arbeiten, dabei bezeichne  $\mathbb{M}$  den Minkowski-Raum mit der Metrik  $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Für Vierervektoren  $x^\mu, y^\mu \in \mathbb{M}$  gelte:  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x})$  und  $x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$  sei das Lorentz-Skalarprodukt, wobei  $x^2 \equiv x \cdot x$ . Es werden außerdem die natürlichen Einheiten  $\hbar = c = 1$  gewählt.

### 2.1 Wightman-Axiome

In der axiomatischen QFT nach Wightman sind die elementaren Eigenschaften einer physikalischen relativistischen Quantentheorie axiomatisiert. Dabei ist die Axiomatik für Quantenfelder oder Korrelationsfunktionen vollkommen äquivalent, denn das Rekonstruktionstheorem [13] erlaubt es, die Quantenfelder eindeutig aus ihren Korrelationsfunktionen zu bestimmen. Da die restliche Arbeit stets mit den Korrelationsfunktionen arbeitet, werden im Folgenden die Axiome für diese eingeführt.

## 2 Grundlagen

Zunächst müssen die Elemente einer QFT in vier Raumzeitdimensionen zusammengestellt werden. Notwendig sind nach Wightman [14]:

- Ein separabler komplexer Hilbertraum  $\mathcal{H}$ ,
- Zustände als Einheitsstrahlen von  $\mathcal{H}$ ,
- eine unitäre Darstellung  $U(a, A)$  der Poincaré-Gruppe  $\mathcal{P} = \mathbb{M} \times SL(2, \mathbb{C})$  für alle  $\{a, A\} \in \mathcal{P}$ . Dabei ist  $U(a, \mathbb{1})$  unitär und kann geschrieben werden als  $U(a, \mathbb{1}) = \exp(iP^\mu a_\mu)$ . Der unbeschränkte hermitesche Operator  $P^\mu$  wird als Impulsoperator der Theorie interpretiert: Die Eigenwerte von  $P^\mu$  liegen auf dem Abschluss des Vorwärtslichtkegels  $\overline{V^+} = \overline{\{p^\mu \in \mathbb{M} | p \cdot p > 0, p^0 > 0\}}$  und  $P \cdot P = m^2$  wird als das Quadrat der Ruhemasse gedeutet,
- ein eindeutiger (bis auf einen konstanten Phasenfaktor), normierter Vakuumvektor  $\Omega \in \mathcal{H}$ , der invariant unter der Wirkung der Poincaré-Gruppe ist:  $U(a, A)\Omega = \Omega$  und
- für jede Testfunktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M})$  gibt es einen Satz von Operatoren  $\{\varphi_i(f)\}_{i \in I}$ , wobei  $\mathcal{S}(\mathbb{M})$  den Raum der Schwartzfunktionen auf dem Minkowski-Raum bezeichnet. Diese Operatoren sind zusammen mit ihren adjungierten Operatoren  $\{\varphi_i^*(f)\}_{i \in I}$  auf einer Domäne  $D$  von Vektoren definiert, welche dicht im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  liegt. Außerdem sollen alle Linearkombinationen von Vektoren in  $D$  wieder in  $D$  liegen sowie gelten:  $\Omega \in D$ . Die Elemente der unitären Darstellung  $U(a, A)$  der Poincaré-Gruppe sowie die Operatoren  $\varphi_i(f)$  und  $\varphi_i^*(f)$  ( $i \in I$ ) bilden Vektoren aus  $D$  in  $D$  ab, d.h.:

$$\begin{aligned} U(a, A)D &\subset D, \\ \varphi_i(f)D &\subset D, \\ \varphi_i^*(f)D &\subset D. \end{aligned}$$

Sind  $|\Phi\rangle, |\Psi\rangle \in D$  dann ist  $\langle \Phi | \varphi_i(f) | \Psi \rangle$  eine temperierte Distribution, betrachtet als Funktional von  $f$ .

Neben diesen grundsätzlichen Elementen einer jeden QFT müssen die Korrelationsfunktionen definiert werden, auf die sich die anschließenden Axiome beziehen.

**Definition 1.** Eine  $N$ -Punkt-Korrelationsfunktion  $W_{i_1 \dots i_N}(f_1, \dots, f_N)$ , auch Wightman-Funktion genannt, ist eine temperierte Distribution mit Testfunktionen  $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{M})$  für  $j = 1, \dots, N$  und definiert als der Vakuumerwartungswert der Quantenfelder  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ :

$$W_{i_1 \dots i_N}(f_1, \dots, f_N) := \langle \Omega, \varphi_{i_1}(f_1) \dots \varphi_{i_N}(f_N) \Omega \rangle. \quad (2.1.1)$$

Hierbei bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalarprodukt in  $\mathcal{H}$ . Eine Korrelationsfunktion für fixierte Felder  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  sei mit  $W_N(f_1, \dots, f_N)$  bezeichnet. Wir schreiben:

$$\langle \Omega, \varphi_{i_1}(f_1) \dots \varphi_{i_N}(f_N) \Omega \rangle \equiv \langle \varphi_{i_1}(f_1) \dots \varphi_{i_N}(f_N) \rangle.$$

Obwohl die Wightman-Funktionen temperierte Distributionen sind, werden wir statt der Testfunktionen  $f_i$  Raumzeitkoordinaten  $x_i$  als Argumente dieser Funktionen verwenden.

Die Wightman-Axiome sind ([14], [13]):

**Axiom 1 (Hermitizität):**

Für alle Korrelationsfunktionen (Gl. 2.1.1) gilt:

$$\langle \Omega, \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{i_N}(x_N) \Omega \rangle = \overline{\langle \Omega, \varphi_{i_N}^*(x_N) \dots \varphi_{i_1}^*(x_1) \Omega \rangle}.$$

**Axiom 2 (Lokalität):**

Für raumartig getrennte Punkte  $x_i$  und  $x_{i+1}$ , d.h.  $(x_i - x_{i+1})^2 < 0$ , gilt für alle Korrelationsfunktionen:

$$W_N(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) = W_N(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_N).$$

**Axiom 3 (Kovarianz):**

Korrelationsfunktionen sind translations- und Lorentz-invariante Objekte, weswegen sie selbst nur von Relativkoordinaten  $x_{ij} \equiv x_i - x_j$  abhängen können. Dadurch ergeben sich reduzierte Korrelationsfunktionen der Form:

$$W_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N) = W'_N(x_{12}, \dots, x_{N-1N}).$$

**Axiom 4 (Spektrumsbedingung):**

Die Fouriertransformierten der Korrelationsfunktionen  $W$  und der reduzierten Kor-

## 2 Grundlagen

relationsfunktion  $W'$  sind temperierte Distributionen gegeben durch:

$$\begin{aligned}\widehat{W}_N(p_1, p_2, \dots, p_N) &= \int W_N(x_1, x_2, \dots, x_N) e^{i \sum_{j=1}^N p_j \cdot x_j} dx_1 \dots dx_N, \\ \widehat{W}'_N(q_1, \dots, q_{N-1}) &= \int W'_N(x_{12}, \dots, x_{N-1N}) e^{i \sum_{j=1}^{N-1} q_j \cdot x_{jj+1}} dx_{12} \dots dx_{N-1N}.\end{aligned}$$

Es besteht die folgende Verbindung zwischen beiden Fouriertransformierten:

$$\widehat{W}_N(p_1, \dots, p_N) = (2\pi)^4 \delta \left( \sum_{j=1}^N p_j \right) \widehat{W}'_N(p_1, p_1 + p_2, \dots, p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1}).$$

Außerdem besitzt die Fouriertransformierte der reduzierten Korrelationsfunktion  $\widehat{W}'$  einen Träger nur im kartesischen Produkt der Abschlüsse der Vorwärtslichtkegel  $V_i^+ = \overline{\{q_i^\mu \in \mathbb{M} \mid q_i \cdot q_i > 0, q_i^0 > 0\}}$ ,  $i = 1 \dots N - 1$ .

### Axiom 5 (Positivität):

Für jede Folge  $\{f_j\}_{j \in I}$  von Testfunktionen mit  $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^j)$ ,  $\forall j \in I$  genügt die Korrelationsfunktion eines jeden einzelnen Quantenfeldes  $\varphi$  folgender Bedingung:

$$\sum_{i,j \in I} \int \overline{f_i(x_1, \dots, x_i)} W_{i+j}(x_i, \dots, x_1, y_1, \dots, y_j) f_j(y_1, \dots, y_j) \prod_{k=1}^i dx_k \prod_{l=1}^j dy_l \geq 0.$$

### Axiom 6 (Cluster-Dekompositions-Prinzip):

Für raumartige Vektoren  $s \in \mathbb{M}$  gilt:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} W_N(x_1, \dots, x_j, x_{j+1} + \mu s, \dots, x_N + \mu s) = W_N(x_1, \dots, x_j) W_N(x_{j+1}, \dots, x_N).$$

**Definition 2.** Eine Theorie, deren Korrelationsfunktionen Axiom 1 bis Axiom 6 erfüllen, wird Wightman Quantenfeldtheorie genannt.

## 2.2 Polarisationsvektoren

Die Quantenfelder  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  können beliebige Tensorfelder vom Rang  $L$  der Form  $\varphi_i(x) = T_i^{\mu_1 \dots \mu_L}(x)$  sein. Auf diese Weise wären die Korrelationsfunktionen ebenso Tensoren. Das erschwert eine spätere Automatisierung von Rechnungen mittels Computeralgebrasystemen. Um dies zu umgehen, werden Polarisationsvektoren

$v_1, \dots, v_L \in \mathbb{M}$  eingeführt. Dadurch können quasi-skalare Felder der Form

$$T(x, v_1, \dots, v_L) := v_{1, \mu_1} \dots v_{L, \mu_L} T^{\mu_1 \dots \mu_L}(x) \quad (2.2.1)$$

gebildet werden. Die ursprünglichen Tensorfelder können durch Differentiation nach den Polarisationsvektoren zurückgewonnen werden:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_L}(x) = \partial_{v_1}^{\mu_1} \dots \partial_{v_L}^{\mu_L} T(x, v_1, \dots, v_L).$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich für symmetrische Tensorfelder, da hier lediglich ein einziger Polarisationsvektor  $v \in \mathbb{M}$  notwendig ist. Das bedeutet:

$$\begin{aligned} T(x, v) &:= v_{\mu_1} \dots v_{\mu_L} T^{\mu_1 \dots \mu_L}(x), \\ T^{\mu_1 \dots \mu_L}(x) &= \frac{1}{n!} \partial_v^{\mu_1} \dots \partial_v^{\mu_L} T(x, v). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

In dieser Arbeit werden insbesondere spurfreie symmetrische Tensorfelder betrachtet. Für jene Tensoren gilt z.B. für  $L = 2$ :

$$T^\mu{}_\mu(x) = \frac{1}{2} \partial_v^2 T(x, v) = 0.$$

## 2.3 Global konform invariante Quantenfeldtheorie

In den Wightman-Axiomen wurde lediglich die Invarianz unter Wirkung der Poincaré-Gruppe gefordert. Das hat zur Folge, dass die Möglichkeiten, valide Wightman Theorien zu konstruieren, zu vielfältig sind, um einen Überblick über ihre Strukturen zu erhalten. Eine verschärfte Symmetrieforderung reduziert die Vielfältigkeit der Theorien und macht explizite Rechnungen zugänglich. Auch die neue Symmetriegruppe muss die grundlegenden physikalischen Eigenschaften einer QFT wie Kausalität erhalten. Eine attraktive Wahl ist die Erweiterung um die konforme Symmetrie. Es wird zusätzlich gefordert, dass die Korrelationsfunktionen invariant unter konformen Abbildungen sind. Konforme Abbildungen sind winkel- und orientierungserhaltend, als Beispiel seien Möbius-Transformationen der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  genannt. Die so ausgedehnte Symmetriegruppe heißt *Konforme Gruppe*  $\text{Conf}(\mathbb{M})$  und wird durch ihre Wirkung auf den metrischen Tensor  $\eta_{\mu\nu}$  definiert [1]:

**Definition 3.** Für eine Abbildung  $g \in \text{Conf}(\mathbb{M})$  gilt:

$$g : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$$

$$x^\mu \longmapsto y^\mu(x), \quad d^2y = \omega^2(x, g)d^2x,$$

wobei  $\omega(x, g)$  eine glatte und reelle Funktion ist.  $g$  lässt den metrischen Tensor bis auf einen positiven reellen Skalenfaktor invariant.

Damit setzt sich  $\text{Conf}(\mathbb{M})$  aus den folgenden Transformationen zusammen:

- Poincaré-Transformationen  $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$  für jede Lorentz-Matrix  $\Lambda \in \mathcal{P}$  und jeden Vektor  $a \in \mathcal{P}$ ,
- Dilatationen  $x^\mu \mapsto \lambda x^\mu$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ ,
- den speziellen konformen Transformationen  $x^\mu \mapsto \frac{x^\mu - x^2 b^\mu}{1 - 2(b \cdot x) + b^2 x^2}$  mit  $b^\mu \in \mathbb{M}$ .

Vor allem die Wirkung der Dilatationen auf die Quantenfelder einer Theorie bringt eine in dieser Arbeit zentrale Größe hervor, die Skalendimension  $d$ . Es gilt: Jedes beliebige Feld  $\varphi(x)$  transformiert sich unter einer Dilatation  $x^\mu \mapsto \lambda x^\mu$  gemäß:

$$\varphi(x) \mapsto \lambda^d \varphi(\lambda x).$$

Eine nähere Betrachtung der speziellen konformen Transformationen zeigt, dass diese Singularitäten an den Nullstellen des Nenners besitzen. Demnach können Punkte des Minkowski-Raumes nach Unendlich abgebildet werden. Dann ist es aber durch eine unitäre konforme Transformation möglich raumartig getrennte Punkte auf zeitartig getrennte Punkte abzubilden. Dadurch wird die Kausalität der Theorie verletzt, es sei denn, man fordert Kommutativität der Felder auch für zeitartig getrennte Punkte. Diese Beobachtung motiviert einen Übergang zum konform kompaktifizierten Minkowski-Raum  $\overline{\mathbb{M}}$  [8]:

$$\overline{\mathbb{M}} = \left\{ z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z = \frac{\bar{z}}{z^2} \right\}, \quad \left( z^2 := \sum_{i=1}^4 z_i^2 \right).$$

Soll die QFT nun auf  $\overline{\mathbb{M}}$  definiert und zusätzlich invariant unter Anwendung der Konformen Gruppe sein, muss die Forderung der *Huygens-Lokalität* an die Felder gestellt werden, auch *Huygenssches Prinzip* genannt:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0, \text{ falls } (x - y)^2 \neq 0. \quad (2.3.1)$$

Dies ist eine sehr starke Einschränkung für mögliche Quantenfelder, denn Informationsübertragung kann lediglich auf dem Lichtkegel stattfinden und alle Felder haben eine verschwindende Masse. Diese Beobachtung gibt Anlass zu folgender Definition:

**Definition 4** ([7]). Eine Wightman QFT heißt global konform invariant (GCI), wenn für alle  $g \in \text{Conf}(\mathbb{M})$  und für alle Punkte  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{M}$ , so dass deren Bilder  $(gx_1, \dots, gx_N)$  ebenfalls im Minkowski-Raum  $\mathbb{M}$  liegen, gilt, dass die Wightman-Funktionen  $W_N(x_1, \dots, x_N)$  invariant unter der Wirkung von  $g$  sind.

Jede auf dem Minkowski-Raum  $\mathbb{M}$  definierte global konform invariante QFT kann auf den konform kompaktifizierten Minkowski-Raum  $\overline{\mathbb{M}}$  erweitert werden [15]. Damit sind die Felder einer GCI QFT Huygens-lokal.

Die Lie-Algebra der Konformen Gruppe ist durch die Kommutatorrelationen der Generatoren der Translationen  $P_\mu$ , der Lorentz-Gruppe  $M_{\mu\nu}$ , der Dilatationen  $D$  und der speziellen konformen Transformation  $K_\mu$  gegeben [3]:

$$\begin{aligned}
 [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\
 i [P_\mu, D] &= P_\mu, \\
 i [K_\mu, P_\nu] &= 2 (M_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} D), \\
 i [P_\rho, M_{\mu\nu}] &= \eta_{\rho\nu} P_\mu - \eta_{\rho\mu} P_\nu, \\
 [D, M_{\mu\nu}] &= 0, \\
 i [D, K_\mu] &= K_\mu, \\
 i [K_\rho, M_{\mu\nu}] &= \eta_{\rho\nu} K_\mu - \eta_{\rho\mu} K_\nu, \\
 i [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}, \\
 [K_\mu, K_\nu] &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Wirkung dieser Lie-Algebra auf symmetrische (spurfreie) Tensorfelder aus Gl. 2.2.2 kann damit ermittelt werden:

$$i [P_\mu, T(x, v)] = \partial_\mu T(x, v), \quad (2.3.2)$$

$$i [M_{\mu\nu}, T(x, v)] = (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + v_\mu \partial_\nu^v - v_\nu \partial_\mu^v) T(x, v), \quad (2.3.3)$$

$$i [D, T(x, v)] = ((x \cdot \partial) + d) T(x, v), \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned}
 i [K_\mu, T(x, v)] &= \left( 2x_\mu (x \cdot \partial) - x^2 \partial_\mu + 2dx_\mu + 2v_\mu (x \cdot \partial^v) \right. \\
 &\quad \left. - 2(x \cdot v) \partial_\mu^v \right) T(x, v).
 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

## 2 Grundlagen

Die irreduziblen unitären Darstellungen der Konformen Gruppe werden durch drei Quantenzahlen charakterisiert. Diese sind zum einen die Skalendimension  $d$  und zwei ganz- oder halbzahlige Spinquantenzahlen  $j_1$  und  $j_2$  der Darstellung der Lorentz-Gruppe. Mit ihnen lässt sich der mögliche Feldinhalt einer konformen Wightman QFT bereits einschränken. Dieses Ergebnis wird *Unitaritätsschranke* genannt und wurde schon 1977 von GERHARD MACK gefunden. Es sind nur solche Felder zulässig, für deren Darstellung gilt [5]:

1.  $d = j_1 = j_2 = 0$  (triviale 1-dimensionale Darstellung)
2.  $j_1 j_2 \neq 0$ ,  $d \geq j_1 + j_2 + 2$
3.  $j_1 j_2 = 0$ ,  $d \geq j_1 + j_2 + 1$ .

Die Formulierung einer GCI QFT stellt auch eine weitere Bedingung an die unitären Darstellungen der Konformen Gruppe. Es muss gelten, dass sowohl  $d$  als auch  $j_1 + j_2$  ganzzahlig sind. Außerdem ist  $j_1 + j_2$  gleich dem Rang  $L$  des betreffenden Tensorfeldes.

Es stellt sich heraus, dass symmetrische spurfreie Tensorfelder mit  $d - L = 2$  und erhalten sind. Dieses Verhalten werden wir in Abs. 2.5 erläutern. Für unsere Arbeit wird diese Eigenschaft eine besondere Rolle spielen, um die Positivität einer Korrelationsfunktion festzustellen. Dies führt auf folgende nützliche Definition:

**Definition 5.** Sei  $\varphi$  ein Tensorfeld vom Rang  $L$  mit der Skalendimension  $d$ . Der *Twist*  $2\kappa$  dieses Feldes ist gegeben durch:

$$2\kappa := d - L.$$

## 2.4 Korrelationsfunktionen in konformer QFT

Im folgenden Abschnitt werden wir kurz die Implikationen der konformen bzw. global konformen Invarianz für die Korrelationsfunktionen einer QFT aufzeigen. Die erhöhte Symmetrie einer solchen Theorie wird auch das Aussehen dieser Strukturen stark beeinflussen und nützliche Definitionen zulassen.

### 2.4.1 Auswirkungen der konformen Invarianz

Die konforme Invarianz legt explizit das Aussehen der Ein-, Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen der involvierten Felder (charakterisierende Quantenzahlen  $(d, j_1, j_2)$ )

fest, wobei eine Normierungskonstante auftritt [3]:

### Ein-Punkt-Funktionen:

Die Forderung der Konformen Gruppe nach Invarianz unter Translationen und Dilatationen bedeutet für Ein-Punkt-Funktionen  $W_1(x)$ , dass sie konstant sein müssen und diese Konstante ist null, um die Homogenität in  $x$  zu gewährleisten:

$$W_1(x) = 0.$$

### Zwei-Punkt-Funktionen:

Zwei-Punkt-Funktionen  $W_2(x_1, x_2)$  zweier Tensorfelder  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  können nur dann nicht verschwinden, wenn für ihre Quantenzahlen gilt:  $(d_1, j_{1,1}, j_{2,1}) = (d_2, j_{2,2}, j_{1,2})$ . Deswegen ist zu beobachten, dass in allen Zwei-Punkt-Funktionen von Tensorfeldern mit  $L \geq 1$  stets dieselbe Struktur in unterschiedlicher Potenz auftaucht.

**Definition 6.** Innerhalb einer konform invarianten QFT heißt

$$R_{\mu\nu}(x_{12}) = \frac{(\eta_{\mu\nu}\rho_{12} - 2x_{12,\mu}x_{12,\nu})}{\rho_{12}^2} \quad (2.4.1)$$

primitiv kovarianter Tensor.

Hierbei ist  $\rho_{ij}$  eine in dieser Arbeit häufig auftretende Abkürzung für  $(x_i - x_j - i0e_0)^2$  mit  $e_0 = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{M}$ . Für skalare Felder sind beide Spinquantenzahlen null, weshalb folgende Form entsteht:

$$W_2(x_1, x_2) = \delta_{d_1 d_2} \frac{C}{\rho_{12}^{d_1}}. \quad (2.4.2)$$

Alle anderen Zwei-Punkt-Funktionen symmetrischer (spurfreier) Tensorfelder nach Gl. 2.2.2 lassen sich nun über den primitiven kovarianten Tensor sehr kompakt schreiben [2]:

$$\langle T(x_1, v)T(x_2, w) \rangle = \delta_{d_1 d_2} \delta_{L_1 L_2} \frac{C' \left( [v^\mu w^\nu R_{\mu\nu}(x_{12})]_0 \right)^{L_1}}{\rho_{12}^{d_1 - L_1}}. \quad (2.4.3)$$

## 2 Grundlagen

Dabei bezeichnet  $[\cdot]_0$  den bzgl.  $v$  und  $w$  harmonischen Anteil des Terms in Klammern, d.h.:

$$\partial_v^2 [v^\mu w^\nu R_{\mu\nu}(x_{12})]_0 = 0 = \partial_w^2 [v^\mu w^\nu R_{\mu\nu}(x_{12})]_0.$$

### Drei-Punkt-Funktionen:

Konforme Invarianz legt für skalare Felder auch die Struktur der Drei-Punkt-Funktion fest. Die Felder dürfen paarweise voneinander verschiedene Skalendimensionen  $d_1, d_2$  und  $d_3$  besitzen. Dann gilt [15]:

$$\langle \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_3(x_3) \rangle = \frac{C''}{\rho_{12}^{(d_1+d_2-d_3)/2} \rho_{13}^{(d_1-d_2+d_3)/2} \rho_{23}^{(-d_1+d_2+d_3)/2}}.$$

Auch für höhere Korrelationsfunktionen skalarer Felder kann eine allgemeine Aussage zur Struktur gemacht werden, jedoch ist diese nur bis auf eine Funktion von sogenannten *Cross-Ratios*  $\sigma_{ijkl}$  festgelegt:

$$\sigma_{ijkl} = \frac{\rho_{ij} \rho_{kl}}{\rho_{ik} \rho_{jl}}.$$

Im Falle einer 4-Punkt-Funktion gibt es z.B. nur zwei unabhängige Cross-Ratios  $s$  und  $t$  und folgende Wahl ist die Standarddefinition:

$$s := \frac{\rho_{12} \rho_{34}}{\rho_{13} \rho_{24}}, \quad t := \frac{\rho_{14} \rho_{23}}{\rho_{13} \rho_{24}}.$$

### 2.4.2 Auswirkungen der global konformen Invarianz

Die stärkere Forderung nach global konformer Invarianz erzwingt zusätzlich, dass jegliche  $N$ -Punkt-Funktion einer GCI QFT eine rationale Funktion in  $x_{ij}$  sein muss [7] und erweitert damit die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts. Für skalare Felder ergibt sich daraus eine besonders einfache Struktur der Wightman-Funktionen:

$$\langle \varphi_1(x_1) \dots \varphi_N(x_N) \rangle = \sum_{\{\mu_{ij}\}} C_{\{\mu_{ij}\}} \prod_{i < j} (\rho_{ij})^{\mu_{ij}}. \quad (2.4.4)$$

$\mu_{ij}$  ist ein Multiindex mit  $i < j$ . Dieser muss der folgende Regel, auch *Summenregel* genannt, folgen, um die Bedingung der global konformen Invarianz zu erfüllen [1]:

$$\sum_i \mu_{ij} = -d_j, \quad (2.4.5)$$

wobei  $d_j$  die Skalendimension des Feldes  $\varphi_j(x_j)$  ist. Zusätzlich gelten für  $\mu_{ij}$  die universellen Polschranken [7] aufgrund der Unitarität:

$$\mu_{ij} \geq - \left\lfloor \frac{d_i + d_j + \delta_{d_i d_j} - 1}{2} \right\rfloor. \quad (2.4.6)$$

$\lfloor \cdot \rfloor$  bezeichnet die Gaußklammer. Gl. 2.4.6 stellt außerdem sicher, dass die Summe in Gl. 2.4.4 endlich ist.

