

Teil I

Newtonsche Mechanik

Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung von Körpern im Raum. Aufbauend auf „vorwissenschaftlicher Erfahrung“ über Raum, Zeit, die Existenz von „starren“ Körpern und deren Unveränderlichkeit bei Bewegungen, etc. gelang es Newton, gestützt auf experimentelle Erfahrung, eine mathematische Formulierung für die Bewegung von Körpern im Raum zu geben. Als Idealisierung wird von der Ausdehnung und Form der Körper abgesehen. Sie werden als sogenannte „Massenpunkte“ beschrieben. In der Newtonschen Theorie spielen die Begriffe „**Masse**“ und „**Kraft**“ eine wichtige Rolle. Bei der Definition dieser Begriffe läuft man allerdings leicht Gefahr, in Zirkelschlüsse zu geraten und es existiert eine endlose Fülle von Literatur zu diesem Thema (siehe z.B. L. Eisenbud, Am. Journ. of Physics **26**, 144 (1958).)

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels geben wir eine Zusammenfassung der experimentellen Fakten, die der Newtonschen Theorie zu Grunde liegen. Alle diese experimentellen „Fakten“ sind, wie wir heute wissen, nur näherungsweise wahr, d.h. die Newtonsche Theorie hat nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich: „Atomare“ Phänomene z.B. müssen im Rahmen der Quantenmechanik beschrieben werden und für Teilchengeschwindigkeiten von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit muß die Newtonsche Mechanik durch die „relativistische“ Mechanik ersetzt werden. Im Rahmen dieser Vorlesung wird die relativistische Theorie nicht behandelt, da sich dies im Rahmen der Elektrodynamikvorlesung besonders anbietet. Wir werden im folgenden nicht immer wieder auf diese Beschränkung des Gültigkeitsbereiches der Newtonschen Mechanik hinweisen, sondern so tun, als ob die Newtonsche Theorie die physikalischen Phänomene exakt beschreibt.

1 Experimentelle Tatsachen

1.1 Raum und Zeit (“Prä-Einstein”)

Unser Raum ist *dreidimensional* und *euklidisch*. Die Bewegung der Massenpunkte findet im dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 statt, in dem jeder Punkt durch seine drei Koordinaten bezüglich eines orthogonalen Bezugssystems $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ charakterisiert werden kann. Die Zeit ist *eindimensional*. Die Zeit, gemessen mit Uhren, ist „absolut“, d.h. es ist im Prinzip möglich, jeden Punkt im Raum mit einer Uhr auszustatten und diese Uhren zu synchronisieren (durch unendlich schnelle Signalausbreitung oder mit Hilfe absolut starrer Stangen). Diese absolute Zeit ist unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters.

1.2 Gallileisches Relativitätsprinzip

Es existieren Koordinatensysteme, sogenannte „**Inertialsysteme**“, die folgende zwei Eigenschaften haben:

1. Alle Naturgesetze sind zu allen Zeiten in allen Inertialsystemen gleich.
2. Alle Koordinatensysteme, die sich geradlinig und gleichförmig gegenüber einem Inertialsystem bewegen, sind selbst Inertialsysteme.

Nimmt man also an, dass ein auf der Erde fixiertes Koordinatensystem „inertial“ ist, so kann ein Experimentator, der sich im Inneren eines Zuges bewegt, der mit konstanter Geschwindigkeit auf gerader Strecke fährt, diese Bewegung nicht feststellen. Das erdfeste Koordinatensystem ist aber nur näherungsweise inertial. Koordinatensysteme, die mit der Sonne, den Fixsternen, der Milchstraße etc. verbunden sind, kommen der Idealisierung des Inertialsystems näher.

1.3 Das Newtonsche Prinzip der „Bestimmtheit“

Als „**Anfangspunkt**“ eines Systems von Massenpunkten bezeichnen wir die Werte sämtlicher **Teilchenorte** und **Teilchengeschwindigkeiten** zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dann lautet das Newtonsche Prinzip:

Der Anfangspunkt eines mechanischen Systems bestimmt die Bewegung des Systems eindeutig.

Man könnte sich eine Welt vorstellen, in der auch noch die Beschleunigungen der Teilchen zum bestimmten Zeitpunkt nötig sind, um die Bewegung zu bestimmen. Die Erfahrung zeigt aber, dass unsere Welt *nicht* von dieser Art ist.

Der Ort des i -ten Teilchens zur Zeit t_0 wird durch den Ortsvektor $\vec{r}_i(t_0) = x_{i,1}(t_0)\vec{e}_1 + x_{i,2}(t_0)\vec{e}_2 + x_{i,3}(t_0)\vec{e}_3$ beschrieben. Die Teilchengeschwindigkeit $\vec{v}_i(t_0)$ ist durch die Zeitableitung des Ortsvektors definiert

$$\vec{v}_i(t_0) := \dot{\vec{r}}_i(t_0) == \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_i(t_0 + \Delta t) - \vec{r}_i(t_0)}{\Delta t}$$

und die zweite Ableitung des Ortsvektors wird als Beschleunigung $\vec{a}_i(t_0)$ bezeichnet

$$\vec{a}_i(t_0) := \dot{\vec{v}}_i(t_0) = \ddot{\vec{r}}_i(t_0) .$$

Für ein System von N Punktteilchen folgen aus dem Newtonschen Prinzip die **Newtonschen Gleichungen**: Da der Anfangspunkt die Bewegung eindeutig bestimmt, bestimmt er im speziellen auch die Beschleunigungen zum Anfangszeitpunkt t_0 . Es existieren also Funktionen \vec{F}_i , so dass für $i = 1, \dots, N$ gilt

$$\ddot{\vec{r}}_i(t_0) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t_0), \dots, \vec{r}_N(t_0); \dot{\vec{r}}_1(t_0), \dots, \dot{\vec{r}}_N(t_0); t_0) .$$

Für jedes spezifische System sind die Funktionen \vec{F}_i **experimentell** bestimmt. Da obige Aussage für beliebige Zeiten gilt, erhält man nach der Ersetzung $t_0 \rightarrow t$ ein System von Differentialgleichungen, das (fast, s.u.) die Form der Newtonschen Gleichungen hat. Vom rein mathematischen Standpunkt *definiert* die Vorgabe eines Satzes von \vec{F}_i ein mechanisches System. Über die Existenz- und Eindeigkeitsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmen die \vec{F}_i zusammen mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}_i(t_0)$ und $\dot{\vec{r}}_i(t_0)$ ($i = 1, \dots, N$) die Bewegung eindeutig, sofern die \vec{F}_i hinreichend „glatt“ sind. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, (was aber im Lauf der Vorlesung kaum auftritt), so ist die Bewegung nur für ein endliches Zeitintervall bestimmt.

1.4 Beispiele mechanischer Systeme

Wir betrachten im folgenden einige einfache Beispiele und beginnen mit dem einfachsten Fall, nämlich der Bewegung *eines* Massenpunktes.

1.4.1 Der fallende Stein, Fall aus großer Höhe

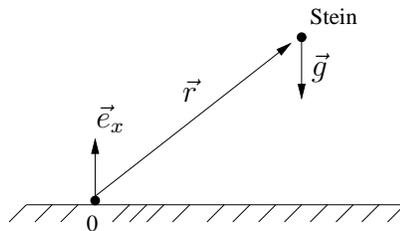
a) Der fallende Stein:

Experimente zeigen, dass bis zum Aufschlag des Steins

$$\ddot{x} = -g ; g \approx 9.8m/s^2$$

gilt, wobei x die Höhe des Steines über dem Erdboden ist. Vernachlässigt man die Ausdehnung des Steins, so ist die Bedeutung von x klar (wir kommen auf diese Annahme in Kap. 1.2. zurück). Unter Einführung der „potentiellen Energie“ — später definieren wir die potentielle Energie mit einem zusätzlichen Massenfaktor — $\tilde{V}(x) := gx$ lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{d\tilde{V}}{dx} .$$



Für die Bewegung parallel zur Erdoberfläche gilt $\ddot{y} = 0$; $\ddot{z} = 0$. Zusammengefaßt in Vektorschreibweise also mit $\vec{g} = -g\vec{e}_x$ (zeigt in Richtung Erde) und $\tilde{V}(\vec{r}) = -\vec{g} \cdot \vec{r}$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \vec{r}} ;$$

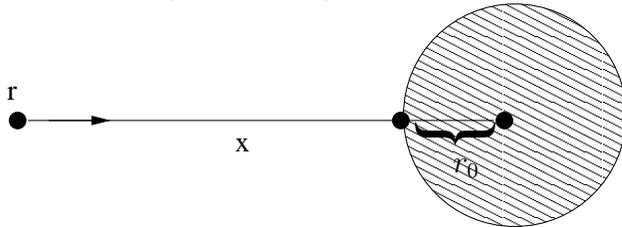
Dabei steht $\partial\tilde{V}/\partial\vec{r}$ für den *Gradienten* des „Potentials“ $\tilde{V}(\vec{r})$ (alternativ schreiben wir auch $\vec{\nabla}\tilde{V}(\vec{r})$) und \vec{e}_x ist der Einheitsvektor senkrecht zur Erdoberfläche. Experimentell gelten diese Gleichungen nur beim Fall aus „geringer“ Höhe. Außerdem gelten die diskutierten Resultate nur, wenn man die Erdrotation vernachlässigt, d.h. das erdfeste Laborsystem als Inertialsystem ansieht.

b) Fall aus großer Höhe:

Der Fall aus großer Höhe wird durch das von Newton entdeckte $1/r^2$ -Gesetz beschrieben:

$$\ddot{x} = -g \cdot \frac{r_0^2}{r^2},$$

wobei $r = r_0 + x$ und r_0 der Erdradius ist.



Unter Einführung der „potentiellen Energie“

$$\tilde{V}(\vec{r}) = -\frac{k}{r}; \quad k = gr_0^2$$

lautet die Bewegungsgleichung, wenn man mit \vec{r} den vom Erdmittelpunkt ausgehenden Ortsvektor bezeichnet ($|\vec{r}| = r$), wiederum

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\vec{r}}.$$

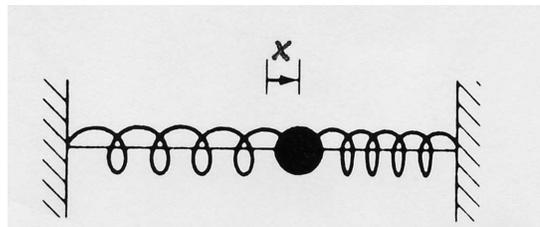
Diese Bewegungsgleichung wird später ausführlich diskutiert werden.

1.4.2 Hookesches Gesetz: Masse, Kraft

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung unter Einwirkung einer Feder:

Experimente zeigen, dass für kleine Auslenkungen des Teilchens gilt

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x = -\frac{d\tilde{V}}{dx}; \quad \tilde{V} = \frac{1}{2}\alpha^2 x^2.$$



Dieses Resultat heißt **Hooksches Gesetz**.

Ersetzt man den „Massenpunkt“ durch **zwei** Massenpunkte derselben Sorte, so findet man experimentell, dass die *Beschleunigung* bei gleicher Auslenkung **halb** so groß ist, wie bei einem Massenpunkt. Allgemein findet man experimentell, dass für irgend zwei Teilchen 1 und 2 das Verhältnis der Beschleunigungen $\ddot{x}_{(1)}/\ddot{x}_{(2)}$ bei gleichen (kleinen) Auslenkungen einen festen Wert hat, der nicht vom Wert der Auslenkung oder der speziellen Bauart der Feder abhängt. Dieses Verhältnis ist nur durch die beiden Teilchen selbst bestimmt. Das Inverse dieser Größe bezeichnet man als das „**Massenverhältnis**“

$$\frac{m_2}{m_1} := \frac{\ddot{x}_{(1)}}{\ddot{x}_{(2)}}.$$

Als Masseneinheit legt man die Masse eines speziellen Körpers fest, z.B. die von einem Liter Wasser. Die Erfahrung zeigt, dass alle Massen *positiv* sind. Zurück zur Feder sieht man, dass mit dieser Definition der Masse das Produkt Masse \times Beschleunigung $m\ddot{x}$ nicht vom Teilchen, sondern nur von der Auslenkung der Feder abhängt. Den Wert dieser Größe bezeichnet man als die **Kraft** f , die durch die Feder auf das Teilchen wirkt:

$$m\ddot{x} = f ; f = -cx ; c = m\alpha^2.$$

Nach Einführung des Massenbegriffes erhält man die **Newtonschen Gleichungen** für ein System von N Punktmassen m_1, \dots, m_N in der üblichen Form

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{f}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t)$$

schreiben, wobei $\vec{f}_i = m_i \vec{F}_i$ allgemein als die **Kraft auf das i -te Teilchen** bezeichnet wird. Nach Einführung der **Teilchenimpulse** \vec{p}_i erhält man

$$\vec{p}_i(t) := m_i \vec{v}_i(t) = m_i \dot{\vec{r}}_i(t).$$

$$\boxed{\dot{\vec{p}}_i = \vec{f}_i}$$

Newtons „lex secunda“

Auch für den manchmal auftretenden „phänomenologischen“ Fall zeitabhängiger Masse, läßt sich das lex secunda immer in der Form $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ schreiben, da \vec{f} höchstens erste Ableitungen des Ortes enthält und sowieso nur „experimentell“ bestimmbar ist. Eine neue physikalische Aussage steckt *nicht* dahinter.

Beschreibt man die Bewegung der Teilchen in einem *Inertialsystem*, so findet man häufig den Fall, dass die Kraft auf das i -te Teilchen als Summe von „**Paarkräften**“ geschrieben werden kann

$$\vec{f}_i = \sum_{(j \neq i)}^N \vec{f}_{ij}$$

und die \vec{f}_{ij} folgende Eigenschaften haben:



Die Kräfte zeigen in Richtung der Verbindungslinie der Punkte und es gilt $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, was als Prinzip von **actio = reactio** bezeichnet wird, und der *Betrag* von \vec{f}_{ij} ist eine Funktion von $r_{ij} := |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Das ist Newtons „**lex tertia**“. Ein Beispiel für Kräfte dieser Art sind die Gravitationskräfte. Zusammengefaßt gilt also

$$\vec{f}_{ij} = f_{ij}(r_{ij})\vec{e}_{ij} ; f_{ij}(r) = f_{ji}(r) ,$$

wobei \vec{e}_{ij} der Einheitsvektor ist, der vom Punkt i zum Punkt j zeigt. Sind alle Kräfte, die auf die Teilchen des Systems wirken, von dieser Form, so nennt man das System auch **abgeschlossen**.

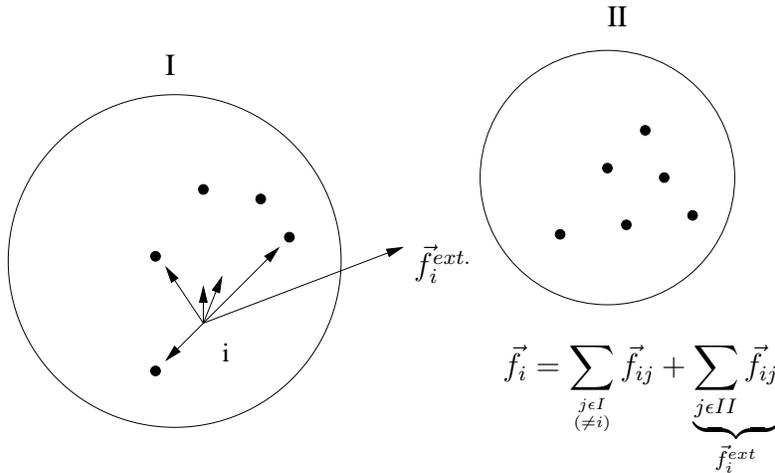
In der Diskussion der Erhaltungssätze in Kapitel 1.2 werden wir argumentieren, dass das Konzept der Massenpunkte zur Beschreibung ausgedehnter Objekte (wie dem geworfenen Stein) ohne Gültigkeit von “actio=reactio” vermutlich nicht entstanden wäre.

Ist das System nicht abgeschlossen, so kann man die \vec{f}_i häufig in der Form

$$\vec{f}_i = \sum_{j(\neq i)} \vec{f}_{ij} + \vec{f}_i^{ext.}$$

schreiben, wobei $\vec{f}_i^{ext.}$ die „äußeren“ (oder externen) Kräfte sind. Eine solche Zerlegung ergibt sich zum Beispiel, wenn man ein abgeschlossenes System in zwei Teilsysteme zerlegt und nur ein Teilsystem explizit betrachtet. Ein einfaches Beispiel ist das Zweiteilchensystem “Stein und Erde”. Die Rückwirkung der Bewegung des Steins auf die Bewegung der Erde kann vernachlässigt werden und in unserer Beschreibung von S.3 haben wir das Problem gleich als Einteilchensystem ”Stein” im Schwerfeld ($\vec{f}^{ext.} = \vec{g}$) behandelt. Um das Problem des Aufschlags des Steins im Detail zu beschreiben, müsste man das “Vielteilchensystem” der Atome des Steines und der Erdoberfläche untersuchen. Man versucht aber meist eine sehr vereinfachte Beschreibung des Problems des Aufschlags durch sogenannte “**Zwangskräfte**”, die wir in späteren Kapiteln behandeln werden.

Auch für allgemeinere abgeschlossene Vielteilchensysteme macht man häufig die Aufteilung in zwei Teilsysteme I und II:



Für den Spezialfall, dass das System I nur aus *einem* Teilchen besteht, gilt dann wie im Beispiel des Steins

$$\vec{f}_i = \vec{f}_i^{ext.} .$$

Der Betrag der Paarkräfte nimmt im allgemeinen (eine Ausnahme stellen z.B. Federkräfte dar) mit *dem Abstand der Teilchen ab*. Ist im betrachteten Spezialfall das System II sehr weit von dem einen Teilchen (System I) entfernt, so kann man $\vec{f}_i^{ext.}$ vernachlässigen und erhält:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \implies \vec{r}_i(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t .$$

d.h. das Teilchen bewegt sich geradlinig und gleichförmig. Das ist Newtons “**lex prima**“: „Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.“

Der oben erwähnte Abfall der Paarkräfte mit dem Abstand der Teilchen spielt für die Physik eine extrem wichtige Rolle, — sie wird dadurch eigentlich erst möglich —. Ohne diesen Abfall müßte man ja immer das Universum als Ganzes behandeln. Wegen des Abfalls kann man auch „Teilsysteme“ in sehr guter Näherung als *abgeschlossen* betrachten.

Man versucht in der Beschreibung solcher Teilsysteme häufig nicht alle Freiheitsgrade explizit zu berücksichtigen. Ein geworfener Stein stößt bei seiner Bewegung mit Luftmolekülen. Zur Beschreibung der daraus resultierenden Abbremsung der Bewegung ist es zum Glück nicht nötig, auch die Koordinaten und Geschwindigkeiten aller Moleküle zu verfolgen. In guter Näherung ist es möglich, den Effekt der Stöße durch eine „**Reibungskraft**“ zu beschreiben, die von der Geschwindigkeit des Steins abhängt. Bei nicht zu großen Geschwindigkeiten ist sie direkt

proportional zu \vec{v}

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}^{ext.} - \underbrace{\gamma\dot{\vec{x}}}_{\text{Reibungskraft}} ,$$

wobei $\gamma > 0$ der *Reibungskoeffizient* ist, der unter anderem von der Dichte der Luft abhängt. Will man auch „allgemeinere Einwirkungen“ auf ein Teilchen (z.B. Feder in der Pendeluhr) durch eine *effektive Kraft* auf das Teilchen beschreiben, so betrachtet man (z.B. im eindimensionalen Fall) allgemeiner

$$m\ddot{x} + \gamma(x, \dot{x})\dot{x} = f(x, t) .$$

Ein Standardbeispiel ist der „*Van der Pol*“-Oszillator ($\eta > 0$)

$$\ddot{x} + \eta(x^2 - a^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 ,$$

bei dem die „Reibungskraft“ für $x^2 > a^2$ der Bewegung entgegenwirkt, für $x^2 < a^2$ die Auslenkung aber verstärkt. Dies führt, wie später diskutiert, für große Zeiten zu periodischem „*Grenzzzyklusverhalten*“.

Systeme, in denen durch eine verkürzte Wahl der explizit betrachteten Freiheitsgrade Reibungskräfte auftreten, bezeichnet man als „**dissipative Systeme**“, im Gegensatz zu „**konservativen Systemen**“ (siehe 2.1.3), die zu Beginn der Vorlesung hauptsächlich betrachtet werden. In den aktuellen Forschungen zum „*Chaos in dynamischen Systemen*“ spielen beide Arten von Systemen eine wichtige Rolle. Wir kommen im Verlauf der Vorlesung wiederholt auf die Betrachtung dissipativer Systeme zurück.

Im nächsten Kapitel werden Eigenschaften der Newtonschen Gleichungen und deren Anwendung auf einfache Systeme untersucht.

2 Die Newtonschen Bewegungsgleichungen (NG)

2.1 Erhaltungssätze für abgeschlossene Systeme

Wir betrachten in diesem Kapitel ein System von N Massenpunkten m_1, \dots, m_N , wobei die m_i (wie in Zukunft immer, falls nicht ausdrücklich davon abgewichen wird) *zeitunabhängig* sind, für das die NG die im ersten Abschnitt diskutierte Form haben ($\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$)

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j(\neq i)} \vec{f}_{ij} + \vec{f}_i^{ext.} \quad (i = 1, \dots, N) .$$

Hier und im folgenden laufen die Summen, wenn nicht anders angegeben, von 1 bis N .

2.1.1 Schwerpunktsbewegung - Gesamtimpuls

Wir definieren den Schwerpunkt des Systems. Sein Ortsvektor \vec{R} ist definiert durch

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i ; \quad M := \sum_i m_i .$$

Dabei ist M die *Gesamtmasse* des Systems. Durch Addition der NG für die einzelnen Teilchen erhält man

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \sum_{j(\neq i)} \vec{f}_{ij} + \sum_i \vec{f}_i^{ext.} .$$

Wegen $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ verschwindet die Doppelsumme und man erhält

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{f}_i^{ext.} =: \vec{F}^{ext.} .$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir den geworfenen Stein, den wir uns aus N Massenpunkten (Atomen) zusammengesetzt denken. Auf alle Atome wirkt die Schwerkraft $\vec{f}_i^{ext.} = m_i \vec{g}$. Das liefert die externe Gesamtkraft $\vec{F}^{ext.} = \sum_i m_i \vec{g} = M \vec{g}$, d.h. die Gleichung für den Schwerpunkt $\vec{R}(t)$ lautet $\ddot{\vec{R}} = \vec{g}$, wie bei der Diskussion auf S.3. Berücksichtigt man jetzt die Ausdehnung des Steins, so hat x auf S.3 die Bedeutung der x -Koordinate des *Schwerpunkts*. Wie man sieht, ergibt sich die "Massenpunktbeschreibung" unter Verwendung von "actio=reactio".

Für den Fall, dass die externen Kräfte vom Ort abhängen, d.h. $\vec{f}_i^{ext.} = \vec{f}_i^{ext.}(\vec{r}_i)$, erhält man nur dann eine "geschlossene" Gleichung für \vec{R} , wenn die Variation

dieser Kraft über die Ausdehnung des Objekts (z.B. Raumschiff) vernachlässigbar ist. Dann gilt mit $\vec{f}_i^{ext.}(\vec{r}_i) \approx \vec{f}_i^{ext.}(\vec{R})$ in guter Näherung die Differentialgleichung

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext.}(\vec{R})$$

für den Schwerpunktsvektor alleine.

Ist das System **abgeschlossen**, d.h. für alle i zu allen Zeiten $\vec{f}_i^{ext.} = 0$, d.h. $\vec{F}^{ext.} \equiv 0$, so gilt

$$M\ddot{\vec{R}} = 0, \quad \text{abgeschlossenes System}$$

d.h. der Schwerpunkt bewegt sich *geradlinig und gleichförmig*: $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 \cdot t$.
Definiert man den **Gesamtimpuls** \vec{P}

$$\vec{P} := \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i,$$

so lautet die Bewegungsgleichung $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext.}$ und **für abgeschlossene Systeme ist \vec{P} eine Erhaltungsgröße**

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = M\vec{V}_0.$$

2.1.2 Der Gesamtdrehimpuls

Neben dem (linearen) Impuls der Teilchen, spielt der **Drehimpuls** in der Mechanik eine wichtige Rolle. Der Drehimpuls \vec{l}_i des i -ten Teilchens (in Bezug auf unser Koordinatensystem $((0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$) ist definiert als

$$\vec{l}_i := m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (i = 1, \dots, N),$$

wobei \times das *Vektorprodukt* der (dreidimensionalen) Orts- und Impulsvektoren kennzeichnet. Als **Gesamtdrehimpuls** \vec{L} definiert man

$$\vec{L} := \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i.$$

Dann ergibt die Zeitableitung (Produktregel)

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i.$$

Der erste Term verschwindet, da das Vektorprodukt aus parallelen Vektoren verschwindet, und im zweiten Term verwenden wir die NG. Dann ergibt sich

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{f}_i^{ext.} + \sum_{j(\neq i)} \vec{f}_{ij}) .$$

Der zweite Term kann durch Umbenennung der Summationsindizes umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0 , \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile wieder $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, sowie die Annahme verwendet haben, dass \vec{f}_{ij} parallel zu $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ist. Also lautet die Bewegungsgleichung für den Gesamtdrehimpuls

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{ext.} =: \sum_i \vec{n}_i^{ext.} =: \vec{N}$$

Die $\vec{n}_i^{ext.}$ bezeichnet man als die von den äußeren Kräften hervorgerufenen **Drehmomente**.

Für das Beispiel unseres Steins gilt $\vec{f}_i^{ext.} = m_i \vec{g}$. Das liefert

$$\dot{\vec{L}}(t) = M \vec{R}(t) \times \vec{g} .$$

Nach Berechnung von $\vec{R}(t)$ erhält man $\vec{L}(t)$ durch einfache Integration. Wir werden diese Gleichung später bei der Diskussion der *Kreiselbewegung* wieder benutzen. Auf Grund der Zwangskräfte ist dort $\vec{R}(t)$ *nicht* bereits vorgegeben.

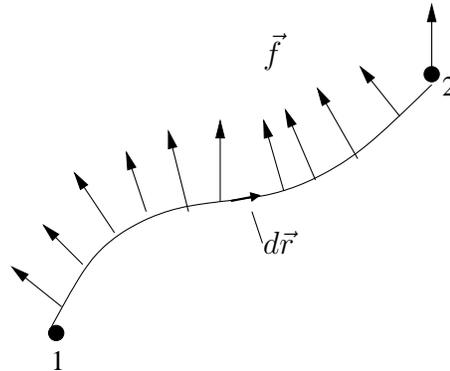
Für abgeschlossene Systeme ist der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße

$$\dot{\vec{L}} = 0 \implies \vec{L}(t) = \vec{L}_0 = \text{const.}$$

2.1.3 Arbeit - konservative Kräfte - Gesamtenergie

Zur Definition der **an einem Teilchen geleisteten Arbeit** betrachten wir zuerst die „Bewegung“ eines Teilchens in einem *statischen* Kraftfeld $\vec{f}(\vec{r})$. Diese „Bewegung“ oder Verschiebung des Teilchens wird zunächst unabhängig von einem wirklichen „dynamischen“ Durchlaufen der Bahn betrachtet.

Das Kraftfeld sei in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet definiert. Die „Bewegung“ erfolge längs einer (hinreichend glatten) Kurve $\gamma_{1 \rightarrow 2}$ von Punkt 1 zum Punkt 2



In Verallgemeinerung der in einem homogenen Feld geleisteten Arbeit (Kraft*Weg) definiert man die am Teilchen geleistete Arbeit $A_{1 \rightarrow 2}$

$$A_{\gamma_{1 \rightarrow 2}} := \int_{\gamma_{1 \rightarrow 2}} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

als Linienintegral über die Kurve. Ein wichtige Rolle spielen „konservative Kraftfelder“:

Definition:

Ein Kraftfeld $\vec{f}(\vec{r})$ heißt **konservativ**, falls es sich als **Gradient einer skalaren Funktion** $-V(\vec{r})$ („Potential“ oder „potentielle Energie“) schreiben lässt

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) .$$

Es gilt der **Satz:**

Ein Kraftfeld $\vec{f}(\vec{r})$ ist dann und nur dann konservativ, wenn die längs beliebiger Kurven γ geleistete Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve, nicht aber deren Form abhängt.

Beweis:

a) Die Arbeit $A_{P_0 \rightarrow P}$ hänge nicht vom Weg ab. Dann definiert man (P entspricht \vec{r})

$$V(P) := - \int_{P_0}^P \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(P)}{\partial x_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(P + h\vec{e}_i) - V(P)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f_i(P + s \cdot h\vec{e}_i) ds = -f_i(P)\end{aligned}$$

wie behauptet. Als Kurve zwischen P und $P + \vec{e}_i \cdot h$ haben wir dabei die Verbindungsgerade benützt.

b) \vec{f} sei konservativ und V das zugehörige Potential. Dann gilt

$$\int_{P_0}^P \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_{P_0}^P \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} = - \int_{P_0}^P dV = -V(P) + V(P_0) .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Zur praktischen Überprüfung, ob ein vorgegebenes Kraftfeld konservativ ist, kann man seine **Rotation** $rot \vec{f} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{f}$ betrachten

$$\left(\nabla \times \vec{f} \right)_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2},$$

und zyklisch. Für konservative Kraftfelder gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = 0 ,$$

wegen der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen, d.h.

$$rot \vec{f} = 0 .$$

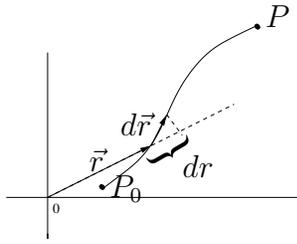
Gilt andererseits $rot \vec{f} = 0$, so kann man den **Stokesschen Satz** (wiederum für einfach zusammenhängende Gebiete) verwenden, der das Wegintegral längs eines geschlossenen Weges C durch das Flächenintegral der Normalkomponente der Rotation über eine vom Weg eingeschlossene Fläche S ausdrückt

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int \int_S rot \vec{f} \cdot \vec{n} df .$$

Das geschlossene Wegintegral auf der linken Seite verschwindet, wenn $rot \vec{f}$ überall verschwindet. Daher hängt das Wegintegral vom Punkt 1 zum Punkt 2 nicht vom Weg ab. Mit unserem ersten ‘‘Satz’’ folgt also in einfach zusammenhängenden Gebieten:

Ein Kraftfeld ist dann und nur dann konservativ, wenn $rot \vec{f} \equiv 0$ gilt.

Beispiel: Alle **„Zentralfelder“**, d.h. Felder der Form $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$, mit $r := |\vec{r}|$ und $\vec{e}_r := \vec{r}/r$ sind konservativ:



$$\int_{P_0}^P \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{r_0(P_0)}^{r(P)} f(r') dr'$$

unabhängig vom Weg, d.h. $V(\vec{r}) = -\int_{r_0}^r f(r') dr'$ ist nur eine Funktion von $r = |\vec{r}|$.
 Probe:

$$-\frac{\partial V(r)}{\partial \vec{r}} = f(r) \frac{\partial r}{\partial \vec{r}} = f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r}$$

Alternativ zeigt man, dass $\text{rot}(f(r)\vec{e}_r) = 0$ gilt (Ü.).

Zentralfelder werden in einem späteren Abschnitt dieses Kapitels ausführlich untersucht. Als Ergänzung zum Abschnitt β) bemerken wir noch, dass der *Gesamtdrehimpuls* ebenfalls noch *erhalten bleibt*, falls die *äußeren Kräfte Zentralfelder* sind.

Wir betrachten wieder den allgemeinen Fall eines beliebigen statischen Feldes $\vec{f}(\vec{r})$. Wir untersuchen aber jetzt den Fall, dass γ die **wirkliche Trajektorie** $\vec{r}(t)$ eines Teilchens in diesem Kraftfeld ist. Dann gilt, wenn wir die Trajektorie durch die Zeit parametrisieren ($\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1), \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$)

$$\begin{aligned} A_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} dt = \frac{m}{2} \vec{v}^2(t_2) - \frac{m}{2} \vec{v}^2(t_1) =: T_2 - T_1 . \end{aligned}$$

Dabei haben wir die NG für das Teilchen benutzt und die **kinetische Energie** $T(\vec{v})$ definiert

$$T(\vec{v}) := \frac{m}{2} \vec{v}^2 .$$

Ist das Kraftfeld **konservativ**, so gilt andererseits

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} = -(V_2 - V_1) ,$$

und die Kombination beider Resultate liefert die **Energieerhaltung**

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 =: E = \text{const.}$$

Alternativ erhält man dieses Ergebnis auch direkt aus den NG durch skalare Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}$. Den allgemeinen Fall des N -Teilchensystems (siehe Seite 8) wollen wir deshalb auf diese Weise behandeln:

$$m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j(\neq i)} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{f}_{ij} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{f}_i^{ext.}$$

Summation über alle Teilchen liefert $\left(\sum_{i \neq j} \hat{=} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) &= \sum_{i \neq j} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{f}_{ij} + \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{f}_i^{ext.} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot \vec{f}_{ij} + \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{f}_i^{ext.} . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\vec{f}_{ij} = f_{ij}(r_{ij}) \vec{e}_{ij}$ und damit analog zu einer Zentralkraft aus einem „**Zweiteilchen-Potential**“ $v_{ij}(r_{ij})$ ableitbar ($\vec{r}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j$)

$$\vec{f}_{ij} = -\frac{\partial v_{ij}}{\partial \vec{r}_{ij}} = -\frac{\partial v_{ij}}{\partial r_{ij}} ; \quad v_{ij}(r_{ij}) = -\int_{r_0}^{r_{ij}} f_{ij}(r') dr' .$$

Sind außerdem noch die *äußeren Kräfte konservativ*, d.h.

$$\vec{f}_i^{ext.} = -\frac{\partial V_i^{ext.}}{\partial \vec{r}_i} ,$$

wobei $V_i^{ext.}(\vec{r}_i)$ nicht *explizit* von der Zeit abhängt, so lautet obige Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij}(r_{ij}) + \sum_i V_i^{ext.}(\vec{r}_i) \right)$$

d.h.

$$\sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij}(r_{ij}) + \sum_i V_i^{ext.}(\vec{r}_i) =: E = \text{const.}$$

Das ist die allgemeine Form der **Energieerhaltung** für das betrachtete *konservative* N -Teilchen System.

Die „tiefere Ursache“ der in diesem Abschnitt abgeleiteten Erhaltungssätze wird in einem späteren Kapitel diskutiert. Die Erhaltungssätze spielen bei der Lösung vieler Probleme eine wichtige Rolle. Wir untersuchen als nächstes das Problem *eines* Teilchens in einem *konservativen* Kraftfeld. Dabei zeigt sich schnell, wie begrenzt die Zahl der geschlossen lösbaren („integrierbaren“ (siehe später)) Probleme ist.

3 Eindimensionale Bewegung eines Teilchens

3.1 zeitunabhängige Kräfte

Durch spezielle Anfangsbedingungen oder Zwangskräfte (siehe spätere Kapitel) kann man mechanische Systeme erhalten, die auf die Mechanik einer „eindimensionalen Welt“ führen. Es ist daher physikalisch sinnvoll, **eindimensionale** (ebenso wie zweidimensionale) mechanische Systeme zu betrachten. Dann lautet die NG für ein Teilchen in einem *statischen* Kraftfeld

$$m\ddot{x} = f(x).$$

3.1.1 finite und infinite Bewegung, Phasenraum

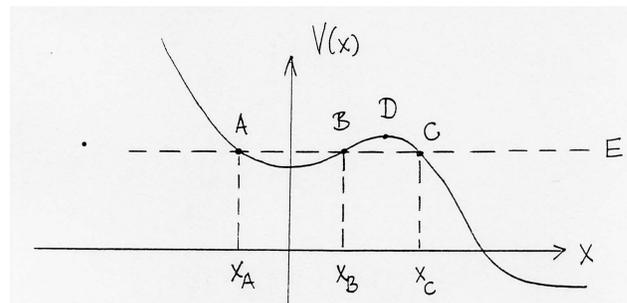
Eine Besonderheit des 1d-Falles ist die Tatsache, dass sich zu *jeder* integrierbaren Kraft $f(x)$ ein Potential $V(x)$ angeben lässt

$$V(x) = - \int_{x_0}^x f(x') dx',$$

das bis auf eine willkürliche Konstante festgelegt ist. Die Energieerhaltung liefert dann

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 = E - V(x).$$

Also ist die *Geschwindigkeit* des Teilchens bei vorgegebener Energie E (bis auf das Vorzeichen) durch den *Ort* des Teilchens festgelegt. Wir betrachten dazu ein Beispiel

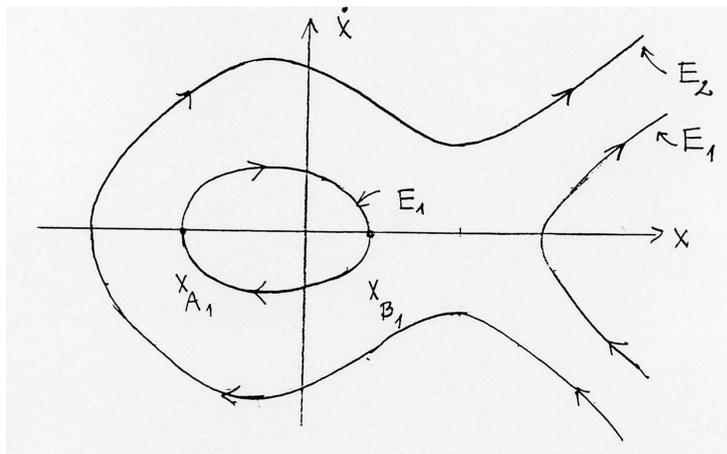
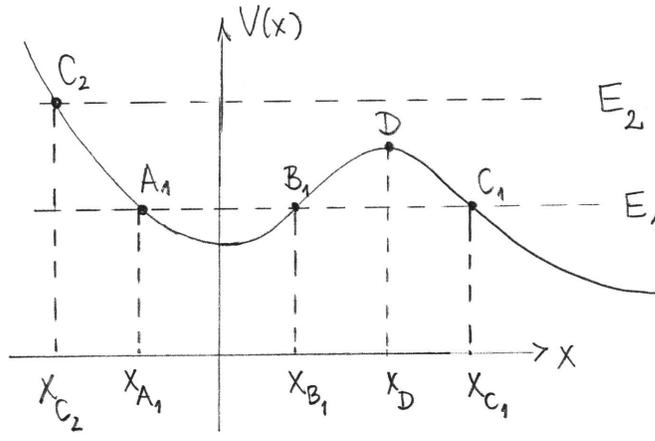


Da die kinetische Energie nur größer oder gleich Null sein kann, kann die Bewegung nur in den Bereichen verlaufen, in denen $V(x) \leq E$ ist. In unserem Beispiel sind das die Strecke AB und der Bereich rechts von C . Die Punkte, in denen die potentielle Energie gleich der Gesamtenergie ist, d.h. $V(x) = E$ bestimmen die Grenzen der Bewegung. Es sind die „*Umkehrpunkte*“, da in ihnen die Geschwindigkeit ihre Richtung umkehrt. Wenn das für die Bewegung zulässige Gebiet auf *beiden* Seiten durch solche Punkte beschränkt ist, verläuft sie in einem endlichen

Bereich (s. o. Strecke AB), man sagt, sie ist „**finit**“. Wenn das Gebiet nicht, oder nur auf einer Seite begrenzt ist, wird die Bewegung „**infin**“, das Teilchen läuft ins Unendliche. Aus

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} = \frac{dx}{dt}$$

kann man die Geschwindigkeit direkt ablesen. Für unser Beispiel ergibt sich bei zwei verschiedenen Energien:

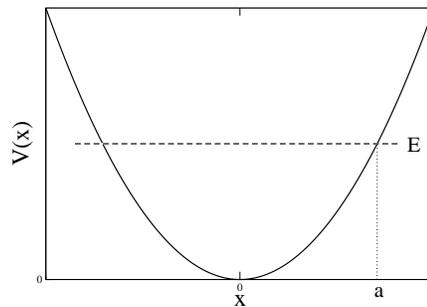


Auftragungen dieser Art im (hier) zweidimensionalen „**Phasenraum**“, der durch x und \dot{x} gegeben ist (später werden wir x und $p = m\dot{x}$ verwenden), wird sich im Laufe der Vorlesung als sehr nützlich erweisen. Die Bahnen im Phasenraum werden in der angedeuteten Pfeilrichtung durchlaufen. Zur genaueren Bestimmung des zeitlichen Verlaufes integrieren wir die obige Differentialgleichung 1. Ordnung durch „*Trennung der Veränderlichen*“

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}}$$

Dabei sind x_0 und $x(t)$ mit der vorgegebenen Energie E verträgliche Orte (Beispiel Seite 16: $x_0, x(t) \in [x_A, x_B]$ oder $\in [x_C, \infty)$). Dabei ist $x_0 = x(t_0)$ der Anfangsort zur Zeit $t = t_0$. Da bei Vorgabe von x_0 und E die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(t_0)$ nur dem *Betrage* nach festliegt (siehe Skizze Seite 17), verbleiben beide Vorzeichen im Ergebnis für $t - t_0$. Da bei beliebigen Potentialen die Integration im allgemeinen nicht analytisch durchgeführt werden kann, ist die explizite Auflösung nach $x(t)$ im allgemeinen nicht möglich. Man erhält die Bahnkurve in der (t, x) -Ebene dann durch numerische Integration und Auftragung von t als Funktion von $x(t)$. Für *quadratische* Potentiale $V(x) = V_0 + \frac{1}{2}c(x - b)^2$ („**harmonischer Oszillator**“) lässt sich die Auflösung analytisch durchführen (in der Abbildung und der Rechnung ist obdA $b = 0, V_0 = 0$ gewählt).



Mit $E = V(a)$ und $\omega_0 := \sqrt{c/m}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \frac{1}{\omega_0} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} \\ \omega_0(t - t_0) &= \pm [\arcsin(x(t)/a) - \arcsin(x_0/a)] \end{aligned}$$

Auflösung nach $x(t)$ liefert dann

$$x(t) = \pm a \sin(\omega_0 t + \varphi_{\pm})$$

mit $\varphi_{\pm} = -\omega_0 t_0 \pm \arcsin(x_0/a)$. Obiges Ergebnis erhält man in diesem Fall einfacher durch die direkte Lösung der NG auf S.4 (siehe auch Abschnitt c) später in diesem Kapitel).

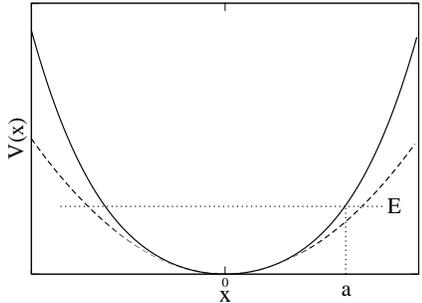
3.1.2 finite Bewegung: Schwingungsdauer

Die eindimensionale finite Bewegung ist im allgemeinen eine **Schwingung** (eine Ausnahme liegt in unserem Beispiel vor, falls $V(x_D) = E$ gilt). Das Teilchen

führt eine **periodische** Bewegung zwischen den Umkehrpunkten (x_A und x_B) aus. Als **Schwingungsdauer** T für die Bewegung von x_A nach x_B und zurück, erhält man aus der Formel von Seite 18

$$T_E = \sqrt{2m} \int_{x_A(E)}^{x_B(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Als *Beispiel* betrachten wir ein symmetrisches Potential (durchgezogene Linie), das *kleine Abweichungen* von einem quadratischen Potential (gestrichelte Linie) hat



$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2}cx^2 + \epsilon V_1(x)$$

Mit $V(a) = E$ entwickeln wir $1/\sqrt{E - V(x)}$ für $\epsilon V_1(a) \ll ca^2/2$ im Integranden nach Potenzen von ϵ . Mit $(1 + u)^{-1/2} = 1 - u/2 + O(u^2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{V(a) - V(x)}} &= \sqrt{\frac{2}{c}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\epsilon}{c}(V_1(a) - V_1(x))/(a^2 - x^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{c}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[1 - \frac{\epsilon V_1(a) - V_1(x)}{c(a^2 - x^2)} \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Setzt man ein, so kann das Integral im ersten Term elementar ausgeführt werden, und man erhält mit $\omega_0 = \sqrt{c/m}$

$$T(a) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[1 - \frac{\epsilon}{c\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \left(\frac{V_1(a) - V_1(x)}{a^2 - x^2} \right) dx + O(\epsilon^2) \right]$$

Für den *Spezialfall* einer „quartischen Anharmonizität“ $V_1(x) = x^4$ gilt $(V_1(a) - V_1(x))/(a^2 - x^2) = a^2 + x^2$ und obiges Integral kann elementar ausgeführt werden.

$$\int_{-1}^1 \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 - u^2}} du = - \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - u^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - u^2}} \right) du = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

Man erhält

$$T(a) \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{3\epsilon}{2c} a^2 \right)$$

oder in entsprechender Näherung für die **Kreisfrequenz** $\omega(a) := 2\pi/T(a)$

$$\omega(a) = \omega_0 \left(1 + \frac{3\epsilon}{2c} a^2 + O(\epsilon^2) \right)$$

Die Kreisfrequenz des *anharmonischen Oszillators* hängt (im Gegensatz zum harmonischen Oszillator) von der *Auslenkung* ab. Typisches Beispiel ist ein Pendel bei größeren Auslenkwinkeln.

3.1.3 dissipative Systeme: Methode der Isoklinen

Wesentliches Hilfsmittel zur Lösung des Problems der Lösung der Bewegung im statischen Kraftfeld $f(x)$ war der *Energiesatz*. Für das durch

$$m\ddot{x} + \gamma(x, \dot{x})\dot{x} = f(x)$$

beschriebene **dissipative** System gilt **keine Energieerhaltung**

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = (m\ddot{x} - f(x))\dot{x} \\ &= -\gamma(x, \dot{x})\dot{x}^2, \end{aligned}$$

wobei wir die Bewegungsgleichung verwendet haben. Also folgt durch Integration

$$E(t) - E(t_0) = - \int_{t_0}^t \gamma(x(t'), \dot{x}(t')) (\dot{x}(t'))^2 dt' .$$

Damit periodische Lösungen auftreten, für die $E(t_0+T) = E(t_0)$ gilt, muss $\gamma(x, \dot{x})$ Bereiche mit *verschiedenen Vorzeichen* haben, wie beim auf Seite 8 diskutierten van der Pol-Oszillator.

Die Lösung der Gleichung $m\ddot{x} + \gamma(x, \dot{x})\dot{x} = f(x)$ ist im allgemeinen nicht mehr auf „Quadraturen“ zurückzuführen. Es erweist sich als nützlich, die Differentialgleichung 2. Ordnung als ein *System* von zwei *Differentialgleichungen 1. Ordnung* für die Variablen x und $v = \dot{x}$ zu schreiben ($\tilde{f}(x, v) := (f(x) - \gamma(x, v)v)/m$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \tilde{f}(x, v) \end{aligned}$$

Das ist im allgemeinen ein **System nichtlinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung**. Die Bahnkurven im Phasenraum $(x, v) \equiv (x_1, x_2)$ lassen sich daher

nur in Ausnahmefällen analytisch angeben. Man kann sie aber *geometrisch konstruieren*. Betrachtet man allgemein ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Variablen $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

$$\dot{x}_i(t) = F_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

mit „hinreichend glatten“ Funktionen $F_i(x_1, \dots, x_n)$, so erhält man durch Taylorentwicklung

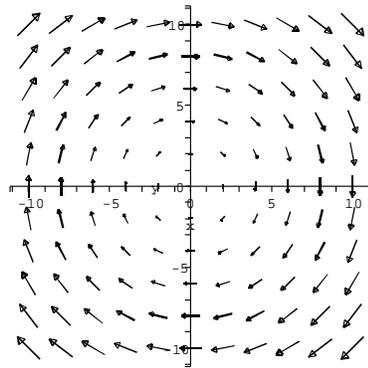
$$\begin{aligned} x_i(t + \Delta t) &= x_i(t) + \Delta t \cdot \dot{x}_i(t) + O(\Delta t)^2 \\ &= x_i(t) + \Delta t \cdot F_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) + O(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ („Geschwindigkeitsfeld“) zeigt also an, wie es zu „infinitesimalen Zeiten weitergeht“. Eine Besonderheit bilden die Punkte \vec{x}^* , an denen \vec{F} gleich dem Nullvektor ist.

$$\vec{F}(\vec{x}^*) = 0$$

Man bezeichnet sie als „stationäre Punkte“ oder „**Fixpunkte**“, da $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}^*$ Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Weitere Bezeichnungen sind „*singuläre Punkte*“ oder „*kritische Punkte*“. Das Verhalten der Phasenraumtrajektorien in der Umgebung solcher Punkte werden wir später ausführlich diskutieren. Ist $\vec{F}(\vec{x}) \neq 0$, so ist die Trajektorie durch \vec{x} **tangential** zu $\vec{F}(\vec{x})$. Im betrachteten Fall eines Systems von *zwei* Differentialgleichungen 1. Ordnung kann man durch Zeichnung des Geschwindigkeitsfeldes \vec{F} auf einem Blatt Papier das Verhalten der Phasenraumtrajektorien „ablesen“.

Für das einfache Beispiel $F_1 = x_2, F_2 = -x_1$ ergibt sich



Man erkennt leicht, dass die zugehörigen Phasenraumtrajektorien **Kreise** um den Ursprung sind. Das Beispiel entspricht einem harmonischen Oszillator, bei dem $c/m = 1$ gewählt wurde.

Zur allgemeinen geometrischen Konstruktion der Trajektoirein geht man zunächst von

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2) \quad ; \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2)$$

durch „Division“ zur Differentialgleichung (Vorsicht bei $F_1 = 0$)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_2(x_1, x_2)}{F_1(x_1, x_2)}$$

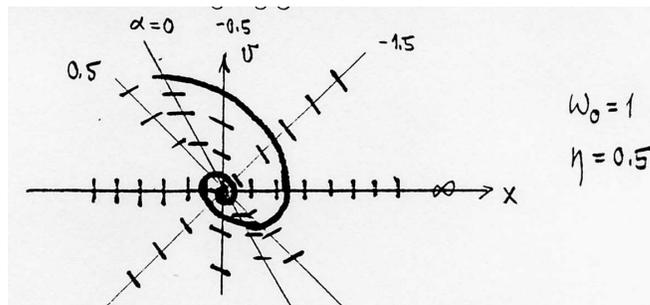
über. Die *Steigung* der Trajektorie im Phasenraum ist also durch F_2/F_1 gegeben. Man betrachtet nun den geometrischen Ort aller Punkte im Phasenraum, die **dieselbe Steigung** α haben

$$\frac{F_2(x_1, x_2)}{F_1(x_1, x_2)} = \alpha$$

Die entsprechenden Kurven bezeichnet man als „**Isoklinien**“. Angewandt auf das physikalische Beispiel von Seite 21 lautet die Gleichung

$$\frac{\tilde{f}(x, v)}{v} = \alpha.$$

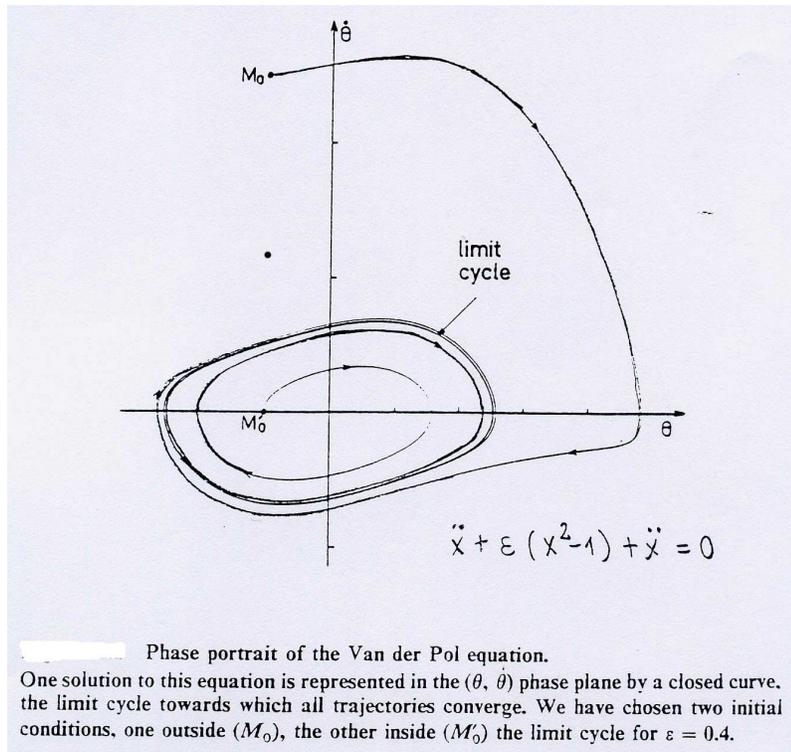
Für das Beispiel des *gedämpften harmonischen Oszillators* $\tilde{f}(x, v) = -\omega_0^2 x - \eta v$ sind die Isoklinien eine Geradenschar $v = -\frac{\omega_0^2}{\alpha + \eta} \cdot x$. Man zeichnet nun die Isoklinien und deutet die Steigung gestrichelt an



Als Trajektorie im Phasenraum ergibt sich eine „logarithmische Spirale“.

Die Trajektorie läuft für $(\eta/2)^2 < \omega_0^2$ spiralförmig in den Ursprung. Für $(\eta/2)^2 > \omega_0^2$ („überdämpfter Fall“) ergibt sich ein anderes Bild (Übungsaufgabe). Da das ursprüngliche Differentialgleichungssystem *linear* ist, kann man diese Gleichungen natürlich auch direkt lösen.

Für den auf Seite 8 erwähnten van der Pol-Oszillator mit nichtlinearer Reibung $\tilde{f}(x, v) = -\omega_0^2 x - \epsilon(x^2 - a^2)v$ liefert die Isoklinienmethode die Form des auftretenden Grenzzyklusses (Übungsaufgabe).



Nur im Limes *schwacher Nichtlinearität* $\epsilon \ll 1$ lassen sich dazu *genäherte* analytische Resultate gewinnen. Für $\epsilon = 0$ sind die Lösungen durch $x(t) = c \sin(\omega_0 t + \varphi)$ gegeben. Im Limes $\epsilon \ll 1$ hat der Grenzzyklus fast die Form wie die Trajektorie einer ungestörten harmonischen Schwingung. Einsetzen in die „Energiebilanz“ von Seite 20 liefert

$$\begin{aligned}
 & -\epsilon \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} (c^2 \sin^2 \omega_0 t - a^2)(c\omega_0 \cos \omega_0 t)^2 dt \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow & \int_0^T \left(\frac{c^2}{4} \sin^2 2\omega_0 t - a^2 \cos^2 \omega_0 t \right) dt \stackrel{!}{=} 0 \\
 \rightarrow & \frac{T}{2} \left(\frac{c^2}{4} - a^2 \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|c| = 2|a|}
 \end{aligned}$$

Für diesen speziellen Wert von c hält sich die verstärkende und dämpfende Wirkung der Reibungskraft gerade die Waage.

Bisher haben wir Differentialgleichungen vom Typ $m\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ untersucht, die als System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung mit **zeitunabhängigem** Geschwindigkeitsfeld \vec{F} geschrieben werden können. Solche Systeme bezeichnet man als „**autonome**“ Differentialgleichungssysteme. Manche Autoren bezeichnen ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung als ein System mit

n „Freiheitsgraden“. Diese Bezeichnung unterscheidet sich von der in der Physik üblichen (und in der Abschnittsüberschrift verwendeten) um einen Faktor zwei. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir den Fall **zeitabhängiger Kräfte** $f(x, \dot{x}) \rightarrow f(x; \dot{x}, t)$. Da man die Differentialgleichung $m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$ als **autonomes System** von **drei** Differentialgleichungen 1. Ordnung schreiben kann, kann man auch von **eineinhalb** Freiheitsgraden sprechen.

3.2 zeitabhängige Kräfte

Setzt man $\tau = t$ und wählt τ als *unabhängige Variable*, so entspricht obige Differentialgleichung dem System

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}(\tau) &= v(\tau) \\ \overset{\circ}{v}(\tau) &= f(x(\tau), v(\tau), t(\tau))/m \\ \overset{\circ}{t}(\tau) &= 1 \end{aligned}$$

wobei (\circ) die Ableitung nach τ bedeutet.

Der Übergang von Systemen von zwei ($n = 2$) Differentialgleichungen 1. Ordnung zum Fall $n = 3$ bringt völlig neue Phänomene. Insbesondere kann für „Geschwindigkeitsfelder“ $\vec{F}(\vec{x})$, die **nichtlinear** von den Variablen abhängen, in speziellen Parameterbereichen „**chaotisches Verhalten**“ der Lösungen auftreten (der Begriff wird später genauer erläutert). Ein typisches *Beispiel* ist ein *gedämpftes, getriebenes Pendel*

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sqrt{\frac{g}{l}} \sin x = h_0 \cos \omega t \quad (x \equiv \theta),$$

d.h. $f(x, v, t)/m = -\gamma v - \sqrt{g/l} \sin x + h_0 \cos \omega t$.

3.2.1 der getriebene harmonische Oszillator

Wir betrachten zunächst einen **harmonischen Oszillator**, auf den eine zeitabhängige Störung wirkt

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = h(t).$$

Von besonderem Interesse („Resonanz“) ist der Fall einer **periodischen** Störung $h = h_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, wobei ω , h_0 und φ_0 Konstante sind.

Mit der Definition des linearen Differentialoperators \hat{L}

$$\hat{L} := \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

lautet die NG für den getriebenen harmonischen Oszillator

$$\hat{L}x = h .$$

Das ist eine **inhomogene, lineare** Differentialgleichung 2. Ordnung. Für deren allgemeine Lösung gilt:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lässt sich schreiben als **Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung** x_h^{allg} und einer **speziellen** Lösung x_{inh} der **inhomogenen Gleichung**.

Das ist leicht zu zeigen: Aus $\hat{L}x_h^{allg} = 0$ und $\hat{L}x_{inh} = h$ folgt wegen der **Linearität** von \hat{L}

$$\hat{L}(x_h^{allg} + x_{inh}) = \hat{L}x_h^{allg} + \hat{L}x_{inh} = 0 + h = h .$$

Wir betrachten zunächst den Fall **ohne Reibung** d.h. $\gamma = 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_0 \cos(\omega t + \varphi_0) .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$x_h^{allg}(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t ,$$

wobei c_1 und c_2 durch Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit festgelegt sind. Für $\omega \neq \omega_0$ liefert der Ansatz $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Durch Einsetzen in die inhomogene Gleichung erhält man $x_0 = h_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Also lautet die *allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$\omega \neq \omega_0 : \quad x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{h_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Wie man sieht, muss man den „**Resonanzfall**“ $\omega = \omega_0$ gesondert behandeln. Dazu schreiben wir für $\omega \neq \omega_0$

$$x(t) = \tilde{c}_1 \cos \omega_0 t + \tilde{c}_2 \sin \omega_0 t + \frac{h_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t + \varphi_0) - \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] .$$

Der Term $\sim h_0$ ist dann im Limes $\omega \rightarrow \omega_0$ von der Form „ $\frac{0}{0}$ “. Anwendung der l'Hospitalschen Regel liefert

$$\omega = \omega_0 : \quad x(t) = \tilde{c}_1 \cos \omega_0 t + \tilde{c}_2 \sin \omega_0 t + \frac{h_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Im Resonanzfall wächst also die Amplitude der Auslenkung im betrachteten reibungsfreien Fall **linear** mit der Zeit an.

Für den Fall **endlicher Reibung**, d.h.

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = h_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

löst man die *homogene* Gleichung durch den Ansatz $x = e^{rt}$ und erhält für r die quadratische Gleichung

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0$$

mit den Lösungen $r_{1,2} = -\gamma/2 \pm \sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$, die für $\gamma/2 < \omega_0$ komplex sind. Aus einer komplexen Lösung $x^C = x_R + ix_I$ der Dgl., d.h. $\hat{L}x^C = 0$ folgt aus der Tatsache, dass der lineare Operator \hat{L} **reell** ist ($\hat{L} = \hat{L}^*$), dass

$$\hat{L}x^C = \hat{L}x_R + i\hat{L}x_I = 0$$

wieder die Zerlegung in Real- und Imaginärteil darstellt. Also gilt mit $\hat{L}x^C = 0$ auch $\hat{L}x_R = 0$ und $\hat{L}x_I = 0$.

Da $x(t)$ eine reelle Größe ist, lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für $r_1 \neq r_2$

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \},$$

mit *komplexen* Konstanten c_1 und c_2 und $\operatorname{Re}\{\}$ ist die Bildung des Realteils.

Für $\gamma/2 > \omega_0 (> 0)$ sind r_1 und r_2 reell und negativ, d. h. die angegebene Lösung ist für *reelle* c_1 und c_2 reell und $x(t)$ strebt mit wachsender Zeit mit höchstens einem Nulldurchgang gegen Null („aperiodischer Grenzfall“).

Für $\gamma/2 = \omega_0$ lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (c_1 und c_2 reell)

$$\gamma/2 = \omega_0 : \quad x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t/2},$$

wie man durch Einsetzen leicht verifiziert.

Für $\gamma/2 < \omega_0$ erhält man zwei konjugiert komplexe Lösungen für r . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet nach Bildung des Realteils

$$\gamma/2 < \omega_0 : \quad x(t) = e^{-\gamma t/2} [\tilde{c}_1 \cos \tilde{\omega}_0 t + \tilde{c}_2 \sin \tilde{\omega}_0 t]; \quad \tilde{\omega}_0 := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

Das ist der Fall der **gedämpften Schwingung**. Die Frequenz $\tilde{\omega}_0$ ist kleiner als ω_0 , da die Reibung die Bewegung hemmt.