Die Ergebnisse für die Form der  $N$ -Punkt-Funktionen und Polschranken  $\mu_{ij}$  skalarer Felder treffen auch für Tensorfelder mit Rang  $L \geq 1$  in ähnlicher Weise zu. In jedem Fall sind die Korrelationsfunktionen auch rationale Funktionen in  $x_{ij}$  und für die Polschranken gilt [7]:

$$\mu_{ij} \geq - \left\lfloor \frac{d_i + j_{1,i} + j_{2,i} + d_j + j_{1,j} + j_{2,j}}{2} - \frac{1 - \delta_{j_{1,i} j_{2,j}} \delta_{j_{2,i} j_{1,j}} \delta_{d_i d_j}}{2} \right\rfloor. \quad (2.4.7)$$

Diese Polschranken stellen einen weiteren Positivitätstest in dieser Arbeit dar. Eine Verletzung der Schranken würde zu einer manifest positivitätsverletzenden Theorie führen.

## 2.5 Operatorproduktentwicklung und Biharmonizität

Die wiedergegebenen Implikationen einer global konform invarianten Wightman Quantenfeldtheorie schränken die Struktur dieser Theorie stark ein. Dennoch reichen diese Erkenntnisse nicht aus, um tatsächlich nichttriviale Theorien zu identifizieren. Es sind Methoden erforderlich, die noch tiefer in die Beschaffenheit der Korrelationsfunktionen als fundamentale Elemente einer Wightman QFT blicken lassen. Ein mächtiges Werkzeug für diesen Zweck stellt die *Operatorproduktentwicklung*, kurz OPE, dar.

**Definition 7.** Seien  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  zwei beliebige lokale Quantenfelder einer Wightman QFT, wobei die Position  $y$  in einer nahen Umgebung von  $x$  liegen soll. Dann heißt

$$\varphi(x)\psi(y) = \sum_n C(x-y)_n \mathcal{O}_n(x)$$

die Operatorproduktentwicklung der beiden Felder. Hierbei ist  $C(x-y)$  eine Funktion von Potenzen der Koordinatendifferenzen  $x-y$ .  $\mathcal{O}_n(x)$  sind erneut lokale Felder. Im Allgemeinen enthält die Summe unendlich viele solcher lokaler Felder [16].

Diese Definition ist sehr allgemein gefasst und zunächst ist nicht klar, ob eine solche Entwicklung überhaupt existiert. Tatsächlich kann die Existenz z.B. für Produkte skalarer oder spinorwertiger Felder gezeigt werden [16]. In einer GCI QFT ist eine OPE für alle denkbaren Felder möglich und zusätzlich sind  $C(x-y)$  Laurent-Polynome in den Koordinatendifferenzen sowie  $\mathcal{O}(x)$  lokale quasiprimäre Felder, d.h. sie tragen eine irreduzible Darstellung der Konformen Gruppe.

Bereits die OPE zweier skalarer Felder  $\varphi_1(x_1)$  und  $\varphi_2(x_2)$  gleicher Skalendimension  $d$  zeigt interessante Eigenschaften. Mit Hilfe dieser Felder sei das Feld

$$U(x_1, x_2) := \rho_{12}^{d-1} (\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) - \langle \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \rangle) \quad (2.5.1)$$

definiert. Der subtrahierte Term in dieser Definition ist der Vakuumerwartungswert der skalaren Felder, welcher vom Twist 0 und am singulärsten mit einem Polgrad von  $d$  ist. Aufgrund von Gl. 2.4.6 kann  $U$  nur noch den maximalen Polgrad  $d-1$  besitzen und die Multiplikation mit  $\rho_{12}^{d-1}$  stellt die Regularität in den beiden Variablen sicher. Zusätzlich ist  $U$  nicht konform invariant, aber Huygens-bilokal, d.h. jedes weitere Feld  $\varphi_3(x_3)$ , welches Huygens-lokal zu  $\varphi_1(x_1)$  und  $\varphi_2(x_2)$  ist, kommutiert auch mit  $U$  für zeit- und raumartig getrennte Punkte. Die OPE der skalaren Felder wird nun durch eine Taylor-Entwicklung von  $U(x_1, x_2)$  in  $x_{12}$  wie folgt eingeführt:

$$U(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n=0}^3 x_{12}^{\mu_1} \dots x_{12}^{\mu_n} X_{\mu_1 \dots \mu_n}^n(x_2). \quad (2.5.2)$$

Hierbei sind die Felder  $X_{\mu_1, \dots, \mu_n}^n(x_2)$  Huygens-lokal, aber nicht quasiprimär und diese Entwicklung wird als formale Potenzreihe angesehen. Diese Potenzreihe kann nach

[9] in folgende Form gebracht werden:

$$U(x_1, x_2) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} V_{\kappa}(x_1, x_2) \rho_{12}^{\kappa-1}.$$

Die Felder  $V_{\kappa}(x_1, x_2)$  sind regulär in  $x_1 = x_2$  und enthalten alle Twist- $2\kappa$ -Beiträge (als formale Potenzreihe), nachdem in Gl. 2.5.2 die Felder  $X_{\mu_1, \dots, \mu_n}^n(x_2)$  durch quasiprimäre, symmetrische spurfreie Tensorfelder  $O_{\mu_1 \dots \mu_L}^d(x)$  ersetzt wurden. Da die Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen skalarer Felder eindeutig festgelegt sind, können die Felder  $V_{\kappa}(x_1, x_2)$  allgemein in jeder konformen QFT bestimmt werden (siehe dazu [9],[2]). Es ist also möglich, die OPE zweier skalarer Felder gleicher Skalendimension  $d$  in einer konform invarianten QFT explizit zu ermitteln.

Im Folgenden wollen wir besonders die Twist-2-Beiträge  $O_{\mu_1 \dots \mu_L}^{2+L}(x)$  zur OPE der skalaren Felder betrachten. Diese haben die bereits erwähnte Eigenschaft, erhalten zu sein, d.h.:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} O_{\mu_1 \dots \mu_L}^{2+L} = 0 \quad \forall L \geq 1. \quad (2.5.3)$$

Dieses Verhalten ist auf die besondere Struktur ihrer Zwei-Punkt-Funktionen (siehe Gl. 2.4.3) zurückzuführen. Die primitiven kovarianten Tensoren sind erhalten und da eine Zwei-Punkt-Funktion einem Normquadrat eines Vektors entspricht, muss bei verschwindendem Normquadrat der Vektor selbst null sein. Aus dem Reeh-Schlieder-Theorem folgt dann, dass die involvierten Felder selbst verschwinden müssen und deswegen erhalten sind. Diese Eigenschaft der Twist-2-Felder überträgt sich auch auf das Feld  $V_1(x_1, x_2)$  in folgender Weise:

$$\square_{x_1} V_1(x_1, x_2) = 0 = \square_{x_2} V_1(x_1, x_2).$$

Man sagt,  $V_1(x_1, x_2)$  ist biharmonisch in seinen Variablen oder kurz, ein Bi-Feld. Auch die Biharmonizität lässt sich ausnutzen durch folgende Umschreibung von  $U(x_1, x_2)$ :

$$U(x_1, x_2) = V_1(x_1, x_2) + \rho_{12} \tilde{U}(x_1, x_2).$$

Diese sogenannte harmonische Zerlegung ist sogar eindeutig nach folgendem Lemma:

**Lemma 8** ([9]). Sei  $u(x)$  eine formale Potenzreihe in  $x \in \mathbb{C}^D$  mit Koeffizienten aus einem Vektorraum  $V$ . Dann gibt es eindeutige formale Potenzreihen  $v(x)$  und  $\tilde{u}(x)$  mit Koeffizienten aus  $V$ , so dass

$$u(x) = v(x) + x^2\tilde{u}(x)$$

und  $v(x)$  ist harmonisch in Bezug auf  $x$ , d.h.  $\square_x v(x) = 0$ .  $v(x)$  heißt der harmonische Anteil von  $u(x)$ .

## 2.6 Nichttrivialität von Korrelationsfunktionen

Die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts sind vor allem für die Analyse von Korrelationsfunktionen von  $U(x_1, x_2)$  mit anderen skalaren Feldern  $\varphi_i(x_i)$ ,  $i = 3, \dots, N$ , hilfreich (vgl. hierzu [9]). Sei

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \langle \cdot U(x_1, x_2) \cdot \rangle, \\ &= \langle \varphi_3(x_3) \dots \varphi_k(x_k) U(x_1, x_2) \varphi_{k+1}(x_{k+1}) \dots \varphi_N(x_N) \rangle, \\ &= \langle \cdot V_1(x_1, x_2) \cdot \rangle + \rho_{12} \langle \cdot \tilde{U}(x_1, x_2) \cdot \rangle, \end{aligned}$$

betrachtet als Funktion der Variablen  $x_1$  und  $x_2$ . Das Feld  $V_1$  wurde als formale Potenzreihe definiert. Um demnach obiger Gleichung eine Bedeutung zu geben, sollte auch  $F$  als formale Potenzreihe angesehen werden. Die Abhängigkeit von den zusätzlichen Koordinaten ist von der Form  $\rho_{ij}$ ,  $i = 1, 2$  und  $j = 3, \dots, N$ . Fragen bezüglich Konvergenz und Rationalität dieser Funktion werden in [9] behandelt.

Es soll nun die harmonische Zerlegung dieser Funktion in  $x_1$  und  $x_2$  gefunden werden. Dazu sei die Potenzreihenentwicklung in der Variable  $\rho_{12}$  betrachtet:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \sum_{k=0}^M \rho_{12}^k F_k(\{\rho_{ij}\}_{\{i,j\} \neq \{1,2\}}), \\ F_k(\{\rho_{ij}\}_{\{i,j\} \neq \{1,2\}}) &\equiv F_k(x_1, x_2) = \sum_{\{\mu_{1i}\}, \{\mu_{2i}\}} C_{k, \{\mu_{1i}\}, \{\mu_{2i}\}} \prod_{j=3}^N \rho_{1j}^{\mu_{1j}} \prod_{j=3}^N \rho_{2j}^{\mu_{2j}}. \end{aligned}$$

Hierbei sind  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_{1j}, \mu_{2j} \in \{-d+1, -d+2, \dots\}$  also ganzzahlig mit  $j = 3, \dots, N$ , die Koeffizienten  $C_{k, \{\mu_{1i}\}, \{\mu_{2i}\}}$  können von  $\rho_{mn}$  ( $m, n \geq 3$ ) abhängen und die Homogenität der Korrelationsfunktion sowie die Polschranken erfordern, dass  $\sum_{j \geq 3} \mu_{1j} = \sum_{j \geq 3} \mu_{2j} = -1 - k$  [9].

Es wird  $F_0(x_1, x_2)$  als führender Anteil des Twist-2-Beitrag von  $F(x_1, x_2)$  bezeich-

net (gelesen als Funktion der Variablen  $x_1$  und  $x_2$ ). Ist  $H$  der harmonische Anteil der harmonischen Zerlegung von  $F$  in  $x_{12}$ , dann muss  $F_0$  auch der führende Twist-2-Beitrag von  $H$  bzw.  $\langle \cdot V_1(x_1, x_2) \cdot \rangle$  sein. Aus der Eindeutigkeit dieser harmonischen Zerlegung folgt eine Integrabilitätsbedingung an mögliche Twist-2-Beiträge, denn  $H$  muss separat harmonisch in beiden Variablen  $x_1$  und  $x_2$  sein. Diese Bedingung kann in Form einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung formuliert werden, welche der führende Anteil  $F_0$  eines Twist-2-Beitrages erfüllen muss [9]:

$$(E_1 D_2 - E_2 D_1) F_0 = 0, \quad (2.6.1)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{i=3}^N \rho_{2i} \frac{\partial}{\partial \rho_{1i}}, \\ E_2 &= \sum_{i=3}^N \rho_{1i} \frac{\partial}{\partial \rho_{2i}}, \\ D_1 &= \sum_{3 \leq j < k \leq N} \rho_{jk} \frac{\partial}{\partial \rho_{1j}} \frac{\partial}{\partial \rho_{1k}}, \\ D_2 &= \sum_{3 \leq j < k \leq N} \rho_{jk} \frac{\partial}{\partial \rho_{2j}} \frac{\partial}{\partial \rho_{2k}}. \end{aligned}$$

Die Lösungen  $F_0$  dieser Differentialgleichung müssen einerseits Laurent-Polynome homogen vom Grade  $-1$  sowohl in  $\rho_{1k}$  als auch in  $\rho_{2k}$  ( $k > 2$ ) sein, andererseits ergeben sich Einschränkungen an die erlaubten Polstrukturen [12]: Angenommen  $F_0$  enthält ein Monom der Form

$$\prod_{k>2} \rho_{1k}^{\mu_{1k}} \rho_{2k}^{\mu_{2k}} \times \text{weitere Faktoren},$$

wobei diese Faktoren von  $\rho_{mn}$  mit  $m, n > 2$  abhängen. Man sagt, ein Laurent-Polynom enthält einen *Doppelpol*, wenn es  $i \neq j$  gibt, so dass  $\mu_{1i} < 0$  und  $\mu_{1j} < 0$ . Sollte das Monom einen Doppelpol in der Variable  $x_1$  besitzen, dann muss nach [9] gelten:  $\mu_{2k} \geq 0$  für  $k > 2, k \neq i, j$ . Außerdem schließt diese Beobachtung Dreifachpole aus, da dann  $\mu_{2k} \geq 0$  für alle  $k > 2$  folgt, was der Homogenität des Monoms widerspricht. Deswegen kann die mögliche Polstruktur von  $F_0$  nur folgende Form haben:

$$\frac{\text{Polynom}}{\rho_{1i}^p \rho_{1j}^q \rho_{2i}^r \rho_{2j}^s} \times \text{weitere Faktoren}. \quad (2.6.2)$$

## 2 Grundlagen

Weiterhin sagt man, dass ein Laurent-Polynom einen *Einfachpol* enthält, wenn nur einer der Exponenten  $p, q$  und  $r, s$  in Gl. 2.6.2 kleiner null ist.

Die Relevanz der Einfach- und Doppelpole liegt in ihrer Verbindung zur Trivialität bzw. Nichttrivialität einer Theorie, d.h. die Polstruktur von Korrelationsfunktionen gibt Aufschluss darüber, ob sie nur aus freien Feldern aufgebaut werden kann oder ob nicht-freie Felder beteiligt sind. Dafür ist zu bemerken: Konstruiert man biharmonische Twist-2-Felder aus freien Feldern, können Korrelationsfunktionen nur Einfachpole besitzen. Diese freien biharmonischen Felder könnten z.B.

$$\begin{aligned} & : \varphi(x)\varphi(y) : , \\ & (x-y)^\mu : \overline{\psi(x)}\gamma_\mu\psi(y) : \text{ oder} \\ & (x-y)^\mu(x-y)^\nu : F_{\mu\sigma}(x)F_{\nu}^\sigma(y) : \end{aligned}$$

beinhalten, wobei  $: \cdot :$  die Normalordnung,  $\varphi(x)$  ein freies masseloses skalares Feld,  $\psi(x)$  ein freies masseloses Diracfeld und  $F_{\mu\nu}$  das Maxwell-Feld bezeichnet. Beispielhaft soll die Einfachpoleigenschaft der Korrelationsfunktionen freier biharmonischer Twist-2-Felder für Konstruktionen aus freien skalaren Feldern  $\phi_1$  und  $\phi_2$  nachgerechnet werden.

Angenommen  $\varphi_1(x_1) = : \phi_1^2 :$  und  $\varphi_2(x_2) = : \phi_2^2 :$ . Nach dem Wickschen Theorem folgt dann:

$$\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) = : \phi_1^2\phi_2^2 : + 4\langle\phi_1\phi_2\rangle : \phi_1\phi_2 : + 2\langle\phi_1\phi_2\rangle^2.$$

Der Twist-2-Anteil entspricht genau denjenigen Termen, bei denen alle Felder gemäß Wick bis auf ein Paar untereinander kontrahiert werden (hier also  $\langle\phi_1\phi_2\rangle : \phi_1\phi_2 :$ ). Die vollständige Kontraktion entspricht dem Vakuumanteil mit höchster Singularität in  $x_{12}$ . Dieser wird nicht betrachtet. Die unkontrahierten Terme sind nicht singulär genug, um zum Twist-2 beizutragen. Fügt man den so erhaltenen Twist-2-Beitrag in eine Korrelation mit anderen Feldern  $\Xi_i(x_i)$  ( $i \geq 3$ ), so muss das eine verbleibende unkontrahierte Paar noch vollständig kontrahiert werden, damit die Korrelation nicht verschwindet. Daraus folgt aber, dass höchstens jeweils eine weitere Zwei-Punkt-Funktion  $\langle\phi_1\Xi_j\rangle$  bzw.  $\langle\phi_2\Xi_k\rangle$  mit  $j, k \geq 3$  auftreten kann, d.h. ein Einfachpol wegen Gl. 2.4.2 ( $\langle\phi_1\phi_2\rangle$  wird nicht mitgezählt). Dieses Argument trifft analog auch auf alle anderen Felder zu, die aus normalgeordneten freien Feldern erzeugt wurden. Sollten sich demnach Korrelationsfunktionen mit Doppelpolen finden

lassen, müssen diese zu einer nichttrivialen Theorie gehören.

In [9] wurde ein führender Twist-2-Beitrag  $F_0$  einer 6-Punkt-Korrelationsfunktion gefunden, der Doppelpole enthält:

$$u_{d'}(x_1, \dots, x_6) \equiv F_0(x_1, x_2) = \frac{(\rho_{15}\rho_{26}\rho_{34} - 2\rho_{15}\rho_{23}\rho_{46} - 2\rho_{15}\rho_{24}\rho_{36})_{[1,2][5,6]}}{\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24} \cdot \rho_{34}^{d'-3} \cdot \rho_{35}\rho_{45}\rho_{36}\rho_{46}}. \quad (2.6.3)$$

Hierbei bezeichnet  $(\dots)_{[i,j]}$  die Antisymmetrisierung bzgl. der beiden Variablen  $x_i$  und  $x_j$ .

Die betrachtete Korrelationsfunktion enthält dabei zwei der Felder  $U(x_1, x_2)$  und  $U(x_5, x_6)$  mit Skalendimension  $d$  in allen vier involvierten Feldern sowie zwei global konform invariante skalare Felder  $\varphi_3(x_3)$  und  $\varphi_4(x_4)$  mit Skalendimension  $d'$ . Außerdem erfüllt diese Struktur die Summenregel Gl. 2.4.5, die Polschranken nach Gl. 2.4.6 und löst die Differentialgleichung dritter Ordnung für beide Variablenpaare  $x_1, x_2$  und  $x_5, x_6$ . Es ist bislang aber völlig unklar, ob diese 6-Punkt-Funktion das Wightmansche Axiom 5 der Positivität erfüllt.

## 2.7 6-Punkt-Funktionen freier biharmonischer Felder

Neben der exotischen Struktur existieren noch weitere Lösungen von Gl. 2.6.1, die jedoch nur Einfachpole besitzen, somit von freien Feldern herrühren. In [10] wurden diese führenden Twist-2-Beiträge für 6-Punkt-Korrelationsfunktionen skalarer Felder klassifiziert und 24 verschiedene freie Strukturen mit den gewünschten Eigenschaften gefunden: Sie erfüllen die Polschranken, die Summenregel und sind biharmonisch in den Variablen  $x_1, x_2$  und  $x_5, x_6$ . Sollten die Positivitätstest an der exotischen Strukturen ein indefinites Ergebnis liefern, könnte eine Kombination mit den freien Strukturen doch positiv sein. Deswegen werden die 24 Funktionen hier angegeben, wobei zwischen bosonischen (keine Faktoren  $\rho_{ij}$  im Zähler) und fermionischen (Zähler enthält Faktoren  $\rho_{ij}$ ) Strukturen unterschieden wird. Die Auflistung erfolgt mit Hilfe von Diagrammen, die folgendermaßen zu lesen sind:

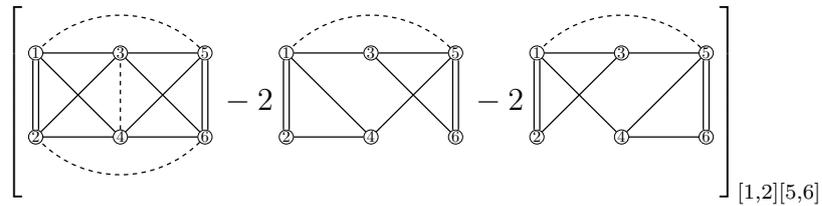
- Für die sechs skalaren Felder in der Korrelationsfunktion werden sechs Punkte (Vertices) gezeichnet und entsprechend des Feldlabels benannt. Die Punkte werden stets in folgendem Muster benannt:
 
$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}.$$
- Für jeden Exponenten  $\mu_{ij}$  von  $\rho_{ij}^{\mu_{ij}}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) werden Verbindungslinien

## 2 Grundlagen

zwischen den betreffenden Vertices gezeichnet, die Anzahl der Linien entspricht dem numerischen Wert von  $\mu_{ij}$ .

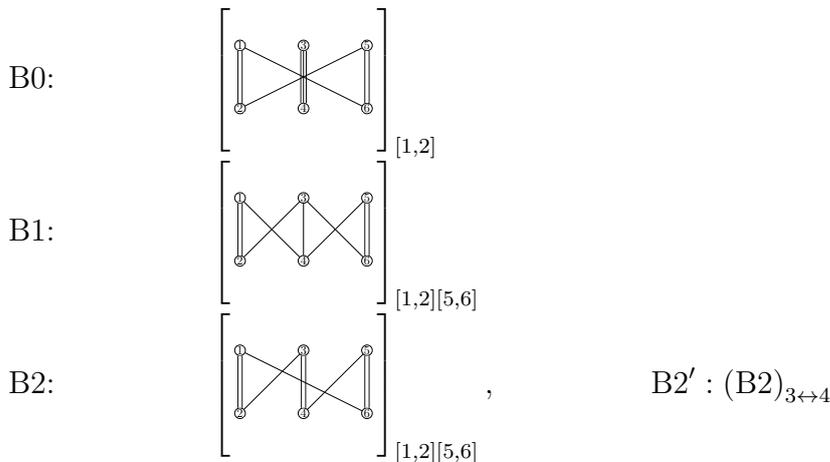
- Durchgezogene Linien symbolisieren Faktoren im Nenner der Funktion, gestrichelte Linien Faktoren im Zähler.
- $[\cdot]_{[i,j]}$  steht wieder für eine Antisymmetrisierung der Funktion bzgl. der Indizes  $i$  und  $j$ .

Als Beispiel für diese Übersetzung in Diagrammschreibweise sei die exotische Struktur mit Skalendimension  $d = 3$  der beiden Felder  $U$  angeführt:

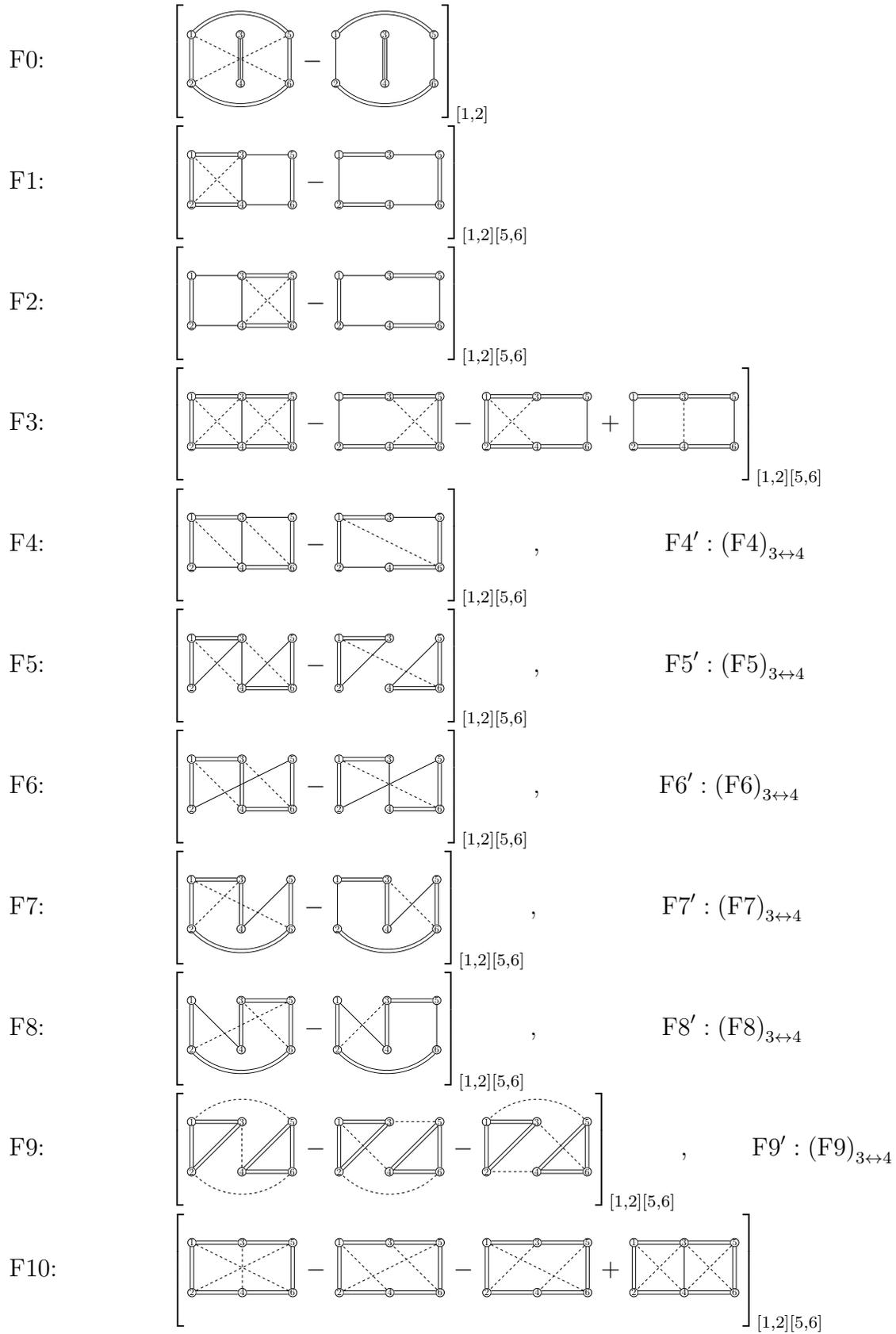


Man erkennt an diesem Beispiel bereits den Vorteil dieser Darstellung, denn sowohl die Summenregel Gl. 2.4.5 als auch die Existenz von Doppel- bzw. Einfachpolen lassen sich leicht ablesen. Die Summenregel für einen Vertex ist erfüllt, wenn die Differenz zwischen der Anzahl vom Vertex ausgehender durchgezogener Linien und der Anzahl vom Vertex ausgehender gestrichelter Linien gleich der Skalendimension des Feldes ist. Ein Doppelpol liegt genau dann vor, wenn zwei durchgezogene Linien von einem Punkt an zwei verschiedenen Vertices enden (Verbindungen (12) und (56) nicht mitgerechnet).

Die 24 freien Strukturen lassen sich wie folgt darstellen:



2.7 6-Punkt-Funktionen freier biharmonischer Felder



2 Grundlagen

F11:  $\left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \\ + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} - \text{Diagram 8} \end{array} \right]_{[1,2][5,6]}, \quad \text{F11}' : (\text{F11})_{3 \leftrightarrow 4}$

F12:  $\left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} \\ + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} \end{array} \right]_{[1,2][5,6]}$

# 3 Reduktion von N-Punkt-Korrelationsfunktionen

Im letzten Kapitel wurde eine exotische 6-Punkt-Funktion angegeben, die nicht von freien Feldern herrührt. Für diese Funktion treffen alle Wightman-Axiome bis auf eines zu, die Positivität. Es stellt sich die Frage, wie diese Eigenschaft zu überprüfen ist. Im folgenden Kapitel sollen zwei Verfahren beschrieben werden, diese Eigenschaft zu testen: Die Partialwellenentwicklung, kurz PWE, als eine Fortführung der OPE für Korrelationsfunktionen und die Anwendung von Verkettungsoperatoren. Beide Methoden beruhen auf der Reduktion einer  $N$ -Punkt-Korrelationsfunktionen auf Korrelationsfunktionen mit weniger Feldinhalt.

## 3.1 Partialwellenentwicklung

Das Wightmansche Axiom 5 der Positivität ist äußerst schwer zu überprüfen, da es sich um eine hochgradig nichtlineare Eigenschaft der QFT handelt. Eine Möglichkeit, die Positivität trotz dieser Komplexität prüfen zu können, stellt die Partialwellenentwicklung dar. Diese beruht im Wesentlichen auf der bereits eingeführten OPE. Gemäß der OPE können Vektoren der Form

$$\varphi_1(x)\varphi_2(y)\Omega$$

als Linearkombination von quasiprimären Quantenfeldern mit irreduzibler Darstellung  $\lambda = (d, j_1, j_2)$  der Konformen Gruppe geschrieben werden. Um genau denjenigen Beitrag zur Darstellung  $\lambda$  zu erhalten, wird durch einen Projektionsoperator  $\Pi_\lambda$  auf den jeweiligen Beitrag projiziert. Die Projektoren erfüllen  $\sum_\lambda \Pi_\lambda = \mathbb{1}$ . Dann erhält man die OPE mit einem Integrationskern  $K_{12}^\lambda(x, y; \cdot)$  [11]:

$$\varphi_1(x)\varphi_2(y)\Omega = \sum_\lambda \Pi_\lambda \varphi_1(x)\varphi_2(y)\Omega \equiv \sum_\lambda \int dz K_{12}^\lambda(x, y; z)\varphi_\lambda(z)\Omega.$$

### 3 Reduktion von $N$ -Punkt-Korrelationsfunktionen

Als Partialwellenentwicklung wird die Projektion auf *Partialwellen* innerhalb einer Korrelationsfunktion bezeichnet. Eine Partialwelle  $\beta_\lambda$  der Darstellung  $\lambda$  ist das Ergebnis der Anwendung eines Projektors  $\Pi_\lambda$ :

$$\beta_\lambda = \langle \Omega, \dots \Pi_\lambda \varphi_1(x) \varphi_2(y) \Omega \rangle,$$

wobei die Punkte für weitere Felder stehen. Allgemein können so  $N$ -Punkt-Korrelationsfunktionen auf  $(N - 1)$ -Punkt-Korrelationsfunktionen reduziert werden. Jede der Partialwellen muss dabei selbst positiv sein [6].

Die Partialwellenentwicklung wird in Verbindung mit den Casimiroperatoren  $C$  der Konformen Lie-Algebra zu einem nützlichen Werkzeug. Diese Casimiroperatoren sind Polynome in den Generatoren der Lie-Algebra und zusätzlich ist nach dem Lemma von Schur jeder Raum mit irreduzibler Darstellung Eigenraum zum Casimiroperator. Daraus folgt:

$$C \Pi_\lambda \varphi_1 \varphi_2 \Omega = c_\lambda \Pi_\lambda \varphi_1 \varphi_2 \Omega$$

mit Eigenwert  $c_\lambda \in \mathbb{C}$  des Casimiroperators. In vier Raumzeitdimensionen hat die Konforme Gruppe Rang drei und damit besitzt deren Lie-Algebra drei Casimiroperatoren, wobei der einfachste quadratisch in den Generatoren ist:

$$C = \frac{1}{2} (K \cdot P + P \cdot K) - D^2 + \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}.$$

Dessen Eigenwerte lauten:  $c_\lambda = d(d - 4) + (j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 2)$  [15].

Andererseits vertauscht der Casimiroperator mit dem Projektionsoperator und die Wirkung der Generatoren der konformen Lie-Algebra auf die Quantenfelder ist bekannt (Gl. 2.3.2- 2.3.5). Damit kann  $C$  hinter die Felder kommutiert werden und da  $\Omega$  invariant unter Anwendung der Konformen Gruppe ist, gilt:

$$C \Pi_\lambda \varphi_1 \varphi_2 \Omega = D_{12} \Pi_\lambda \varphi_1 \varphi_2 \Omega.$$

$D_{12}$  sind Differentialoperatoren, die auf die betreffenden Felder wirken. Fasst man beide Gleichungen zusammen, ergibt sich eine Eigenwertgleichung für die Differentialoperatoren mit Partialwellen als Eigenfunktionen:

$$D_{12} \underbrace{\langle \dots \Pi_\lambda \varphi_1 \varphi_2 \rangle}_{\beta_\lambda} = c_\lambda \underbrace{\langle \dots \Pi_\lambda \varphi_1 \varphi_2 \rangle}_{\beta_\lambda}$$

Werden Projektoren an weiteren Stellen in der Korrelationsfunktion eingefügt, kann die gesamte Partialwellenentwicklung gefunden werden. Allerdings wird diese Methode schnell sehr aufwendig und unhandlich. Für zwei Raumzeitdimensionen kann mit ihr gearbeitet werden und es wurden bereits zufriedenstellende Ergebnisse erzielt (siehe [6]). In vier Raumzeitdimensionen wird die PWE unpraktisch, denn das Aussehen der Partialwellen wird durch die drei Casimiroperatoren (quadratisch, kubisch und quartisch in den Generatoren) bestimmt und die zugehörigen Eigenwertgleichungen sind kaum zu lösen. Zumindest wurde in [8] eine systematische Entwicklung von 4-Punkt-Funktionen skalarer Felder in ihre Partialwellen gefunden.

## 3.2 Positivitätsanalyse durch Verkettungsoperatoren

Aufgrund der Tatsache, dass die Partialwellenentwicklung einer 6-Punkt-Funktion skalarer Felder für eine vierdimensionale Raumzeit zur Zeit noch unbekannt ist und die notwendigen Rechnungen zu kompliziert sind, wird ein neuer Ansatz benötigt. Ein solcher Ansatz wurde in [15] gefunden. Dieser nutzt sogenannte *Verkettungsoperatoren*  $E_\lambda$  (engl. intertwining operators). Im Folgenden werden diese Operatoren meistens als Intertwiner bezeichnet werden.

### 3.2.1 Definiton und Wirkung der Verkettungsoperatoren

Zunächst muss der Begriff des Intertwiners definiert werden:

**Definition 9.** Ein linearer Operator  $T : V_1 \rightarrow V_2$  heißt Intertwiner für zwei Darstellungen  $\alpha_1 : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(V_1)$  und  $\alpha_2 : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(V_2)$  einer Algebra  $\mathcal{A}$ , wenn  $\forall a \in \mathcal{A}$  gilt:

$$T \circ \alpha_1(a) = \alpha_2(a) \circ T.$$

Folglich lässt  $T$  die Wirkung von  $\mathcal{A}$  invariant und vertauscht mit allen Generatoren  $X$  der Algebra  $\mathcal{A}$ , d.h.  $T[X, \varphi] = [X, T\varphi]$ .

Das Ziel der neuen Methode ist es, mit Hilfe der Intertwiner  $E_\lambda$  eine  $N$ -Punkt-Funktion auf eine  $(N - 1)$ -Punkt-Funktion zu reduzieren, indem genau der Beitrag zur Darstellung  $\lambda$  aus der OPE der zwei ersten bzw. der beiden letzten Felder in einer Korrelationsfunktion heraus projiziert wird, d.h. für zwei Felder  $\varphi_1, \varphi_2$  mit

### 3 Reduktion von $N$ -Punkt-Korrelationsfunktionen

Darstellungen  $\mu_1$  und  $\mu_2$ :

$$\iota_{x_1, x_2}^x \circ E_\lambda \varphi_{1, \mu_1}(x_1) \varphi_{2, \mu_2}(x_2) \Omega = \varphi_\lambda(x) \Omega, \quad (3.2.1)$$

$$\iota_{x_1, x_2}^x \circ E_\lambda \langle \varphi_\mu(y) \varphi_{1, \mu_1}(x_1) \varphi_{2, \mu_2}(x_2) \rangle = \delta_{\mu\lambda} \langle \varphi_\mu(y) \varphi_\lambda(x) \rangle. \quad (3.2.2)$$

Damit sind die Intertwiner in ihrer Wirkung sehr ähnlich zu den Projektionsoperatoren  $\Pi_\lambda$ . Sie vernichten alle Partialwellen mit  $\mu \neq \lambda$  im 1-2-Kanal, wobei Gl. 3.2.2 aus konformer Kovarianz folgt. Es tritt hier außerdem die Abbildung  $\iota_{x_1, x_2}^x \equiv \iota^x$  auf, die folgendermaßen definiert ist:

$$\iota^x(f) = f(x_1, x_2)|_{x_1=x_2=x} = f(x, x).$$

Da also bei der Anwendung von Intertwinern nur der Beitrag  $\mu = \lambda$  übrig bleibt und eine  $(N - 1)$ -Punkt-Partialwelle entsteht, ist es möglich, einzelne Beiträge zur PWE zu erhalten, ohne diese tatsächlich zu kennen. Das bedeutende Ergebnis in [15] ist dabei, dass die Intertwiner durch partielle Differentialoperatoren gegeben sind und nicht etwa als Integrationskerne. Es bleibt aber zu beachten, dass Intertwiner als Differentialoperatoren nur dann die OPE voll ausschöpfen können, wenn für die Skalendimensionen der betrachteten Felder in Gl. 3.2.1 gilt:  $d_\lambda - d_1 - d_2 \in \mathbb{Z}$ . Für eine GCI QFT ist diese Bedingung jedoch erfüllt.

#### 3.2.2 Bestimmung der Verkettungsoperatoren

Wir beschränken uns im weiteren Verlauf auf Darstellungen  $\lambda = (\kappa, L)$  der Konformen Gruppe. Das bedeutet für die Spinquantenzahlen der Felder:  $j_1 = j_2 = L/2$ . Zu diesen Darstellungen gehören spurfreie symmetrische Tensorfelder mit Rang  $L$ , die z.B. der einzige Beitrag zur OPE zweier skalarer Felder der gleichen Skalendimension sind [4]. Des Weiteren werden diese Tensorfelder wie in Abs. 2.2 beschrieben behandelt. Mit Gl. 3.2.1 folgt daraus aber schon, dass die Intertwiner ein harmonisches Polynom vom Grade  $L$  im Polarisationsvektor  $v$  sein müssen.

Die zusätzliche Forderung, dass  $E_\lambda$  Intertwiner sein sollen, macht es möglich partielle Differentialgleichungen zu finden, die die Gestalt der Operatoren festlegen:

$$\iota^x \circ E_\lambda \langle [X, \varphi_{1, \mu_1} \varphi_{2, \mu_2}] \varphi_\lambda \rangle = \langle [X, \iota^x \circ E_\lambda \varphi_{1, \mu_1} \varphi_{2, \mu_2}] \varphi_\lambda \rangle = \langle [X, \varphi_\lambda] \varphi_\lambda \rangle. \quad (3.2.3)$$

### 3.2 Positivitätsanalyse durch Verkettungsoperatoren

Da die Wirkungen aller Generatoren  $X$  der Konformen Gruppe auf spurfreie symmetrische Tensorfelder durch die Gln. 2.3.2 bis 2.3.5 bekannt sind, kann die Form der Operatoren  $E_\lambda$  bestimmt werden. Die infinitesimalen Wirkungen  $\Delta_{i,\mu_i}$  der Generatoren hängen jedoch von der Darstellung des betreffenden Quantenfeldes  $\varphi_{i,\mu_i}$  ab, weswegen gilt:

$$i[X, \varphi_{1,\mu_1} \varphi_{2,\mu_2}] = (\Delta_{1,\mu_1} + \Delta_{2,\mu_2}) \varphi_{1,\mu_1} \varphi_{2,\mu_2},$$

wobei  $\Delta_{i,\mu_i}$  nur auf das entsprechende Feld  $\varphi_{i,\mu_i}$  wirkt.

Somit folgt aus Gl. 3.2.3 folgende Bestimmungsgleichung für Intertwiner:

$$\iota^x \circ E_\lambda \circ (\Delta_{1,\mu_1} + \Delta_{2,\mu_2}) \langle \varphi_{1,\mu_1} \varphi_{2,\mu_2} \varphi_\lambda \rangle \stackrel{!}{=} \Delta_\lambda \circ \iota^x \circ E_\lambda \langle \varphi_{1,\mu_1} \varphi_{2,\mu_2} \varphi_\lambda \rangle.$$

Tatsächlich kann diese Gleichung noch verschärft werden, indem die Gültigkeit bereits für die Operatoren gefordert wird, d.h.:

$$\iota^x \circ E_\lambda \circ (\Delta_{1,\mu_1} + \Delta_{2,\mu_2}) \stackrel{!}{=} \Delta_\lambda \circ \iota^x \circ E_\lambda. \quad (3.2.4)$$

Anschließend muss ein möglichst allgemeiner Ansatz für die Intertwiner gefunden werden. Wir wählen

$$E_\lambda = \widehat{E}_{(\kappa,L)}(v, y_1, y_2, w_1, w_2, x_1 + x_2) \circ \rho_{12}^n. \quad (3.2.5)$$

Zunächst können die Operatoren  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  nicht von  $x_1 - x_2$  abhängen, da stets die Abbildung  $\iota^x$  folgt. Weiterhin wird ein Faktor  $\rho_{12}^n$  benötigt, um den 1-2-Kanal regulär zu machen. Dabei kann die Singularität nach den Polschranken dort höchstens  $\rho_{12}^{-d}$  betragen.  $n$  muss demnach so gewählt werden, dass diese Singularität beseitigt wird. Darüber hinaus sind  $y_i \equiv \partial_i$ ,  $w_i \equiv \partial^{v_i}$ ,  $v_i$  die Polarisationsvektoren der Felder  $\varphi_i$  und  $v$  wie bisher der Polarisationsvektor des Feldes  $\varphi_\lambda$ . Damit ist auch klar, dass die Intertwiner homogen vom Grade  $L_i$  in  $w_i$  sind, denn es müssen alle Polarisationsvektoren der zu reduzierenden Felder beseitigt werden. Die weiteren Rechnungen folgen [15].

Als Beispiele für die Verwendung von Gl. 3.2.4 zur Bestimmung der Struktur der Intertwiner  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  werden wir die Generatoren  $X = P_\mu, D$  nutzen. Für die beiden verbleibenden Generatoren  $X = M_{\mu\nu}, K_\mu$  werden lediglich die Ergebnisse angegeben.

### 3 Reduktion von $N$ -Punkt-Korrelationsfunktionen

1.  $X = P_\mu$ :

Aus Gl. 2.3.2 folgt:  $\Delta_{i,\mu_i} = \partial_{i,\mu}$  ( $\mu_i$  bezeichnet weiterhin die Darstellung des Feldes  $\varphi_i$  und keinen Lorentz-Index  $\mu$ ). Das bedeutet:

$$\iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n \circ (\partial_{1,\mu} + \partial_{2,\mu}) \stackrel{!}{=} \partial_\mu \circ \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n.$$

Auf der linken Seite der Gleichung kommutieren wir zuerst  $\rho_{12}^n$ , dann  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  an  $(\partial_{1,\mu} + \partial_{2,\mu})$  vorbei:

$$\begin{aligned} & \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n \circ (\partial_{1,\mu} + \partial_{2,\mu}) \\ &= \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ (\partial_{1,\mu} + \partial_{2,\mu}) \circ \rho_{12}^n - \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ (2n\rho_{12}^{n-1}x_{12,\mu} - 2n\rho_{12}^{n-1}x_{12,\mu}) \\ &= \iota^x \circ (\partial_{1,\mu} + \partial_{2,\mu}) \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n - \iota^x \left( \partial_{1,\mu}\widehat{E}_{(\kappa,L)} + \partial_{2,\mu}\widehat{E}_{(\kappa,L)} \right) \circ \rho_{12}^n \\ &\stackrel{!}{=} \partial_\mu \circ \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n \\ &\Rightarrow \left( \partial_{1,\mu}\widehat{E}_{(\kappa,L)} + \partial_{2,\mu}\widehat{E}_{(\kappa,L)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Für die letzte Implikation haben wir die linke mit der rechten Seite der Gleichung verglichen und ausgenutzt, dass:  $\iota^x \circ (\partial_{1,\mu} + \partial_{2,\mu}) = \partial_\mu \circ \iota^x$ .

Aus der Implikation folgt, dass  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  nicht von  $x_1 + x_2$  abhängen kann und damit überhaupt keine  $x$ -Abhängigkeit beinhaltet:

$$\widehat{E}_{(\kappa,L)} = \widehat{E}_{(\kappa,L)}(v, y_1, y_2, w_1, w_2).$$

2.  $X = D$ :

Aus Gl. 2.3.4 folgt:  $\Delta_{i,\mu_i} = (x_i \cdot \partial_i) + d_i$  mit  $d_i = 2\kappa_i + L_i$ , d.h.:

$$\iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n \circ [(x_1 \cdot \partial_1) + d_1 + (x_2 \cdot \partial_2) + d_2] \stackrel{!}{=} (x \cdot \partial + d) \circ \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n.$$

Auch hier müssen wieder der Faktor  $\rho_{12}^n$  sowie  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  an den infinitesimalen Wirkungen vorbeigezogen werden, um dann die linke mit der rechten Seite zu vergleichen. Dafür ist es erforderlich, den Kommutator  $[\widehat{E}_{(\kappa,L)}, x_i]$  zu bestimmen. Nach [15] gilt:

$$\begin{aligned} [\widehat{E}_{(\kappa,L)}, x_i] &= \frac{\partial}{\partial(\partial_i)} \widehat{E}_{(\kappa,L)} \\ &\equiv \nabla_i \widehat{E}_{(\kappa,L)}. \end{aligned}$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
& \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n \circ [(x_1 \cdot \partial_1) + d_1 + (x_2 \cdot \partial_2) + d_2] \\
&= \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ [(x_1 \cdot \partial_1) + (x_2 \cdot \partial_2) + d_1 + d_2 - 2n] \circ \rho_{12}^n \\
&= \iota^x \circ [(x_1 \cdot \partial_1 + \partial_1 \cdot \nabla_1) + \partial_2 \cdot (x_2 \cdot \partial_2 + \partial_2 \cdot \nabla_2)] \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n \\
&\quad + \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ (d_1 + d_2 - 2n) \rho_{12}^n \\
&\stackrel{!}{=} (x \cdot \partial + d) \circ \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n \\
&\Rightarrow (\partial_1 \cdot \nabla_1 + \partial_2 \cdot \nabla_2) \widehat{E}_{(\kappa,L)} = (d + 2n - d_1 - d_2) \widehat{E}_{(\kappa,L)}.
\end{aligned}$$

Die letzte Implikation bedeutet, dass  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  homogen vom Grade  $(d + 2n - d_1 - d_2)$  in  $y_1$  und  $y_2$  ist.

3.  $X = M_{\mu\nu}$ :

Für diesen Generator ergibt sich die Bedingung:

$$(\partial_1 \wedge \nabla_1 + \partial_2 \wedge \nabla_2 + v \wedge \partial^v + \partial^{v_1} \wedge \nabla_{v_1} + \partial^{v_2} \wedge \nabla_{v_2}) \widehat{E}_{(\kappa,L)} = 0.$$

Daraus folgt, dass  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  ein Lorentz-Skalar (oder Lorentz-Pseudoskalar) sein muss. Außerdem ist  $a \wedge b := a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu$  sowie  $\nabla_{v_i} \equiv \frac{\partial}{\partial(\partial^{v_i})}$ .

4.  $X = K_\mu$ :

Anders als die Generatoren zuvor, die jeweils Bedingungen an die etwaige Struktur der Intertwiner gestellt haben, liefert der Generator der speziellen konformen Transformation eine partielle Differentialgleichung, die den Operator vollständig bestimmt:

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ 2(\partial_1 \cdot \nabla_1) \nabla_{1,\mu} - \partial_{1,\mu} \nabla_1^2 + 2\nabla_1^\nu \left( \partial_\nu^{v_1} \nabla_{v_1,\mu} - \partial_\mu^{v_1} \nabla_{v_1,\nu} \right) \right. \\
& \left. + 2(d_1 - n) \nabla_{1,\mu} \right]_{(1,2)} \widehat{E}_{(\kappa,L)}. \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $[\cdot]_{(i,j)}$  die Symmetrisierung der Gleichung  $[\cdot]$  unter Austausch von  $i$  und  $j$ .