Zur Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen Lösung im Fall mit Reibung schreiben wir

$$h_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = h_0 \operatorname{Re} \{ e^{i(\omega t + \varphi_0)} \}.$$

Da \hat{L} reell ist, ist es erlaubt, die inhomogene Gleichung für die Inhomogenität ohne „ $Re\{\}$ “, d. h. für $h_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$ zu lösen und *anschließend* den Realteil zu bilden. Der Ansatz $x(t) = B e^{i(\omega t + \varphi_0)}$ mit komplexem B liefert

$$B = \frac{h_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

Wenn wir B in der Form $b e^{i\delta}$ mit reellem b und δ darstellen, so erhalten wir für b und δ

$$b = \frac{h_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}; \quad \tan \delta = \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Im schwach gedämpften Grenzfall $\gamma/2 \ll \omega_0$ gilt für Frequenzen $\omega \approx \omega_0$ näherungsweise

$$b^2 \approx \frac{(h_0/2\omega_0)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$

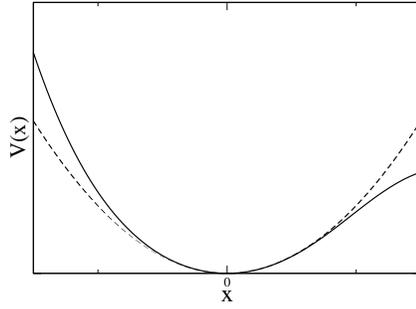
$$\tan \delta \approx \frac{\gamma/2}{\omega - \omega_0},$$

d. h. das Amplitudenquadrat ist näherungsweise eine **Lorentzkurve** um $\omega = \omega_0$. Als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man im Fall der gedämpften Schwingung ($\gamma/2 < \omega_0$) schließlich

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} [c_1 \cos \tilde{\omega}_0 t + c_2 \sin \tilde{\omega}_0 t] + b \cos(\omega t + \varphi_0 + \delta)$$

3.2.2 Anharmonische Schwingungen

Als Vorbereitung auf die Resonanz im Fall nichtlinearer Schwingungen betrachten wir hier den Fall, dass die „Zusatzkraft“ h zeitunabhängig ist, aber *nichtlinear* vom Ort abhängt $h = \epsilon f_1(x)$, wobei der Vorfaktor ϵ „klein“ sein soll. Wir kehren damit nochmal zu einem Problem zurück, das wir im Abschnitt zur Schwingungsdauer bereits behandelt haben. Hier verwenden wir das Problem zur Einführung einer anderen wichtigen Methode



Wir betrachten die Bewegung in einem Potential $V(x)$ (durchgezogene Linie), das im Bereich kleiner x schwach vom harmonischen Potential (gestrichelte Linie) abweicht. Aus unserer Diskussion der allgemeinen eindimensionalen Bewegung mit Hilfe der Energieerhaltung wissen wir, dass das Teilchen eine *periodische Bewegung* ausführt. Wie dort besprochen, lässt sich die Lösung für vorgegebenes $V(x)$ auf eine (meist nur numerisch durchführbare) Integration zurückführen. Wir wollen hier anders vorgehen, und versuchen die Lösung als **Potenzreihe** in ϵ zu erhalten

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Man bezeichnet diese Vorgehensweise als **”Störungstheorie”**. Verfahren dieser Art spielen in vielen Gebieten der Physik eine wichtige Rolle. Um die Argumentation an einem Beispiel klarzumachen, verwenden wir den **Duffingoszillator** $f_1(x) = -bx^3$, d.h. das Gesamtpotential $V(x)$ hat einen „quartischen“ Anteil $\epsilon \frac{b}{4} x^4$. Das entspricht dem Beispiel von Seite 20, wenn man $b = 4$ setzt. Dann lautet die Potenzreihenentwicklung in ϵ für f

$$\begin{aligned} f_1(x(t)) &= -b(x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots)^3 \\ &= -b(x_0^3(t) + 3\epsilon x_0^2(t)x_1(t) + O(\epsilon^2)). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f_1(x)$ liefert

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + \epsilon(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + \dots = -\epsilon \frac{b}{m} x_0^3 + \dots$$

Durch Koeffizientenvergleich gleicher Potenzen in ϵ erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -\frac{b}{m} x_0^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Will man nun zum Beispiel das Anfangswertproblem $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ lösen, so berechnet man zuerst $x_0(t)$, damit $x_1(t)$ etc. Aus $x_0 = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ folgt für die vorgegebene Anfangsbedingung

$$x_0(t) = a \cos \omega_0 t.$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Identität $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$ lautet die Gleichung für x_1

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{ba^3}{4m} (\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t).$$

Dies ist eine inhomogene Gleichung, wie wir sie in 3.2.1. besprochen haben (mit *zwei* Inhomogenitäten). Verwendung der allgemeinen Lösung von Seite 25/26 liefert zusammen mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0$

$$x_1(t) = \frac{ba^3}{32m\omega_0^2} (\cos 3\omega_0 t - \cos \omega_0 t) - \frac{3}{8} \frac{ba^3}{m\omega_0} \cdot t \cdot \sin \omega_0 t.$$

Durch die Inhomogenität $\sim \cos \omega_0 t$ ist der „**säkulare**“ Term $\sim t \sin \omega_0 t$ entstanden, der linear *mit der Zeit anwächst*. Das steht im krassen Widerspruch zum *exakten* Resultat, dass die Bewegung *periodisch* ist. Der Fehler in unserem Vorgehen liegt darin, dass sich durch Hinzufügen des „anharmonischen“ Terms im Potential auch die *Schwingungsdauer* T beziehungsweise die *Schwingungsfrequenz* ein wenig *ändert*, wie bereits in Abschnitt 3.1.2. ausführlich diskutiert worden ist. Diese Problematik trat historisch in der „Himmelsmechanik“ auf, als man versuchte, kleine Störungen der Planetenbahnen zu berechnen. Ein Verfahren zur Eliminierung der unphysikalischen säkularen Terme wurde bereits Ende des letzten Jahrhunderts gefunden (Lindstedt 1882, Poincaré 1892). Wir wollen dieses Verfahren kurz andeuten, wobei wir aber keine Zeit haben, auf die sehr viel schwierigere Frage der Fehlerabschätzung einzugehen: Mit Hilfe der Konstanten ω führt man eine **Skalentransformation** auf die neue Variable $u = \omega t$ aus. Dabei wird ω gerade die Bedeutung der exakten Schwingungsfrequenz annehmen:

$$x(t) = g(t\omega) = g(u)$$

Dann lautet die entsprechende Differentialgleichung für $g(u)$ (Ableitungen nach u werden mit einem Strich geschrieben) wegen $\dot{x}(t) = g'(u) \cdot du/dt = \omega g'(u), \ddot{x} = \omega^2 g''$

$$\omega^2 g''(u) + \omega_0^2 g(u) = \epsilon f_1(g(u))/m.$$

Wie vorher entwickelt man $g(u)$ in eine Potenzreihe in ϵ

$$g(u) = g_0(u) + \epsilon g_1(u) + \epsilon^2 g_2(u) + \dots$$

Zusätzlich entwickelt man aber nun auch ω

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots$$

Bis zu Termen der Ordnung ϵ erhält man nach Einsetzen

$$(\omega_0^2 + 2\epsilon\omega_0\omega_1) (g_0'' + \epsilon g_1'') + \omega_0^2 (g_0 + \epsilon g_1) = \epsilon f(g_0)/m.$$

Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert für unser Beispiel

$$\begin{aligned}\omega_0^2 (g_0'' + g_0) &= 0 \\ \omega_0^2 (g_1'' + g_1) + 2\omega_0\omega_1 g_0'' &= -\frac{b}{m}g_0^3.\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung folgt für g_0 sofort

$$g_0(u) = a \cos u$$

Das liefert eingesetzt in die zweite Gleichung

$$\omega_0^2 (g_1'' + g_1) = \left(2\omega_0\omega_1 a - \frac{3ba^3}{4m}\right) \cos u - \frac{ba^3}{4m} \cos 3u$$

Der Term $\sim \cos u$ würde uns wiederum einen säkularen Term bescheren. Deshalb wählen wir jetzt ω_1 so, dass der Vorfaktor von $\cos u$ verschwindet. Das liefert

$$\omega_1 = \frac{3}{8} \frac{ba^2}{m\omega_0}.$$

Die verbleibende Gleichung wird wie bei unserem ersten Versuch gelöst und liefert

$$g_1 = \frac{ba^3}{32m\omega_0^2} (\cos 3u - \cos u).$$

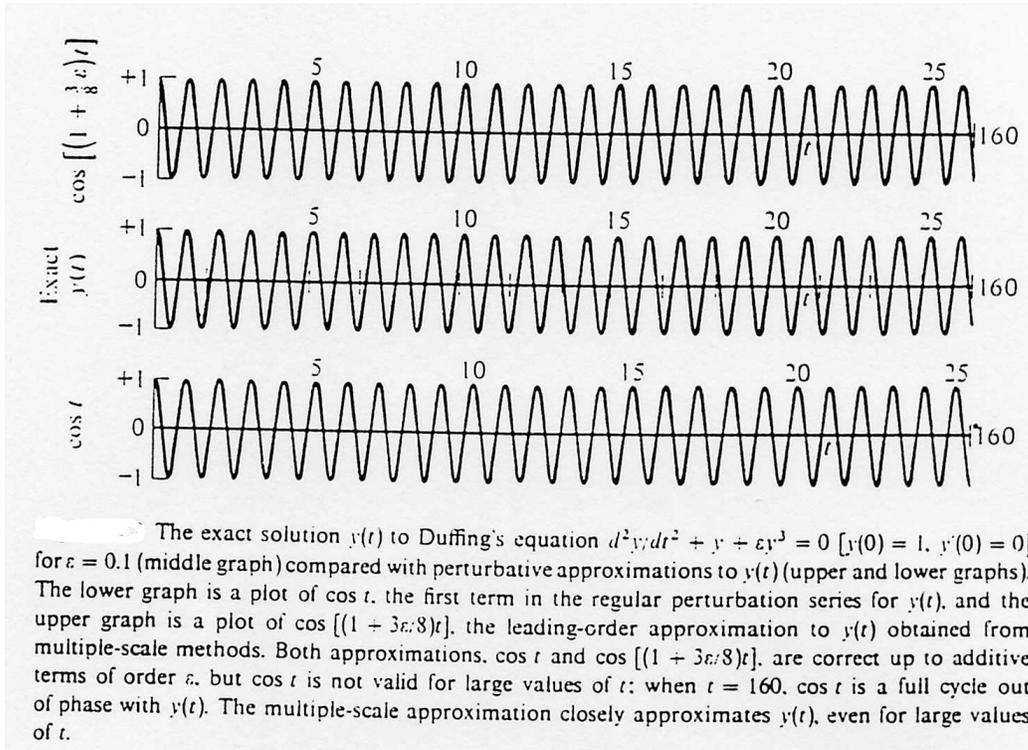
Damit lautet unsere Näherungslösung, wieder ausgedrückt in der ursprünglichen Zeitvariablen t ,

$$x(t)/a = \left(1 - \epsilon \frac{ba^3}{32m\omega_0^2}\right) \cos(\omega t) + \epsilon \frac{ba^3}{32m\omega_0^2} \cos(3\omega t) + \dots$$

In Übereinstimmung mit der exakten Lösung ist das nun eine **periodische Funktion** mit der Frequenz

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 = \omega_0 \left(1 + \epsilon \frac{3ba^2}{8m\omega_0^2}\right),$$

die, wie bereits diskutiert, von der *Amplitude* a abhängt und mit dem Ergebnis von S. 20 ($b = 4$) übereinstimmt. Zusätzlich zur „harmonischen Grundschwingung“ $\sim \cos \omega t$, tritt eine „höhere Harmonische“ $\sim \cos 3\omega t$ auf. Unsere verbesserte Lösung stellt (für kleine ϵ) sogar bei Vernachlässigung des $\cos 3\omega t$ -Terms für eine recht lange Zeitspanne eine gute Näherung dar.



3.2.3 Resonanz im Fall nichtlinearer Schwingungen

Wie auf Seite 27 diskutiert, ist das Auslenungsquadrat eines getriebenen, schwach gedämpften *harmonischen* Oszillators in der *Nähe der Resonanz* durch eine Lorentzkurve gegeben ($f := \epsilon h_0 / 2\omega_0$)

$$b^2 \approx \frac{f^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$

Bei Vorliegen einer *Anharmonizität* hängt die Resonanzfrequenz von der Auslenkung ab, d.h. $\omega_0 \rightarrow \omega_0(b)$, wobei im Fall nicht zu großer Auslenkung $\omega_0(b) = \omega_0 + \kappa b^2$ gilt (siehe auch Seite 20 und 30). Einen einfachen Zugang zum Verständnis der neuen Phänomene der Resonanz *bei nichtlinearen* Oszillatoren erhält man, wenn man als "intuitive" **Näherung** in obiger Gleichung ω_0 durch $\omega_0 + \kappa b^2$ ersetzt

$$b^2 = \frac{f^2}{(\omega - \omega_0 - \kappa b^2)^2 + (\gamma/2)^2}$$

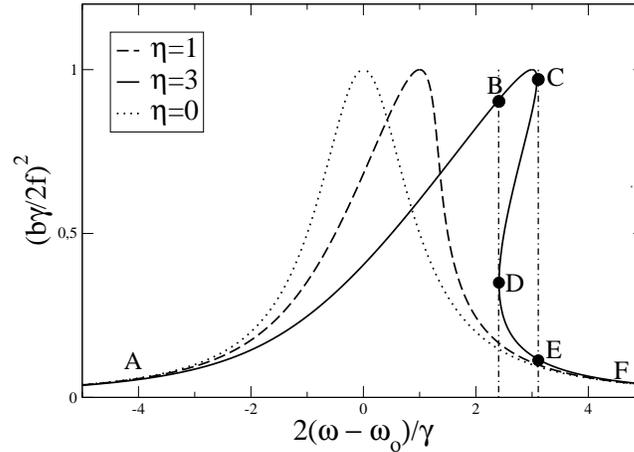
Um aus dieser Gleichung $b^2(\omega)$ zu erhalten, ist es am einfachsten, nach ω aufzulösen

$$\omega - \omega_0 = \kappa b^2 \pm \sqrt{(f/b)^2 - (\gamma/2)^2}$$

und ω als Funktion von b^2 zu zeichnen, wobei $b^2 \leq (2f/\gamma)^2$ sein muß. Führt man die dimensionlosen Größen $x = 2(\omega - \omega_0)/\gamma$, $y = (b\gamma/2f)^2$ und $\eta = 8f^2\kappa/\gamma^3$ ein, so erhält man

$$x = \eta y \pm \sqrt{1/y - 1}$$

Für $\kappa > 0$ ergibt sich (für verschiedene Werte von η) folgendes Bild



Für hinreichend große $\eta > \eta_c$ ($\eta_c = 8\sqrt{3}/9$, Übungsaufgabe) gibt es einen Frequenzbereich (zwischen den vertikalen Geraden), in dem *drei Lösungen* für b^2 auftreten. Dabei entspricht (wie in einem späteren Kapitel diskutiert) der Kurvenabschnitt von CD *instabilen* Schwingungen des Systems. Welche der beiden anderen Lösungen vom Oszillator angenommen wird, hängt von der „*Vorgeschichte*“ ab. Wir betrachten dazu ein „Experiment“, in dem die äußere Frequenz ω *langsam* verändert wird. Beginnt man bei A , so wandert man bei Erhöhung der Frequenz über B zum Punkt C . Dort „*reißt*“ die Amplitude ab und fällt *sprungartig* zum Punkt E und dann weiter nach F . Wenn man die Frequenz wieder verkleinert, wächst die Amplitude auf der Kurve FD , springt vom Punkt D zum Punkt B und nimmt dann entlang BA ab.

Weitere Resonanzphänomene sowie *Stabilitätsfragen* werden in Kap. II.4 diskutiert.

Wir beenden damit (vorläufig) die Diskussion der Gleichung $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \epsilon h(x, t)$ mit *kleinem* ϵ und stellen anhand des **gedämpften, getriebenen Pendels** Phänomene vor, die bei *großen* äußeren „Kräften“ auftreten können. Eine vertiefte Diskussion wird ebenfalls erst später erfolgen.

3.2.4 getriebenes Pendel: "chaotische Bewegung"

Wir betrachten Lösungen der "Pendelgleichung"

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \sin\theta = f \cos\omega t$$

für nicht zu große Werte von γ und hinreichend großen Zeiten, so dass „die Einschwingphase beendet ist“. Dabei wird die Zeit in Einheiten von $\sqrt{L/g}$ gemessen (L Pendellänge). Die Herleitung der Gleichung diskutieren wir später im Abschnitt über Zwangskräfte.

Für *kleine* f kann man linearisieren, d.h. $\sin\theta \rightarrow \theta$ und die Lösung von Seite 27 kann verwendet werden, die für $t \gg 1/\gamma$ lautet

$$\theta(t) \approx \underbrace{\frac{f}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}}_b \cos(\omega t + \varphi_0 + \delta)$$

Im $(\theta, \dot{\theta})$ -Phasenraum liefert das eine *Ellipse* mit den Halbachsen b und ωb . Verläßt man den linearen Bereich durch Wahl größerer Werte von f , so kann man die *Bahnkurve* $\theta(t)$ und die *Phasenraumtrajektorie* nur noch durch **numerische Lösung** der Differentialgleichung erhalten. Als System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung hat man mit $\Omega =: \dot{\theta}$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= -\gamma\Omega - \sin\theta + f \cos\omega t\end{aligned}$$

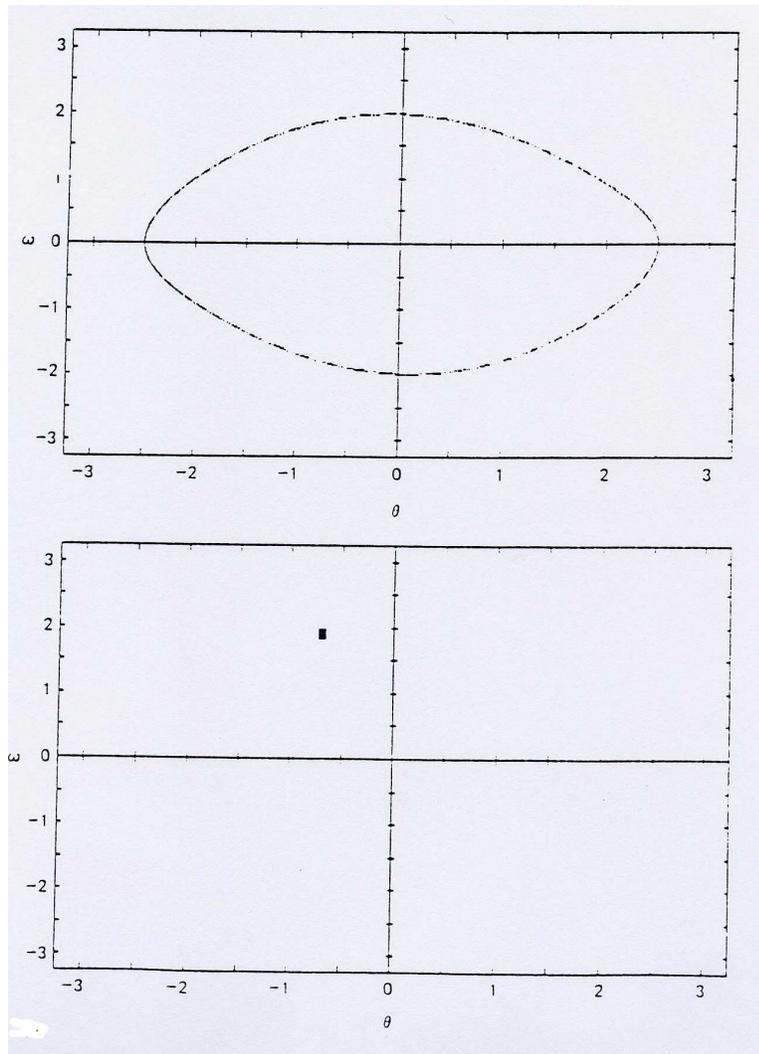
Da das System *nicht* autonom ist, können sich *Phasenraumtrajektorien* jetzt durchaus *schneiden*!

Wir zeigen im folgenden Resultate für $\omega = 2/3$ und $\gamma = 1/2$ und verschiedene Werte von f . Da im *statischen* Fall ($\omega = 0$) ein Wert von $f = 1$ zu einer stationären Auslenkung von $\pi/2$ (waagerechtes Pendel) führt, werden Resultate für $f \approx 1$ gezeigt.

Neben den eigentlichen Phasenraumtrajektorien, bei denen der „plotter“ in sehr kurzen Zeitabständen Punkte macht, ist es aufschlußreich, auch ein „**stroboskopisches Bild**“ der Trajektorie im Takt der äußeren Frequenz zu erzeugen, d.h. nur in Zeitabständen $T = 2\pi/\omega$ wird ein Punkt gemacht. Wir werden diese Idee später allgemeiner als Methode der „**Poincaré-Schnitte**“ kennenlernen.

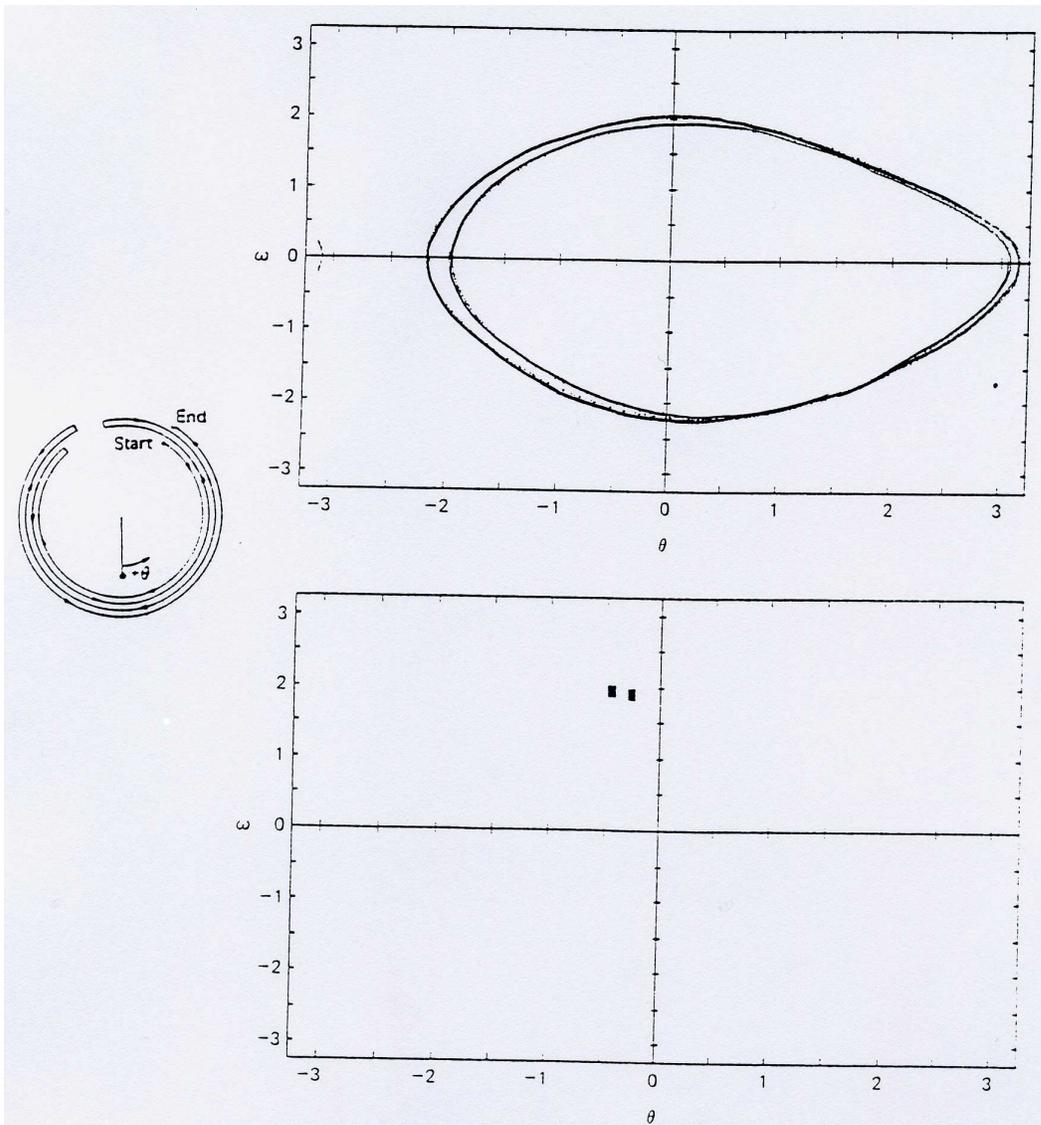
Die folgende Serie für die Werte $f = 0.9$, $f = 1.07$ und $f = 1.15$ zeigt den Übergang von periodischem Verhalten gemäß der äußeren Frequenz, zu periodischer Lösung mit „**Periodenverdopplung**“ und schließlich zu „**chaotischem Verhalten**“

α) $f = 0.9$



Für diesen Wert des Drehmoments ergibt sich periodisches Verhalten mit der äußeren Frequenz ω . Die Phasenraumtrajektorie ähnelt noch einer Ellipse, die stroboskopische Abbildung (untere Abbildung) zeigt genau einen Punkt.

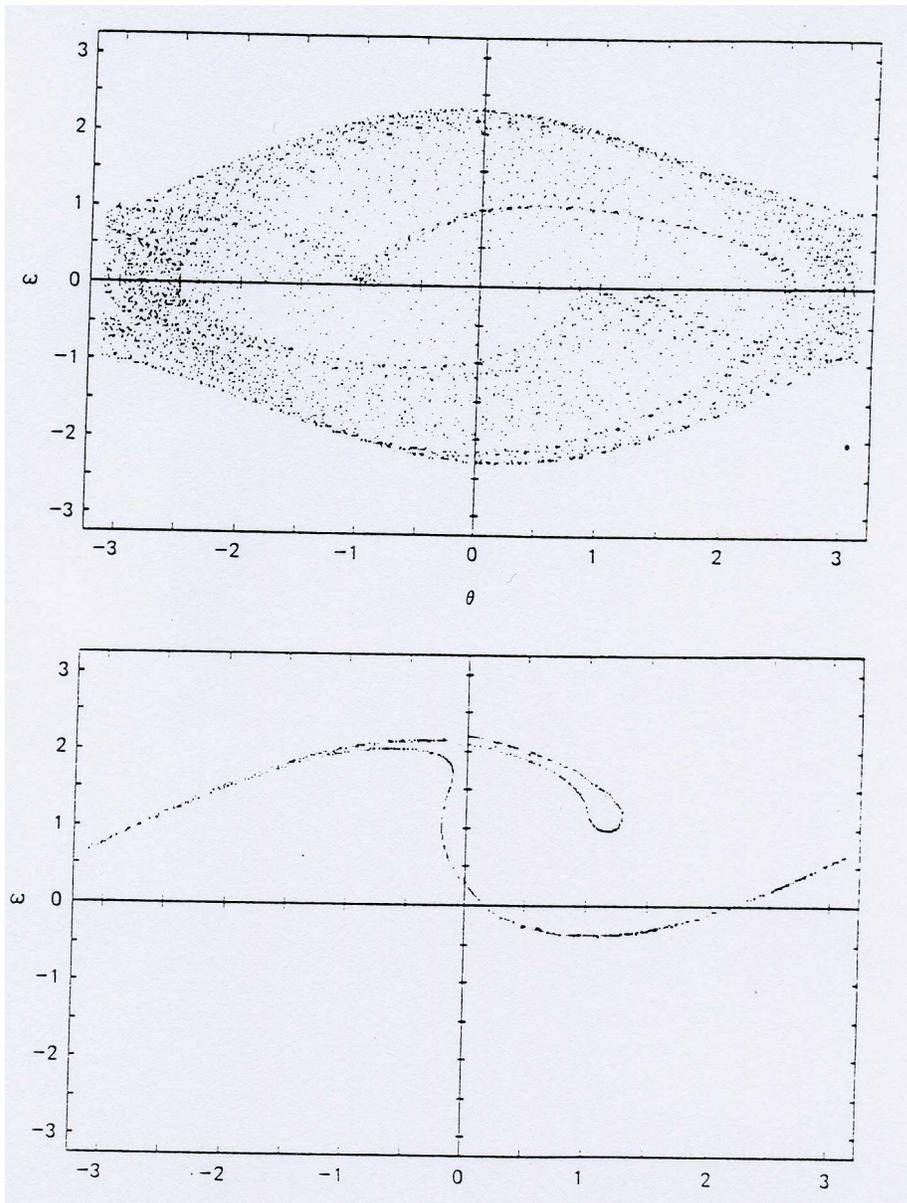
β) $f = 1.05$



Nun liegt eine *Periodenverdopplung* vor, die Bewegung des Pendels ist im nebenstehenden Bild dargestellt. Im „*Poincaréschnitt*“ (unten) erhält man die zwei Punkte abwechselnd.

γ) $f = 1.15$:

Nun ist die Bewegung „*chaotisch*“. Der unten gezeigte Poincaréschnitt besteht aus unendlich vielen Punkten. Betrachtet man einen Teilausschnitt vergrößert, so ist die Unterstruktur zur ursprünglichen Struktur ähnlich, etc. Man nennt diese Eigenschaft „**Selbstähnlichkeit**“ und die entstehende Punktmenge „**fraktal**“.



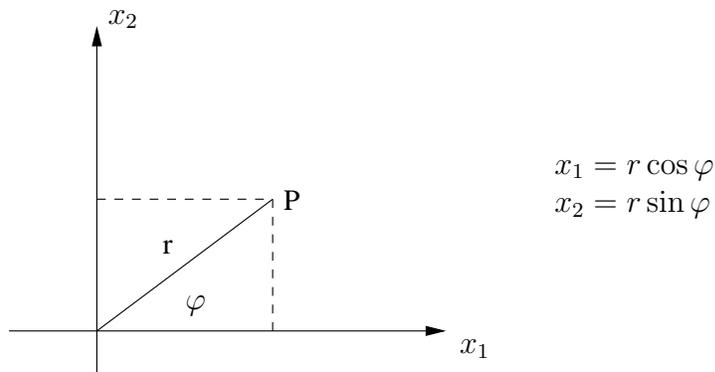
Diese Bilder sollen einen ersten Eindruck vom komplexen Lösungsverhalten selbst solch einfacher mechanischer Systeme wie dem untersuchten Pendel geben. Wir gehen an dieser Stelle noch nicht genauer auf die Konzepte ein, die entwickelt worden sind, um das Lösungsverhalten genauer zu verstehen. Wir kommen darauf erst im Abschnitt II und III der Vorlesung zurück und wenden uns zunächst wieder dem „konventionelleren Stoff“ üblicher Mechanikvorlesungen zu.

4 Zweidimensionale Bewegung eines Teilchens

Versucht man, die NG für die Bewegung in einem allgemeinen konservativen Kraftfeld, d. h. in einem Potential $V(x_1, x_2)$ zu lösen, so stellt man fest, dass die beiden gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung beziehungsweise das äquivalente System von *vier* Differentialgleichungen 1. Ordnung im Allgemeinen nur numerisch gelöst werden kann. Im Fall *nichtlinearer Systeme* können jetzt bereits ohne äußere Felder chaotische Lösungen auftreten. Ein typisches Beispiel ist das *Doppelpendel*. Eine geschlossene analytische Lösung erhält man für den Fall, dass $V(x_1, x_2)$ eine quadratische Form in x_1 und x_2 ist. Dieser Spezialfall wird in Kap. II, 4 in großer Allgemeinheit behandelt.

4.1 Bewegung in Zentralfeldern

Ein wichtiger geschlossen integrierbarer Fall sind die zweidimensionalen **Zentralfelder**, d. h. V hängt nur von $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ab. Für diesen Spezialfall ist die Verwendung kartesischer Koordinaten umständlich; es ist besser, mit **Polarkoordinaten** r, φ



zu arbeiten. Dann lautet der Ortsvektor des Teilchens auf seiner Trajektorie

$$\vec{r}(t) = r(t) \cos \varphi(t) \vec{e}_1 + r(t) \sin \varphi(t) \vec{e}_2.$$

Zur Berechnung von $\dot{\vec{r}}(t)$ verwenden wir jetzt die Kettenregel

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ &= (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) \dot{r} + (-r \sin \varphi \vec{e}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2) \dot{\varphi} \\ &=: \vec{g}_r \dot{r} + \vec{g}_\varphi \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die (ortsabhängigen) **Basisvektoren** \vec{g}_r und \vec{g}_φ eingeführt, wie man das allgemein bei „**krummlinigen Koordinaten**“ macht. Sie erweisen sich häufig (nicht nur im zweidimensionalen Fall) als sehr nützlich bei der Lösung mechanischer Probleme. Wir machen daher einen kurzen mathematischen Einschub über die Verwendung krummliniger Koordinaten.

4.2 krummlinige Koordinaten

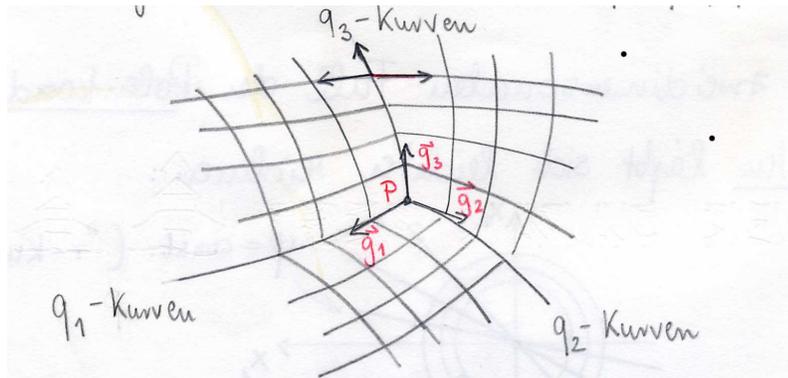
Wir veranschaulichen die Verwendung krummliniger Koordinaten im dreidimensionalen Raum. Sämtliche Resultate sind aber unabhängig von der Dimensionszahl des Raumes.

Die Komponenten des Ortsvektors \vec{r} des Punktes P bezüglich des kartesischen Systems $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ seien x_1, x_2, x_3

$$\vec{r} = \sum_i x_i \vec{e}_i =: x_i \vec{e}_i.$$

Wir verwenden hier die **Einsteinsche Summationskonvention: Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert.**

Jetzt gehen wir auf krummlinige Koordinaten über. Dazu überzieht man den Raum mit einem krummlinigen Koordinatennetz (q_1, q_2, q_3)



und legt das krummlinige Koordinatensystem fest durch Vorgabe der Funktionen

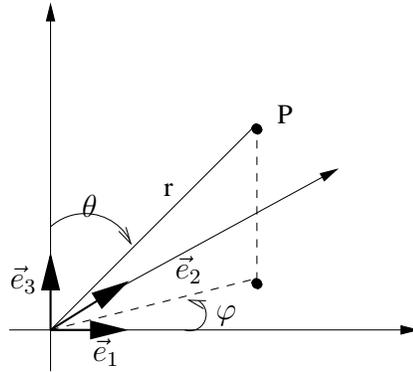
$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad i = 1, 2, 3$$

oder durch Vorgabe der Umkehrfunktionen $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$.

Wir nehmen an, dass die Funktionaldeterminante $|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}|$ höchstens in speziellen Punkten Null werden kann. Dann ist die (lokale) Umkehrbarkeit der Transformation bis auf die speziellen Punkte gewährleistet.

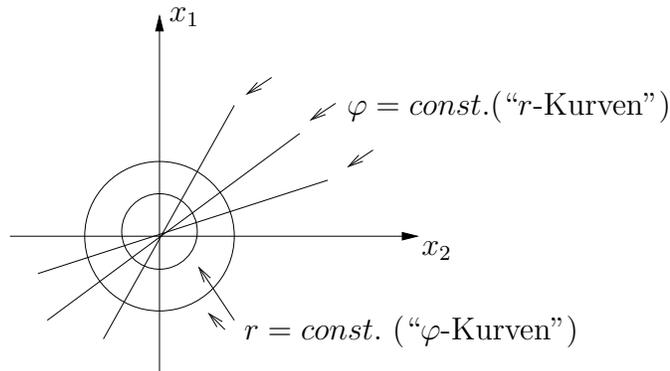
Beispiel: Für Polar- und Kugelkoordinaten (s.u.) existiert im Ursprung keine eindeutige Umkehrabbildung.

Ein wichtiges Beispiel sind die *Kugelkoordinaten*



$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi \\x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi \\x_3 &= r \cos \theta\end{aligned}$$

In den krummlinigen Koordinaten ist der Ortsvektor \vec{r} durch Angabe von q_1, q_2, q_3 festgelegt. Die als „ q_1 -Kurven“ bezeichneten Kurven erhält man, wenn man q_1 bei festem q_2 und q_3 variiert (analog die q_2 - und q_3 -Kurven). Im zweidimensionalen Fall der *Polarkoordinaten* lässt es sich leichter zeichnen:



Definiert man nun in Verallgemeinerung des Beispiels der Polarkoordinaten die **Basisvektoren** \vec{g}_i

$$\vec{g}_i(P) := \frac{\partial \vec{r}(P)}{\partial q_i}$$

so sieht man, dass der Basisvektor $\vec{g}_i(P)$ die q_i -Linie im Punkt P tangiert. Zu jedem Punkt $P(\{q_1, q_2, q_3\}) \equiv P(q)$ gehört also ein „Vektordreibein“ $\vec{g}_i(q)$, das die q_i -Koordinatenlinien tangiert. Dabei sind diese ortsabhängigen Basissysteme im Allgemeinen **nicht** orthonormiert. Wie hängt nun diese Basis $\{\vec{g}_i(P)\}$ mit der

festen Basis $\{\vec{e}_i\}$ zusammen? Aus der Definition und $\vec{r} = x_j \vec{e}_j$ folgt

$$\vec{g}_i = \frac{\partial}{\partial q_i}(x_j \vec{e}_j) = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec{e}_j.$$

Die „Basisvektoren“ $\{\vec{g}_i\}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Funktionaldeterminante $|\frac{\partial x_i}{\partial q_i}|$ von Null verschieden ist.

In der Umkehrrelation tritt die Inverse der Matrix $\partial x_j / \partial q_i$ auf

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \vec{g}_j.$$

Für das Beispiel der Kugelkoordinaten gilt also

$$\begin{aligned} (\vec{g}_r =) \vec{g}_1 &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3 \\ (\vec{g}_\theta =) \vec{g}_2 &= r \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_2 - r \sin \theta \vec{e}_3 \\ (\vec{g}_\varphi =) \vec{g}_3 &= -r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Länge der Vektoren \vec{g}_i und zur Bestimmung der Winkel, die sie miteinander bilden, untersucht man die Skalarprodukte („**Metrik**tensor“)

$$g_{ij} := \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \vec{e}_k \cdot \frac{\partial x_l}{\partial q_j} \vec{e}_l = \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j}.$$

Der Metriktensor wird im Lauf der Vorlesung bei der Berechnung der kinetischen Energie in krummlinigen Koordinaten eine wichtige Rolle spielen.

4.3 NG in krummlinigen Koordinaten: Lagrangegleichungen

Für eine (zeitunabhängige) Wahl der krummlinigen Koordinaten lässt sich der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ also einfach durch die \dot{q}_i und die ortsabhängigen Basisvektoren $\vec{g}_i(\{q\})$ ausdrücken

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j = \dot{q}_j \vec{g}_j$$

Betrachtet man \vec{v} nun als Funktion der q_i **und** der \dot{q}_i so erhält man durch partielle Differentiation nach \dot{q}_i

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \vec{g}_i$$

ebenfalls wieder den Basisvektor.

Wir betrachten nun die **NG für ein Teilchen**

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{f}.$$

In kartesischen Koordinaten erhält man die einzelnen Komponenten der Vektorgleichung durch skalare Multiplikation mit den \vec{e}_i . Zur Umschreibung in die krummlinigen Koordinaten – Ziel des Vorgehens ist ein System von Differentialgleichungen für die $q_i(t)$ – multiplizieren wir analog mit den Basisvektoren $\vec{g}_i(P(t))$, die aber nun im Gegensatz zum kartesischen Fall *zeitabhängig* sind

$$m\vec{g}_i \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{g}_i \cdot \vec{f}.$$

Wir addieren nun auf beiden Seiten $m\dot{\vec{g}}_i \cdot \vec{v}$ und erhalten damit auf der linken Seite die Zeitableitung von $m\vec{g}_i \cdot \vec{v}$

$$m \frac{d}{dt} (\vec{g}_i \cdot \vec{v}) = \vec{g}_i \cdot \vec{f} + m\vec{v} \cdot \dot{\vec{g}}_i$$

Wir verwenden nun auf der linken Seite $\vec{g}_i = \partial\vec{v}/\partial\dot{q}_i$, auf der rechten Seite die Definition $\vec{g}_i = \partial\vec{r}/\partial q_i$. Auf der rechten Seite kann man bei $\dot{\vec{g}}_i$ die Differentiationsreihenfolge von d/dt und $\partial/\partial q_i$ vertauschen

$$\dot{\vec{g}}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial q_i} (\vec{g}_j \dot{q}_j) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}.$$

Das liefert

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i} \cdot \vec{v} \right) = \vec{g}_i \cdot \vec{f} + m\vec{v} \cdot \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}.$$

Die Terme, die die Geschwindigkeiten enthalten, lassen sich als partielle Ableitungen der kinetischen Energie $T = m\vec{v}^2/2$ schreiben

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \vec{g}_i \cdot \vec{f} \quad i = 1, \dots, d}$$

Das ist die „bequemste“ Form der NG in krummlinigen Koordinaten. (Für den Fall, dass die q_i kartesische Koordinaten sind, sind das einfach wieder die Komponenten der „üblichen“ NG). In den krummlinigen Koordinaten ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{q}_i \vec{g}_i) \cdot (\dot{q}_j \vec{g}_j) = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \\ \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} &= m g_{ij} \dot{q}_j, \end{aligned}$$

wobei $g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_{ji}$ die Komponenten des Metriktensors sind.

Für den Fall *konserver* Kraftfelder $\vec{f}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}}$ vereinfacht sich der Ausdruck, der die Kraft enthält

$$\vec{f} \cdot \vec{g}_i = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V).$$

Da nach Voraussetzung V unabhängig von den \dot{q}_i ist, erhält man schließlich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad ; \quad L = T - V.$$

Die Größen $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ bezeichnet man als „*kanonische Impulse*“ (wir kommen darauf später ausführlich zurück). Das ist die „*Langrange-Form*“ der Bewegungsgleichungen, der wir später ein ausführliches Kapitel widmen. Die Größe $L = T - V$ bezeichnet man als „**Lagrangefunktion**“. Zum Abschluss dieser Umschreibung der NG machen wir noch zwei *Anmerkungen*:

- a) Die Herleitung lässt sich praktisch wörtlich wiederholen, falls die Wahl der krummlinigen Koordinaten *zeitabhängig* ist, d. h. $x_i = x_i(q_1, \dots, q_d; t)$ gilt. Dann ist

$$\vec{v} = \dot{q}_j \vec{g}_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

d.h. $T = \frac{m}{2} \left(\dot{q}_j \vec{g}_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2,$

aber die Herleitung und die Endform der Gleichungen ändert sich *nicht*. Es gilt z. B. weiterhin

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial q_i} = \dot{\vec{g}}_i.$$

($\partial \vec{r} / \partial t$ ist die partielle Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit bei *festgehaltenen* q_i).

- b) Da die kinetische Energie für ein System aus N Massenpunkten additiv ist, d. h. $T = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} \vec{v}_\alpha^2$, erhält man durch Addition der Gleichungen für jedes Teilchen ($\vec{f} \rightarrow \vec{f}_\alpha; \vec{f}_\alpha$ Kraft auf das α -te Teilchen) allgemein ($x_i = x_i(q_1, \dots, q_{N \cdot d}; t); i = 1, \dots, N \cdot d$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \quad (i = 1, \dots, N \cdot d)$$

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} .$$

Nach diesen wichtigen allgemeinen Betrachtungen kehren wir zur Behandlung zweidimensionaler Systeme zurück und betrachten die Bewegung in einem **Zentralfeld** $V(r)$ wobei $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist.

Als krummlinige Koordinaten verwenden wir Polarkoordinaten $(q_1, q_2) \hat{=} (r, \varphi)$. Wie auf S. 37 gezeigt, gilt

$$\begin{aligned} (\vec{g}_r =) \vec{g}_1 &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 \\ (\vec{g}_\varphi =) \vec{g}_2 &= -r \sin \varphi \vec{e}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 , \end{aligned}$$

und daraus

$$g_{11} = 1; \quad g_{22} = r^2; \quad g_{12} = g_{21} = 0 ,$$

d. h. \vec{g}_r und \vec{g}_φ sind **orthogonal**, was sich natürlich auch durch eine einfache geometrische Überlegung ergibt (s. Skizze S.39). Damit erhält man die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m \dot{q}_i \dot{q}_j g_{ij}$ in Polarkoordinaten

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) .$$

In den Lagrangeleichungen benötigen wir folgende partielle Ableitungen

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 ; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 .$$

Damit lauten sie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi} . \end{aligned}$$

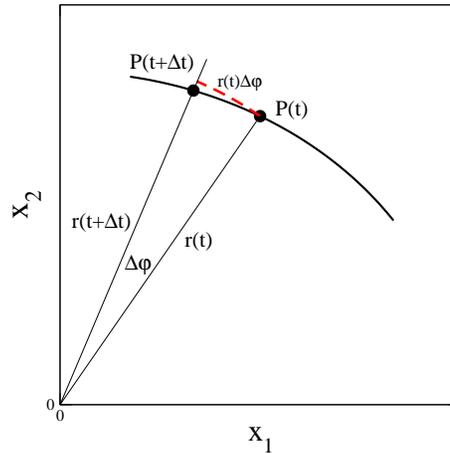
Der erste Term auf der Gleichung für $m\dot{r}$ ist die „**Zentrifugalkraft**“. Wir werden sie im Kapitel über “bewegte Bezugssysteme” ausführlich diskutieren.

4.4 Bewegung in Zentralpotentialen: Lösung mit Hilfe der Drehimpuls- und Energieerhaltung

Für Zentralfelder verschwindet $\partial V/\partial\varphi$ und die 2. Gleichung liefert den **Erhaltungssatz**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) &= 0 \\ mr^2\dot{\varphi} &= \text{const.} = l.\end{aligned}$$

Die erhaltene Größe $r^2\dot{\varphi}$ hat eine anschauliche geometrische Bedeutung. Dazu betrachten wir eine Teilchenbahn in der Ebene für den Fall $l \neq 0$:



Es sei $S(t)$ die im Zeitintervall $[t_0, t]$ vom Ortsvektor $\vec{r}(t)$ überstrichene Fläche. In linearer Ordnung in Δt ist sie durch das „Tortenstück“ mit dem Öffnungswinkel $\Delta\varphi \approx \dot{\varphi}(t)\Delta t$ gegeben

$$\Delta S := S(t + \Delta t) - S(t) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\Delta t + O(\Delta t)^2.$$

Also ist die „**Flächengeschwindigkeit**“ dS/dt zeitlich konstant

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \text{const.} = l/2m.$$

In gleichen Zeitintervallen werden gleiche Flächen überstrichen („2. Keplersches Gesetz“). Dieser „**Flächensatz**“ ist eine Manifestation der **Drehimpulserhaltung**:

Um dies zu zeigen, betrachten wir ein **dreidimensionales** Zentralpotential

$V(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$ und das zugehörige Kraftfeld $\vec{f} \sim \vec{r}$. Dann ist der Drehimpuls \vec{l} , wegen $\dot{\vec{l}} = \vec{r} \times \vec{f} = 0$, eine **Erhaltungsgröße**:

$$\vec{l}(t) = \vec{l}_0 .$$

Die allgemeine Gleichung $\vec{l} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r} = 0$ ist für $\vec{l}(t) = \vec{l}_0$ die Gleichung für die **Ebene** durch den Ursprung, die die Bahn des Teilchens enthält. Legt man das Koordinatensystem so, dass $\vec{l}_0 \sim \vec{e}_3$ gilt, so findet die Bewegung im dreidimensionalen Zentralfeld in der x_1, x_2 -Ebene statt, d.h. die Beschreibung der Bewegung im dreidimensionalen Zentralfeld ist identisch zu der, in einem Zentralfeld in einer "zweidimensionalen Welt". Für die Bewegung in der x_1, x_2 -Ebene gilt

$$\vec{r} = r\vec{g}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{g}_r + \dot{\varphi}\vec{g}_\varphi .$$

Das liefert für den Drehimpuls

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mr\dot{\varphi} \vec{g}_r \times \vec{g}_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \vec{e}_3 ,$$

d.h. die eingeführte Konstante l hat die Bedeutung von

$$l_3 = mr^2\dot{\varphi} .$$

Damit ist der Zusammenhang zum Flächensatz hergestellt.

Bevor wir zur Diskussion der ebenen Bewegung für den Fall $l \neq 0$ zurückkehren, sei kurz der **Spezialfall** $l = 0$ behandelt, d.h. die Anfangsbedingung sei so gewählt, dass $r^2\dot{\varphi} = 0$ gilt. Für $r \neq 0$ impliziert das

$$\varphi = \text{const} ,$$

d.h. die Bewegung erfolgt längs einer **Geraden durch den Ursprung**. Die Tatsache, dass beim Durchgang durch den Ursprung φ in $\varphi + \pi$ übergeht, sieht man am einfachsten, wenn man $\vec{r}(t) = s(t)\vec{e}_0$ schreibt, wobei \vec{e}_0 der Einheitsvektor in Richtung des Anfangspunktes \vec{r}_0 ist. Dann geht die NG in die **eindimensionale** NG: $m\ddot{s} = -\partial V(|s|)/\partial s$ über, die wir bereits in einem früheren Teilkapitel behandelt haben. Daher nun zurück zum "generischen" Fall $l \neq 0$. Dabei stellt es sich als am einfachsten heraus, von der Erhaltung der Gesamtenergie auszugehen:

In der Gesamtenergie $E = T + V$ läßt sich der Term $\sim \dot{\varphi}^2$ mit Hilfe der Drehimpulserhaltung $mr^2\dot{\varphi} = l$ eliminieren:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \end{aligned}$$

Man erhält also dieselbe Form wie bei einer eindimensionalen Bewegung in einem „effektiven Potential“

$$V_{\text{eff}}(r) := V(r) + \frac{l^2}{2mr^2},$$

wobei die Größe $l^2/(2mr^2)$ „Zentrifugalenergie“ heisst („Drehimpulsbarriere“)

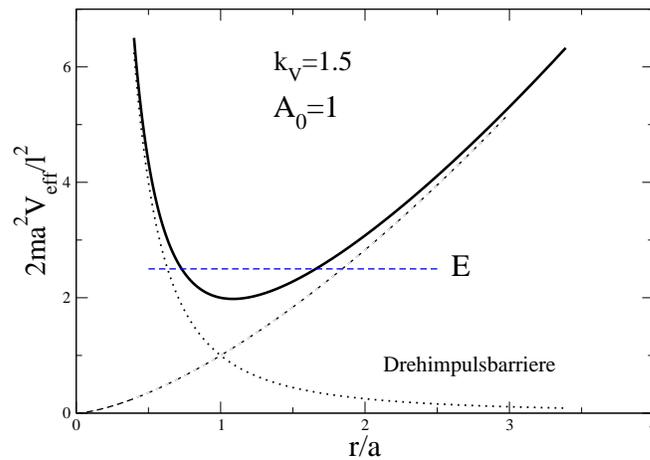
Im Folgenden betrachten wir zwei Typen von Potentialen

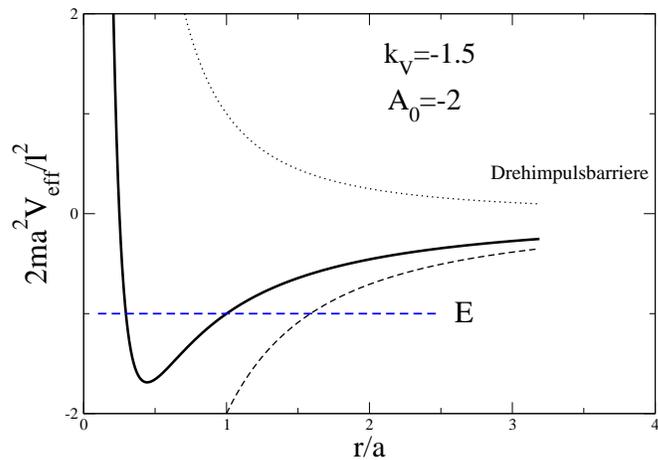
$$a) \quad V(r) = V_0(r/a)^{k_V} \quad ; \quad V_0 k_V > 0, \quad k_V + 2 > 0,$$

sowie ein ideal reflektierendes (kreisrundes) **Billard**

$$b) \quad V(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \infty & r > R \end{cases}$$

Für das **Potenzgesetz** von a) ergibt sich folgendes Bild für V_{eff} und seine beiden Anteile

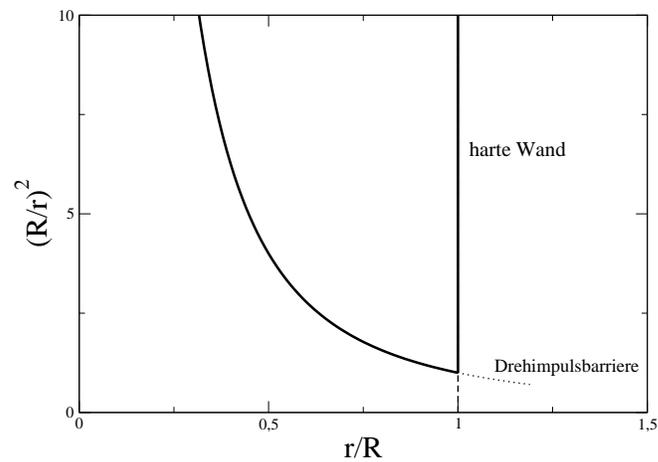




Dabei sind die Potentiale in Einheiten von $l^2/(2ma^2)$ aufgetragen und $A_0 := 2ma^2 V_0/l^2$.

Für $k_V > 0$ tritt für jeden Wert der Energie E eine *finite* Bewegung auf, während für $-2 < k_V < 0$ die Bewegung für $E < 0$ finit, für $E > 0$ aber infinit („Streuung“, siehe später) ist.

Im Beispiel b) ergibt sich folgendes Bild



Hier sind die Bewegungen immer finit mit $r(t) \leq R$. Für dieses Beispiel sind die Bahnkurven besonders einfach zu konstruieren (s.u.).

Diese Beispiele werden später verwendet, um das folgende allgemeine Lösungsverfahren zu veranschaulichen:

Analog zum Fall der eindimensionalen Bewegung (S.18/19) erhält man aus der Energierhaltung

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}$$

durch Integration die Funktion $t(r)$ und daraus $r(t)$. Von den vier Anfangsdaten $r(t_0), \dot{r}(t_0), \varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)$ bestimmen $r(t_0), \dot{r}(t_0), \dot{\varphi}(t_0)$ die Konstanten der Bewegung l und E , die in obige Differentialgleichung eingehen. Also hängt $r(t)$ parametrisch von l, E und $r(t_0)$ ab.

Zur Bestimmung der Bahnkurve $P(r(t), \varphi(t))$ **mit deren zeitlichen Durchlaufung** benötigt man noch die Funktion $\varphi(t)$. Um sie zu erhalten, verwendet man die Drehimpulserhaltung (Flächensatz) $mr^2(t)\dot{\varphi}(t) = l$. Direkte Integration liefert

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \frac{l}{m} \int_0^t \frac{1}{r^2(t')} dt'$$

Die beiden Schritte, erst Berechnung von $r(t)$ und anschließend $\varphi(t)$, sei nun in einfachen **Grenzfällen** und Beispielen erläutert:

1) **Kreistrajektorie:** $r(t) = \text{const.}$

Für unser Beispiel a) hat das effektive Potential V_{eff} ein **Minimum** bei $r = r_0$. Wählt man nun $E = V_{\text{eff}}(r_0)$, so erfüllt

$$r(t) = r_0 = \text{const.}$$

die Energierhaltung, d.h. die Bahnkurve ist ein **Kreis um den Ursprung**. Die für diese Bewegungsform gültige Bedingung $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0$ bedeutet, dass sich die anziehende Zentralkraft ("Zentripetalkraft") und die Zentrifugalkraft exakt kompensieren

$$-V'(r_0) = \frac{l^2}{mr_0^3} = mr_0\dot{\varphi}^2$$

Wegen $r(t) \equiv r_0$ lässt sich das Integral, das $\varphi(t) - \varphi(0)$ bestimmt, trivial ausführen und man erhält

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{l}{mr_0^2}t = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t,$$

wobei wir wieder $l = mr_0^2\dot{\varphi}(0)$ verwendet haben: Der Kreis wird mit **konstanter Winkelgeschwindigkeit** durchlaufen, was auf Grund der Radialsymmetrie des Problems zu erwarten war. Statt $\dot{\varphi}(0)$ schreiben wir (oBdA $l > 0$) auch $\omega_\varphi^{(K)}$

$$\omega_\varphi^{(K)} := \frac{l}{mr_0^2}$$

2) **harmonische Näherung** für $r(t)$:

Wählt man die Gesamtenergie E nur ein **wenig** größer als $E = V_{\text{eff}}(r_0)$, so kann man $V_{\text{eff}}(r)$, wie in der Abbildung auf S.28, durch eine **Parabel** approximieren

$$V_{\text{eff}}(r) \rightarrow V_{\text{eff}}^{(P)}(r) = V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}V_{\text{eff}}''(r_0)(r - r_0)^2.$$

Damit ist das Problem der Berechnung von $r(t)$ analog zum eindimensionalen **harmonischen Oszillator** mit der Lösung

$$r(t) = r_0 + \eta r_0 \cos(\omega_r^{(P)}t + \delta), \quad \omega_r^{(P)} = \sqrt{\frac{V_{\text{eff}}''(r_0)}{m}}.$$

Die zugehörige Bahnkurve liegt im *Kreisring* zwischen $r_0(1 - \eta)$ und $r_0(1 + \eta)$. Der Abstand des Teilchens vom Ursprung ist eine periodische Funktion der Zeit mit der Schwingungsdauer $T_r^{(P)} = 2\pi/\omega_r^{(P)}$. Die Bahnkurven sind im allgemeinen **nicht geschlossen**.

Zur Berechnung von $\varphi(t)$ verwenden wir jetzt unsere Annahme der “kleinen Abweichung”, die für $r(t)$ die Bedeutung $0 < \eta \ll 1$ hat. Dann kann man $1/r(t)^2$ im Integranden bis zum Term linear in η entwickeln und erhält

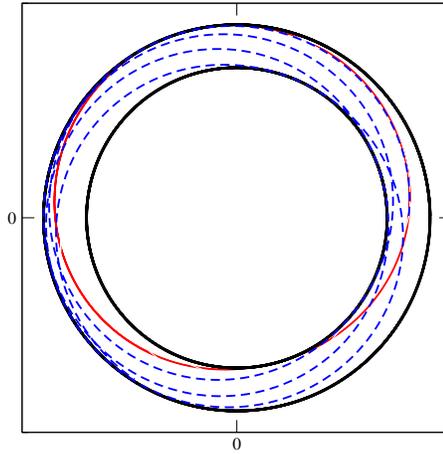
$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi(0) &= \frac{l}{mr_0^2} \int_0^t \left(1 - \frac{2\eta}{r_0} \cos(\omega_r^{(P)}t' + \delta) \right) dt' + O(\eta^2) \\ &= \frac{l}{mr_0^2} \left(t - \frac{2\eta}{\omega_r^{(P)}r_0} [\sin(\omega_r^{(P)}t + \delta) - \sin \delta] \right) + O(\eta^2). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Winkel $(\Delta\varphi)_{T_r^{(P)}}$, der über **eine Periode der Radialbewegung** überstrichen wird. Für $t = T_r^{(P)}$ ergibt sich

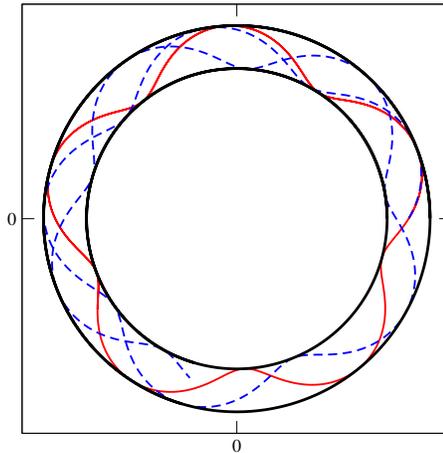
$$(\Delta\varphi)_{T_r^{(P)}} = \frac{l}{mr_0^2} T_r^{(P)} + O(\eta^2) = \frac{\omega_\varphi^{(K)}}{\omega_r^{(P)}} 2\pi + O(\eta^2).$$

Für die exakte Lösung für vorgegebenes $V(r)$ gilt:

Nur falls $(\Delta\varphi)_{T_r} = 2\pi(n_1/n_2)$ mit $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ ist, erhält man eine **geschlossene** Bahn. Für den wichtigen Spezialfall $n_1 = 1$ schließt die Bahn bereits nach dem erstem Umlauf. Für *irrationale* Werte von $(\Delta\varphi)_{T_r}/2\pi$ erhält man *offene* Bahnen. Hier einige Bahnen für verschieden Werte von $(\Delta\varphi)_{T_r}/2\pi$



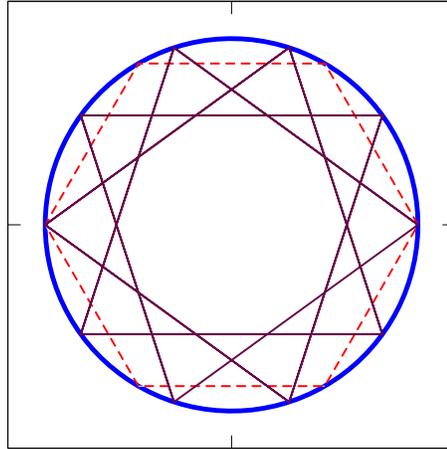
Die durchgezogene (geschlossene) Kurve entspricht $(\Delta\varphi)_{T_r}/2\pi = 1$, die gestrichelte (offene) Kurve $(\Delta\varphi)_{T_r}/2\pi = 1 + \sqrt{2}/10$.



Die durchgezogene (geschlossene) Kurve entspricht $(\Delta\varphi)_{T_r}/2\pi = 0.2$, die gestrichelte (offene) Kurve $(\Delta\varphi)_{T_r}/2\pi = 0.2 + \sqrt{2}/100$.

3) „Kreisbillard“:

Für dieses Beispiel kann man die Bahnkurven besonders einfach konstruieren, da sich das Teilchen zwischen den Reflektionen an der harten Wand auf **Gera-**
denabschnitten bewegt. Die Abbildung zeigt zwei **geschlossene** Bahnen mit $(\Delta\varphi)_{T_r} = 2\pi/6$ (gestrichelte Kurve) und $(\Delta\varphi)_{T_r} = 2\pi(3/5)$



Die Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$ über eine Periode der “ r ”-Bewegung lassen sich hier auch ohne Integration angeben. Dazu betrachten wir den Geradenabschnitt

$$x = a(< R) ; \quad y = v_0 t ,$$

wobei $|t| \leq T_r/2$ gilt, mit $T_r/2 = \sqrt{R^2 - a^2}/v_0$. Das liefert für dieses Zeitintervall

$$r(t) = \sqrt{a^2 + (v_0 t)^2} , \quad \varphi(t) = \arctan(v_0 t/a) ,$$

und man erhält für den in einer Periode der “ r ”-Bewegung übertrichenen Winkel

$$(\Delta\varphi)_{T_r} = 2 \arctan(\sqrt{R^2 - a^2}/a) ,$$

was sich auch mit Hilfe des “Pythagoras” direkt aus einer Skizze ablesen lässt.

Soweit die Beispiele. Wir kommen nun wieder zum **allgemeinen Fall**:

Ist man nur an der **Bahnkurve ohne zeitliche Durchlaufung** interessiert, so kann man mit Hilfe vom $mr^2 d\varphi = l dt$ die **Zeit** aus $dr/dt = \pm \sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(r))/m}$ **eliminieren** und erhält durch Integration von

$$d\varphi = \pm \frac{l}{m} \frac{1/r^2}{\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(r))/m}} dr$$

das Ergebnis

$$\varphi - \varphi_{\min} = \pm \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^r \frac{dr'/r'^2}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r')}}$$

Es genügt, diese Relation für *einen* „Durchlauf“ von r zwischen r_{\min} und r_{\max} zu integrieren. Wir werden dies beim Keplerproblem $V(r) = -\alpha/r$ im nächsten

Kapitel ausführlich diskutieren. Der überstrichene Winkel während einer Schwingungsperiode T_r von $r(t)$ ergibt sich dann zu

$$(\Delta\varphi)_{T_r} = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l/r^2}{\sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))}} dr$$

Damit schließen wir die allgemeine Diskussion der Bewegung in einem Zentralpotential ab und wenden uns der **wichtigen Anwendung** auf das Zweikörperproblem “Erde-Sonne” zu.

5 Das Zweikörperproblem

5.1 NG für die Relativbewegung

Der Spezialfall $N = 2$, d.h. das Zweikörperproblem spielte in der Entwicklung der Mechanik eine zentrale Rolle. Wir betrachten den Fall, dass sich die Kräfte, die die beiden Teilchen aufeinander ausüben, aus einem Zweiteilchenpotential $v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ ableiten lassen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{\partial v}{\partial \vec{r}_1} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{\partial v}{\partial \vec{r}_2} \left(= \frac{\partial v}{\partial \vec{r}_1} \right). \end{aligned}$$

Addition der Gleichungen liefert für den Schwerpunkt $\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)/M$ mit $M := m_1 + m_2$

$$M \ddot{\vec{R}} = 0$$

als Spezialfall der allgemeinen Überlegung von Seite 10, d.h. der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig. Multipliziert man die erste Gleichung mit m_2 und die zweite mit m_1 , so erhält man für den Vektor

$$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2; \quad \left(\begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{array} \right),$$

der die Relativbewegung beschreibt

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial v(|\vec{r}|)}{\partial \vec{r}}.$$

Dabei ist $\mu := m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ die so genannte „**reduzierte Masse**“. Damit ist das Zweiteilchenproblem zurückgeführt auf die Bewegung **eines** Teilchens der

Masse μ im **äußeren Potential** $v(|\vec{r}|)$. Von besonderem Interesse ist natürlich der Fall, dass sich die beiden Teilchen im **dreidimensionalen** Raum bewegen. Dann lässt sich obige Bewegungsgleichung für die Relativkoordinaten auf den in Abschnitt c) diskutierten „zweidimensionalen Fall“ zurückführen, da das zum Potential gehörige Kraftfeld

$$-\frac{\partial v(|\vec{r}|)}{\partial \vec{r}} = -v'(r)(\vec{r}/r)$$

ein *Zentralfeld* ist. Für solche ist der Drehimpuls $\vec{l}_{rel} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ erhalten

$$\frac{d\vec{l}_{rel}}{dt} = \mu \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) = 0.$$

Dann liegt, wie bereits diskutiert, jede Bahnkurve in einer Ebene, die senkrecht zu \vec{l}_{rel} ist. Wählt man die z -Achse in Richtung von \vec{l}_{rel} , so haben wir das Problem auf den zweidimensionalen Fall reduziert.

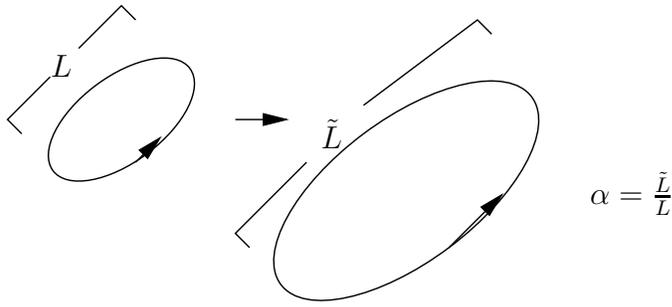
Bevor wir den wichtigen Spezialfall des $1/r$ -Potentials diskutieren, wollen wir zeigen, dass unter gewissen Annahmen Aussagen über das Lösungsverhalten möglich sind, ohne die Bewegungsgleichung explizit zu lösen. Die beiden folgenden Abschnitte sind mit einem (*) versehen, was andeuten soll, dass sie beim ersten Lesen übersprungen werden können.

5.2 Mechanische Ähnlichkeit (*)

Gegeben sei ein Kraftfeld $\vec{f}(\vec{r})$ mit der Eigenschaft

$$\vec{f}(\alpha \vec{r}) = \alpha^k \cdot \vec{f}(\vec{r}) \quad \text{für alle } \alpha > 0.$$

Beispiele sind das Gravitationsfeld eines Massenpunktes ($k = -2$) oder ein isotroper harmonischer Oszillator ($k = 1$). Sei $\vec{r}(t)$ eine Lösung der NG, d.h. $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{f}(\vec{r}(t))$. Wir ändern nun durch den „Skalenfaktor“ α die *räumliche* Ausdehnung der Bahn.



(analog für offene Bahnen)

Wir zeigen dann, dass man durch „Umskalen“ der Zeit für Kraftfelder, die obige Bedingung erfüllen, eine *neue Lösung der NG* erhalten kann. Wir nennen die „umgeskalte“ Zeitvariable τ und setzen

$$\tau = \alpha^{-\nu} t ,$$

wobei ν so festgelegt wird, dass man eine neue Lösung $\vec{x}_{(\alpha)}(\tau)$ von der Form

$$\vec{x}_{(\alpha)}(\tau) := \alpha \vec{r}(t) = \alpha \vec{r}(\alpha^\nu \tau)$$

erhält. Differentiation nach τ liefert

$$m \frac{d^2 \vec{x}_{(\alpha)}(\tau)}{d\tau^2} - \vec{f}(\vec{x}_{(\alpha)}(\tau)) = \alpha^{2\nu+1} m \ddot{\vec{r}}(t) - \alpha^k \vec{f}(\vec{r}(t))$$

Setzt man nun $2\nu + 1 = k$, so verschwindet die rechte Seite nach Voraussetzung und $\vec{x}_{(\alpha)}(\tau)$ ist ebenfalls Lösung der NG. Also gilt

$$\boxed{\frac{\tau}{t} = \alpha^{(1-k)/2} = \left(\frac{\tilde{L}}{L} \right)^{(1-k)/2} ,}$$

da α das Verhältnis (\tilde{L}/L) der neuen zur alten Längenskala ist. Für das Verhältnis der Umlaufzeiten gilt dann ebenfalls $\tilde{T}/T = \alpha^{(1-k)/2}$. Für $k = -2$ ist dies bereits das 3. Keplersche Gesetz: **Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der Abstände.** Für den Fall des isotropen Oszillators ($k = 1$) folgt die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Auslenkung.

Vom historischen Standpunkt (Newton) ist die umgekehrte Schlussweise relevanter: Der (gemessene) Exponent β in

$$\frac{\tilde{T}}{T} = \left(\frac{\tilde{L}}{L} \right)^\beta$$

liefert den Exponenten k des Kraftgesetzes.

5.3 Virialsatz (*)

Wenn die Bewegung des Teilchens in einem konservativen Kraftfeld stattfindet, dessen Potential $V(\vec{r})$ eine homogene Funktion ist, d.h. $V(\alpha\vec{r}) = \alpha^{k_V} V(\vec{r})$, dann existiert eine einfache Beziehung zwischen dem **Zeitmittelwert** der kinetischen und potentiellen Energie, falls die Bewegung in einem *beschränkten Raumgebiet* verläuft. Der Zeitmittelwert einer zeitabhängigen Größe ist dabei definiert als

$$\bar{f} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(t') dt' .$$

Mittlung der Relation

$$m \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = m\dot{\vec{r}}^2 + m\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = 2T - \vec{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$$

liefert unter der *Annahme*, dass $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ beschränkt ist

$$2\bar{T} - \overline{\vec{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m}{t} \left[\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) - \vec{r}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0) \right] = 0 .$$

Für den Fall „homogener“ Potentiale lässt sich der Mittelwert von $\vec{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$ durch den Mittelwert von V ausdrücken. Differentiation von $V(\alpha\vec{r}) = \alpha^{k_V} V(\vec{r})$ nach α liefert für $\alpha = 1$

$$\vec{r} \cdot \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = k_V V(\vec{r})$$

und damit

$$\boxed{2\bar{T} = k_V \bar{V}} .$$

Diese Aussage bezeichnet man als **Virialsatz**. Sie lässt sich leicht auf den Fall von mehreren Teilchen verallgemeinern, die vermöge „homogener“ Zweiteilchenpotentiale wechselwirken. Mit Hilfe der (gemittelten) Energieerhaltung $\bar{T} + \bar{V} = E$ folgt

$$\bar{V} = \frac{2}{k_V + 2} E \quad ; \quad \bar{T} = \frac{k_V}{k_V + 2} E .$$

Für das Keplerproblem ($k_V = -1$) gilt also $\bar{V} = 2E$ und $\bar{T} = -E$. Im Fall des isotropen Oszillators ($k_V = 2$) gilt dagegen $\bar{T} = \bar{V} = E/2$.