### 3.2.3 Anwendung für Positivitätsuntersuchungen

Positivitätsanalysen mit Hilfe der Intertwiner stützen sich im Wesentlichen auf ihre Wirkung, eine  $N$ -Punkt-Funktion auf eine  $(N-1)$ -Punkt-Funktion zu reduzieren. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass nur in den ersten oder den letzten beiden

### 3 Reduktion von $N$ -Punkt-Korrelationsfunktionen

Feldern einer Korrelation reduziert werden kann.

$$\langle \varphi_{(\kappa,L)} \cdots \varphi_{N,(\kappa_N,L_N)} \rangle = \iota^x \circ \widehat{E}_{(\kappa,L)} \circ \rho_{12}^n \langle \varphi_{1,(\kappa_1,L_1)} \varphi_{2,(\kappa_2,L_2)} \cdots \varphi_{N,(\kappa_N,L_N)} \rangle.$$

Wir geben im Folgenden eine Liste an, die beschreibt, wie mit Intertwinern die Positivität einer beliebigen  $N$ -Punkt-Korrelationsfunktion zu überprüfen ist.

- Zunächst müssen Ansätze für die Operatoren  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}(v, y_1, y_2, w_1, w_2)$  gemäß der Darstellungen der Ausgangsfelder  $(\kappa_i, L_i)$  und  $(\kappa_j, L_j)$  sowie der Darstellung  $(\kappa, L)$  des Zielfeldes erstellt werden. Das bedeutet, der Operator ist ein Lorentz-Skalar und die Einhaltung aller Homogenitäten aus Abs. 3.2.2:
  1.  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  ist homogen vom Grade  $L$  in  $v$ ,
  2.  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  ist homogen vom Grade  $L_i$  in  $w_i$ ,
  3.  $\widehat{E}_{(\kappa,L)}$  ist homogen vom Grade  $d + 2n - d_1 - d_2$  in  $y_1$  und  $y_2$ .
- Die vollständige Bestimmung des Intertwiners erfolgt dann über das Lösen von Gl. 3.2.6 für den erhaltenen Ansatz und das Ausnutzen der Harmonizitätsbedingung in  $v$ .
- Schritt für Schritt wird dann die  $N$ -Punkt-Funktion auf eine Zwei-Punkt-Funktion reduziert, wobei in jedem Schritt die Polschranken (Gl. 2.4.7) und, falls es sich um Twist-2-Beiträge handelt, die Erhaltung zu testen ist. Es ist zu beachten, dass nach Abs. 2.4.1 die Zwei-Punkt-Funktion nur dann verschieden null ist, wenn die Darstellungen der beiden Felder gleich sind.
- Da die Struktur einer Zwei-Punkt-Funktion für alle symmetrischen spurfreien Tensorfelder bekannt ist (Gl. 2.4.3), kann man an ihrem Vorfaktor ablesen, ob der Beitrag positiv ist: Der Lösungsraum des Intertwiners kann mehrdimensional sein, das bedeutet, die Koeffizientenmatrix der beiden Feldbeiträge in der Zwei-Punkt-Funktion darf nur nichtnegative Eigenwerte haben. Im Falle eines eindimensionalen Lösungsraumes muss das Vorzeichen der Funktion positiv sein.

Das Ziel dieses Verfahrens ist also, auf so viele verschiedene Zwei-Punkt-Funktionen wie möglich zu reduzieren und deren Positivität zu überprüfen bzw. Positivitätsverletzungen zu finden.

Im Falle der exotischen 6-Punkt-Funktion können zu diesem Vorgehen einige Ergänzungen gemacht werden:

### 3.2 Positivitätsanalyse durch Verkettungsoperatoren

- Durch ihre Konstruktion (siehe Abs. 2.6) enthält sie im 1-2-Kanal und 5-6-Kanal das biharmonische Feld  $V_1$ , welches selbst nur Twist-2-Beiträge beinhaltet. Deswegen besitzt die exotische Struktur reduziert auf eine 4-Punkt-Funktion nur Partialwellen der Form:  $\langle \phi_{1,(1,L)}(x_1)\varphi_3(x_3)\varphi_4(x_4)\phi_{6,(1,L')}(x_6) \rangle$  mit  $(L, L' \geq 0)$ .
- Durch die Antisymmetrie dieser Struktur (siehe Gl. 2.6.3) sind die zulässigen 4-Punkt-Strukturen sogar noch weiter eingeschränkt, es treten nur Felder  $\phi$  mit ungeradem Rang auf.
- Die Skalendimension  $d' > 0$  der beiden Felder  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$  in Gl. 2.6.3 ist frei wählbar. Positivitätsanalysen müssen deswegen für alle möglichen Skalendimensionen separat durchgeführt werden. Allerdings gilt zusätzlich: Tritt eine Positivitätsverletzung in einer Skalendimension  $d'$  auf, dann tritt sie auch in allen Strukturen mit Skalendimension kleiner  $d'$  auf. Andersherum ist diese Aussage aber im Allgemeinen falsch.



# 4 Automatisierung der Berechnungen mit Maple

In Abs. 3.2.3 haben wir die Methode vorgestellt, mit der wir die Positivität der exotischen 6-Punkt-Struktur untersuchen wollen. Um diese Struktur auf eine Zwei-Punkt-Funktion reduzieren zu können, müssen demnach vier Intertwiner bestimmt werden und diese auf die in Gl. 2.6.3 gegebene exotische Struktur angewandt werden. Damit ist dieses Verfahren äußerst rechenaufwendig. Intertwiner können höchstens für Darstellungen mit kleinen Quantenzahlen  $\kappa$  und  $L$  per Hand berechnet werden, die Anwendung auf die Korrelationsfunktion ist aber sogar in diesen Fällen zu zeitraubend. Deswegen liegt es nahe, diese Aufgaben einem Computeralgebrasystem, kurz CAS, zu überlassen. In den folgenden Abschnitten wollen wir ein Programmpaket beschreiben, welches die notwendigen Rechnungen im CAS Maple (Version 10) durchführt. Dieses teilt sich in zwei Komponenten: Einem Programmteil, der die Differentialgleichung 3.2.6 für die zwei Eingangs- und die Ausgangsdarstellung löst und einem zweiten Programmteil, welcher die eigentliche Reduktion der Korrelationsfunktion ausführt. Das gesamte Paket ist auf <http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/~nikolai.wyderka> einsehbar. Eine kurze Einführung in die Benutzung wird dort ebenfalls bereitgestellt.

## 4.1 Programmteil: Kalkül für Intertwiner

Der erste Schritt zur Systematisierung der Bestimmung der Intertwiner liegt in der Erstellung des Ansatzes. Die Homogenitäten aus Abs. 3.2.2 geben zusammen mit den bekannten Darstellungen der betrachteten Felder die Anzahl der zu verwendenden Variablen  $v, y_1, y_2, w_1$  und  $w_2$  an. Diese müssen untereinander vollständig kontrahiert werden, um den Intertwiner zu einem Lorentz-Skalar zu machen. Dabei sind unter Umständen viele kombinatorische Möglichkeiten erlaubt, wobei ohne Wiederholung gezählt wird. Z.B. ergeben fünf  $y_1$  und ein  $y_2$  nur eine zulässige Kontraktion ( $y_1 \cdot$

$y_1)(y_1 \cdot y_1)(y_1 \cdot y_2)$ , nicht etwa fünf. Jede der Kombinationsmöglichkeiten bekommt dann einen eigenen Koeffizienten. Als illustrierendes Beispiel sei der Ansatz des Intertwiners  $\widehat{E}_{(1,3)}$  für die Reduktion zweier skalarer Felder der Skalendimension  $d = 2$  (Darstellung jeweils  $(1, 0)$ ) auf ein Twist-2-Tensorfeld vom Rang drei mit  $n = 1$  angegeben:

$$\widehat{E}_{(1,3)} = A_{ijk}(v_1 \cdot v_1)(v_1 \cdot y_i)(y_j \cdot y_k) + B_{ijk}(v_1 \cdot y_i)(v_1 \cdot y_j)(v_1 \cdot y_k). \quad (4.1.1)$$

Herbei sind  $i, j, k = 1, 2$  und es wird über alle drei Indizes summiert, wobei gleiche Terme wie  $(y_1 \cdot y_2) = (y_2 \cdot y_1)$  nur einmal auftreten. Der Polarisationsvektor  $v_1$  bekommt einen Index lediglich aus programmiertechnischen Gründen. Somit ergeben sich insgesamt zehn verschiedene Terme. Es muss angemerkt werden, dass wir uns für eine feste Rangfolge der Stellung der Variablen  $v, w$  und  $y$  entschieden haben: Wann immer nur ein  $v$  auftritt, steht es links im Skalarprodukt. Wann immer nur ein  $y$  auftaucht, steht es rechts im Skalarprodukt. Stehen zwei gleiche Variablen mit unterschiedlichen Indizes  $i$  und  $j$  im Skalarprodukt, müssen sie so angeordnet werden, dass der kleinere Index links steht.

Diese Kombinationsarbeit lässt sich mit einer externen<sup>1</sup> Routine automatisieren. Wir haben dafür die Sprache `Python` gewählt. Die entsprechende Routine heißt `combinator.py` und ist wegen Platzgründen auf der angegebenen Homepage zu finden. Ihre prinzipielle Arbeitsweise lässt sich wie folgt beschreiben: Zunächst wird der Routine eine Liste von Variablen

$$\left[ \underbrace{v_1, v_1, \dots}_L, \underbrace{w_1, w_1, \dots}_{L_1}, \underbrace{w_2, w_2, \dots}_{L_2}, \underbrace{y, y, \dots}_{d+2n-d_1-d_2} \right]$$

übergeben, indem die Anzahlen der einzelnen Variablen und zusätzlich eine Zielfeld in Anführungszeichen nacheinander in die Kommandozeile eingegeben werden. Die Zuweisung der Ableitung nach 1 oder 2 an alle  $y$  erfolgt erst nach der Erzeugung der zulässigen verschiedenen Strukturen (im obigen Beispiel sind es zwei). Nun wird der erste Eintrag der Liste genommen und mit einem weiteren Eintrag der übrigen Liste kombiniert, wobei immer nur einmal  $v_1, w_1, w_2$  oder  $y$  ausgewählt werden kann.

---

<sup>1</sup>Unser Programmpaket enthält viele solcher externen Programme, die in `Python` verfasst sind, da `Maple` oft nicht die notwendigen Werkzeuge zur Verfügung stehen, bestimmte Manipulationen an den eigenen Ergebnissen vorzunehmen. Externe Programme werden aber aus `Maple` heraus aufgerufen. Interne Programme sind in der `Maple`-Syntax verfasst.

Im nächsten Schritt werden die erzeugten Kontraktionen mit ihren Listen kopiert und die bereits benutzten Einträge gestrichen. Erneut wird der erste Eintrag der reduzierten Liste genommen und rekursiv wie im ersten Schritt verfahren, bis alle Listeneinträge aufgebraucht sind. Neue Kombinationen werden dabei als weiterer Faktor an das Ergebnis des vorherigen Schrittes gehängt. Zum Schluss müssen noch alle Terme sortiert und gleiche Terme gestrichen werden. Danach werden die Indizes 1 und 2 in allen Strukturen kombiniert, der entsprechende Koeffizient im Stile des obigen Beispiels vergeben und die Ergebnisse addiert.

Der zweite Schritt in der Automatisierung betrifft das Anwenden der PDE 3.2.6 auf den generierten Ansatz. Aufgrund der uns zur Verfügung stehenden Versionsnummer, muss zuerst die Form der PDE für die Verwendung in `Maple` angepasst werden, bevor der Kalkül entwickelt wird. Alle Variablen mit unkontrahierten Lorentz-Indizes müssen vor alle Ableitungen kommutiert werden, denn das Ableiten nach freien Indizes ist mit `Maple` Vers. 10 nur durch zusätzliche Programme möglich, die den metrischen Tensor  $\eta_{\mu\nu}$  kontrahieren können. Das bedeutet:

$$\begin{aligned} (y_1 \cdot \nabla_1) \nabla_{1,\mu} &\longrightarrow \nabla_{1,\mu} (y_1 \cdot \nabla_1) - \nabla_{1,\mu} \\ \nabla_1^\nu (w_{1,\nu} \nabla_{v_1,\mu} - w_{1,\mu} \nabla_{v_1,\nu}) &\longrightarrow \nabla_{v_1,\mu} (\nabla_1 \cdot w_1) - \nabla_{1,\mu} - w_{1,\mu} (\nabla_1 \cdot \nabla_{v_1}). \end{aligned}$$

Diese Ersetzung gilt auch analog für die beiden Terme mit  $1 \leftrightarrow 2$ .

Die Intertwiner  $\hat{E}_{(\kappa,L)}$  sind Lorentz-Skalare, dieser Umstand erleichtert die Implementierung eines Programmes zum Lösen der PDE: Anstatt nach  $y_i$  oder  $w_i$  ( $i = 1, 2$ ) abzuleiten, wird unter Einbeziehung der Kettenregel nach dem vollständigen Lorentz-Skalarprodukt abgeleitet, in dem die betreffende Variable kontrahiert ist. Da die meisten Differentialoperatoren in der PDE ebenfalls kontrahiert sind, ergibt die Anwendung dieses Skalarproduktes wieder ein kontrahiertes Ergebnis. Dadurch benötigen wir nur einen einzigen Lorentz-Index für die gesamte Rechnung. Mit dieser Herangehensweise ist  $\hat{E}_{(\kappa,L)} = \hat{E}_{(\kappa,L)}(vv, vw, vy, wy, ww, yy)$ . Beispielhaft soll die Wirkung des Operators  $(\nabla_a \cdot \nabla_{v_a})$  auf den Ansatz des Intertwiners bestimmt werden, die dann in `Maple`-Syntax umgewandelt wird:

$$\begin{aligned} (\nabla_a \cdot \nabla_{v_a}) \hat{E}_{(\kappa,L)} &= \nabla_a^\kappa \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{E}_{(\kappa,L)}}{\partial (v_i \cdot w_a)} v_{i,\kappa} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{E}_{(\kappa,L)}}{\partial (w_a \cdot y_i)} y_{i,\kappa} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{E}_{(\kappa,L)}}{\partial (w_i \cdot w_a)} w_{i,\kappa} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{E}_{(\kappa,L)}}{\partial (w_a \cdot w_i)} w_{i,\kappa} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \frac{\partial \hat{E}_{(\kappa, L)}}{\partial (w_a \cdot y_a)} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \hat{E}_{(\kappa, L)}}{\partial (v_i \cdot w_a) \partial (v_j \cdot y_a)} (v_i \cdot v_j) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \hat{E}_{(\kappa, L)}}{\partial (v_i \cdot w_a) \partial (w_j \cdot y_a)} (v_i \cdot w_j) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \hat{E}_{(\kappa, L)}}{\partial (v_i \cdot w_a) \partial (y_j \cdot y_a)} (v_i \cdot y_j) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \hat{E}_{(\kappa, L)}}{\partial (v_i \cdot w_a) \partial (y_a \cdot y_j)} (v_i \cdot y_j) + \dots
 \end{aligned}$$

Der Index  $a$  wurde eingeführt, so dass es möglich ist, den Intertwiner nicht nur in Bezug auf die ersten beiden Felder einer Korrelationsfunktion zu bestimmen (mit Raumzeitkoordinaten  $x_1$  und  $x_2$ ), sondern auch für die letzten beiden Felder in der Struktur. Dabei sollte der Wert der Variable  $m$  so gewählt werden, dass er dem höchsten Index der involvierten Raumzeitkoordinaten der Felder entspricht. Die anfangs festgelegte Stellung der Variablen muss nach Anwendung der PDE wiederhergestellt werden. Dies wird durch die Prozedur  $\text{diffmagic}(F)$  (siehe Abs. A.2), aufgerufen nach jedem Term der PDE, in **Maple** erreicht.

Die Wirkung jedes einzelnen Differentialoperators der PDE muss wie im Beispiel bestimmt und in die **Maple**-Syntax übertragen werden, was in Abs. A.2 zu finden ist. Es sei angemerkt, dass ein Skalarprodukt, wie im Beispiel verwendet, sich wie folgt übersetzt:  $v_1 \cdot w_2 \longrightarrow vw [1, 2]$ . Die PDE selbst wird zur internen Prozedur  $\text{DoDiff}(E, d1, d2, n, kappa, L, a, b, mu)$ . Die zu übergebenden Parameter sind z.B. für eine Reduktion im 1-2-Kanal wie folgt zu verstehen:  $E$ -Ansatz des Intertwiners,  $d1$ -Skalendimension des ersten Feldes der Korrelation,  $d2$ -Skalendimension des zweiten Feldes der Korrelation,  $n$ -Polgrad im 1-2-Kanal,  $kappa, L$ -Quantenzahlen des Zielfeldes,  $a = 1$  und  $b = 2$ . Nun liegen sowohl Ansatz als auch die benötigte Differentialgleichung in **Maple**-Syntax vor.

Ein letzter Schritt ist notwendig, nachdem der Ansatz in die PDE eingesetzt wurde. Das Ergebnis dieser Rechnung soll verschwinden. Folglich muss nach allen linear unabhängigen Termen aufgelöst werden, wodurch sich Bedingungen an die Koeffizienten aus dem ursprünglichen Ansatz ergeben. Die externe Routine  $\text{solve.py}$  übernimmt dabei die Aufgabe Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten aus der Textausgabe des Ergebnisses der Anwendung der PDE zu ziehen und diese zurück an **Maple** zu übergeben, um sie zu lösen. Eingesetzt in den Ansatz ergibt das noch nicht in jedem Fall einen zulässigen Operator, denn das Vorgehen muss noch einmal

für  $\partial_v^2 \widehat{E}_{(\kappa, L)} = 0$  durchgeführt werden, um einen spurfreien Operator zu erhalten. Das Programm `buildop(kappa1, L1, kappa2, L2, n, kappa, L)` (siehe Abs. A.2) führt alle drei Schritte der Bestimmung der Intertwiner nacheinander aus und gibt den vollständig berechneten Operator zurück. Als Eingabe dienen lediglich die zwei Ausgangsdarstellung der Felder  $(\kappa_1, L_1)$  und  $(\kappa_2, L_2)$ , die Darstellung  $(\kappa, L)$  des Feldes, auf welches reduziert werden soll und die auftretende Singularität  $n$ . Der gebildete Intertwiner kann nach Bedarf durch Anwendung der Prozedur `diffcollect(F)` verkleinert werden. Diese klammert nach einzelnen Intertwinertermen aus. Der Operator weist somit höchstens die Anzahl von Termen auf, die er im Ansatz besaß.

## 4.2 Programmteil: Ausführen der Reduktion

Bevor der Intertwiner auf eine  $N$ -Punkt-Korrelationsfunktion angewendet werden kann, muss er in `Maple`-Syntax übertragen werden. Wir haben uns dafür entschieden sowohl für Polarisationsvektoren der Ausgangsfelder als auch für den Polarisationsvektor des Zielfeldes den Namen  $v$  zu vergeben und nur durch Indizierung zwischen den jeweiligen Feldern zu unterscheiden. Dies kann aber zu Problemen führen, wenn z.B. der Term  $(v_1 \cdot y_1)$  vor  $(w_1 \cdot y_2)$  angewendet wird. In diesem Fall wäre ein Polarisationsvektor des Zielfeldes  $v_1$  vorhanden, der ebenfalls Ziel der Ableitung  $w_1$  sein kann, die aber nur auf Ausgangsvektoren mit gleichem Namen  $v_1$  wirken darf. Es ist folglich notwendig, einen Offset  $N$  für den Polarisationsvektor des Zielfeldes einzuführen, d.h. der Index muss größer sein als  $N$ . Für jede weitere Reduktion an der gleichen Korrelation erhöht sich der Offset für den Zielvektor um eins.

Nun muss analog zur PDE auch die Wirkung der Intertwiner auf eine  $N$ -Punkt-Funktion bestimmt werden. Dies gelingt noch einfacher, da neben den Intertwinern auch die Korrelationsfunktionen Lorentz-Skalare sind. Es treten deswegen überhaupt keine freien Indizes auf.  $N$ -Punkt-Korrelationsfunktionen  $W_N$  werden als Funktionen von  $v_i \cdot v_j$  ( $i, j \leq N, i \neq j$ ),  $v_i \cdot x_{jk}$  ( $j = 1, \dots, N-1, k = 2, \dots, N, j \neq k$ ) und  $\rho_{ij}$  ( $i = 1, \dots, N-1, j = 2, \dots, N, i \neq j$ ) betrachtet. Als Beispiel sei die Wirkung von  $v_c \cdot y_i$  auf eine Korrelationsfunktion angegeben:

$$\begin{aligned} (v_c \cdot y_i) W_N = & \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{k>i} \frac{\partial W_N}{\partial (v_j \cdot x_{ik})} (v_c \cdot v_j) - \sum_{k<i} \frac{\partial W_N}{\partial (v_j \cdot x_{ki})} (v_c \cdot v_j) \right] \\ & + 2 \sum_{j>i} \frac{\partial W_N}{\partial \rho_{ij}} (v_c \cdot x_{ij}) - 2 \sum_{j<i} \frac{\partial W_N}{\partial \rho_{ji}} (v_c \cdot x_{ji}). \end{aligned}$$

In gleicher Weise wird bei den verbleibenden vier Operatoren verfahren, die teilweise deutlich komplizierter werden. Vor allem  $y_i \cdot y_j$  ist besonders komplex, da das Ergebnis ein Produkt ( $x_{ij} \cdot x_{kl}$ ) enthalten kann. Diese Produkte müssen umgeschrieben werden, weil wir eine solche Abhängigkeit nicht in Betracht ziehen:

$$\begin{aligned} x_{ij} \cdot x_{kl} &= x_i \cdot x_k - x_i \cdot x_l - x_j \cdot x_k + x_j \cdot x_l, \\ &= \frac{1}{2} (\rho_{il} + \rho_{jk} - \rho_{ik} - \rho_{jl}). \end{aligned}$$

Die ausgearbeiteten Operatoren sind in Abs. A.3 zu finden.

Das ist aber noch nicht ausreichend, um die Reduktion durchzuführen. Es müssen folgende Umstände berücksichtigt werden, wobei die verwendeten Prozeduren in Abs. A.3 einsehbar sind:

- Es kann vorkommen, dass die Indizes in  $x_{ij}$  und  $\rho_{ij}$  nicht in der Reihenfolge  $i < j$  auftreten oder, dass sogar Terme, die  $x_{ii}$  oder  $\rho_{ii}$  enthalten, erzeugt werden. Um all diese fehlerhaften Ausgaben zu korrigieren, wird nach jedem Faktor eines Summanden des Intertwiners die Prozedur  $magic(F)$  aufgerufen.
- Die Abbildung  $\iota^x$  wird durch die Prozedur  $setequal(F, a, b)$  übersetzt. Dieser Prozedur werden die beiden Indizes  $a$  und  $b$  übergeben, die gleichgesetzt werden sollen. Nach dem Ausführen heißt die Variable  $x_b$ .
- Reduziert man z.B. die exotische 6-Punkt-Funktion in  $x_1$  und  $x_2$  sowie  $x_5$  und  $x_6$  heißen die verbleibenden Variablen  $x_1, x_3, x_4$  und  $x_6$ . So müsste weiterhin  $N = 6$  sein, was unnötig Rechenzeit kostet. Es ist sinnvoller, die Variablen in  $x_1$  bis  $x_4$  umzubenennen. Die erforderlichen Umbenennungen übernimmt die Prozedur  $rename(F)$ .
- **Maple** wird die genaue Bedeutung von  $x_{ij}$  und  $\rho_{ij}$  nicht übermittelt, weshalb es lineare Abhängigkeiten wie  $x_{13} - x_{14} + x_{34} = 0$  nicht erkennt. Es kann aber durchaus vorkommen, dass das Resultat einer Reduktion scheinbar nicht verschwindet, obwohl es null wäre. Um auch diese linearen Abhängigkeiten prüfen zu können, wird die Prozedur  $magic2(F)$  angewendet.

Damit sind alle nötigen Prozeduren bekannt, um die Reduktion mit **Maple** durchzuführen. Ein Zwischenschritt nach Ausgabe des berechneten Intertwiners und vor Anwendung eben dieses Operators, ist seine Übersetzung entsprechend den Benennungen seiner Terme in Abs. A.3. Diese Übersetzung übernehmen die externen Program-

me *tranlate\_op\_12*( $F$ , *voffset*), *tranlate\_op\_34*( $F$ , *voffset*) und *tranlate\_op\_56*( $F$ , *voffset*), die bereits auf den Fall einer 6-Punkt-Funktion zugeschnitten sind (siehe Abs. A.2). Eine allgemeinere Übersetzung erbringt das externe Programm *optranslate.py*, welches im Falle einer Reduktion im 1-2-Kanal nur den Offset des Zielpolarisationsvektors und den Intertwiner in Anführungszeichen als Eingabe erwartet. Für jede andere Reduktion erwartet es: (*voffset*), (Index letztes Feld der Korrelation= $b$ ), (Index vorletztes Feld der Korrelation= $a$ ), "(Intertwiner)". Die Ausgabe des Programmes enthält in jedem Fall die Prozeduren *magic*( $F$ ) und *setequal*( $F$ ,  $a$ ,  $b$ ) an den richtigen Stellen.



# 5 Anwendung und Ergebnisse

Mit Hilfe des vorgestellten Programmpaketes ist es nun möglich, verschiedenste Reduktionen an der exotischen 6-Punkt-Struktur durchzuführen und dadurch die Positivität dieser Funktion zu überprüfen. Im folgenden Kapitel werden wir zeigen, dass die exotische Struktur im Falle der Skalendimension  $d' = 2$  in Gl. 2.6.3 nicht allein positiv sein kann und auch keine Kombination mit freien biharmonischen 6-Punkt-Strukturen aus Abs. 2.7 diese Verletzung behebt. Zudem werden wir darlegen, dass die exotische Struktur für  $d' > 2$  ebenfalls nicht selbst positiv ist und geben Bedingungen an mögliche Kombinationen, die in einer positiven Theorie zumindest erfüllt sein müssen.

## 5.1 Positivitätsverletzung der exotischen Struktur für Skalendimension $d' = 2$

Mit der Wahl der Skalendimension  $d' = 2$  wird nach Gl. 2.6.3 die folgende 6-Punkt-Struktur zu reduzieren sein:

$$u_2(x_1, \dots, x_6) = \frac{(\rho_{15}\rho_{26}\rho_{34}^2 - 2\rho_{15}\rho_{23}\rho_{34}\rho_{46} - 2\rho_{15}\rho_{24}\rho_{34}\rho_{36})_{[1,2][5,6]}}{\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24}\rho_{35}\rho_{45}\rho_{36}\rho_{46}}.$$

Für die Berechnung von Intertwinern sei darauf hingewiesen, dass es sich hier um den führenden Twist-2-Beitrag einer Korrelation von sechs skalaren Quantenfeldern mit zwei Bi-Feldern  $V_1$  (siehe Abs. 2.6) im 1-2- und 5-6-Kanal handelt. Beide Bi-Felder sind per Konstruktion regulär in ihren Variablen. Trotzdem muss eine Singularität der Größe  $n = d - 1$  für die Bestimmung der Homogenitäten der Intertwiner angenommen werden, wenn das Feld Bi-Feld  $V_1$  aus zwei skalaren Feldern der Skalendimension  $d$  gebildet wurde. Diese Singularität bezieht sich dann auf die vollständige Korrelationsfunktion sechs skalarer Felder ohne Vakuumbeitrag, nicht nur den führenden Twist-2-Beitrag.

Der erste Schritt der Positivitätsanalyse ist eine Reduktion in eben diesen beiden

Feldern  $V_1$  auf das erste mögliche Twist-2-Tensorfeld, einen Strom  $J$  mit Darstellung  $(1, 1)$ . Der zugehörige Intertwiner (für den 1-2-Kanal) ist sehr kompakt und kann noch von Hand bestimmt werden, wie bereits in [15] durchgeführt. Nach Auswertung der Homogenitäten muss dieser Operator eine Ableitung  $y_i, i = 1, 2$  und einen Polarisationsvektor  $v_1$  enthalten. Dieser darf tatsächlich  $v_1$  genannt werden, da kein  $w_1$  auftritt. Damit hat er die Gestalt:

$$\widehat{E}_{(1,1)}^{\varphi\varphi} = A(v_1 \cdot y_1) + B(v_1 \cdot y_2).$$

Um zu verdeutlichen, welches die Ausgangsfelder für die Reduktion waren, werden wir diese wie im obigen Operator als hochgestellten Index angeben. Die PDE liefert dann die Bedingung  $B = -A$ . Den Intertwiner für den 5-6-Kanal erhält man durch die Ersetzungen  $1 \leftrightarrow 6$  und  $2 \leftrightarrow 5$ . Beide Operatoren, angewendet mit Hilfe unserer Automatisierung und gefolgt von den Abbildungen  $x_1 = x_2 =: x_1$  sowie  $x_6 = x_5 =: x_6$ , ergeben diese 4-Punkt-Funktion:

$$\begin{aligned} \langle J_1(x_1)\varphi_3(x_3)\varphi_4(x_4)J_6(x_6) \rangle &= \frac{16\rho_{34}}{\rho_{13}^2\rho_{14}^2\rho_{36}^2\rho_{46}^2} [v_1 \cdot v_6 (\rho_{34}\rho_{16} - \rho_{13}\rho_{46} - \rho_{14}\rho_{36}) \\ &\quad - 2v_1 \cdot x_{13} (v_6 \cdot x_{46}\rho_{16})_{[1,4]} - 2v_1 \cdot x_{14} (v_6 \cdot x_{36}\rho_{16})_{[1,3]} \\ &\quad + 2v_1 \cdot x_{16} (v_6 \cdot x_{46}\rho_{13} + v_6 \cdot x_{36}\rho_{14} - v_6 \cdot x_{16}\rho_{34})]. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Prozedur  $rename(F)$  gibt dieses Ergebnis mit fortlaufenden Indizes 1 bis 4 zurück.

An dieser Stelle können systematisch alle Reduktionen auf Felder  $\varphi_{(\kappa,L)}$  im 1-2- und 3-4-Kanal durchgegangen werden. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, dem skalaren Twist-2-Feld  $\varphi_{(1,0)}$ . Der entsprechende Intertwiner für den 1-2-Kanal enthält ein  $w_1$  und ein  $y_i, i = 1, 2$ , was die Kombinationsmöglichkeiten

$$\widehat{E}_{(1,0)}^{J\varphi} = A(w_1 \cdot y_1) + B(w_1 \cdot y_2)$$

ergibt. Die Auswertung der PDE liefert für diesen Fall  $A = 0$  und eine Anwendung des entstehenden Operators in beiden Kanälen mit  $x_1 = x_2 =: x_1$  und  $x_4 = x_3 =: x_4$  ergibt die Zwei-Punkt-Funktion:

$$\langle \varphi_{1,(1,0)}(x_1)\varphi_{4,(1,0)}(x_4) \rangle = \frac{512}{\rho_{14}^2}.$$

### 5.1 Positivitätsverletzung der exotischen Struktur für Skalendimension $d' = 2$

Das ist die erwartete Struktur einer Zwei-Punkt-Funktion skalarer Felder (Gl. 2.4.2). Zudem besitzt sie bereits ein positives Vorzeichen.

Der nächste Twist-2-Beitrag ist die erneute Reduktion auf den Strom  $J'$ . Der Interwiner muss in diesem Fall zwei  $y_i, i = 1, 2$ , ein  $w_1$  und einen Polarisationsvektor  $v_5$  (nun mit einbezogenem Offset) enthalten:

$$\widehat{E}_{(1,1)}^{J\varphi} = A_{ij}(v_5 \cdot w_1)(y_i \cdot y_j) + B_{ij}(v_5 \cdot y_i)(w_1 \cdot y_j).$$

Der Ansatz ist wie Gl. 4.1.1 zu verstehen. Das Einsetzen in die PDE liefert einen drei-parametrischen Lösungsraum mit Koeffizienten  $A, B$  und  $C$ :

$$\begin{aligned} \widehat{E}_{(1,1)}^{J\varphi} = & [(v_5 \cdot y_1)(w_1 \cdot y_1) - (v_5 \cdot w_1)(y_1 \cdot y_1)] A \\ & + [(v_5 \cdot y_1)(w_1 \cdot y_2) - (v_5 \cdot w_1)(y_1 \cdot y_2)] B \\ & + [(v_5 \cdot y_2)(w_1 \cdot y_1) + (v_5 \cdot y_2)(w_1 \cdot y_2) \\ & - (v_5 \cdot w_1)(y_2 \cdot y_2) - (v_5 \cdot y_2)(w_1 \cdot y_2)] C. \end{aligned}$$

Diese Reduktion im 1-2-Kanal liefert die folgende nicht verschwindende Drei-Punkt-Struktur (mit Hilfe von  $magic2(F)$  zu prüfen), bei der aus Platzgründen nur die Pole angegeben sind:

$$\langle J'_1(x_1)\varphi_3(x_3)J_4(x_4) \rangle \propto \frac{1}{\rho_{13}^2 \rho_{14}^3 \rho_{34}^2}.$$

Eine Auswertung der Polschranken Gl. 2.4.7 zeigt keine Verletzung, ebenso ist der Strom  $J'$  erhalten. Jedoch führt die analoge Reduktion im 3-4-Kanal zu einer verschwindenden Zwei-Punkt-Funktion. Diese Beobachtung zeigt bereits eine Verletzung der Positivität der exotischen Struktur. Dies kann man sich wie folgt deutlich machen:  $\langle J'_1 J'_4 \rangle$  entspricht  $\|J'\Omega\|^2$  und eine Norm gleich Null impliziert in einer positiven Theorie  $J'\Omega = 0$ . Dies ist offensichtlich nicht der Fall, weil die Drei-Punkt-Funktion nicht verschwindet. Somit muss die 6-Punkt-Struktur positivitätsverletzend sein.

## 5.2 Ausschluss der Positivität der exotischen Struktur für Skalendimension $d' = 2$

Die exotische Struktur ist alleinstehend positivitätsverletzend für die Wahl von  $d' = 2$ . Aus diesem Grund müssen die übrigen 24 freien 6-Punkt-Korrelationsfunktionen aus Abs. 2.7 ebenfalls betrachtet werden. Um mit diesen freien Strukturen die Positivitätsverletzung zu beheben, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder werden die zur Verfügung stehenden Korrelationsfunktionen so linearkombiniert, dass die Zwei-Punkt-Funktion  $\langle J'_1(x_1)J'_4(x_4) \rangle$  nicht verschwindet und die zu erwartende Form annimmt oder die Linearkombination erzwingt, dass bereits die Drei-Punkt-Funktion  $\langle J'_1(x_1)\varphi_3(x_3)J_4(x_4) \rangle$  verschwindet.

Zunächst müssen alle freien Strukturen auf die 4-Punkt-Funktion  $\langle J_1\varphi_2\varphi_3J_4 \rangle$  reduziert sowie Einhaltung der Polschranken und Erhaltung überprüft werden. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.1 zusammengefasst und mit  $\rho_{23}$  multipliziert, um auch für die freien Funktionen  $d' = 2$  sicherzustellen. Aus dieser Tabelle liest man ab, dass beide F5- und F9-Funktionen die Polschranken verletzen, da  $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{24}, \mu_{34} \geq -3$  gelten muss. Diese vier Korrelationen können also ohne Weiteres vernachlässigt werden. Darüber hinaus ist zu bemerken, dass es drei Arten von Strukturen unter den Verbleibenden gibt. Diese können nach ihrer Singularität im 1-2- und 3-4-Kanal klassifiziert werden. Es existieren Strukturen mit:  $n = 0$  (d.h. in beiden Kanälen reguläre Strukturen),  $n = 2$  und  $n = 3$ .

Für die Korrelationen mit  $n = 0, 2$  können wir den bereits berechneten Operator  $\hat{E}_{(1,1)}^{J\varphi}$  benutzen, um sie auf eine Drei-Punkt-Struktur im 1-2-Kanal zu reduzieren. Für die regulären 4-Punkt-Funktionen ist kein neuer Operator notwendig, da sie in Kombination mit dem exotischen Beitrag die Singularität  $n = 2$  besäßen. Es zeigt sich aber, dass für all diese Korrelationsfunktionen die Drei-Punkt-Funktion  $\langle J'_1(x_1)\varphi_3(x_3)J_4(x_4) \rangle$  verschwindet. Sie würden demnach auch für keinen Intertwiner mit höherem Polgrad  $n > 2$  einen Beitrag im Strom  $J'$  zeigen. Damit bleiben allein die 4-Punkt-Funktionen von F4, F6, F10, F11 und F12 als mögliche Kombinationspartner. Dies verlangt, dass wir den Operator  $\hat{E}_{(1,1)}^{J\varphi}$  für  $n = 3$  berechnen (anstatt zwei sind nun vier  $y_i$  vorhanden) und ihn auch auf die exotische Struktur anwenden. Ausgeführt im 1-2-Kanal ergibt die Reduktion recht unterschiedliche Ergebnisse: Während die Drei-Punkt-Funktionen von F4, F6, F10 und F11 verschieden von null und erhalten sind sowie die Polschranken erfüllen, verschwinden die Beiträge von F12 und der exotischen Struktur. Die analoge Reduktion im 3-4-Kanal der vier ver-

5.2 Ausschluss der Positivität der exotischen Struktur für Skalendimension  $d' = 2$ 

6-Punkt-Struktur	Polstruktur von $\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$	Polschranken	Erhaltung
B0	$\propto \rho_{14}^{-4} \rho_{23}^{-2}$	✓	✓
B1	$\propto \rho_{12}^{-2} \rho_{13}^{-2} \rho_{24}^{-2} \rho_{34}^{-2}$	✓	✓
B2	$\propto \rho_{12}^{-2} \rho_{14}^{-3} \rho_{23}^{-1} \rho_{34}^{-2}$	✓	✓
B2'	$\propto \rho_{13}^{-2} \rho_{14}^{-3} \rho_{23}^{-1} \rho_{24}^{-2}$	✓	✓
F0	$\propto \rho_{14}^{-4} \rho_{23}^{-2}$	✓	✓
F1	$\propto \rho_{12}^{-2} \rho_{13}^{-2} \rho_{24}^{-2} \rho_{34}^{-2}$	✓	✓
F2	$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F2} = \langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F1}$	✓	✓
F3	$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F3} = 3 \langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F1}$	✓	✓
F4	$\propto \rho_{12}^{-3} \rho_{13}^{-2} \rho_{24}^{-2} \rho_{34}^{-3}$	✓	✓
F4'	$\propto \rho_{12}^{-2} \rho_{13}^{-3} \rho_{24}^{-3} \rho_{34}^{-2}$	✓	✓
F5	$\propto \rho_{12}^{-4} \rho_{34}^{-4}$	×	✓
F5'	$\propto \rho_{13}^{-4} \rho_{24}^{-4}$	×	✓
F6	$\propto \rho_{12}^{-3} \rho_{14}^{-3} \rho_{23}^{-1} \rho_{34}^{-3}$	✓	✓
F6'	$\propto \rho_{13}^{-3} \rho_{14}^{-3} \rho_{23}^{-1} \rho_{24}^{-3}$	✓	✓
F7	$\propto \rho_{12}^{-2} \rho_{14}^{-3} \rho_{23}^{-1} \rho_{34}^{-2}$	✓	✓
F7'	$\propto \rho_{13}^{-2} \rho_{14}^{-3} \rho_{23}^{-1} \rho_{24}^{-2}$	✓	✓
F8	$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F8} = \langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F7'}$	✓	✓
F8'	$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F8'} = \langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F7}$	✓	✓
F9	$\propto \rho_{12}^{-4} \rho_{34}^{-4}$	×	✓
F9'	$\propto \rho_{13}^{-4} \rho_{24}^{-4}$	×	✓
F10	$\propto \rho_{12}^{-3} \rho_{13}^{-3} \rho_{24}^{-3} \rho_{34}^{-3}$	✓	✓
F11	$\propto \rho_{12}^{-3} \rho_{14}^{-3} \rho_{23}^{-1} \rho_{34}^{-3}$	✓	✓
F11'	$\propto \rho_{13}^{-3} \rho_{14}^{-3} \rho_{23}^{-1} \rho_{24}^{-3}$	✓	✓
F12	$\propto \rho_{12}^{-3} \rho_{13}^{-3} \rho_{24}^{-3} \rho_{34}^{-3}$	✓	✓

Tab. 5.1: Zusammenfassung der 4-Punkt-Funktionen  $\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$  der verschiedenen freien 6-Punkt-Strukturen mit Angabe der Polstruktur und Ergebnisse zur Einhaltung der Polschranken und Erhaltung der Twist-2-Ströme  $J_1$  und  $J_4$ ; ✓ bedeutet keine Verletzung dieser Eigenschaften, × deutet eine Verletzung an.

bleibenden Drei-Punkt-Funktionen zeigt die gleiche Positivitätsverletzung wie die exotische Struktur für  $n = 2$ , die Zwei-Punkt-Funktionen  $\langle J'_1(x_1)J'_4(x_4) \rangle$  verschwinden alle. Damit bleibt nur die zweite Variante zur Behebung der Positivitätsverletzung, nämlich eine Kombination zu finden, die auch alle Drei-Punkt-Funktionen eliminiert. Eine solche Linearkombination sollte auf Ebene der 6-Punkt-Funktionen die folgende Form haben:

$$E \cdot u_2 + V \cdot F4 + W \cdot F6 + X \cdot F10 + Y \cdot F11 + Z \cdot F12. \quad (5.2.1)$$

Dafür erhalten wir bereits die erste Bedingung durch:

$$\begin{aligned} & V \langle J'_1(x_1)\varphi_3(x_3)J_4(x_4) \rangle_{F4} + W \langle J'_1(x_1)\varphi_3(x_3)J_4(x_4) \rangle_{F6} \\ & + X \langle J'_1(x_1)\varphi_3(x_3)J_4(x_4) \rangle_{F10} + Y \langle J'_1(x_1)\varphi_3(x_3)J_4(x_4) \rangle_{F11} = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$V = -W - Y, X = 0.$$

F10 ist demnach kein valider Kombinationspartner.

Wir suchen nun weitere Bedingungen, die die Kombinationsmöglichkeiten der vier verbleibenden fermionischen freien Korrelationen und der exotischen Struktur einschränken. Für  $d' = 2$  konnten wir keine weiteren Positivitätsverletzungen in Reduktionen von  $\langle J_1\varphi_2\varphi_3J_4 \rangle$  finden. Aber es zeigt sich, dass Reduktionen für  $d' = 3$  und  $d' = 4$  dieser 4-Punkt-Funktion noch weitere Positivitätsverletzungen der restlichen fermionischen Strukturen aufweisen. Diese sind dann auch in kleineren Skalendimensionen relevant. In Tab. 5.2 sind, aufgeschlüsselt nach Funktion, die Art der Verletzung im betreffenden Beitrag und die daraus resultierenden Bedingungen dokumentiert. Die exotische Struktur hat in allen dort aufgeführten Reduktionen keinen Beitrag. Die angegebenen Positivitätsverletzungen setzen sich auch für größere  $L$  fort, jedoch hat die Rechenkapazität für diese Beiträge nicht mehr ausgereicht. Letztlich erhalten wir durch gleichzeitige Betrachtung aller Bedingungen:

$$V = 0, X = 0, Z = 0, W = -Y$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in Gl. 5.2.1 und reduziert auf die Struktur  $\langle J_1\varphi_2\varphi_3J_4 \rangle$  zeigt einen Pol vom Grade  $n = 2$  im 1-2- und 3-4-Kanal. Für diesen Polgrad besaß

5.2 Ausschluss der Positivität der exotischen Struktur für Skalendimension  $d' = 2$

Reduktion auf		$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F4}$	$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F6}$	$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F11}$	$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle_{F12}$
$\langle \varphi_{1,(0.5,1)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			ja
	Positivitätsverletzung	$\varphi_{1,(0.5,1)}$ liegt unterhalb der Unitaritätsschranke.			-
	Bedingung	$V = -W - Y$			-
$\langle \varphi_{1,(1,2)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			
	Positivitätsverletzung	Das Twist-2-Tensorfeld $\varphi_{1,(1,2)}$ ist nicht erhalten.			
	Bedingung	$V = 3W + 3Y + 4Z$			
$\langle \varphi_{1,(1,3)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			
	Positivitätsverletzung	Das Twist-2-Tensorfeld $\varphi_{1,(1,3)}$ ist nicht erhalten.			
	Bedingung	$V = -6W - 6Y + 10Z$			
$\langle \varphi_{1,(1,4)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			
	Positivitätsverletzung	Das Twist-2-Tensorfeld $\varphi_{1,(1,4)}$ ist nicht erhalten.			
	Bedingung	$V = 10W + 10Y + 18Z$			
$\langle \varphi_{1,(1,5)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			
	Positivitätsverletzung	Das Twist-2-Tensorfeld $\varphi_{1,(1,5)}$ ist nicht erhalten.			
	Bedingung	$V = -15W - 15Y + 28Z$			
$\langle \varphi_{1,(2,1)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			
	Positivitätsverletzung	Die Zwei-Punkt-Funktion $\langle \varphi_{1,(2,1)} \varphi_{4,(2,1)} \rangle$ verschwindet.			
	Bedingung	$Z = 0, V = 3W + 3Y$			
$\langle \varphi_{1,(2,2)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			
	Positivitätsverletzung	Die Zwei-Punkt-Funktion $\langle \varphi_{1,(2,2)} \varphi_{4,(2,2)} \rangle$ verschwindet.			
	Bedingung	$Z = 0, V = -6W - 6Y$			
$\langle \varphi_{1,(2,3)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			
	Positivitätsverletzung	Die Zwei-Punkt-Funktion $\langle \varphi_{1,(2,3)} \varphi_{4,(2,3)} \rangle$ verschwindet.			
	Bedingung	$Z = 0, V = 10W + 10Y$			
$\langle \varphi_{1,(2,4)} \varphi_3 J_4 \rangle$	versch. Beitrag?	nein			
	Positivitätsverletzung	Die Zwei-Punkt-Funktion $\langle \varphi_{1,(2,4)} \varphi_{4,(2,4)} \rangle$ verschwindet.			
	Bedingung	$Z = 0, V = -15W - 15Y$			

Tab. 5.2: Zusammenfassung der Positivitätsverletzungen der fermionischen Strukturen F4, F6, F11 und F12 für verschiedene Reduktionen; für die Reduktion auf  $\varphi_{(0.5,1)}$  muss die Skalendimension  $d' = 3$  benutzt werden, alle anderen Beiträge sind mit  $d' = 4$  zu erhalten.

die exotische Funktion einen Beitrag in  $J'$  nach Abs. 5.1. Eine Reduktion mit den beiden bekannten Intertwinern  $\widehat{E}_{(1,1)}^{J\varphi}$  für beide Kanäle zeigt eine erhaltene, nicht verschwindende Drei-Punkt-Struktur, die die Polstrahlen erfüllt und eine verschwindende Zwei-Punkt-Struktur. Die zwei verbleibenden Koeffizienten  $E$  und  $Y$  müssen also so kombiniert werden, dass auch diese Drei-Punkt-Funktion null wird. Das ist aber nur für  $E = Y = 0$  möglich. Daraus folgern wir, dass es nicht möglich ist mit den zur Verfügung stehenden 6-Punkt-Korrelationsfunktionen freier Felder die Positivitätsverletzung der exotischen Struktur für  $d' = 2$  zu beheben. Diese exotische Struktur kann kein Teil einer nichttrivialen Theorie sein.

### 5.3 Weitere Ergebnisse für Skalendimensionen $d' > 2$

In Tab. 5.2 haben wir auf ein Tensorfeld reduziert, welches unterhalb der Unitaritätsschranke liegt. Dies ist nur möglich, wenn die Skalendimension  $d'$  ungerade gewählt wird. Der Grund dafür ist, dass die beiden skalaren Felder in  $\langle J_1\varphi_2\varphi_3J_4 \rangle$  mit dieser Wahl der Skalendimension ein halbzahliges  $\kappa$  besitzen müssen. Die Intertwiner sind Lorentz-Skalare und zusammen mit den Homogenitäten in ihren Variablen  $v, w$  und  $y$  können sie nur dann Polynome in diesen Ableitungen sein, wenn  $\kappa$  ganzzahlig ist [6]. Im Falle der betrachteten 6-Punkt-Strukturen heißt das: Da im 1-2- und 5-6-Kanal nur auf Twist-2-Felder mit ungeradem Rang, damit ungerader Skalendimension reduziert werden kann, müssen die Ansätze für Intertwiner stets eine ungerade Anzahl an  $w_1$  enthalten. Sollen zusätzlich noch skalare Felder mit ungerader Dimension in der Korrelation auftreten, kann der Ansatz für Reduktionen auf Felder oberhalb der Unitaritätsschranke nur eine ungerade Anzahl an Variablen beinhalten und somit nie vollständig kontrahiert werden. Für Felder unterhalb dieser Schranke können aber vollständig kontrahierte Operatoren konstruiert werden, diese Felder dürfen aber nicht Teil einer positiven Partialwelle sein. Deshalb ist es ausreichend im Weiteren nur gerade Skalendimensionen  $d'$  zu betrachten.