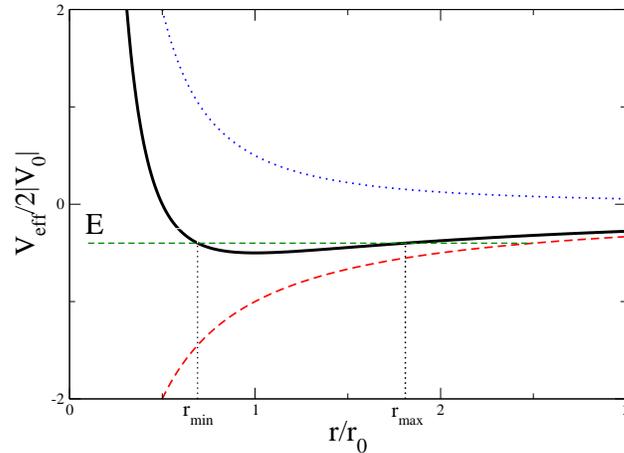
5.4 Die Keplerschen Gesetze

Besonders wichtig sind die Zentralfelder, bei denen die potentielle Energie umgekehrt proportional zu r , die zugehörige Kraft also umgekehrt proportional zu r^2 ist. Dazu gehören das Newtonsche **Gravitationsfeld** und das elektrostatische **Coulombfeld**; das erstere wirkt bekanntlich anziehend, während das letztere entweder anziehend oder abstoßend sein kann. Wir bezeichnen die Masse zunächst wieder mit m , kommen aber später im Kapitel wieder auf das Zweikörperproblem zurück, wo wir m durch die reduzierte Masse μ ersetzen müssen.

Zur Herleitung der Keplerschen Gesetze betrachten zunächst den **anziehenden** Fall $V(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$. Das effektive Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

hat dann für $l \neq 0$ folgende Gestalt



Wir beginnen wieder mit dem einfachen Spezialfall der Kreisbewegung und kleinen Abweichungen davon. Das Minimum erhält man aus der Bedingung $V'_{\text{eff}}(r)|_{r_0} = 0$, d.h. ($V_0 := V_{\text{eff}}(r_0)$)

$$\frac{\alpha}{r^2} = \frac{l^2}{mr^3} \quad \rightarrow \quad r_0 = \frac{l^2}{\alpha m} \quad ; \quad V_0 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 m}{l^2} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{r_0}$$

Verwendet man nun $l = mr_0^2 \dot{\varphi}$ mit der bei der Kreisbewegung konstanten Winkelgeschwindigkeit, so kann man $r_0 = l^2/\alpha m$ schreiben als

$$\frac{\alpha}{m} = r_0^3 \dot{\varphi}^2 \quad \rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} r_0^{3/2} \quad ,$$

wobei T die Umlaufzeit ist. Das ist das **3.Keplersche Gesetz** für den Spezialfall der Kreisbewegung.

Zur Diskussion der kleinen Abweichungen von der Kreisbahn benötigt man noch die zweite Ableitung von V_{eff}

$$V_{\text{eff}}''(r_0) = -\frac{2\alpha}{r_0^3} + \frac{3l^2}{mr_0^4} = \frac{l^2}{mr_0^4}$$

Das ergibt für die Frequenz ω_r der Radialbewegung $r(t)$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V_{\text{eff}}''(r_0)}{m}} = \frac{|l|}{mr_0^2}.$$

Also sind die Frequenzen ω_r und ω_φ (s.S.48) **gleich**. Gemäß der allgemeinen Diskussion der kleinen Abweichungen von der Kreisbewegung in Zentralpotentialen folgt damit, dass die Bahnkurve nach **einer Umdrehung** schließt. Wir zeigen im folgenden, dass das für das $1/r$ -Potential für $-|V_0| \leq E < 0$, d.h. den Fall der *finiten* Bewegung **allgemein** gilt.

In diesem Fall erhält man für r_{\min} und r_{\max}

$$r_{\min}^{\max} = -\frac{\alpha}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + E/|V_0|} \right).$$

Die Abhängigkeit von l steckt dabei in $|V_0|$. Man sieht aber, dass die **Summe** aus r_{\max} und r_{\min} von l **unabhängig** ist

$$\frac{1}{2} (r_{\max} + r_{\min}) = \frac{\alpha}{2|E|}.$$

Wir betrachten jetzt die Form der Bahnkurven. Dazu verwenden wir das allgemeine Resultat von S.51

$$d\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}} \frac{ldr}{r^2}.$$

Wir substituieren zunächst $u = 1/r$ und erhalten mit $dr = -du/u^2$

$$d\varphi = \mp \frac{l}{\sqrt{2m}} \frac{du}{\sqrt{E + \alpha u - (l^2/2m)u^2}}.$$

Wir bringen nun den Radikanden durch quadratische Ergänzung auf die Form

$$E' - \frac{l^2}{2m} (u - u_0)^2 = E' - \frac{l^2}{2m} u^2 + \frac{l^2}{m} uu_0 - \frac{l^2}{2m} u_0^2.$$

Also ist

$$u_0 = \frac{\alpha m}{l^2} = \frac{1}{r_0}; \quad E' = E + \frac{\alpha^2 m}{2l^2} = |V_0|(1 + E/|V_0|) \geq 0.$$

Durch die weitere Substitution $v = u - u_0$ ergibt sich ($l > 0$)

$$d\varphi = \mp \frac{dv}{\sqrt{\frac{2mE'}{l^2} - v^2}} =: \mp \frac{dv}{\sqrt{A^2 - v^2}}; \quad A^2 = (1 + E/|V_0|)/r_0^2 \geq 0.$$

Elementare Integration liefert dann

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \arccos(v/A) = \pm \arccos \left[\frac{1}{A} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right].$$

Wir drehen nun unser Koordinatensystem so, dass $\varphi_0 = 0$ ist. Definiert man noch die **Exzentrizität** $\epsilon := r_0 A = \sqrt{1 + E/|V_0|}$, so erhält man

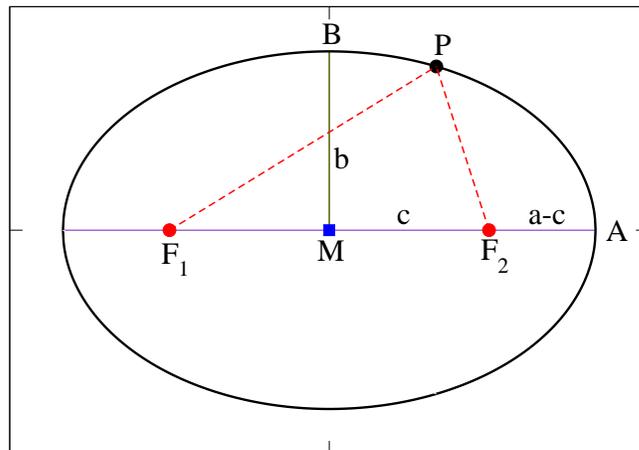
$$\boxed{\frac{r_0}{r} = 1 + \epsilon \cos \varphi}.$$

Das ist die gesuchte **Bahngleichung**. Für den betrachteten Fall $-|V_0| \leq E < 0$, d.h. $0 \leq \epsilon < 1$ ist das die Gleichung für eine **Ellipse**. Da dies nicht mehr zum Standardlehrstoff in der Schule gehört, nun ein kurzer mathematischer Einschub, bevor es mit der physikalischen Diskussion weitergeht.

Einschub zur Definition und Beschreibung von **Ellipsen**:

Definition: Eine Ellipse ist die Menge von Punkten P in einer Ebene, deren Abstände von zwei **festen** Punkten F_1 und F_2 denselben Wert der **Summe** haben:

$$|F_1 P| + |F_2 P| = \text{const.}$$



Der Abstand der beiden **Fokuspunkte** F_1 und F_2 wird (s. Abbildung) $2c$ genannt, die Länge der kurzen Halbachse $b = |MB|$ und der langen Halbachse $a = |MA|$. Wählt man als Punkt auf der Ellipse den Punkt A , so ergibt sich für die Summe der Abstände der Wert $2a$. Wählt man dagegen den Punkt B , so folgt mit Hilfe des "Pythagoras" $c^2 + b^2 = a^2$.

Zur mathematischen Beschreibung der Ellipse gibt es zwei verschiedene gängige Vorgehensweisen.

a) Man legt den **Ursprung** des Koordinatensystems in einen der **Fokusse**, z.B. in F_2 . Dann ist $\vec{x} = F_2P$ und die obige Bedingung lautet mit $\vec{c} := MF_2$

$$|\vec{x}| + |\vec{x} + 2\vec{c}| = 2a$$

Quadriert man die Gleichung $|\vec{x} + 2\vec{c}| = 2a - r$, so folgt

$$\vec{c} \cdot \vec{x} + ar = a^2 - c^2 = b^2 .$$

Definiert man die **Exzentrizität** ϵ durch $c =: \epsilon a$, d.h. $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ und verwendet $\vec{c} \cdot \vec{x} = cr \cos \phi$ so ergibt sich

$$\frac{r_0}{r} = 1 + \epsilon \cos \phi ,$$

wobei $r_0 = b^2/a$ der Abstand vom Ursprung F_2 ist, wenn $\phi = \pi/2$ ist. Dies ist die **Ellipsengleichung in Polarkoordinaten**, wie sie in der Behandlung des Keplerproblems auftritt.

b) Alternativ legt man den **Ursprung** in den **Mittelpunkt** M der Ellipse. Das liefert die einfachste Form der **Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten**:

Beschreibt man den Punkt P also in kartesischen Koordinaten (x, y) , so lautet die Bedingung für die Summe der Abstände

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a .$$

Quadriert man beide Seiten der Gleichung, separiert den verbleibenden Wurzelterm und quadriert noch einmal, so erhält man

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2) .$$

Unter Verwendung von $a^2 - c^2 = b^2$ ergibt sich nach Division schließlich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

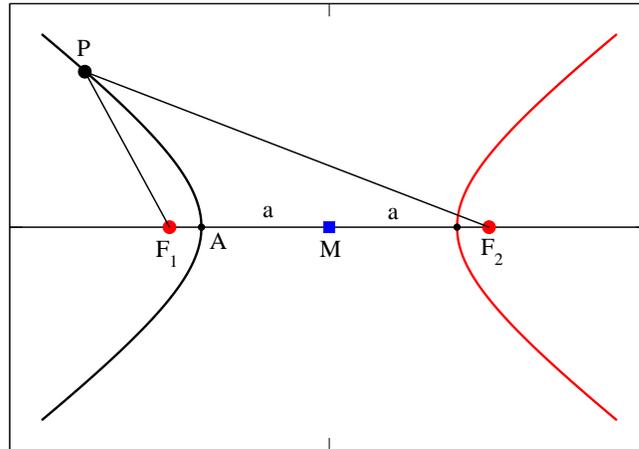
Das ist die Normalform der Gleichung eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. In dieser Form tritt sie auf, wenn man Ellipsen über "Kegelschnitte

einführt (s.u.).

Da wir im folgenden auch **Hyperbeln** als Bahnkuven erhalten, gleich auch noch das analoge Vorgehen dafür:

Definition: Eine Hyperbel ist die Menge von Punkten P in einer Ebene, deren Abstände von zwei **festen** Punkten F_1 und F_2 denselben Wert der **Differenz** haben:

$$|F_1P| - |F_2P| = \text{const.}$$



Der Abstand der beiden **Fokuspunkte** F_1 und F_2 wird wieder $2c$ genannt. Wählt man als Punkt auf der Hyperbel den Punkt A , so ergibt sich für die Differenz der Abstände der Wert $-2|MA| =: -2a$.

Zur mathematischen Beschreibung der Hyperbel gibt es wieder die zwei verschiedenen gängigen Vorgehensweisen.

a) Man legt den **Ursprung** des Koordinatensystems in einen der **Fokusse**, z.B. in F_1 . Dann ist $\vec{x} = \vec{F_1P}$ und die obige Bedingung lautet mit $\vec{c} := \vec{MF_2}$

$$|\vec{x}| - |\vec{x} - 2\vec{c}| = \mp 2a ,$$

wobei das obere (untere) Vorzeichen für den linken (rechten) Ast der Hyperbel gilt. Quadriert man die Gleichung $|\vec{x} - 2\vec{c}| = \mp 2a - r$, so folgt

$$\vec{c} \cdot \vec{x} \pm ar = c^2 - a^2 .$$

Definiert man die **Exzentrizität** wieder als $\epsilon := c/a$ und verwendet $\vec{c} \cdot \vec{x} = cr \cos \phi$, so ergibt sich

$$\frac{r_0}{r} = \pm 1 + \epsilon \cos \phi ,$$

wobei $r_0 = (c^2 - a^2)/a$ ist. Dies ist die **Hyperbelgleichung in Polarkoordinaten**, wie sie in der Behandlung des Keplerproblems bei $E > 0$ (infinite Bewegung) auftritt.

b) Man legt den **Ursprung** in den **Mittelpunkt** M der Hyperbel. Beschreibt man den Punkt P wieder in kartesischen Koordinaten (x, y) , so lautet die Bedingung für die Summe der Abstände

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \mp 2a .$$

Quadriert man beide Seiten der Gleichung, separiert den verbleibenden Wurzelterm und quadriert noch einmal, so erhält man wie beim Fall der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 .$$

Da hier aber $c > a$ gilt, definiert man $b^2 := c^2 - a^2$. Das liefert

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Das ist die Normalform der Gleichung eines Hyperbelpaares, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt.

Ende Einschub

Die Form der Ellipsengleichung, die sich aus der Lösung der NG für das $1/r$ -Potential ergeben hat, entspricht der Wahl a) in unserem Einschub. Also ist das Zentrum des Potentials in einem der Fokus- oder **Brennpunkte der Ellipse**. Das ist das 1.Keplersche Gesetz. Wir präzisieren diese Aussage, wenn wir wieder zum Zweikörperproblem zurückkehren.

Die Größen r_{\min} und r_{\max} lassen sich durch r_0 und die Exzentrizität ϵ ausdrücken. Wegen

$$r_{\min}(1 + \epsilon) = (a - c)(1 + \epsilon) = a(1 - \epsilon^2) = a \frac{b^2}{a^2} = r_0$$

und analog für r_{\max} , ergibt sich

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon} \quad ; \quad r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon} .$$

Die große Halbachse der Ellipse ist durch

$$a = \frac{1}{2} (r_{\min} + r_{\max})$$

gegeben. Wir hatten uns bereits früher davon überzeugt, dass $r_{\min} + r_{\max}$ nicht vom Wert l des Drehimpulses abhängt.

Die **zeitliche Durchlaufung** der Bahn erhält man aus der Drehimpulserhaltung $m r^2(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = l$

$$\begin{aligned} dt &= \frac{m}{l} r^2(\varphi) d\varphi \\ \text{oder } t - t_0 &= \frac{m}{l} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2(\varphi') d\varphi' . \end{aligned}$$

Setzt man $r(\varphi') = r_0/(1 + \epsilon \cos \varphi')$ ein, so lässt sich die Integration elementar durchführen, die Bildung der Umkehrfunktion, um $\varphi(t)$ zu erhalten, ist aber nicht in geschlossener Form möglich. Interessiert man sich nur für die **Umlaufzeit** T , so verwendet man am besten die auf S. 44 eingeführte Flächengeschwindigkeit $S(t)$

$$\dot{S}(t) = l/2m .$$

Integration dieser Gleichung über die Zeit von 0 bis T liefert

$$2mS = l \cdot T ,$$

wobei S die von der Ellipse umschlossene Fläche ist. Für Ellipsen gilt $S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$. Also folgt mit $l = \sqrt{\alpha m r_0}$ für die Umlaufzeit

$$\begin{aligned} T &= \frac{2m}{l} \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \frac{a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\sqrt{r_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{3/2} \\ &= \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} . \end{aligned}$$

Die erste Zeile beinhaltet das **3. Keplersche Gesetz**, das wir bereits bei den Überlegungen zur mechanischen Ähnlichkeit und dem Spezialfall der Kreisbewegung kennengelernt hatten. Die zweite Zeile zeigt, dass T nur von der Energie E abhängt. Diese Beziehung hat im Zusammenhang mit dem quantenmechanischen „Korrespondenzprinzip“ eine historische Rolle gespielt.

Um die Keplerschen Gesetze tatsächlich für die Massenpaare „Planet-Sonne“ zu diskutieren, müssen wir zurück zum **Zweikörperproblem**. Gemäß der Diskussion auf S. 52 geht man wie folgt vor:

Man ersetzt m durch die reduzierte Masse $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ und erhält damit die Trajektorie für den Vektor der Relativbewegung $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Die Ortsvektoren der beiden Massenpunkte erhält man aus (s.S. 52)

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} .\end{aligned}$$

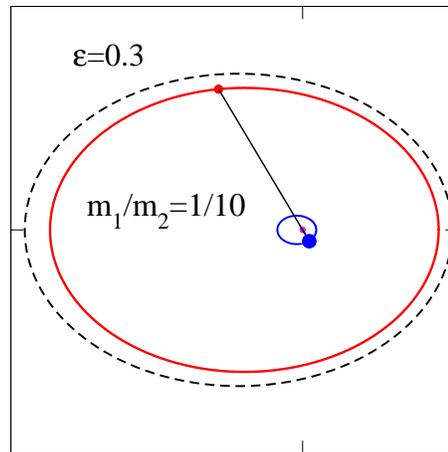
Die Bewegung der beiden Körper lassen sich dann auf zwei verschiedene Weisen veranschaulichen:

a) Im **Schwerpunktsystem** (*Inertialsystem* (nach Vorrauss.)):

Wegen $\vec{R} = 0$ gilt

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} ; \quad \vec{r}_2 = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} .$$

Dann beschreiben sowohl der Planet, als auch die Sonne eine Ellipsenbahn, wie in der Abbildung dargestellt. Zur besseren Veranschaulichung ist das Massenverhältnis $m_1/m_2 = 0.1$ gewählt und die Exzentrizität als $\epsilon = 0.3$, um klar zu machen, dass es sich um eine Ellipse (keinen Kreis) handelt. Für das Paar "Erde-Sonne" gilt $m_E/m_S \approx 3 \cdot 10^{-6}$ und $\epsilon \approx 0.017$.



b) Im System der **Sonne** (*kein Inertialsystem*):

Dann ist $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_1(t)$ und die Erde beschreibt eine Ellipse um die Sonne, wobei die Sonne in einem Brennpunkte steht. Das ist das **1. Keplersche Gesetz**.

Wegen der großen Sonnenmasse unterscheiden sich die beiden Beschreibungsformen wenig.

Jetzt kommen wir zur Diskussion des **3. Keplerschen Gesetzes** im Kontext des Zweikörperproblems “Planet-Sonne”. Dann müssen wir im Vorfaktor auf S. 64 folgende Ersetzung machen

$$\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{Gm_P m_S}} = \frac{1}{\sqrt{G(m_P + m_S)}} \approx \frac{1}{\sqrt{Gm_S}},$$

wobei G die Gravitationskonstante ist. Da die Sonnenmasse sehr viel grösser ist, als alle Planetenmassen, hängt der Vorfaktor im 3. Keplerschen Gesetz also praktisch **nicht** vom gewählten Planeten ab.

Damit schließen wir die Diskussion der **finiten** Bewegung für $E < 0$ ab.

Nichtnegative Energie $E \geq 0$ führt zu **infiniter Bewegung**. Für $E > 0$ folgt $\epsilon = \sqrt{1 + 2l^2 E / m\alpha^2} > 1$, d.h. die Bahn ist eine **Hyperbel**, wobei der Ursprung im „eingeschlossenen“ Brennpunkt liegt. Der Spezialfall $E = 0$ liefert eine **Parabel** als Bahnkurve, wobei der Ursprung der Brennpunkt der Parabel ist. Da es sich nur um einen Spezialfall handelt und Parabeln wohl als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, sei auf einen Einschub dazu verzichtet.

Die auf S. 58 angegebene Formel für die Bahnkurve

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

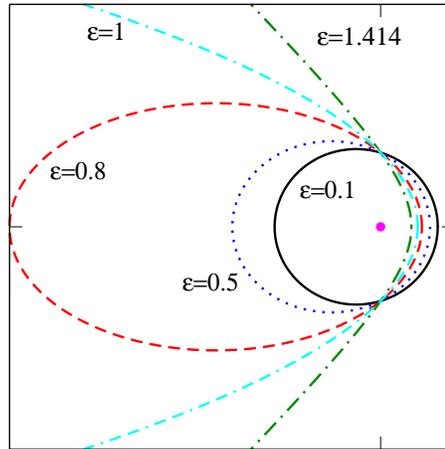
beschreibt die Bahnkurven für **alle** Werte von E , d.h. beliebige $\epsilon \geq 0$.

Zeichnet man für $E > 0$, d.h. $\epsilon > 1$ die Bahnkurve beginnend mit $\varphi = 0$ für zunehmende Werte von φ , so strebt r beim **Grenzwinkel** φ_c gegen unendlich, wobei φ_c durch

$$\cos \varphi_c = -\frac{1}{\epsilon}$$

gegeben ist.

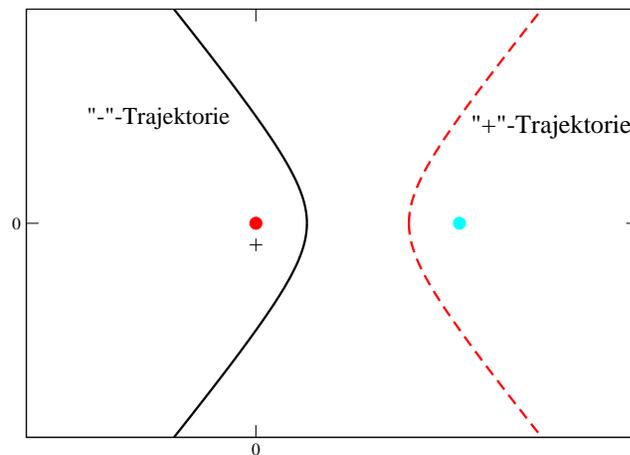
Die folgende Abbildung zeigt den Übergang vom “Kreis zur Hyperbel” mit wachsendem ϵ von Null bis zu Werten größer als eins (für festes r_0):



Zum Abschluss untersuchen wir noch den Fall des **abstoßenden** $1/r$ -Potentials $V(r) = \alpha/r$ mit $\alpha > 0$. In diesem Fall nimmt V_{eff} monoton von $+\infty$ bis 0 ab, wenn sich r von 0 bis ∞ ändert. Die Energie des Teilchens kann nur positiv sein und die Bewegung ist **stets infinit**. Trotzdem kann man *formal* wieder die Größen $r_0 := l^2/|\alpha|m$ und $|V_0| := \alpha^2 m/2l^2$ definieren. Der einzige Unterschied zur Rechnung im anziehenden Fall ist dann, dass $u_0 = -1/r_0$ gilt. Man erhält dann als Bahnkurve

$$\frac{r_0}{r} = -1 + \epsilon \cos \varphi \quad , \quad \epsilon = \sqrt{1 + E/|V_0|} \quad ; \quad (E > 0) .$$

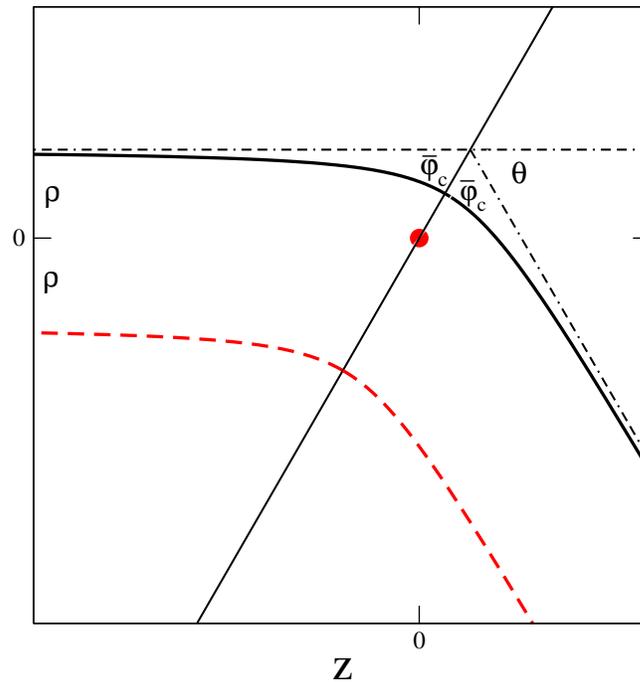
Das ist der "zweite Hyperbelast". Die (gestrichelte) Trajektorie schließt im abstoßenden Fall das Zentrum des Potentials im linken Brennpunkt **nicht** ein.



Der Fall der Abstoßung tritt bei zwei geladenen Punkteilchen auf, die **gleiches Ladungsvorzeichen** haben. Befindet sich im linken Brennpunkt z.B. eine *positive* Ladung, so erhält man, falls das Teilchen auf der Trajektorie ebenfalls *positiv* geladen ist, die rechte Trajektorie.

Wir betrachten den Fall der Hyperbelbahnen für die beiden Fälle der Anziehung bzw. der Abstoßung noch einmal gemeinsam von einem anderen Gesichtspunkt aus. Dazu zeichnen wir die beiden gleichartigen Hyperbeln nochmals in etwas anderer Form. Wir spiegeln die gestrichelte Kurve der letzten Abbildung an der senkrechten Linie durch den Ursprung und führen eine Drehung aus, so dass die Teilchen von links aus dem Unendlichen auf das Streuzentrum im Ursprung zulaufen, wobei der Abstand von der z -Achse in beiden Fällen gleich (asymptotisch) durch ρ (s.u.) gegeben ist.

Neben dem Grenzwinkel φ_c und dessen Komplement $\bar{\varphi}_c$ zu π d.h. $\bar{\varphi}_c := \pi - \varphi_c$ führt man den sogenannten **Streuwinkel** θ zwischen der „einlaufenden“ und der „auslaufenden“ Asymptote der Bahn ein. Die beiden Trajektorien gehören zu gleicher Energie E und gleichem Wert von l^2 aber verschiedenen Vorzeichen der Potentialkonstanten α . Aus der Gleichheit der Energie folgt, dass die Teilchen aus dem Unendlichen jeweils mit gleicher Geschwindigkeit v_∞ kommen.



Aus der Gleichheit der Drehimpulsbeträge folgt dann wegen der gleichen Geschwindigkeit weiter, dass die asymptotischen Bahnen gleichen Abstand zur parallelen Geraden durch den Ursprung aufweisen. Man nennt diesen Abstand ρ den „**Stoßparameter**“.

Da $\vec{v}_\infty \sim \vec{e}_z$ ist, geht in $\vec{l}^2 = m^2(\vec{r}_\infty \times \vec{v}_\infty)^2$ vom Ortsvektor des Teilchens nur der Abstand **senkrecht** zur z -Achse ein

$$l^2 = (m\rho v_\infty)^2 = 2mE\rho^2 .$$

Statt durch l und E kann man die infinite Bewegung also auch durch ρ und E charakterisieren. Zwischen dem Stoßparameter ρ und dem Streuwinkel θ besteht ein eindeutiger Zusammenhang: Je zentraler der Stoß, d. h. je kleiner der Stoßparameter desto größer ist der Streuwinkel θ . Wegen

$$\bar{\varphi}_c = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_c = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$$

gilt im betrachteten Fall wegen $1 + \epsilon \cos \varphi_c = 0$ mit $|V_0| = \alpha^2 m / (2l^2)$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + E/|V_0|}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2E}{\alpha}\right)^2 \rho^2}}$$

oder nach ρ^2 aufgelöst

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} - 1 \right] .$$

Wir stellen jetzt einige Überlegungen an, die auch für allgemeinere Streuvorgänge Gültigkeit haben.

6 Elemente der Streutheorie

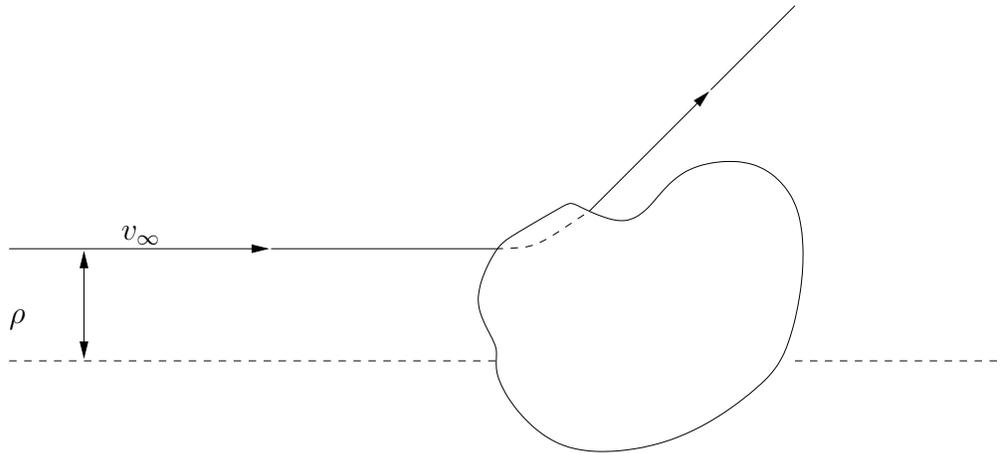
Streuexperimente haben in der Geschichte der Physik eine wichtige Rolle gespielt und sind weiterhin ein wichtiges Instrument zur Charakterisierung komplexer Systeme z.B. in der Materialphysik, der Biophysik oder der Hochenergiephysik. Als wichtiges historisches Experiment, werden wir Rutherford's Streuexperiment diskutieren, mit dem er entdeckt hat, dass sich die Masse von Atomen im wesentlichen im **Atomkern** befindet.

6.1 Potentialstreuung, differentieller Wirkungsquerschnitt

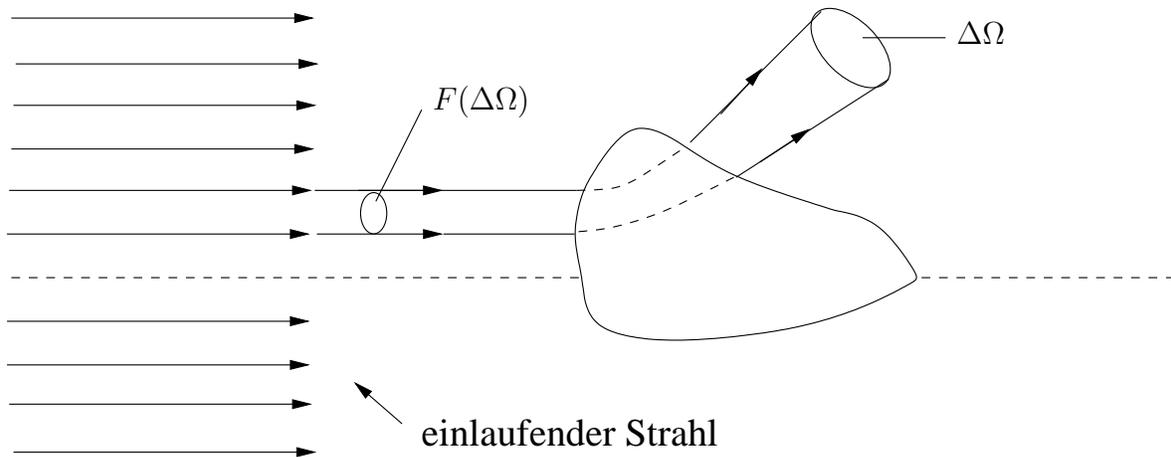
Wir beginnen möglichst elementar und betrachten zunächst die Streuung an einem „**festgenagelten Target**“, das durch ein Potential $V(\vec{r})$ beschrieben wird.

Wir nehmen an, dass wir das Potential *kennen*, und versuchen zu berechnen, wie eine Probeteilchen der Masse m daran gestreut wird. In der Praxis ist die Fragestellung oft umgekehrt: Man registriert, wie die Teilchen gestreut werden und versucht daraus etwas über das Target oder die Wechselwirkung des Streuteilchens mit dem Target zu lernen.

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst ein Potential, das nur in einem *endlichen* Raumbereich von Null verschieden sein soll.



In physikalischen Anwendungen hat man es im allgemeinen nicht mit der Ablenkung eines einzigen Teilchens zu tun, sondern mit der Streuung eines ganzen **Strahls** gleichartiger Teilchen, die mit gleicher Geschwindigkeit v_∞ auf das Streuzentrum zulaufen. Dabei soll der einlaufende Strahl die **homogene Flächendichte** n_{ein} haben, d. h. n_{ein} ist die Anzahl der Teilchen, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Strahlquerschnittes hindurchtreten.



Wegen der endlichen Reichweite muss der Querschnitt des Strahls nicht unendlich sein, da die Teilchen, die am Gebiet $V(\vec{r}) \neq 0$ vorbeifliegen, nicht gestreut werden. Eine wichtige Messgröße bei der Streuung ist die Anzahl der Teilchen $N_{\text{str.}}(\Delta\Omega)$, die pro Zeiteinheit in einen (endlichen) Raumwinkelbereich $\Delta\Omega$ gestreut werden. Da $N_{\text{str.}}(\Delta\Omega)$ proportional zu n_{ein} ist, definieren wir den **Wirkungsquerschnitt** $\sigma(\Delta\Omega)$ für die Streuung in den Raumwinkelbereich $\Delta\Omega$ über

$$N_{\text{str.}}(\Delta\Omega) =: n_{\text{ein}}\sigma(\Delta\Omega) .$$

Da sowohl $N_{\text{str.}}(\Delta\Omega)$, als auch n_{ein} Messgrößen sind, ist klar wie man $\sigma(\Delta\Omega)$ experimentell bestimmt. **Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche.** Da alle Teilchen des einlaufenden Strahls, die durch $F(\Delta\Omega)$ hindurchtreten (nach Voraussetzung) in den Raumbereich $\Delta\Omega$ gestreut werden, folgt aus $n_{\text{ein}}F(\Delta\Omega) = N_{\text{str.}}(\Delta\Omega) = n_{\text{ein}}\sigma(\Delta\Omega)$, dass

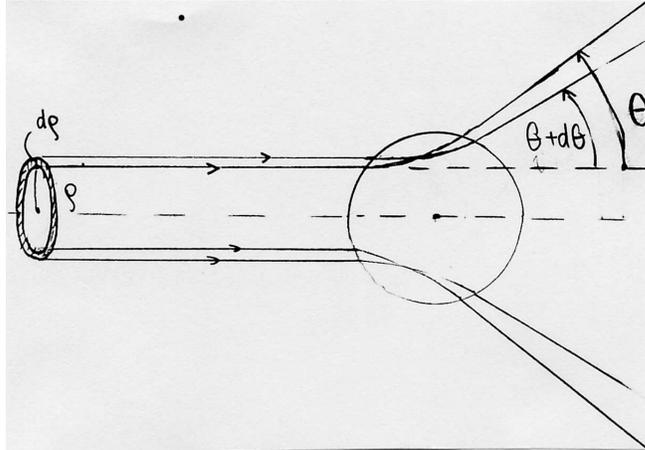
$$\sigma(\Delta\Omega) = F(\Delta\Omega)$$

gilt. Ist der betrachtete Raumwinkelbereich $\Delta\Omega$ klein („ $d\Omega$ “), so ist $\sigma(d\Omega)$ proportional zu $d\Omega$ und man schreibt

$$\sigma(d\Omega) =: \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega$$

und bezeichnet $d\sigma/d\Omega$ als den **differentiellen Wirkungsquerschnitt**. Dieser hängt natürlich von der Streurichtung Ω der Teilchen ab, die durch die üblichen Winkel θ, φ (s. Kugelkoordinaten S. 39) gegeben ist. In der Vorwärtsrichtung ist $d\sigma/d\Omega$ keine wohldefinierte Größe, da es keinen Sinn macht, zwischen „gestreuten“ und „nicht gestreuten“ Teilchen zu unterscheiden.

Die Winkelabhängigkeit von $d\sigma/d\Omega$ vereinfacht sich für den im folgenden nur betrachteten Spezialfall radial-symmetrischer Potentiale $V = V(|\vec{r}|)$, d.h. die Streuung an einem **Zentralpotential**. Dann weist die Winkelverteilung immer **axiale Symmetrie** bezüglich der Einfallrichtung auf. Der Streuwinkel θ ist dann eine Funktion des Stoßparameters ρ und der Einfallenergie $E = mv_\infty^2/2$.



Als Raumwinkelbereich $d\Omega$ betrachten wir nun alle Raumwinkel zwischen θ und $\theta + d\theta$, wobei der Azimutwinkel φ alle Werte zwischen 0 und 2π annehmen soll. Auf der Einheitskugel ist das ein Ring der Breite $|d\theta|$ mit Radius $\sin \theta$. Also folgt für $d\Omega$

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta |d\theta| .$$

Aus $\sigma(d\Omega) = F(d\Omega)$ und $\sigma(d\Omega) = (d\sigma/d\Omega)d\Omega$ ergibt sich

$$\sigma(d\Omega) = 2\pi \rho d\rho = \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \theta |d\theta| .$$

Und damit für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

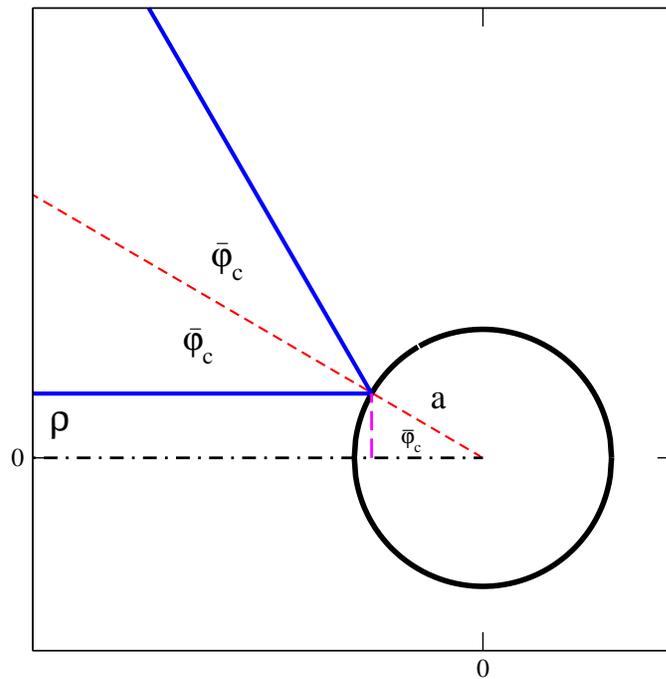
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = \frac{1}{2 \sin \theta} \left| \frac{d\rho^2}{d\theta} \right| .}$$

Zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts benötigt man die **funktionale Abhängigkeit** $\theta(\rho)$. Nur im Fall monotoner Abhängigkeit ist die Umkehrfunktion $\rho(\theta)$ eindeutig bestimmt. Ist dies nicht der Fall, so muss man im

differentiellen Wirkungsquerschnitt die Summe über aller Zweige von $\rho(\theta)$ nehmen.

Als einfachstes **Beispiel** betrachten wir zuerst den Fall der Streuung an einer absolut **harten Kugel**

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$



Wie man in der Abbildung sieht, gilt für $\rho > a$ die Beziehung $\sin \bar{\varphi}_c = \rho/a$, d.h.

$$\rho = a \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Das liefert $\rho |d\rho/d\theta| = a^2 \sin \theta/4$ und Einsetzen in den allgemeinen Ausdruck ergibt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{h.K.} = \frac{a^2}{4}$$

d.h. die Streuung ist **isotrop**.

Definiert man den **totalen Wirkungsquerschnitt** als Integral des differentiellen WQ über alle Raumwinkel

$$\sigma_{\text{tot}} := \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega ,$$

so erhält man hier $\sigma_{\text{tot}} = \pi a^2$ in Übereinstimmung damit, dass die „Zielfläche“, die das Teilchen treffen muss, um überhaupt gestreut zu werden, der Querschnitt der Kugel ist. Dieses Resultat gilt wegen

$$\int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = 2\pi \int_0^a \rho d\rho = \pi a^2$$

für beliebige Zentalpotentiale, die bis $r = a$ von Null verschieden sind: „Alles was über die Querschnittsfläche einfällt wird gestreut“.

Zur Diskussion der Streuung am $1/r$ -Potential müssen wir die Beschränkung auf Potentiale endlicher Reichweite offensichtlich fallen lassen. Das bewirkt, dass der totale Wirkungsquerschnitt divergent sein wird. Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann aber völlig analog definiert werden und an der wesentlichen Relation für $d\sigma/d\Omega$ (S. 70) ändert sich nichts. Wir betrachten als zweites *Beispiel* die Streuung am Potential

$$V(r) = - \frac{\alpha}{r} ,$$

wobei das Vorzeichen von α beliebig ist. Die Relation zwischen ρ und θ haben wir bereits abgeleitet (S. 67)

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{2E} \right)^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta/2} - 1 \right] .$$

Daraus erhält man die benötigte Ableitung

$$\left| \frac{d\rho^2}{d\theta} \right| = \left(\frac{\alpha}{2E} \right)^2 \left| \frac{\cos \theta/2}{\sin^3(\theta/2)} \right| ,$$

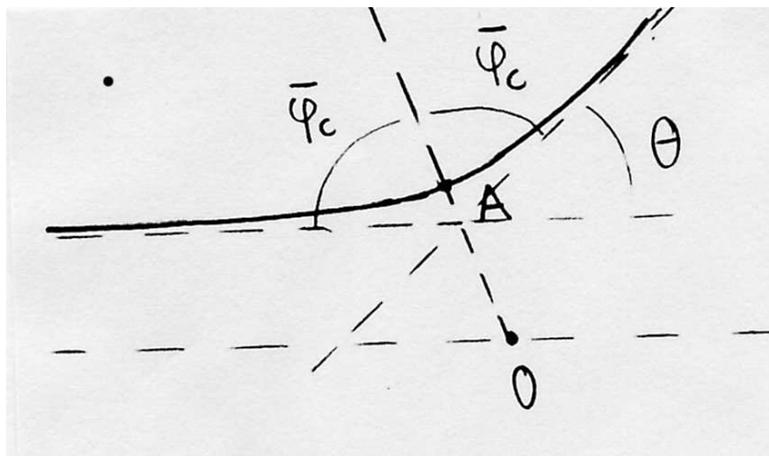
und eingesetzt schließlich

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{„R“} = \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} .}$$

Das ist die berühmte „**Rutherford'sche Streuformel**“. Wegen der Langreichweitigkeit des Coulombpotentials ist der differentielle WQ für kleine Streuwinkel so stark divergent, dass der totale WQ divergent ist.

Die experimentelle Verifikation dieser Formel bei Rutherfords Streuexperimenten von α -Teilchen an Goldfolien war bekanntlich wesentlich für den „Beweis“ für die Existenz der Atomkerne. Rutherford hatte dabei das Glück, dass sich dasselbe Resultat auch im Rahmen der (1911 natürlich noch nicht bekannten) Quantenmechanik ergibt. Zum Verständnis, warum Rutherford aus seinem Experiment die Existenz des Atomkerns folgerte, muss erst noch der Übergang ins Laborsystem gemacht werden (s.u).

Für **allgemeine** Radialpotentiale $V(r)$ erhält man die Relation zwischen θ und ρ wie folgt



Die Bahn verläuft *symmetrisch* zur Geraden OA, die das Zentrum O mit dem ihm nächstgelegenen Bahnpunkt A schneidet. Also ergibt sich $\bar{\varphi}_c$ aus der allg. Formel von S. 52

$$\bar{\varphi}_c = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{|l|/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - l^2/r^2}} dr ,$$

oder wenn man $l^2 = 2mE\rho^2$ verwendet

$$\bar{\varphi}_c = \frac{\pi - \theta(\rho)}{2} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho/r^2}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - V(r)/E}} dr .$$

Leider lässt sich das Integral nur für wenige Zentralpotentiale analytisch ausführen.

6.2 Elastischer Stoß zweier Teilchen: Übergang vom Schwerpunkts- zum Laborsystem

In unserer Beschreibung der Potentialstreuung von Teilchen haben wir ein statisches („festgenageltes“) Streuzentrum angenommen. Der ursprüngliche Grund dafür war, dass die Relativkoordinate $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ einer Bewegungsgleichung in einem statischen Zentralfeld gehorcht. Wir wollen jetzt diskutieren, wie sich die Ergebnisse der Streuung **eines** Teilchens an einem statischen Potential, auf den „Stoß“ **zweier** Teilchen übertragen lassen, die vermöge eines Zweiteilchenpotentials $v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ wechselwirken. Dabei wollen wir zuerst wieder annehmen, dass v endliche Reichweite hat.

Da das Zweiteilchensystem ein abgeschlossenes System ist, ist die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße. Ausserhalb des Wechselwirkungsbereichs verschwindet die potentielle Energie, d.h. die **Summe der kinetischen Energien** der beiden Stoßpartner ist vor und nach dem Stoß **gleich**. Man spricht daher von einem **elastischen Stoß**.

Die Beschreibung des Stoßvorgangs ist besonders einfach, wenn man ins Schwerpunktsystem geht: ($M = m_1 + m_2$)

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} & ; & \quad \vec{v}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} =: \dot{\vec{R}} + \vec{v}'_1 \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} & ; & \quad \vec{v}_2 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} =: \dot{\vec{R}} + \vec{v}'_2 .\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen im Schwerpunktsystem bezeichnen wir also als \vec{v}'_i . Für die entsprechenden **Impulse im Schwerpunktsystem** $\vec{p}'_i = m_i \vec{v}'_i$ gilt

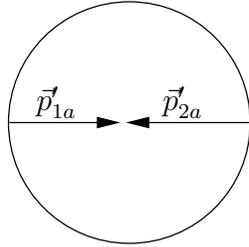
$$\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2 .$$

Die kinetische Energie

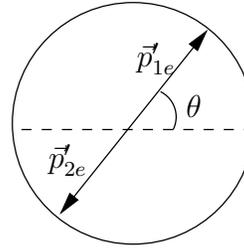
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (m_1 \vec{v}_1^2 + m_2 \vec{v}_2^2) &= \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2) + \frac{1}{2} (m_1 \vec{v}'_1{}^2 + m_2 \vec{v}'_2{}^2) \\ &= \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} + \vec{p}'_1{}^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)\end{aligned}$$

hat wegen der Energieerhaltung vor und nach dem Stoß denselben Wert. Da $\dot{\vec{R}}^2$ zeitunabhängig ist, ändern sich die **Beträge** der \vec{p}'_i durch den Stoß **nicht**. Man erhält also folgendes Bild: (a: Anfangszustand, e: Endzustand)

vor dem Stoß



nach dem Stoß

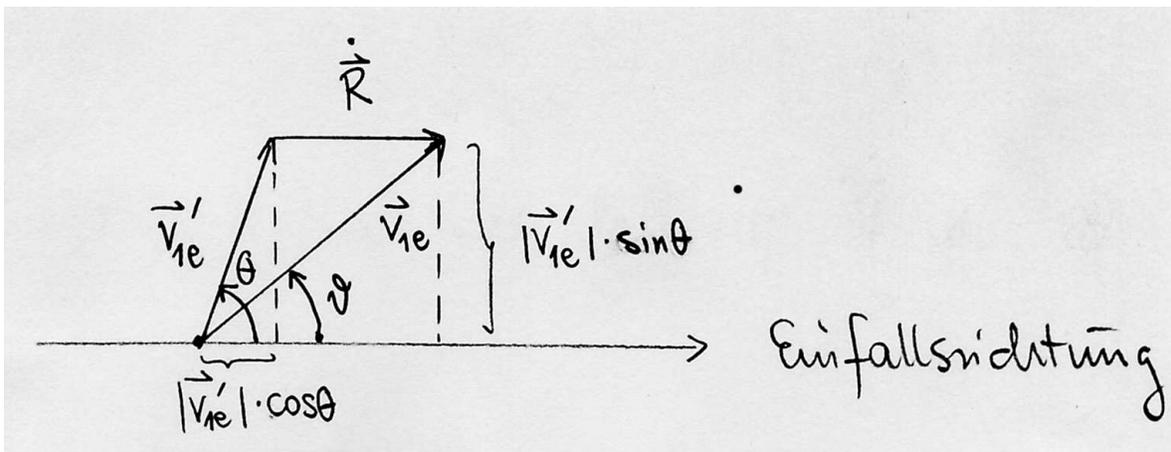


Da die $\vec{p}'_i \sim \dot{\vec{r}}$ sind, ist θ gerade der Streuwinkel eines Teilchen der Masse $\mu = m_1 m_2 / M$ im statischen Potential $v(|\vec{r}|)$.

Wir betrachten jetzt den Stoßvorgang im “**Laborsystem**”, in dem das **zweite Teilchen** („**Targetteilchen**“) vor dem Stoß ruht, d.h. $\vec{v}_{2a} = 0$. Also gilt

$$\dot{\vec{R}} = \frac{m_1}{m_2 + m_2} \dot{\vec{r}}_{(a)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1a} \left(= \frac{m_1}{m_2} \vec{v}'_{1a} \right)$$

d.h. $\dot{\vec{R}}$ zeigt in Einfallrichtung. Der **Streuwinkel im Laborsystem** ϑ ergibt sich dann einfach aus folgender geometrischer Betrachtung und $|\vec{v}'_{1a}| = |\vec{v}'_{1e}|$



$$\tan \vartheta = \frac{\sin \theta |\vec{v}'_{1e}|}{|\dot{\vec{R}}| + \cos \theta |\vec{v}'_{1e}|} = \frac{\sin \theta}{(m_1/m_2) + \cos \theta}$$

Im Limes eines unendlich schweren Targetteilchens stimmen die beiden Winkel überein.

Im Fall **gleicher Massen** folgt aus

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \tan(\theta/2) \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \theta/2$$

Der maximale Streuwinkel im Laborsystem ist für $m_1 = m_2$ also 90° . Für $m_2 \leq m_1$ tritt *keine Rückwärtsstreuung* auf: Die zurückgestreuten α -Teilchen in Rutherford's Experiment mußten also an *schwereren* Teilchen gestreut worden sein (falls die Targetteilchen in Ruhe angenommen werden).

Das Streuteilchen der Masse m_1 verliert beim Stoß mit Teilchen 2 einen Teil seiner kinetischen Energie. Aus der obigen Skizze sieht man, dass

$$\vec{v}_{1e}^2 = \left(\vec{v}'_{1e} + \vec{R} \right)^2 = \vec{v}'_{1e}{}^2 \left[1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta + \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right].$$

Aus

$$|\vec{v}_{1a}| = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) |\vec{v}'_{1a}| = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \cdot |\vec{v}'_{1e}|$$

folgt für das Verhältnis der kinetischen Energien ($\lambda := m_1/m_2$)

$$\boxed{\vec{v}_{1e}^2 / \vec{v}_{1a}^2 = 1 - \frac{2\lambda(1 - \cos \theta)}{(1 + \lambda)^2} .}$$

Der Energieverlust ist daher am größten für $\theta = \pi$. Im Fall gleicher Massen ist der Energieverlust am größten, da $\lambda/(1 + \lambda)^2$ bei $\lambda = 1$ ein Maximum hat. Für $\lambda = 1$ und $\theta = \pi$ verliert das Teilchen 1 seine gesamte kinetische Energie.

Zur Definition des **Wirkungsquerschnitts für den Stoß** nehmen wir an, dass das Experiment häufig wiederholt wird (N mal, mit $N \gg 1$), wobei die Geschwindigkeit \vec{v}_1 des einlaufenden Teilchens jeweils gleich ist, der Stoßparameter ρ aber so statistisch variiert, dass sich auf einer Querschnittsfläche, durch die das Teilchen einfällt, eine homogene Flächendichte ergibt. Die Flächendichte $n_{\text{ein}} := N/F$ (hier definiert ohne den Zusatz „pro Zeiteinheit“) ist unabhängig davon, ob sie im Schwerpunkt oder im Laborsystem gemessen wird, da \vec{R} parallel zur Einfallsrichtung ist. Wir definieren jetzt

$$\begin{aligned} N_{\text{str.}}^S(\Delta\Omega) &= n_{\text{ein}} \sigma_S(\Delta\Omega) && \text{(Schwerpunktsystem)} \\ N_{\text{str.}}^L(\Delta\Omega') &= n_{\text{ein}} \sigma_L(\Delta\Omega') && \text{(Laborsystem)} . \end{aligned}$$

Dabei ist $\Delta\Omega'$ der im Laborsystem gemessene Raumwinkelbereich, der sich als Abbild des Raumwinkelbereichs $\Delta\Omega$ im Schwerpunktsystem beim Übergang vom

S -System in das L -System ergibt. $N_{str.}^S(\Delta\Omega)$ ist die Gesamtzahl der „ m_1 -Teilchen“, die in den Winkelbereich $\Delta\Omega$ im S -System gestreut werden – analog für $N_{str.}^L(\Delta\Omega')$. Auf Grund der Definition von $\Delta\Omega'$ ist diese Zahl der Streueignisse offensichtlich eine Invariante, d.h. $N_{str.}^S(\Delta\Omega) = N_{str.}^L(\Delta\Omega')$. Also gilt

$$\sigma_S(\Delta\Omega) = \sigma_L(\Delta\Omega') .$$

Im Limes kleiner Raumwinkelbereiche ($\Delta\Omega \rightarrow d\Omega$) ergibt sich daraus für die differentiellen Wirkungsquerschnitte

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_S d\Omega = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L d\Omega'$$

d.h.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_S \frac{d\Omega}{d\Omega'}$$

Mit $d\Omega = 2\pi \sin\theta|d\theta|$ und $d\Omega' = 2\pi \sin\vartheta|d\vartheta|$ erhält man mit Hilfe der Beziehung zwischen θ und ϑ schließlich (Übungsausgabe)

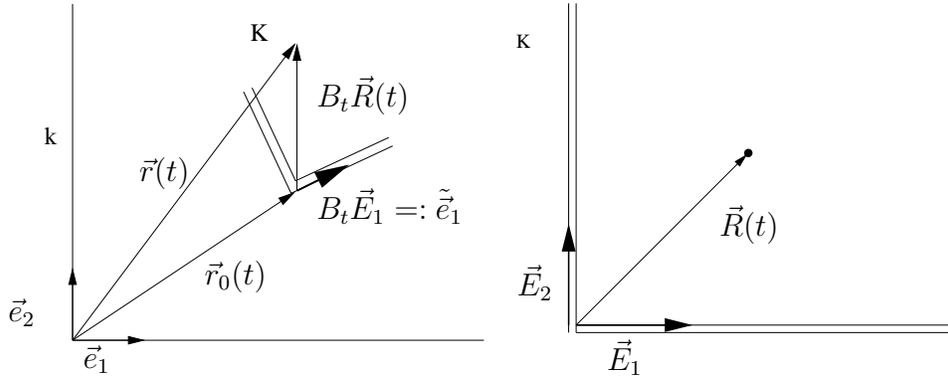
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_S \cdot \frac{(1 + 2\lambda \cos\theta + \lambda^2)^{3/2}}{|1 + \lambda \cos\theta|}$$

Da $(d\sigma/d\Omega)_S$ gerade der früher diskutierte differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchen am statischen Potential $v(|\vec{r}|)$ ist, haben wir damit den „experimentell relevanten“ differentiellen Wirkungsquerschnitt $(d\sigma/d\Omega)_L$ auf bekannte Größen zurückgeführt.

7 Bewegte Bezugssysteme

7.1 lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie sich die Form der NG ändert, wenn man von einem *inertialen* kartesischen Bezugssystem k (wir nennen k das **stationäre** System) zu einem relativ zu k **bewegten** kartesischen Bezugssystem K übergeht. Das „Koordinatendreiein“ des bewegten Systems K ist also bezüglich dem des stationären Systems *verschoben* und *verdreht*: (zweidimensionale Skizze)



Es sei $\vec{R}(t)$ der Ortsvektor eines Punktes relativ zum bewegten System K . Dann erhält man den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ desselben Raumpunktes relativ zum stationären Bezugssystem k als Summe des Verschiebungsvektors $\vec{r}_0(t)$ der beiden Koordinatenursprünge und dem Abbild des Vektors \vec{R} in k , das sich bei der Verdrehung der Koordinatenachsen von K relativ zu denen von k ergibt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + B_t \vec{R}(t) . \quad (B_t \vec{R}(t) \in k)$$

Dabei beschreibt die **zeitabhängige lineare Abbildung** $B_t : K \rightarrow k$ die **Verdrehung**

$$B_t \vec{R}(t) = B_t (R_i(t) \vec{E}_i) = R_i(t) B_t \vec{E}_i =: R_i(t) \tilde{e}_i .$$

Dabei haben wir die Summationskonvention verwendet. Die Abbildung B_t kann bezüglich der vorgegebenen Basis durch Matrixelemente $B_{ij}(t)$ ausgedrückt werden, indem man die \tilde{e}_i nach den festen Basisvektoren \vec{e}_j entwickelt

$$B_t \vec{E}_i = \tilde{e}_i = \vec{e}_j B_{ji}(t) .$$

Die kartesischen Komponenten $x_i(t)$ des Ortsvektors $\vec{r}(t) = x_i(t) \vec{e}_i \in k$ lassen sich mit Hilfe dieser Matrix durch die $R_j(t)$ ausdrücken: ($\vec{r}_0(t) = x_j^{(0)}(t) \vec{e}_j$)

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x_j(t) \vec{e}_j \\ &= \vec{r}_0(t) + B_t (R_i(t) \vec{E}_i) \\ &= x_j^{(0)}(t) \vec{e}_j + R_i(t) \tilde{e}_i(t) = \left(x_j^{(0)}(t) + B_{ji}(t) R_i(t) \right) \vec{e}_j . \end{aligned}$$

Da die $\{\vec{e}_i\}$ linear unabhängig sind, folgt durch Vergleich der 1. und 3. Zeile

$$\boxed{x_j(t) = x_j^{(0)}(t) + B_{ji}(t) R_i(t)} \quad (\text{Summationskonvention})$$

Hinweis: Zur Verdeutlichung, dass Vektoren $\in K$ und Vektoren $\in k$ in **verschiedenen Räumen** liegen, bezeichnen wir in diesem Abschnitt Vektoren $\in k$ mit *kleinen* Buchstaben und Vektoren $\in K$ mit großen Buchstaben.

Völlig analog zu $B_t : K \rightarrow k$, kann man Abbildungen $\bar{C}_t : k \rightarrow K$ betrachten, die ebenfalls bezüglich der vorgegebenen Basen durch Matrixelemente ausgedrückt werden können

$$C_t \vec{e}_i = \vec{E}_j C_{ji}(t) .$$

Die Abbildung B_t , die die gegenseitige Verdrehung der Systeme beschreibt, erhält die **Metrik und die Orientierung**. Für beliebige Vektoren $\vec{X}, \vec{Y} \in K$ gilt also nach Konstruktion

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = B_t \vec{X} \cdot B_t \vec{Y} ,$$

z.B. für die Basisvektoren

$$\delta_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \tilde{e}_i(t) \cdot \tilde{e}_j(t) .$$

Durch skalare Multiplikation von $B_t \vec{E}_i = \vec{e}_j B_{ji}(t)$ mit \vec{e}_k kann man die Matrixelemente $B_{ji}(t)$ durch Skalarprodukte ausdrücken, indem man $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \delta_{kj}$ verwendet (analog für $C_{ji}(t)$)

$$B_{ki}(t) = \vec{e}_k \cdot B_t \vec{E}_i , \quad C_{ki}(t) = \vec{E}_k \cdot C_t \vec{e}_i .$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts definiert man die zu $B_t : K \rightarrow k$ **adjungierte Abbildung** $B_t^T : k \rightarrow K$

$$B^T \vec{x} \cdot \vec{Y} = \vec{x} \cdot B \vec{Y} ,$$

wobei $\vec{x} \in k$ und $\vec{Y} \in K$ beliebig sind. Die Abbildung B^T wird durch die zur Matrix **B transponierte Matrix** dargestellt (daher das „ T “)

$$B_{ki} = \vec{e}_k \cdot B \vec{E}_i = B^T e_k \cdot \vec{E}_i = \vec{E}_i \cdot B^T \vec{e}_k = (B^T)_{ik} .$$

Die Matrix **B^T** ist die zu **B inverse Matrix**: $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T$. Das folgt aus

$$\delta_{ki} = \tilde{e}_k \cdot \tilde{e}_i = \tilde{e}_k \cdot \vec{e}_j B_{ji} = B_{jk} B_{ji} = (B^T)_{kj} B_{ji} .$$

Matrizen mit dieser Eigenschaft heißen **orthogonal**. Für die Abbildung $B_t : K \rightarrow k$ bedeutet dies

$$B_t^T B_t = I_K , \quad B_t B_t^T = I_k ,$$

wobei I_K und I_k die Identität in K und k sind.

Nach diesen mathematischen Vorbetrachtungen wollen wir das Verhalten der *NG* beim Übergang vom stationären zum bewegten Bezugssystem untersuchen.

7.2 Trägheitskräfte im Rahmen der Lagrangebeschreibung (*)

Eine Möglichkeit ist, direkt die Lagrangegleichungen zu verwenden, wobei die R_i als neue („krummlinige“) Koordinaten verwendet werden. Aus

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + R_i(t)\tilde{e}_i(t)$$

folgt $\vec{g}_i := \partial\vec{r}/\partial R_i = \tilde{e}_i$ sowie

$$\dot{\vec{r}} = \dot{R}_i\tilde{e}_i + \underbrace{R_i\dot{\tilde{e}}_i + \dot{\vec{r}}_0}_{\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}} .$$

Mit

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{R}_i} = m\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{R}_i} = m\dot{\vec{r}} \cdot \tilde{e}_i$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial R_i} = m\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial R_i} = m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\tilde{e}}_i$$

lautet die Lagrangeform der NG für den Massenpunkt auf der Bahn $\vec{r}(t)$ (s.S.42):

$$m \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}} \cdot \tilde{e}_i \right) = m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\tilde{e}}_i + \tilde{e}_i \cdot \vec{f} .$$

Da wir im Folgenden eine „direkte“ Version der Umschreibung der NG im Detail diskutieren, betrachten wir die „Lagrangeform“ nur für den Fall $\dot{\tilde{e}}_i \equiv 0$, d. h. **zeitunabhängiger Verdrehung** des bewegten Systems K . Dann verschwindet der 1. Term auf der rechten Seite. Auf der linken Seite der Bewegungsgleichung benötigt man $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + B\ddot{R}$. Dann erhält man mit $\vec{f} = B\vec{F}$, $\vec{r}_0 = B\vec{R}_0$ sowie $\tilde{e}_i \cdot \vec{a} = B\vec{E}_i \cdot B\vec{A} = \vec{E}_i \cdot \vec{A} = A_i$ für $\vec{A} = \vec{F}$, \vec{R}_0

$$m \left(\ddot{R}_i + \ddot{R}_i^{(0)} \right) = F_i$$

d. h. zusätzlich zur vorgegebenen Kraft am Ort P wirkt im bewegten System die „**Trägheitskraft**“ $-m\ddot{R}_0$.

$$\boxed{m\ddot{R} = \vec{F}(\vec{R}) - m\ddot{R}_0 =: \vec{F}_{tot}} .$$

Diese „Scheinkraft“ ist jedem vom Anfahren eines Fahrstuhls bekannt. Bewegt sich das System mit dem Teilchen mit, d. h. $\ddot{R}(t) = \text{const.}$, so folgt wegen $\ddot{R} = 0$,

dass die Gesamtkraft verschwindet: $\vec{F}_{tot} = 0$. Ein bekanntes Beispiel ist die Schwerelosigkeit der Raumfahrer.

Bewegt sich das System K gegenüber dem stationären Inertialsystem k geradlinig und gleichförmig, so verschwindet $\ddot{\vec{R}}_0$ und damit auch die Trägheitskraft. Wir betrachten nun ein System aus N Teilchen und untersuchen die Einschränkungen an die Funktionen $\vec{f}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N)$, die das **Galileische Relativitätsprinzip (GRP)** liefert, das besagt, dass die NG in beiden Inertialsystemen k und K **dieselbe Form** haben. In k gilt

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{f}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N)$$

und die Verallgemeinerung des diskutierten Verfahrens liefert für $\vec{r}_{(0)} = \vec{c} + \vec{v}_0 t$ in K

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = B^T \vec{f}_i(\vec{r}_{(0)} + B\vec{R}_1, \dots, \vec{r}_{(0)} + B\vec{R}_N; \vec{v}_0 + B\dot{\vec{R}}_1, \dots, \vec{v}_0 + B\dot{\vec{R}}_N) .$$

Die Kraft $\vec{F}_i = B^T \vec{f}_i$ soll nach dem GRP ausgedrückt durch die \vec{R}_i dieselbe funktionale Form haben wie in k , d. h. das allg. Kriterium ist

$$B^T \vec{f}_i(\vec{r}_{(0)} + B\vec{R}_1, \dots, \vec{r}_{(0)} + B\vec{R}_n; \vec{v}_0 + B\dot{\vec{R}}_1, \dots, \vec{v}_0 + B\dot{\vec{R}}_N) = \vec{f}_i(\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N; \dot{\vec{R}}_1, \dots, \dot{\vec{R}}_N) .$$

Für den Fall von geschwindigkeitsunabhängigen *Zweiteilchenkräften*

$\vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ vereinfacht sich das Kriterium zu ¹

$$B^T \vec{f}_{ij}(\vec{r}_{(0)} + B\vec{R}_i, \vec{r}_{(0)} + B\vec{R}_j) = \vec{f}_{ij}(\vec{R}_i, \vec{R}_j) .$$

Wir betrachten nun Spezialfälle der „**Galileitransformationen**“ $\vec{r}_i = \vec{c} + \vec{v}_0 t + B\vec{R}_i$. ² Für $\vec{v}_0 = 0$ und $B_{ij} = \delta_{ij}$ beinhaltet das GRP die **Homogenität des Raumes**, d. h. kein Punkt im (leeren) Raum ist vor den anderen ausgezeichnet. Aus der Homogenität des Raumes folgt, dass die \vec{f}_{ij} nur eine Funktion des Relativabstandes $\vec{R}_i - \vec{R}_j$ sein dürfen. Für $\vec{v}_0 = 0, \vec{r}_{(0)} = 0$ und $B_{i,j} \neq \delta_{i,j}$, d. h. eine reine **Drehung** beinhaltet das GRP die **Isotropie des Raumes**, d. h. es ist keine Raumrichtung ausgezeichnet. Aus der Isotropie des Raumes folgt zusammen mit der Folgerung aus der Homogenität

$$B^T \vec{f}_{ij}(B(\vec{R}_i - \vec{R}_j)) = \vec{f}_{ij}(\vec{R}_i - \vec{R}_j) .$$

¹Wir müssen dabei annehmen, dass die \vec{f}_{ij} verschwinden, wenn der Abstand der beiden Teilchen gegen unendlich strebt.

²Die reinen Zeittranslationen $t \rightarrow t + t_0$, die man ebenfalls zu den Galileitransformationen zählt, sorgen dafür, dass die $\vec{f}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ nicht *explizit* von der Zeit abhängen dürfen.

Aus dieser Forderung folgt $\left(\vec{R}_{ij} := \vec{R}_i - \vec{R}_j; R_{ij} = |\vec{R}_{ij}|\right)$

$$\vec{f}_{ij}(\vec{R}_{ij}) = \left(\vec{R}_{ij}/R_{ij}\right) f_{ij}(R_{ij}) .$$

Also sind die auf S. 6 eingeführten Zweiteilchenkräfte mit den GRP kompatibel. Die „eigentlichen“ Galileitransformationen ($\vec{v}_0 \neq 0$) ergeben im untersuchten Fall geschwindigkeitsunabhängiger Kräfte keine weitere Einschränkung an die Form der Kräfte.

7.3 instantane Drehachse, Winkelgeschwindigkeit

Zur allgemeinen Diskussion (zeitabhängiges B) gehen wir „direkt“ vor und verwenden die NG in ihrer ursprünglichen Form. Aus

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + B_t \vec{R}(t)$$

ergibt sich, da B_t eine *lineare* Abbildung ist, mit der Produktregel

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \dot{B}_t \vec{R}(t) + B_t \dot{\vec{R}}(t) .$$

Wir untersuchen nun zuerst den Term $\dot{B}_t \vec{R}(t)$, der durch die Zeitabhängigkeit der Verdrehung entsteht

$$\begin{aligned} \dot{B}_t \vec{R} &= \dot{B}_t B^T (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &=: A_t (\vec{r} - \vec{r}_0) . \end{aligned}$$

Die Abbildung $A_t := \dot{B}_t B_t^T : k \rightarrow k$ ist „**antisymmetrisch**“, d. h. es gilt

$$A_t + A_t^T = 0 .$$

Das sieht man durch direktes Einsetzen von $A_t^T = B_t \dot{B}_t^T$

$$A_t + A_t^T = \dot{B}_t B_t^T + B_t \dot{B}_t^T = \frac{d}{dt} (B_t B_t^T) = \frac{d}{dt} I_k = 0 .$$

Die zugehörige Matrix \mathbf{A} mit den Matrixelementen $A_{ij}(t) := \vec{e}_i \cdot A_t \vec{e}_j$ ist also **antisymmetrisch**, d.h. $A_{ij} = -A_{ji}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{A} hat also **drei unabhängige Matrixelemente**. Die i -te Komponente des Vektors $A\vec{q}$ bezüglich k erhält man durch Multiplikation der Matrix \mathbf{A} mit dem Spaltenvektor \mathbf{q} : $\vec{e}_i \cdot A\vec{q} = (\vec{e}_i \cdot A\vec{e}_j) q_j = A_{ij}q_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} q_2 + A_{13} q_3 \\ -A_{12} q_1 + A_{23} q_3 \\ -A_{13} q_1 - A_{23} q_2 \end{pmatrix} .$$

Setzt man nun $A_{12} = -\omega_3$, $A_{13} = \omega_2$, $A_{23} = -\omega_1$, d. h.

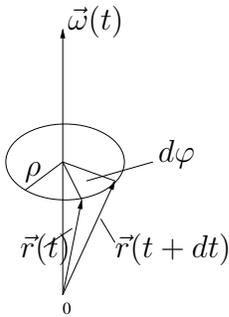
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

so ist obiges Ergebnis äquivalent zu

$$A\vec{q} = \vec{\omega} \times \vec{q} ,$$

wobei $\vec{\omega} := \omega_i \vec{e}_i$ der („axiale“) Vektor der **Winkelgeschwindigkeit** in k heißt.

Zur Veranschaulichung betrachten wir den *Spezialfall* $\dot{\vec{R}} = 0$ und $\vec{r}_0(t) = 0$, d. h. $\dot{\vec{r}} = A\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ oder $d\vec{r} = (\vec{\omega} \times \vec{r})dt$



$$d\vec{r} \perp \text{ auf } \vec{\omega}, \vec{r}$$

$$\begin{aligned} |d\vec{r}| &= \rho |d\varphi| = \\ |\vec{r}| \sin \theta \underbrace{\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|}_{|\vec{\omega}|} dt & \end{aligned}$$

Der Vektor $\vec{\omega} \in k$ liefert also die **instantane Drehachse**. Der Betrag von $\vec{\omega}$ gibt die Winkelgeschwindigkeit „ $|\dot{\varphi}|$ “ um diese Achse.

Der betrachtete Spezialfall tritt zum Beispiel auf, wenn im bewegten System K ein starrer Körper ruht, und mit K um den stationären Punkt 0 rotiert. Die Aussage $d\vec{r} = (\vec{\omega} \times \vec{r})dt$ bedeutet dann, dass zu jedem Zeitpunkt eine instantane Drehachse existiert derart, dass auf der entsprechenden Geraden im Körper, die durch 0 geht, die Geschwindigkeit verschwindet, und die Geschwindigkeit aller anderen Punkte senkrecht zu dieser Geraden und proportional zum Abstand von ihr ist.

Zwei hintereinander ausgeführte *endliche* Drehungen sind i.A. nicht kommutativ, d.h. das Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Drehungen ab: Sei wieder $\vec{r}_0 = 0$, $\dot{\vec{R}} = 0$ und

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \vec{\omega}_1 & 0 < t < \Delta t \\ \vec{\omega}_2 & \Delta t < t < 2\Delta t \end{cases} .$$

Für $\vec{\omega} = \text{const}$ gilt mit $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ auch $\ddot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$. Verwendet man dies in der Taylorentwicklung für kleine Δt , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{r}(\Delta t) &= \vec{r}(0) + \dot{\vec{r}}(0) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}(0) (\Delta t)^2 + O(\Delta t^3) \\ &= \vec{r}(0) + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}(0)) \Delta t + \frac{1}{2} \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}(0)) \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \\ \vec{r}(2\Delta t) &= \vec{r}(\Delta t) + (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}(\Delta t)) \Delta t + \frac{1}{2} \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}(\Delta t)) \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \\ &= \vec{r}(0) + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}(0) \Delta t + \frac{1}{2} [\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}(0)) + \\ &\quad \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}(0)) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}(0))] \Delta t^2 + O(\Delta t^3) . \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Term $\sim \Delta t$ hängt der Term $\sim \Delta t^2$ von der Reihenfolge der $\vec{\omega}$'s ab: *Im Gegensatz zu „infinitesimalen“ Drehungen vertauschen **endliche** Drehungen **nicht**.*

Der Vektor $\vec{\omega}$ ist das Bild eines Vektors $\vec{\Omega} \in K$, den wir als Vektor der **Winkelgeschwindigkeit** „im Körper“ bezeichnen

$$\vec{\omega} = B_t \vec{\Omega} ; \vec{\Omega} = B_t^T \vec{\omega} .$$

Mit Hilfe des Vektors $\vec{\Omega} \in K$ erhält man für $\dot{B}_t \vec{R}$

$$\begin{aligned} \dot{B}_t \vec{R} &= \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{\omega} \times B_t \vec{R} = B_t \vec{\Omega} \times B_t \vec{R} \\ &= B_t (\vec{\Omega} \times \vec{R}) . \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt anschaulich sofort aus der Tatsache, dass B_t die Metrik und die Orientierung erhält. Zusammengefaßt erhalten wir also für den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + B_t \left(\vec{\Omega} \times \vec{R} + \dot{\vec{R}} \right) .$$

7.4 Trägheitskräfte im Rahmen der NG für Nicht-Inertialsysteme: Zentrifugalkraft, Corioliskraft

Wir betrachten als nächstes die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ und verwenden dabei wieder die für jeden Vektor $\vec{X} \in K$ gültige Relation $\dot{B}_t \vec{X} = B_t (\vec{\Omega} \times \vec{X})$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_0 + \dot{B}_t \left(\vec{\Omega} \times \vec{R} + \dot{\vec{R}} \right) + B_t \left(\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}} + \ddot{\vec{R}} \right) \\ &= \ddot{\vec{r}}_0 + B_t \left[\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + \ddot{\vec{R}} \right] \end{aligned}$$

Diese Relation gestattet es sofort die NG im Nichtinertialsystem K aufzustellen. In k gilt allgemein

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) .$$

Einsetzen in obige Relation und Anwendung von B^T liefert

$$m\ddot{\vec{R}} = \vec{F} - m \left[\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) + B_t^T \ddot{\vec{r}}_0 \right] .$$

mit $\vec{F} = B_t^T \vec{f}(\vec{r}_0 + B_t \vec{R}, \dot{\vec{r}}_0 + B_t(\vec{\Omega} \times \vec{R} + \dot{\vec{R}}), t)$. Dies ist das **allgemeine** Ergebnis für die NG im Nichtinertialsystem. Neben der Kraft \vec{F} stehen auf der rechten Seite der Gleichung diverse **Schein-** oder **Trägheitskräfte**, die im folgenden an Beispielen diskutiert werden.

Im Spezialfall, dass die Abbildung B **zeitunabhängig** ist, tritt als Scheinkraft nur $-mB^T \ddot{\vec{r}}_0$ auf. Im Abschnitt 7.2 wurde als Beispiel das Anfahren eines Fahrstuhls genannt.

Für den Fall der **reinen Drehung** ($\vec{r}_0 = 0$) und einer geschwindigkeits- und zeitunabhängigen Kraft vereinfachen sich die „NG im bewegten System“ zu

$$m\ddot{\vec{R}} = B_t^T \vec{f}(B_t \vec{R}) - m \left[\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) \right]$$

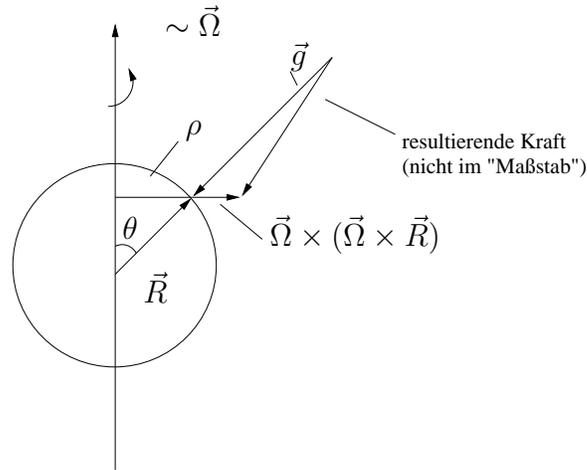
Für den Fall einer **Zentralkraft** $\vec{f}(\vec{r}) = (\vec{r}/r)f(r)$ vereinfacht sich der erste Term auf der rechten Seite wegen $r = R$ zu

$$B_t^T \vec{f}(B_t \vec{R}) = (\vec{R}/R)f(R) .$$

Von den Trägheitskräften $-m[\]$ verschwindet der erste Term bei **gleichförmiger Rotation** $\vec{\Omega} = \text{const.}$ Mit diesen beiden Zusatzannahmen erhält man für den Fall der Schwerkraft $f(R) = -mgR_e^2/R^2$ (R_e : Erdradius) verglichen mit der Diskussion S. 8, die „genaueren“ Bewegungsgleichungen für den Fall aus großer Höhe, beschrieben im erdfesten System

$$m\ddot{\vec{R}} = -gm \frac{R_e^2}{R^3} \vec{R} - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) .$$

Der zweite, geschwindigkeitsabhängige Term auf der rechten Seite heißt „**Corioliskraft**“ und der letzte Term ist die „**Zentrifugalkraft**“. Im „statischen Limes“ (z.B. Gewicht am Faden („Lot“)) verschwindet die Corioliskraft (CK), aber die Zentrifugalkraft sorgt dafür, dass das Lot **nicht** zum Erdmittelpunkt zeigt, da die Zentrifugalkraft (ZK) **senkrecht zur Drehachse** von ihr weg wirkt.



Da $\vec{\Omega} \times \vec{R}$ senkrecht zu $\vec{\Omega}$ ist, gilt für den Betrag der Zentrifugalkraft

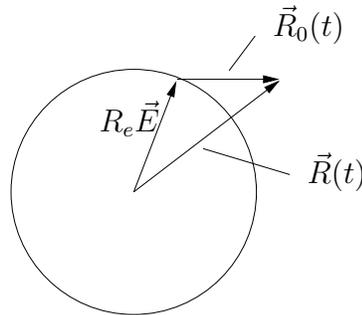
$$|\vec{F}_Z| = m|\vec{\Omega}||\vec{\Omega} \times \vec{R}| = m|\vec{\Omega}|^2|\vec{R}|\sin\theta = m\rho\Omega^2 ,$$

wobei $\rho = R \sin\theta$ der **senkrechte Abstand zur Drehachse** ist. Also hat die ZK am Äquator ihren größten Wert ($\approx 3 \cdot 10^{-3} \cdot g \cdot m$, d.h. in der Skizze ist der Effekt sehr übertrieben dargestellt).

Wir betrachten im folgenden die Beschreibung eines „Steinwurfs“, bei dem die relevante Zeitskala t_0 in der Größenordnung *Sekunden* liegt. Wegen $\Omega = 2\pi/(24 \cdot 3600) \approx 7.27 \cdot 10^{-5}[\text{rad/s}]$ gilt also $\Omega t_0 \ll 1$. Wir schreiben

$$\vec{R}(t) = R_e \vec{E} + \vec{R}_0(t) ,$$

und nähern wegen $|R_0|/R_e \ll 1$ die Gravitationskraft durch $-mg\vec{E} \equiv m\vec{g}$. Ebenso ersetzen wir in der Zentrifugalkraft $\vec{R}(t)$ durch $R_e \vec{E}$. Nach Division durch m erhält man dann die genäherte Bewegungsgleichung



$$\ddot{\vec{R}}_0 = \tilde{\vec{g}} + 2\left(\dot{\vec{R}}_0 \times \vec{\Omega}\right) ,$$

wobei die ZK in $\vec{\tilde{g}} = -(g\vec{E} + R_e\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{E}))$ enthalten ist. Dieses inhomogene System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lässt sich exakt lösen (Übungsaufgabe). Da wir uns aber nur für „kurze“ Zeiten t ($\Omega t \ll 1$) interessieren, erhält man die Modifikation der Bahn durch die CK in der Ordnung Ωt leicht mit Hilfe der Methode der „**sukzessiven Approximation**“.

Wir betrachten zuerst den „Fall aus geringer Höhe“ mit $\vec{R}_0(0) = 0$. Dann erhält man nach zweifacher Integration

$$\vec{R}_0(t) = \vec{R}_0(0) + \vec{\tilde{g}}t^2/2 + 2 \int_0^t \left(\vec{R}_0(t') - \vec{R}_0(0) \right) \times \vec{\Omega} dt' .$$

Im „Korrekturterm“, der von der CK stammt, ersetzen wir nun $\vec{R}(t') - \vec{R}(0)$ durch die „nullte Näherung“ $\vec{\tilde{g}}t'^2/2$, d.h.

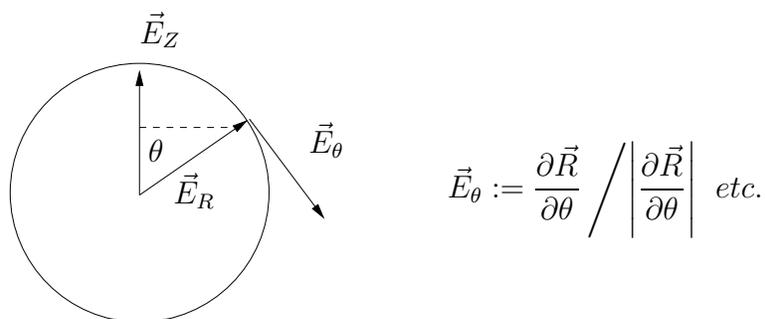
$$\vec{R}_0(t) = \vec{R}_0(0) + \vec{\tilde{g}}t^2/2 + \frac{t^3}{3} \left(\vec{\tilde{g}} \times \vec{\Omega} \right) + O((t\Omega)^2) .$$

Man erhält also folgendes Verhalten:

1. Die „senkrechte Bewegung“ (d.h. in Richtung $\vec{\tilde{g}}$) ist auch in 1. Ordnung unabhängig von Ω . Die Fallzeit ist $t_0 = \sqrt{2h/g}$.
2. Der „Stein“ wird nach *Osten* abgelenkt, wobei die Größe der Ablenkung $\frac{1}{3} \Omega g \sin \theta (2h/g)^{3/2}$ ist. Der Effekt verschwindet an den Polen und ist am Äquator am größten. Für $h = 100m$ erhält man dort die „meßbare“ Abweichung von ca. 2.2 cm.
3. Im ersten Moment mag die Abweichung nach Osten überraschen, da sich die Erde selbst nach Osten dreht. Da der Stein aber zur Anfangszeit im sich drehenden System ruht, hat er vom ruhenden System aus gesehen dieselbe Winkelgeschwindigkeit in Ostrichtung wie der Aufschlagpunkt ohne Erdrehung. Die Drehimpulserhaltung verlangt eine Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit beim Fallen (Übungsaufgabe).

Die Corioliskraft wirkt sich auf die horizontale Bewegung auf der Erde recht anders aus, als auf die vertikale Bewegung. Das merkt man besonders an den Polen, wo die vertikale Bewegung überhaupt nicht beeinflusst wird. Im Gegensatz dazu zeigt das Vektorprodukt $\vec{R} \times \vec{\Omega}$, dass ein Geschoß, das am Nordpol horizontal abgefeuert wird, eine Abweichung nach rechts erfährt, wenn man längs der Bahn blickt. Vom Ruhesystem aus betrachtet ist der Effekt klar: Das Teilchen fliegt geradeaus, während sich die Erde ostwärts dreht. Die Richtung der CK \vec{F}_C im allgemeinen Fall sieht man z.B. durch Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\vec{R}} = \vec{V}$ in Kugelkoordinaten (*normierte* $\vec{E}_{R,\theta,\varphi}$) $\vec{V} = V_R\vec{E}_R + V_\theta\vec{E}_\theta + V_\varphi\vec{E}_\varphi$. Mit

$\vec{\Omega} = \Omega \vec{E}_z$ und $\vec{E}_Z = \cos \theta \vec{E}_R - \sin \theta \vec{E}_\theta$ erhält man



$$\vec{F}_C = 2m\Omega \left[V_\varphi \sin \theta \vec{E}_R + V_\varphi \cos \theta \vec{E}_\theta - (V_R \sin \theta + V_\theta \cos \theta) \vec{E}_\varphi \right].$$

In der nördlichen Halbkugel wird also z.B. ein *nordwärts* fliegendes Teilchen ($V_\varphi = V_R = 0, V_\theta < 0$) *ostwärts* abgelenkt, ein südwärts fliegendes ($V_\theta > 0$) dagegen westwärts. Für die geophysikalischen bzw. meteorologischen Konsequenzen verweise ich auf die angegebene Literatur.

Eine sehr schöne Art, die Erdrotation zu demonstrieren, ist das **Foucaultsche Pendel** (Übungsaufgabe)

8 Starre Körper I

Als “**starren Körper**” definiert man in der Mechanik ein System von Massenpunkten m_α , deren **Abstände** $|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|$ zeitlich **unveränderlich** sind. Systeme, die tatsächlich in der Natur vorkommen, erfüllen diese Bedingung natürlich nur näherungsweise. Die meisten starren Körper ändern aber unter günstigen Bedingungen ihre Formen und Ausmaße so wenig, dass man diese Änderung vernachlässigen kann, wenn man die Bewegungsgesetze des als Ganzes betrachteten starren Körpers untersucht.

Zur Beschreibung des starren Körpers verwenden wir die Notation und die Resultate von Kapitels 7 über beschleunigte Bezugssysteme.

Wir arbeiten also wieder mit zwei Koordinatensystemen k und K , wobei k ein Inertialsystem ist, und der **starre Körper im bewegten System K ruhe**:

$$\dot{\vec{R}}_\alpha \equiv 0$$

Die allgemeine Relation von S. 83 vereinfacht sich dann zu

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \dot{\vec{r}}_0 + B_t(\vec{\Omega} \times \vec{R}_\alpha).$$

Die Lage des starren Körpers bezüglich des Inertialsystems ist vollständig charakterisiert, wenn die Lage von K bezüglich k angegeben wird. Wie in Kapitel 7 diskutiert, benötigt man dazu **6** Zahlenangaben: Die **3 Freiheitsgrade der Translation** werden durch den Verschiebungsvektor $\vec{r}_0 := \vec{00}'$ beschrieben, und die Verdrehung von K bezüglich k beschreibt die **3 Freiheitsgrade der Rotation** des starren Körpers. Die Angabe der Richtung z.B. der \vec{e}_3 -Achse erfordert **2** Winkelangaben. Alle möglichen Lagen von K bei vorgegebener \vec{e}_3 -Richtung werden dann durch **eine** weitere Winkelangabe charakterisiert, den Drehwinkel um die \vec{e}_3 -Achse.

8.1 Trägheitstensor

Eine zentrales Objekt in der Beschreibung der Rotation starrer Körper ist der Trägheitstensor. Er tritt auf natürliche Weise auf, wenn man die kinetische Energie der Rotationsbewegung oder den entsprechenden Anteil des Gesamtdrehimpulses des starren Körpers berechnet. Wir beginnen mit der kinetischen Energie.

kinetische Energie T :

Mit Hilfe der Relation $\dot{\vec{r}}_\alpha = B_t(\vec{\Omega} \times \vec{R}_\alpha) + \dot{\vec{r}}_0$ erhält man

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\dot{\vec{r}}_0 + B_t(\vec{\Omega} \times \vec{R}_{\alpha})]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\dot{\vec{r}}_0^2 + 2\dot{\vec{r}}_0 \cdot B_t(\vec{\Omega} \times \vec{R}_{\alpha}) + (\vec{\Omega} \times \vec{R}_{\alpha})^2 \right]. \end{aligned}$$

An diesem Resultat sieht man, dass es günstig ist, den **Ursprung** von K in den **Schwerpunkt** \vec{R}_S des starren Körpers zu legen. Dann verschwindet der gemischte Term wegen $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} = M\vec{R}_S = 0$. Diese Wahl impliziert $\vec{r}_0 = \vec{r}_S$ und der Ausdruck für die kinetische Energie vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} T &= M\dot{\vec{r}}_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\Omega} \times \vec{R}_{\alpha})^2 \\ &\equiv T_S + T_{\text{rot}}^S. \end{aligned}$$

Alternativ betrachten wir den Fall, in dem sich der starre Körper um einen in k **festen Raumpunkt** \vec{r}_D dreht. Dann legen wir den Ursprung von K in diesen Raumpunkt. Verschiebt man auch noch den Ursprung von k in diesen Drehpunkt,

so gilt $\vec{r}_0 = 0$ und man erhält für die kinetische Energie

$$T = T_{\text{rot}}^D,$$

wobei T_{rot}^D die gleiche Form wie T_{rot}^S hat. Nur die Wahl des Ursprungs in K ist unterschiedlich. In beiden Fällen kann der Rotationsanteil zur kinetischen Energie wie folgt umgeformt werden

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\Omega} \times \vec{R}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{\Omega}^2 R_{\alpha}^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{R}_{\alpha})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} R_{\alpha\perp}^2. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile den **senkrechten Abstand** des Punktes \vec{R}_{α} von der Drehachse $\vec{\Omega} = \Omega \vec{E}$ eingeführt.

Definiert man die Funktion $I : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$I(\vec{A}, \vec{B}) := \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\vec{A} \cdot \vec{B}) R_{\alpha}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{R}_{\alpha})(\vec{B} \cdot \vec{R}_{\alpha}) \right],$$

so lautet der Ausdruck für die kinetische Energie der Rotation

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}).$$

Die Funktion $I(\vec{A}, \vec{B})$ heißt **Trägheitstensor** (“ I ”, wie der erste Buchstabe von “inertia”. In früheren Kapiteln hatten wir die identische Abbildung mit “ I ” bezeichnet. Diese wollen wir hier mit “ $\mathbf{1}$ ” bezeichnen.)

Zum Begriff des Tensors machen wir einen kurzen mathematischen Einschub:

Tensoren

Aus Zeitgründen verzichten wir auf mögliche Verallgemeinerungen auf Vektorräume ohne Metrik und betrachten einen euklidischen Vektorraum K der Dimension n und $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m \in K$. Dann bezeichnet man die **multilineare Abbildung**

$$T : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{m\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

als **Tensor m-ter Stufe**. Dabei heißt multilinear, dass für $i = 1, \dots, m$ gilt

$$T(A_1, \dots, \lambda \vec{A}_i + \mu \vec{B}_i, \dots, \vec{A}_m) = \lambda T(A_1, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_m) + \mu T(A_1, \dots, \vec{B}_i, \dots, \vec{A}_m)$$

Wählt man als Argumente des Tensors, die Basisvektoren \vec{E}_i einer vorgegebenen Basis $\{\vec{E}_1\}$, so bezeichnet man die **m-fach indizierten Größen**

$$T_{i_1 i_2 \dots i_m} := T(\vec{E}_{i_1}, \vec{E}_{i_2}, \dots, \vec{E}_{i_m})$$

als **Komponenten des Tensors** bezüglich der Basis $\{\vec{E}_i\}$. Mit den Zerlegungen $\vec{A} = A_i \vec{E}_i$, $\vec{B} = B_j \vec{E}_j$, $\vec{C} = C_k \vec{E}_k$ gilt dann, z.B. für $m = 3$, d.h. einen Tensor 3. Stufe

$$T(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = T(A_i \vec{E}_i, B_j \vec{E}_j, C_k \vec{E}_k) = A_i B_j C_k T_{ijk}.$$

Im Verlauf dieser Vorlesung tritt nur der Fall $m = 2$, d.h. **Tensoren 2. Stufe** auf

$$T(\vec{A}, \vec{B}) = A_i B_j T(\vec{E}_i, \vec{E}_j) = A_i B_j T_{ij}.$$

Jedem Tensor 2. Stufe $T(\vec{A}, \vec{B})$ entspricht eine lineare Abbildung \hat{T} über die Definition $T_{ij} =: \vec{E}_i \cdot \hat{T} \vec{E}_j$, d.h.

$$T(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \hat{T} \vec{B}$$

Bemerkung: Manche Autoren definieren Tensoren m -ter Stufe als m -fach indizierte Größen mit bestimmten Transformationsverhalten bei Basiswechsel. Dieses Transformationsverhalten **folgt** automatisch aus der hier gegebenen (eleganteren) Definition der Tensoren.

Zurück zur Physik und dem Beispiel des Trägheitstensors. Aus der Definition

$$I(\vec{A}, \vec{B}) := \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{R}_{\alpha}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{R}_{\alpha})(\vec{B} \cdot \vec{R}_{\alpha}) \right] = \vec{A} \cdot \hat{I} \vec{B} \quad (1)$$

sieht man sofort die Multilinearität von I , d.h. der “Trägheitstensor” ist wirklich ein Tensor im Sinne der gegebenen Definition. Die zugehörige lineare Abbildung I (wir lassen den Hut $\hat{}$ im Folgenden wieder weg)

$$I \vec{B} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{B} \vec{R}_{\alpha}^2 - \vec{R}_{\alpha} (\vec{B} \cdot \vec{R}_{\alpha}) \right]$$

ist wegen der Symmetrie $I(\vec{A}, \vec{B}) = I(\vec{B}, \vec{A})$ selbstadjungiert und hat eine sehr direkte physikalische Bedeutung. Dazu betrachten wir den

Gesamtdrehimpuls des starren Körpers:

Startpunkt ist die Definition des Gesamtdrehimpulses in einem Inertialsystem (s.Kap. 2)

$$\vec{l}_{\text{tot}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{\alpha}$$

Mit $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_0 + B_t \vec{R}_\alpha$ und $\dot{\vec{r}}_\alpha = \dot{\vec{r}}_0 + B_t(\vec{\Omega} \times \vec{R}_\alpha)$ folgt

$$\vec{l}_{\text{tot}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_0 + B_t \vec{R}_{\alpha}) \times (\dot{\vec{r}}_0 + B_t (\vec{\Omega} \times \vec{R}_{\alpha}))$$

Jetzt betrachten wir wieder die **zwei Fälle**, wie bei der Diskussion der kinetischen Energie:

Zunächst legen wir den **Ursprung** von K wieder in den **Schwerpunkt** des starren Körpers. Dann verschwinden die gemischten Terme

$$\begin{aligned} \vec{l}_{\text{tot}} &= M \vec{r}_S \times \dot{\vec{r}}_S + B_t \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}_{\alpha}) \right) \\ &= M \vec{r}_S \times \dot{\vec{r}}_S + B_t \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{\Omega} \vec{R}_{\alpha}^2 - \vec{R}_{\alpha} (\vec{\Omega} \cdot \vec{R}_{\alpha}) \right] \right) \\ &\equiv \vec{l}_S + \vec{l}_{\text{rot}}^S, \end{aligned}$$

Für den Fall des im Inertialsystem **raumfesten Drehpunktes** legen wir wieder den Ursprung von K **und** k in diesen Punkt und erhalten wegen $\vec{r}_0 = 0$

$$\vec{l}_{\text{tot}} = \vec{l}_{\text{rot}}^D,$$

wobei wieder \vec{l}_{rot}^D durch denselben formalen Ausdruck wie \vec{l}_{rot}^S gegeben ist. Also gilt in beiden Fällen für

$$\vec{L}_{\text{rot}} = B_t^T \vec{l}_{\text{rot}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{\Omega} \vec{R}_{\alpha}^2 - \vec{R}_{\alpha} (\vec{\Omega} \cdot \vec{R}_{\alpha}) \right]$$

die wichtige Relation (I ist **zeitunabhängig**)

$$\vec{L}_{\text{rot}}(t) = I \vec{\Omega}(t).$$

Der Drehimpuls \vec{L}_{rot} und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ sind also i.A. **nicht parallel**.

Aus obiger Beziehung folgt für die kinetische Energie $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot I \vec{\Omega}$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l},$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen wieder verwendet haben, dass B_t die Metrik erhält. Das Ergebnis $T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}$ lässt sich auch direkt (ohne Verwendung von I) ableiten.

Anwendung von B_t auf $\vec{L}_{\text{rot}} = I \vec{\Omega}$ und $\vec{\Omega} = B_t^T \vec{\omega}$ liefert in k

$$\vec{l}_{\text{rot}}(t) = (B_t I B_t^T) \vec{\omega}(t) =: I^{(k)}(t) \vec{\omega}(t)$$

d.h. in k ist die lineare Abbildung zwischen $\vec{\omega}$ und \vec{l}_{rot} **zeitabhängig**.

Da der Trägheitstensor I für die Dynamik des starren Körpers eine zentrale Rolle spielt, wollen wir ihn im Folgenden etwas ausführlicher diskutieren. Dazu betrachten wir die Komponenten $I_{ij} := I(\vec{E}_i, \vec{E}_j)$

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j \vec{R}_{\alpha}^2 - (\vec{R}_{\alpha} \cdot \vec{E}_i) (\vec{R}_{\alpha} \cdot \vec{E}_j) \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \vec{R}_{\alpha}^2 - R_{i\alpha} R_{j\alpha} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

wobei $R_{i\alpha}$ die i -te Komponente von \vec{R}_{α} ist. Unter Einführung der **Massendichte**

$$\rho(\vec{R}) := \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\vec{R} - \vec{R}_{\alpha}),$$

wobei $\delta(\vec{x})$ die dreidimensionale Diracsche “Deltafunktion” ist, die über die Eigenschaft

$$\int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

definiert ist, zeigt man leicht durch Einsetzen folgende Relation

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{R}_{\alpha}) \right) \left[\delta_{ij} \vec{R}_{\alpha}^2 - R_{\alpha i} R_{\alpha j} \right] \\ &= \int d^3x \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{R}_{\alpha}) \right) \left[\delta_{ij} \vec{x}^2 - x_i x_j \right] \\ &= \int d^3x \rho(\vec{x}) \left[\delta_{ij} \vec{x}^2 - x_i x_j \right]. \end{aligned}$$

Zur tatsächlichen Berechnung von “ I ” geht man meist zum **Kontinuumslimit** über, d.h. man ersetzt die “deltafunktionsförmige” Massendichte durch eine kontinuierliche (meist im Körper räumlich konstante) Massendichte. Wir werden das später an einem Beispiel verdeutlichen.

Da \mathbf{I} eine reelle symmetrische Matrix ist, gilt in der Basis von deren orthonormiert gewählten Eigenvektoren $I_{ij} = I_i \delta_{ij}$. Das Eigenwertproblem selbstadjungierter Abbildungen wird im späteren Kapitel über kleine Schwingungen nochmals kurz rekapituliert. Die entsprechenden Koordinatenachsen werden **“Hauptträgheitsachsen”** genannt, die Diagonalelemente I_i in dieser Basis **“Hauptträgheitsmomente”**. Wir werden im Folgenden immer annehmen, dass K so gewählt ist, dass \vec{E}_1, \vec{E}_2 und \vec{E}_3 Hauptträgheitsachsen des starren Körper sind. Dann lautet

die kinetische Energie T_{rot} , sowie die Komponenten von $\vec{L} \equiv \vec{L}_{\text{rot}}$

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2) \\ L_i &= I_i \Omega_i \quad (\text{ohne Summation!}) \end{aligned}$$

Also gilt auch

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right).$$

Anhand des Verhaltens der I_i führt man spezielle Klassen von starren Körpern ein. Ein starrer Körper heißt

- a) **Rotator**, wenn er eindimensional ist, d.h. seine Massenpunkte nur auf einer Achse, etwa der \vec{E}_3 -Achse liegen, so dass $I_1 = I_2 \neq 0$, und $I_3 = 0$ ist.
- b) **unsymmetrisch**, wenn alle I_i verschieden sind.
- c) **symmetrisch**, falls zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind, z.B. $I_1 = I_2 \neq I_3$.
- d) **kugelartig**, wenn $I_1 = I_2 = I_3$. Wir werden am späteren Beispiel sehen, dass nicht nur Kugeln "kugelartig" sind.

Die Bestimmung der Hauptträgheitsachsen ist einfach, wenn der Körper eine Symmetrie hat: Für eine Kugel ist die Festlegung der Hauptträgheitsrichtungen völlig frei. In symmetrischen Körpern liegt eine Hauptträgheitsachse auf der Symmetrieachse. Die beiden restlichen stehen orthogonal dazu, können aber ansonsten beliebig gewählt werden.

Als **Beispiel** betrachten wir nun einen **homogenen Zylinder** der Höhe L mit Radius r_0 . Wir legen die \vec{E}_3 -Achse in die Zylinderachse und den Schwerpunkt in den Ursprung.

Allgemein lautet I_{ij} in Matrixform

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \int (x_2^2 + x_3^2) \rho d^3x & -\int x_1 x_2 \rho d^3x & -\int x_1 x_3 \rho d^3x \\ -\int x_2 x_1 \rho d^3x & \int (x_1^2 + x_3^2) \rho d^3x & -\int x_2 x_3 \rho d^3x \\ -\int x_3 x_1 \rho d^3x & -\int x_3 x_2 \rho d^3x & \int (x_1^2 + x_2^2) \rho d^3x \end{pmatrix}$$

Mit unserer Wahl des Koordinatensystems verschwinden die Außerdiagonalelemente aus Symmetriegründen. Wie man leicht sieht, gilt allgemein $I_{11} + I_{22} \geq I_{33}$ und zyklisch. Also gilt auch für die **Hauptträgheitsmomente**

$$I_1 + I_2 \geq I_3 \quad \text{und zyklisch.}$$

Die für konstante Massendichte ρ_0 auftretenden Integrale können leicht berechnet werden. Integrationsgebiet ist jeweils der Bereich nichtverschwindender Massendichte

$$\int x_1^2 d^3x = \int x_2^2 d^3x = \frac{1}{2} \int (x_1^2 + x_2^2) d^3x = \pi \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{r_0} r^3 dr = L\pi r_0^4/4$$

sowie $\int x_3^2 d^3x = \pi r_0^2 L^2/12$. Also ergibt sich für den **Zylinder**

$$I_1 = I_2 = M \left(\frac{r_0^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right) ; I_3 = M \frac{r_0^2}{2}.$$

Für den Spezialfall $L = \sqrt{3} r_0$ ist der Zylinder also “kugelartig”.

Für eine **Kugel** mit Radius R im Ursprung folgt aus $\int x_i^2 \rho dV = \frac{1}{3} \int r^2 \rho dV$

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3} \int \rho r^4 dr d\Omega \stackrel{\text{hom. Dichte}}{=} \frac{8\pi R^5}{3 \cdot 5} \rho_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

Zur Berechnung des Trägheitstensors bezüglich eines anderen Punktes des Körpers verwendet man am besten den “**Steinerschen Satz**” (Übungsaufgabe).

Nach diesen Vorüberlegungen kommen wir nun zur **Dynamik starrer Körper**.

Wir beginnen mit einem Rückblick auf die Resultate von Kapitel 2, in dem die Erhaltungssätze beim N -Körperproblem behandelt wurde. Da wir in Kapitel 7 und 8 Vektoren $\in K$ mit großen Buchstaben kennzeichnen, schreiben wir \vec{r}_S für den **Schwerpunkt** und \vec{l}_{tot} für den **Gesamtdrehimpuls**. Deren Bewegungsgleichungen lauten

$$M \ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha} \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} =: \vec{f}_{\text{tot}}^{\text{ext}},$$

sowie

$$\dot{\vec{l}}_{\text{tot}} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} = \vec{n}_{\text{tot}}.$$

Mit der “üblichen” Darstellung $\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_0 + B_t \vec{R}_{\alpha} \equiv \vec{r}_0 + \tilde{\vec{r}}_{\alpha}$, wobei entweder $\vec{r}_0 = \vec{r}_S$ oder $\vec{r}_0 = 0$ gewählt wird, zerlegen wir nun beide Seiten der letzteren Gleichung. Für die erste Version ergibt sich mit $\vec{l}_{\text{tot}} = \vec{l}_S + \vec{l}_{\text{rot}}^S$

$$M \vec{r}_S \times \ddot{\vec{r}}_S + \dot{\vec{l}}_{\text{rot}}^S = \sum_{\alpha} \vec{r}_S \times \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} + \sum_{\alpha} \tilde{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}}.$$

Unter Verwendung der obigen NG-Gleichung für den Schwerpunkt heben sich die “Schwerpunktterme” auf beiden Seiten weg und man erhält

$$\dot{\vec{l}}_{\text{rot}}^S = \sum_{\alpha} \tilde{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} B_t \vec{R}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} \equiv \vec{n}_{\text{tot}}^S .$$

Für den Fall eines Kreisels mit raumfesten Drehpunkt wählt man wieder $\vec{r}_0 = 0$ und erhält

$$\dot{\vec{l}}_{\text{rot}}^D = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} B_t \vec{R}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} \equiv \vec{n}_{\text{tot}}^D .$$

Als “einfaches” **Beispiel** für die äußere Kraft betrachten wir das **Schwerefeld** $\vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} = m_{\alpha} \vec{g}$:

Für den **Wurf** eines starren Körpers (z.B. Diskus) verwendet man die Aufteilung des Drehimpulses im Schwerpunktsystem. Wegen $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} = M \vec{R}_S = 0$ verschwindet \vec{n}_{rot}^S und \vec{l}_{rot}^S ist eine **Erhaltungsgröße**

$$\vec{l}_{\text{rot}}^S = \text{const.}$$

Im mitbewegten Schwerpunktsystem verhält sich der starre Körper in seiner Drehbewegung wie ein **kräftefreier Kreisel**.

Für den Fall eines Kreisels im Schwerfeld mit **festem Drehpunkt** gilt dagegen

$$\dot{\vec{l}}_{\text{rot}}^D = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{g} = M \vec{r}_S \times \vec{g} .$$

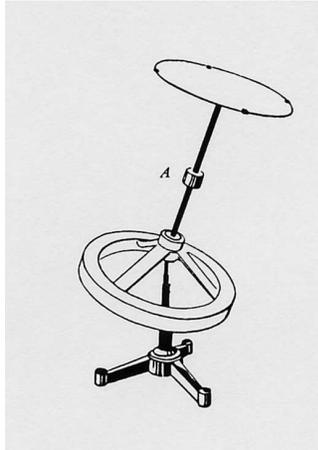
Neben der Schwerkraft wirkt im Drehpunkt des Kreisels noch eine **Zwangskraft**. Da der Drehpunkt mit dem Ursprung von k (und K) zusammenfällt, trägt die Zwangskraft wegen des Faktors \vec{r}_{α} nicht zum Drehmoment \vec{n}_{rot}^D bei.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir den Spezialfall des symmetrischen schweren Kreisels mit festem Drehpunkt.

8.2 Elementare Beschreibung des schweren symmetrischen Kreisels

In diesem Abschnitt wird eine vollständige Beschreibung des unten abgebildeten schweren symmetrischen Kreisels (ssK) mit einem **raumfesten Drehpunkt** gegeben. Üblicherweise geschieht dies erst im Rahmen der Lagrangeformulierung der Mechanik unter Verwendung der sog. “Eulerschen Winkel”. Hier gelingt es, durch eine geschickte Zerlegung des Drehimpulsvektors in einer nichtorthogonalen Basis sehr direkt zum Ziel zu gelangen. Zum einfacheren Verständnis der dargestellten Ableitung und der Ergebnisse werden die Bewegungsformen des

abgebildeten “Pohlschen”-Kreisels in der Vorlesung vorgeführt. Auf Grund der dreizähligen Symmetrie bei Drehung um die Achse, auf der mit Hilfe der Verschiebung eines Gewichts (A) der Schwerpunkt verschoben werden kann, handelt es sich um einen symmetrischen Kreisel (Übungsaufgabe).



8.2.1 Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen

In diesem Teilkapitel (8.2) diskutieren wir Bewegungsgleichungen im “Laborsystem” k , das ein Inertialsystem ist. Wir wählen den Ursprung unseres Laborsystems k **und** des Systems K , in dem der Kreisel ruht, als den raumfesten Drehpunkt des Kreisels (d.h. $\vec{r}_0 = 0$).

Mit der Abkürzung $\vec{l}_{\text{rot}}^D \rightarrow \vec{l}$ gilt für die zeitliche Änderung von \vec{l}

$$\dot{\vec{l}} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{g} = M \vec{r}_S \times \vec{g} ,$$

wobei \vec{r}_S der Ortsvektor des Schwerpunkts des Kreisels ist. Die Zwangskraft, die im Drehpunkt auf den Kreisel wirkt, trägt zum Drehmoment nicht bei. Wir legen das Koordinatensystem $\{\vec{E}_1, \vec{E}_3, \vec{E}_3\}$ in K so, dass \vec{E}_3 vom Koordinatenursprung zum Schwerpunkt zeigt, d.h. $\vec{r}_S = a \vec{e}_3 = a B_t \vec{E}_3$. Mit $\vec{g} = -g \vec{e}_3$ folgt dann

$$\dot{\vec{l}} = Mga \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \right) . \quad (\text{I})$$

Da in dieser Gleichung der Basisvektor \tilde{e}_3 auftritt, benötigen wir auch für seine Zeitabhängigkeit eine Differentialgleichung. Man erhält sie als Spezialfall der Relation $\dot{r}_\alpha = \vec{\omega} \times r_\alpha$, die für alle **festen** Punkte auf dem Kreisel bzw. in K gilt, indem man r_α durch \tilde{e}_3 ersetzt

$$\dot{\tilde{e}}_3 = \vec{\omega} \times \tilde{e}_3 .$$

In dieser Gleichung und (I) treten die **drei** zeitabhängigen Vektoren \vec{l}, \tilde{e}_3 und $\vec{\omega}$ auf. Nun besteht, wie in 8.1 besprochen, in K die einfache Beziehung $\vec{L} = I\vec{\Omega}$, wobei die lineare Abbildung **zeitunabhängig** ist ($L_i = I_i\Omega_i$ im Hauptachsensystem). In k ist die lineare Abbildung zwischen $\vec{\omega}$ und \vec{l} dagegen **zeitabhängig**. Dies verhindert eine einfache Lösung des Kreiselpblems für allgemeine Werte von I_1, I_2 und I_3 .

Wir beschränken uns deshalb auf die Beschreibung des **symmetrischen Kreisels** bei dem (mindestens) zwei der Hauptträgheitsmomente gleich sind. Wir wählen hier $I_1 = I_2$. Dann liegt der Schwerpunkt auf der Figurenachse, die Hauptachsenrichtung ist.

Der Gesamtdrehimpuls des Kreisels kann im raum- oder im körperfesten System dargestellt werden

$$\begin{aligned} \vec{l} &= l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2 + l_3\vec{e}_3 = L_1\tilde{e}_1 + L_2\tilde{e}_2 + L_3\tilde{e}_3 \\ &= I_1(\Omega_1\tilde{e}_1 + \Omega_2\tilde{e}_2) + I_3\Omega_3\tilde{e}_3 = I_1\vec{\omega} + (I_3 - I_1)\Omega_3\tilde{e}_3 , \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung nur für den symmetrischen Kreisel gilt. In diesem Fall sind die Vektoren \vec{l}, \tilde{e}_3 und $\vec{\omega}$ **koplanar**, d.h. sie liegen in einer Ebene. Diese Tatsache können wir verwenden, um $\vec{\omega}$ aus der Gleichung für $\dot{\tilde{e}}_3$ zu eliminieren. Der additive Term $\sim \tilde{e}_3$ in der Beziehung zwischen $\vec{\omega}$ und \vec{l} trägt nicht bei und man erhält

$$\boxed{\dot{\tilde{e}}_3 = \frac{1}{I_1} (\vec{l} \times \tilde{e}_3)} . \quad (\text{II})$$

Für den symmetrischen Kreisel dreht sich die Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit $|\vec{l}|/I_1$ um die **instantante** Drehimpulsrichtung. Wegen (I) ist \vec{l} für den schweren symmetrischen Kreisel (außer für $a = 0$) selbst **zeitabhängig**.

Beim Pohlschen Kreisel kann auch der Spezialfall $a = 0$ eingestellt werden, in dem das **Drehmoment verschwindet**. Der Kreisel verhält sich dann wie ein **“kräftefreier Kreisel”**, bei dem der Drehimpulsvektor \vec{l} **raumfest** ist und die Figurenachse mit der Frequenz $\omega_{\text{nut}} = |\vec{l}|/I_1$ um \vec{l} rotiert, wie man aus (II) abliest.

Diese Bewegung wird meist **Nutation** genannt. Für die *spezielle* Anfangsbedingung $\vec{e}_3(0) \sim \vec{l}$ bleibt auch die Figurenachse *raumfest*.

Aus den Gleichungen (I) und (II) erkennt man für beliebige Werte von a das Vorliegen **zweier Erhaltungsgrößen**:

i) skalare Multiplikation von I mit \vec{e}_3 liefert $\vec{e}_3 \cdot \dot{\vec{l}}(t) = 0 = \frac{d}{dt}(\vec{e}_3 \cdot \vec{l}(t))$, d.h.

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{l}(t) = \text{const.} = l_3 .$$

ii) skalare Multiplikation von (II) mit \vec{l} und (I) mit \vec{e}_3 liefert auf der rechten Seite jeweils null. Addition liefert dann

$$\vec{l} \cdot \dot{\vec{e}}_3 + \dot{\vec{l}} \cdot \vec{e}_3 = 0 = \frac{d}{dt}(\vec{e}_3 \cdot \vec{l}) ,$$

d.h.

$$\vec{e}_3(t) \cdot \vec{l}(t) = \text{const.} = L_3 .$$

Also sind die Projektionen des Drehimpulsvektors auf die Richtung \vec{e}_3 des Schwerfeldes (l_3) und die Richtung \vec{e}_3 der Figurenachse (L_3) Erhaltungsgrößen.

Zur weiteren Diskussion zerlegen wir \vec{l} (für $\vec{e}_3 \neq \vec{e}_3$) in der **nicht-orthogonalen Basis** $\{\vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_\perp := \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 / \sin \theta\}$. (Die Basisvektoren sind alle Einheitsvektoren, aber für $\theta \neq \pi/2$ ist $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = \cos \theta \neq 0$)

$$\vec{l}(t) = l_v(t)\vec{e}_3 + l_s(t)\vec{e}_3(t) + l_\perp(t)\vec{e}_\perp(t) . \quad (\text{A})$$

Die Entwicklungskoeffizienten l_v (v für "vertikal") und l_s (s für "spin") lassen sich durch l_3, L_3 und $\cos \theta$ ausdrücken

$$\begin{aligned} l_3 &= \vec{e}_3 \cdot \vec{l} = l_v + l_s \cos \theta \\ L_3 &= \vec{e}_3 \cdot \vec{l} = l_v \cos \theta + l_s . \end{aligned}$$

Elementare Lösung des Gleichungssystems liefert

$$l_v = \frac{l_3 - L_3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad ; \quad l_s = \frac{L_3 - l_3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} .$$

Falls θ zeitabhängig ist, so gilt dies auch für l_v und l_s .

Setzt man den Ansatz (A) für \vec{l} in (II) ein, so erhält man

$$\dot{\vec{e}}_3 = \left(\frac{l_v}{I_1} \vec{e}_3 + \frac{l_\perp}{I_1} \vec{e}_\perp \right) \times \vec{e}_3 .$$

Beschreibt man die Orientierung von $\tilde{\vec{e}}_3$ durch die Kugelkoordinaten θ und φ , so ist $\dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit um $\tilde{\vec{e}}_3$ als Drehachse und $\dot{\theta}$ die Winkelgeschwindigkeit um $\tilde{\vec{e}}_\perp$ als Drehachse. Da für infinitesimale Rotationen Vektoren der Winkelgeschwindigkeit *additiv* sind, liest man ab

$$\dot{\varphi} = \frac{l_v}{I_1} = \frac{l_3 - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{l_\perp}{I_1}.$$

Lösungen mit $l_\perp \equiv 0$ entsprechen also konstantem Winkel θ zwischen der Richtung des Schwerfeldes und der Figurenachse.

Zur Beschreibung der Zeitabhängigkeit der Winkel θ und φ verwenden wir zusätzlich noch die Erhaltung der **Gesamtenergie**. Wir betrachten zunächst die *kinetische Energie der Rotation*

$$T_{\text{rot}} = \frac{L_1^2 + L_2^2}{2I_1} + \frac{L_3^2}{2I_3}.$$

Zur Berechnung von T_{rot} schreiben wir $\vec{l} - L_3 \tilde{\vec{e}}_3$ auf zwei verschiedene Weisen

$$\vec{l} - L_3 \tilde{\vec{e}}_3 = L_1 \tilde{\vec{e}}_1 + L_2 \tilde{\vec{e}}_2 = l_v \tilde{\vec{e}}_3 + (l_s - L_3) \tilde{\vec{e}}_3 + l_\perp \tilde{\vec{e}}_\perp.$$

Quadrieren liefert

$$\begin{aligned} L_1^2 + L_2^2 &= l_v^2 + (l_s - L_3)^2 + 2l_v(l_s - L_3) \tilde{\vec{e}}_3 \cdot \tilde{\vec{e}}_3 + l_\perp^2 \\ &= l_v^2 \sin^2 \theta + l_\perp^2, \end{aligned}$$

wobei wir $l_s - L_3 = -l_v \cos \theta$ und $\tilde{\vec{e}}_3 \cdot \tilde{\vec{e}}_3 = \cos \theta$ verwendet haben. Mit $l_\perp = I_1 \dot{\theta}$ und dem Ausdruck für l_v ergibt sich für die kinetische Energie der Rotation

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(l_3 - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

Die Erhaltung der Gesamtenergie $T_{\text{rot}} + Mga \cos \theta = E$ lautet mit der Definition $E' := E - L_3^2/2I_3$

$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(l_3 - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mga \cos \theta = E'$$

Wie man solche Differentialgleichungen löst, wissen wir aus Kapitel 3.1 der Vorlesung: Identifiziert man I_1 mit der Masse eines Teilchens und die beiden anderen Terme auf der linken Seite der Gleichung mit dem Potential $V_{\text{eff}}(\theta)$, so haben wir ein altbekanntes **eindimensionales** Problem zu lösen, um $\theta(t)$ zu erhalten.

Die Zeitabhängigkeit von φ erhält man durch anschließende Integration

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \frac{l_3 - L_3 \cos \theta(t')}{I_1 \sin^2 \theta(t')} dt' .$$

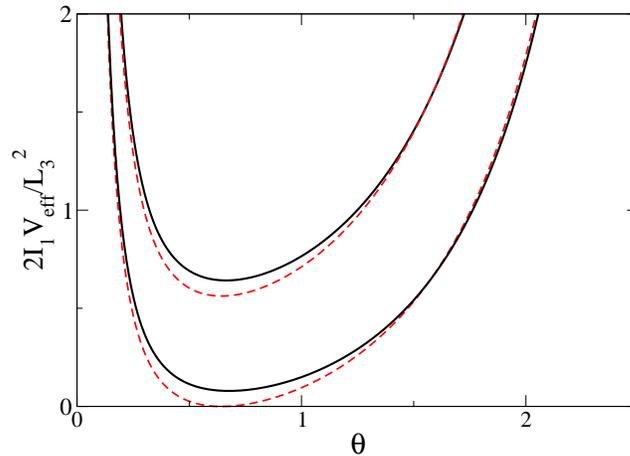
Wegen der drei Rotationsfreiheitsgrade hat man sechs Anfangsbedingungen. Wir wählen sie wie folgt: $\varphi(0)$, den Anfangswinkel eines festen Punktes auf dem Kreisel bezüglich Drehung um die Figurenachse, sowie $L_3, \theta(0), \dot{\theta}(0)$ und l_3 oder $\dot{\varphi}(0)$. Letzere beiden hängen über

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{l_v}{I_1} = \frac{l_3 - L_3 \cos \theta(0)}{I_1 \sin^2 \theta(0)}$$

zusammen. Damit ist E' festgelegt. Die Abbildung zeigt das effektive Potential

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(l_3 - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mga \cos \theta$$

für $l_3/L_3 = 0.8$ und $l_3/L_3 = 1.25$ jeweils für $\eta = 0$ (gestrichelt) und $\eta = 0.1$ (durchgezogen), wobei $\eta := 2I_1 Mga/L_3^2$ ist (s.u.). Die beiden oberen Kurven entsprechen $l_3/L_3 = 1.25$.



8.2.2 Nutation, Präzession

Zur Diskussion der Bewegungsformen der Figurenachse beginnen wir, wie bei der Bewegung im Zentralpotential, mit dem **Spezialfall**, in dem der Winkel θ

zeitunabhängig ist, d.h. $V_{\text{eff}}(\theta_a) = E'$, wobei θ_a der Wert des Winkels θ ist, an dem V_{eff} sein **Minimum** hat. Also benötigt man

$$V'_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(l_3 - L_3 \cos \theta)(L_3 - l_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} - Mga \sin \theta = \sin \theta \left[\frac{l_v l_s}{I_1} - Mga \right] .$$

Die Bedingung für das Minimum lautet also

$$\frac{l_v l_s}{I_1} - Mga = 0 .$$

Die Gleichung liefert eine Beziehung zwischen L_3, l_3 und $\cos \theta_a$. Da für den Fall der “langsamen Präzession” (s.u.) θ_a und L_3 experimentell einfach einstellbar sind, geben wir θ_a vor und bestimmen l_3 so, dass die Gleichung erfüllt ist.

Wegen $\theta(t) \equiv \theta_a$, d.h. $l_{\perp} \sim \dot{\theta} = 0$, gilt für die Zeitabhängigkeit des Drehimpulsvektors

$$\vec{l}(t) = l_v(\theta_a) \vec{e}_3 + l_s(\theta_a) \tilde{\vec{e}}_3(t) .$$

Wir beginnen mit dem **Spezialfall** $a = 0$, d.h. dem Fall des “**kräftefreien**” (besser: “drehimpulsfreien”) Kreisels, für den \vec{l} **raumfest** ist. Seine Bewegungsform haben wir bereits besprochen. Die Gleichung $l_v l_s = 0$ hat offensichtlich **zwei** Typen von Lösungen:

$$1) \quad l_v = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = 0 , \quad \text{d.h.} \quad \vec{l} = l_s \tilde{\vec{e}}_3 = L_3 \tilde{\vec{e}}_3 .$$

Der Drehimpulsvektor **und** die Figurenachse sind **raumfest** $\vec{l} \sim \tilde{\vec{e}}_3$ und schließen mit $\tilde{\vec{e}}_3$ den Winkel θ_a ein.

$$2) \quad l_s = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{l} = l_v \vec{e}_3 = l_3 \vec{e}_3 , \quad \text{d.h.} \quad \dot{\varphi} = \frac{l_3}{I_1} ,$$

mit $|l_3| = |\vec{l}|$. Das ist die **Nutation** um die \vec{e}_3 -Achse mit dem Öffnungswinkel θ_a des Rotationskegels.

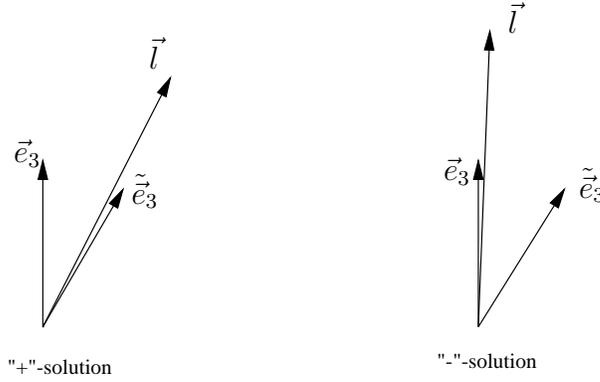
Für den allgemeinen Fall $a \neq 0$ erhält man mit $l_v = (L_3 - l_s) / \cos \theta_a$ die quadratische Gleichung

$$l_s(L_3 - l_s) = I_1 Mga \cos \theta_a$$

für l_s mit den zwei Lösungen

$$l_{s,\pm} = \frac{L_3}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 2\eta \cos \theta_a} \right] \quad \rightarrow \quad l_{v,\pm} = \frac{L_3}{2 \cos \theta_a} \left[1 \mp \sqrt{1 - 2\eta \cos \theta_a} \right] ,$$

falls $1 - 2\eta \cos \theta_a < 1$ gilt. Die dimensionslose Größe $\eta := 2MgaI_1/L_3^2$ ist **klein**, wenn die potentielle Energie des Kreisels im Schwerfeld **klein** im Vergleich mit der “Rotationsenergie” $L_3^2/2I_1$ ist. In diesem Fall ergibt sich für \vec{l} folgendes Bild



Für diesen Fall des **schnellen schweren symmetrischen Kreisels** (sssK) kann man die Wurzel entwickeln. Die beiden gefundenen Lösungen unterscheiden sich dann durch kleine Terme $\sim \eta$ von der Lösung für den kräftefreien Kreisel. Trotzdem ändert das die dortige Lösung mit $\dot{\varphi} = 0$ **qualitativ**. Die Winkelgeschwindigkeit um die \vec{e}_3 -Achse

$$\dot{\varphi}_{\pm} = \frac{l_{v,\pm}}{I_1} = \frac{Mga}{l_{s,\pm}}$$

lautet für die “+”-Lösung, wenn man die Wurzel entwickelt

$$\omega_{\text{pr}} := \dot{\varphi}_+ = \frac{Mga}{l_{s,+}} = \frac{Mga}{L_3} \left(1 + \frac{\eta}{2} \cos \theta_a + O(\eta^2) \right) .$$

Die Figurenachse rotiert (**präzediert**) mit der “langsamen” **Präzessionsfrequenz** ω_{pr} um die \vec{e}_3 -Achse, wobei für den sssK $\omega_{\text{pr}} \ll L_3/I_1$ gilt. Der Gesamtdrehimpuls \vec{l} zeigt **fast** in \vec{e}_3 -Richtung (s. Abbildung).

Die Präzessionsfrequenz ω_{pr} für den sssK kann man durch eine einfache Überlegung auch direkt erhalten. Dazu verwendet man $\vec{l} \approx L_3 \vec{e}_3$ und ersetzt \vec{e}_3 auf der rechten Seite von (I) durch \vec{l}/L_3 , d.h.

$$\dot{\vec{l}} \approx \frac{Mga}{L_3} \left(\vec{e}_3 \times \vec{l} \right) .$$

Die Winkelgeschwindigkeit um die \vec{e}_3 ist also näherungsweise durch Mga/L_3 gegeben.

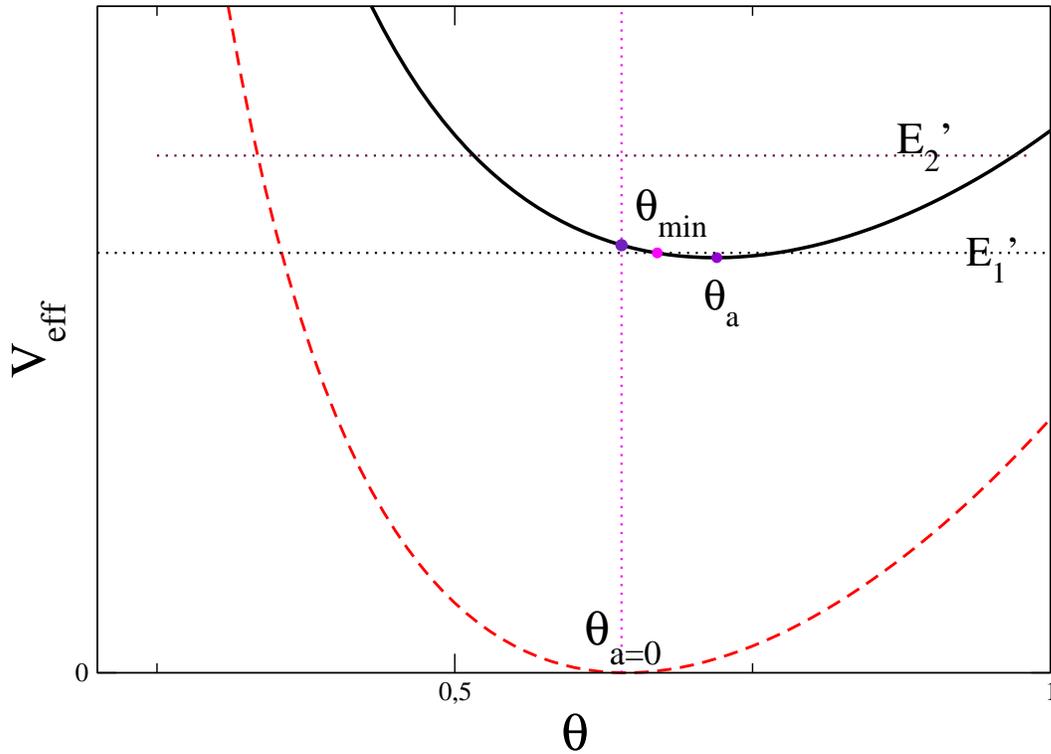
Die “-”-Lösung (auch “schnelle” Präzession genannt) unterscheidet sich für $\eta \ll 1$ qualitativ nicht von der Nutation des Grenzfalles $a = 0$. Der Gesamtdrehimpuls \vec{l} zeigt ungefähr in \vec{e}_3 -Richtung (s. obige Abbildung).

8.2.3 Nutation und Präzession

Wir betrachten nun den “generischen Fall”, bei dem $E' > V_{\text{eff}}(\theta_a)$ ist. Dann ist $\theta(t)$ eine **periodische** Funktion der Zeit. Die führt zu einer **Überlagerung** von **Nutation** und **Präzession**.

Wir beschränken uns auf den Fall $L_3 > l_3 > 0$ (und $a > 0$), der im Limes $E' \rightarrow V_{\text{eff}}(\theta_a)$ der **langsamen Präzession** entspricht. Dann verschwindet der erste Term von V_{eff} bei $\theta_{a=0} = \arccos(l_3/L_3)$. Das Gravitationspotential $Mga \cos \theta$ nimmt monoton mit θ ab. Also liegt das Minimum von V_{eff} rechts von $\theta_{a=0}$, d.h.

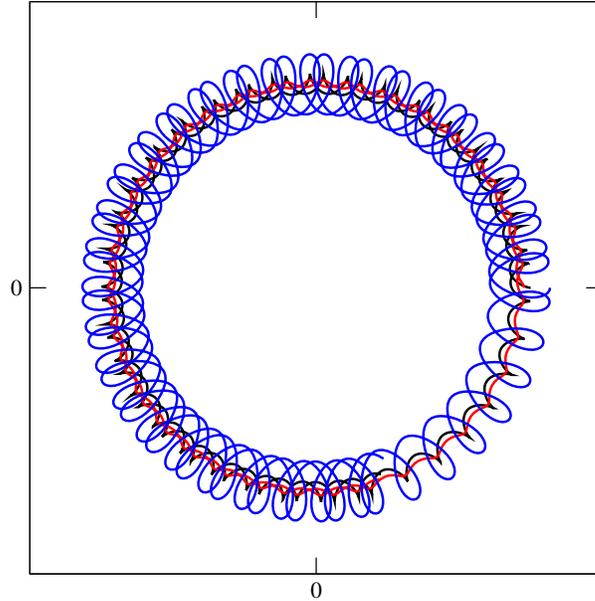
$$\theta_a > \theta_{a=0} ,$$



Das Verhalten der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ sieht man am besten, wenn man $l_3 = L_3 \cos \theta_{a=0}$ in l_v einsetzt

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{L_3}{\sin^2 \theta} [\cos \theta_{a=0} - \cos \theta(t)] .$$

Falls $\theta_{\min} > \theta_{a=0}$ gilt, wie bei E_1' in der Abbildung, hat $\dot{\varphi}(t)$ für alle Zeiten dasselbe Vorzeichen. Für $\theta_{\min} < \theta_{a=0}$, wie bei E_2' , wechselt $\dot{\varphi}(t)$ das Vorzeichen und die Spitze von \tilde{e}_3 folgt auf der Einheitskugel eine Rosettenbahn zwischen θ_{\min} und θ_{\max} . Eine quantitative Analyse lässt sich leicht durchführen, wenn man V_{eff} in der Umgebung des Minimums durch eine Parabel approximiert (Übungsaufgabe).



Die Abbildung zeigt die Projektion der Bewegung des Punktes $\theta(t), \varphi(t)$ auf der Einheitskugel auf die x, y -Ebene für die Fälle $\theta_{\min} < \theta_{a=0}$ (Rosettenbahn), $\theta_{\min} = \theta_{a=0}$ (Bahn mit Spitzen) und $\theta_{\min} > \theta_{a=0}$. Die Bahnkurven sind i.A. **nicht geschlossen**.

Die bei der praktischen Demonstration auftretenden Reibungskräfte sind in unserer Beschreibung nicht berücksichtigt.

8.3 Eulersche Kreiselgleichungen

Im letzten Kapitel haben wir den symmetrischen schweren Kreisel in Schwerfeld im **Laborsystem** k beschrieben. In diesem Spezialfall haben wir die Tatsache, dass die Beziehung zwischen dem Drehimpulsvektor und dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit nur im **körperfesten** System einfach ist ($L_i = I_i \Omega_i$), umgehen können. Da dieses Vorgehen für den Fall des **unsymmetrischen Kreisel** nicht funktioniert, betrachten wir in diesem Teilkapitel die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{l}}_{\text{rot}} = \vec{n}_{\text{tot}} = \sum_{\alpha} B_t \vec{R}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

im **körperfesten System** K . Wir unterdrücken im Folgenden die Indizes “rot” und “tot”.

Unter Verwendung der Relation

$$\dot{\vec{l}} = \frac{d}{dt} (B_t \vec{L}) = \dot{B}_t \vec{L} + B_t \dot{\vec{L}} = B_t [\vec{\Omega} \times \vec{L} + \dot{\vec{L}}].$$

erhält man mit $\vec{n} = B_t \vec{N}$ nach Anwendung von B_t^T

$$\boxed{\dot{\vec{L}} + \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{N}} .$$

Der Vektor \vec{N} des Drehmoments in K lautet dabei

$$\vec{N} = \sum_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} \times B_t^T \vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} .$$

Insbesondere gilt für den Kreisel im Schwerfeld $\vec{f}_{\alpha}^{\text{ext}} = m_{\alpha} \vec{g}$, d.h.

$$\vec{N} = \sum_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} \times m_{\alpha} B_t^T \vec{g} = M \vec{R}_S \times \vec{G}(t) ,$$

wobei $\vec{G}(t) = B_t^T \vec{g}$ ist.