#### 5.3.1 Reduktionen für $d' = 4$

Für diese Wahl der Skalendimension sieht die exotische 6-Punkt-Struktur folgendermaßen aus:

$$u_4(x_1, \dots, x_6) = \frac{(\rho_{15}\rho_{26}\rho_{34} - 2\rho_{15}\rho_{23}\rho_{46} - 2\rho_{15}\rho_{24}\rho_{36})_{[1,2][5,6]}}{\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24} \cdot \rho_{34} \cdot \rho_{35}\rho_{45}\rho_{36}\rho_{46}}.$$

Bei systematischen Reduktionen dieser Korrelationsfunktion auf eine Vier-Punkt- und weiter auf eine Zwei-Punkt-Funktion haben wir festgestellt, dass bereits alle Drei-Punkt-Funktionen, die mit der zur Verfügung stehenden Rechenleistung von `Maple` durchführbar sind, verschwinden bzw. die Intertwiner nicht existieren. In diesen Feldern hat die exotische Struktur keine Beiträge. Zur Vereinfachung der Intertwiner haben wir außerdem Terme die  $(w_1 \cdot w_1)$  enthalten, für Reduktionen von 4-Punkt-Funktionen mit spurfreien symmetrischen Twist-2-Tensorfeldern  $T_1^3$  ( $L = 3$ ) oder  $T_1^5$  ( $L = 5$ ) wegen deren Spurfreiheit vernachlässigt. In Tab. 5.3 geben wir alle Darstellungen  $(\kappa, L)$  dieser Zielfelder an, wobei im Tabellenkopf diejenige 4-Punkt-Funktion zu finden ist, von der aus reduziert wurde.

### 5.3.2 Reduktionen für $d' = 6$

Zu reduzieren ist nun folgende exotische Funktion:

$$u_6(x_1, \dots, x_6) = \frac{(\rho_{15}\rho_{26}\rho_{34} - 2\rho_{15}\rho_{23}\rho_{46} - 2\rho_{15}\rho_{24}\rho_{36})_{[1,2][5,6]}}{\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24} \cdot \rho_{34}^3 \cdot \rho_{35}\rho_{45}\rho_{36}\rho_{46}}.$$

Der Ausgangspunkt für weitere Positivitätstests sei erneut die 4-Punkt-Funktion  $\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$ . Zunächst ist zu bemerken, dass diese Struktur für den Polgrad  $n = 2$  keine Twist-2-Beiträge spurfreier symmetrischer Tensorfelder enthalten kann, weil die zugehörigen Intertwiner selbst nicht spurfrei gemacht werden können. Für Polgrad  $n = 3$  ist es allerdings möglich, Intertwiner zu bestimmen. Die zugehörigen fermionischen Strukturen enthalten jedoch bis zur Darstellung (1, 9) keine Beiträge in Twist-2-Tensorfeldern. Höhere Ränge waren uns nicht zugänglich. Für alle weiteren Reduktionen haben wir nicht mehr zwischen den zwei möglichen Polgraden unterschieden, sondern nur noch  $n = 3$  benutzt. Dies ist zulässig, weil auch alle fermionischen Strukturen mit Polgrad  $n = 3$  wieder mit der exotischen Struktur kombinierbar sind, da deren Positivitätsverletzungen nur für  $d' \leq 4$  vorlagen.

Es wird erneut nötig sein, die exotische Funktion mit den freien Strukturen zu kombinieren, da in Twist-6-Feldern nicht-verschwindende Beiträge der exotischen Korrelationsfunktion existieren, wobei Zwei-Punkt-Funktionen von Feldern mit geradem Rang ein positives Vorzeichen besitzen, von Feldern mit ungeradem Rang ein negatives. Wir haben auf Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-6-Feldern bis zu  $L = 7$  reduziert und keine Positivitätsverletzung irgendeiner Struktur gefunden. Darüber hinaus haben nur folgende freie Strukturen nichtverschwindende Beiträge: B1, B2, F1, F2, F3, F4, F4', F6, F7, F8, F10, F11 und F12. Wie wir bereits festgestellt

$\langle I_1 \varphi_2 \varphi_3 I_4 \rangle_{\text{exot}}$								$\langle T_1^3 \varphi_2 \varphi_3 T_4^3 \rangle_{\text{exot}}$								$\langle T_1^5 \varphi_2 \varphi_3 T_4^5 \rangle_{\text{exot}}$							
(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)	(8,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)	(8,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)	(8,0)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)			(1,1)							
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)			(1,2)								
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)		(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)												
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)		(6,4)			(1,4)	(2,4)														
(1,5)	(2,5)	(3,5)						(1,5)	(2,5)														
(1,6)	(2,6)	(3,6)						(1,6)															
(1,7)	(2,7)																						
(1,8)																							

Tab. 5.3: Übersicht über alle berechneten verschwindenden Beiträge der exotischen Struktur für  $d' = 4$ .

haben, sind die 4-Punkt-Funktionen einiger dieser Strukturen bis auf Vorfaktoren identisch, weshalb F1, F2 und F3 sowie F7 und F8 nur jeweils einen gemeinsamen Koeffizienten in der Linearkombination erhalten. Diese soll die folgende Form auf Ebene der 6-Punkt-Strukturen haben:

$$B_1 \cdot B1 + B_2 \cdot B2 + 5F_1 \cdot F1 + F_4 \cdot F4 + F_4' \cdot F4' + F_6 \cdot F6 + 2F_7 \cdot F7 \\ + F_{10} \cdot F10 + F_{11} \cdot F11 + F_{12} \cdot F12 \pm u_6, \quad (5.3.1)$$

wobei die Freiheit besteht, die exotische Struktur sowohl mit negativem als auch positivem Vorzeichen zu addieren.

Die Intertwiner für alle Reduktionen auf Twist-6-Felder mit  $L \geq 1$  sind zwei-parametrig, aber alle Zwei-Punkt-Funktionen hängen nur noch von einem dieser Parameter ab. Die Reduktion auf das skalare Twist-6-Feld erfolgt durch einen ein-parametrischen Operator. Aus diesem Grund müssen nur die Vorfaktoren der einzelnen Beiträge abgelesen und keine Eigenwerte einer Koeffizientenmatrix bestimmt werden. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.4 angegeben, wobei gemeinsame Primfaktoren bereits gekürzt sind. Diese Tabelle ist so zu lesen, dass für jede Zwei-Punkt-Funktion alle numerischen Vorfaktoren mit zugehörigem Koeffizient aus der Kopfzeile linear-kombiniert werden und diese Linearkombination insgesamt größer null sein muss. Diese acht gebildeten Ungleichungen konnten wir nicht durch **Maple** nach einzelnen Koeffizienten auflösen, da insgesamt zu viele Koeffizienten auftreten.

Neben den Beiträgen in Twist-6-Feldern konnten wir außerdem einige Strukturen finden, deren 4-Punkt-Funktionen  $\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$  auch Beiträge von Twist-4-Feldern enthalten und nicht positivitätsverletzend sind. Dies sind die fermionischen Strukturen mit Polgrad  $n = 3$  im 1-2- und 3-4-Kanal, alle anderen Strukturen aus Tab. 5.4 weisen bereits verschwindende Drei-Punkt-Funktionen auf. Die Positivität dieser Beiträge ist etwas komplizierter zu überprüfen, da die Intertwiner stets zwei-parametrig sind, aber die Zwei-Punkt-Funktionen dieses Mal diese beiden Parameter beinhalten. Dennoch sind die Eigenwerte der entstehenden  $2 \times 2$ -Koeffizientenmatrizen leicht zu finden. Sie sind in jedem Fall von der folgenden Form:

Seien  $A$  und  $B$  die Parameter des Intertwiners für den 1-2-Kanal sowie  $A'$  und  $B'$  die Parameter des Intertwiners des 3-4-Kanals. Diese Parameter treten in den Zwei-Punkt-Funktionen der Twist-4-Beiträge immer in der Form

$$(aA + bB) \cdot (aA' + bB')$$

	$B_1$	$B_2$	$F_1$	$F_4$	$F'_4$	$F_6$	$F_7$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	exot. Beitrag
$\langle \varphi_{(3,0)} \varphi_{(3,0)} \rangle$	1	1	15	-1	-1	3	-6	5	12	-2	$\pm 2$
$\langle \varphi_{(3,1)} \varphi_{(3,1)} \rangle$	-24	120	-360	31	168	135	-720	-327	975	40	$\mp 24$
$\langle \varphi_{(3,2)} \varphi_{(3,2)} \rangle$	200	3000	3000	-277	-3000	1335	-18000	5109	19935	272	$\pm 120$
$\langle \varphi_{(3,3)} \varphi_{(3,3)} \rangle$	-75	2625	-1125	107	1875	315	-15750	-3039	15540	-442	$\mp 30$
$\langle \varphi_{(3,4)} \varphi_{(3,4)} \rangle$	49	3430	735	-71	-1813	-210	-20580	2867	18900	570	$\pm 14$
$\langle \varphi_{(3,5)} \varphi_{(3,5)} \rangle$	-1568	197568	-23520	2293	79968	-34146	-1185408	-124665	1038366	-28964	$\mp 336$
$\langle \varphi_{(3,6)} \varphi_{(3,6)} \rangle$	864	181440	12960	-1271	-57888	-44730	-1088640	89427	922950	22780	$\pm 144$
$\langle \varphi_{(3,7)} \varphi_{(3,7)} \rangle$	-675	222750	-10125	997	57375	-66330	-1336500	-88089	1106820	-23822	$\mp 90$

Tab. 5.4: Ergebnisse der Reduktion von  $\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$  auf Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-6-Feldern für  $d' = 6$ ; in der Kopfzeile sind die betrachteten Strukturen angegeben, die Zahl ist der relevante Vorfaktor.

auf, woraus die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

folgt. Hierbei sind  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebige Vorfaktoren der Parameter. Diese Matrixform hat die Eigenschaft stets positiv semidefinit zu sein, mit den Eigenwerten null und  $a^2 + b^2$ . Allerdings besitzen die fermionischen Strukturen für jede Zwei-Punkt-Funktion  $\langle \varphi_{(2,L)} \varphi_{(2,L)} \rangle$  mit  $L \geq 1$  jeweils die gleiche Koeffizientenmatrix, weswegen diese prinzipiell irrelevant ist, denn der nicht-verschwindende Eigenwert ist Faktor in allen Beiträgen. Deswegen muss auch hier tatsächlich nur der Vorfaktor abgelesen werden. Die daraus resultierenden Ergebnisse sind in Tab. 5.5 zusammengefasst, wobei Beiträge mit  $L \geq 7$  nicht mehr zugänglich waren und gemeinsame Primfaktoren gekürzt sind. Diese Tabelle ist analog zu Tab. 5.4 zu lesen.

	$F_4$	$F_6$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$
$\langle \varphi_{(2,0)} \varphi_{(2,0)} \rangle$	0	0	0	0	0
$\langle \varphi_{(2,1)} \varphi_{(2,1)} \rangle$	1	1	-1	1	0
$\langle \varphi_{(2,2)} \varphi_{(2,2)} \rangle$	-1	5	7	5	6
$\langle \varphi_{(2,3)} \varphi_{(2,3)} \rangle$	1	15	-15	15	-14
$\langle \varphi_{(2,4)} \varphi_{(2,4)} \rangle$	-1	35	25	35	24
$\langle \varphi_{(2,5)} \varphi_{(2,5)} \rangle$	1	70	-37	70	-36
$\langle \varphi_{(2,6)} \varphi_{(2,6)} \rangle$	-1	126	51	126	50

Tab. 5.5: Ergebnisse der Reduktion von  $\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$  auf Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-4-Feldern für  $d' = 6$ ; in der Kopfzeile sind die betrachteten Strukturen angegeben, die Zahl ist der relevante Vorfaktor.

Wir haben außerdem in höheren Twists die Darstellungen  $(4, 0)$ ,  $(5, 0)$  und  $(6, 0)$  geprüft, dort aber für keine der Strukturen aus Tab. 5.4 einen Beitrag finden können. Geht man zur 4-Punkt-Funktion  $\langle T_1^3 \varphi_2 \varphi_3 T_4^3 \rangle$  über, zeigen Reduktionen auf Felder mit Darstellungen  $(3, 0)$ ,  $(3, 1)$  und  $(3, 2)$  sowie  $(2, 0)$  bis  $(2, 3)$  für diese Strukturen ebenfalls keine Beiträge.

Anhand dieser wenigen Beiträge können wir noch keine allgemeinen Aussagen zum Verhalten der 25 Strukturen ableiten. Dennoch zeigt sich, dass Beiträge von B2 und F11 bisher stets positiv und jene von F7 und F8 stets negativ waren. Außerdem scheinen die Vorfaktoren der exotischen Zwei-Punkt-Funktionen mit steigendem Rang der Tensorfelder nur sehr langsam zu wachsen, anders als das Verhalten der

freien Strukturen. Deren Vorfaktoren wachsen schnell an. Die Tabellen 5.4 und 5.5 legen zumindest die Vermutung nahe, dass es ausreichend ist, die exotische Struktur mit F11, B2 oder  $-F7$  zu kombinieren, um eine positive Korrelationsfunktion zu erhalten. Um diese Behauptung zu verifizieren, sind mehr Reduktionen in den betreffenden Twists notwendig.

### 5.3.3 Reduktionen für $d' = 8$

Für diese Skalendimension hat die exotische Struktur folgendes Aussehen:

$$u_8(x_1, \dots, x_6) = \frac{(\rho_{15}\rho_{26}\rho_{34} - 2\rho_{15}\rho_{23}\rho_{46} - 2\rho_{15}\rho_{24}\rho_{36})_{[1,2][5,6]}}{\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24} \cdot \rho_{34}^5 \cdot \rho_{35}\rho_{45}\rho_{36}\rho_{46}}.$$

Reduktionen von  $\langle J_1\varphi_2\varphi_3J_4 \rangle$  auf Twist-2-Tensorfelder zeigen für diese Wahl der Skalendimension weder für Polgrad  $n = 2$  noch für Polgrad  $n = 3$  einen Beitrag, weil beide Arten von Intertwinern nicht mehr spurfrei gemacht werden bzw. die anderen Homogenitäten nicht erfüllt werden können. Andererseits zeigen wieder nur jene Strukturen einen Beitrag, die auch für  $d' = 6$  Beiträge in Twist-6-Feldern besaßen. Das Verhalten der Strukturen ähnelt für  $d' = 8$  ohnehin stark dem für  $d' = 6$ . Die gefundenen Beiträge scheinen jetzt aber, im nächst höheren Twist aufzutreten. Das bedeutet, die exotische Struktur sowie die bosonischen und fermionischen Strukturen aus Tab. 5.4 weisen Beiträge in Twist-8-Feldern auf, die fermionischen Strukturen F4, F6, F10, F11 und F12 zusätzlich Beiträge in Twist-6-Feldern. Außerdem ergeben auch Reduktionen von  $\langle T_1^3\varphi_2\varphi_3T_4^3 \rangle$  Beiträge von Twist-8- bzw. Twist-6-Feldern.

Wir haben bei Reduktionen von  $\langle J_1\varphi_2\varphi_3J_4 \rangle$  stets den Polgrad  $n = 3$  für alle Intertwiner verwendet und dabei festgestellt, dass keine Beiträge in Twist-4-Feldern bis  $L = 7$  bei allen in Gl. 5.3.1 auftretenden Strukturen vorliegen. Reduktionen von  $\langle T_1^3\varphi_2\varphi_3T_4^3 \rangle$  wurden mit  $n = 5$  für alle Intertwiner durchgeführt. Hier ergab sich das gleiche Resultat für Felder bis zur Darstellung  $(2, 5)$  sowie zusätzlich für Twist-2-Beiträge bis zur Darstellung  $(1, 4)$ .

Das Aussehen der Zwei-Punkt-Funktionen für Twist-6- oder Twist-8-Beiträge hat sich für Reduktionen von  $\langle J_1\varphi_2\varphi_3J_4 \rangle$  qualitativ nicht geändert, deswegen kann hier analog zu  $d' = 6$  vorgegangen werden, um die Positivität der einzelnen Beiträge festzustellen. Bei Reduktionen von  $\langle T_1^3\varphi_2\varphi_3T_4^3 \rangle$  verhält es sich prinzipiell nicht anders, aber die Intertwiner haben einen deutlich größeren Lösungsraum von bis zu sechs Dimensionen. Dennoch enthalten Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-8-Feldern höchstens einen Parameter, Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-6-Feldern höchstens

### 5.3 Weitere Ergebnisse für Skalendimensionen $d' > 2$

Zwei-Parameter in der Gestalt, wie sie auch für Twist-4-Beiträge in  $d' = 6$  auftrafen. Folglich kann auch für diese 4-Punkt-Funktion analog vorgegangen werden. Die gefundenen Ergebnisse haben wir in Tab. 5.6 für Twist-6-Beiträge und Tab. 5.7 für Twist-8-Beiträge dokumentiert, wobei auch hier gemeinsame Primfaktoren gekürzt sind. Weitere Beiträge mit Twist-8 oder Twist-6 konnten wir nicht überprüfen. Für

$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$	$F_4$	$F_6$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$
$\langle \varphi_{(3,0)} \varphi_{(3,0)} \rangle$	0	0	0	0	0
$\langle \varphi_{(3,1)} \varphi_{(3,1)} \rangle$	1	1	-1	1	0
$\langle \varphi_{(3,2)} \varphi_{(3,2)} \rangle$	-1	7	9	7	8
$\langle \varphi_{(3,3)} \varphi_{(3,3)} \rangle$	1	28	-19	28	-18
$\langle \varphi_{(3,4)} \varphi_{(3,4)} \rangle$	-1	84	31	84	30
$\langle \varphi_{(3,5)} \varphi_{(3,5)} \rangle$	1	210	-45	210	-44
$\langle \varphi_{(3,6)} \varphi_{(3,6)} \rangle$	-1	462	61	462	60

(a) Ergebnisse der Reduktion von  $\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$  auf Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-6-Feldern; in der Kopfzeile sind die betrachteten Strukturen angegeben, die Zahl ist der relevante Vorfaktor.

$\langle T_1^3 \varphi_2 \varphi_3 T_4^3 \rangle$	$F_4$	$F_6$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$
$\langle \varphi_{(3,0)} \varphi_{(3,0)} \rangle$	0	0	0	0	0
$\langle \varphi_{(3,1)} \varphi_{(3,1)} \rangle$	1	1	-1	1	0
$\langle \varphi_{(3,2)} \varphi_{(3,2)} \rangle$	-1	7	9	7	8

(b) Ergebnisse der Reduktion von  $\langle T_1^3 \varphi_2 \varphi_3 T_4^3 \rangle$  auf Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-6-Feldern; in der Kopfzeile sind die betrachteten Strukturen angegeben, die Zahl ist der relevante Vorfaktor.

Tab. 5.6: Zusammenfassung der Reduktionen für  $d' = 8$  auf Twist-6-Felder.

Beiträge in höheren Twists liegen uns keine weiteren Ergebnisse vor.

Letztlich lässt sich aus den gefundenen Bedingungen nur dieselbe Schlussfolgerung wie für  $d' = 6$  ziehen. Es bestätigt sich aber die Vermutung, dass B2, F7 und F11 positiv sein könnten.

$\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$	$B_1$	$B_2$	$F_1$	$F_4$	$F'_4$	$F_6$	$F_7$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	exot. Beitrag
$\langle \varphi_{(4,0)} \varphi_{(4,0)} \rangle$	1	1	15	-1	-1	3	-6	5	12	-2	$\pm 2$
$\langle \varphi_{(4,1)} \varphi_{(4,1)} \rangle$	-27	189	-405	31	243	259	-1134	-403	1624	54	$\mp 30$
$\langle \varphi_{(4,2)} \varphi_{(4,2)} \rangle$	784	21952	11760	-937	-14896	16212	-131712	21551	157332	-218	$\pm 560$
$\langle \varphi_{(4,3)} \varphi_{(4,3)} \rangle$	-320	26880	-4800	389	9920	11340	-161280	-13615	172620	-746	$\mp 160$
$\langle \varphi_{(4,4)} \varphi_{(4,4)} \rangle$	243	51030	3645	-298	-10935	12180	-306180	14602	305130	1362	$\pm 90$
$\langle \varphi_{(4,5)} \varphi_{(4,5)} \rangle$	-245	113190	-3675	302	14945	13860	-679140	-19630	644490	-2318	$\mp 70$
$\langle \varphi_{(4,6)} \varphi_{(4,6)} \rangle$	7744	7155456	116160	-9577	-611776	313236	-42932736	794891	39342996	107362	$\pm 1760$

(a) Ergebnisse der Reduktion von  $\langle J_1 \varphi_2 \varphi_3 J_4 \rangle$  auf Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-8-Feldern; in der Kopfzeile sind die betrachteten Strukturen angegeben, die Zahl ist der relevante Vorfaktor.

$\langle T_1^3 \varphi_2 \varphi_3 T_4^3 \rangle$	$B_1$	$B_2$	$F_1$	$F_4$	$F'_4$	$F_6$	$F_7$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	exot. Beitrag
$\langle \varphi_{(4,0)} \varphi_{(4,0)} \rangle$	4	4	260	-29	-4	167	-104	225	843	92	$\pm 8$
$\langle \varphi_{(4,1)} \varphi_{(4,1)} \rangle$	-36	252	-7020	213	324	4137	-6552	-3489	30597	252	$\mp 40$
$\langle \varphi_{(4,2)} \varphi_{(4,2)} \rangle$	49	1372	9555	-227	-931	11732	-35672	6201	116592	-718	$\pm 35$

(b) Ergebnisse der Reduktion von  $\langle T_1^3 \varphi_2 \varphi_3 T_4^3 \rangle$  auf Zwei-Punkt-Funktionen von Twist-8-Feldern; in der Kopfzeile sind die betrachteten Strukturen angegeben, die Zahl ist der relevante Vorfaktor.

Tab. 5.7: Zusammenfassung der Reduktionen für  $d' = 8$  auf Twist-8-Felder.

## 6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir versucht, innerhalb des axiomatischen Zugangs zur Quantenfeldtheorie nach Wightman, die Positivität einer nichttrivialen 6-Punkt-Korrelationsfunktion in vier Raumzeitdimensionen nachzuweisen. In vier Raumzeitdimensionen sind nichttriviale Strukturen von besonderem Interesse, da dort bislang noch keine Theorie aus den Wightman-Axiomen hergeleitet werden konnte, die wechselwirkende Felder beschreibt. Wir haben außerdem gesehen, dass eine hohe Anzahl von Symmetrien notwendig ist, um im axiomatischen Rahmen explizite Rechnungen durchführen zu können. Besonders zielführend erscheint hierbei die Erweiterung der Poincaré-Gruppe um Dilatationen und spezielle konforme Abbildungen. Die Forderung, diese konforme Invarianz solle global auf einem konform kompaktifizierten Minkowski-Raum gelten, führt zur global konformen Invarianz, welche starke Einschränkungen an die Korrelationsfunktionen einer QFT stellt: Sie müssen rational sein.

Durch die Rationalität aller Korrelationsfunktionen rückt die Partialwellenanalyse in den Mittelpunkt der Positivitätsuntersuchungen. Sie ist ein mächtiges Hilfsmittel, um die Struktur einer Korrelationsfunktion zu ergründen.  $N$ -Punkt-Funktionen können durch sie in Partialwellen mit weniger Feldinhalt zerlegt werden. Wir haben gesehen, dass die schon länger bekannte Methode der Casimiroperatoren, deren Eigenfunktionen die Partialwellen sind, in vier Raumzeitdimensionen durch ihren Rechenaufwand nicht zweckmäßig ist und haben uns näher mit den kürzlich gefundenen Resultaten zu Verkettungsoperatoren der Konformen Lie-Algebra vertraut gemacht. Diese können Partialwellen aus einer Korrelationsfunktion heraus projizieren, ohne die eigentliche Partialwellenentwicklung zu kennen. Positivitätsanalysen werden so zugänglicher, weil lediglich die Positivität vieler Zwei-Punkt-Funktionen zu überprüfen ist.