Im System K sieht die Drehimpulsgleichung $\dot{\vec{l}} = \vec{n}$ jetzt komplizierter aus, aber mit Hilfe der Beziehung $\vec{L} = I \vec{\Omega}$ kann man \vec{L} oder $\vec{\Omega}$ aus der Gleichung eliminieren

$$I \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times I \vec{\Omega} = \vec{N} .$$

Sind die \vec{E}_i die Hauptträgheitsachsen, so ist I in dieser Darstellung diagonal und die Berechnung des Vektorproduktes liefert die „**Eulerschen Kreiselgleichungen**“ in Komponenten

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 &= N_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_1 \Omega_3 &= N_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= N_3 \end{aligned}} .$$

Wir betrachten wieder die zwei Beispiele des Wurfes und des Kreisels mit raumfesten Drehpunkt.

Für den **Wurf** legt man den Ursprung von K in den Schwerpunkt des starren Körpers. Wegen $\vec{R}_S = 0$ verschwindet der Vektor \vec{N} des Drehmoments und man erhält die Eulergleichungen für den **kräftefreien** Kreisel

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_1 \Omega_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

Für den Fall des **symmetrischen** Kreisels ist die Lösung der Gleichungen einfach. Für $I_1 = I_2$ folgt aus der letzten Gleichung sofort $\Omega_3 = \text{const.}$, d.h. die Erhaltung von L_3 . Dann liefern die beiden ersten Gleichung ein System von zwei **linearen** Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, das leicht gelöst werden kann (Übungsaufgabe).

Für den Fall des **unsymmetrischen** Kreisels führt die allgemeine Lösung auf elliptische Integrale (s.z.B. Landau-Lifschitz, Band I, §37). Man sieht aber sofort, dass die *konstante Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen*, d.h. **ein** $\Omega_i = \text{const.} \neq 0$ und die beiden anderen gleich Null, spezielle Lösungen der gekoppelten nichtlinearen Eulergleichungen sind. Es stellt sich aber durch Linearisierung der Gleichung heraus, dass für $I_1 < I_2 < I_3$ nur die Rotationen um die \vec{E}_1 - und die \vec{E}_3 -Achse stabil sind. *Die Rotation um die „mittlere Achse“ ist instabil* (Übungsaufgabe).

Für den Kreisel mit **raumfesten Drehpunkt** gilt

$$\vec{N} = M\vec{R}_S \times \vec{G} = Ma\vec{E}_3 \times \vec{G} ,$$

wobei wir das Koordinatensystem wie im letzten Teilkapitel gewählt haben. Um ein geschlossenes Gleichungssystem zu erhalten, formulieren wir die Zeitabhängigkeit von $\vec{G} = B_t^T \vec{g}$ als Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\vec{G}} &= \dot{B}_t^T \vec{g} = B_t^T \dot{B}_t \vec{g} = -B_t^T \dot{B}_t B_t^T \vec{g} = -B_t^T A_t \vec{g} \\ &= -B_t^T (\vec{\omega} \times \vec{g}) = -B_t^T B_t (\vec{\Omega} \times \vec{G}) \\ &= -\vec{\Omega} \times \vec{G} . \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Notation und Ergebnisse aus Kapitel 7 benutzt. Damit hat man ein geschlossenes System von **sechs nichtlinearen Differentialgleichungen** für die Komponenten von $\vec{\Omega}$ und \vec{G} . Bei der Lösung helfen die **Erhaltungsgrößen**

- Es gilt $\vec{g}^2 = g^2 = \vec{G}^2$, d.h. der Betrag von \vec{G} ist erhalten.
- In k sieht man wegen $\vec{n} = M\vec{x}_S \times \vec{g}$, dass $\vec{l} \cdot \vec{g} = \text{const} = \vec{L} \cdot \vec{G}$ gilt.
- Die Gesamtenergie $I_{ij}\Omega_i\Omega_j/2 + Ma\vec{G} \cdot \vec{E}_3 = E$ ist erhalten.

Ohne weitere unabhängige Erhaltungsgröße können auch chaotische Lösungen auftreten. Dies passiert nicht in den beiden hier diskutierten Spezialfällen des kräftefreien Kreisels und des symmetrischen schweren Kreisels.

Wir kommen in Teil II der Vorlesung zur Lagrangeformulierung der Mechanik kurz auf die Beschreibung starrer Körper zurück.

Teil II

Lagrange-Formulierung der Mechanik

In diesem Teil der Vorlesung werden wir die Lagrange-Formulierung der Mechanik eingehender diskutieren. Wir hatten diese Umschreibung der Newtonschen Bewegungsgleichungen durch Einführung beliebiger krummliniger Koordinaten $q = q_1, q_2, \dots, q_{3N}$ erhalten, wobei N die Anzahl der Teilchen ist und die kartesischen Koordinaten der N Teilchen $x_i, i = 1, \dots, 3N$ durch die q ausgedrückt wurden ($(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \rightarrow \vec{r}$)

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N}; t), \quad i = 1, \dots, 3N .$$

Völlig **unabhängig von der Wahl der krummlinigen Koordinaten** nehmen dann die Bewegungsgleichungen immer **dieselbe Form** an, nämlich ($\vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \quad (i = 1, \dots, 3N)$$
$$T = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} \vec{v}_\alpha^2(q_1 \dots q_{3N}, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{3N}; t), \quad Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i},$$

wobei \vec{f}_α die Kraft auf das α -te Teilchen ist. Für den Fall **konservativer Kräfte**

$$\vec{f}_\alpha = - \frac{\partial V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_\alpha}$$

vereinfachten sich die Gleichungen zu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad ; \quad L := T - V .$$

Dabei heißt L **die Lagrangefunktion** und die Bewegungsgleichungen heißen **“Lagrangegleichungen (2. Art)”**.

Einen Vorteil der Lagrangegleichungen hatten wir bereits kennen gelernt: Es ist ein allgemeiner Formalismus, der es einem erlaubt, die der Symmetrie eines Problems entsprechenden Koordinaten zu wählen.

Häufig hat man es in der Mechanik mit Systemen zu tun, in denen die Bewegung der Teilchen **räumlichen Einschränkungen** unterliegt. Zum Beispiel kann ein Massenpunkt gezwungen sein, sich während eines bestimmten Zeitintervalls auf einem vorgegebenen starren Körper zu bewegen. Dies kann idealisiert als eine Einschränkung auf eine stückweise glatte Fläche, oder, wenn der Körper “fadenförmig” ist, auf eine stückweise glatte Kurve beschrieben werden. Eine mathematische Gleichung, die eine solche Einschränkung der Bewegung ausdrückt, bezeichnet man als **Nebenbedingung**. Da diese Beschränkung eine Einwirkung der Umgebung auf den Massenpunkt darstellt, wird man im Sinne der Newtonschen Mechanik versuchen, dafür eine Kraft verantwortlich zu machen, die zu den äußeren Kräften \vec{f}_i^{ext} und den Wechselwirkungskräften $\sum_j' \vec{f}_{ij}$ zu addieren ist. Diese sog. **Zwangskräfte** sind i. A. aber zunächst **nicht** als Funktionen der Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen **bekannt**. Das Konzept der Zwangskräfte wird also so zu gestalten sein, dass diese wie die Bahnkurven zu bestimmende Unbekannte in den erweiterten Newtonschen Bewegungsgleichungen sind. Diese Erweiterung der Newtonschen Bewegungsgleichungen muss in Übereinstimmung mit dem Experiment gefunden werden. Der Vorteil der Lagrangeformulierung in diesem Zusammenhang ist, dass es für eine wichtige Klasse von “Zwangskräften” möglich ist, Koordinaten so zu wählen, dass die **Zwangskräfte in der Berechnung der Teilchenbahnen überhaupt nicht auftreten**.

Ein weiterer wichtiger Grund für die ausführliche Diskussion der Lagrangeformulierung der Mechanik ist, dass sie “den Einstieg in allgemeinere Prinzipien der theoretischen Physik” erlaubt. Wir werden z. B. das Wesen von **Variationsprinzipien** kennen lernen, eine allgemeine Formulierung der **Erhaltungssätze** kennen lernen (“Noethersches Theorem”) und die Grundlage für den Einstieg in die **Hamiltonsche Mechanik** geben.

Als Anwendungen diskutieren wir in diesem zweiten Teil der Vorlesung **kleine Schwingungen** sowie nochmals die Mechanik **starrer Körper**.

9 Mechanische Systeme mit Nebenbedingungen

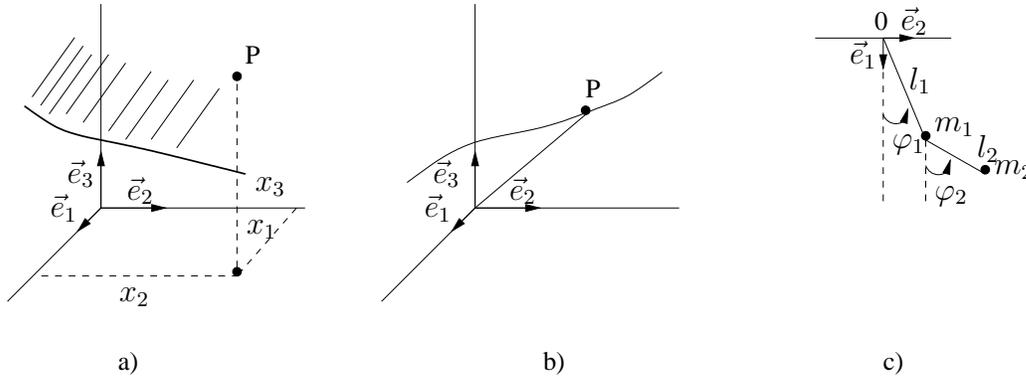
Man sagt ein System von N Massenpunkten unterliegt k **holonomen** Neben- (oder Zwangs-)bedingungen, wenn die Bahnpunkte $\vec{r}_i(t)$ k **Gleichungen** erfüllen:

$$h_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, k$$

Hängen die Funktionen h_i explizit von der Zeit ab, so spricht man von holonom **rheonomen** Bedingungen (es genügt, wenn **eine** der h_i explizit zeitabhängig ist). Hängt dagegen **keine** der h_i explizit von der Zeit ab, so spricht man von holonom **skleronomen** Nebenbedingungen.

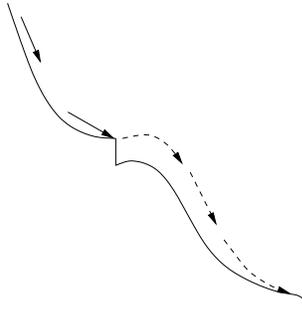
Die k Gleichungen $h_i = 0$ seien **funktional unabhängig**, was wir zunächst an einem einfachen Beispiel verdeutlichen wollen. Sei z. B. $h_1(\vec{r}) = 0$ und $h_2(\vec{r}) = 0$, dann ist Nebenbedingung $h_3(\vec{r}) := c_1 h_1(\vec{r}) + c_2 h_2(\vec{r}) = 0$ funktional abhängig und reduziert die Zahl der effektiven Freiheitsgrade nicht weiter. Man kann zeigen, dass die Nebenbedingungen funktional unabhängig von einander sind, falls die Gradienten $\partial h_1 / \partial \vec{r}, \dots, \partial h_k / \partial \vec{r}$ **linear unabhängig** in (fast) allen Punkten sind, die die Nebenbedingungen erfüllen.

Zur Illustration beginnen wir mit der Diskussion einiger Beispiele:



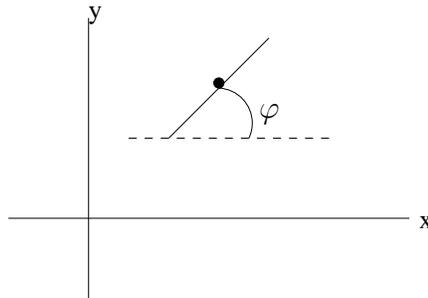
- a) **Ein** Teilchen, das sich auf der **zeitlich unveränderlichen** Fläche $x_3 = \tilde{h}(x_1, x_2)$, d. h. $h(x_1, x_2, x_3) := x_3 - \tilde{h}(x_1, x_2) = 0$ bewegt: $N = 1$; $k = 1$, **holonom-skleronomes System**. Dem Massenpunkt verbleiben **2 Freiheitsgrade** der Bewegung.
- b) **Ein** Teilchen, das entlang einer **Raumkurve** gleiten kann, die sich **selbst** im Raum **bewegt**. Fasst man diese Raumkurve als Schnittpunkt zweier Flächen $h_1(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ und $h_2(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ auf, so sieht man, dass es sich um ein $N = 1$, $k = 2$, **holonom-rheonomes System** handelt. Dem Massenpunkt verbleibt **ein** Freiheitsgrad der Bewegung.
- c) Das **Doppelpendel**: Zwei Massenpunkte m_1 und m_2 sind über zwei “masselosen Stangen” so um die \vec{e}_3 -Achse frei drehbar mit dem Ursprung und untereinander verbunden, dass $|\vec{r}_1| = l_1$, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = l_2$, $\vec{r}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$ und $\vec{r}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$ gilt. Es handelt sich um ein $N = 2$, $k = 4$, **holonom-skleronomes System**. Es verbleiben **zwei** Freiheitsgrade der Bewegung.

Holonome Nebenbedingungen kommen in der Mechanik sehr häufig vor. **Nicht** zu diesem Typ gehören z. B. Nebenbedingungen, die durch **Ungleichungen** ausdrückbar sind. Ein Beispiel ist das Abgleiten eines Teilchens auf einer Halbkugel, oder etwas sportlicher



Der Skispringer befindet sich immer **oberhalb** der Zwangsfläche (Ungleichung).

Ein anderer Typ von Nebenbedingungen tritt z. B. beim Abrollen von Rädern auf: Die **Geschwindigkeiten** auf der Bahnkurve, die man berechnen möchte treten **linear** in den Nebenbedingungen auf. Ein anderes Beispiel ist eine Schlittschuhläuferin, die auf einer Kufe über die Eisfläche (x - y -Ebene) gleitet.



Neben den Koordinaten x, y benötigen wir zur Beschreibung der Bewegung den Winkel φ , der die Kufenstellung beschreibt. Die Nebenbedingung lautet dann $v_y \cos \varphi = v_x \sin \varphi$. Auf dieses Beispiel kommen wir kurz am Ende von Kap. 9.2. zurück.

9.1 Lagrangegleichungen 2.Art für Systeme mit holonomen Nebenbedingungen

Wie in der Einleitung beschrieben, wird man im Rahmen der Newtonschen Theorie **Zwangskräfte** \vec{Z}_i einführen, die dafür sorgen, dass die Teilchen die Zwangsbedingungen wirklich erfüllen. Durch die folgenden Überlegungen wollen wir die Existenz solcher Zwangskräfte veranschaulichen, die Frage der Eindeutigkeit braucht uns im Moment nicht zu beschäftigen. Wir schreiben also für die N Teilchen

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{f}_\alpha + \vec{Z}_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N$$

und die Anfangsbedingungen müssen so gewählt werden, dass sie mit den Nebenbedingungen in Einklang sind. Mathematisch bedeutet das, dass die $6N$ Anfangsgrößen $\vec{r}_\alpha(0)$ und $\dot{\vec{r}}_\alpha(0)$ **nicht** mehr **unabhängig** voneinander frei **wählbar** sind.

Für die Lagrangeform der Bewegungsgleichungen bedeutet dieser Ansatz, dass die “verallgemeinerten Kräfte” Q_i zwei Anteile enthalten

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^N \vec{Z}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

Unabhängig von der tatsächlichen experimentellen Realisation der Zwangsbedingungen wollen wir uns für die drei Beispiele überlegen, wie mit Hilfe der Konzepte, die wir in der Beschreibung von **uneingeschränkter Bewegung** kennen gelernt haben, die Nebenbedingungen durch einen Grenzübergang erzwungen werden können: In den Beispielen a) und b) ist $N = 1$, d. h. der Index α entfällt. Wir wollen annehmen, dass die “äußere” Kraft \vec{f} konservativ ist, d.h. $\vec{f} = -\partial V / \partial \vec{r}$. (Diese Annahme ist für das Folgende aber nicht wesentlich.)

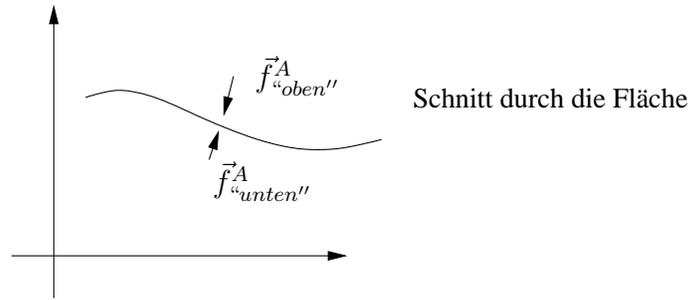
a) Wir betrachten die **freie** Bewegung im Potential

$$V_{tot}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + A \underbrace{(x_3 - \tilde{h}(x_1, x_2))^2}_{h(x_1, x_2, x_3)} \quad ; \quad A > 0$$

Ist A groß (und positiv), so nimmt die potentielle Energie bei Entfernung von der Fläche $x_3 = \tilde{h}(x_1, x_2)$ stark zu. Falls $V(\vec{r})$ in der Nähe dieser Fläche “schwach veränderlich” ist, kann sich das Teilchen wegen der Positivität der kinetischen Energie, d.h. $V(\vec{r}) + A \cdot (x_3 - \tilde{h}(x_1, x_2))^2 \leq E$ nicht weit von dieser Fläche entfernen und im Limes $A \rightarrow \infty$ wird die Bewegung an die Fläche gebunden sein. Die zum Zusatzpotential gehörige Kraft bewirkt im Limes $A \rightarrow \infty$, was wir von der Zwangskraft erwarten

$$\vec{f}^A := -2Ah(\vec{r}) \frac{\partial h}{\partial \vec{r}}.$$

Die Kraft \vec{f}^A steht bei Annäherung an die Fläche **senkrecht** (sie ist proportional zum Gradienten).



Zur Beschreibung der Bewegung auf der Fläche (d. h. im Limes $A \rightarrow \infty$) ist es nun günstig “verallgemeinerte” (krummlinige) Koordinaten so einzuführen, dass q_1 und q_2 die Lage des Punktes **auf** der Fläche charakterisieren und $|q_3|$ ein Maß für den Abstand von der Fläche ist, d. h. **auf** der Fläche gilt $q_3 \equiv 0$. Dann liegen

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \quad \text{und} \quad \vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \quad \text{in der Fläche.}$$

und

$$\vec{g}_i \cdot \vec{f}^A \rightarrow \vec{g}_i \cdot \vec{Z}, \quad i = 1, 2$$

verschwindet, da die Zwangskraft senkrecht auf der Fläche steht. Die Details in der Konstruktion der Zwangskraft spielen keine Rolle, wesentlich ist nur, dass \vec{Z} **senkrecht** auf der Fläche steht. Also gilt für $i = 1$ und $i = 2$

$$Q_i = \vec{f} \cdot \vec{g}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

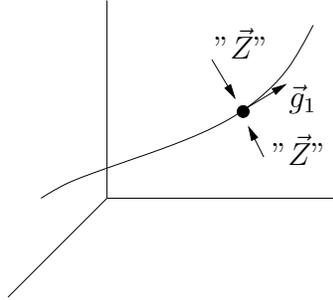
und damit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L_*}{\partial q_i}, \quad L_* = (T - V)_{q_3=0; \dot{q}_3=0}; \quad i = 1, 2.$$

Die Zwangskraft ist aus den Bewegungsgleichungen für die “relevanten” Koordinaten (d. h. die auf der Fläche) vollständig herausgefallen. In der Lagrangefunktion L_* tritt die “irrelevante” Koordinate q_3 nicht mehr auf, d.h. $L_* = L_*(q_1, q_2; \dot{q}_1, \dot{q}_2)$

$$L_* = \frac{m}{2} \vec{v}^2(q_1, q_2, 0; \dot{q}_1, \dot{q}_2, 0) - V(q_1, q_2, 0).$$

- b) Das Teilchen, das auf dem bewegten Draht gleitet, können wir völlig analog behandeln. Wir wählen als erste verallgemeinerte Koordinate q_1 **die Bogenlänge** (mit Vorzeichen) auf dem Draht, gemessen von einem festen, aber willkürlichen Anfangspunkte P_0 auf dem Draht. Die Koordinaten q_2 und q_3 wählen wir in senkrechter Richtung zur **instantanen** Drahtachse, d.h auf dem Draht gilt $q_2 = q_3 \equiv 0$. Zum äußeren Potential $V(\vec{r})$ addieren wir wieder ein stark anziehendes Potential, z. B. $A(q_2^2 + q_3^2)$, das mit dem Draht mitgeführt wird. Die "Zwangskraft" \vec{f}^A ist dann **senkrecht** zur **instantanen** Lage des Drahtes. Nach Konstruktion ist also $\vec{g}_1 \cdot \vec{f}^A = 0$

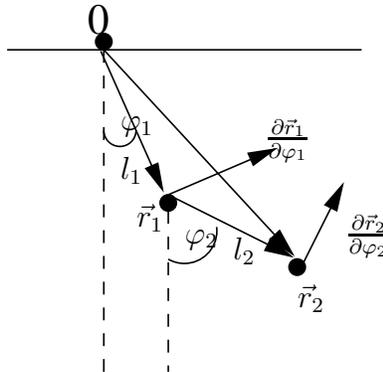


und aus $Q_1 = \vec{f} \cdot \vec{g}_1 = -\partial V / \partial q_1$ folgt für $q = 1$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L_*}{\partial q_1}, \quad L_* = \frac{m}{2} \vec{v}^2(q_1, 0, 0; \dot{q}_1, 0, 0; t) - V(q_1, 0, 0)$$

Wegen der Bewegung des Drahtes hat \vec{v} eine **explizite** Zeitabhängigkeit. Wiederum tritt die Zwangskraft in der Gleichung für die "relevante" Koordinate nicht auf.

- c) Beispiele a) und b) beschäftigen sich mit der Bewegung **eines** Massenpunktes. Wir wollen an Hand des Doppelpendels diskutieren, ob sich die angestellten Überlegungen auf Mehrteilchensysteme verallgemeinern lassen.



Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir:

$$q_1 = \varphi_1 ; q_2 = \varphi_2 , q_3 = |\vec{r}_1| - l_1 , q_4 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_2 , q_5 = x_3^{(1)} , q_6 = x_3^{(2)} ,$$

d.h.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (l_1 + q_3) [\vec{e}_1 \cos \varphi_1 + \vec{e}_2 \sin \varphi_1] + q_5 \vec{e}_3 \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + (l_2 + q_4) [\vec{e}_1 \cos \varphi_2 + \vec{e}_2 \sin \varphi_2] + q_6 \vec{e}_3\end{aligned}$$

wobei q_1 und q_2 die “relevanten” Koordinaten sind. Zur Berechnung der $Q_i (i = 1, 2)$ benötigen wir die $\partial \vec{r}_\alpha / \partial q_i$. Der Vektor $\partial \vec{r}_1 / \partial \varphi_1$ ist eingezeichnet und stimmt mit $\partial \vec{r}_2 / \partial \varphi_1$ überein. Die Zwangskräfte auf Teilchen 1 und 2 wirken in Richtung der “masselosen” Stangen (s. dazu auch die nächste Seite).

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1 &= a\vec{r}_1 + b(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{Z}_2 &= c(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\end{aligned}$$

Das liefert für $i = 1$ wegen $\vec{r}_1 \cdot \partial \vec{r}_1 / \partial \varphi_1 = 0$

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} + (b + c) \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi_1} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

und wegen $\partial \vec{r}_1 / \partial \varphi_2 = 0$ und $\partial \vec{r}_2 / \partial \varphi_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$

$$Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2}$$

Simuliert man jetzt die Zwangskräfte, die \vec{r}_1 und \vec{r}_2 auf dem festen Abstand $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = l_2$ halten durch ein Zweiteilchenpotential, z. B. der Form $A((\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - l^2)^2$, so gilt *actio = reactio*, d.h. $c = -b$. Wenn wir jetzt nur **actio = reactio für diese Zwangskräfte annehmen**, verschwindet der Zusatzterm in Q_1 und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L_*}{\partial q_i} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad ; \quad L_* = (T - V)_{q^*=0, \dot{q}^*=0}$$

mit $q^* = \{q_3, q_4, q_5, q_6\}$. Für $q^* = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= l_1 \cos \varphi_1 \quad ; \quad x_2^{(1)} = l_1 \sin \varphi_1 \\ x_1^{(2)} &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \quad ; \quad x_2^{(2)} = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 .\end{aligned}$$

Zur Berechnung der kinetischen Energie muss man daraus die $\dot{x}_i^{(j)}$ für $i, j = 1, 2$ berechnen. Nach quadrieren erhält man

$$T_{q^*=0, \dot{q}^*=0} = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

und falls V das Schwerfeld der Erde beschreibt

$$V_{q^*=0} = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 - m_2gl_2 \cos \varphi_2$$

Zur Formulierung des allgemeinen Prinzips, dem wir auf der Spur sind, ist es nützlich, $3N$ -dimensionale Vektoren

$$\vec{r} := (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

einzuführen. Als Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren $\vec{a} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N)$ und $\vec{b} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_N)$ definieren wir

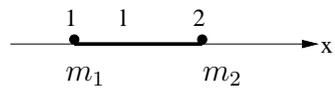
$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{i=1}^N \vec{a}_i \cdot \vec{b}_i$$

Dann nehmen die Lagrangegleichungen für das N -Teilchen-Problem im dreidimensionalen Raum formal die Form eines **Einteilchenproblems** in \mathbb{R}^{3N} an

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \\ Q_i &= (\vec{f} + \vec{Z}) \cdot \vec{g}_i = (\vec{f} + \vec{Z}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

wobei $\vec{f} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_N)$ die äußeren und inneren Kräfte und $\vec{Z} = (\vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_N)$ die Zwangskräfte beschreibt, und die $\vec{g}_i = \partial \vec{r} / \partial q_i \in \mathbb{R}^{3N}$ **die Basisvektoren** in dem durch \vec{r} gegebenen Punktes P des $3N$ -dimensionalen Raumes sind.

Diese hochdimensionalen Räume lassen sich leider nicht bildlich darstellen. Am Beispiel **zweier** Teilchen in einer **eindimensionalen** Welt lässt sich dieses Konzept aber veranschaulichen

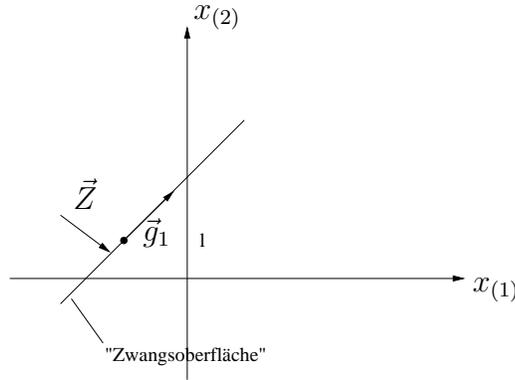
d)  $m_1 \ddot{x}_{(1)} = f_1 + Z_1$
 $m_2 \ddot{x}_{(2)} = f_2 + Z_2$

Die beiden Massenpunkte seien durch eine "masselose" Stange der Länge l miteinander verbunden. Wir wählen als verallgemeinerte Koordinaten

$$q_1 = x_{(1)} \quad ; \quad q_2 = x_{(2)} - x_{(1)} - l$$

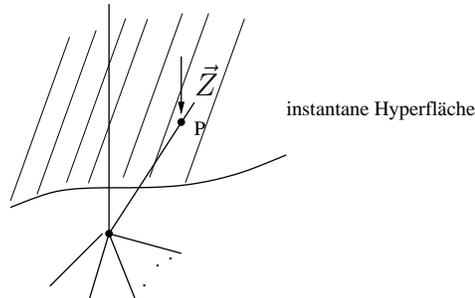
d. h. $x_{(1)} = q_1 \quad ; \quad x_{(2)} = q_1 + q_2 + l \quad ; \quad$ Also ist $\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

unabhängig vom Ort P in der zweidimensionalen Ebene.



Nimmt man für die Zwangskräfte jetzt wieder $\text{actio} = \text{reactio}$, d. h. $Z_2 = -Z_1$ an, dann ist $\vec{Z} = Z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{g}_1 \cdot \vec{Z} = 0$.

Wir kommen jetzt zur allgemeinen Formulierung des Sachverhaltes. Im Fall k unabhängiger holonomer Nebenbedingungen kann sich der durch \vec{r} beschriebene "Massenpunkt" nicht an einem beliebigen Punkt des \mathbb{R}^{3N} befinden, sondern auf einer $(3N - k)$ -dimensionalen "**Hyperfläche**", (die im rheonomen Fall **zeitabhängig** ist.) Analog zu den diskutierten Beispielen wird es immer möglich sein, "idealisierte" Zwangskräfte zu konstruieren, die den "Massenpunkt" auf der Hyperfläche halten. Die so konstruierten Zwangskräfte sind dann immer **orthogonal zur instantanen Hyperfläche**



Wählt man verallgemeinerte Koordinaten q_1, \dots, q_{3N-k} "**in der Hyperfläche**" und $q^* := \{q_{3N-k+1}, \dots, q_{3N}\}$ so, dass $q^* \equiv 0$ auf der Hyperfläche ist, so sind die $\vec{g}_i(P)$ für $i = 1, \dots, 3N - k$ **Tangentialvektoren** an die Hyperfläche und sind damit **orthogonal zur Zwangskraft** $\vec{Z}(P)$:

$$\vec{g}_i(P) \cdot \vec{Z}(P) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, 3N - k$$

Also folgt:

$$Q_i = \vec{f} \cdot \vec{g}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, \dots, 3N - k$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen gilt, falls sich die inneren und äußeren Kräfte aus einem Potential V ableiten lassen. Dies wollen wir im Folgenden immer annehmen. Dann erhält man

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L_*}{\partial q_i} ; L_* := (T - V)_{q^*=0, \dot{q}^*=0} ; i = 1, \dots, 3N - k$$

Das $*$ an L lassen wir, wenn klar ist, was gemeint ist, im Folgenden meist weg und die Zwangskräfte tauchen in den Bewegungsgleichungen für die “relevanten” verallgemeinerten Koordinaten nicht auf. Obige Gleichungen sind die **Lagrangegleichungen 2. Art für “holonome Systeme”**.

Der wesentliche Schritt bei der Herleitung war zu zeigen, dass die **Zwangskräfte orthogonal zur instantanen Hyperfläche** sind. Wir haben anhand von Beispielen gezeigt, wie man das mit Hilfe eines Grenzprozesses “beweisen” kann und gehen davon aus, dass diese Vorgehensweise **allgemein** durchführbar ist.

Historische Bemerkung:

Wir haben angenommen, dass $\vec{g}_i \cdot \vec{Z} = 0$ für alle \vec{g}_i in der Hyperfläche gilt. Da wir in P beliebige Linearkombinationen der \vec{g}_i bilden können, ist unsere Annahme also äquivalent zu

$$\vec{\zeta} \cdot \vec{Z} = 0 ,$$

wobei $\vec{\zeta}$ ein **beliebiger Tangentialvektor an die (instantane) Hyperfläche in P ist**. In der historischen Entwicklung der Mechanik hat man die

$$\delta \vec{r}_i := \epsilon \vec{\zeta}_i \quad \text{in} \quad \epsilon \vec{\zeta} = (\epsilon \vec{\zeta}_1, \epsilon \vec{\zeta}_2, \dots, \epsilon \vec{\zeta}_N)$$

mit “infinitesimalem” ϵ als **“virtuelle Verrückungen”** bezeichnet. Schreibt man obiges Skalarprodukt aus, so folgt aus unserer Annahme über die Zwangskräfte also

$$\epsilon \vec{\zeta} \cdot \vec{Z} = 0 = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

d. h. die **“Zwangskräfte leisten bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit”**. Diese Aussage bezeichnet man als das **d’Alembertsche Prinzip**. Das d’Alembertsche Prinzip ist also äquivalent zu unserer Annahme, dass die Zwangskräfte orthogonal zur instantanen Hyperfläche sind.

Damit ist ein sehr eleganter Formalismus bereit gestellt, Probleme mit holonomen Nebenbedingungen zu lösen, ohne sich Gedanken über die Natur der Zwangskräfte

machen zu müssen. Wenn man aber an diesen interessiert ist, kann man sie **nach** Lösung der Bewegungsgleichungen explizit angeben.

Gehen wir z. B. zu den ursprünglichen NG in kartesischen Koordinaten zurück, so gilt für $\alpha = 1, \dots, N$

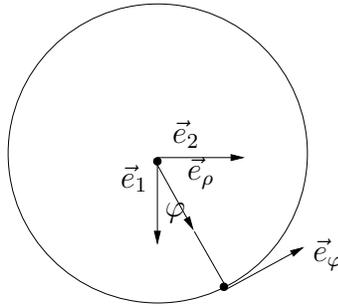
$$\vec{Z}_\alpha = m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha - \vec{f}_\alpha$$

Ist die Bahnkurve bekannt, so lässt sich die rechte Seite berechnen und man erhält die Zwangskräfte.

Alternativ verwendet man für konservative Systeme die “restlichen” Lagrangegleichungen

$$\vec{g}_i \cdot \vec{Z} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]_{q^*=0, \dot{q}^*=0}, \quad i = 3N - k + 1, \dots, N.$$

Zu diesen beiden Vorgehensweisen betrachten wir als einfaches **Beispiel** einen Massenpunkt auf einem Ring mit Radius R im Schwerfeld:



a) Methode 1:

Legt man das Koordinatensystem wie in der Abbildung, so gilt

$$\vec{Z} = m\ddot{\vec{x}} - \vec{f} \quad ; \quad \vec{f} = mg\vec{e}_1 = mg(\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi)$$

und für den Ortsvektor des Teilchens und seine Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned} \vec{x} &= R(\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) = R\vec{e}_\rho \\ \dot{\vec{x}} &= R\dot{\varphi}(-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \ddot{\vec{x}} &= R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho \end{aligned}$$

Damit kann man die Zwangskraft berechnen

$$\begin{aligned}\vec{Z} &= m \left[\underbrace{(R\ddot{\varphi} + g \sin \varphi)}_{=0} \vec{e}_\varphi + (-R\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi) \vec{e}_\rho \right] \\ &= -m(R\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \vec{e}_\rho\end{aligned}$$

Nachdem man $\varphi(t)$ berechnet hat, erhält man durch Einsetzen die Zwangskraft.

b) Methode 2:

Für die Lagrangebeschreibung wählt man φ als “relevante” und ρ als “irrelevante” verallgemeinerte Koordinate. Das liefert für die vollständige Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + mg\rho \cos \varphi .$$

Setzt man $\rho = R$ und $\dot{\rho} = 0$, so ergibt sich $L_* = mR^2\dot{\varphi}^2/2 + mgR \cos \varphi$. Zur Berechnung der Zwangskraft benötigt man

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi .$$

Das liefert

$$\begin{aligned}\vec{g}_\rho \cdot \vec{Z} &= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} \right]_{\rho(t)=R} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \rho} \right)_{\rho(t)=R} = -mR\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi \\ \vec{Z} &= -m(R\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \vec{e}_\rho ,\end{aligned}$$

also dasselbe Ergebnis wie mit Methode 1.

Wir beschreiben zum Abschluss dieses Kapitels noch eine **andere Möglichkeit** die Zwangskräfte zu behandeln. Dieses Verfahren erscheint bei der folgenden Herleitung weniger elegant als die Methode der “Lagrangegleichung 2. Art”. Wir beschränken uns auf den holonomen Fall, geben hier aber ein Herleitung, die sich leicht verallgemeinern lässt.

9.2 Lagrangegleichungen 1.Art *

Die $\{q_i\}$ seien jetzt ein **beliebiger** Satz von verallgemeinerten Koordinaten, die noch **nicht** an die k holonomen Nebenbedingungen $h_j(\vec{r}, t) = 0$ angepasst sein

müssen. Die inneren und äußeren Kräfte seien aus einem Potential ableitbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \vec{g}_i \cdot \vec{Z} \quad i = 1, \dots, 3N ; \quad (\text{A}) ,$$

wobei die $\vec{g}_i = \partial \vec{r} / \partial q_i$ die Basisvektoren im betrachteten Raumpunkt P sind. Dieser liege auf der **instantanen Hyperfläche**. Wir betrachten nun einen beliebigen Tangentialvektor $\vec{\zeta}$ an die Hyperfläche und schreiben ihn als Linearkombination der \vec{g}_i :

$$\epsilon \vec{\zeta} = \sum_{i=1}^{3N} \epsilon c_i \cdot \vec{g}_i \equiv \sum_{i=1}^{3N} \delta q_i \vec{g}_i .$$

Wegen der k Nebenbedingungen können nur $3N - k$ der c_i frei gewählt werden. Multiplikation der obigen Bewegungsgleichung mit c_i und Summation liefert mit Hilfe des "d'Alambertschen Prinzips" $\vec{Z} \cdot \vec{\zeta} = 0$

$$\sum_{i=1}^{3N} \delta q_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} = 0 \quad (\text{B}) .$$

Wir betrachten nun die Nebenbedingungen. Da die Bewegung in den Flächen $h_\alpha = 0$ verläuft, und der Gradient $\partial h_\alpha / \partial \vec{r}$ senkrecht auf den Flächen $h_\alpha = \text{const.}$ stehen, gilt

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial \vec{r}} \cdot \epsilon \vec{\zeta} = 0$$

auf der instantanen Hyperfläche. Also erhält man

$$0 = \frac{\partial h_\alpha}{\partial \vec{r}} \cdot \sum_{i=1}^{3N} \delta q_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{3N} \delta q_i \frac{\partial h_\alpha}{\partial q_i} \quad ; \quad j = 1, \dots, k .$$

Addiert man dies, multipliziert mit vorerst beliebigen zeitabhängigen Funktionen λ_α (sog. "**Langrangschen Multiplikatoren**"), zu (B), so folgt

$$\sum_{i=1}^{3N} \delta q_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial q_i} \right\} = 0 .$$

Die δq_i für $i = 1, \dots, 3N - k$ werden jetzt beliebig gewählt. Dann liegen die restlichen k der δq_i fest. In den Summanden, die mit diesen k "abhängigen" δq_i multipliziert werden, wählen wir die λ_j für ($j = 1 \dots k$) nun so, dass die k

Klammern $\{ \}$ verschwinden. Die übrigen $3N - k$ -Klammern $\{ \}$ müssen aufgrund der Unabhängigkeit dieser δq_j ebenfalls verschwinden. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} a_{\alpha i} \quad ; \quad i = 1, \dots, 3N \\ a_{\alpha i} &= \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial q_i} . \end{aligned}$$

Zusammen mit $h_{\alpha}(\vec{r}) = 0$, $\alpha = 1, \dots, k$ sind das $3N + k$ -Gleichungen mit $3N + k$ -Unbekannten $(q_1 \dots q_N, \lambda_1 \dots \lambda_k)$. Im Gegensatz zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art werden insbesondere die N verallgemeinerten Koordinaten als **unabhängige Variable** behandelt. Man nennt sie **Lagrangegleichungen 1. Art**. Der Vergleich mit der Form der Gleichung (A) zeigt, dass auf der rechten Seite der Lagrangegleichung 1. Art die Projektionen der Zwangskraft stehen

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{\alpha} a_{\alpha i} = \vec{g}_i \cdot \vec{Z} .$$

Ein oft genannter Vorteil der Lagrange-Gleichung 1. Art ist, dass es häufig gelingt, die Zwangskräfte durch die Koordinaten und die Anfangsbedingungen auszudrücken, **ohne** die Bewegungsgleichungen explizit zu lösen. Dies gelingt aber im Fall holonomer Nebenbedingungen dann meist einfacher unter Verwendung der im letzten Abschnitt besprochenen Methode 2.

Der wirkliche Vorteil der Lagrangegleichung 1. Art ist, dass sie auch für gewisse Klassen von **nicht-holonomen** Nebenbedingungen ableitbar sind, z.B. Nebenbedingungen vom Typ $\sum_{i=1}^{3N} a_{\alpha i} \delta q_i = 0$, wobei sich die $a_{\alpha i}$ **nicht** als partielle Ableitungen einer Funktion schreiben lassen. Die Form der Lagrangegleichung 1. Art ändert sich dabei nicht, nur haben die $a_{\alpha i}$ eine andere Bedeutung. Ein Beispiel ist die erwähnte Schlittschuhläuferin ($k = 1$) mit $\sin \varphi \delta x - \cos \varphi \delta y = 0$, d.h. $a_{11} = \sin \varphi$, $a_{12} = -\cos \varphi$, $a_{13} = 0$. Diese Nebenbedingung schränkt die Bewegung nur "im Kleinen" (d. h. "lokal") ein und führt **nicht** zur Bewegung auf einer zweidimensionalen Fläche im 3-dimensionalen Koordinatensystem (x, y, φ) . Da solche Probleme mehr im Bereich der "**technischen**" **Mechanik** auftreten, wollen wir diese nichtholonomen Nebenbedingungen nicht weiter diskutieren.

Für den Fall holonomer Nebenbedingungen geben wir noch eine **Kurzversion** der Herleitung von "**Lagrange I**":

Für die k holonomen Nebenbedingungen $h_{\alpha}(\vec{r}, t) = 0$ $\alpha = 1, \dots, k$ liefern die k Gradienten $\partial h_{\alpha}(\vec{r}, t) / \partial \vec{r}$ auf den Punkten der instantanen Hyperfläche einen Satz

von k linear unabhängigen Vektoren. Da \vec{Z} auf dieser orthogonal ist ("d'Alembert") müssen also zeitabhängige Koeffizienten $\lambda_\alpha(t)$ existieren, so dass

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha(t) \frac{\partial h_\alpha(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}}$$

gilt, wobei \vec{r} auf der instantanen Hyperfläche zu nehmen ist. Skalare Multiplikation mit $\partial \vec{r} / \partial q_i$ liefert

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \vec{Z} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha(t) \frac{\partial h_\alpha(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha(t) \frac{\partial h_\alpha(\vec{r}, t)}{\partial q_i} .$$

Mit der allgemeinen NG (A) erhält man also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{\partial T}{\partial q_i} + \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial q_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, 3N \\ h_\alpha(\vec{r}, t) &= 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, k . \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die $\boxed{3N + k}$ unbekannt Funktionen $q_i(t)$ mit $i = 1, \dots, 3N$ und $\lambda_\alpha(t)$ mit $\alpha = 1, \dots, k$ bestimmen.

Nach dieser Kurzversion betrachten wir den Einfluss der Zwangskräfte auf den **Energiesatz** für den Fall $\vec{f}_\alpha = -\partial V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) / \partial \vec{r}_\alpha$. Skalare Multiplikation der NG

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} = \vec{Z}_\alpha$$

mit \vec{r}_α liefert

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2}{2} \right) + \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} = \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \vec{Z}_\alpha .$$

Summation über die Teilchen liefert also:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \vec{Z}_\alpha .$$

Im holonomen Fall $h_\mu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, $\mu = 1, \dots, k$ gilt $\vec{Z}_\alpha = \sum_{\mu=1}^k \lambda_\mu \partial h_\mu / \partial \vec{r}_\alpha$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\mu=1}^k \lambda_\mu \frac{\partial h_\mu}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha = - \sum_{\mu=1}^k \lambda_\mu \frac{\partial h_\mu}{\partial t} .$$

Hängen die h_α nicht explizit von der Zeit ab, dann verschwindet die rechte Seite der Gleichung. Also gilt **Energieerhaltung** im **holonom skleronomen Fall**.

9.3 Eigenschaften der Lagrangegleichungen 2.Art

Unser ‘‘Hauptwerkzeug’’ in der praktischen Anwendung sowie in den ‘‘formalen’’ weiteren Diskussionen werden die **Lagrange-Gleichungen 2. Art** sein

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad ; \quad L = (T - V)_{q^*=0, \dot{q}^*=0} \quad ; \quad i = 1, \dots, 3N - k .$$

In der Ableitung der Gleichungen f#ur Systeme mit holonomen Nebenbedingungen hatten wir angenommen, dass die q_i in obigen Gleichungen Koordinaten ‘‘in’’ der Hyperfl#ache der Bewegung sind, aber v#ollige Freiheit gelassen, wie sie dort gew#ahlt sind. Wir wollen jetzt noch durch explizite Rechnung zeigen, dass eine **beliebige** (lokal fast #uberall umkehrbare) Koordinatentransformationen

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= \bar{q}_i(q_i, \dots, q_m; t) \equiv \bar{q}_i(q, t) \\ q_i &= q_i(\bar{q}_i, \dots, \bar{q}_m; t) \equiv q_i(\bar{q}, t) \end{aligned}$$

die **Form** der Lagrangegleichung invariant l#asst.

Dieses Ergebnis und die dazu n#otige Rechnung ist sehr #ahnlich zur Diskussion auf S. 42, wo wir gesehen hatten, dass man beim #ubergang von kartesischen Koordinaten zu **beliebigen** krummlinigen Koordinaten ausgehend von den NG jeweils dieselbe **Form** der Lagrangegleichungen erh#alt.

Differenziert man $q_i(\bar{q}, t)$ nach der Zeit, so ergibt sich

$$\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_k} \cdot \dot{\bar{q}}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t} \quad (\text{Summationskonvention})$$

Man kann damit L als Funktion der \bar{q} und $\dot{\bar{q}}$ auffassen:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(\bar{q}, t), \dot{q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t) =: \bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) .$$

F#ur die Abh#angigkeit der \dot{q} von den $\dot{\bar{q}}$ folgt aus Differentiation der obigen Beziehung

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\bar{q}}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_i} .$$

Wir differenzieren jetzt L nach $\dot{\bar{q}}$ und \bar{q}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\bar{q}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_i} \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \bar{q}_i} . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\bar{q}}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_i} \right].$$

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, weil die $q_i(t)$ die Lagrangegleichungen erfüllen sollen, und der zweite Term verschwindet nach Vertauschung der Differentiationsreihenfolge im letzten Term (vgl. S. 42).

Daraus erhält man die angekündigte **Forminvarianz** der Langrangegleichungen 2. Art gegenüber der beliebigen Koordinatentransformation:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_i} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_i}.$$

Liegen auch die relevanten \bar{q}_i in der instantanen Hyperebene, so war dies zu erwarten. Mit der gezeigten allgemeinen Forminvarianz können wir uns aber von dieser Bedingung freimachen. Wir zeigen das später an einem Beispiel.

Als Zusammenfassung dieses Kapitels können wir jetzt das **“Kochrezept”** geben, wie man ein System von N Massenpunkten m_1, \dots, m_N beschreibt, das sich aufgrund von holonomen Nebenbedingungen auf einer m -dimensionalen (im rheonomen Fall zeitabhängigen) Hyperfläche γ des $3N$ -dimensionalen Raumes der Punkte $\vec{r} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ bewegt:

- 1) Man wähle ein System $q \equiv q_1, \dots, q_m$ von verallgemeinerten Koordinaten so, dass $\vec{r}(t) = \vec{r}(q, t) = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ in der Hyperfläche ist.
- 2) Man berechne aus

$$\vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \quad \text{die} \quad \vec{v}_\alpha^2.$$

In manchen Fällen kann man die **skalaren** Größen \vec{v}_α^2 direkt als

$$\vec{v}_\alpha^2 = \left(\frac{ds_\alpha}{dt} \right)^2$$

aus einer geometrischen Überlegung erhalten. Dabei ist s_α die Bogenlänge des α -ten Teilchens auf seiner Bahn.

- 3) Die Langrangefunktion L erhält man nun aus

$$L = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} \vec{v}_\alpha^2 - V(q).$$

4) Man stelle die Lagrangegleichungen auf:

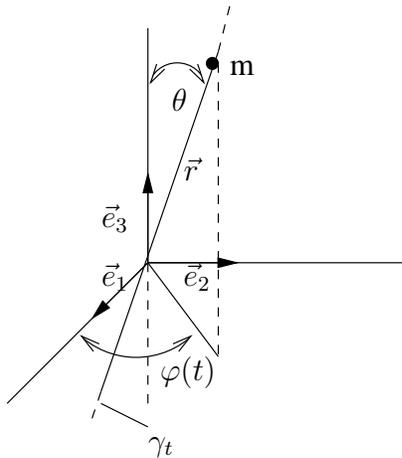
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} .$$

5) Man löse dieses System von Differentialgleichungen für die vorgegebenen Anfangsbedingungen.

Wie bereits mehrfach erwähnt, erweist sich Punkt 5) nur in Ausnahmefällen als ohne Computer durchführbar.

Wir wollen dieses Vorgehen jetzt an einer einfachen Version von **Beispiel b)** in Kap.9.1 veranschaulichen:

Der Draht sei **gerade** und rotiere mit **vorgegebener** Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) := \dot{\varphi}(t)$ unter festem Neigungswinkel $\theta < \pi/2$ um die x_3 -Achse. Auf ihm gleite reibungsfrei eine “Perle” der Masse m im Schwerfeld der Erde:



$\varphi(t)$ ist definiert als der Azimutwinkel der Punkte auf dem Draht, für die $x_3 > 0$ ist.

1) Die “Hyperfläche” ist eindimensional und zeitabhängig. Die “freie” dynamische Variable ist der “**Abstand**” \tilde{r} **des Teilchens vom Ursprung** inklusive des **Vorzeichens**, und zwar sei $\tilde{r} > 0$ für $x_3 > 0$ und $\tilde{r} < 0$ für $x_3 < 0$. Dann gilt

$$\vec{r}(t) = \tilde{r}(t) \{ \sin \theta [\cos \varphi(t) \vec{e}_1 + \sin \varphi(t) \vec{e}_2] + \cos \theta \vec{e}_3 \} = \tilde{r}(t) \vec{e}_r(t) ,$$

wobei θ zeitunabhängig ist, und $\varphi(t)$ eine **vorgegebene** Zeitabhängigkeit hat ($\omega(t) := \dot{\varphi}(t)$).

2) Differentiation von $\vec{r}(t)$ nach der Zeit liefert

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{\tilde{r}}(t) \vec{e}_r(t) + \tilde{r}(t) \omega(t) \sin \theta [-\sin \varphi(t) \vec{e}_1 + \cos \varphi(t) \vec{e}_2] \\ &= \dot{\tilde{r}}(t) \vec{e}_r(t) + \tilde{r}(t) \omega(t) \sin \theta \vec{e}_\varphi(t) . \end{aligned}$$

Das liefert für das Quadrat der Geschwindigkeit, da \vec{e}_r und \vec{e}_φ orthonormal sind

$$\vec{v}^2 = \dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2 \omega^2 \sin^2 \theta .$$

Alternativ verwendet man das allgemeine Resultat für Kugelkoordinaten, das man auch mit einer einfachen geometrischen Überlegung erhalten kann

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 .$$

3) Mit $V = mg\tilde{r} \cos \theta$ ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\tilde{r}}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \tilde{r}^2) - mg\tilde{r} \cos \theta .$$

4) Um die Lagrangegleichung zu erhalten, benötigt man

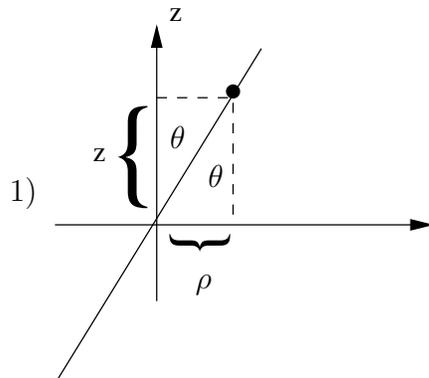
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{r}}} = m\dot{\tilde{r}} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \tilde{r}} = m\omega^2 \sin^2 \theta \tilde{r} - mg \cos \theta .$$

Das liefert schließlich

$$\ddot{\tilde{r}} = \omega^2 \sin^2 \theta \tilde{r} - mg \cos \theta .$$

5) Die Lösung der Gleichung ist für $\omega(t) = const.$ einfach, soll hier aber nicht weiter verfolgt werden.

Die Koordinaten haben wir in unserem Beispiel so gewählt, dass die “relevante” Variable r eine Variable “in der Hyperfläche” ist. Wie bereits diskutiert, ist eine solche Wahl keineswegs nötig. Wir können z. B. ebenso gut Zylinderkoordinaten ρ, φ, z wählen und die Nebenbedingung berücksichtigen, indem wir z. B. ρ durch z ausdrücken:



$$\rho = \pm z \tan \theta \quad ; \quad (z \geqslant 0)$$

$$\dot{\rho} = \pm \dot{z} \tan \theta \quad ; \quad (z \geqslant 0)$$

2) Für Zylinderkoordinaten gilt

$$\vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2 + \dot{z}^2 ,$$

was man wieder durch Rechnung oder eine einfache geometrische Überlegung sieht.

- 3) Das liefert mit $V = mgz$, wenn man in der kinetischen Energie die geometrische Einschränkung berücksichtigt

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2 + \dot{z}^2)]_* - mgz \\ &= \frac{m}{2} [\dot{z}^2(1 + \tan^2 \theta) + z^2 \tan^2 \theta \dot{\varphi}^2] - mgz . \end{aligned}$$

- 4) Die Lagrangegleichung für die generalisierte Koordinate z lautet damit

$$\begin{aligned} m\ddot{z}(1 + \tan^2 \theta) &= mz\omega^2 \tan^2 \theta - mg \\ \Rightarrow \ddot{z} &= \omega^2 \sin^2 \theta z - mg \cos^2 \theta . \end{aligned}$$

Wegen $z = \tilde{r} \cos \theta$ ist das dieselbe Gleichung wie vorher. Auf Punkt 5) gehen wir auch hier nicht ein.

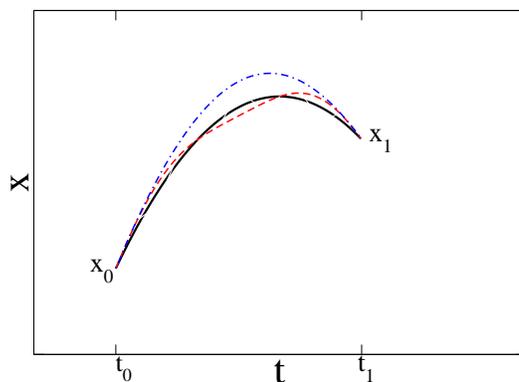
10 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

In unserer bisherigen Diskussion der Dynamik von Massenpunkten hatten wir zur Lösung der Newtonschen Gleichungen als **Anfangsbedingung die Orte und Geschwindigkeiten** $(\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0), i = 1 \dots N)$ der Teilchen zur Lösung der $3N$ gekoppelten Differentialgleichungen 2.-Ordnung vorgegeben (oder allgemeiner $\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0)$ mit dem Nd -dimensionalen Vektor $\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$, wobei $d=1,2$ oder 3 die Raumdimension ist, in der die Bewegung stattfindet).

An Stelle der Vorgabe der Anfangsorte und Geschwindigkeiten, kann man die Frage nach Bahnkurven mit **vorgegebenem Anfangs- und Endort** stellen, d.h.

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \quad \text{und} \quad \vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$$

seien festgelegt. Dann hat man wieder $2Nd$ Bedingungen um die freien Konstanten in der allgemeinen Lösung der Newton- oder Lagrangegleichungen festzulegen. Ein einfaches Beispiel ist die senkrechte Bewegung eines Massenpunktes im Schwerfeld. Die Abbildung zeigt die Parabel in der x - t -Ebene, die das Problem für vorgegebene Werte $x_0 = x(t_0)$ und $x_1 = x(t_1)$ löst (durchgezogene Kurve). Ebenfalls eingezeichnet sind Bahnkurven, die **nicht** Lösung der Bewegungsgleichung sind.



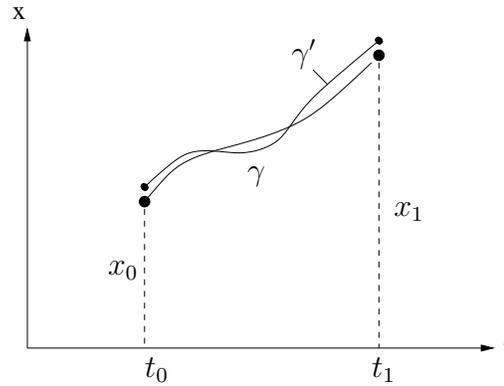
In diesem Kapitel wird allgemein gezeigt, dass das sog. “**Wirkungsintegral**” oder kurz die “**Wirkung**” S für die Bahnkurve, die Lösung der Bewegungsgleichung ist, ein **Minimum** hat. In einer Raumdimension definiert man die Wirkung S für einen Massenpunkt als

$$S(x_0, t_0; x_1, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V(x(t), t) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt ,$$

wobei in unserem Beispiel $V(x, t) = mgx$ ist. Die Wirkung ist für alle hinreichend glatten, integrierbaren **Kurven** definiert, die vom vorgegebenen Anfangspunkt $x_0 = x(t_0)$ zum festen Endpunkt $x_1 = x(t_1)$ gehen. Solch eine Abbildung einer Kurve auf den Zahlenwert S nennt man ein **Funktional** (s.u.). Die zunächst sicher überraschende Aussage, dass die zum vorgegebenen Potential zu x_0 und x_1 gehörige “wirkliche Bahnkurve” den kleinsten Wert von S liefert, ist das Hamiltonsche “**Prinzip der kleinsten Wirkung**”. Manche Autoren (z. B. Landau-Lifshitz I) stellen dieses Prinzip an die Spitze und leiten daraus die Gesetze der Mechanik ab. Wir gehen hier den “anschaulichen Weg” zu zeigen, dass man mit Hilfe des Variationsprinzips zu denselben Resultaten gelangen kann, wie direkt aus den Newtonschen Gleichungen. Zur Formulierung des Prinzips benötigen wir einfache Resultate aus der **Variationsrechnung** .

10.1 Elemente der Variationsrechnung

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit Extrema von Funktionen von “unendlich vielen Variablen”: dem Raum der Kurven. Solche Funktionen nennt man **Funktionale**. Ein einfaches Beispiel ist die Länge einer Kurve im euklidischen Raum: Sei die Kurve γ gegeben als $\gamma := \{(t, x) \mid x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$



dann ist nach ‘Pythagoras’

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

die **Länge** der Kurve. Wir betrachten jetzt eine Kurve γ' ‘in der Nähe’ von γ :

$$\gamma' = \{(t, x) : x = x(t) + h(t)\},$$

die wir mit $\gamma' = \gamma + h$ bezeichnen. An dieser Stelle müsste eigentlich genauer spezifiziert werden, welche Eigenschaften die zugelassenen Funktionen $x(t)$ und $h(t)$ haben sollen. Wir wollen annehmen, dass die Funktionen beliebig oft differenzierbar sind. In vielen Büchern verwendet man statt h die Schreibweise δx , d.h. $\gamma' = \gamma + \delta x$, wobei das δ auf ‘in der Nähe’ hinweisen soll. Wir untersuchen jetzt die Differenz $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$ und definieren:

Def.: Ein Funktional heißt **differenzierbar**, falls $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F(h) + R$, wobei F **linear** von h abhängt, d.h. für festes γ gilt: $F(h_1 + h_2) = F(h_1) + F(h_2)$ sowie $F(ch) = cF(h)$ und $R(\gamma; h) = O(h^2)$ im Sinne, dass aus $|h| < \epsilon$ und $|dh/dt| < \epsilon$ folgt, dass $|R| < C\epsilon^2$ gilt.

Den in h linearen Anteil, $F(h)$, bezeichnet man als ‘Differential’ oder als ‘**Variation**’ $\delta\Phi$ des Funktionals und h (bzw. δx) als die ‘**Variation der Kurve**’.

Wir betrachten jetzt als **Beispiel** folgendes Funktional: Sei $\gamma = \{(t, x) : x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ eine Kurve in der (t, x) -Ebene, $\dot{x} = dx/dt$, sowie $L(a, b, c)$ eine **differenzierbare Funktion dreier Variabler**. Dann definieren wir das Funktional Φ wie folgt:

$$\Phi(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Für den Spezialfall $L(a, b, c) = \sqrt{1 + b^2}$ erhalten wir wieder die **Länge** der Kurve γ .

Wir zeigen nun, dass $\Phi(\gamma)$ differenzierbar ist und berechnen die zugehörige Variation $F(h)$. Dazu entwickeln wir L in eine Taylorreihe

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[L(x + h, \dot{x} + \dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t) \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt + O(h^2) .\end{aligned}$$

Partielle Integration des 2. Terms liefert

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] h dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Wir definieren nun **Extrema** von Funktionalen:

Def.: Eine Kurve γ heißt **Extremum** eines differenzierbaren Funktionals $\Phi(\gamma)$ falls $F(\gamma; h) = 0$ für alle **zugelassenen** Variationen h der Kurve γ ist.

Wir betrachten nun die Extrema unseres obigen Beispiel für den Fall, dass der Raum der h der **Einschränkung**

$$h(t_0) = h(t_1) = 0$$

unterliegt. Dann gilt der

Satz: Die Kurve $\gamma : x = x(t)$ ist eine Extremum des Funktionals $\Phi(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ auf dem Raum der Kurven, die durch den Punkt $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$ gehen, dann und nur dann, falls auf der Kurve gilt

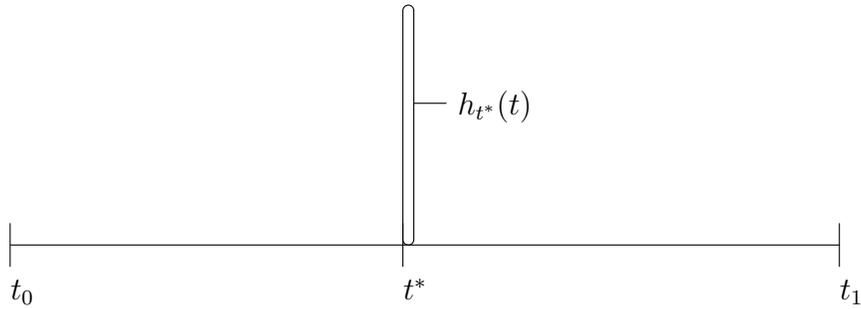
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Beweis:

- a) Erfüllt $x(t)$ obige Differentialgleichung und liegt h im vorgegebenen Raum, so folgt sofort $F(\gamma; h) = 0$, für alle h .
- b) Ist $F(\gamma; h) = 0$ für alle zugelassenen h , so folgt

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right] h(t) dt .$$

Man zeigt nun leicht, dass aus der Forderung $\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) dt = 0$ für beliebige h , $f(t) \equiv 0$ folgt, wenn man verlangt, dass $f(t)$ stetig ist. Dazu konstruiert man hinreichend scharf lokalisierte Funktionen $h_{t^*}(t)$,



so dass

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} f(t)h_{t^*}(t)dt \rightarrow f(t^*) \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} h_{t^*}(t)dt}_{\neq 0}$$

gilt. Da t^* beliebig ist, folgt $f(t) \equiv 0$.

Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

heißt **Euler-Lagrange-Gleichung** des Funktionals $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$.

Als **Beispiel** lösen wir die Euler-Lagrange-Gleichung für die Extrema der **Länge einer Kurve**. Die zugehörige Funktion L lautet

$$L(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}.$$

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$$

lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) &= 0 \rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c \rightarrow \dot{x} = c_1 \\ \rightarrow x(t) &= c_1 t + c_2 \rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \cdot (t - t_0)} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also die Gerade durch t_0, x_0 und t_1, x_1 . Das Extremum ist ein **Minimum**: Die **kürzeste** Verbindung beider Punkte.

Wir machen die warnende Bemerkung, dass Extremalprobleme in der Variationsrechnung nicht immer eine Lösung besitzen. Ein einfaches geometrisches Beispiel ist das folgende: Zwei Punkte auf der t -Achse sollen durch eine stetig gekrümmte, möglichst kurze Linie verbunden werden, welche in ihren Endpunkten auf der

t -Achse **senkrecht** steht. Dieses Problem besitzt keine Lösung. Denn die Länge einer solchen Linie ist immer größer als die der geraden Verbindungsstrecke, kann aber der Länge der Verbindungsstrecke beliebig angenähert werden. Hier existiert also zwar eine untere Grenze (Infimum), aber kein Minimum, das von einer zulässigen Kurve angenommen wird.

Die Resultate der Variationsrechnung lassen sich leicht auf Funktionale von **Kurven in höher dimensionalen Räumen verallgemeinern**: Sei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor im n -dimensionalen Koordinatenraum \mathbb{R}^n und

$$\gamma = \{(t, \vec{x}) : \vec{x} = \vec{x}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1\}$$

eine Kurve im $(n + 1)$ -dimensionalen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von $2n + 1$ Veränderlichen, so zeigt man völlig analog:

Die Kurve γ ist ein Extremum des Funktionals $\Phi(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt$ auf dem Raum der Kurven durch (t_0, \vec{x}_0) und (t_1, \vec{x}_1) , dann und nur dann, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

erfüllt sind. Da ist ein System von n Differentialgleichungen 2. Ordnung und die Lösung hänge von $2n$ willkürlichen Konstanten ab. Die $2n$ Bedingungen $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ und $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$ legen diese fest.

Hat die Funktion L eine vom speziellen Koordinatensystem unabhängige geometrische Bedeutung, so hat man in der Wahl der Koordinaten völlige Freiheit. Die Euler-Lagrange-Gleichungen nehmen für beliebige Wahl der Koordinaten immer die angegebene Form an.

10.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Wir können jetzt das “**Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung**” formulieren: Es sei ein System von N Massenpunkten gegeben, wobei die auftretenden Kräfte **konservativ** sind. Definiert man mit $\vec{r} := (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &:= T - V \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \end{aligned}$$

die Lagrangefunktion als Differenz aus kinetischer und potentieller Energie und

$$S(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) dt$$

als **“Wirkungsfunktional”** so gilt:

Die Bewegungen $\vec{r}(t)$ des mechanischen Systems sind die Extrema des Wirkungsfunktionals $S(\gamma)$

Das folgt sofort aus dem allgemeinen Resultat der Variationsrechnung und unserem alten Resultat von S. 42 über die NG in beliebigen krummlinigen Koordinaten: Die NG in krummlinigen Koordinaten sind gerade die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Extrema des Wirkungsfunktionals $S(\gamma)$.

Das Hamiltonsche Prinzip heißt **“Prinzip der kleinsten Wirkung”**, da das Extremum, das der Bewegung entspricht, meistens ein **Minimum** von S darstellt.

Völlig analoge Aussagen gelten für den Fall von Systemen mit holonomen Nebenbedingungen, wobei wiederum $L = T - V$ ist

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d\vec{r}_i(q, t)}{dt} \right)^2 - V(q)$$

Ein **vorgegebenes Wirkungsfunktional** $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ liefert **eindeutige** Euler-Lagrange-Gleichungen. Die **Umkehrung gilt aber nicht**: Eine wichtige Klasse von Wirkungsfunktionalen \tilde{S} liefert z. B. dieselben Euler-Lagrange-Gleichung, und zwar:

$$\tilde{S} := \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L} dt =: \int_{t_0}^{t_1} \left(cL + \frac{d}{dt} G(\vec{x}, t) \right) dt .$$

Dabei ist c eine beliebige Konstante und $G(\vec{x}, t)$ eine beliebige differenzierbare Funktion der Variablen \vec{x} und t . Es gilt

$$\tilde{S}(\gamma) = cS(\gamma) + G(\vec{x}_1, t_1) - G(\vec{x}_0, t_0)$$

Da von G nur die Werte an den **festen** Endpunkten eingehen, gilt für die Variation von \tilde{S}

$$\tilde{S}(\gamma + h) - \tilde{S}(\gamma) = c[S(\gamma + h) - S(\gamma)]$$

oder **“infinitesimal”**: $\delta\tilde{S} = c\delta S$. Das führt auf Euler-Lagrange-Gleichung für \tilde{S} von der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(cL)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial(cL)}{\partial x_i}$$

Da $c \neq 0$ konstant ist, ergibt sich also nach Division durch c **dieselbe** Euler-Lagrange-Gleichung wie für S .

Die Aussage, dass die Lagrangefunktion $\tilde{L} := cL + dG(\vec{x}, t)/dt$ auf dieselben Lagrange-Gleichung 2. Art führt, lässt sich auch direkt, d. h. ohne Verwendung des Hamiltonschen Prinzips zeigen. Aus $dG/dt = (\partial G/\partial \vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} + \partial G/\partial t$ folgt:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} = c \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} = c \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dG}{dt} ,$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} \\ &= c \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dG}{dt} \\ &= c \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) . \end{aligned}$$

Die Zusatzterme, die G enthalten, verschwinden nach Vertauschung der Differentiationsreihenfolge (“wie gehabt”). Also unterscheiden sich die Gleichungen durch den trivialen konstanten Faktor, der herausdividiert werden kann.

11 Symmetrien und Erhaltungssätze

11.1 zyklische Variable

In Kapitel I haben wir, ausgehend von den NG in kartesischen Koordinaten, eine elementare Diskussion der Erhaltungssätze für (Gesamt-)Impuls, Drehimpuls und Energie gegeben. Einen ersten Kontakt mit einem Erhaltungssatz im Rahmen der Lagrangeformulierung haben wir im Zusammenhang mit der Bewegung in einem 2-dimensionalen Zentralpotential $V(r)$ kennen gelernt

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) .$$

Aus der Tatsache, dass L nicht explizit von φ abhängt, folgte der “Flächensatz” $mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$. Dahinter steckt ein sehr einfaches allgemeines Prinzip. Dazu definieren wir:

Definition: Hängt die Lagrangefunktion L von der verallgemeinerten Koordinate q_i **nicht** explizit ab, d.h gilt $\partial L/\partial q_i = 0$, so heißt die Koordinate **“zyklisch”**.

Weiterhin definiert man allgemein

Definition: Der zu verallgemeinerten Koordinate q_j “kanonisch konjugierte Impuls” p_j ist definiert als

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} .$$

Mit dieser Definition lauten die Lagrangegleichungen 2. Art

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} .$$

Gilt nun $\partial L / \partial q_j = 0$, so folgt $\dot{p}_j = 0$ und damit $p_j = \text{const.}$, d.h.

Der zu einer zyklischen Koordinate q_i gehörige kanonisch konjugierte Impuls p_i ist erhalten.

11.2 Noethersches Theorem I (*)

Es stellt sich nun die Frage, ob es ein “tieferes” Prinzip gibt, das eine Anleitung zur Koordinatenwahl der Art gibt, dass “möglichst viele” Koordinaten zyklisch sind. Bereits bei der zweidimensionalen Bewegung hatten wir die Koordinaten der **Drehsymmetrie** des Potentials angepasst und so den **Erhaltungssatz** erhalten. Den allgemeinen Zusammenhang zwischen “kontinuierlichen” **Symmetrien und Erhaltungssätzen** liefert das **Noethersche Theorem**, das im Folgenden abgeleitet wird.

Wir hatten im letzten Abschnitt gesehen, dass bei einer Koordinatentransformation $q \rightarrow \bar{q}$ mit $\bar{q}_i = \bar{q}_i(q, t)$ die Form der LG 2. Art nicht geändert wird (s.S.125), d.h. mit den LG für die q_i ($i = 1, \dots, n$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

gilt mit $\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) := L(q(\bar{q}, t), \dot{q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t)$ auch

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_i} ,$$

d.h. man hat **dieselbe Form**. Da aber L und \bar{L} im allgemeinen **verschiedene** Funktionen ihrer $2n+1$ -Argumente sind, erfüllen die \bar{q} **andere Differentialgleichungen** als die ursprünglichen q . Das hatten wir z.B. bei der zweidimensionalen Bewegung gesehen: Die Differentialgleichungen für r und φ haben eine **andere** Form, als die für x_1 und x_2 .

Wir betrachten im Folgenden solche Koordinatentransformationen, für die die resultierenden **neuen Differentialgleichungen in den \bar{q}_i dieselbe Form haben wie die Differentialgleichungen für die q_i** . Dabei hänge die Transformation differenzierbar von einem Parameter ϵ ab. Da das wesentliche Resultat aus dem Verhalten bei “infinitesimalen” Transformationen folgt, beschränken wir uns gleich auf Transformationen der Form ($\epsilon \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\bar{q}_i &= q_i + \epsilon h_i(q, t) \\ \text{d. h. } \dot{\bar{q}}_i &= \dot{q}_i + \epsilon \dot{h}_i = \dot{q}_i + \epsilon \left(\frac{\partial h_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial h_i}{\partial t} \right) .\end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion \bar{L} ist gegeben als $T - V$, ausgedrückt durch die \bar{q} und $\dot{\bar{q}}$.

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q(\bar{q}, t), \dot{q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t) =: \bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) .$$

Aufgrund der Überlegungen, welche Wirkungsfunktionale zur selben Euler-Lagrange-gleichung führen, folgt, dass die Differentialgleichungen in den \bar{q} sicher von derselben Form sind, wie die Differentialgleichung für die q , falls

$$\boxed{\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \frac{d}{dt} \tilde{G}(\bar{q}, t, \epsilon) .}$$

Koordinatentransformationen $\bar{q}_i = q_i + \epsilon h_i(q, t)$, die diese Bedingung erfüllen, bezeichnen wir als “**Symmetrietransformationen**”.

Als einfaches **Beispiel** betrachten wir ein eindimensionales Teilchen in einem äußeren Potential $V(x)$, d.h.

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x)$$

Als Koordinatentransformation betrachten wir räumliche **Translationen**: $h(x, t) = a = \text{const.}$, d.h.

$$\bar{x} = x + \epsilon a \quad ; \quad \dot{\bar{x}} = \dot{x}$$

Das liefert

$$L(x, \dot{x}) = L(\bar{x} - \epsilon a, \dot{\bar{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\bar{x}}^2 - V(\bar{x} - \epsilon a) = \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$$

Also folgt für die Differenz $\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) - L(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$:

$$\begin{aligned}\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) - L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) &= \left(\frac{m}{2} \dot{\bar{x}}^2 - V(\bar{x} - \epsilon a) \right) - \left(\frac{m}{2} \dot{\bar{x}}^2 - V(\bar{x}) \right) = V(\bar{x}) - V(\bar{x} - \epsilon a) \\ &= \frac{d}{dt} \tilde{G}(\bar{x}, t, \epsilon) \quad ?\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist nur für **lineare Potentiale** $V(x) = -fx$ erfüllbar, d.h. räumlich **homogene** Kraftfelder. Für \tilde{G} ergibt sich dann $\tilde{G} = \epsilon fat + const.$

Jetzt zurück zur allgemeinen Überlegung. Die Bedingung für das Vorliegen einer Symmetrietransformation lautet wegen $\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(q, \dot{q}, t)$

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q + \epsilon h, \dot{q} + \epsilon \dot{h}) + \frac{d}{dt} \tilde{G}(q + \epsilon h, t, \epsilon) .$$

Eine “differentielle” Form der Bedingung erhält man, indem man beide Seiten nach ϵ differenziert und anschließend $\epsilon = 0$ setzt. Mit $d\tilde{G}(\bar{q}, t, \epsilon)/dt =: \epsilon dG(\bar{q}, t, \epsilon)/dt$ erhält man

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i + \frac{d}{dt} G(q, t, 0) .$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so folgt unter Verwendung der Langrangegleichung zur Elimination von $\partial L/\partial q_i$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i + G \right) = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i + G = const.} \quad \text{oder} \quad p_i h_i + G = const.$$

Das ist das **Noethersche Theorem**:

Jede kontinuierliche einparametrische Schar von Symmetrietransformationen führt zu einem Erhaltungssatz (“Bewegungsintegral”).

Für das Beispiel der eindimensionalen Translationen in einem homogenen Kraftfeld lautet der Erhaltungssatz $(m\dot{x} + ft)a = const.$ Dieses Ergebnis wird später allgemeiner diskutiert.

Wir wollten jetzt für ein System von N Teilchen (ohne Zwangsbedingungen) untersuchen, wie sich die uns bereits bekannten Resultate als Spezialfälle des

NT ergeben. Wir verwenden hier wieder die Notation von Kapitel 2. Sei also in kartesischen Koordinaten

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V_i(\vec{x}) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N v_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|),$$

wobei wir zunächst zulassen wollen, dass die m_i , V_i und v_{ij} **zeitabhängig** sind. Wir betrachten jetzt Transformationen der Form

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N); \quad \vec{h} = (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_N) \\ \vec{x} &= \vec{x} + \epsilon \vec{h}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

und **prüfen** für verschiedene Formen von \vec{h} , **ob** die Transformation für unsere vorgegebene Lagrangefunktion eine **Symmetrietransformation** ist. Wir verwenden die differentielle Form und testen, ob ein $G(\vec{x}, t, 0)$ existiert, für das

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} \cdot \vec{h}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \cdot \dot{\vec{h}}_i \right) = -\frac{d}{dt} G(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t, 0)$$

gilt. Oder mit $\partial L / \partial \dot{\vec{x}}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$ und $\partial L / \partial \vec{x}_i = -\partial V_i / \partial \vec{x}_i - \sum_{j(\neq i)} \partial v_{ij} / \partial \vec{x}_i =: \vec{f}_i$ lautet das NT:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{f}_i \cdot \vec{h}_i + m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{h}}_i) = -\frac{dG(\vec{x}, t)}{dt} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{h}_i + G = \text{const.}$$

a) **Räumliche Translation:** $\vec{h}_i(\vec{x}, t) = \vec{a} = \text{const.}$

Eine räumliche Translation in “ \vec{a} -Richtung” ist also Symmetrietransformation, falls ein G existiert, so dass

$$\vec{a} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = -\frac{d}{dt} G(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t, 0).$$

Wegen actio = reactio tragen in der Summe nur die äußeren Kräfte \vec{f}_i^{ext} bei, d. h. es muss gelten

$$\vec{a} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{f}_i^{\text{ext}} = \vec{a} \cdot \vec{F}^{\text{ext}} = -\frac{d}{dt} G.$$

Für den “trivialen Fall” $\vec{F}^{ext} \equiv 0$ ist $G = 0$ wählbar und der Erhaltungssatz lautet:

$$\vec{a} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i = const.$$

Da \vec{a} für $\vec{F}^{ext} \equiv 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt die **Erhaltung des Gesamtimpulses**

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}} = const.$$

Verschwanden die äußeren Potentiale **nicht**, aber es gilt

$$V_i(\vec{r} + \epsilon \vec{a}) = V_i(\vec{r}) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{F}^{ext} = 0$$

für räumliche Translationen in **spezielle**, durch \vec{a} gegebene Richtungen, so gilt ($G \equiv 0$)

$$\vec{a} \cdot \vec{P} = const.$$

d. h. die **Projektion des Gesamtimpulses** in diese Richtungen ist erhalten. Eine Anwendung mit nicht verschwindendem G ergibt sich für den Fall, dass die Kraftfelder \vec{f}_i^{ext} alle räumlich homogen sind, d. h. $\vec{f}_i^{ext}(\vec{x}_i, t) = \vec{f}_i^{ext}(t)$. Die Bedingung $\vec{a} \cdot \vec{F}^{ext} = -dG/dt$ ist dann erfüllt für

$$G(t) = -\vec{a} \cdot \int_{t_0}^t \vec{F}^{ext}(t') dt'$$

und es ergibt sich das “Bewegungsintegral”

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{P} - \int_{t_0}^t \vec{F}^{ext}(t') dt' \right) = const.$$

Da \vec{a} beliebig ist, gilt auch $\vec{P} - \int_{t_0}^t \vec{F}^{ext}(t') dt' = const.$

b) **Räumliche Drehungen:** $\vec{h}_i(\vec{x}_i, t) = D \vec{x}_i$

Dabei ist D eine zeitunabhängige lineare Abbildung so, dass $B := 1 + \epsilon D$ eine Drehung darstellt, d. h. $BB^T = 1$ gilt. Daraus folgt $D + D^T = 0$, d.h. D ist antisymmetrisch. Also gilt in drei räumlichen Dimensionen (s. S.82)

$$\vec{h}_i(\vec{x}_i, t) = \vec{\varphi}_D \times \vec{x}_i .$$

Wegen $\dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{h}}_i = \dot{\vec{x}}_i \cdot (\vec{\varphi}_D \times \dot{\vec{x}}_i) = 0$ entfällt der entsprechende Term im “Testkriterium”, und wegen actio = reactio tragen die Zweiteilchenkräfte

im Term mit den Kräften nicht bei. Also lautet das Kriterium unter Verwendung der bekannten Identitäten für das Spatprodukt:

$$\vec{\varphi}_D \cdot \sum_{i=1}^N \left(\vec{x}_i \times \frac{\partial V_i}{\partial \vec{x}_i} \right) = \frac{d}{dt} G .$$

Wie erwartet, sind also **beliebige** räumliche Drehungen Symmetrietransformationen, falls $V_i = V_i(|\vec{x}_i|)$, d. h. die äußeren Kräfte **Zentralkräfte** sind. Dann verschwindet die linke Seite für beliebige $\vec{\varphi}_D$ und das Kriterium ist für $G = 0$ erfüllt. Damit lautet der Erhaltungssatz:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot (\vec{\varphi}_D \times \vec{x}_i) = \vec{\varphi}_D \cdot \sum_{i=1}^N (\vec{x}_i \times \vec{p}_i) = \vec{\varphi}_D \cdot \vec{L} = \text{const.}$$

Da $\vec{\varphi}_D$ beliebig ist, folgt der Erhaltungssatz für den **Gesamtdrehimpuls** \vec{L} . Liegen keine radialsymmetrischen Potentiale, sondern Potentiale vor, die nur eine spezielle Symmetrieachse $\vec{\varphi}$ haben

$$V_i(\vec{x}_i) = V_i(\vec{x}_i + \epsilon(\vec{\varphi} \times \vec{x}_i)) ,$$

so ist nur die **Projektion** $\vec{\varphi} \cdot \vec{L}$ erhalten.

c) (**eigentliche**) **Galileitransformation**: $\vec{h}_i(\vec{x}, t) = \vec{v}_0 t$

Wegen actio = reaction tragen wieder nur die äußeren Kräfte bei und das Kriterium lautet:

$$t\vec{v}_0 \cdot \vec{F}^{ext} + \vec{v}_0 \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i = -\frac{d}{dt} G .$$

Falls die **Massen** m_i **zeitunabhängig** sind, lässt sich der zweite Term auf der linken Seite als Zeitableitung des Schwerpunktvektors $\vec{R} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i / M$ schreiben. Zeitabhängige homogene äußere Felder $\vec{F}^{ext}(t)$ können zugelassen werden. Das Kriterium ist für folgendes G erfüllt:

$$G = -\vec{v}_0 \cdot \left(\int_{t_0}^t \vec{F}^{ext}(t') t' dt' + M \vec{R}(t) \right) ,$$

wobei M die (zeitunabhängige) Gesamtmasse ist. Den zugehörigen Erhaltungssatz bezeichnet man als den **“Schwerpunktsatz”**.

$$M\vec{R}(t) = t\vec{P}(t) - \int_{t_0}^t t' \vec{F}^{ext}(t') dt' + M\vec{R}(t_0) - t\vec{P}(t_0)$$

Man erhält dieses Bewegungsintegral (für den hier betrachteten Fall konstanter Massen) aber auch direkt aus Integration des Impussatzes.

Damit haben wir bis auf die **Energieerhaltung** die bereits früher diskutierten Erhaltungssätze erhalten:

Symmetrietransformation	Erhaltungssatz
räumliche Translation	Impulserhaltung
räumliche Drehung	Drehimpulserhaltung
eigentliche Galileitransformation	Schwerpunktsatz
?	Energieerhaltung

Von den Transformationen der Galileigruppe haben wir die **Zeittranslation** noch nicht betrachtet. Das liegt daran, dass wir Symmetrietransformationen der Form $\bar{q}_i = q_i + \epsilon h_i(q, t)$ betrachtet haben, bei der die “abhängigen” Veränderlichen q transformiert werden, **nicht** aber die “unabhängige” Zeitvariable t . Wir werden das allgemeine Vorgehen, bei dem die Zeit mittransformiert wird, im übernächsten Abschnitt beschreiben. Wir zeigen zunächst, wie man in der Lagrangeformulierung der Mechanik die “Energieerhaltung” auf kürzerem Weg erhalten kann.

11.3 Die Hamiltonfunktion

Wir betrachten eine allgemeine Lagrangefunktion $L(q(t), \dot{q}(t), t) = T(q(t), \dot{q}(t), t) - V(q(t), t)$ und differenzieren nach der Zeit (SK)

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} . \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim Übergang zur zweiten Zeile die Lagrangegleichungen benutzt. Wir definieren nun die **“Hamiltonfunktion”** H über

$$H := p_i \dot{q}_i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L .$$

Dann lautet obige Relation

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} .$$

Hängt L **nicht explizit von der Zeit ab**, so ist H eine **Erhaltungsgröße**

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const.}$$

Hat die kinetische Energie T die Form

$$T = \frac{1}{2} A_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j ,$$

mit $A_{ij} = A_{ji}$, so erhält man für die konjugierten Impulse

$$p_l = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} A_{ij}(q) (\delta_{il} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{lj}) = A_{lj}(q) \dot{q}_j .$$

Damit gilt $p_i \dot{q}_i = 2T$. Für die angenommene Form der kinetischen Energie folgt also

$$H = T + V ,$$

d.h. die **Hamiltonfunktion** H ist durch die **Gesamtenergie** gegeben. Wie zu Beginn von Kapitel 12 diskutiert, ist die angenommene Form der kinetischen Energie die “generische” Form in der klassischen Mechanik.

11.4 Noethersches Theorem II

Wir betrachten nun noch den Fall von Transformationen, in denen die Zeit mit-transformiert wird:

(Alternativ kann man die folgende “Verallgemeinerung des NT mit Hilfe des Konzepts des “erweiterten Konfigurationsraumes” erhalten, wobei \vec{x} **und** t als abhängige Variable betrachtet werden (s. V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, S. 90/91))

Wir betrachten wieder “infinitesimale” Transformationen

$$\begin{aligned} \tau &= t + \epsilon h_0(t) \\ \bar{q}_i(\tau) &= q_i(t) + \epsilon h_i(q, t) \\ &= q_i(t(\tau)) + \epsilon h_i(q(t(\tau)), t(\tau)) \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Ableitung nach τ mit “ $\overset{\circ}{}$ ”, d. h. $\overset{\circ}{f} \equiv df/d\tau$, so erfüllen die $\bar{q}_i(\tau)$ die LG:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \overset{\circ}{\bar{q}}_i} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_i}$$

mit $\bar{L}(\bar{q}(\tau), \overset{\circ}{\bar{q}}(\tau), \tau) := L(q(t), \dot{q}(t), t)(dt/d\tau)$.

Dies sieht man durch direkte Verallgemeinerung der Rechnung von S. 123/24 (Übungsaufgabe) oder mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips: Mit $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ ist auch $\int_{\tau_0}^{\tau_1} \tilde{L} d\tau$ stationär. Die Differentialgleichungen für die $\bar{q}_i(\tau)$, haben sicher wieder dieselbe Form, wie die für die $q_i(t)$, falls

$$\bar{L}(\bar{q}(\tau), \overset{\circ}{\bar{q}}(\tau), \tau) = L(\bar{q}(\tau), \overset{\circ}{\bar{q}}(\tau), \tau) + \frac{d}{d\tau} \tilde{G}(\bar{q}(\tau), \tau) .$$

Also muss gelten:

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) \frac{dt}{d\tau} = L(\bar{q}(\tau), \overset{\circ}{\bar{q}}(\tau), \tau) + \frac{d}{d\tau} \tilde{G}(\bar{q}(\tau), \tau) .$$

Differentiation nach ϵ und Nullsetzen von ϵ liefert mit $\tilde{G} = \epsilon G$ und

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \epsilon \dot{h}_0 ; \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = 1 - \epsilon \dot{h}_0 + O(\epsilon^2) ,$$

sowie

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\bar{q}}_i(\tau) &= \dot{q}_i \frac{dt}{d\tau} + \epsilon \dot{h}_i \\ &= \dot{q}_i(t)(1 - \epsilon \dot{h}_0) + \epsilon \dot{h}_i + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

das differentielle Kriterium

$$\begin{aligned} -L \cdot \dot{h}_0 &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{h}_i - \dot{h}_0 \dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} h_0 + \frac{dG}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i \right) - \dot{h}_0 p_i \dot{q}_i - h_0 \frac{dH}{dt} + \frac{dG}{dt} . \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim Übergang zur zweiten Zeile angenommen, dass das Kriterium erfüllt ist, und haben die Lagrangegleichungen, sowie $\partial L/\partial t = -dH/dt$ verwendet. Die Terme, in denen h_0 und \dot{h}_0 auftreten, lassen sich als Zeitableitung von Hh_0 schreiben und man erhält schließlich

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i - Hh_0 + G = const.$$

als Verallgemeinerung des Noetherschen Theorems. Manche Autoren verwenden die Notation $\delta q_i := \epsilon h_i$ und $\delta t := \epsilon h_0$. Dann lautet nach Multiplikation mit ϵ die allgemeine Version: $p_i \delta q_i - H \delta t + \tilde{G} = \text{const.}$

Als Anwendung betrachten wir die **Zeittranslation**: $h_0(t) = t_0 = \text{const.}$, $h_i \equiv 0$. Dann lautet das differentielle Kriterium

$$\frac{\partial L}{\partial t} t_0 = -\frac{dG}{dt}$$

Es ist offensichtlich erfüllt, falls $\partial L / \partial t$ die zeitliche Ableitung einer Funktion von q und t ist. Sei z. B.

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) + L_0(t)$$

mit zeitunabhängigen m_i und V , so ist $\partial L / \partial t = \dot{L}_0(t)$ und das Kriterium ist für $G(t) = -t_0(L_0(t) + c)$ erfüllt. Mit $\sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i = 2T$ folgt

$$H = T + V - L_0(t) ,$$

und der Erhaltungssatz $h \cdot t_0 - G = \text{const.}$ lautet

$$T + V = \text{const.} ,$$

d. h. die **Gesamtenergie** ist (im Gegensatz zu H erhalten.) Für $L_0 = 0$ ergibt sich wieder das einfache Resultat von Kapitel 11.3.

12 Kleine Schwingungen; Stabilitätsfragen

Wir betrachten ein System mit n Freiheitsgraden, das durch die verallgemeinerten Koordinaten $q := q_1, \dots, q_n$ beschrieben wird. Für das zugrunde liegende System von N Massenpunkten sei $\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{r}(q)$ ohne **explizite** Zeitabhängigkeit. Dann lautet die Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

mit

$$A_{ij}(q) := \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} = A_{ji}(q) .$$

Mit dem Ergebnis für die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse aus Kapitel 11.3 erhält man die Lagrangegleichungen in der Form (SK)

$$\frac{d}{dt} [A_{ij}(q)\dot{q}_j] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad \Delta$$

Für allgemeine Potentiale V ist das ein kompliziertes System gekoppelter **nicht-linearer** Differentialgleichungen, deren Lösung i.A. nur numerisch erfolgen kann. Wir untersuchen hier, ob es trotzdem Bewegungsformen gibt, die einer analytischen Beschreibung zugänglich sind.

12.1 Dynamik in der Umgebung von Gleichgewichtspunkten

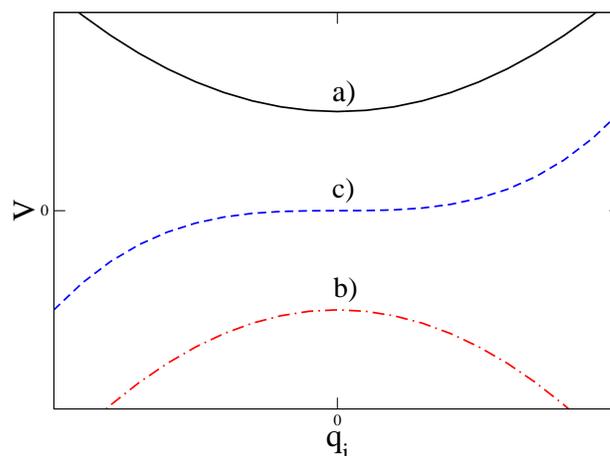
Die einfachste Bewegung ist **keine** Bewegung. Wir untersuchen daher zuerst die Frage, ob es Werte von q gibt, für die **statisches Gleichgewicht** vorliegen kann, d.h. es gilt für alle Zeiten

$$\dot{q}_i = 0 \quad ; \quad \ddot{q}_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad .$$

Da für $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$ die linke Seite der Lagrangegleichung verschwindet, muss dies auch für die rechte Seite gelten. Also kann statisches Gleichgewicht nur in Punkten $q^{(j)}$ vorliegen, für die verallgemeinerte Kraft verschwindet

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q^{(j)}} = 0 \quad , \quad i = 1 \dots n \quad .$$

Wir betrachten das Potential V in der Umgebung eines dieser Punkte ($q^{(0)}$). Dann kann in jeder der n "q"-Richtungen eines der folgenden Verhalten vorliegen:



Hat das Potential $V(q)$ in $q^{(0)}$ ein **Minimum**, so liegt das Verhalten a) in allen Richtungen vor und der Gleichgewichtspunkt heißt **stabil**. Andernfalls (Maximum oder verallgemeinerter Sattelpunkt) heißt der Gleichgewichtspunkt **instabil**. Der Grund dieser Nomenklatur wird im Folgenden evident.

Dazu betrachten wir das Bewegungsverhalten des Systems in einer **kleinen Umgebung** von $q^{(0)}$. Um die Formeln zu vereinfachen, wählen wir die Koordinaten so, dass $q^{(0)} \equiv 0$ ist. Mit dieser Wahl des Ursprungs betrachten wir also den Fall, dass die q_i **kleine "Auslenkungen"** sind. Wir **linearisieren** daher die Bewegungsgleichungen, oder äquivalent dazu betrachten in L nur Terme, die **höchstens quadratisch** in den kleinen Auslenkungen sind. Da T bereits explizit bilinear in den \dot{q}_i ist, ersetzen wir die $A_{ij}(q)$ durch ihren Wert $A_{ij}(0)$ im Gleichgewichtspunkt. Für die potentielle Energie führen wir eine Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung durch

$$V(q) = V(0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 q_i q_j + O(q^3)$$

$$(SK) = V(0) + \frac{1}{2} B_{ij} q_i q_j + O(q^3) .$$

Da $q = 0$ nach Voraussetzung Gleichgewichtspunkt ist, verschwinden die linearen Terme und die B_{ij} sind die Elemente einer **symmetrischen Matrix**, die durch die 2. Ableitungen des Potentials gegeben ist:

$$B_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=0} = B_{ji} .$$

Vernachlässigen wir jetzt Terme von 3. und höherer Ordnung in den Auslenkungen, so ist die Lagrangefunktion eine Summe aus zwei **quadratischen Formen** ($A_{ij} := A_{ij}(0)$)

$$L = \frac{1}{2} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} B_{ij} q_i q_j$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\vec{q}} \cdot A \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} \vec{q} \cdot B \vec{q} .$$

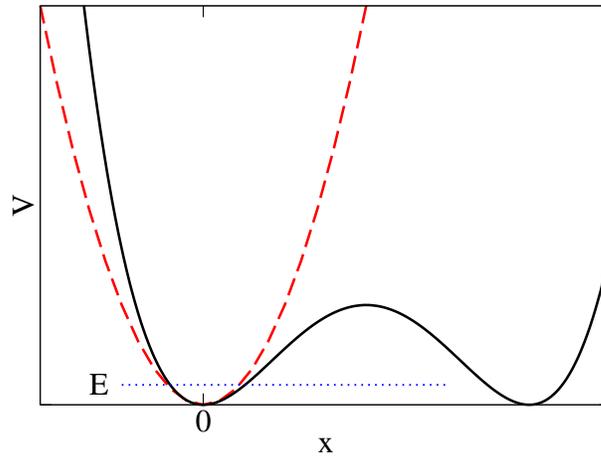
Dabei haben wir in der zweiten Zeile den Vektor $\vec{q} = q_i \vec{e}_i$ eingeführt, wobei die \vec{e}_i eine Orthonormalbasis bilden.

Da die kinetische Energie eine positive Größe ist, ist die quadratische Form der kinetischen Energie **positiv definit**. Die aus L folgenden **"linearisierten"** Lagrangegleichungen lauten (Summationskonvention):

$$A_{ij} \ddot{q}_j = -B_{ij} q_j , \quad \text{oder} \quad A \ddot{\vec{q}} = -B \vec{q} .$$

Man hätte diese linearisierten Bewegungsgleichungen auch direkt aus den ursprünglichen Lagrangeleichungen erhalten können, indem man sich auf Terme **linear** in den Auslenkungen beschränkt.

Wir rekapitulieren unser Vorgehen: Wir haben das ursprüngliche (“nichtlineare”) Problem durch ein vereinfachtes “Modellproblem” ersetzt. Für das Beispiel eines Teilchens der Masse m in einer räumlichen Dimension



haben wir also das exakte Potential $V(x)$ (durchgezogene Linie) durch eine Parabel (gestrichelte Linie) ersetzt. Für Energien E in der Nähe von $V(0)$ wird das Teilchen, wenn es sich in der Nähe des Ursprungs befindet, kleine Schwingungen um $x = 0$ ausführen, die für Werte $E \rightarrow V(0)$ durch das gestrichelte Potential immer genauer beschrieben wird.

Die linearisierten Bewegungsgleichungen sind ein **gekoppeltes** System von Differentialgleichungen 2. Ordnung, die “von selbst” nur für den Fall entkoppelt sind, in dem die Matrizen A und B **diagonal** für die gemachte Wahl der Koordinaten sind. Im Rahmen der linearen Algebra wird gezeigt, wie man durch eine Hauptachsentransformation quadratischen Formen auf Diagonalform bringen kann (s. auch die Diskussion im Zusammenhang mit dem Trägheitstensor). Wir wollen deshalb kurz einige aus der linearen Algebra bekannten Resultate wiederholen und Erweiterungen erläutern.

12.2 Das verallgemeinerte Eigenwertproblem

Einen reellen linearen Raum K mit einem positiv definiten skalaren Produkt nennt man einen **Euklidischen Raum**. Wir interessieren uns für lineare Selbstabbildungen des Raumes, insbesondere für **selbstadjungierte** Abbildungen A

$$A\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot A\vec{y}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in K \quad ; \quad (\dim(K) = n)$$

In einer Orthonormalbasis \vec{e}_i wird die selbstadjungierte Abbildung A durch die **symmetrische Matrix** A_{ij} dargestellt

$$A_{ij} := \vec{e}_i \cdot A\vec{e}_j = A\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot A\vec{e}_i = A_{ji} .$$

Sei B eine lineare Selbstabbildung und $\vec{b} (\neq \vec{0}) \in K$ ein Vektor für den

$$\boxed{B\vec{b} = \lambda\vec{b}}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, so bezeichnet man \vec{b} als **Eigenvektor** der Abbildung B und λ als den zugehörigen **Eigenwert**. Man kann nun folgenden wichtigen Satz beweisen:

Satz: Für jede selbstadjungierte Abbildung B existieren $n = \dim(K)$ linear unabhängige Eigenvektoren \vec{b}_i , die so gewählt werden können, dass sie ein vollständiges Orthonormalsystem bilden

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, \dots, n .$$

Für den allgemeinen Beweis verweisen wir auf die Lehrbücher über Lineare Algebra. Für den Spezialfall, dass alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **verschieden** sind, ist die Orthogonalität der Eigenvektoren leicht zu zeigen:

$$0 = \vec{b}_i \cdot B\vec{b}_j - B\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = (\lambda_j - \lambda_i)\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j .$$

Bei m -fach "entarteten" Eigenwerten bilden die zugehörigen Eigenvektoren einen m -dimensionalen Unterraum, für den sich natürlich orthonormale Basisvektoren angeben lassen.

In der Praxis geht man so vor, dass man das homogene Gleichungssystem

$$(B - \lambda I)\vec{b} = 0$$

löst. Damit nichttriviale Lösungen existieren, muss die zugehörige **Determinante verschwinden**

$$\det(B - \lambda I) = 0 .$$

Die linke Seite ist ein Polynom n -ten Grades in λ ("**charakteristisches Polynom**"), das im Fall, dass B **selbstadjungiert** ist, n **reelle Nullstellen** $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

hat. Setzt man die λ_i in das homogene Gleichungssystem $(B - \lambda I)\vec{b} = 0$ ein, so erhält man als die nichttrivialen Lösungen gerade den (die) zugehörigen Eigenvektor(en).

Weniger geläufig ist das für dieses Kapitel wichtige “**verallgemeinerte Eigenwertproblem**”

$$B\vec{\xi} = \lambda A\vec{\xi}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

wobei A eine **positiv definite** selbstadjungierte Abbildung ist, d. h. alle Eigenwerte a_i in $A\vec{a}_i = a_i\vec{a}_i$ sind **positiv**: $a_i > 0$. Das verallgemeinerte Eigenwertproblem lässt sich leicht auf das ursprüngliche Eigenwertproblem zurückführen, wenn man die Abbildungen $A^{1/2}$ und $A^{-1/2}$ definiert:

Sei \vec{x} ein beliebiger Vektor $\in K$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der \vec{a}_i lässt er sich nach den \vec{a}_i zerlegen: $\vec{x} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{a}_i$. Dann definiert man:

$$A^{\pm 1/2} \vec{x} := \sum_i c_i a_i^{\pm 1/2} \vec{a}_i.$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt $A^{1/2} A^{1/2} = A$ und $A^{-1/2} A^{1/2} = I$ (daher die Nomenklatur). Wir definieren jetzt

$$\vec{\eta} := A^{1/2} \vec{\xi}, \quad \vec{\xi} = A^{-1/2} \vec{\eta}$$

und schreiben die EV-Gleichung $B\vec{\xi} = \lambda A\vec{\xi}$ in der Form

$$BA^{-1/2}(A^{1/2}\vec{\xi}) = \lambda A^{1/2}(A^{1/2}\vec{\xi}).$$

Anwendung von $A^{-1/2}$ liefert dann

$$\boxed{(C - \lambda I)\vec{\eta} = 0, \quad C = A^{-1/2}BA^{-1/2},}$$

d. h. das verallgemeinerte EW-Problem für B und A ist auf ein **gewöhnliches** EW-Problem für $C = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ zurückgeführt.

Mit A ist auch $A^{-1/2}$ selbstadjungiert und deshalb ist C **selbstadjungiert**, falls B es ist.

Sei nun B selbstadjungiert, dann können die Eigenvektoren $\vec{\eta}_i$ von C so gewählt werden, dass für $i, j = 1, \dots, n$ gilt:

$$\vec{\eta}_i \cdot \vec{\eta}_j = \delta_{ij}, \quad \text{d.h.} \quad A^{1/2}\vec{\xi}_i \cdot A^{1/2}\vec{\xi}_j = \vec{\xi}_i \cdot A\vec{\xi}_j = \delta_{ij}.$$

Die EV-Gleichung für die $\vec{\eta}_j$ liefert nach skalarer Multiplikation mit $\vec{\eta}_i$

$$\vec{\eta}_i \cdot C\vec{\eta}_j = \delta_{ij}\lambda_i, \quad \text{oder} \quad A^{1/2}\vec{\xi}_i \cdot A^{-1/2}BA^{-1/2}A^{1/2}\vec{\xi}_j = \lambda_j\delta_{ij},$$

d.h.

$$\boxed{\vec{\xi}_i \cdot B\vec{\xi}_j = \lambda_j \delta_{ij} .}$$

Entwickelt man jetzt einen **beliebigen** Vektor $\vec{q} \in K$ nach dem linear unabhängigen Satz von verallgemeinerten Eigenvektoren $\vec{\xi}_i$

$$\vec{q} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \vec{\xi}_i \quad \text{mit} \quad \bar{q}_i = \vec{\xi}_i \cdot A\vec{q} = \vec{q} \cdot A\vec{\xi}_i ,$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \vec{q} \cdot A\vec{q} &= \sum_{i,j} \bar{q}_j \vec{\xi}_j \cdot A\vec{\xi}_i \bar{q}_i = \sum_i \bar{q}_i^2 , \\ \vec{q} \cdot B\vec{q} &= \sum_{i,j} \bar{q}_j \vec{\xi}_j \cdot B\vec{\xi}_i \bar{q}_i = \sum_i \lambda_i \bar{q}_i^2 . \end{aligned}$$

Zur **praktischen Berechnung** der Eigenwerte λ_i und der verallgemeinerten Eigenvektoren $\vec{\xi}_i$ sucht man die Nullstellen des verallgemeinerten charakteristischen Polynoms $\det(B - \lambda A)$, und löst anschließend das homogene Gleichungssystem $(B - \lambda_i A)\vec{\xi}_i = 0$.

Bevor wir zu den Anwendungen kommen, soll noch eine **alternative** Behandlung des **verallgemeinerten Eigenwertproblems** kurz vorgestellt werden:

Mit Hilfe von $A > 0$ und dem ursprünglichen Skalarprodukt kann man ein geeignetes **anderes Skalarprodukt** (\vec{x}, \vec{y}) einführen:

$$(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x} \cdot A\vec{y} , \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in K .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{x}, A^{-1}B\vec{y}) &= \vec{x} \cdot B\vec{y} \\ &= B^T \vec{x} \cdot \vec{y} = AA^{-1}B^T \vec{x} \cdot \vec{y} \\ &= A^{-1}B^T \vec{x} \cdot A\vec{y} \\ &= (A^{-1}B^T \vec{x}, \vec{y}) . \end{aligned}$$

d. h. $A^{-1}B$ ist bezüglich des **neuen** Skalarprodukts **selbstadjungiert**, falls B selbstadjungiert bezüglich des **ursprünglichen** Skalarprodukts ist, was wir annehmen wollen. Also hat $A^{-1}B$ einen linear unabhängigen Satz von Eigenvektoren $\vec{\eta}_i$, die als Orthonormalsystem bezüglich $(*, *)$ gewählt werden können

$$(\vec{\eta}_i, A^{-1}B\vec{\eta}_j) = \lambda_j \delta_{ij} = \vec{\eta}_i \cdot B\vec{\eta}_j ; \quad (\vec{\eta}_i, \vec{\eta}_j) = \delta_{ij} = \vec{\eta}_i \cdot A\vec{\eta}_j .$$

12.3 Überlagerung von Eigenschwingungen

Wir kommen nun zur **Anwendung** auf das Problem der **kleinen Schwingungen**. Unser physikalisches “Modellproblem” kann nun sofort gelöst werden. Wir wählen als **neue verallgemeinerte Koordinaten** die $\bar{q}_i = \vec{\xi}_i \cdot A\vec{q}$. In diesen “**Normalkoordinaten**” \bar{q}_i gilt:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{\bar{q}}_i^2 - \lambda_i \bar{q}_i^2)$$

und die zugehörigen Lagrangegleichungen **entkoppeln**

$$\ddot{\bar{q}}_i = -\lambda_i \bar{q}_i \quad i = 1, \dots, n .$$

Bei der Lösung hat man die Fälle $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 0$ und $\lambda_i < 0$ zu unterscheiden: Die allgemeine Lösung für $\bar{q}_i(t)$ lautet:

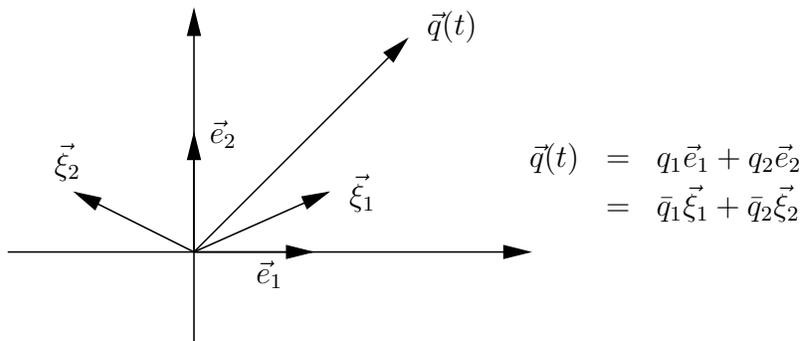
$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } \lambda_i = \omega_i^2 > 0 & : \bar{q}_i(t) = c_1 \cos \omega_i t + c_2 \sin \omega_i t , \\ \text{Fall 2: } \lambda_i = 0 & : \bar{q}_i(t) = c_1 + c_2 t , \\ \text{Fall 3: } \lambda_i = -k_i^2 < 0 & : \bar{q}_i(t) = c_1 \cosh k_i t + c_2 \sinh k_i t . \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass **alle** $\lambda_i > 0$ sind. (Auf die anderen Fälle kommen wir später in diesem Kapitel zurück.)

Für beliebige Anfangsbedingungen $\vec{q}(0)$ und $\dot{\vec{q}}(0)$ lautet die Lösung dann:

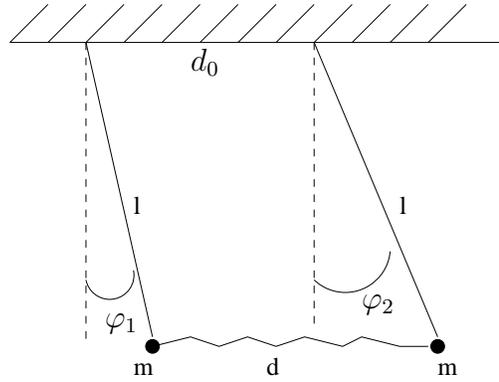
$$\vec{q}(t) = \sum_{i=1}^n \left[(\vec{q}(0) \cdot A\vec{\xi}_i) \cos \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} (\dot{\vec{q}}(0) \cdot A\vec{\xi}_i) \sin \omega_i t \right] \vec{\xi}_i .$$

Die Lösung ist eine Überlagerung von “**Eigenschwingungen**” oder “Eigenmoden”.



Falls die “Eigenfrequenzen” ω_i aber nicht in einem rationalen Verhältnis stehen, ist das **keine periodische** Bewegung.

Als einfaches **Beispiel** betrachten wir zwei **gekoppelte gleichartige Pendel**, die sich in einer Ebene bewegen können.



Als verallgemeinerte Koordinaten q_1, q_2 wählen wir $q_1 := l\varphi_1$, $q_2 := l\varphi_2$. Dann lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) .$$

Die Feder habe die “natürliche” Länge d_0 . Der Abstand der beiden Massen ist

$$\begin{aligned} d(\varphi_1, \varphi_2) &= \sqrt{(l \cos \varphi_1 - l \cos \varphi_2)^2 + (l \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_1 + d_0)^2} \\ &= d_0 + l(\varphi_2 - \varphi_1) + O((\varphi_1 - \varphi_2)^2) . \end{aligned}$$

Also lautet die potentielle Energie V_F der Feder mit der Federkonstanten k

$$\begin{aligned} V_F &= \frac{1}{2}k [d(\varphi_1, \varphi_2) - d_0]^2 \\ &= \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2 + O((q_2 - q_1)^3) . \end{aligned}$$

Zusätzlich hat man noch die potentielle Energie im Schwerfeld. Die gesamte potentielle Energie lautet

$$\begin{aligned} V &= mgl [(1 - \cos \varphi_1) + (1 - \cos \varphi_2)] + \frac{1}{2}k(q_1 - q_2)^2 + O((q_1 - q_2)^3) \\ &= \frac{mgl}{2l}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2 + O((q_1 - q_2)^3) . \end{aligned}$$

Also erhalten wir für **A** und **B**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} mg/l + k & -k \\ -k & mg/l + k \end{pmatrix} .$$

Die Säkulargleichung $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0$ lautet damit:

$$\det \begin{pmatrix} mg/l + k - \lambda m & -k \\ -k & mg/l + k - \lambda m \end{pmatrix} = 0 .$$

Nullsetzen des charakteristischen Polynoms

$$(mg/l + k - \lambda m)^2 - k^2 = 0$$

liefert die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = g/l, \quad \lambda_2 = g/l + 2k/m,$$

und die zugehörigen **Eigenfrequenzen** sind

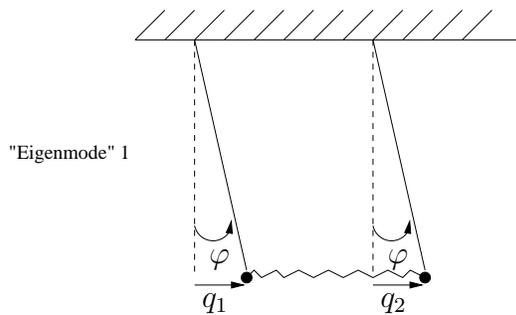
$$\omega_1 = \sqrt{g/l}, \quad \omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}.$$

Die zugehörigen **Eigenvektoren** $\vec{\xi}_1$ und $\vec{\xi}_2$ erhält man durch Lösung des homogenen Gleichungssystems mit eingesetztem Eigenwert. Sei $\vec{\xi}_{(1)} = \xi_{(i)j} \vec{e}_j$ so gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \quad & \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{(1)1} \\ \xi_{(1)2} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \xi_{(1)1} \\ \xi_{(1)2} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 : \quad & \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{(2)1} \\ \xi_{(2)2} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \xi_{(2)1} \\ \xi_{(2)2} \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

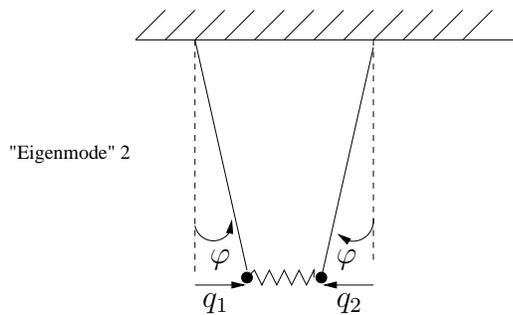
Um bei der ursprünglichen Normierung $\vec{\xi}_i \cdot A\vec{\xi}_j = \delta_{ij}$ zu bleiben, wählen wir $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2m}$. Also ergibt sich (da $\mathbf{A} \sim \mathbf{I}$, sind $\vec{\xi}_1$ und $\vec{\xi}_2$ orthogonal)

$$\vec{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$



Die Auslenkwinkel sind **gleich**, die Feder wird also nicht ausgelenkt und spielt keine Rolle, d.h. $\omega_1 = \omega_0$, wobei ω_0 die Frequenz eines der Pendel ist.

$$\vec{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$$



Die Auslenkwinkel unterscheiden sich durch das **Vorzeichen**. Die Steifigkeit der Feder kommt zum Tragen und führt zu einer Erhöhung der Eigenfrequenz: $\omega_2 > \omega_0$

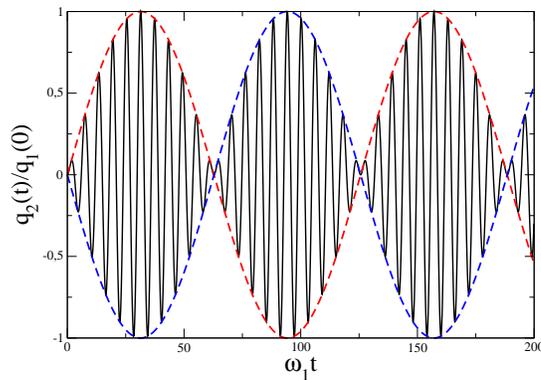
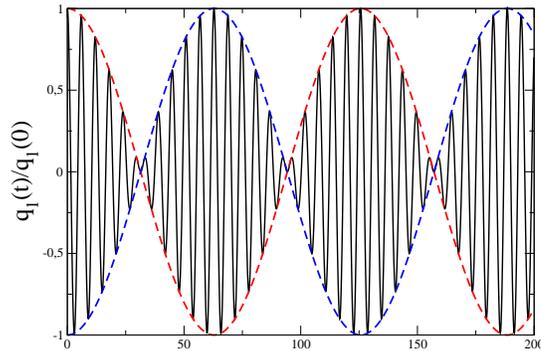
Wir betrachten das **Anfangswertproblem**, bei dem **eines** der beiden Pendel ausgelenkt wird und die "Anfangsgeschwindigkeiten" beider Pendel verschwinden: $\vec{q}(0) = \alpha \vec{e}_1$; $\dot{\vec{q}}(0) = 0$. Also ist $\vec{q}(0) \cdot A\vec{\xi}_i = 0$ und

$$\vec{q}(0) \cdot A\vec{\xi}_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\alpha ; \vec{q}(0) \cdot A\vec{\xi}_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\alpha .$$

Unter Verwendung der allgemeinen Lösung auf S. 151 erhält man also

$$\begin{aligned} \vec{q}(t) &= \alpha \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\cos \omega_1 t \vec{\xi}_1 + \cos \omega_2 t \vec{\xi}_2 \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \vec{e}_1 + \frac{\alpha}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \vec{e}_2 \\ &= \alpha \left[\cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \vec{e}_1 + \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \vec{e}_2 \right] . \end{aligned}$$

Im Fall **schwacher** Kopplung $(\omega_2/\omega_1 - 1) \ll 1$, d. h. $\omega_1 \approx \omega_2$ ergibt sich das Phänomen der **Schwebung**. Die trigonometrischen Funktionen, die $\omega_1 + \omega_2$ im Argument haben, sind zeitlich **schnell** veränderlich verglichen mit den Funktionen, die $\omega_2 - \omega_1$ im Argument haben. Nach einer großen Zahl von Schwingungen der Pendel (zur Zeit $t \approx \pi/(\omega_2 - \omega_1)$) schwingt nur Pendel 2 und Pendel 1 ist in Ruhe, usw. In der Abbildung ist $\omega_2/\omega_1 = 1.1$



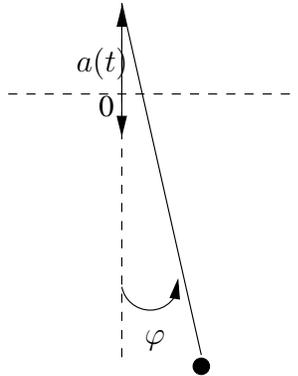
Die einhüllenden Kurven (gestrichelt) sind durch $\pm \cos(\omega_2 - \omega_1)t/2$ für $q_1(t)/q_1(0)$ bzw. $\pm \sin(\omega_2 - \omega_1)t/2$ für $q_2(t)/q_1(0)$ gegeben.

Wir weisen nochmals darauf hin, dass die Bewegung nur periodisch ist, falls ω_2/ω_1 eine **rationale Zahl** m/n mit $m, n \in N_+$ ist. Nur in diesem Fall ist die Bahnkurve in der $q_1 - q_2$ -Ebene geschlossen.

12.4 Parametrische Resonanz

12.4.1 periodisch getriebenes Pendel I

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, dass die Parameter eines harmonischen Oszillators **periodisch** von der Zeit abhängen: Beim Versuch, eine **Schaukel** in Gang zu bringen wird die Länge l des entsprechenden "Pendels" periodisch verändert: $l(t) = l(t + T)$. Wir werden diskutieren, wie sich $1/T$ zur Frequenz der frei schwingenden Schaukel verhalten muss, "damit die Schaukel in Gang kommt". Ein anderes Beispiel ist ein mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt sich in vertikaler Richtung **periodisch** im Schwerfeld der Erde bewegt.



Die Bewegungsgleichung erhält man leicht im Lagrangeformalismus (Übungsaufgabe) ($\omega_0^2 = g/l$)

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{\ddot{a}(t)}{g} \right) \sin \varphi = 0 .$$

Im Fall kleiner Schwingungen $|\varphi| \ll 1$ erhält man also ($\varphi \rightarrow x$)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 \frac{\ddot{a}(t)}{g} x .$$

Wir schreiben die Gleichung allgemein in der Form

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0 ; \quad \omega^2(t) = \omega^2(t + T) .}$$

Diese Differentialgleichung 2. Ordnung in der Zeit lässt sich auch als ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung schreiben: Sei $x_1 := x$; $x_2 := \dot{x}$, so gilt

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2(t)x_1 ,\end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Wir haben also die Lösungen eines homogenen Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ zu diskutieren, wobei $A(t)$ eine **zeitabhängige** lineare Abbildung ist. Wir wollen dies gleich etwas allgemeiner untersuchen.

12.4.2 Lineare Differentialgleichungssysteme mit zeitabhängigen Koeffizienten

Wir betrachten ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) ,$$

wobei $A(t)$ eine zeitabhängige lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist. Für eine feste Orthonormalbasis $\{\vec{e}_i\}, i = 1, \dots, n$ ist dies äquivalent zur Matrixform $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, mit dem "Spaltenvektor" \mathbf{x} .

Es seien nun $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems. Dann sieht man durch Einsetzen sofort, dass auch $c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)$ Lösung ist, wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind. Die Lösungsgesamtheit bildet einen linearen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Die Lösung des Anfangswertproblems schreiben wir wie folgt

$$\vec{x}(t) = U(t, t_0)\vec{x}(t_0) ,$$

wobei U eine lineare Abbildung ist. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\left(\frac{d}{dt}U(t, t_0) - A(t)U(t, t_0) \right) \vec{x}(t_0) = 0 .$$

Damit $U(t, t_0)$ die Zeitentwicklung des Systems für **beliebige** Anfangsbedingungen löst, muss gelten

$$\boxed{\frac{d}{dt}U(t, t_0) = A(t)U(t, t_0) ; \quad U(t_0, t_0) = I ,}$$

wobei bei unserer Betrachtung auch t und t_0 beliebig waren. Also gilt für die Zeitentwicklung von t_1 nach t_2 ebenso

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_2) &= U(t_2, t_1)\vec{x}(t_1) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0)\vec{x}(t_0) \\ \text{oder} \quad \vec{x}(t_2) &= U(t_2, t_0)\vec{x}(t_0)\end{aligned}$$

Da hier wiederum $\vec{x}(t_0)$ beliebig ist, folgt

$$\boxed{U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) .}$$

Eine explizite Darstellung von $U(t, t_0)$ als Matrix bezüglich einer Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ kann man z. B. dadurch erhalten, dass man die n Anfangswertprobleme $\vec{x}(t_0) = \vec{e}_i$, $i = 1, \dots, n$ löst.

Sei also $\vec{x}_i(t) = U(t, t_0)\vec{e}_i$. Fasst man die n Lösungen (“Spaltenvektoren”) zu einer Matrix zusammen, so erhält man $\mathbf{U}(t, t_0)$

$$(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \mathbf{U}(t, t_0) \underbrace{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)}_{\text{Einheits } n\text{-n Matrix}} = \mathbf{U}(t, t_0)$$

In der Theorie der Differentialgleichungen heißt die entsprechende Matrix auch “**Wronskimatrix**”. Von besonderem Interesse ist die **Determinante** dieser Matrix (da die Determinante einer linearen Abbildung unabhängig von der gewählten Basis ist, können wir statt $\det \mathbf{U}$ auch $\det U$ schreiben)

$$\boxed{W(t, t_0) := \det U(t, t_0) .}$$

Man nennt W die “**Wronskideterminante**”. Für sie gilt eine einfache Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(t, t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\det U(t + \Delta t, t_0) - \det U(t, t_0)}{\Delta t} \\ (\det AB = \det A \det B) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\det U(t + \Delta t, t) \det U(t, t_0) - \det U(t, t_0)}{\Delta t} \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\det U(t + \Delta t, t) - 1}{\Delta t} \right) W(t, t_0)\end{aligned}$$

Taylorentwicklung nach Δt von $U(t + \Delta t, t')$ mit beliebigem t' liefert

$$U(t + \Delta t, t') = U(t, t') + \Delta t \frac{d}{dt}U(t, t') + \dots = U(t, t') + \Delta t A(t)U(t, t') + \dots .$$

Also gilt für $t' = t$ wegen $U(t, t) = I$

$$U(t + \Delta t, t) = I + A(t) \Delta t + O(\Delta t^2) .$$

Durch direkte Berechnung der Determinante $\det U(t + \Delta t, t)$

$$\begin{aligned} \det & \begin{pmatrix} 1 + A_{11}\Delta t & A_{12}\Delta t & \dots & A_{1n}\Delta t \\ A_{21}\Delta t & 1 + A_{22}\Delta t & \dots & A_{2n}\Delta t \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ A_{n1}\Delta t & \dots & \dots & 1 + A_{nn}\Delta t \end{pmatrix} \\ &= (1 + A_{11}\Delta t)(1 + A_{22}\Delta t) \dots (1 + A_{nn}\Delta t) + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + \Delta t \sum_{i=1}^n A_{ii} + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

sieht man, dass

$$\det(1 + A(t) \Delta t + O(\Delta t^2)) = 1 + \Delta t \operatorname{Sp}A(t) + O(\Delta t^2)$$

gilt, wobei die ‘‘Spur’’ $\operatorname{Sp}A(t) := \sum_{i=1}^n A_{ii}(t)$ die Summe der Diagonalelemente der Matrix \mathbf{A} ist. (Ebenso wie die Determinante ist die Spur unabhängig von der gewählten Basis.) Jetzt kann der Limes $\Delta t \rightarrow 0$ ausgeführt werden und man erhält

$$\boxed{\frac{d}{dt}W(t, t_0) = \operatorname{Sp}A(t) W(t, t_0) ; \quad W(t_0, t_0) = 1 .}$$

Für den wichtigen Spezialfall, dass die **Spur** von $A(t)$ für **alle Zeiten verschwindet** (wie bei unserem Beispiel von S. 156), folgt daraus $\dot{W} = 0$, d.h.

$$\operatorname{Sp}A(t) \equiv 0 : \quad \det U(t, t_0) = W(t, t_0) = W(t_0, t_0) = \det U(t_0, t_0) = 1 \quad ,$$

d.h. $\det U = 1$ für beliebige Zeitargumente. Da $\det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$ die Bedeutung des **Volumens** des von $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ aufgespannten Parallelepipeds hat, bleibt dieses Volumen in diesem Fall ‘‘erhalten’’. (Ein sehr ähnlicher Beweis wird uns später den Liouvillschen Satz liefern.)

Für allgemeine Abbildungen $A(t)$ können die Lösungen des DGI-Systems nur numerisch bestimmt werden. Wir interessieren uns im Folgenden für zwei Sorten von **Spezialfällen**:

a) $A(t)$ ist **zeitunabhängig**:

Dann hängt U offensichtlich nur von der **Zeitdifferenz** ab und kann durch **Exponentiation** der Matrix A erhalten werden (wie im trivialen Fall $n = 1$, d.h. $\dot{x} = Ax$)

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= U(t - t_0, 0) \equiv U(t - t_0) \\ &= e^{A(t-t_0)} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} (t - t_0)^m . \end{aligned}$$

Die zweite Zeile verifiziert man sofort durch Einsetzen in das DGL-System. Wählt man oBdA $t_0 = 0$, so lautet die Lösung $\vec{x}(t)$ mit der Anfangsbedingung $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ also

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}_0 .}$$

Zur tatsächlichen Berechnung von $\vec{x}(t)$ muss die Exponentiation der Matrix nicht explizit durchgeführt werden. Besonders einfach ist der Fall, in dem die **Eigenvektoren** $\{\vec{a}_i\}$ von A eine **Basis** des Vektorraumes bilden. Das ist sichergestellt, falls A **selbstadjungiert** ist, oder wenn alle **Eigenwerte** λ_i von A **verschieden** sind. Dann kann man \vec{x}_0 nach den Eigenvektoren zerlegen

$$x_0 = \sum_{i=1}^n c_i \vec{a}_i .$$

(Mit Hilfe der "reziproken Basis" $\{\vec{a}_i\}$, für die $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$ gilt, lauten die Entwicklungskoeffizienten $c_i = \vec{a}_i \cdot \vec{x}_0$. Dabei sind die \vec{a}_i Eigenvektoren zu A^T).

Wegen $A^m \vec{a}_i = (\lambda_i)^m \vec{a}_i$ gilt $e^{At} \vec{a}_i = e^{\lambda_i t} \vec{a}_i$ und damit

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \vec{a}_i .}$$

(Treten komplexe EW $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ auf, so ist bei reellen Matrizen A (reelle Säkulargleichung!) auch λ_i^* EW und der zu λ_i^* gehörige EV ist der zu \vec{a}_i komplex konjugierte Vektor \vec{a}_i^* . Anstatt nach $\{\vec{a}_i e^{\lambda_i t}, \vec{a}_i^* e^{\lambda_i^* t}\}$ kann man dann nach den beiden **reellen** Vektoren

$$\{e^{\alpha_i t} (\cos \beta_i t \operatorname{Re} \vec{a}_i - \sin \beta_i t \operatorname{Im} \vec{a}_i), e^{\alpha_i t} (\sin \beta_i t \operatorname{Re} \vec{a}_i + \cos \beta_i t \operatorname{Im} \vec{a}_i)\}$$

entwickeln.)

Im Fall **entarteter** Eigenwerte bei **nichtsymmetrischen** Matrizen können zusätzlich **Polynome** in t auftreten, wie man am zweidimensionalen Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

sieht. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = a$, es existiert aber nur **ein** Eigenvektor $\mathbf{a} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Direkte Berechnung von $e^{\mathbf{A}t}$ liefert

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= e^{(\mathbf{A}-a\mathbf{1})t+a\mathbf{1}t} = e^{(\mathbf{A}-a\mathbf{1})t} e^{a\mathbf{1}t} \\ &= \left[\mathbf{1} + t \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] e^{at} , \end{aligned}$$

da $(\mathbf{A} - a\mathbf{1})^m = 0$ für $m \geq 2$. Außerdem haben wir die Produktformel $e^{A+B} = e^A e^B$ benutzt, die auch für lineare Abbildungen mit $AB = BA$ gilt. Der Beweis ist dann völlig analog zum Fall mit reellen oder komplexen Zahlen.

Also ergibt sich für $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \left[\begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \end{pmatrix} + bt \begin{pmatrix} x_0^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{at} .$$

Auf die allgemeine Diskussion bei **entarteten Eigenwerten von nichtsymmetrischen Matrizen** soll hier verzichtet werden (s. z. B. F. Erwe, Differentialgleichungen, BI-Taschenbuch, Bd. 19), d. h. wir betrachten den **Spezialfall**, in dem die Eigenvektoren $\{\vec{a}_i\}$ eine **Basis** des n -dimensionalen Vektorraums bilden:

Das Verhalten von $\vec{x}(t)$ wird wesentlich durch die Eigenwerte λ_i bestimmt. Man zerlegt den Vektorraum in **drei Teilräume**, in denen die Eigenvektoren von A mit

- i) $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$: “stabiler Unterraum” ,
- ii) $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$: “instabiler Unterraum” ,
- iii) $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$: “Zentrumsunterraum” ,

jeweils eine Basis bilden. Zerlegt man nun \vec{x}_0 sowie $\vec{x}(t)$ entsprechend, d. h.

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_0^{(s)} + \vec{x}_0^{(i)} + \vec{x}_0^{(c)} \quad \text{und} \quad \vec{x}(t) = \vec{x}^{(s)}(t) + \vec{x}^{(i)}(t) + \vec{x}^{(c)}(t) ,$$

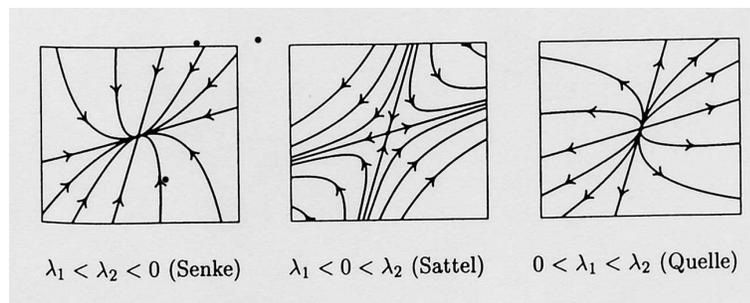
so gilt für große Zeiten

- i) $|\vec{x}^{(s)}(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$
- ii) $|\vec{x}^{(u)}(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, falls $|\vec{x}_0^{(u)}| > 0$
- iii) $|\vec{x}^{(c)}(t)| < C$, $\forall t$ (im Spezialfall, in dem die EV von A eine Basis bilden).

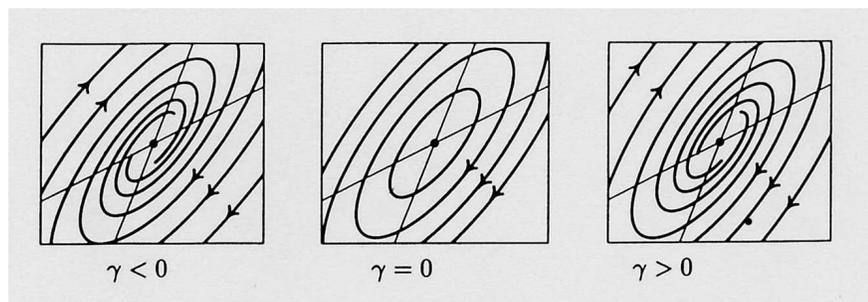
Dies verwendet man um gewisse Definitionen und Aussagen zu machen:

- Gilt für **alle** Eigenwerte $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, so nennt man die Lösung **asymptotisch stabil** zum Ursprung, da $\vec{x}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt.
- Existiert **mindestens ein** Eigenwert mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, so nennt man die allgemeine Lösung $\vec{x}(t)$ **instabil**, da ein beliebig kleiner Anteil $\vec{x}_0^{(u)}$ zu $|\vec{x}(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ führt.
- Existiert **kein** Eigenwert mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, aber Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, so nennt man die Lösung **stabil**, da $|\vec{x}(t)|$ für alle Zeiten beschränkt bleibt. Die letzte Aussage gilt aber **nur** für den betrachteten **Spezialfall**, in dem **keine** t -Potenzen wie auf S. 161 auftreten. Auch in der am Ende des Kapitels kurz skizzierten Stabilitätstheorie für Systeme **nichtlineare** Differentialgleichungen ist die Diskussion, die Fall c) entspricht am kompliziertesten.

Für $n = 2$ lässt sich die Struktur der Phasentrajektorien (im linearen Fall) leicht angeben. Es ergibt sich z.B. für den Fall **reeller** Eigenwerte, wenn sie verschieden, und verschieden von Null sind



Für **komplexe** Eigenwerte $\lambda = \gamma \pm i\omega$ ergibt sich folgendes Bild



Für reelle Eigenwerte muss man den Fall entarteter EW, sowie verschwindender EW gesondert behandeln.