Das von uns entwickelte Paket zur Automatisierung der Berechnungen in `Maple` hat neue Erkenntnisse zur Positivität der exotischen 6-Punkt-Struktur erbracht. Enthält diese Funktion zwei skalare Felder mit Skalendimension  $d' = 2$  kann die Positivität

ausgeschlossen werden. Enthält sie zwei skalare Felder mit Skalendimension  $d' = 4$  konnten wir mit der zur Verfügung stehenden Rechenkapazität, noch keine nicht verschwindende Drei-Punkt-Funktion finden. Für die Skalendimensionen  $d' = 6$  und  $d' = 8$  ist die exotische Struktur selbst nicht positiv, da sie alternierende Vorzeichen aufweist. Wir haben Bedingungen angegeben, wie Kombinationen mit freien Strukturen aussehen müssten, um möglicherweise dennoch Positivität zu garantieren.

Jedoch sind die Ergebnisse für Skalendimensionen  $d' > 2$  nicht ausschöpfend genug, um definitiv Positivität zu verifizieren oder falsifizieren. Interessant scheint die Frage, ob für  $d' = 4$  in höheren Darstellung als jene, die wir testen konnten, skalare Beiträge vorhanden sind und ob es auch pseudoskalare Beiträge gibt. Pseudoskalare Verkettungsoperatoren waren uns mit der zur Verfügung stehenden `Maple`-Version nicht zugänglich, da eine Implementierung des Levi-Civita-Symbols nicht vorlag. Dieses ist aber essenzieller Bestandteil der pseudoskalaren Operatoren. Außerdem sollten zukünftig noch größere Skalendimensionen  $d'$  untersucht werden.

In jedem Fall haben wir gesehen, dass diese Art von Positivitätsanalyse adäquat möglich ist, aber für große Quantenzahlen  $(\kappa, L)$  sehr viel Speicherkapazität benötigt. Sollen noch größere Beiträge untersucht werden, müssen leistungsfähigere Rechner verwendet werden oder die gesamte Algebra mit anderen Mitteln durchgeführt werden. Vor allem sollte in naher Zukunft für weitere Rechnungen, auf eine höhere `Maple`-Version umgestiegen werden, die dann auch das Levi-Civita-Symbol enthält, um pseudoskalare Operatoren sinnvoll bestimmen zu können. Andererseits haben wir uns auf Reduktionen auf spurfreie symmetrische Tensorfelder beschränkt, da für diese bereits die Arbeit geleistet wurde, eine bestimmende partielle Differentialgleichung für Verkettungsoperatoren herzuleiten. Es hat sich bereits für  $d' = 4$  angedeutet, dass diese Einschränkung nicht die gesamte Partialwellenentwicklung abdecken kann und somit wäre es wünschenswert, in späteren Arbeiten auch die Struktur der Verkettungsoperatoren für nicht-symmetrische Tensorfelder zu analysieren.

# A Quellcode

## A.1 utils.mpl

Diese Datei wird von allen übrigen Programmteilen genutzt. Ihre Aufgabe besteht im Wesentlichen darin, dass "stack limit" zu erhöhen, da die externe Routine *collect.py*<sup>1</sup> mit rekursiven Funktionsaufrufen arbeitet und Maple durch ein niedriges stack limit nur eine unzureichende Anzahl derer zulässt. Außerdem erzeugt diese Datei temporäre Ordner, die im restlichen Programmpaket gebraucht werden.

```
1  if not assigned(INTERTWINER_PATH) then
2      error "Please set the variable INTERTWINER_PATH to the correct path! Thank you.";
3  end if;
4
5  kernelopts(stacklimit=2^20);
6
7  with(FileTools);
8
9  HOMEDIR := kernelopts(homedir);
10 SCRIPTPATH := "" || INTERTWINER_PATH || "/scripts";
11 USERNAME := kernelopts(username);
12 TMPPATH := "/tmp/" || USERNAME || "_intertwiners/";
13
14 if not Exists(TMPPATH) then
15     MakeDirectory(TMPPATH);
16 end if;
```

## A.2 diffsolver.mpl

```
1  if not assigned(INTERTWINER_PATH) then
2      error "Please set the variable INTERTWINER_PATH to the correct path! Thank you.";
3  end if;
4
5  read "" || INTERTWINER_PATH || "/utils.mpl";
6  with(SolveTools);
7
8  m := 4;
9
10 #the diffop Nabla_x_a,mu
11 Nablaamu := (E, mu, a) ->
12 add( diff(E, vy[i,a]) * v[i][mu], i=1..m )
13 + add( diff(E, wy[i,a]) * w[i][mu], i=1..m)
14 + add( diff(E, yy[a,i]) * y[i][mu], i=1..m)
15 + add( diff(E, yy[i,a]) * y[i][mu], i=1..m);
```

---

<sup>1</sup>siehe <http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/~nikolai.wyderka>

## A Quellcode

```

16
17 #the diffop Nabla_v_a,mu
18 Nablavamu := (E, mu, a) ->
19 add( diff(E, vw[i,a]) * v[i][mu], i=1..m )
20 + add( diff(E, wy[a,i]) * y[i][mu], i=1..m)
21 + add( diff(E, ww[a,i]) * w[i][mu], i=1..m)
22 + add( diff(E, ww[i,a]) * w[i][mu], i=1..m);
23
24 #the diffop Nabla_xa Nabla_xa
25 NablaaNablaa := (E, a) ->
26 add( add( diff(E, vy[i,a], vy[j,a]) * vv[i,j], i=1..m)
27 + add( diff(E, wy[i,a], vy[j,a]) * vw[j,i], i=1..m)
28 + add( diff(E, yy[a,i], vy[j,a]) * vy[j,i], i=1..m)
29 + add( diff(E, yy[i,a], vy[j,a]) * vy[j,i], i=1..m)
30 , j=1..m)
31 + add( add( diff(E, vy[i,a], wy[j,a]) * vw[i,j], i=1..m)
32 + add( diff(E, wy[i,a], wy[j,a]) * alb(i,j) * ww[i,j], i=1..m)
33 + add( diff(E, wy[i,a], wy[j,a]) * agb(i,j) * ww[j,i], i=1..m)
34 + add( diff(E, wy[i,a], wy[j,a]) * kdel(i,j) * ww[i,i], i=1..m)
35 + add( diff(E, yy[a,i], wy[j,a]) * wy[j,i], i=1..m)
36 + add( diff(E, yy[i,a], wy[j,a]) * wy[j,i], i=1..m)
37 , j=1..m)
38 + add( add( diff(E, vy[i,a], yy[a,j]) * vy[i,j], i=1..m), j=1..m)
39 + add( add( diff(E, vy[i,a], yy[j,a]) * vy[i,j], i=1..m), j=1..m)
40 + add( add( diff(E, wy[i,a], yy[a,j]) * wy[i,j], i=1..m), j=1..m)
41 + add( add( diff(E, wy[i,a], yy[j,a]) * wy[i,j], i=1..m), j=1..m)
42 + add( add( diff(E, yy[a,i], yy[a,j]) * yy[i,j], i=1..m), j=1..m)
43 + add( add( diff(E, yy[i,a], yy[a,j]) * yy[i,j], i=1..m), j=1..m)
44 + add( add( diff(E, yy[i,a], yy[j,a]) * yy[i,j], i=1..m), j=1..m)
45 + add( add( diff(E, yy[a,i], yy[j,a]) * yy[i,j], i=1..m), j=1..m)
46 + 8*diff(E, yy[a,a]);
47
48 #the diffop Nabla_xa Nabla_va
49 NablaaNablava := (E, a) ->
50 4*diff(E, wy[a,a])
51 + add( add( diff(E, ww[a,i], vy[j,a]) * vw[j,i], i=1..m), j=1..m)
52 + add( add( diff(E, ww[i,a], vy[j,a]) * vw[j,i], i=1..m), j=1..m)
53 + add( add( diff(E, ww[a,i], wy[j,a]) * ww[i,j], i=1..m), j=1..m)
54 + add( add( diff(E, ww[i,a], wy[j,a]) * ww[i,j], i=1..m), j=1..m)
55 + add( add( diff(E, vw[i,a], vy[j,a]) * vv[i,j], i=1..m), j=1..m)
56 + add( add( diff(E, vw[i,a], wy[j,a]) * vw[i,j], i=1..m), j=1..m)
57 + add( add( diff(E, vw[i,a], yy[a,j]) * vy[i,j], i=1..m), j=1..m)
58 + add( add( diff(E, vw[i,a], yy[j,a]) * vy[i,j], i=1..m), j=1..m)
59 + add( add( diff(E, wy[a,i], vy[j,a]) * vy[j,i], i=1..m), j=1..m)
60 + add( add( diff(E, wy[a,i], wy[j,a]) * wy[j,i], j=1..m), i=1..m)
61 + add( add( diff(E, wy[a,i], yy[a,j]) * yy[i,j], i=1..m), j=1..m)
62 + add( add( diff(E, wy[a,i], yy[j,a]) * yy[i,j], i=1..m), j=1..m)
63 + add( add( diff(E, ww[a,i], yy[a,j]) * wy[i,j], i=1..m), j=1..m)
64 + add( add( diff(E, ww[i,a], yy[a,j]) * wy[i,j], i=1..m), j=1..m)
65 + add( add( diff(E, ww[i,a], yy[j,a]) * wy[i,j], i=1..m), j=1..m)
66 + add( add( diff(E, ww[a,i], yy[j,a]) * wy[i,j], i=1..m), j=1..m);
67
68 #the diffop y_a Nabla_x_a
69 yaNablaa := (E, a) ->
70 add( diff(E, vy[i,a]) * vy[i,a], i=1..m )
71 + add( diff(E, wy[i,a]) * wy[i,a], i=1..m)
72 + add( diff(E, yy[a,i]) * yy[a,i], i=1..m)
73 + add( diff(E, yy[i,a]) * yy[i,a], i=1..m);
74
75 #the diffop w_a Nabla_x_a
76 waNablaa := (E, a) ->
77 add( diff(E, vy[i,a]) * vw[i,a], i=1..m )
78 + add( diff(E, wy[i,a]) * alb(a,i) * ww[a,i], i=1..m)
79 + add( diff(E, wy[i,a]) * agb(a,i) * ww[i,a], i=1..m)
80 + add( diff(E, wy[i,a]) * kdel(a,i) * ww[a,a], i=1..m)
81 + add( diff(E, yy[a,i]) * wy[a,i], i=1..m)
82 + add( diff(E, yy[i,a]) * wy[a,i], i=1..m);
83
84 #auxiliary functions
85 kdel := (r,s)-> 1-abs(signum(r-s));
86 agb := (r,s)->(signum(r-s)+1)/2 * abs(signum(r-s));
87 alb := (r,s)->(signum(s-r)+1)/2 * abs(signum(r-s));
88

```

```

89 #diffop d/dv_e d/dv_c, used for guaranteeing tracelessness
90 OpPartvPartv := (F, e, c) ->
91 add( add( diff(F, vv[c,d], vv[e,f]) * vv[f,d], d=c..m), f=e..m)
92 + add( add( diff(F, vv[c,d], vv[f,e]) * vv[f,d], d=c..m), f=1..e)
93 +4*alb(c,e)*diff(F, vv[c,e]) + 4*agb(c,e)*diff(F, vv[e,c]) + 8*kdel(c,e)*diff(F, vv[c,e])
94 +add( add( diff(F, vv[d,c], vv[e,f]) * vv[f,d], d=1..c), f=e..m)
95 + add( add( diff(F, vv[d,c], vv[f,e]) * vv[f,d], d=1..c), f=1..e)
96 +add( add( diff(F, vw[c,i], vv[e,f]) * vw[f,i], i=1..4), f=e..m)
97 +add( add( diff(F, vw[c,i], vv[f,e]) * vw[f,i], i=1..4), f=1..e)
98 +add( add( diff(F, vw[c,i], vw[e,j]) * ww[i,j], i=1..4), j=1..4)
99 +add( add( diff(F, vw[c,i], vy[e,j]) * wy[i,j], i=1..4), j=1..4)
100 +add( add( diff(F, vy[c,i], vv[e,f]) * vy[f,i], i=1..4), f=e..m)
101 +add( add( diff(F, vy[c,i], vv[f,e]) * vy[f,i], i=1..4), f=1..e)
102 +add( add( diff(F, vy[c,i], vw[e,j]) * wy[j,i], i=1..4), j=1..4)
103 +add( add( diff(F, vy[c,i], vy[e,j]) * yy[i,j], i=1..4), j=1..4)
104 +add( add( diff(F, vv[c,i], vw[e,j]) * vw[i,j], i=c..m), j=1..4)
105 +add( add( diff(F, vv[c,i], vy[e,j]) * vy[i,j], i=c..m), j=1..4)
106 +add( add( diff(F, vv[i,c], vw[e,j]) * vw[i,j], i=1..c), j=1..4)
107 +add( add( diff(F, vv[i,c], vy[e,j]) * vy[i,j], i=1..c), j=1..4);
108
109 #non-pseudo ops only, used to reduce diffops from n to n-1
110 Nabla1Nabla2 := E ->
111 add( add( diff(E, vy[i,2], vy[j,1]) * vv[i,j], i=1..m)
112 + add( diff(E, wy[i,2], vy[j,1]) * vw[j,i], i=1..2)
113 + diff(E, yy[1,2], vy[j,1]) * vy[j,1]
114 + 2*diff(E, yy[2,2], vy[j,1]) * vy[j,2]
115 , j=1..m)
116 + add( add( diff(E, vy[i,2], wy[j,1]) * vw[i,j], i=1..m)
117 + add( diff(E, wy[i,2], wy[j,1]) * ww[j,i], i=1..2)
118 + diff(E, yy[1,2], wy[j,1]) * wy[j,1]
119 + 2*diff(E, yy[2,2], wy[j,1]) * wy[j,2]
120 , j=1..2)
121 + add( diff(E, vy[i,2], yy[1,2]) * vy[i,2], i=1..m)
122 + add( diff(E, wy[i,2], yy[1,2]) * wy[i,2], i=1..2)
123 + diff(E, yy[1,2], yy[1,2]) * yy[1,2]
124 + 2*diff(E, yy[2,2], yy[1,2]) * yy[2,2]
125 + 2*add( diff(E, vy[i,2], yy[1,1]) * vy[i,1], i=1..m)
126 + 2*add( diff(E, wy[i,2], yy[1,1]) * wy[i,1], i=1..2)
127 + 2*diff(E, yy[1,2], yy[1,1]) * yy[1,1]
128 + 4*diff(E, yy[2,2], yy[1,1]) * yy[1,2]
129 + 4*diff(E, yy[1,2]);
130
131 #brings terms in right order, to be called after every diffop from above
132 diffmagic := proc(E)
133 local tmp, i, j;
134
135 tmp := E;
136 for i from 1 to m do
137 for j from 1 to i-1 do
138 tmp := subs(vv[i,j] = vv[j,i], tmp);
139 end do;
140 end do;
141
142 for i from 1 to m do
143 for j from 1 to i-1 do
144 tmp := subs(ww[i,j] = ww[j,i], tmp);
145 end do;
146 end do;
147
148 for i from 1 to m do
149 for j from 1 to i-1 do
150 tmp := subs(yy[i,j] = yy[j,i], tmp);
151 end do;
152 end do;
153
154 tmp;
155 end proc;
156
157 #short for the function above
158 dmv := F -> diffmagic(F);
159
160 #contracts all vectors with indices, if possible
161 pacman := proc(F)

```

## A Quellcode

```

162   local tmp;
163   tmp := expand(F);
164
165   save tmp, "" || TMPPATH || "maplecontract.txt";
166   ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/pacman2.py" || TMPPATH || "maplecontract.txt" ||
           TMPPATH || "maplecontracted.txt");
167   read "" || TMPPATH || "maplecontracted.txt";
168
169   tmp := %;
170   tmp;
171 end proc;
172
173 #collects for same operator terms to reduce the size of operators
174 diffcollect := proc(F)
175   local tmp;
176   tmp := expand(F);
177   save tmp, "" || TMPPATH || "maplecollect.txt";
178   print("python" || SCRIPTPATH || "/collect.py" || TMPPATH || "maplecollect.txt" || TMPPATH
         || "maplecollected.txt");
179   ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/collect.py" || TMPPATH || "maplecollect.txt" || TMPPATH
         || "maplecollected.txt");
180   print("done");
181   read "" || TMPPATH || "maplecollected.txt";
182   tmp := %;
183   print("collecting...");
184   tmp := collect(expand(tmp), maplecollectterms);
185   print("collected!");
186
187   save tmp, "" || TMPPATH || "maplecollect2.txt";
188   print("python" || SCRIPTPATH || "/collect2.py" || TMPPATH || "maplecollect2.txt" || TMPPATH
         || "maplecollected2.txt");
189   ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/collect2.py" || TMPPATH || "maplecollect2.txt" ||
           TMPPATH || "maplecollected2.txt");
190   print("done");
191   read "" || TMPPATH || "maplecollected2.txt";
192   tmp := %;
193
194   tmp;
195 end proc;
196
197 #reduces a non-pseudo op from n to n-1
198 DoReduce := F -> dmV(Nabla1Nabla1(F)-2*Nabla1Nabla2(F)+Nabla2Nabla2(F));
199
200 #the actual application of the PDE to an expression
201 DoDiff := (E, d1, d2, n, kappa, L, a, b, mu) -> 2 * (Nablaamu(diffmagic(value(yaNablaa(E, a))),
    mu, a) - Nablaamu(E, mu, a)) - y[a][mu] * NablaaNablaa(E, a) + 2*(Nablavamu( diffmagic(value
    (waNablaa(E, a))), mu, a) - Nablaamu(E, mu, a) - w[a][mu] * NablaaNablava(E, a)) + (2*d1 -
    2*n) * Nablaamu(E, mu, a)
202 + 2 * (Nablaamu(diffmagic(value(yaNablaa(E, b))), mu, b) - Nablaamu(E, mu, b)) - y[b][mu] *
    NablaaNablaa(E, b) + 2*(Nablavamu( diffmagic(value(waNablaa(E, b))), mu, b) - Nablaamu(E, mu
    , b) - w[b][mu] * NablaaNablava(E, b)) + (2*d2 - 2*n) * Nablaamu(E, mu, b);
203
204 #rewrites products of two epsilon-tensors as sum of products of eta-tensors
205 epsilontoeta := proc(F)
206   local tmp;
207   tmp := expand(F);
208   save tmp, "" || TMPPATH || "mapleepsilontoeta.txt";
209   ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/epsilontoeta.py" || TMPPATH || "mapleepsilontoeta.txt" ||
           TMPPATH || "mapleepsilontoeta2.txt");
210   read "" || TMPPATH || "mapleepsilontoeta2.txt";
211   tmp := %;
212
213   tmp;
214 end proc;
215
216 #builds the actual non-pseudo operator to reduce from representation kappa1, L1 and kappa2, L2
    to kappa and L for singularities up to degree of n
217 buildop := proc(kappa1, L1, kappa2, L2, n, kappa, L)
218   local numv, numw1, numw2, numy, tmp, subsme, ansatz2, ansatz3, ansatz4;
219   #build ansatz
220   numv := L;
221   numw1 := L1;
222   numw2 := L2;

```

```

223 numy := 2*kappa + L + 2*n - 2*kappa1 - L1 - 2*kappa2 - L2;
224 print("python" || SCRIPTPATH || "/combinator.py" || numv || " " || numw1 || " " || numw2 ||
      " " || numy || " " || TMPPATH || "maplecombinate.txt");
225 ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/combinator.py" || numv || " " || numw1 || " " || numw2
      || " " || numy || " " || TMPPATH || "maplecombinate.txt");
226 read "" || TMPPATH || "maplecombinate.txt";
227
228 print("Ansatz_and_factors:");
229 print(used_factors);
230 print(ansatz);
231
232 tmp := collect(simplify(expand(dmv(DoDiff(ansatz, 2*kappa1+L1, 2*kappa2+L2, n, kappa, L, 1, 2,
      mu))))), used_factors);
233 save tmp, "" || TMPPATH || "mapleops.txt";
234 print("python" || SCRIPTPATH || "/solve.py" || TMPPATH || "mapleops.txt" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
235 ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/solve.py" || TMPPATH || "mapleops.txt" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
236 read "" || TMPPATH || "mapleops2.txt";
237
238 subsme := Linear(solveme, indets(solveme));
239 #print(subsme);
240 ansatz2 := simplify(expand(subs(subsme, ansatz)));
241 print("Solved_PDE...");
242 #print(ansatz2);
243 tmp := collect(simplify(expand(dmv(OpPartvPartv(ansatz2, 1, 1))))), used_factors);
244 if tmp <> 0 then
245     save tmp, "" || TMPPATH || "mapleops.txt";
246     print("python" || SCRIPTPATH || "/solve.py" || TMPPATH || "mapleops.txt" || TMPPATH || "
          mapleops2.txt");
247     ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/solve.py" || TMPPATH || "mapleops.txt" || TMPPATH || "
          mapleops2.txt");
248     read "" || TMPPATH || "mapleops2.txt";
249
250     subsme := Linear(solveme, indets(solveme));
251     print("Made_traceless...");
252     ansatz3 := simplify(expand(subs(subsme, ansatz2)));
253 else
254     ansatz3 := ansatz2;
255 end if;
256
257 ansatz4 := expand(ansatz3);
258 #uncomment to make operator smaller
259 #ansatz4 := diffcollect(expand(ansatz3));
260
261
262 tmp := simplify(expand(dmv(DoDiff(ansatz4, 2*kappa1+L1, 2*kappa2+L2, n, kappa, L, 1, 2, mu))))
      ;
263 if tmp <> 0 then
264     error "Consistency_check_failed!";
265 end if;
266
267 tmp := simplify(expand(dmv(OpPartvPartv(ansatz4, 1, 1)))));
268 if tmp <> 0 then
269     error "Consistency_check_failed!";
270 end if;
271
272 ansatz4;
273 end proc;
274
275 #builds the actual pseudo operator to reduce from representation kappa1, L1 and kappa2, L2 to
      kappa and L for singularities up to degree of n
276 buildpseudoop := proc(kappa1, L1, kappa2, L2, n, kappa, L)
277     local numv, numw1, numw2, numy, tmp, subsme, ansatz2, ansatz3, ansatz4, ansatz5, ansatz6,
          ansatza, ansatzb;
278     #build ansatz
279     numv := L;
280     numw1 := L1;
281     numw2 := L2;
282     numy := 2*kappa + L + 2*n - 2*kappa1 - L1 - 2*kappa2 - L2;
283     print("python" || SCRIPTPATH || "/combinator2.py" || numv || " " || numw1 || " " || numw2 ||
          " " || numy || " " || TMPPATH || "maplecombinate.txt");

```

## A Quellcode

```

284  ssystem("python□ || SCRIPTPATH || "/combinator2.py□" || numv || "□" || numw1 || "□" || numw2
      || "□" || numy || "□" || TMPPATH || "maplecombinat.txt");
285  read "" || TMPPATH || "maplecombinat.txt";
286
287  print("Ansatz□and□factors:");
288  print(used_factors);
289  print(ansatz);
290
291  ansatza := epsilonoeta(ansatz);
292  #print(ansatza);
293  print("Rewritten□epsilon-products...");
294  ansatzb := pacman(ansatza);
295  #print(ansatzb);
296
297  print("Contracted□epsilon...");
298
299  tmp := collect(simplify(expand(dmv(DoDiff(ansatzb, 2*kappa1+L1, 2*kappa2+L2, n, kappa, L, 1,
      2, mu))), used_factors);
300  save tmp, "" || TMPPATH || "mapleops.txt";
301  print("python□ || SCRIPTPATH || "/solve.py□" || TMPPATH || "mapleops.txt□" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
302  ssystem("python□ || SCRIPTPATH || "/solve.py□" || TMPPATH || "mapleops.txt□" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
303  read "" || TMPPATH || "mapleops2.txt";
304
305  subsme := Linear(solveme, indets(solveme));
306
307  ansatz2 := simplify(expand(subs(subsme, ansatzb)));
308  print("Solved□PDE□for□x1□and□x2...");
309
310  tmp := collect(simplify(expand(dmv(OpPartvPartv(ansatz2, 1, 1))), used_factors);
311  if tmp <> 0 then
312    save tmp, "" || TMPPATH || "mapleops.txt";
313    print("python□ || SCRIPTPATH || "/solve.py□" || TMPPATH || "mapleops.txt□" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
314    ssystem("python□ || SCRIPTPATH || "/solve.py□" || TMPPATH || "mapleops.txt□" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
315    read "" || TMPPATH || "mapleops2.txt";
316
317    subsme := Linear(solveme, indets(solveme));
318    print("Made□traceless□in□v1...");
319    ansatz3 := simplify(expand(subs(subsme, ansatz2)));
320  else
321    ansatz3 := ansatz2;
322  end if;
323
324  tmp := collect(simplify(expand(dmv(DoDiff(ansatz3, 2*kappa1+L1, 2*kappa2+L2, n, kappa, L, 4,
      3, mu))), used_factors);
325  if tmp <> 0 then
326    save tmp, "" || TMPPATH || "mapleops.txt";
327    print("python□ || SCRIPTPATH || "/solve.py□" || TMPPATH || "mapleops.txt□" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
328    ssystem("python□ || SCRIPTPATH || "/solve.py□" || TMPPATH || "mapleops.txt□" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
329    read "" || TMPPATH || "mapleops2.txt";
330
331    subsme := Linear(solveme, indets(solveme));
332    print("Solved□PDE□for□x3□and□x4...");
333    ansatz4 := simplify(expand(subs(subsme, ansatz3)));
334  else
335    ansatz4 := ansatz3;
336  end if;
337
338  tmp := collect(simplify(expand(dmv(OpPartvPartv(ansatz4, 2, 2))), used_factors);
339  if tmp <> 0 then
340    save tmp, "" || TMPPATH || "mapleops.txt";
341    print("python□ || SCRIPTPATH || "/solve.py□" || TMPPATH || "mapleops.txt□" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
342    ssystem("python□ || SCRIPTPATH || "/solve.py□" || TMPPATH || "mapleops.txt□" || TMPPATH || "
      mapleops2.txt");
343    read "" || TMPPATH || "mapleops2.txt";
344
345    subsme := Linear(solveme, indets(solveme));