B) $A(t)$ ist **periodisch**: $A(t) = A(t + T)$, $\forall t$

Dann spielt es offensichtlich keine Rolle, ob man zur Zeit t_0 oder zur Zeit $t_0 + T$ startet:

$$U(t + T, t_0 + T) = U(t, t_0) .$$

Eine besondere Rolle spielt hier die **Zeitentwicklung über eine Periode**

$$U_T(t_0) := U(t_0 + T, t_0) .$$

Dann benötigt man zur Beschreibung einer beliebigen Zeitentwicklung nur $U_T(t_0)$ und $U(t, t_0)$ für $0 \leq t \leq T$, z. B.

$$\begin{aligned} U(t + T + t_0, t_0) &= U(t + T + t_0, T + t_0) U(T + t_0, t_0) \\ &= U(t + t_0, t_0) U_T(t_0) . \end{aligned}$$

Setzt man $t = t' + T$ so folgt $U(t' + 2T + t_0, t_0) = U(t' + t_0, t_0)(U_T(t_0))^2$ etc., d. h. für $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$U(t + mT + t_0, t_0) = U(t + t_0, t_0)(U_T(t_0))^m .$$

12.4.3 periodisch getriebenes Pendel II

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen kommen wir zu unserer physikalischen Fragestellung zurück: Wir wollen untersuchen, ob für das vorgegebene Differentialgleichungssystem **Lösungen existieren**, bei denen die **Auslenkung** (“der Schaukel”) mit der **Zeit anwächst**. Aus obiger Identität sieht man, dass das Lösungsverhalten im Wesentlichen durch $U_T(t_0)$ bestimmt ist. Für beliebige Anfangsbedingung $\vec{x}(t_0)$ gilt:

$$\vec{x}(mT + t_0) = (U_T(t_0))^m \vec{x}(t_0) .$$

Falls die Zeitentwicklung über eine Periode, $U_T(t_0)$, einen Eigenwert $\lambda_>$ besitzt, für den $|\lambda_>| > 1$ ist, so wächst $\vec{x}(t)$ über alle Grenzen, falls man als Anfangsbedingung den (oder einen der) zugehörigen Eigenvektor(en) $\vec{u}_>$ wählt ($U_T(t_0)\vec{u}_> = \lambda_>\vec{u}_>$)

$$\vec{x}(mT + t_0) := (U_T(t_0))^m \vec{u}_> = \lambda_>^m \vec{u}_> .$$

Für das Anwachsen der “Auslenkung” $\vec{x}(t)$ ist es hinreichend, dass $\vec{x}(t_0)$ in einer Zerlegung nach Basisvektoren einen Anteil proportional zu $\vec{u}_>$ hat. Also muss man zur Frage der Stabilität die Eigenwerte von $U_T(t_0)$ berechnen. Wir wollen dies für unseren zweidimensionalen Fall tun ($U \equiv U_T(t_0)$)

$$\det \begin{pmatrix} U_{11} - \lambda & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \underbrace{\text{Sp } U}_{=\lambda_1 + \lambda_2} \lambda + \underbrace{\det U}_{=\lambda_1 \cdot \lambda_2} = 0 .$$

Damit erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Sp } U \pm \sqrt{(\text{Sp } U)^2 - 4 \det U}}{2} .$$

In unserem Beispiel von S. 156 gilt wegen $\text{Sp } A = 0$ mit der Dgl. für die Wronskideterminante $\det U = 1 = \lambda_1 \lambda_2$, d. h.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Sp } U \pm \sqrt{(\text{Sp } U)^2 - 4}}{2} .$$

Für $|\text{Sp } U| < 2$ ist $\lambda_1 = \lambda_2^*$ und $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Für $|\text{Sp } U| \geq 2$ ist λ_1, λ_2 reell, mit $\lambda_1 \lambda_2 = 1$; z. B. $\lambda_1 > 1; \lambda_2 < 1$.

Also existieren **anwachsende Lösungen** für $|\text{Sp } U| > 2$. Das Auftreten solcher “instabiler” Lösungen bezeichnet man als **parametrische Resonanz**.

Zur Berechnung von $\text{Sp } U_T(t_0)$ muss man zuerst $U_T(t_0)$ berechnen, was für den allgemeinen Fall periodischer $\omega^2(t)$ nur numerisch möglich ist. Daher beschränken wir uns zunächst auf den Fall **kleiner** Variation der zeitabhängigen Frequenz

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + \epsilon \omega_0^2 a(t) \quad ; \quad a(t) = a(t + T) .$$

Für den Grenzfall $\epsilon = 0$ lässt sich $U_T(t_0)$ leicht berechnen. Wir wählen (oBdA) $t_0 = 0$. Aus der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \\ \dot{x}(t) &= -\omega_0 c_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 c_2 \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

folgt $x_1(0) = x(0) = c_1$, $x_2(0) = \dot{x}(0) = c_2 \omega_0$. Die Lösungen $\mathbf{x}_1(t)$ und $\mathbf{x}_2(t)$ für die Anfangswerte \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 lauten daher

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \end{pmatrix} .$$

Für $t = T$ bilden die beiden Spaltenvektoren zusammen die Darstellung von $U_T^{(0)}(0)$, wobei $^{(0)}$ für $\epsilon = 0$ steht

$$U_T^{(0)}(0) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 T & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 T \\ -\omega_0 \sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\text{Sp } U_T^{(0)}(0) = 2 \cos \omega_0 T ,$$

und wir erreichen den kritischen Wert $|\text{Sp } U| = 2$ für

$$\omega_0 T = n\pi , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Mit der **Definition** $\omega_{ext} := 2\pi/T$ der äußeren (“Schaukel”) Frequenz erwartet man also für $\epsilon \neq 0$ anwachsende Lösungen in der Umgebung obiger Resonanzbedingungen

$$\omega_{ext} = \frac{2}{n} \omega_0 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

In der Praxis beobachtet man parametrische Resonanz nur für **kleine** n ($n = 1, 2$ und manchmal $n = 3$). Die Gründe dafür werden später diskutiert.

Um das Verhalten für $\epsilon \neq 0$ zu diskutieren, betrachten wir den **exakt lösbaren**, aber leider nicht ganz typischen, Fall zeitlich stückweiser konstanter Frequenz $\omega(t)$ in $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0(1 + \epsilon) =: \omega_+ & 0 < t < T/2 \\ \omega_0(1 - \epsilon) =: \omega_- & T/2 < t < T . \end{cases}$$

Dann erhält man mit $x_{\pm} := \omega_{\pm} T/2$

$$\begin{aligned} U_T(0) &= U^{(\omega_-)}(T, T/2) U^{(\omega_+)}(T/2, 0) \\ &= U^{(\omega_-)}(T/2, 0) U^{(\omega_+)}(T/2, 0) \\ &= \begin{pmatrix} \cos x_- & \frac{1}{\omega_-} \sin x_- \\ -\omega_- \sin x_- & \cos x_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x_+ & \frac{1}{\omega_+} \sin x_+ \\ -\omega_+ \sin x_+ & \cos x_+ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x_- \cos x_+ - \frac{\omega_+}{\omega_-} \sin x_- \sin x_+ & ./ \\ ./ & \cos x_- \cos x_+ - \frac{\omega_-}{\omega_+} \sin x_+ \sin x_- \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die Außerdiagonalelemente werden nicht benötigt, da in das Resonanzkriterium nur die Spur von $U_T(0)$ eingeht. Parametrische Resonanz tritt auf, falls ϵ so gewählt ist, dass

$$|\text{Sp } U_T| = |2 \cos x_- \cos x_+ - \left(\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \right) \sin x_- \sin x_+| > 2$$

gilt. Betrachtet man $\omega_{ext} = 2\pi/T$ als gegeben, so kann man in der (ω_0, ϵ) -Ebene die Bereiche parametrischer Resonanz graphisch darstellen (s. u.). Die Grenzkurven sind durch $|\text{Sp } U_T| = 2$ bestimmt. Mit

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \right) - 1 = \frac{2\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} > 0$$

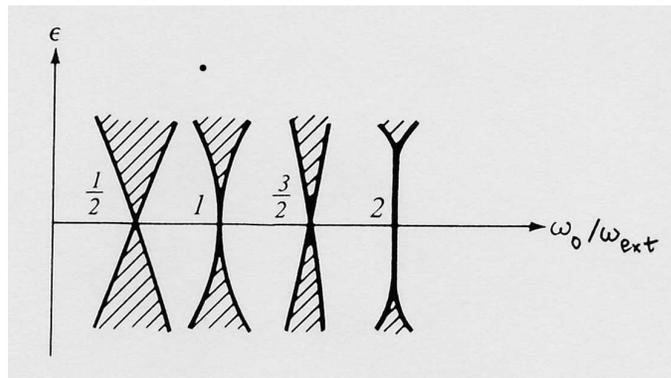
und der Verwendung der trigonometrischen Relationen $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ erhält man

$$\text{Sp } U_T = \frac{2}{1 - \varepsilon^2} [\cos(\omega_0 T) - \varepsilon^2 \cos(\varepsilon \omega_0 T)]$$

und das Kriterium für die Grenzkurven lautet

$$\cos \omega_0 T = \pm(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2 \cos(\varepsilon \omega_0 T) .$$

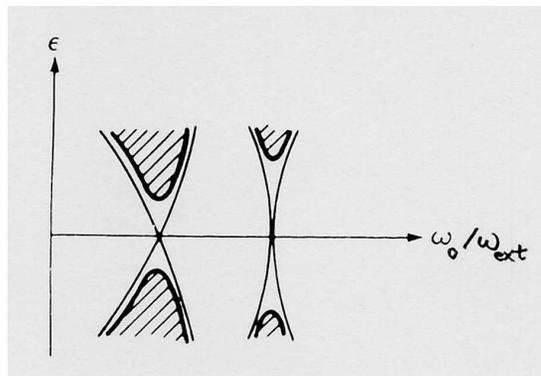
Das führt auf folgendes Bild für das Auftreten parametrischer Resonanz (Übungsaufgabe)



Bereiche parametrischer Resonanz

Wie bereits erwähnt, ist das untersuchte Beispiel nicht in jeder Hinsicht typisch. Für den Fall $\omega(t) = \omega_0(1 + \varepsilon a(t))$ mit einer **glatten** Funktion $a(t)$ (z. B. $a(t) = \sin \omega_{ext} t$) werden die Resonanzgebiete um $\omega_{ext} = 2\omega_0/n$ für große n sehr **schmal** (sie verschwinden wie ε^n).

Für den Fall **endlicher Reibung** muss ε einen **kritischen Wert** überschreiten, damit parametrische Resonanz auftritt.



Für das Modell von S. 165 lässt sich die Rechnung ebenfalls wieder analytisch durchführen, falls Reibung vorliegt ($\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega(t)^2x$, Übungsaufgabe). Wegen $\text{Sp } A(t, \epsilon) = -\gamma$ ist hier $\det U_T(t_0) = e^{-\gamma T}$ (unabhängig von ϵ), und die Grenzbedingung für parametrische Resonanz lautet

$$\left| \frac{\text{Sp } U_T \pm \sqrt{(\text{Sp } U_T)^2 - 4e^{-\gamma T}}}{2} \right| = 1 ,$$

d.h.

$$|\text{Sp } U_T| = 1 + e^{-\gamma T} = 2e^{-\gamma T/2} \cosh(\gamma T/2) .$$

Mit Hilfe der allgemeinen Lösung für den gedämpften harmonischen Oszillator sieht man, dass $|\text{Sp } U_T^0| = 2e^{-\gamma T/2} |\cos \tilde{\omega}_0 T| \leq 2e^{-\gamma T/2}$ gilt, was zur Folge hat, dass $|\epsilon|$ einen kritischen Wert überschreiten muss, bevor parametrische Resonanz auftritt. Die kritischen Werte, die $|\epsilon|$ für $\omega_{ext} \approx 2\omega_0/n$ zu überschreiten hat, nimmt für große n schnell zu. Daher tritt parametrische Resonanz am leichtesten für $n = 1$, d.h. $\omega_{ext} \approx 2\omega_0$ auf. Das kennt jeder "experimentell" von Schaukeln.

Die gesamte Theorie darf nur so lange angewendet werden, wie die Auslenkung x klein bleibt. Für hinreichend große x müssen die **nichtlinearen** Terme berücksichtigt werden (s. auch die Diskussion am Ende des Kapitels). Im Beispiel von S. 156 ist die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ dann nicht mehr erlaubt.

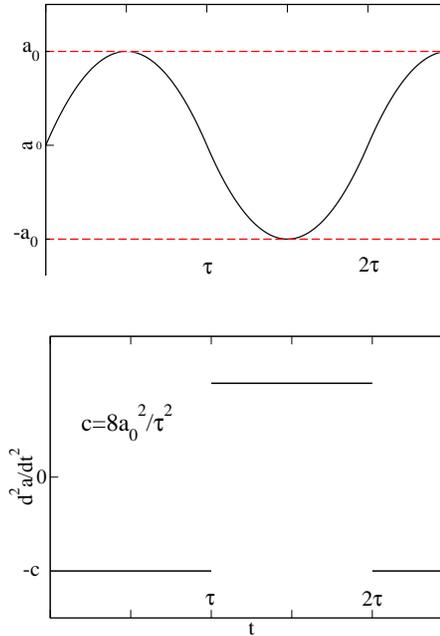
Ab hier ist der Rest des Kapitels ***-Material**.

Wir untersuchen als nächstes, ob beim Beispiel von S. 155 die **Umgebung der instabilen Pendelposition**, bei der das Pendel senkrecht nach oben steht, "stabilisiert" werden kann, wenn $a(t)$ geschickt gewählt wird. Mann nennt dieses Phänomen auch "**dynamische Stabilisierung**". Ein ähnliches Phänomen hatten wir bereits beim schweren symmetrischen Kreisel kennen gelernt.

Es stellt sich heraus, dass dies durch hinreichend schnelle Oszillation von $a(t)$ tatsächlich erreicht werden kann. Für $\varphi = \pi + x$ und $x \ll 1$ lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = \omega_0^2 \frac{\ddot{a}(t)}{g} x \quad ; \quad a(t) = a(t + T) .$$

Um die Rechnung analytisch durchführen zu können, nehmen wir an, dass $a(t)$ (wie beim Beispiel von S.165) **stückweise** aus **Parabeln** zusammengesetzt ist.



Wir nehmen an, dass $a_0/l =: \epsilon^2 \ll 1$ und $g/c =: \mu^2 \ll 1$ ist. Die Differentialgleichung lautet im Intervall $0 < t < 2\tau$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 \left(\frac{c}{g} - 1 \right) x &= 0 & (0 < t < \tau) \\ \ddot{x} - \omega_0^2 \left(\frac{c}{g} + 1 \right) x &= 0 & (\tau < t < 2\tau) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Mit $\Omega^2 := \omega_0^2 \left(\frac{c}{g} - 1 \right)$ und $k := \omega_0^2 \left(\frac{c}{g} + 1 \right)$ erhält man

$$\begin{aligned} U_{2\tau}(0) &= U^{(k)}(2\tau, \tau) U^{(\Omega)}(\tau, 0) \\ &= U^{(k)}(\tau, 0) U^{(\Omega)}(\tau, 0) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh k\tau & \frac{1}{k} \sinh k\tau \\ k \sinh k\tau & \cosh k\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega\tau & \frac{1}{\Omega} \sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daraus

$$\text{Sp } U_{2\tau}(0) = 2 \cosh k\tau \cos \Omega\tau + \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} \right) \sinh k\tau \sin \Omega\tau .$$

Die ursprünglich instabile Lage wird stabil, falls $|\text{Sp } U_{2\tau}| < 2$ ist. Im Limes $\mu \rightarrow 0$, d.h. $c/g \rightarrow \infty$ verschwindet der zweite Term und $\Omega\tau \rightarrow k\tau \rightarrow 2\sqrt{2}\epsilon$. Für kleine x gilt $\cosh x \cos x = 1 - x^4/6 + O(x^6)$. Also ist das Kriterium im Limes $\mu \rightarrow 0$ erfüllt. Entwicklung der Funktionen bis zu Termen vierter Ordnung in ϵ und μ liefert als kritischen Wert für das Beschleunigungsverhältnis (Übungsaufgabe)

$$\sqrt{\frac{g}{c}} < \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a_0}{t}} .$$

Eine anschauliche Diskussion dieses Phänomens geschieht in Landau-Lifschitz Bd.1 mit der “Methode der Mittelung”.

Zum Abschluss des Kapitels geben wir noch eine kurze Diskussion zur Frage der Stabilität bei einem allgemeinen System **nichtlinearer** Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) .$$

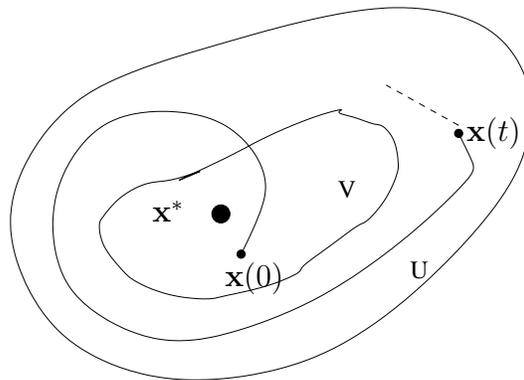
Das beinhaltet natürlich auch das zu Beginn des Kapitels untersuchte Beispiel eines Teilchens in einer Dimension $N = 1$, $d = 1$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} \end{pmatrix} .$$

Die Beschränkung auf autonome Systeme stellt keine wirkliche Einschränkung dar, da wir in Kap. 3 bereits gezeigt haben, dass man durch Erhöhung der Zahl der unabhängigen Variablen um Eins von einem nichtautonomen System zu einem autonomen System übergehen kann.

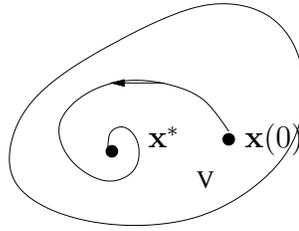
Wir betrachten zunächst die Frage der Stabilität der **Fixpunkte** \mathbf{x}^* , für die $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$ gilt. Man nennt den Fixpunkt **stabil**, falls ein Punkt in der Nähe von \mathbf{x}^* in der Nähe von \mathbf{x}^* bleibt. Präziser:

Definition 1: Der Punkt \mathbf{x}^* heißt “stabil” (oder Liapunov-stabil), wenn zu jeder Umgebung U von \mathbf{x}^* eine weiter Umgebung V von \mathbf{x}^* existiert, so dass alle $\mathbf{x}(t)$ mit $\mathbf{x}(0) \in V$ für alle Zeiten $t \geq 0$ in U bleiben.



Definition 2: Der Punkt \mathbf{x}^* heißt “**asymptotisch stabil**”, wenn eine Umgebung V von \mathbf{x}^* existiert, so dass für alle Trajektorien mit $\mathbf{x}(0) \in V$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^* .$$



Die Nomenklatur von S. 161 war bereits diesen beiden Definitionen angepasst.

Wie bereits mehrfach gesehen, ist die geeignete Methode zur Untersuchung der Stabilität eines Fixpunktes die **Linearisierung** der Gleichung, d.h. man setzt $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{u}$ und erhält nach Taylorentwicklung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^*} u_j + \mathbf{R}_{\mathbf{x}^*}(\mathbf{u})$$

mit dem Restglied $\mathbf{R}_{\mathbf{x}^*}$, das für $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ schneller als $|\mathbf{u}|$ verschwindet. Definiert man die Matrix

$$(\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*})_{ij} := \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^*} ,$$

so lautet die **linearisierte Gleichung**

$$\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*}) \mathbf{u} .$$

Für das Beispiel eines Teilchens im eindimensionalen Potential erhält man

$$\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x^*} & 0 \end{pmatrix} .$$

An den Fixpunkten gilt $v = 0$ und $\partial V / \partial x = 0$.

Analog zur Diskussion auf den S. 161/62 untersucht man nun die EW der Matrix $\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*}$. Die Aussagen a) und b) von S. 162 gelten dann analog

- a) Besitzen **alle** EW von **Df** **negative Realteile**, so ist der Fixpunkt **asymptotisch stabil**.
- b) Existiert mindestens ein EW mit $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, so ist der Fixpunkt **instabil**.
Im Fall c) gilt dagegen:
- c) Besitzt **Df** **keinen** EW mit positivem Realteil, jedoch **mindestens einen** EW mit verschwindendem Realteil, so kann man das "Restglied" immer so wählen, (d.h. verschiedene Funktionen f mit demselben $\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*}$) dass man, je nach Belieben, Stabilität oder Instabilität erhält.

Wir können diese Aussagen hier nicht beweisen. Den **“kritischen Fall”** c) kann man aber leicht an einem Beispiel verdeutlichen. Wählt man in einer Raumdimension eine Reibungskraft $-\eta\dot{x}x^2$ für einen harmonischen Oszillator, so lautet die Bewegungsgleichung: $\ddot{x} + \eta\dot{x}x^2 + \omega_0^2x = 0$ oder

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix} .$$

Das linearisierte Problem hat die EW $\pm i\omega_0$. Für $\eta = 0$ ist der Fixpunkt $(0,0)$ ein Zentrum. Für $\eta > 0$ erhält man eine “schwach anziehende Senke” für $\eta < 0$ eine “schwach abstoßende Quelle”. Das erkennt man, wenn man die zeitliche Änderung \dot{E} der Energie $E = T + V$ betrachtet (s. S. 20). Die Energie spielt hier die Rolle einer **“Liapunov-Funktion”**. Der auf der Methode von Liapunovfunktionen basierende Zugang zur Stabilitätsanalyse wird hier aus Zeitgründen nicht dargestellt. Außerdem gibt es kein allgemeines “Kochrezept” zum Auffinden solcher Funktionen.

Im obigen Beispiel hatte das Hinzufügen der Reibungskraft $-\eta\dot{x}x^2$ mit beliebig kleinem η drastische Auswirkungen. Die Frage, ob sich das Lösungsverhalten in der Umgebung eines Fixpunktes durch Hinzufügen eines kleinen Zusatzterms zur Bewegungsgleichung **qualitativ** ändert, bezeichnet man als Untersuchung der **“strukturellen Stabilität”** der Lösungen. Wir betrachten daher Differentialgleichungen vom Typ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}) ,$$

wobei \mathbf{f} und \mathbf{g} wie immer als “hinreichend glatt” angenommen werden. Die linearisierte Version lautet dann für $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \mathbf{u}(t)$

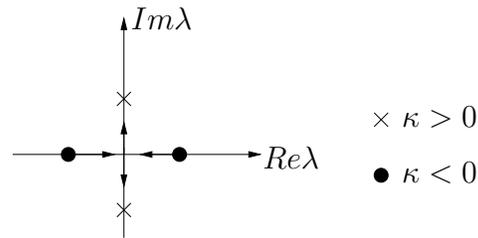
$$\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*} + \epsilon \mathbf{Dg}_{\mathbf{x}^*}) \mathbf{u} .$$

Hat $\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*}$ **keine** EW mit verschwindendem Realteil, so gilt dies für hinreichend kleine ϵ auch für $\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*} + \epsilon \mathbf{Dg}_{\mathbf{x}^*}$, da die Eigenwerte stetig von ϵ abhängen. Man erhält also für hinreichend kleine ϵ dasselbe Verhalten a) oder b) von S. 169 wie im Fall $\epsilon = 0$ und spricht von **struktureller Stabilität**.

Ein “Umschlagen” des Stabilitätsverhaltens kann also nur auftreten, wenn $\mathbf{Df}_{\mathbf{x}^*}$ **mindestens einen EW mit verschwindendem Realteil** hat. Die so genannte **“Bifurktionstheorie”** befasst sich mit der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens bei Änderung eines oder mehrerer Parameter im Differentialgleichungssystem.

Aus Zeitgründen beschränken wir uns auf einfache **Beispiele** in denen das eindimensionale Potential $V(x)$ geändert wird, in dem sich ein Teilchen bewegt.

Mit der Abkürzung $\kappa(x^*) = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x^*}$ lauten die EW von Df (s. S. 170) $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\kappa}$, d.h. für $\kappa > 0$ hat man ein Zentrum und für $\kappa < 0$ Instabilität

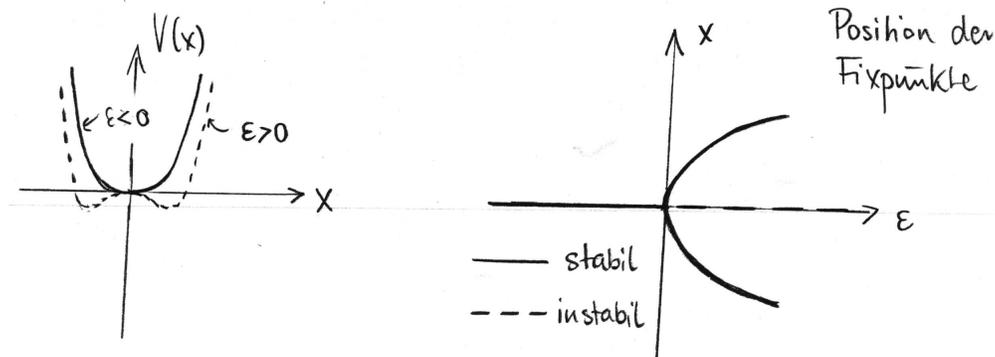


komplexe λ -Ebene

Wie anschaulich klar ist und zu Beginn des Kapitels ausführlich diskutiert wurde, tritt eine Änderung des Stabilitätsverhaltens auf, wenn $\partial^2 V / \partial x^2|_{x^*}$ sein Vorzeichen ändert. Hier drei typische Beispiele

1)

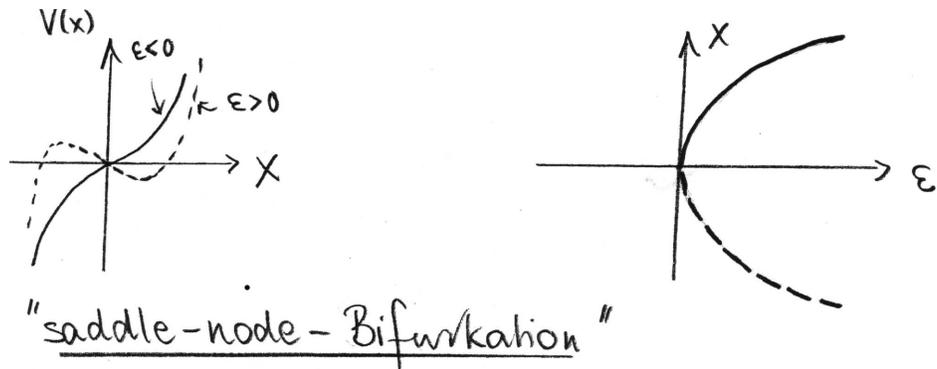
$$V(x) = x^4 - 2\epsilon x^2 : \text{Extrema: } x = 0 \text{ und } x = \pm\sqrt{\epsilon} \text{ für } \epsilon > 0$$



Fügt man zu diesem eindimensionalen Oszillator eine Reibungskraft $-\eta\dot{x}$ hinzu, so heißt er “**Duffing-Oszillator**”.

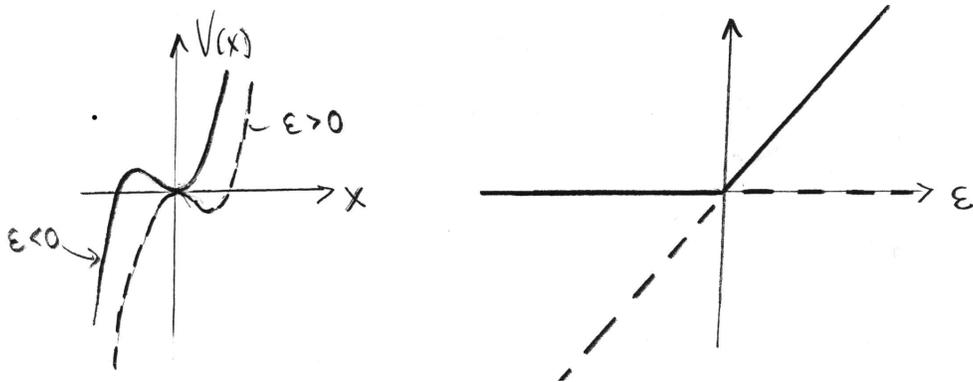
2)

$$V(x) = x^3 - 3\epsilon x : \text{Extrema: } x = \pm\sqrt{\epsilon} \text{ für } \epsilon > 0$$



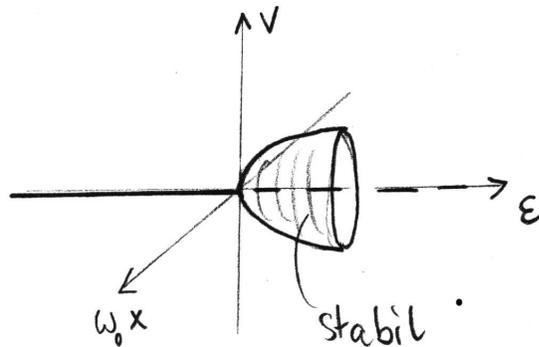
3)

$$V(x) = x^3 - \frac{3}{2}\epsilon x^2 : \text{Extrema: } x = 0, x = \epsilon$$



Hier findet ein **"Austausch"** der Stabilität bei $\epsilon = 0$ statt.

Eine andere Art von Bifurkation tritt z. B. beim van der Pol-Oszillator auf, wenn man die Reibungskraft in der verallgemeinerten Form $-\eta\dot{x}(x^2 - \epsilon a^2)$ schreibt. Für $\epsilon < 0$ ist der Ursprung ein stabiler Fokus, für $\epsilon > 0$ ein instabiler Fokus. Für $\epsilon > 0$ existiert ein (stabiler) **Grenzyklus**. Das Bifunktionsdiagramm hat (für kleine η) folgende Form und heißt **"Hopfbifurkation"**.



Hierbei ist die Definition der **Stabilität einer Bahn** (des Grenzzykklus) nachzutragen:

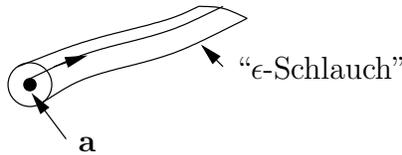
Die Lösung $\mathbf{x}(t, \mathbf{a})$ mit $\mathbf{x}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$ heißt *bahnstabil*, wenn es zu jedem (beliebig kleinen) $\epsilon > 0$ eine Funktion $\tilde{t}(t)$ gibt, so dass

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(\tilde{t}(t), \mathbf{a})| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

gilt.

Manche Autoren nennen die Bahnstabilität auch "**Poincaré-Stabilität**". Liegt Poincaré-Stabilität nicht vor, so heißt die Bahn Poincaré-*instabil*.

Anschaulich gesprochen sollen alle $\mathbf{x}(t, \mathbf{a})$ in einem " ϵ -Schlauch" liegen, wobei aber **nicht** verlangt wird, dass die Punkte auf den verglichenen Bahnen zu **gleichen Zeiten benachbart** bleiben.



Zur Untersuchung der Stabilität einer periodischen Bahn betrachtet man die Zeitentwicklung über einen Zeitraum T (Bahnperiode) und **linearisiert** um die periodische Bahn. Aus $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{a}) + \mathbf{u}(t)$ folgt:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mathbf{a}) + \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mathbf{a})) = (Df_{\mathbf{x}(t, \mathbf{a})}) \mathbf{u} + \mathbf{R}$$

(Wir nehmen hier also für die endlichen Zeiten $0 < t < T$ an, dass für hinreichend kleine $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}|$ auch $|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{a})|$ klein bleibt.)

Die lineare Stabilitätsanalyse führt hier also auf ein Problem vom Typ *B*) von S. 163. Die Stabilität ist dann gesichert, wenn die Abbildung über eine Periode U_T nur EW λ_i mit $|\lambda_i| < 1$ besitzt. Die praktische Durchführung ist meist schwierig, da im Allgemeinen nicht einmal ein analytischer Ausdruck für die periodische Bahn vorliegt (wie z. B. beim van der Pol-Oszillator).

Im letzten Kapitel der Vorlesung werden wir außer der Bahnstabilität noch den allgemeinen Begriff der **Liapunov-Stabilität** verwenden:

Die Lösung $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{a})$ eines Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ heißt Liapunov-stabil, wenn für festes t_0 zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon)$ existiert, so dass $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{a})| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$.

Sie heißt Liapunov-*instabil*, wenn sie nicht Liapunov-stabil ist. Liapunov-Stabilität ist also nichts anderes als **gleichmäßig** stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Sowohl für die Poincaré-Stabilität als auch die Liapunov-Stabilität lassen sich Verschärfungen auf asymptotische Stabilität angeben, worauf hier aber verzichtet wird.

13 Starre Körper II

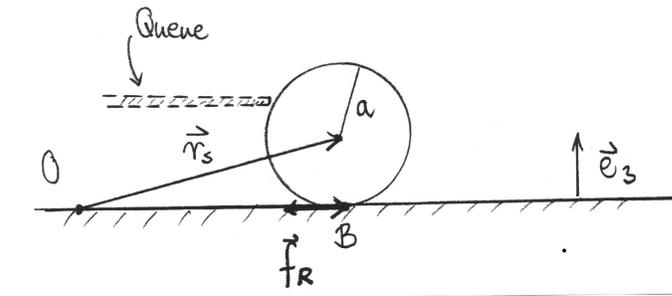
13.1 Eulersche Winkel

Hier werden die Eulerschen Winkel eingeführt und damit die Lagrangefunktion für den schweren Kreisel mit festem Drehpunkt aufgestellt. Für den Spezialfall des schweren **symmetrischen** Kreisel ergeben sich daraus wieder die Resultate von Kap. 8.2.

Der Text steht in jedem Lehrbuch.

13.2 Rollen und Gleiten*

Als einfaches Problem, in dem neben der Rotation auch eine Translationsbewegung stattfindet, betrachten wir das Rollen und Gleiten einer **Kugel** auf einer Ebene (“Billardtisch”).



Die Schwerkraft und die Zwangskraft kompensieren sich und üben keine Gesamtkraft und kein Gesamtdrehmoment aus. Reibungskräfte spielen dagegen eine wichtige Rolle. Wenn beim **Gleiten** die Reibung so klein ist, dass man sie überhaupt nicht berücksichtigen muss, nennt man die Oberfläche “**absolut glatt**”. Ist dagegen nur eine reines **Rollen** ohne Gleiten möglich, und kann man dabei die Rollreibung vernachlässigen, so heißt die Oberfläche “**absolut rauh**”. In beiden Spezialfällen treten die Reibungskräfte nicht explizit auf, so dass ein rein mechanisches Problem vorliegt. Im allgemeinen Fall muss die “**Reibungskraft**” \vec{f}_R im Berührungspunkt B berücksichtigt werden (s. Skizze). Die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt lautet dann, wenn außer der durch die Zwangskraft kompensierten Schwerkraft keine andere Kraft wirkt (“nach dem Stoß mit dem Queue” oder dem “Loslassen der Bowlingkugel”)

$$M\ddot{\vec{r}}_S = \vec{f}_R$$

Für den Spezialfall der Kugel ist auch der Trägheitstensor $I^{(k)}(t) = B_t I B_t^T$ zeitunabhängig, da $I \sim \hat{1}_K$ gilt. Damit ist die Beziehung zwischen \vec{l}_{rot} und $\vec{\omega}$ auch im Inertialsystem k sehr einfach

$$\vec{l}_{\text{rot}} = I_0 \vec{\omega} ,$$

wobei für eine Vollkugel $I_0 = 2Ma^2/5$ gilt.

Damit lautet die Bewegungsgleichung für den Rotationsanteil des Gesamtdrehimpulses $\dot{\vec{l}}_{\text{rot}} = \vec{n}_{\text{tot}}$ (s.S. 96) gemäß obiger Skizze

$$I_0 \dot{\vec{\omega}} = -a \vec{e}_3 \times \vec{f}_R .$$

Gibt man einer Billardkugel einen Stoß, so wird die Kugel i.a. auch gleiten. Daher benötigt man einen Ausdruck für die Gleitreibung (“Coulombsche Reibung”), die bei **nichtverschwindender Gleitgeschwindigkeit** des instantanen Auflagepunktes \vec{r}_B die umgekehrte Richtung der Bewegung des Auflagepunktes hat

$$\vec{f}_R = -\mu M g \hat{v}_B .$$

In diesem “empirischen” Gesetz ist μ der von der Beschaffung der Oberflächen abhängige “Gleitreibungskoeffizient” und \hat{v}_B ist der Einheitsvektor in Richtung der Gleitbewegung. Für die Geschwindigkeit \vec{v}_B des tiefsten Punktes der Kugel gilt, wenn man $\vec{r}_B = \vec{r}_S - a \vec{e}_3$ in die allgemeine Relation $\dot{\vec{r}}_\alpha = \dot{\vec{r}}_S + \vec{\omega} \times (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_S)$ einsetzt

$$\vec{v}_B = \vec{v}_S - a \vec{\omega} \times \vec{e}_3 , \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_S - a \dot{\vec{\omega}} \times \vec{e}_3 .$$

Der Vektor $\vec{r}_B(t)$ entspricht zu **verschiedenen Zeiten verschiedenen Punkten** auf der Kugel. Also wäre es unsinnig $\vec{r}_B(t)$ mit der Zeitableitung von $\vec{r}_B(t) = \vec{r}_S(t) - a \vec{e}_3$ zu identifizieren. Daher verwenden wir im Folgenden auch nicht die Bezeichnung $\dot{\vec{r}}_B(t)$, sondern nur $\vec{v}_B(t) = \vec{v}_S(t) - a \vec{\omega}(t) \times \vec{e}_3$.

Besonders einfach ist der Fall des **reinen Rollens**, d.h. $\vec{v}_B \equiv 0$. Das impliziert die **nichtholonome Nebenbedingung**

$$\vec{v}_S = a \vec{\omega} \times \vec{e}_3 ,$$

die man sich auch leicht geometrisch veranschaulichen kann.

Mit den abgeleiteten Relationen können wir nun die Bewegung der Kugel diskutieren. Wir multiplizieren dazu die Gleichung für $\dot{\vec{\omega}}$ vektoriell mit \vec{e}_3 und verwenden $\vec{e}_3 \times (\vec{e}_3 \times \vec{f}_R) = -\vec{f}_R$, da $\vec{e}_3 \cdot \vec{f}_R = 0$ gilt. Das liefert

$$\vec{f}_R = -\frac{I_0}{a} \dot{\vec{\omega}} \times \vec{e}_3 = -\frac{I_0}{a^2} (\dot{\vec{v}}_S - \dot{\vec{v}}_B) . \quad (3)$$

Damit können wir \vec{f}_R in der in der Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt eliminieren

$$\left(M + \frac{I_0}{a^2} \right) \dot{\vec{v}}_S = \frac{I_0}{a^2} \dot{\vec{v}}_B$$

Division durch $\tilde{M} := M + I_0/a^2$ liefert mit $\gamma := (1 + Ma^2/I_0)^{-1}$

$$\dot{\vec{v}}_S = \gamma \dot{\vec{v}}_B, \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_S(t) = \vec{v}_S(0) + \gamma(\vec{v}_B(t) - \vec{v}_B(0))$$

Für eine Vollkugel gilt $\tilde{M} = 7M/5$ und $\gamma = 2/7$.

Wegen der linearen Beziehung $\dot{\vec{v}}_S = \gamma \dot{\vec{v}}_B$ kann man die NG für den Schwerpunkt als Gleichung für $\vec{v}_B(t)$ schreiben. Für $|\vec{v}_B(t)| \neq 0$ gilt

$$\dot{\vec{v}}_B = \frac{-\mu g}{\gamma} \hat{\vec{v}}_B,$$

und $\dot{\vec{v}}_B = 0$ für $\vec{v}_B = 0$. Also ändert $\vec{v}_B(t)$ seine Richtung nicht, und man kann mit dem Ansatz $\vec{v}_B(t) = u(t)\hat{\vec{v}}_B$ die gesuchte Zeitabhängigkeit erhalten.

$$\vec{v}_B(t) = \begin{cases} \vec{v}_B(0)(1 - t/t_0), & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases},$$

mit $t_0 = \gamma|\vec{v}_B(0)|/(\mu g)$. Zur Zeit t_0 setzt reines Rollen ein. Bis zur Zeit t_0 ist die Bahnkurve des Schwerpunkts i.A. eine Parabel, für $t > t_0$ eine Gerade. Für beliebige Anfangsbedingungen $\vec{v}_S(0)$ und $\vec{\omega}(0)$ kann man mit diesen Ergebnissen die Tricks der Billard- und Bowlingspieler beschreiben (Üb.).

Teil III

Hamiltonsche Mechanik

Mit Hilfe einer sogenannten “Legendre-Transformation” kann man von den Lagrangegleichungen, die für ein holonomes System mit n Freiheitsgraden ein System von n Differentialgleichungen **zweiter** Ordnung bilden, übergehen auf ein System von $2n$ Differentialgleichungen **erster** Ordnung. Dass dies immer möglich ist, haben wir im Laufe der Vorlesung bereits mehrfach verwendet. Bei der Umformung auf die Hamiltonschen Gleichungen geschieht das auf eine wohldefinierte sogenannte “**kanonische**” (mustergültige, maßgebende) Art. Die resultierenden Gleichungen heißen **Hamiltonsche Gleichungen**. In diesen Gleichungen tritt die **Hamiltonfunktion** auf, die wir bereits in der Diskussion über die Energieerhaltung (S. 141) eingeführt haben. Die Variablen in den Hamiltonschen Gleichungen sind neben den verallgemeinerten Koordinaten die **verallgemeinerten Impulse** $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$.

Abgesehen vom “praktischen Nutzen” der Hamiltonschen Mechanik, z.B. in der “Chaostheorie”, ist ihr Studium wichtig, da sie den Ausgangspunkt für die **Quantenmechanik** und die **statistische Mechanik** liefert.

14 Grundkonzepte

14.1 Hamiltonsche Gleichungen

In Teil II der Vorlesung hatten wir die verallgemeinerten Impulse p_i mit Hilfe einer gegebenen Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ definiert als

$$p_i := \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} .$$

Wir nehmen nun an, dass die Determinante von $\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j$ von Null verschieden ist, so dass man die \dot{q}_i durch q und p ausdrücken kann

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t) .$$

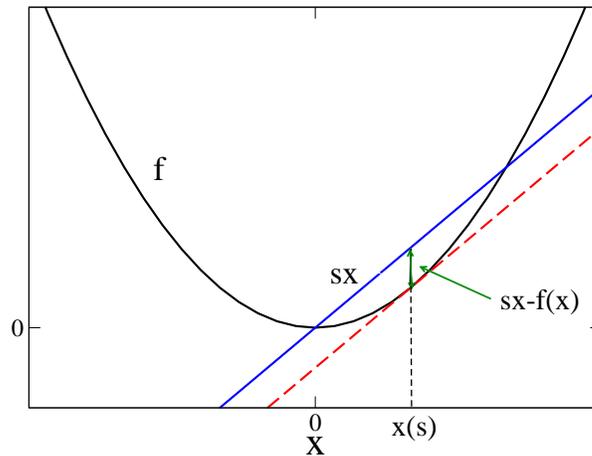
Dann definiert man die Hamiltonfunktion H als (Summationskonvention)

$$H(q, p, t) := p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) .$$

Diese Art von Variablentransformation bezeichnet man als **Legendretransformation**.

Wir erläutern kurz die geometrische Bedeutung für den Fall **einer** Veränderlicher:

Sei $f(x)$ eine konvexe Funktion, d.h. $f''(x) > 0$. Dann ordnet eine Legendretransformation f eine neue Funktion g wie folgt zu:



Man bestimmt $x(s)$ für vorgegebenes s so, dass der vertikale Abstand $G(s, x) = sx - f(x)$ extremal wird

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_s = s - f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{f'(x(s)) = s .}$$

Da f konvex ist, erhält man eine eindeutige Lösung. Nun definiert man die Legendretransformierte g von f als

$$\boxed{g(s) := sx(s) - f(x(s)) \equiv G(s, x(s)) .}$$

Jetzt zurück zum Übergang von der Lagrange-Mechanik zur Hamiltonschen Mechanik. Mit Hilfe des vollständigen Differentials von $L(q, \dot{q}, t)$

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt , \end{aligned}$$

lautet das von Differential von H

$$\begin{aligned} dH &= p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - dL \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} . \end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} ,$$

so folgt

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} ; \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} .$$

Da L als Funktion von q und \dot{q} , die Hamiltonfunktion aber als Funktion von q und p behandelt wird, sollte man genauer bei den partiellen Ableitungen als **Index** angeben, welche Variablen **festgehalten werden**, z. B. bei der letzten Relation

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{q,\dot{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{q,p} .$$

Verwendet man jetzt noch die Lagrangegleichungen $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$, so erhält man die **Hamiltonschen Gleichungen**(HG)

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad i = 1, \dots, n \quad .}$$

Die Hamiltonschen Gleichungen bilden ein System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die Variablen p und q . Wegen ihrer formalen Einfachheit und Symmetrie (s. später) heißen sie auch **“kanonische”** Gleichungen.

Als **Beispiel** für den Übergang von der Lagrangefunktion zur Hamiltonfunktion betrachten wir die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} A_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q, t)$$

mit $A_{ij} = A_{ji}$. Das liefert als kanonische Impulse (s. S. 142)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = A_{ij} \dot{q}_j .$$

Da die kinetische Energie T positiv ist, gilt $\det A > 0$, d.h. A^{-1} existiert, und obige Relation liefert

$$\dot{q}_i = (A^{-1})_{ij} p_j .$$

Wegen $p_i \dot{q}_i = A_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i = 2T$ erhält man

$$H = 2T - (T - V) = T + V ,$$

wobei aber T durch p und q ausgedrückt werden muss

$$T = \frac{1}{2}p_i\dot{q}_i = \frac{1}{2}p_i(A^{-1})_{ij}p_j ,$$

und damit für H

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2}p_i(A^{-1})_{ij}p_j + V(q, t) .$$

Für den einfachsten Fall $n = 1$ und $A = m$ gilt dann

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q, t) .$$

In unserem Beispiel liefert H die **Gesamtenergie** $T+V$. Das gilt immer für skleronome Systeme und “ruhende” Koordinatensysteme aber **nicht** im allgemeinen Fall.

Die Hamiltonfunktion ist eine **Erhaltungsgröße**, falls L nicht explizit von der Zeit abhängt, da

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} ,$$

wie auf S. 142 gezeigt. Wir zeigen dies nochmals unter Verwendung der Hamiltonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= -\dot{p}_i\dot{q}_i + \dot{q}_i\dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \end{aligned}$$

Da H aber nicht immer die Gesamtenergie liefert, kann durchaus $dH/dt = 0$ und $H \neq E$, sowie $H = E$ und $dH/dt \neq 0$ sein (s. Übungsaufgaben).

14.2 Der Phasenraum

Das Folgende ist teilweise bereits aus Diskussionen in den Teilen I und II der Vorlesung bekannt. Den abstrakten mathematischen Raum, der durch die $2n$ “kanonischen” Variablen $q_1, \dots, q_n; p_1 \dots p_n$ gebildet wird, nennt man den **“Phasenraum”**. Ein Punkt im Phasenraum charakterisiert den Zustand des Systems vollständig. Als Funktion der Zeit bewegt sich der Punkt im Phasenraum und erzeugt eine **“Phasenraumtrajektorie”**. Falls H zweimal stetig nach den p und q differenzierbar ist, sind die Lösungen der Hamiltonschen Gleichung eindeutig, d.h. jeder Punkt im Phasenraum bestimmt eine **eindeutige** Phasenraumtrajektorie. Phasenraumtrajektorien können sich deshalb **weder schneiden noch**

berühren. (In speziellen Punkten können allerdings Phasenraumtrajektorien “so aussehen”, als ob sie sich schneiden bzw. berühren (s.u.)).

Die Phasenraumtrajektorien werden durch das $2n$ -dimensionale “Geschwindigkeitsfeld” $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ bestimmt ($\mathbf{X} := (q, p)$)

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} .$$

Die Trajektorien liegen überall tangential zu $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t + \Delta t) &= \mathbf{X}(t) + \dot{\mathbf{X}}(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= \mathbf{X}(t) + \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t)\Delta t + O(\Delta t^2) . \end{aligned}$$

Die Hamiltonschen Gleichungen lauten damit

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) .$$

Die Abbildung

$$\phi_{t,0} : \mathbf{X}(0) \rightarrow \mathbf{X}(t) ,$$

d.h. $p(0), q(0) \rightarrow p(t), q(t)$ bezeichnet man als den **Hamiltonschen Fluss** oder **”Phasenraumfluss”**.

Punkte $\mathbf{X}^{(i)}$ für die $\mathbf{v}(\mathbf{X}^{(i)}, t) \equiv 0$ gilt, heißen **singuläre Punkte** oder **Fixpunkte**. Da $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}^{(i)}$ die Hamiltonschen Gleichungen löst, und die Lösung für das Anfangswertproblem $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^{(i)}$ (nach Voraussetzung) eindeutig ist, besteht die Phasenraumtrajektorie aus einem **einzigen Punkt**, dem Fixpunkt. Andere Trajektorien, die durch “gewöhnliche” Punkte im Phasenraum gehen, können wegen der (angenommenen) Eindeutigkeit der Lösung einen Fixpunkt niemals in **endlicher** Zeit erreichen.

Wir betrachten als Beispiel **ein** Teilchen in einem **eindimensionalen** zeitunabhängigen Potential $V(q)$. Dann ist der Phasenraum wegen $n = 1$ **zweidimensional** und die Phasenraumtrajektorien können vollständig graphisch dargestellt werden.

Da wir annehmen, dass V **zeitunabhängig** ist, gilt

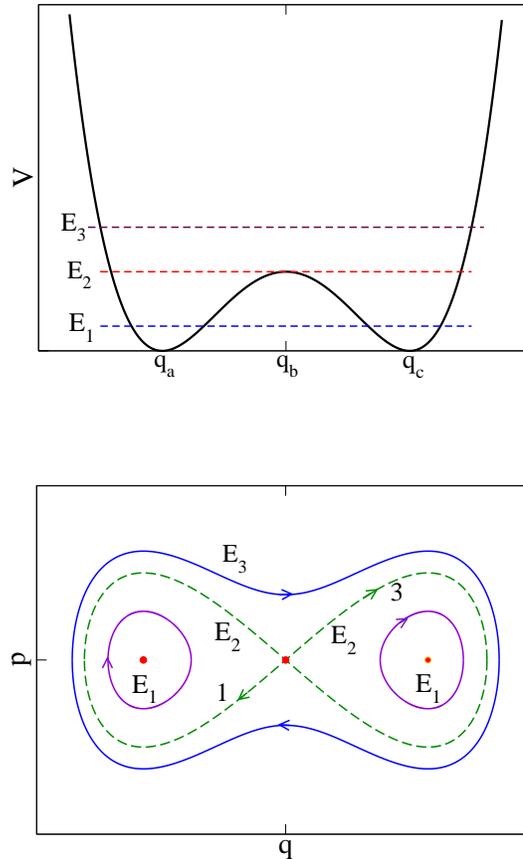
$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) = E = \text{const.}$$

und die Phasenraumtrajektorien sind durch

$$p = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}$$

gegeben.

Für den Spezialfall eines harmonischen Oszillators $H = p^2/2m + \frac{1}{2}c(q - q_0)^2$ sind das Ellipsen. Als ein weiteres instruktives Beispiel betrachten wir ein “Doppelmuldenpotential”



Es treten drei Fixpunkte auf: $(q_a, 0)$, $(q_b, 0)$ und $(q_c, 0)$. Für den Energiewert E_1 sind zwei Phasenraumtrajektorien möglich. Im linken oder rechten “Topf” (je nach Anfangsbedingung $q(0)$). Für E_2 *scheint* sich die Phasenraumtrajektorie zu schneiden. Das ist aber nicht der Fall, denn in Wirklichkeit handelt es sich um **drei** verschiedene Trajektorien, von denen eine der Fixpunkt $(q_b, 0)$ ist. Auf den Trajektorien 1 und 3 erreicht das Teilchen den Fixpunkt **nicht** in endlicher Zeit. Für jede Energie $E_3 > E_2$ besucht das Teilchen beide “Töpfe”. Die drei Trajektorien für $E = E_2$ stellen den Grenzfall dar. Man nennt sie daher “**Separatrix**”.

Im allgemeinen Fall zeitunabhängiger Potentiale V mit $n > 1$ liefert die Energieerhaltung $H(q, p) = T + V = E = const.$ dass die Phasenraumtrajektorien für vorgegebene Energie E auf der $(2n - 1)$ -dimensionalen **Hyperfläche**

$$H(q, p) = E$$

liegen.

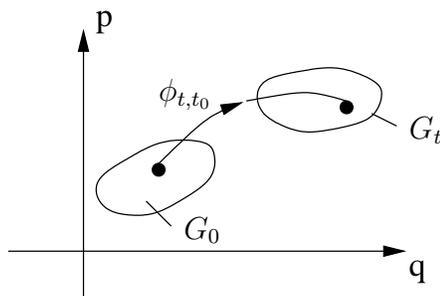
14.3 Liouvillescher Satz

Der Phasenfluss $\phi_{t,t_0} : q(t_0), p(t_0) \rightarrow q(t), p(t)$ hat eine wichtige Eigenschaft, die insbesondere im Rahmen der klassischen statistischen Mechanik von Bedeutung ist.

Wir betrachten dazu ein endliches Gebiet G_0 des Phasenraums. Das (orientierte) Volumen des Gebietes G_0 bezeichnen wir mit Γ_0

$$\Gamma_0 := \int_{G_0} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \equiv \int_{G_0} d\mathbf{X} .$$

Wir fragen nun nach dem Volumen Γ_t des Gebietes G_t , das aus G_0 mit Hilfe der Abbildung ϕ_{t,t_0} entsteht:



Jeder Punkt aus G_0 wird dabei so abgebildet, wie es der Lösung der Bewegungsgleichung unseres mechanischen Systems entspricht. Für Γ_t erhält man mit dem allgemeinen Transformationsgesetz für Volumenintegrale

$$\Gamma_t = \int_{G_t} d\mathbf{X} = \int_{G_0} \det \left(\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}(t_0)} \right) d\mathbf{X} .$$

Der **Liouvillesche Satz** besagt nun, dass die auftretende **Funktionaldeterminante** gleich 1 ist

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}(t_0)} \right) = 1 , \quad \text{d.h.} \quad \Gamma_t = \Gamma_0 .$$

Der Phasenfluss ist “**volumentreu**”.

Zum Beweis betrachten wir zuerst ein allgemeines System von m (nichtlinearen) Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$$

Sei $\mathbf{X}(t)$ die Lösung dieser Gleichungen für den Anfangswert $\mathbf{X}(t_0)$. Für die **Jacobimatrix**

$$M_{ij}(t, t_0) := \frac{\partial X_i(t)}{\partial X_j(t_0)}$$

lässt sich nun formal ein System von **linearen** Differentialgleichungen aufstellen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial X_i(t)}{\partial X_j(t_0)} &= \frac{\partial}{\partial X_j(t_0)} \dot{X}_i(t) = \frac{\partial}{\partial X_j(t_0)} v_i(\mathbf{X}(t), t) \\ &= \frac{\partial v_i(\mathbf{X}(t), t)}{\partial X_k(t)} \frac{\partial X_k(t)}{\partial X_j(t_0)}. \end{aligned}$$

Für vorgegebenes $\mathbf{X}(t_0)$ gilt also mit $A_{ij}(t) := \partial v_i(\mathbf{X}(t), t) / \partial X_j(t)$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \mathbf{M}(t, t_0) \quad , \quad \mathbf{M}(t_0, t_0) = \mathbf{1} .$$

Wie in der Diskussion über Systeme linearer Differentialgleichungen in Kap. 12.4.2 gezeigt, folgt deshalb für die Determinante von $\mathbf{M}(t, t_0)$ (“Wronskideterminante”)

$$\det \mathbf{M}(t, t_0) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{Sp} \mathbf{A}(t') dt' \right\} .$$

Für den **Spezialfall** $\text{Sp} \mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_i} \right) =: \text{div} \mathbf{v} \equiv 0$ gilt also

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial \mathbf{X}(t_0)} \right) = 1 .$$

Für den Fall der Hamiltonschen Gleichungen ist \mathbf{A} eine $2n \times 2n$ -Matrix, die als “Blockmatrix” aus $n \times n$ Matrizen geschrieben werden kann

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{pmatrix} .$$

Wegen der Unabhängigkeit der zweiten partiellen Ableitungen von deren Reihenfolge gilt $\text{Sp} \mathbf{A} = 0$, woraus der Liouvillsche Satz folgt.

Als einfache Anwendung dieser Abbildungseigenschaft kann man den Poincaré’schen “Wiederkehrrsatz” beweisen. (s. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, S.71/72)

14.4 Poissonklammern

Die zeitliche Änderung einer Funktion $F(q(t), p(t), t)$ der kanonischen Variablen lässt sich mit Hilfe der Hamiltonschen Gleichungen wie folgt schreiben

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&= \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&= : \{F, H\}_{q,p} + \frac{\partial F}{\partial t} .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung die so genannten ‘‘Poissonklammer’’ eingeführt, die für beliebige differenzierbare Funktionen $F(q, p, t)$ und $G(q, p, t)$ definiert ist als (in der Definition ausnahmsweise ohne Summationskonvention)

$$\{F, G\}_{q,p} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) . \quad (D)$$

Wir lassen die ‘‘Indizes’’ q, p an der Klammer im Folgenden meist weg.

Aus dieser Definition erhält man für das Poissonsche Klammersymbol folgende ‘‘Rechenregeln’’:

- 1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (Antisymmetrie)
- 2) $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}$, (Linearität)
für beliebige Konstanten c_1 und c_2
- 3) $\{c, f\} = 0$, c beliebige Konstante

Etwas mehr Rechenaufwand erfordert der Beweis der so genannten ‘‘**Jacobi-Identität**’’ (Übungsaufgabe)

$$4) \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 .$$

Außerdem zeigt man leicht, dass

$$5) \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} .$$

Eine wichtige Rolle in der Theorie spielen die mit den kanonischen Variablen gebildeten Poissonklammern (PK)

$$\{q_k, p_l\} = \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_l}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_l}{\partial q_i} = \delta_{ki} \delta_{li} = \delta_{kl} .$$

Die PK von zwei p 's oder zwei q 's verschwinden, da immer einmal nach p und einmal nach q abgeleitet wird. Es gilt also

$$(K): \quad \boxed{\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0 .}$$

Nach diesen formalen Überlegungen kommen wir zum Ausdruck für dF/dt zurück. Wählt man hier $F = q_i$ bzw. $F = p_i$, so lauten die Hamiltonschen Gleichungen ausgedrückt durch Poissonklammern völlig symmetrisch

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} .\end{aligned}$$

Ein wichtiger Punkt ist nun, dass man (K) und die Eigenschaften 1) bis 5) als Rechenregeln benutzen kann, ohne auf die **spezielle Realisierung** (D) des Klammersymbols Bezug zu nehmen.

Wir wollen diese Aussage am harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}cq^2$$

illustrieren. Dann lauten die Bewegungsgleichungen für q und p

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \{q, H\} \\ &= \left\{ q, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}cq^2 \right\} \stackrel{2}{=} \frac{1}{2m}\{q, p^2\} + \frac{1}{2}c\{q, p^2\} \\ &\stackrel{5}{=} \frac{1}{2m} [\{q, p\}p + p\{q, p\}] + \frac{1}{2}c [\{q, q\}q + q\{q, q\}] \\ &\stackrel{K}{=} \frac{p}{m} , \\ \dot{p} &= \left\{ p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}cq^2 \right\} = \frac{1}{2m}\{p, p^2\} + \frac{1}{2}c\{p, q^2\} \\ &= \frac{1}{2m} [\{p, p\}p + p\{p, p\}] + \frac{1}{2}c [\{p, q\}q + q\{p, q\}] \\ &= -cq .\end{aligned}$$

Das sind natürlich die bekannten Bewegungsgleichungen für den harmonischen Oszillator. Bei dieser Ableitung haben wir aber nirgendwo differenziert oder von der Definition (D) Gebrauch gemacht. Folglich würden die Bewegungsgleichungen auch dann gelten, wenn q und p Größen ganz anderer Art und das Klammersymbol $\{, \}$ ganz anders realisiert wäre. Es muss nur

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} ,$$

die Rechenregeln 1) bis 5), sowie die Relationen (K) gelten. Genau dies ist in der **Quantenmechanik** der Fall, wo physikalische Größen durch **lineare Operatoren** in einem Hilbertraum beschrieben werden und das Klammersymbol realisiert ist durch

$$\{A, B\} := \frac{1}{i\hbar}(AB - BA) =: \frac{1}{i\hbar}[A, B] ,$$

den so genannten **Kommutator** $[,]$ der beiden Operatoren. Die abgeleiteten Bewegungsgleichungen für den harmonischen Oszillator gelten daher auch als die Gleichungen für den Orts- und Impulsoperator in der Quantenmechanik (“Heisenbergsche Bewegungsgleichungen”).

Ebenfalls ohne Verwendung der speziellen Realisierung des Klammersymbols erhält man für die Zeitableitung von PK

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\{f(t + \Delta t), g(t + \Delta t)\} - \{f(t), g(t)\}] \\ &\stackrel{2}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\left\{ \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, g(t + \Delta t) \right\} + \left\{ f(t), \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right\} \right] \\ &= \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} \end{aligned}$$

Aus diesem Resultat folgt das **“Poissonsche Theorem”**:

Sind f und g Konstanten der Bewegung, so ist auch $\{f, g\}$ Konstante der Bewegung.

Eine beliebige Funktion f ist dabei **genau dann** eine **Konstante der Bewegung**, wenn

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

gilt. Insbesondere sind Funktionen F , die **nicht explizit** von der Zeit abhängen, genau dann Konstanten der Bewegung, wenn $\{H, F\} = 0$ ist.

Ein mit Hilfe des Poissontheorems produziertes Bewegungsintegral $\{f, g\}$ liefert **nicht** immer wirklich ein “neues” Bewegungsintegral. Es kann vorkommen, dass $\{f, g\}$ sich als Funktion von f und g schreiben lässt: $\{f, g\} = c + F(f, g)$, wobei sowohl die Konstante c als auch F gleich Null sein können. (s. auch Übungsaufgaben).

Im folgenden Kapitel über kanonische Transformationen werden die PK ebenfalls eine wichtige Rolle spielen.

15 Kanonische Transformationen

15.1 Definition

Wie in Kap. II ausführlich diskutiert, gelten nach einer Transformation der verallgemeinerten Koordinaten q auf neue Koordinaten $\bar{q}_i = \bar{q}_i(q, t)$ (“Punkttrans-

formation”) auch für die neuen Koordinaten wieder Lagrangegleichungen, wobei die neue Lagrangefunktion einfach dadurch entsteht, dass man $T - V$ durch die neuen Koordinaten $\bar{q}, \dot{\bar{q}}$ ausdrückt (s. S. 124).

Da im Rahmen der Hamiltonschen Mechanik die $2n$ kanonischen Variablen q und p eine gleichberechtigte Rolle spielen, untersucht man nun Transformationen all dieser $2n$ -unabhängigen Variablen:

$$Q_i = Q_i(q, p, t) ; P_i = P_i(q, p, t) \quad (4)$$

mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen. Wir verlangen, dass die Transformationen lokal **umkehrbar** sind

$$q_i = q_i(Q, P, t) ; p_i = p_i(Q, P, t) .$$

Dazu muss die **Determinante** der $2n \times 2n$ -Jacobimatrix **M**

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

ungleich Null sein.

Anmerkung: Die Summationskonvention wird im folgenden so verwendet, dass lateinische Buchstaben $i, j, k, l, m \dots$ von 1 bis n laufen, während griechische Buchstaben $\alpha, \beta \dots$ von 1 bis $2n$ laufen.

Wir wollen jetzt diese allgemeinen umkehrbaren Transformationen in **zwei** Schritten weiter einschränken. Wir verlangen zuerst, dass die Bewegungsgleichung für Q und P wieder “Hamiltonsche Form” haben, d.h. es soll eine Funktion $K(Q, P, t)$ existieren, so dass

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} ; \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (\text{kwS})$$

gilt. Dabei verlangen wir nur, dass eine solche Funktion K existiert, verlangen aber **nicht**, dass sich K direkt durch H ausdrücken lässt. Eine solche Transformation heißt “**kanonisch im weiteren Sinn**”(kwS), wenn es für **alle** H ein K im neuen Variablensatz gibt. Der Zusatz “im weiteren Sinn” ist wichtig, da “**kanonische Transformationen**” üblicherweise enger definiert werden (s. u.).

In der **praktischen Anwendung** versucht man durch geschickte kanonische Transformationen zu erreichen, dass die $\partial K/\partial Q_i$ und $\partial K/\partial P_i$ “einfachere” Funktionen sind als die $\partial H/\partial q_i$ und $\partial H/\partial p_i$, sodass das neue System gekoppelter Differentialgleichungen leichter gelöst werden kann. Wir werden das später an

Beispielen demonstrieren.

Im Fall von Transformationen, die **nicht explizit von der Zeit abhängen** gilt $K(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t) \equiv \bar{H}(Q, P, t)$, falls die im folgenden abgeleitete Bedingung erfüllt ist. Um dies zu zeigen, schreiben wir die Hamiltonschen Gleichungen in der Form

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H / \partial q \\ \partial H / \partial p \end{pmatrix} =: \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}},$$

wobei hier $\mathbf{1}$ die n -dimensionale Einheitsmatrix ist, und $\mathbf{0}$ die $n \times n$ Matrix, in der alle Einträge Null sind. Eigenschaften der $2n \times 2n$ Matrix \mathbf{J} werden später diskutiert. Setzt man nun $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} Q(q,p) \\ P(q,p) \end{pmatrix}$, so erhält man mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \dot{Y}_\alpha &= \frac{\partial Y_\alpha}{\partial X_\beta} \dot{X}_\beta \\ &= \frac{\partial Y_\alpha}{\partial X_\beta} J_{\beta\gamma} \frac{\partial H}{\partial X_\gamma} = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial X_\beta} J_{\beta\gamma} \frac{\partial \bar{H}}{\partial Y_\delta} \frac{\partial Y_\delta}{\partial X_\gamma}. \end{aligned}$$

In Matrixform lauten die Gleichungen also

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{M}^{-1})^T \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{Y}}.$$

Die Gleichungen haben also genau dann wieder kanonische Form mit $K = \bar{H}$, falls $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{M}^{-1})^T = \mathbf{J}$ d.h.

$$\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}$$

gilt. Aus $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{1}$ folgt $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J} = \mathbf{J}^T$. Damit zeigt mal leicht, dass man in obiger Relation \mathbf{M} und \mathbf{M}^T vertauschen darf. Multiplikation von links mit \mathbf{M}^{-1} liefert $\mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}$. Nach Multiplikation dieser Relation von links und rechts mit \mathbf{J} erhält man $\mathbf{M}^T \mathbf{J} = \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1}$ und Multiplikation mit \mathbf{M} von rechts liefert schließlich $\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}$.

Bevor wir den Fall mit expliziter Zeitabhängigkeit behandeln, zunächst ein einfaches **Beispiel** für den Fall $n = 1$. Wir betrachten die (Rück)transformation

$$\begin{aligned} q &= af(P) \sin Q \\ p &= bf(P) \cos Q, \end{aligned}$$

wobei a und b Konstanten sind und f eine zunächst beliebige Funktion ist. Die zugehörige Jacobimatrix lautet

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} af(P) \cos Q & af'(P) \sin Q \\ -bf(P) \sin Q & bf'(P) \cos Q \end{pmatrix}$$

Elementare Matrixmultiplikation liefert

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T = ab \begin{pmatrix} 0 & ff' \\ -ff' & 0 \end{pmatrix} .$$

Also ist die Transformation kanonisch falls

$$\frac{ab}{2} \frac{df(P)^2}{dP} = 1 , \text{ gilt, d.h. } f(P) = \sqrt{2P/ab + const.}$$

Setzt man die additive Konstante gleich Null und $\alpha := a/b$, so lautet die **kanonische Transformation** damit

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{2\alpha P} \sin Q \\ p &= \sqrt{2P/\alpha} \cos Q . \end{aligned}$$

Für den Fall des **harmonischen Oszillators**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$$

erhält man

$$K(Q, P) = \frac{1}{2m} \frac{2P}{\alpha} \cos^2 Q + \frac{1}{2}m\omega_0^2(2\alpha P) \sin^2 Q .$$

Für die spezielle Wahl $\alpha = 1/m\omega_0$ ergibt sich

$$K(Q, P) = \omega_0 P \quad \text{unabhängig von } Q .$$

Die zugehörigen Hamiltonschen Gleichungen haben die **einfache Form**

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega_0 , \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 .$$

Die Lösungen lauten

$$Q(t) = \omega_0 t + Q_0 , \quad P(t) = P_0 ;$$

Das liefert wieder die altbekannte Lösung des harmonischen Oszillators mit zwei freien Konstanten

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + Q_0) .$$

Zur Untersuchung, ob eine allgemeine Transformation (4) kwS ist, erweist es sich als nützlich (4) als eine "Punkttransformation" eines Systems von **2n-Freiheitsgraden** anzusehen. Es ist nämlich (formal) möglich, die HG für ein System von n Freiheitsgraden aufzufassen als Lagrangegleichungen für ein System von $2n$ Freiheitsgraden, falls man folgende Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t)$ wählt (deren **Wert** auf der Bahn mit $L(q, \dot{q}, t)$ übereinstimmt)

$$\mathcal{L}(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) := \dot{q}_k p_k - H(q, p, t) .$$

\mathcal{L} hängt also gar nicht von \dot{p} ab. Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} & ; & & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_k} &= \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} &= p_k & ; & & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_k} &= 0 . \end{aligned}$$

lauten die $2n$ Lagrangegleichungen für \mathcal{L}

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \\ 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_k} = -\dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} . \end{aligned}$$

Das sind, wie behauptet, gerade die Hamiltonschen Gleichungen des betrachteten Systems.