```

```

346     print("Made traceless in v2...");
347     ansatz5 := simplify(expand(subs(subsme, ansatz4)));
348     else
349         ansatz5 := ansatz4;
350     end if;
351
352     #uncomment for shorter
353     ansatz6 := diffcollect(expand(ansatz5));
354     #ansatz6 := expand(ansatz5);
355
356     tmp := simplify(expand(dmv(DoDiff(ansatz6, 2*kappa1+L1, 2*kappa2+L2, n, kappa, L, 1, 2, mu)))
357         ;
358     if tmp <> 0 then
359         error "Consistency check failed!";
360     end if;
361
362     tmp := simplify(expand(dmv(OpPartvPartv(ansatz6, 1, 1))));
363     if tmp <> 0 then
364         error "Consistency check failed!";
365     end if;
366
367     tmp := simplify(expand(dmv(DoDiff(ansatz6, 2*kappa1+L1, 2*kappa2+L2, n, kappa, L, 4, 3, mu)))
368         ;
369     if tmp <> 0 then
370         error "Consistency check failed!";
371     end if;
372
373     tmp := simplify(expand(dmv(OpPartvPartv(ansatz6, 2, 2))));
374     if tmp <> 0 then
375         error "Consistency check failed!";
376     end if;
377
378     ansatz6;
379 end proc;
380
381 translate_op_12 := proc(F, voffset)
382     local tmp;
383     global igel;
384     tmp := F;
385     save tmp, "" || TMPPATH || "mapleoptranslate.txt";
386     ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/optranslate_files.py" || voffset || "_1_2" || TMPPATH
387         || "mapleoptranslate.txt" || TMPPATH || "mapleoptranslated.txt");
388     read "" || TMPPATH || "mapleoptranslated.txt";
389
390     tmp := %;
391
392     return tmp;
393 end proc;
394
395 translate_op_34 := proc(F, voffset)
396     local tmp;
397     global igel;
398     tmp := F;
399     save tmp, "" || TMPPATH || "mapleoptranslate.txt";
400     ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/optranslate_files.py" || voffset || "_4_3" || TMPPATH
401         || "mapleoptranslate.txt" || TMPPATH || "mapleoptranslated.txt");
402     read "" || TMPPATH || "mapleoptranslated.txt";
403
404     tmp := %;
405
406     return tmp;
407 end proc;
408
409 translate_op_56 := proc(F, voffset)
410     local tmp;
411     global igel;
412     tmp := F;
413     save tmp, "" || TMPPATH || "mapleoptranslate.txt";
414     ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/optranslate_files.py" || voffset || "_6_5" || TMPPATH
415         || "mapleoptranslate.txt" || TMPPATH || "mapleoptranslated.txt");
416     read "" || TMPPATH || "mapleoptranslated.txt";
417
418     tmp := %;
419
420     return tmp;
421 end proc;

```

## A Quellcode

```
414 tmp := %;
415
416 return tmp;
417 end proc;
418
419 translate_pseudo_op := proc(F, voffset)
420 local tmp;
421 global igel;
422 tmp := F;
423 save tmp, "" || TMPPATH || "mapleoptranslate.txt";
424 ssystem("python" || SCRIPTPATH || "/optranslate_files.py" || voffset || "_1_2_" || TMPPATH
|| "mapleoptranslate.txt" || TMPPATH || "mapleoptranslated.txt");
425 read "" || TMPPATH || "mapleoptranslated.txt";
426
427 tmp := %;
428
429 return tmp;
430 end proc;
```

## A.3 diffops.mpl

```
1 if not assigned(n) then
2     error "Please set the variable n to the correct value (number of variables x, including
new ones). Thank you.";
3 end if;
4
5 if not assigned(m) then
6     error "Please set the variable m to the correct value (number of polarization vectors,
including new ones). Thank you.";
7 end if;
8
9 #auxiliary functions
10 kdel := (a,b)-> 1-abs(signum(a-b));
11 agb := (a,b)->(signum(a-b)+1)/2 * abs(signum(a-b));
12 alb := (a,b)->(signum(b-a)+1)/2 * abs(signum(a-b));
13
14 #to be called after every application of a diffop below. Brings terms in right order and does
basic simplifications
15 mv := F-> expand(magic(F));
16
17 #diffop w_c y_i
18 PartvParti := (F, c, i) ->
19 add(# c <= d
20 add( # k
21 add( diff(F, vx[k,i,j], vv[c,d]) * vv[k,d], j=i+1..n)
22 - add( diff(F, vx[k,j,i], vv[c,d]) * vv[k,d], j=1..i-1),
23 k=1..m)
24 + 2*add( diff(F, rho[i,j], vv[c,d]) * vx[d,i,j], j=i+1..n)
25 - 2*add( diff(F, rho[j,i], vv[c,d]) * vx[d,j,i], j=1..i-1),
26 d=c..m)
27 +add( # c >= d
28 add( # k
29 add( diff(F, vx[k,i,j], vv[d,c]) * vv[k,d], j=i+1..n)
30 - add( diff(F, vx[k,j,i], vv[d,c]) * vv[k,d], j=1..i-1),
31 k=1..m)
32 + 2*add( diff(F, rho[i,j], vv[d,c]) * vx[d,i,j], j=i+1..n)
33 - 2*add( diff(F, rho[j,i], vv[d,c]) * vx[d,j,i], j=1..i-1),
34 d=1..c)
35 +add( add( #a < b
36 add( # k
37 add( diff(F, vx[k,i,j], vx[c,a,b]) * vx[k,a,b], j=i+1..n)
38 - add( diff(F, vx[k,j,i], vx[c,a,b]) * vx[k,a,b], j=1..i-1),
39 k=1..m)
40 + 2*add( diff(F, rho[i,j], vx[c,a,b]) * 1/2*(rho[a,j] + rho[b,i] - rho[a,i] - rho[b,j]), j=i
+1..n)
41 - 2*add( diff(F, rho[j,i], vx[c,a,b]) * 1/2*(rho[a,i] + rho[b,j] - rho[a,j] - rho[b,i]), j=1..
i-1),
42 b=a+1..n), a=1..n)
43 +4*add( #i < j
44 diff(F, vx[c,i,j]),
```

```

45 j=i+1..n)
46 -4*add( #i > j
47   diff(F, vx[c,j,i]),
48   j=1..i-1);
49
50 #diffop y_a y_i
51 PartiPartj := (F, a, i) ->
52 add( # c
53   add( #a < b
54     add( # k
55       add( diff(F, vx[k,i,j], vx[c,a,b]) * vv[k,c], j=i+1..n)
56       - add( diff(F, vx[k,j,i], vx[c,a,b]) * vv[k,c], j=1..i-1),
57       k=1..m)
58     + 2*add( diff(F, rho[i,j], vx[c,a,b]) * vx[c,i,j], j=i+1..n)
59     - 2*add( diff(F, rho[j,i], vx[c,a,b]) * vx[c,j,i], j=1..i-1),
60     b=a+1..n)
61   - add( #a > b
62     add( # k
63       add( diff(F, vx[k,i,j], vx[c,b,a]) * vv[k,c], j=i+1..n)
64       - add( diff(F, vx[k,j,i], vx[c,b,a]) * vv[k,c], j=1..i-1),
65       k=1..m)
66     + 2*add( diff(F, rho[i,j], vx[c,b,a]) * vx[c,i,j], j=i+1..n)
67     - 2*add( diff(F, rho[j,i], vx[c,b,a]) * vx[c,j,i], j=1..i-1),
68     b=1..a-1),
69   c=1..m)
70 +2*add( #a < b
71   add( # k
72     add( diff(F, vx[k,i,j], rho[a,b]) * vx[k,a,b], j=i+1..n)
73     - add( diff(F, vx[k,j,i], rho[a,b]) * vx[k,a,b], j=1..i-1),
74     k=1..m)
75   + 2*add( diff(F, rho[i,j], rho[a,b]) * 1/2*(rho[a,j] + rho[b,i] - rho[a,i] - rho[b,j]), j=i
76     + 1..n)
77   - 2*add( diff(F, rho[j,i], rho[a,b]) * 1/2*(rho[a,i] + rho[b,j] - rho[a,j] - rho[b,i]), j=1..i
78     - 1),
79   b=a+1..n)
80 -2*add( #a > b
81   add( # k
82     add( diff(F, vx[k,i,j], rho[b,a]) * vx[k,b,a], j=i+1..n)
83     - add( diff(F, vx[k,j,i], rho[b,a]) * vx[k,b,a], j=1..i-1),
84     k=1..m)
85   + 2*add( diff(F, rho[i,j], rho[b,a]) * 1/2*(rho[b,j] + rho[a,i] - rho[b,i] - rho[a,j]), j=i
86     + 1..n)
87   - 2*add( diff(F, rho[j,i], rho[b,a]) * 1/2*(rho[b,i] + rho[a,j] - rho[b,j] - rho[a,i]), j=1..i
88     - 1),
89   b=1..a-1)
90 +kdel(a,i)*8*add( diff(F, rho[i,k]), k=i+1..n) + kdel(a,i)*8*add( diff(F, rho[k,i]), k=1..i-1)
91 -alb(a,i)*8*diff(F, rho[a,i]) - agb(a,i)*8*diff(F, rho[i,a]);
92
93 #diffop v_c y_i
94 vParti := (F, c, i) ->
95 add( # k
96   add( diff(F, vx[k,i,j]) * vv[k,c], j=i+1..n)
97   - add( diff(F, vx[k,j,i]) * vv[k,c], j=1..i-1),
98   k=1..m)
99 + 2*add( diff(F, rho[i,j]) * vx[c,i,j], j=i+1..n)
100 - 2*add( diff(F, rho[j,i]) * vx[c,j,i], j=1..i-1);
101
102 #diffop v_k w_c
103 vPartv := (F, k, c) ->
104 add( diff(F, vv[c,d]) * vv[d,k], d=c..m)
105 + add( diff(F, vv[d,c]) * vv[d,k], d=1..c)
106 + add( add( diff(F, vx[c,a,b]) * vx[k,a,b], b=a+1..n), a=1..n);
107
108 #diffop w_e w_c
109 PartvPartv := (F, e, c) ->
110 add( add( diff(F, vv[c,d], vv[e,f]) * vv[f,d], d=c..m), f=e..m)
111 + add( add( diff(F, vv[c,d], vv[f,e]) * vv[f,d], d=c..m), f=1..e)
112 + add( add( diff(F, vv[c,d], vx[e,a,b]) * vx[d,a,b], d=c..m), b=a+1..n), a=1..n)
113 +4*alb(c,e)*diff(F, vv[c,e]) + 4*agb(c,e)*diff(F, vv[e,c]) + 8*kdel(c,e)*diff(F, vv[c,e])
114 +add( add( diff(F, vv[d,c], vv[e,f]) * vv[f,d], d=1..c), f=e..m)
115 + add( add( diff(F, vv[d,c], vv[f,e]) * vv[f,d], d=1..c), f=1..e)
116 + add( add( diff(F, vv[d,c], vx[e,a,b]) * vx[d,a,b], d=1..c), b=a+1..n), a=1..n)
117 +add( add( add( diff(F, vx[c,a,b], vv[e,f]) * vx[f,a,b], b=a+1..n), a=1..n), f=e..m)

```

## A Quellcode

```

114 +add( add( add( diff(F, vx[c,a,b], vv[f,e]) * vx[f,a,b], b=a+1..n), a=1..n), f=1..e)
115 +add( add( add( add( diff(F, vx[c,a,b], vx[e,g,h]) * 1/2 * (rho[g,b] + rho[a,h] - rho[g,a] - rho
      [h,b]), b=a+1..n), a=1..n), h=g+1..n), g=1..n);
116
117
118 #brings terms in right order
119 magic := proc(F)
120   local tmp, i, j, k, l;
121
122   tmp := F;
123
124   for i from 1 to n do
125     for j from 1 to i-1 do
126       tmp := subs(rho[i,j] = rho[j,i], tmp);
127       for k from 1 to m do
128         tmp := subs(vx[k,i,j] = -vx[k,j,i], tmp);
129       end do;
130     end do;
131   end do;
132
133   for k from 1 to m do
134     for l from 1 to k-1 do
135       tmp := subs(vv[k,l] = vv[l,k], tmp);
136     end do;
137   end do;
138
139   for i from 1 to n do
140     tmp := subs(rho[i,i] = 0, tmp);
141     for k from 1 to m do
142       tmp := subs(vx[k,i,i] = 0, tmp);
143     end do;
144   end do;
145   tmp;
146 end proc;
147
148 #replaces rho and vx by the underlying identities to check for vanishing contributions. Use this
      followed by 'simplify' to check whether an expression is zero.
149 magic2 := proc(F)
150   local tmp, i, j, k;
151
152   tmp := F;
153   for i from 1 to n do
154     for j from i+1 to n do
155       tmp := subs(rho[i,j] = x[i]^2 - 2*xx[i,j] + x[j]^2, tmp);
156       for k from 1 to m do
157         tmp := subs(vx[k,i,j] = vx[k,i]-vx[k,j], tmp);
158       end do;
159     end do;
160   end do;
161
162   tmp;
163 end proc;
164
165 #sets x_a = x_b and calls the result again x_b. To be used in most circumstances after the
      application of a intertwining operator.
166 setequal := proc(F, a, b)
167   local i, k, tmp;
168
169   tmp := F;
170   for i from 1 to a-1 do
171     tmp := subs(rho[i,a] = rho[i,b], tmp);
172     for k from 1 to m do
173       tmp := subs(vx[k,i,a] = vx[k,i,b], tmp);
174     end do;
175   end do;
176
177   for i from a+1 to n do
178     tmp := subs(rho[a,i] = rho[b,i], tmp);
179     for k from 1 to m do
180       tmp := subs(vx[k,a,i] = vx[k,b,i], tmp);
181     end do;
182   end do;
183

```

```

184     magic(tmp);
185 end proc;
186
187 #swaps  $x_a$  and  $x_b$  in the expression  $F$ 
188 swap_indices := proc(F, a, b)
189     local i, j, k, tmp, aprime, bprime, difference, before;
190
191     aprime := a + n;
192     bprime := b + n;
193     tmp := F;
194     for i from 1 to 2*n do
195         tmp := subs(rho[i,a] = rho[i,bprime], tmp);
196         for k from 1 to m do
197             tmp := subs(vx[k,i,a] = vx[k,i,bprime], tmp);
198         end do;
199     end do;
200
201     #print(tmp);
202
203     for i from 1 to 2*n do
204         tmp := subs(rho[a,i] = rho[bprime,i], tmp);
205         for k from 1 to m do
206             tmp := subs(vx[k,a,i] = vx[k,bprime,i], tmp);
207         end do;
208     end do;
209
210     #print(tmp);
211
212     for i from 1 to 2*n do
213         tmp := subs(rho[i,b] = rho[i,aprime], tmp);
214         for k from 1 to m do
215             tmp := subs(vx[k,i,b] = vx[k,i,aprime], tmp);
216         end do;
217     end do;
218
219     #print(tmp);
220
221     for i from 1 to 2*n do
222         tmp := subs(rho[b,i] = rho[aprime,i], tmp);
223         for k from 1 to m do
224             tmp := subs(vx[k,b,i] = vx[k,aprime,i], tmp);
225         end do;
226     end do;
227
228     #print(tmp);
229
230     for i from 1 to 2*n do
231         for j from 1 to 2*n do
232             tmp := subs(vx[a, i, j] = vx[bprime, i, j], tmp);
233             tmp := subs(vx[b, i, j] = vx[aprime, i, j], tmp);
234         end do;
235     end do;
236
237     #print(tmp);
238
239     for i from 1 to 2*m do
240         tmp := subs(vv[i,a] = vv[i,bprime], tmp);
241     end do;
242     for i from 1 to 2*m do
243         tmp := subs(vv[a,i] = vv[bprime,i], tmp);
244     end do;
245     for i from 1 to 2*m do
246         tmp := subs(vv[i,b] = vv[i,aprime], tmp);
247     end do;
248     for i from 1 to 2*m do
249         tmp := subs(vv[b,i] = vv[aprime,i], tmp);
250     end do;
251
252
253     difference :=1;
254     while difference > 0 do
255         before := tmp;
256         for i from 1 to 2*n do

```

## A Quellcode

```

257     tmp := subs(rho[i,aprime] = rho[i,a], tmp);
258     tmp := subs(rho[aprime,i] = rho[a,i], tmp);
259     tmp := subs(rho[i,bprime] = rho[i,b], tmp);
260     tmp := subs(rho[bprime,i] = rho[b,i], tmp);
261     for k from 1 to 2*m do
262         tmp := subs(vx[k,i,aprime] = vx[k,i,a], tmp);
263         tmp := subs(vx[k,aprime,i] = vx[k,a,i], tmp);
264         tmp := subs(vx[k,i,bprime] = vx[k,i,b], tmp);
265         tmp := subs(vx[k,bprime,i] = vx[k,b,i], tmp);
266     end do;
267     for j from 1 to 2*n do
268         tmp := subs(vx[aprime,i,j] = vx[a,i,j], tmp);
269         tmp := subs(vx[bprime,i,j] = vx[b,i,j], tmp);
270     end do;
271 end do;
272 for i from 1 to 2*m do
273     tmp := subs(vv[i,aprime] = vv[i,a], tmp);
274     tmp := subs(vv[aprime,i] = vv[a,i], tmp);
275     tmp := subs(vv[i,bprime] = vv[i,b], tmp);
276     tmp := subs(vv[bprime,i] = vv[b,i], tmp);
277 end do;
278 difference := before - tmp;
279 end do;
280 #print(tmp);
281
282 magic(tmp);
283 end proc;
284
285 #renames index 3 to 2, 4 to 3 and 6 to 4
286 rename := proc (F)
287     local tmp;
288
289     tmp := F;
290     tmp := subs(rho[1, 3] = rho[1, 2], rho[1, 4] = rho[1, 3], rho[1, 6] = rho[1, 4], rho[3, 4] =
291         rho[2, 3], rho[3, 6] = rho[2, 4], rho[4, 6] = rho[3, 4], tmp);
292     tmp := subs(vx[1, 1, 3] = vx[1, 1, 2], vx[1, 1, 4] = vx[1, 1, 3], vx[1, 1, 6] = vx[1, 1, 4],
293         vx[1, 3, 4] = vx[1, 2, 3], vx[1, 3, 6] = vx[1, 2, 4], vx[1, 4, 6] = vx[1, 3, 4], vx[6, 1,
294         3] = vx[4, 1, 2], vx[6, 1, 4] = vx[4, 1, 3], vx[6, 1, 6] = vx[4, 1, 4], vx[6, 3, 4] = vx
295         [4, 2, 3], vx[6, 3, 6] = vx[4, 2, 4], vx[6, 4, 6] = vx[4, 3, 4], vv[1, 6] = vv[1, 4], vv
296         [6,6]=vv[4,4], tmp);
297
298     magic(tmp)
299 end proc;
300
301 #builds a matrix from coefficient factors. Sample: Give me 3*A*AA -7*A*BB - 7*B*AA + 3*B*BB and
302 as factors the list [A, B], and i will give you the matrix ( (3, -7) (-7, 3) )
303 build_matrix := proc(A, factors)
304     local n, res, i, j, da, db, wupps;
305     n := nops(factors);
306     res := Matrix(n, n);
307     for i from 1 to n do:
308         for j from 1 to n do:
309             da := factors[i];
310             db := factors[j];
311             db := ' ' || db || db;
312             wupps := coeff( coeff( A, da), db);
313             print(" " || da, " " || db, wupps);
314             res[i,j] := wupps;
315         end do:
316     end do:
317     res;
318 end proc:

```

# Literaturverzeichnis

- [1] Marcel Bischoff. *Über die Pol-Struktur höherer Korrelationsfunktionen in global konform-invarianter Quantenfeldtheorie*. Universität Göttingen, 2009.
- [2] Francis A. Dolan and Hugh Osborn. Conformal four point functions and the operator product expansion. *Nuclear Physics B*, 599(1):459–496, 2001.
- [3] Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, and David Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer, 1997.
- [4] Gerhard Mack. Convergence of operator product expansions on the vacuum in conformal invariant quantum field theory. *Communications in Mathematical Physics*, 53(2):155–184, 1977.
- [5] Gerhard Mack. All unitary ray representations of the conformal group  $SU(2,2)$  with positive energy. *Communications in Mathematical Physics*, 55(1):1–28, 1977.
- [6] Christoph Neumann, Karl-Henning Rehren, and Lena Wallenhorst. New methods in conformal partial wave analysis. In *Lie Theory and Its Applications in Physics*, pages 109–125. Springer, 2013.
- [7] Nikolay M. Nikolov and Ivan T. Todorov. Rationality of conformally invariant local correlation functions on compactified Minkowski space. *Communications in Mathematical Physics*, 218(2):417–436, 2001.
- [8] Nikolay M. Nikolov, Karl-Henning Rehren, and Ivan T. Todorov. Partial wave expansion and wightman positivity in conformal field theory. *Nuclear Physics B*, 722(3):266–296, 2005.
- [9] Nikolay M. Nikolov, Karl-Henning Rehren, and Ivan T. Todorov. Harmonic bilocal fields generated by globally conformal invariant scalar fields. *Communications in Mathematical Physics*, 279(1):225–250, 2008.

- [10] Dirk Rathlev. *Höhere Korrelationsfunktionen in global-konformer QFT*. Universität Göttingen, 2010.
- [11] Karl-Henning Rehren. Konforme Quantenfeldtheorie. *Lecture Notes*, 1997.
- [12] Karl-Henning Rehren, Nikolay M. Nikolov, and Ivan T. Todorov. Pole structure and biharmonic fields in conformal QFT in four dimensions. *Lie Theory and Its Applications in Physics VII*, 2008.
- [13] Martin Schottenloher. *A mathematical introduction to conformal field theory*. Springer, 2008.
- [14] Raymond F. Streater and Arthur S. Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that*. Princeton University Press, 1964.
- [15] Lena Marie Wallenhorst. *Higher order conformal partial wave analysis in 4-dimensional quantum field theory*. Universität Göttingen, 2012.
- [16] Kenneth G. Wilson. Non-Lagrangian models of current algebra. *Physical Review*, 179(5):1499, 1969.

# Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mich in der Entstehung der Bachelorarbeit unterstützt haben.

An erster Stelle gebührt mein Dank Prof. Rehren, der mir die Möglichkeit gegeben hat, dieses Gebiet der Quantenfeldtheorie kennenzulernen. Stets beantwortete er geduldig aufkommende Fragen und gab hilfreiche und konstruktive Vorschläge. Darüber hinaus möchte ich Prof. Covi danken, die das Zweitgutachten dieser Arbeit übernommen hat.

Ein ganz spezieller Dank geht an Nikolai, der mich bei allen computer- und programmiertechnischen Dingen unterstützt sowie meine Arbeit Korrektur gelesen hat. Außerdem danke ich Elias, Hannes, Ludwig und Thomas für die anregenden Gespräche in der Entstehungszeit dieser Arbeit in unserem gemeinsamen Büro.

**Erklärung** nach §13(8) der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.

Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nichtbestanden Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 5. August 2013

(Christopher Eckner)