Mit Hilfe der Resultate aus Kap.II können wir jetzt sofort eine hinreichende Bedingung angeben, dass die Transformation kwS ist:

Für $\bar{\mathcal{L}}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t) := \mathcal{L}(q(Q, P, t), p(Q, P, t), \dot{q}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t), \dot{p}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t), t)$ gelten mit obigen Lagrangegleichungen auch

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_k} \right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial Q_k} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{P}_k} \right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial P_k} = 0 .$$

Falls nun $\bar{\mathcal{L}}$ die Form

$$\bar{\mathcal{L}}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t) = c(\dot{Q}_k P_k - K(Q, P, t)) + \frac{d}{dt} F(Q, P, t) \quad (5)$$

hat, wobei $c \neq 0$ eine beliebige Konstante ist, so folgt mit dem Resultat von S. 134, dass durch Hinzufügen einer vollständigen Zeitableitung einer Funktion

der verallgemeinerten Koordinaten zur Lagrangefunktion die Lagrangegleichungen **nicht** geändert werden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial Q_i} \right] = \dot{P}_i + \frac{\partial K}{\partial Q_i} \\ 0 &= \frac{1}{c} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{P}_i} \right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial P_i} \right] = -\dot{Q}_i + \frac{\partial K}{\partial P_i} \end{aligned}$$

Also ist (2) eine hinreichende Bedingung, dass (1) kwS ist. Man kann zeigen, dass (2) auch notwendig dafür ist. Diese Aussage wird aber im folgenden nicht benötigt.

Es ist nun üblich als **“kanonische Transformation”** (im engeren Sinn) nur solche Transformationen vom Typ (5) zuzulassen, für die $c = 1$ ist. Wir definieren also:

Eine lokal umkehrbare Transformation (4) der kanonischen Variablen heißt **kanonisch(k)**, falls Funktionen $K(Q, P, t)$ und $F(Q, P, T)$ existieren, so dass

$$\dot{q}_k p_k - H(q, p, t) = \dot{Q}_k P_k - K(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F(Q, P, t) \quad (6)$$

gilt. Mit dieser Definition folgt dann offensichtlich $k \rightarrow \text{kwS}$, aber nicht umgekehrt.

Drückt man in (6) die \dot{q}_k durch die Zeitableitungen der neuen Variablen aus

$$\dot{q}_k = \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} \right)_{P,t} \dot{Q}_l + \left(\frac{\partial q_k}{\partial P_l} \right)_{Q,t} \dot{P}_l + \left(\frac{\partial q_k}{\partial t} \right)_{Q,P},$$

so folgt für dF/dt

$$\frac{dF(Q, P, t)}{dt} = \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} p_k - P_l \right) \dot{Q}_l + \frac{\partial q_k}{\partial P_l} p_k \dot{P}_l + K - H + p_k \frac{\partial q_k}{\partial t}.$$

Also gilt

$$\frac{\partial F}{\partial Q_l} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} p_k - P_l; \quad \frac{\partial F}{\partial P_l} = \frac{\partial q_k}{\partial P_l} p_k; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = K - H + P_k \frac{\partial q_k}{\partial t}.$$

Wie wir später im Detail diskutieren, legt die letzte der Beziehungen K fest. Wir zeigen aber zuerst, dass die “Integrabilitätsbedingungen” $\partial^2 F / \partial Q_i \partial Q_j = \partial^2 F / \partial Q_j \partial Q_i$ etc. ein Kriterium liefern, um zu prüfen, ob eine Transformation (4) kanonisch ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial Q_m} \frac{\partial F}{\partial Q_l} - \frac{\partial}{\partial Q_l} \frac{\partial F}{\partial Q_m} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} \frac{\partial p_k}{\partial Q_m} - \frac{\partial q_k}{\partial Q_m} \frac{\partial p_k}{\partial Q_l} =: (Q_l, Q_m)_{q,p} \\ &= A_{kl} C_{km} - A_{km} C_{kl} \end{aligned}$$

Die Terme mit den zweiten Ableitungen der q_k heben sich heraus. Am Ende der ersten Zeile haben wir die so genannten **”Lagrangeklammern”** $(\ , \)_{q,p}$ eingeführt, die allgemein definiert sind als

$$(u, v)_{q,p} := \frac{\partial q_k}{\partial u} \frac{\partial p_k}{\partial v} - \frac{\partial q_k}{\partial v} \frac{\partial p_k}{\partial u} .$$

In Matrixschreibweise lautet obige Bedingung

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} .$$

Weiter muss gelten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial P_m} \left(\frac{\partial F}{\partial P_l} \right) - \frac{\partial}{\partial P_l} \left(\frac{\partial F}{\partial P_m} \right) = \frac{\partial q_k}{\partial P_l} \frac{\partial p_k}{\partial P_m} - \frac{\partial q_k}{\partial P_m} \frac{\partial p_k}{\partial P_l} = (P_l, P_m) \\ &= B_{kl} D_{km} - B_{km} D_{kl} \end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\mathbf{D}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} .$$

Und schließlich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial P_m} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_l} \right) - \frac{\partial}{\partial Q_l} \left(\frac{\partial F}{\partial P_m} \right) = \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} \frac{\partial p_k}{\partial P_m} - \delta_{ml} - \frac{\partial q_k}{\partial P_m} \frac{\partial p_k}{\partial Q_l} = (Q_l, P_m) - \delta_{ml} \\ &= A_{kl} D_{km} - B_{km} C_{kl} - \delta_{ml} \end{aligned}$$

d.h.

$$\mathbf{D}^T \mathbf{A} - \mathbf{B}^T \mathbf{C} = \mathbf{1} .$$

Verwendet man jetzt wieder die $2n \times 2n$ -Matrix \mathbf{J}

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} ,$$

so kann man wegen

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{D} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{C} - \mathbf{D}^T \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

die Integrabilitätsbedingungen zusammenfassen als

$$\boxed{\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}} , \tag{7}$$

oder mit Hilfe der Lagrangeklammern

$$\boxed{(Q_k, Q_l) = 0 ; (P_k, P_l) = 0 ; (Q_k, P_l) = \delta_{kl} .} \tag{8}$$

Wir haben hiermit gezeigt, dass die Erfüllung von (7) bzw. (8) ein **notwendiges** Kriterium dafür ist, dass die Transformation (4) kanonisch ist. Andererseits ist das Erfülltsein der Integrabilitätsbedingungen auch **hinreichend** für die lokale Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung für F (s. z. B. Grauert-Lieb III). Also gilt:

Eine Transformation (4) ist genau dann kanonisch, wenn (7) (oder in anderer Form geschrieben (8)) erfüllt ist.

Wir diskutieren das Kriterium zuerst in der Schreibweise (7). Dies ist die Bedingung an die Jacobimatrix \mathbf{M} , die wir bereits im Spezialfall von Transformationen kennengelernt haben, die nicht **explizit** von der Zeit abhängen. Matrizen, die diese Bedingung erfüllen, nennt man **“symplektisch”**. Benutzt man den Produktsatz für Determinanten, so folgt wegen $\det \mathbf{J} \neq 1$ (durch Vertauschung der ersten n Spalten mit den letzten n Spalten sieht man, dass $\det \mathbf{J} = 1$ gilt) aus (7)

$$(\det \mathbf{M})^2 = 1 .$$

Von den beiden Möglichkeiten $\det \mathbf{M} = \pm 1$ liegt für symplektische Matrizen immer das obere Vorzeichen vor (s. z. B. G. Hammermesh, Group Theory and its Application to Physical Problems, S.402 für einen Beweis oder in Arnold MM-CM den analogen Beweis mit Hilfe von Differentialformen (oder auch Scheck 2.28 (S.102/103)))

$$\det \mathbf{M} = 1 .$$

Symplektische Matrizen haben folgende Eigenschaften:

a) Mit \mathbf{M} ist auch \mathbf{M}^{-1} symplektisch:

$$(\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{J} .$$

b) Mit \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 ist auch $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$ symplektisch:

$$(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2)^T \mathbf{J} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_1^T \mathbf{J} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2^T \mathbf{J} \mathbf{M}_2 = \mathbf{J} .$$

Da auch die Einheitsmatrix symplektisch ist, bilden die symplektischen Matrizen eine **Gruppe**. Unter geeigneten Annahmen über Definitionsbereiche bilden die **kanonischen Transformationen** ebenfalls eine **Gruppe**.

Mit Hilfe der Überlegungen zum Liouvillschen Satz können wir jetzt unter Verwendung von (7) zeigen, dass **jeder Phasenfluss eine kanonische Transformation darstellt**. Sei

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \phi_i^{(a)}(q(t_0), p(t_0), t, t_0) \\ p_i(t) &= \phi_i^{(b)}(q(t_0), p(t_0), t, t_0) \end{aligned}$$

die Lösung der HG irgendeines Systems von n Freiheitsgraden. Dann ist die Transformation

$$Q_i := \phi_i^{(a)}(q, p, t, t_0) ; P_i := \phi_i^{(b)}(q, p, t, t_0)$$

kanonisch. Zum Beweis verwenden wir, die Differentialgleichung für die Matrix $M_{\alpha,\beta}(t, t_0) = \partial X_\alpha(t)/\partial X_\beta(t_0)$ von S. 185. (Die Nomenklatur ist hier nicht ganz konsistent mit dem ersten Teil des Abschnitts, nach dem wir M^{-1} statt M schreiben sollten.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{M}(t, t_0) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{M}(t, t_0) ; \quad \mathbf{M}(t_0, t_0) = \mathbf{1} \\ \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{J} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{X}} \right) =: \mathbf{JS} . \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{S} der zweiten Ableitungen von H ist **symmetrisch**. Mit $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ und $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{1}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M}) &= \dot{\mathbf{M}}^T \mathbf{J} \mathbf{M} + \mathbf{M}^T \dot{\mathbf{J}} \mathbf{M} \\ &= \mathbf{M}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{A}) \mathbf{M} = \mathbf{M}^T (\mathbf{S} \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mathbf{J}^2 \mathbf{S}) \\ &= \mathbf{M}^T (\mathbf{S} - \mathbf{S}) \mathbf{M} = \mathbf{0} . \end{aligned}$$

Also folgt

$$\mathbf{M}^T(t, t_0) \mathbf{J} \mathbf{M}(t, t_0) = \mathbf{M}^T(t_0, t_0) \mathbf{J} \mathbf{M}(t_0, t_0) = \mathbf{1} \mathbf{J} \mathbf{1} = \mathbf{J} .$$

Das ist der Liouvillesche Satz. Von dieser kanonischen Transformation hatten wir bereits gezeigt, dass $\det \mathbf{M} = 1$ gilt.

Ein weiteres nützliches Kriterium, wann eine Transformation (4) kanonisch ist, kann man aus (8) erhalten. Dazu benötigt man einen Hilfssatz:

Seien u_1, \dots, u_{2n} ein Satz von $2n$ unabhängigen Funktionen der Variablen q und p . Dann gilt

$$(u_\alpha, u_\mu)_{q,p} \{u_\alpha, u_\nu\}_{q,p} = \delta_{\mu,\nu} ,$$

wobei $(,)$ und $\{, \}$ die Lagrange- bzw. Poissonklammer sind. Der Beweis diene als Übungsaufgabe. Wählt man nun als $(u_1, \dots, u_{2n}) = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$ so lautet diese Beziehung

$$(Q_k, u_\mu)_{q,p} \{Q_k, u_\nu\}_{q,p} + (P_k, u_\mu)_{q,p} \{P_k, u_\nu\}_{q,p} = \delta_{\mu,\nu} .$$

Damit beweist man dann leicht folgende Aussage (Übungsaufgabe):

Eine Transformation (4) ist **genau dann kanonisch**, wenn

$$\boxed{\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 ; \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 ; \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} .}$$

Dies ist in der Praxis ein wichtiges Kriterium um zu prüfen, ob eine Transformation kanonisch ist.

Aus dieser Eigenschaft der Poissonklammern folgt die **Invarianz der Poissonklammern** bezüglich des Satzes von **kanonischen Variablen**, nach denen abgeleitet wird:

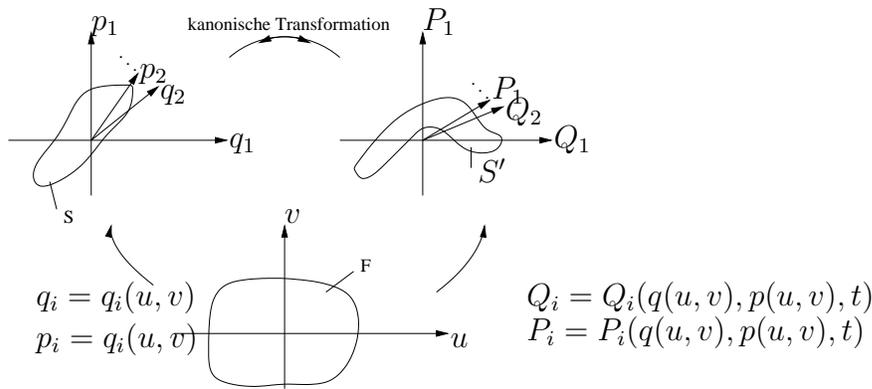
$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &= \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial Q_j} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k} \{Q_j, Q_k\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \{Q_j, P_k\}_{q,p} \right) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial P_j} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k} \{P_j, Q_k\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \{P_j, P_k\}_{q,p} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_j} = \{f, g\}_{Q,P} \end{aligned}$$

Dabei sind $f = f_{(1)}(q, p, t) = f_{(1)}(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) = f_{(2)}(Q, P, t)$ und analog g , völlig beliebig. Beschränkt man also die Transformation (1) auf **kanonische** Transformationen, so kann man die “Indizes” an den PK weglassen.

Ein analoges Resultat gilt für die Lagrangeklammern: Seien die q_i und p_i Funktionen der zwei Variablen u und v und es gilt nach analoger Rechnung

$$\begin{aligned} (u, v)_{q,p} &= \frac{\partial q_k}{\partial u} \frac{\partial p_k}{\partial v} - \frac{\partial q_k}{\partial v} \frac{\partial p_k}{\partial u} \\ &= \frac{\partial Q_i}{\partial u} \left[(Q_i, Q_j)_{q,p} \frac{\partial Q_j}{\partial v} + (Q_i, P_j)_{q,p} \frac{\partial P_j}{\partial v} \right] \\ &\quad - \frac{\partial Q_i}{\partial v} \left[(Q_i, Q_j)_{q,p} \frac{\partial Q_j}{\partial u} + (Q_i, P_j)_{q,p} \frac{\partial P_j}{\partial u} \right] \\ &= \frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial Q_i}{\partial v} \frac{\partial P_i}{\partial u} = (u, v)_{Q,P} \end{aligned}$$

Da man die Lagrangeklammern als Summe von 2×2 Determinanten auffassen kann, folgt hiermit die **Invarianz** der “**Summe der orientierten, auf die q_j, p_j -Ebenen projizierten Flächen**”



S und S' sind zweidimensionale Flächen im $2n$ -dimensionalen Phasenraum

$$\int_S dq_i dp_i = \int_F (u, v)_{q,p} dudv = \int_F (u, v)_{Q,P} dudv = \int_{S'} dQ_i dP_i$$

unter kanonischen Transformationen (“erste Poncarèsche Integralinvariante”). Außer dieser und der bereits diskutierten Invarianz des $2n$ -dimensionalen Phasenraumvolumens gibt es weitere Integralvarianten für alle geradzahigen “Zwischendimensionen” (s. z. B. Goldstein oder Arnold).

15.2 Erzeugende von kanonischen Transformationen

Eine allgemeine Transformation vom Typ (4) erfordert die Angabe von $2n$ Funktionen von jeweils $2n$ Variablen. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass **kanonische Transformationen** durch die Angabe **einer** Funktion von $2n$ Variablen charakterisiert werden können. Diese Funktion nennt man **Erzeugende** der kanonischen Transformation (KT).

Wir hatten eine Transformation vom Typ (4) als KT bezeichnet, falls Funktion F und K existieren, so dass

$$\begin{aligned} \frac{dF(Q, P, t)}{dt} &= \dot{q}_i p_i - \dot{Q}_i P_i + K(Q, P, t) - H(q, p, t) \quad \text{oder} \quad (9) \\ \frac{d\tilde{F}(q, p, t)}{dt} &= \dot{q}_i p_i - \dot{Q}_i P_i + f(q, p, t), \end{aligned}$$

gilt, wobei in der zweiten Version $\tilde{F}(q, p, t) = F(Q(q, p, t), P(q, p, t), t)$ und $f(q, p, t) = K(Q(q, p, t), P(q, p, t), t) - H(q, p, t)$ ist.

Wir betrachten im folgenden Funktionen $S: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die die Determinante gebildet aus der $n \times n$ -Matrix der zweiten partiellen Ableitungen nicht verschwindet

$$\det \left(\frac{\partial^2 S(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right) \neq 0 .$$

Als Variable x nehmen wir die "alten" q und als Variable y einen Satz R von n der $2n$ "neuen" Variablen Q und P

$$(R_1, R_2, \dots, R_n) = (Q_{i_1} \dots Q_{i_k} ; P_{j_1}, \dots, P_{j_{n-k}}) ,$$

d.h. k Variable von "Q"-Typ und $n - k$ Variable vom "P"-Typ (wobei wir auch $k = 0$ und $k = n$ zulassen). Die Indexmenge $(i_1, \dots, i_k)(j_1, \dots, j_{n-k})$ sei eine beliebige Aufteilung der Menge $(1, 2, \dots, n)$, d.h. liegt ein Q_i in R , so liegt P_i **nicht** in R und umgekehrt. Das sind genau 2^n Möglichkeiten.

Wir untersuchen nun, ob S die Rolle von F bzw. \tilde{F} übernehmen kann. Dazu bilden wir die Zeitableitung

$$\frac{dS(q, R, T)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{l=1}^k \frac{\partial S}{\partial Q_{i_l}} \dot{Q}_{i_l} + \sum_{m=1}^{n-k} \frac{\partial S}{\partial P_{j_m}} \dot{P}_{j_m} + \frac{\partial S}{\partial t} .$$

Wir schreiben daher die "alten" Impulse p als

$$p_i(q, R, t) = \frac{\partial S(q, R, t)}{\partial q_i} ; \quad i = 1, \dots, n .$$

Wegen der Annahme $\det(\partial^2 S / \partial q \partial R) \neq 0$ lassen sich diese n Gleichungen lokal nach den R_i auflösen

$$R_i = R_i(q, p, t) , \quad i = 1, \dots, n .$$

Um den zweiten Term auf der rechten Seite von (9) zu reproduzieren, formen wir ihn um

$$-\dot{Q}_i P_i = - \sum_{l=1}^k \dot{Q}_{i_l} P_{i_l} + \sum_{m=1}^{n-k} \left[Q_{j_m} \dot{P}_{j_m} - \frac{d}{dt} (Q_{j_m} P_{j_m}) \right] .$$

Der Term aus der vollständigen Zeitableitung kann dann auf die linke Seite gebracht werden.

Wir wählen daher

$$P_{i_l} = -\frac{\partial S(q, R, t)}{\partial Q_{i_l}} \quad ; \quad l = 1, \dots, k$$

$$Q_{j_m} = \frac{\partial S(q, R, t)}{\partial P_{j_m}} \quad ; \quad m = 1, \dots, n - k .$$

Setzt man (nach dem Differenzieren) für $R = R(q, p, t)$ ein, so ist damit die Transformation vollständig festgelegt. Außerdem ist (9) erfüllt mit

$$\tilde{F}(q, p, t) = S(q, R, t)|_{R=R(q,p,t)} - \sum_{m=1}^{n-k} P_{j_m}(q, p, t) Q_{j_m}(q, R, t) \Big|_{R=R(q,p,t)}$$

$$f(q, p, t) = \frac{\partial S(q, R, t)}{\partial t} \Big|_{R=R(q,p,t)} = K - H .$$

Also ist die Transformation **kanonisch** und S heißt **Erzeugende der kanonischen Transformation**.

Für den schwierigeren Beweis, dass **jede** kanonische Transformation durch einen der oben diskutierten 2^n Fälle erzeugt werden kann, verweisen wir auf Arnold MMCM.

Als **Spezialfall** betrachten wir den Fall $k = 0$ genauer, d.h. die Erzeugende ist von der Form $S = S(q, P, t)$. Wie eben gezeigt, **erzeugt jede Funktion dieses Art, für die** $\det(\partial^2 S / \partial q \partial P) \neq 0$ gilt, durch

$$p_i = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_j = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_j}$$

eine **kanonische Transformation**, wobei für die “neue Hamiltonfunktion” K gilt

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} \Big|_{q=q(Q,P,t)} .$$

Als erstes **Beispiel** betrachten wir Funktionen der Form

$$S(q, P, t) = f_k(q, t) P_k + g(q, t) .$$

Differentiation liefert

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial f_k(q, t)}{\partial q_i} P_k + \frac{\partial g(q, t)}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = f_i(q, t) ,$$

sowie $\partial^2 S / \partial q_i \partial P_j = \partial f_j(q, t) / \partial q_j$. Die Bedingung $\det(\partial^2 S / \partial q \partial P)$ ist also erfüllt, falls

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \neq 0 .$$

ist. Die Transformation auf die Q_i enthält nur q und t , aber **nicht** p , hat also die Form einer **Punkttransformation**. Für $g = \text{const.}$ erzeugt die untersuchte Funktion S tatsächlich die allgemeine Punkttransformation. Um das zu zeigen, gehen wir zur Lagrangeformulierung zurück und betrachten die Punkttransformation

$$\bar{q}_i = f_i(q, t) \quad ; \quad \dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} .$$

Dann ergibt sich als Transformationsgesetz für die kanonisch konjugierten Impulse

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_k} \frac{\partial \dot{\bar{q}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \frac{\partial f_k(q, t)}{\partial q_i} .$$

Für die Wahl $g = \text{const.}$ stimmt das mit der Transformationsgleichung $p_i = \frac{\partial f_k}{\partial q_i} P_k$ (S. 124) überein.

Die partielle Ableitung von S nach t liefert $K - H$. Aus $\partial S(q, P, t) / \partial t = \frac{\partial f_k}{\partial t} P_k + \partial g / \partial t$ folgt für den Fall $g = \text{const.}$ (Punkttransformation)

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \left. \frac{\partial f_k(q, t)}{\partial t} \right|_{q=q(Q, P, t)} P_k .$$

Für Punkttransformationen, die **nicht explizit zeitabhängig** sind, stimmt also (wie bereits früher erwähnt) der Wert von K und H **überein**. Für den Fall einer "Galileitransformation" : $f_i(q, t) = q_i + v_i t$ gilt andererseits z. B.

$$K = H + v_k P_k .$$

Als **zweites Beispiel** von Funktionen S betrachten wir

$$S(q, P, \varepsilon) = q_j P_j + \varepsilon G(q, P, \varepsilon) ,$$

wobei G differenzierbar von ε abhängen soll. Es gilt

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} .$$

Für $\varepsilon = 0$ ist $\partial^2 S / \partial q \partial P$ die Einheitsmatrix und $\det(\partial^2 S / \partial q \partial P)|_{\varepsilon=0} = 1$. Für hinreichend kleine ε ist das Kriterium $\det(\partial^2 S / \partial q \partial P) \neq 0$ also sicher erfüllt. Die erzeugte kanonische Transformation lautet

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \varepsilon \left. \frac{\partial G(q, P, \varepsilon)}{\partial P_i} \right|_{P_i = P_i(q, p, \varepsilon)} \\ P_i &= p_i - \varepsilon \left. \frac{\partial G(q, P, \varepsilon)}{\partial q_i} \right|_{P_i = P_i(q, p, \varepsilon)} . \end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 0$ ist das offensichtlich die **Identität**. Bis zu Termen **linear** in ε gilt mit $G_0(q, p) := G(q, p, 0)$

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \varepsilon \frac{\partial G_0(q, p)}{\partial p_i} + O(\varepsilon^2) \\ P_i &= p_i - \varepsilon \frac{\partial G_0(q, p)}{\partial q_i} + O(\varepsilon^2) . \end{aligned}$$

Solche KT nennt man **infinitesimale** kanonische Transformationen. Oder unter Verwendung von Poissonklammern

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i}{d\varepsilon} &= \{q_i, G_0\} = \left(\frac{\partial G_0}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial G_0}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) q_j =: D(G_0)q_i \\ \frac{dP_i}{d\varepsilon} &= \{p_i, G_0\} = D(G_0)p_i . \end{aligned}$$

Dabei wurde der ‘‘Differentialoperator’’ $D(G_0)$ eingeführt. Wählt man für $G_0(q, p)$ die **Hamiltonfunktion** $H(q, p, t_0)$ und $\varepsilon = \Delta t$, so liefert die durch $\Delta t H$ erzeugte infinitesimale kanonische Transformation gerade die Lösung der Hamiltonschen Gleichungen für diesen infinitesimalen Zeitschritt. Wir hatten bereits ganz allgemein gezeigt, dass der Hamiltonsche Fluss ϕ_{t, t_0} eine kanonische Transformation liefert. **Ihre Erzeugende für einen infinitesimalen Zeitschritt ist also durch die Hamiltonfunktion gegeben.**

Wir betrachten als nächstes, wie sich eine beliebige Funktion $f(Q(\varepsilon), P(\varepsilon))$ der kanonischen Variablen bei der infinitesimalen Transformation ändert. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} f(Q(\varepsilon), P(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{dQ_i}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{dP_i}{d\varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial G_0}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial G_0}{\partial q_i} \\ &= \{f, G_0\} = D(G_0)f . \end{aligned}$$

Daraus folgt die wichtige Aussage:

Eine Funktion $G_0(q, p)$ ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn die durch G_0 erzeugte infinitesimale kanonische Transformation die Hamiltonfunktion invariant lässt.

Der Beweis folgt sofort aus $dH/d\varepsilon = \{H, G_0\}$ und $dG_0/dt = \{G_0, H\}$ (S. 187).

An dieser Stelle könnten wir jetzt im Rahmen der Hamiltonschen Mechanik die Ergebnisse des Kap. 11 Symmetrien und Erhaltungssätze (Noethersches Theorem) nochmals ableiten, tun dies aber aus Zeitgründen nicht.

Als einfachstes **Beispiel** betrachten wir $n = 1$ und $G_0(q, p) = p$, d.h.

$$Q = q + \varepsilon \quad ; \quad P = p .$$

Aus $\{H, G_0\} = \{H, p\} = \partial H / \partial q = 0$ folgt $p = \text{const.}$ und umgekehrt: Aus der Translationssymmetrie folgt (wie gehabt) die Impulserhaltung. Für den Differentialoperator $D(p)$ erhält man

$$D(p) = \frac{\partial}{\partial q} .$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer kurzen Bemerkung über die Hintereinanderschaltung von infinitesimalen kanonischen Transformation zu einer **endlichen** kanonischen Transformation. Mit dem eingeführten Differentialoperator $D(G_0)$ lautet die infinitesimale Transformation

$$Q_i(\varepsilon) = (1 + \varepsilon D(G_0))q_i \quad , \quad P_i(\varepsilon) = (1 + \varepsilon D(G_0))p_i .$$

Setzt man $\varepsilon = \alpha/n$, mit ganzzahligen n und festem (“endlichen”) α , so ist ε im Limes $n \rightarrow \infty$ “infinitesimal” und man erhält im Grenzfall unendlicher Iteration

$$\begin{aligned} Q_i(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} D(G_0)\right)^n q_i = e^{\alpha D(G_0)} q_i \quad , \\ P_i(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} D(G_0)\right)^n p_i = e^{\alpha D(G_0)} p_i \quad . \end{aligned}$$

(allgemein gilt $F(Q(\alpha), P(\alpha)) = e^{\alpha D(G_0)} f(q, p)$.)

16 Hamilton-Jacobi-Gleichung

Mit Hilfe der Ergebnisse des letzten Abschnittes ergibt sich eine neue (auf den ersten Blick komplizierte) Strategie zur Lösung der Hamiltonschen Gleichungen. Wir verwenden dazu eine Erzeugende vom Typ $k = 0$, d.h. der Form $S(q, P, t)$

$$p_i = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_i = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_i} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} .$$

Die Idee ist nun, S so zu wählen, dass K möglichst einfach wird

$$K \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_i = 0 \quad , \quad \dot{P}_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n .$$

Das führt auf die so genannte **Hamilton-Jacobi-Gleichung**

$$\boxed{H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 .}$$

Das ist eine **partielle Differentialgleichung** für die Funktion S . Wir setzen im Folgenden keine Kenntnisse aus der Theorie partieller Differentialgleichungen voraus. Hier ist das ‘‘Kochrezept’’ zur Lösung:

Da nur Ableitungen von S in der Hamilton-Jacobi-Gleichung vorkommen, aber S nicht selbst, ist mit S auch $S + c$ eine Lösung, wobei c eine beliebige Konstante ist. Man versucht nun (wir werden das an einem Beispiel verdeutlichen) ein so genanntes **‘‘vollständiges Integral’’** der Hamilton-Jacobi-Gleichung zu konstruieren. Das ist eine Lösung mit $n + 1$ unabhängigen Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_n, c$ der Form

$$S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + c \quad , \quad \text{mit} \quad \det \left(\frac{\partial^2 S(q, \alpha, t)}{\partial q \partial \alpha} \right) \neq 0 .$$

Man setzt dann mit n **beliebigen Konstanten** β_i

$$p_i := \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \quad ; \quad \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i (= Q_i = \text{const.}) .$$

Letztere Gleichungen lassen sich wegen $\det(\partial^2 S / \partial q \partial \alpha) \neq 0$ nach den q_i auflösen

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t) \quad ; \quad p_i = \left. \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \right|_{q=q(\alpha, \beta, t)} .$$

Dann bilden diese Funktionen $q(t), p(t)$, die von den $2n$ Konstanten α, β abhängen, die **allgemeine Lösung** der ursprünglichen Hamiltonschen Gleichungen. Das lässt sich durch direkte Rechnung leicht verifizieren

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} , \\ 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S(q(\alpha, \beta, t), \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} . \end{aligned}$$

Subtraktion liefert

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \dot{q}_j \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_j} = 0 .$$

Wegen $\det(\partial^2 S / \partial \alpha \partial q) \neq 0$ folgt daraus $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$. Mit $H + \partial S / \partial t = 0$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} \right) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \end{aligned}$$

Die vollständige Zeitableitung von $S(q, t)$ ist durch die Lagrangefunktion gegeben

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = p_i \dot{q}_i - H = L .}$$

Also ist die Funktion $S(t) := S(q(\alpha, \beta, t), \alpha, t)$ gerade die **Wirkung** als Funktion des Endpunktes der durchlaufenen Bahn

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^t L(q(t'), \dot{q}(t'), t') dt' .$$

Diese Feststellung hilft aber praktisch nicht weiter, da wir die "Bahn" ja erst berechnen müssen. Diesem Problem wollen wir uns jetzt zuwenden.

Wir beschränken uns auf **autonome** Systeme $H = H(q, p)$, d.h. $\partial H / \partial t = 0$. Das wichtigste Anwendungsfeld für die Hamilton-Jacobi-Gleichung sind Systeme, die sich mit einem "**Separationsansatz**" lösen lassen. Die wesentliche Idee lässt sich leicht bei der *Abspaltung der Zeitabhängigkeit* klarmachen. Für autonome Systeme lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 .$$

Wir machen den **Ansatz**

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) + \varphi(\alpha, t) .$$

Eingesetzt liefert das

$$H \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} \right) = -\frac{d\varphi}{dt} .$$

Da die linke Seite von q aber nicht von t abhängt, während die rechte Seite nur von t aber nicht von q abhängt, müssen beide Seiten konstant sein

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1 = -\frac{d\varphi}{dt}.$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung für φ lässt sich leicht lösen: $\varphi(t) = c - \alpha_1 t$, d.h.

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t + c.$$

Die Funktion $W(q, \alpha)$ heißt **charakteristische Funktion**. Sie genügt der partielle Differentialgleichung:

$$\boxed{H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1 \quad (= E),}$$

wobei die Konstante α_1 aus offensichtlichen Gründen meist mit E bezeichnet wird. Diese Gleichung wird auch häufig als **Hamilton-Jacobi-Gleichung** bezeichnet.

Die Angabe eines vollständigen Integrals ist immer dann auf Integrationen zurückzuführen, wenn sich verallgemeinerte Koordinaten so finden lassen, dass eine vollständig separierte Lösung von der Form

$$W(q) = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \dots + W_n(q_n)$$

existiert (Die Abhängigkeit von den Konstanten α ist dabei nicht explizit angeschrieben). Bei den **Beispielen** beginnen wir mit dem einfachsten Fall der eindimensionalen Bewegung im Potential $V(x)$, d.h. $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. Das liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + 2mV(x) &= 2mE \\ \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial x} &= \pm \sqrt{2m(E - V(x))}, \text{ d.h.} \\ W(x, E) &= \pm \int^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx' \\ S(x, E, t) &= \pm \int^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx' - Et. \end{aligned}$$

Man setzt nun $\partial S / \partial E = \beta$, d.h.

$$\pm m \int^x \frac{dx'}{\sqrt{2m(E - V(x'))}} - t = \beta.$$

Setzt man $\beta = -t_0$, so ist das genau das Ergebnis von Kap. I, das $t(x)$ liefert. In einfachen Spezialfällen konnten wir die Integration geschlossen durchführen und die Umkehrfunktion, d.h. $x(t)$ berechnen (Pot. der Form $V(x) = V_0 + V_1x + \frac{V_2}{2}x^2$). Als weiteres Beispiel betrachten wir ein Teilchen, das sich in der $x_1 - x_2$ -Ebene im Potential

$$\begin{aligned} V &= V_0 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) + b \frac{x_1}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^3} \\ &= V_0(r) + b \frac{\cos \varphi}{r^2} \end{aligned}$$

bewegt. Für $b = 0$ und $V_0(r) \sim 1/r$ ergibt sich als Spezialfall das Keplerproblem. Aus der Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r, \varphi)$ folgt mit $p_r = m\dot{r}$ und $p_\varphi = r^2\dot{\varphi}$ die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r, \varphi) .$$

Damit lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die charakteristische Funktion $W(r, \varphi)$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + V(r, \varphi) = E .$$

Für obige Form des Potentials folgt nach Multiplikation mit $2mr^2$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + 2bm \cos \varphi = r^2 \left[2m(E - V_0(r)) - \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 \right] .$$

Machen wir jetzt den Ansatz $W = W_1(r) + W_2(\varphi)$, so folgt

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi} \right)^2 + 2bm \cos \varphi = r^2 \left[2m(E - V_0(r)) - \left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 \right] .$$

Die linke Seite hängt nur von φ ab, die rechte nur von r (das gilt für alle Potential der Form $V_0(r) + b(\varphi)/r^2$), d.h. mit $b(\varphi) = b \cos \varphi$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi} \right)^2 + 2mb(\varphi) &= \alpha_2 , \\ \left[2m(E - V_0(r)) - \left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 \right] &= \frac{\alpha_2}{r^2} . \end{aligned}$$

Diese beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen können einfach integriert werden

$$W_1(\varphi) = \int^{\varphi} \sqrt{\alpha_2 - 2mb(\varphi')} d\varphi' ,$$

$$W_1(r) = \int^r \sqrt{2m(E - V_0(r')) - \frac{\alpha_2}{r'^2}} dr' .$$

Das vollständige Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung lautet damit (die additive Konstante spielt keine Rolle)

$$S(r, \varphi; E, \alpha_2; t) = -Et + \int^{\varphi} \sqrt{\alpha_2 - b(\varphi')m} d\varphi' + \int^r \sqrt{2m(E - V_0(r')) - \frac{\alpha_2}{r'^2}} dr .$$

Daraus folgt nun mit Hilfe des ‘‘Kochrezepts’’ von S. 204 die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int^r \frac{m dr'}{\sqrt{2m(E - V_0(r')) - \frac{\alpha_2}{r'^2}}} = \beta_1 ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2} \int^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 - 2mb(\varphi')}} d\varphi' - \frac{1}{2} \int^r \frac{1}{r'^2} \frac{dr'}{\sqrt{2m(E - V_0(r')) - \frac{\alpha_2}{r'^2}}} = \beta_2 .$$

Dies ist eine implizite Form der allgemeine Lösung. Die Auflösung nach r und φ (nach Ausführung der Integrationen) ist i. A. nicht geschlossen durchführbar. Für $b = 0$ erhält man die bekannten Resultate aus Kap. I. Die Konstante $\alpha_2 \geq 0$ hat dann die Bedeutung des Quadrates des Drehimpulses um die x_3 -Achse.

Es gibt einfache allgemeine Fälle, in denen ein vollständiger Separationsansatz zum Ziel führt, z. B. für Hamiltonfunktionen der Form

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n H_i(q_i, p_i, t) .$$

Es gibt aber auch Fälle, in denen dies durch geschickte Wahl der Koordinaten gelingt. Ohne dies zu vertiefen, erwähnen wir folgende dreidimensionale Potentiale für die die Bewegungsgleichungen nur über die Hamilton-Jacobi-Gleichung gelöst werden konnten

a)

$$V(\vec{r}) = \frac{a}{|\vec{r}|} - Fx_3 .$$

Die Separation gelingt in ‘‘**parabolischen Koordinaten**’’ (ξ, η, φ)

$$\xi := |\vec{r}| + x_3 ; \quad \eta := |\vec{r}| - x_3 ; \quad \varphi \text{ Azimuthwinkel} .$$

b)

$$V(\vec{r}) = \frac{c_1}{|\vec{r} - a\vec{e}_3|} + \frac{c_2}{|\vec{r} + a\vec{e}_3|}.$$

Die Separation gelingt in “**elliptischen Koordinaten**” (ξ, η, φ)

$$\xi = |\vec{r} + a\vec{e}_3| + |\vec{r} - a\vec{e}_3| \quad ; \quad \eta = |\vec{r} + a\vec{e}_3| - |\vec{r} - a\vec{e}_3| \quad ; \quad \varphi \text{ Azimutwinkel.}$$

Mechanische Systeme, die im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie durch einen vollständigen Separationsansatz gelöst werden können, heißen “**integrabel**”. Wie bereits erwähnt, stellen solche Systeme bereits im Fall $n = 2$ die **Ausnahme** dar. Falls das untersuchte System eine Hamiltonfunktion besitzt, die *wenig von der eines integrablen Systems abweicht*, so liefert die Hamilton-Jacobi-Theorie den Startpunkt für die *störungstheoretische Bahndlung* dieser Abweichung. Die dabei meist verwendete Koordinatenwahl wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

17 Winkel- und Wirkungsvariable

Die Wahl der kanonischen Variablen, die in diesem Abschnitt besprochen wird, hat in mehreren Epochen der Entwicklung der Mechanik eine wichtige Rolle gespielt:

- 1) In der **Himmelsmechanik** (“Störungstheorie”)
- 2) Bei der Formulierung der **Quantisierungsvorschriften** in der “alten” Quantentheorie (Bohr-Sommerfeld)
- 3) Im Rahmen der moderneren Entwicklungen in der klassischen Mechanik (“KAM”-Theorem, “**Chaos**”, ...)

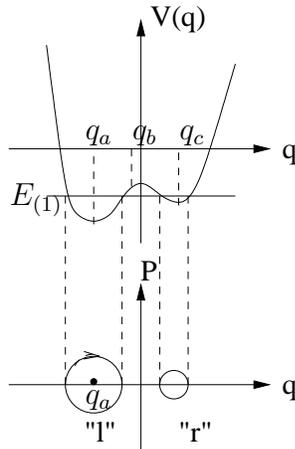
Wir beginnen mit der Beschreibung eindimensionaler autonomer Systeme.

17.1 Definition für ein- und mehrdimensionale Systeme

a) **eindimensionale Systeme:**

α) “Libration” (“Oszillation”)

Wir betrachten als Beispiel ein Zweimuldenpotential



Für $H(q, p) = E_{(1)}$ kann die Phasenraumtrajektorie "l" oder "r" vorliegen: Das Teilchen oszilliert im linken oder im rechten "Potentialtopf". Die Einführung von Winkel- und Wirkungsvariable erfolgt für beide Fälle unabhängig von einander. Wir betrachten z. B. den Fall "l", lassen aber diesen "Topfindex" im Weiteren gleich wieder weg. Es sei also $V(q_0) < E < V(q_b)$. Die Phasenraumtrajektorie ist gegeben durch

$$p(q) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))} .$$

Es erweist sich nun als nützlich den Punkt im Phasenraum bei seinem Umlauf um q_a durch einen **Winkel** $\varphi \in [0, 2\pi]$ zu charakterisieren. Anstelle der kanonischen Variable q, p möchte man vermöge einer kanonischen Transformation auf Variable φ, I übergehen:

$$\begin{aligned} q &= q(\varphi, I) = q(\varphi + 2\pi, I) \\ p &= p(\varphi, I) = p(\varphi + 2\pi, I) , \end{aligned}$$

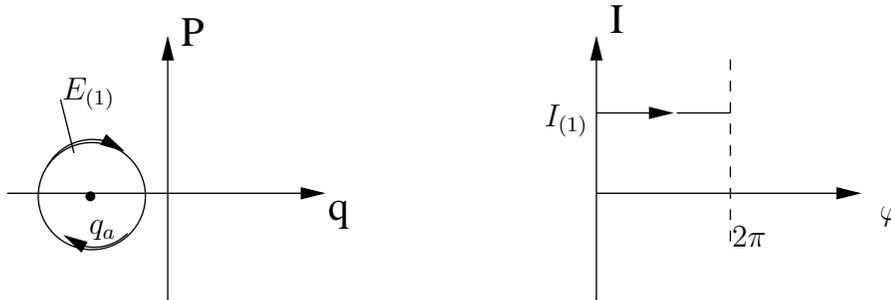
wobei das zweite Gleichheitszeichen den Winkelcharakter von φ zum Ausdruck bringt. Die kanonische Transformation (deren Existenz wir später zeigen werden), soll so beschaffen sein, dass I eine Konstante der Bewegung ist

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial K(\varphi, I)}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow K(\varphi, I) = h(I) , \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial h(I)}{\partial I} =: \omega(I) . \end{aligned}$$

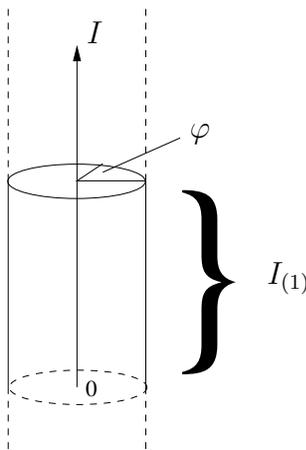
Daraus folgt, dass $\varphi(t)$ **linear** mit der Zeit anwächst

$$\varphi(t) = \omega(I)t + \varphi_0 .$$

Da nach Konstruktion φ bei einem Umlauf um 2π anwächst, folgt aus $\varphi(T) - \varphi(0) = \omega(I)T = 2\pi$, dass $\omega(I) = \partial h(I)/\partial I$ die Bedeutung der **Frequenz der Oszillation** (“Libration”) hat. In diesen neuen Koordinaten ist die Phasenraumtrajektorie besonders einfach ($\varphi_0 = 0$)



Um den Winkelcharakter von φ deutlich zu machen, verwendet man zur graphischen Darstellung des (φ, I) -Phasenraums häufig eine **Zylinderoberfläche**

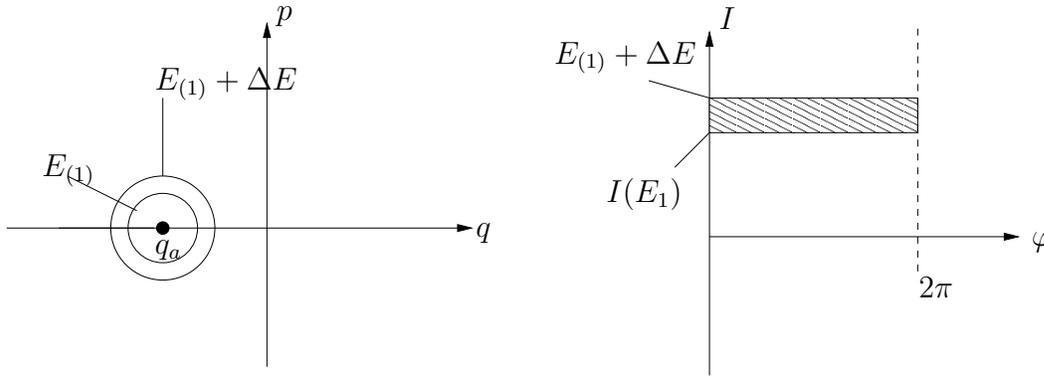


Die Phasenraumtrajektorie auf der Zylinderoberfläche ist dann ein Kreis um die Zylinderachse.

Bevor wir die Existenz der geforderten kanonischen Transformation durch Angabe einer Erzeugenden zeigen, wollen wir die Bedeutung von $I(q, p)$ anschaulich erhalten. Da I eine Konstante der Bewegung sein soll, kann I nur über die einzige Konstante der Bewegung, nämlich H , von q und p abhängen

$$I(q, p) = I(H(q, p)) ,$$

d.h. der Wert von $I_{(1)}$ in unserer Skizze ist ein Funktion von $E_{(1)}$. Wir wählen nun zwei benachbarte Werte der Energie und betrachten wie die Fläche des Ringobjektes in der $q - p$ -Ebene in die $\varphi - I$ -Ebene abgebildet wird.



Da die Transformation $(q, p) \rightarrow (\varphi, I)$ **kanonisch** sein soll, muss die schraffierte Fläche gleich der des Ringes zwischen den “Ellipsen” (in der Abbildung Kreise) sein. Bezeichnet man das von der “Ellipse” $H(q, p) = E$ eingeschlossene “**Phasenraumvolumen**” mit $\Phi(E)$ (Fläche der “Ellipse”), so bedeutet dies

$$\Phi(E + \Delta E) - \Phi(E) = 2\pi(I(E + \Delta E) - I(E)) .$$

Das ergibt im Limes $\Delta E \rightarrow 0$

$$\frac{d\Phi(E)}{dE} = 2\pi \cdot \frac{dI(E)}{dE} .$$

Wählt man die Integrationskonstante willkürlich gleich Null, so ergibt sich

$$\boxed{I(E) = \frac{1}{2\pi}\Phi(E) .}$$

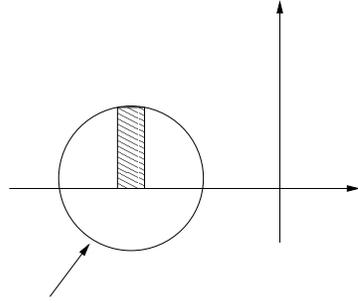
Zum Nachweis, dass die Transformation $(q, p) \rightarrow (\varphi, I)$ kanonisch ist, betrachten wir ein Integral längs der Phasenraumtrajektorie in der q, p -Ebene. Sei q in einer Umgebung von q_0 , so definieren wir

$$S(q, I) = \int_{q_0}^q p(q', I) dq' .$$

Die Bezeichnung W statt S wäre angebrachter um zu zeigen, dass $S(q, I)$ Lösung der **zeitunabhängigen** Hamilton-Jacobi-Gleichung ist

$$H(q, \partial S / \partial q) = E(I) .$$

Integriert wird dabei auf der Trajektorie mit Phasenraumvolumen $2\pi I$



$$H(q, p) = E \quad ; \quad I = \frac{1}{2\pi} \Phi(E) \quad , \quad \text{d.h.} \quad E = \underbrace{\Phi^{-1}}_{\text{Umkehrfunktion}}(2\pi I) = E(I)$$

Die Funktion $S(q, I)$ dient uns jetzt als Erzeugende der postulierten kanonischen Transformation $(q, p) \rightarrow (\varphi, I)$

$$p = \frac{\partial S(q, I)}{\partial q} = p(q, I) \quad ; \quad \varphi = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I} .$$

Aus der ersten Beziehung erhält man die hereingesteckte Bedeutung von I zurück. Mit $p(q, I) = \pm \sqrt{2m(E(I) - V(q))}$ folgt nach Quadrieren

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad \Rightarrow \quad I(q, p) = \frac{1}{2\pi} \Phi \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) .$$

Da S nicht explizit zeitabhängig ist, gilt $K = H$. Die Umkehrung der Beziehung $I = \frac{1}{2\pi} \Phi(H)$ liefert also $K(\varphi, I)$

$$K(\varphi, I) = \Phi^{-1}(2\pi I) =: h(I) = E(I) .$$

Damit erhält man die postulierte Zeitabhängigkeit

$$\varphi(t) = \omega(I)t + \varphi_0 \quad ; \quad I(t) = \text{const.}$$

Um zu verifizieren, dass φ bei einem Umlauf, wie postuliert, um 2π zunimmt, betrachten wir die Veränderung von $S(q, I)$ im "Großen". Nach einem Umlauf ändert sich der Wert von S um $\Delta S(I)$:

$$\Delta S(I) = \oint pdq = \Phi(E(I)) = 2\pi I .$$

Also ist S eine "mehrdeutige" Funktion, die nur bis auf Vielfache von $\Phi(E(I))$ definiert ist. Das spielt für die Ableitung nach q keine Rolle, führt aber dazu, dass (wie zu erwarten) φ auch nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π festgelegt ist.

Die zentrale Rolle spielt also die von der Phasentrajektorie in der $q - p$ -Ebene eingeschlossene Fläche

$$\Phi(E) = \int_F dqdp = \oint pdq .$$

Ist die Funktion $\Phi(E)$ bekannt, so kann man die Schwingungsfrequenz bestimmen, **ohne** $q(t)$ explizit zu berechnen. Aus $\omega(I) = dh/dI = dE/dI = (dI/dE)^{-1}$ und $I = \Phi/2\pi$ folgt

$$\boxed{\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dE} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dE} \oint pdq .}$$

Differenziert man $p(q, E) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}$ explizit nach E , so ist das gerade wieder die Relation für die Schwingungsdauer von S.19.

Für den **harmonischen Oszillator** $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}cq^2$ folgt aus

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/c} = 1$$

$$\Phi(E) = \pi \sqrt{2mE} \sqrt{2E/c} = 2\pi E / \sqrt{c/m} .$$

Aus obiger Beziehung folgt das (altbekannte) Resultat $\omega = \omega_0 = \sqrt{c/m}$. Der Zusammenhang zwischen E und I ist hier besonders einfach: $I = E/\omega_0$.

Mit Hilfe der Erzeugenden erhält man für den harmonischen Oszillator

$$\varphi = \arcsin \left[q \sqrt{m\omega_0/2I} \right] \quad \text{d.h.} \quad q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}} \sin \varphi .$$

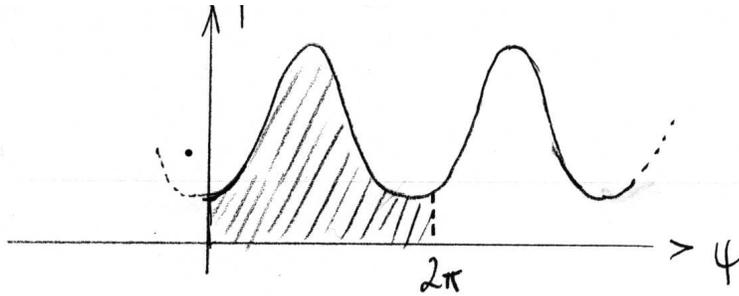
Identifiziert man φ mit Q und I mit P , so ist das genau die kanonische Transformation von S.191.

β) **Rotation:**

Für den Fall, dass die eindimensionale Bewegung eine Rotation ist, wie z. B. beim sich überschlagenden Pendel, ist die "Ortskoordinate" in der Hamiltonfunktion bereits eine Winkelkoordinate φ . Die Hamiltonfunktion ist periodisch in φ mit der Periode 2π

$$H(\varphi + 2\pi n, p) = H(\varphi, p) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Die Trajektorie im Phasenraum sind ebenfalls periodisch mit der Periode 2π .



Man kann nun wieder völlig analog vorgehen. Die Rolle von I spielt (bis auf eine beliebige additive Konstante) jetzt $(1/2\pi) \cdot$ (gestrichelte Fläche).

Bemerkung: Außer bei der “freien Rotation” stimmen φ und ψ **nicht** überein.

b) mehrdimensionale Systeme:

Für ein System von n Freiheitsgraden, das im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie durch einen **vollständigen Separationsansatz** gelöst werden kann, d.h. **integrabel** ist, lassen sich analog Winkel- und Wirkungsvariable

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n ; I_1, \dots, I_n$$

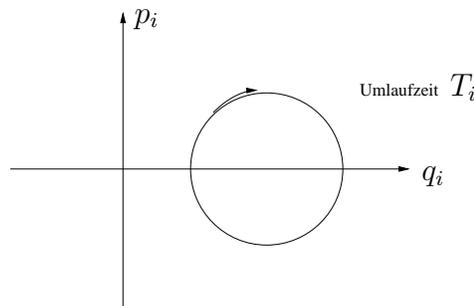
eingeführen. Das vollständige Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha_1$ lautet also

$$W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1 \dots \alpha_n) = W_1(q_1, \alpha_1 \dots \alpha_n) + W_2(q_2, \alpha_1 \dots \alpha_n) + \dots + W_n(q_n, \alpha_1 \dots \alpha_n) .$$

Differentiation nach den q_i liefert die p_i ,

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, \alpha_1 \dots \alpha_n)}{\partial q_i} .$$

Diese Gleichung liefert die Bahngleichung der **Projektion** der Trajektorie im Phasenraum auf die (q_i, p_i) -Ebene, z. B.



Umläuft der projizierte Punkt einmal die geschlossene Bahn, so bedeutet das i.A. **nicht**, dass das System zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt.

Man definiert nun analog zum eindimensionalen Fall

$$I_i := \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i, \alpha_1 \dots \alpha_n) dq_i = I_i(\alpha_1 \dots \alpha_n) .$$

Aus der Unabhängigkeit der Variablenpaare (q_i, p_i) folgt, dass man auf diese Weise n unabhängige Funktionen der α erhält. Man drückt nun in $W(q, \alpha)$ die α durch die I aus (die Umkehrbarkeit wird angenommen).

$$\begin{aligned} \tilde{W}(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n) &:= W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1(I_1, \dots, I_n), \dots, \alpha_n(I_1, \dots, I_n)) \\ &= \tilde{W}_1(q_1, I_1 \dots I_n) + \dots + \tilde{W}_n(q_n, I_1, \dots, I_n) \end{aligned}$$

und verwendet die Funktion $\tilde{W}(q, I)$ als **Erzeugende** der kanonischen Transformation $(q_1, \dots, q_n, p_1 \dots p_n) \rightarrow (\varphi_1, \dots, \varphi_n, I_1 \dots I_n)$ auf Winkel und Wirkungsvariable

$$p_i = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_i} = \frac{\partial \tilde{W}_i(q_i, I_1 \dots I_n)}{\partial q_i} \quad ; \quad \varphi_i = \frac{\partial \tilde{W}(q_1 \dots q_n, I_1 \dots I_n)}{\partial I_i} .$$

Da \tilde{W} keine explizite Zeitabhängigkeit hat, gilt

$$H = \alpha_1(I_1, \dots, I_n) = K(I_1, \dots, I_n) .$$

Die Hamiltonschen Gleichungen in Winkel- und Wirkungskoordinaten lauten dann samt Lösung

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -\frac{\partial K}{\partial \varphi_i} = 0 \quad ; \quad I_i(t) = I_i = \text{const.} \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{\partial K}{\partial I_i} =: \omega_i(I_1, \dots, I_n) \quad ; \quad \Rightarrow \varphi_i(t) = \omega_i t + \varphi_i^{(0)} . \end{aligned}$$

Dabei erhält man die n Frequenzen $\omega_i(I_1, \dots, I_n)$. Der Winkelcharakter der φ_i folgt nun wiederum aus

$$\begin{aligned} \tilde{W}_i(q_i, I_1 \dots I_n) &= \int_{q_i^0}^{q_i} p_i(\tilde{q}_i, I_1, \dots, I_n) d\tilde{q}_i \quad , \text{ d.h.} \\ \varphi_i = \frac{\partial \tilde{W}(q, I)}{\partial I_i} &= \frac{\partial}{\partial I_i} \sum_{j=1}^n \int_{q_j^0}^{q_j} p_j(\tilde{q}_j, I_1, \dots, I_n) d\tilde{q}_j . \end{aligned}$$

Nimmt man nun an, dass die Bewegung **periodisch** ist, d.h. nach n_1 "Umläufen" von q_1 , n_2 Umläufen von q_2 , etc. befindet sich das System wieder am selben Punkt im Phasenraum, so liefert obige Relation

$$\Delta\varphi_i = \frac{\partial}{\partial I_i} \left(\sum_{j=1}^n 2\pi n_j I_j \right) = 2\pi n_i .$$

d.h. der Winkel φ_i ändert sich bei n_1 Umläufen um $2\pi n_i$.

Später wird am Beispiel $n = 2$ diskutiert, dass man durch infinitesimale Änderung der Parameter immer erreichen kann, dass ein integrables System periodische Trajektorien liefert.

Man erhält die Frequenzen ω_i der individuellen Koordinaten dadurch, dass man H durch die Wirkungsvariablen ausdrückt und differenziert, d.h. ohne die vollständige zeitabhängige Lösung des Problems.

Als **Beispiel** betrachten wir die Bewegung im $2d$ -Potential von S. 208 für $b(\varphi) = \text{const.}$ und die spezielle Wahl

$$V_0(r) = \frac{-k}{r} + \frac{\lambda^2}{2mr^2} .$$

Für negative Energien führt der Massenpunkt eine **finite** Bewegung aus. Die "Ortskoordinaten" r und φ sind dann vom Schwingungs- bzw. Rotationstyp. Mit $\alpha_2 \rightarrow M^2$ erhält man

$$W(r, \varphi, E, M) = M\varphi \pm \int^r \sqrt{2m \left(E + \frac{k}{r'} - \frac{M^2 + \lambda^2}{r'^2} \right)} dr' ,$$

$$p_r(r, E, M) = \pm \sqrt{2m \left(E + \frac{k}{r} - \frac{M^2 + \lambda^2}{r^2} \right)} ; \quad p_\varphi = M .$$

Nach der Vorschrift von S. 216 liefert das $(r, \varphi \hat{=} 1, 2)$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m \left(E + \frac{k}{r} - \frac{M^2 + \lambda^2}{r^2} \right)} dr = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2m}{(-E)}} - \sqrt{M^2 + \lambda^2} ,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = M .$$

Man kann nun E leicht durch I_1 und I_2 ausdrücken

$$E(I_1, I_2) = -\frac{mk^2/2}{\left(I_1 + \sqrt{I_2^2 + \lambda^2} \right)^2} .$$

Das liefert die beiden Frequenzen $\omega_i = \partial E / \partial I_i ; \quad i = 1, 2$

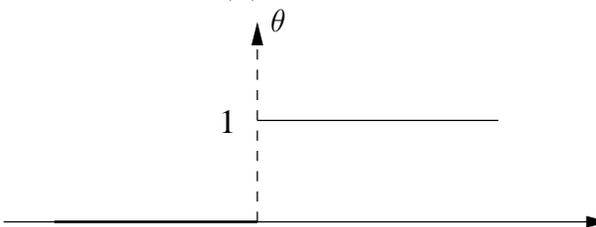
$$\omega_1 = \frac{mk^2}{\left(I_1 + \sqrt{I_2^2 + \lambda^2}\right)^3} ; \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{I_2}{\sqrt{I_2^2 + \lambda^2}} .$$

Im Spezialfall des reinen **Keplerproblems** ($\lambda^2 = 0$) sind beide Frequenzen **gleich**. Nach einem Umlauf um die Keplerellipse hat sowohl r als auch φ eine Periode durchlaufen. Für ω_2/ω_1 irrational ist die Bewegung nicht periodisch. Es liegt keine geschlossene Bahn vor.

17.2 Adiabatische Invarianz der Wirkungsvariablen

Bei “langsamer” zeitlicher Variation eines Parameters λ , von dem die Hamiltonfunktion abhängt, (z. B. zeitliche Variation der Federkonstanten c im Fall des harmonischen Oszillators) ändert sich das Phasenraumvolumen $\Phi(E, \lambda)$ und damit die Wirkungsvariable zeitlich in einem endlichen Zeitintervall “beliebig wenig”, wenn die Änderung nur langsam genug ist.

Wir betrachten ein **eindimensionales periodisches** System (z. B. einen anharmonischen Oszillator). Mit der Stufenfunktion $\theta(x)$

$$\theta(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$


lautet das Phasenraumvolumen

$$\Phi(E, a) := \int \theta(E - H(q, p, a)) dq dp ,$$

wobei a ein Parameter ist, der variiert wird. Die Ableitung der Stufenfunktion ist die Diracsche Deltafunktion $\theta'(x) = \delta(x)$, was man durch Integration von $-\varepsilon$ bis ε bestätigt $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \theta'(x) dx = \theta(\varepsilon) - \theta(-\varepsilon) = 1$. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(E, a)}{\partial E} &= \int \delta(E - H(q, p, a)) dq dp \quad \left(= \frac{2\pi}{\omega(a)} \right) , \\ \frac{\partial \Phi(E, a)}{\partial a} &= \int -\frac{\partial H(q, p, a)}{\partial a} \delta(E - H(q, p, a)) dq dp . \end{aligned}$$

Damit gilt für $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial E} dE + \frac{\partial \Phi}{\partial a} da$ explizit

$$\boxed{d\Phi = \frac{2\pi}{\omega(a)} \left[dE - \left\langle \frac{\partial H}{\partial a} \right\rangle_{E,a} da \right] .}$$

Dabei haben wir für eine beliebige Funktion $f(q, p)$ das “**Scharmittel**” wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{E,a} &:= \frac{\int f(q, p) \delta(E - H(q, p, a)) dq dp}{\int \delta(E - H(q, p, a)) dq dp} \\ &= \frac{\omega(a)}{2\pi} \int f(q, p) \delta(E - H(q, p, a)) dq dp . \end{aligned}$$

Das Integral über den Phasenraum lässt sich durch die (kanonische) Variablentransformation auf Winkel- und Wirkungsvariable vereinfachen

$$\int f(q, p) \delta(E - H(q, p, a)) dq dp = \int f(q(\varphi, I), p(\varphi, I)) \delta(E - h(I, a)) d\varphi dI .$$

Das Argument der Deltafunktion (als Funktion von I) verschwindet bei $I(E, a)$ und es gilt $\partial h / \partial I = \omega(a)$. Mit $\delta(f(x)) = \sum_i \delta(x - x_i) / |f'(x_i)|$, wobei die Summe über alle Nullstellen x_i von $f(x)$ läuft, folgt wegen $\omega(a) > 0$

$$\int f(q, p) \delta(E - H(q, p, a)) dq dp = \frac{1}{\omega(a)} \int_0^{2\pi} f(q(\varphi, I(E, a)), p(\varphi, I(E, a))) d\varphi$$

und damit

$$\boxed{\langle f \rangle_{E,a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(q(\varphi, I(E, a)), p(\varphi, I(E, a))) d\varphi .}$$

Als alternative Mittelungsprozedur hatten wir das **Zeitmittel** über eine periodische Bewegung kennen gelernt.

$$\boxed{\bar{f} := \frac{1}{T} \int_0^T f(q(t), p(t)) dt .}$$

Drückt man die Zeitentwicklung wieder in Winkel- und Wirkungsvariablen aus ($\varphi(t) = \omega t$, $I = \text{const.}$), so erhält man nach Variablensubstitution

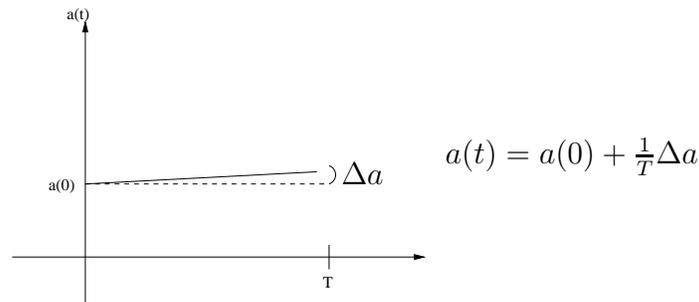
$$\frac{1}{T} \int_0^T f(q(\omega t, I), p(\omega t, I)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(q(\varphi, I), p(\varphi, I)) d\varphi .$$

Das ist die wichtige Aussage

$$\bar{f}_{E,a} = \langle f \rangle_{E,a} : \text{“Zeitmittel = Scharmittel”} .$$

Die Frage der Verallgemeinerung auf höherdimensionale Systeme spielt in der **klassischen statistische Mechanik** eine zentrale Rolle.

Nach diesen Vorbereitungen, in denen a **zeitlich konstant** war, betrachten wir den Fall **langsamer** Zeitabhängigkeit, z. B.



Dann ist H **keine** Konstante der Bewegung mehr

$$\begin{aligned} \frac{dH(q(t), p(t), a(t))}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial a} \dot{a}(t) \\ \Rightarrow \Delta E := H_T - H_{t=0} &= \int_0^T \frac{\partial H(q(t), p(t), a(t))}{\partial a} \dot{a}(t) dt \\ (\text{Beispiel}) &= \Delta a \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H(q(t), p(t), a(t))}{\partial a} dt . \end{aligned}$$

In führenden Näherung in Δa können wir im Integranden $a(t) \equiv a(0)$ und damit $q(t), p(t)$ durch $q(t)|_{a=a(0)}, p(t)|_{a=a(0)}$ ersetzen und erhalten

$$\Delta E = \frac{\overline{\partial H}}{\partial a} \Delta a + O(\Delta a)^2 .$$

Betrachtet man nun das Phasenraumvolumen als Funktion $E(t)$ und $a(t)$, d.h. $\Phi(E(t), a(t))$, so folgt

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi}{\omega(a)} \left(\Delta E - \left\langle \frac{\partial H}{\partial a} \right\rangle \Delta a \right) + \dots = \frac{2\pi}{\omega(a)} \left(\frac{\overline{\partial H}}{\partial a} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial a} \right\rangle \right) + \dots = 0$$

die **“adiabatische Invarianz des Phasenraumvolumens”**

$$\Delta \Phi = 0 .$$

17.3 Bohr-Sommerfeld-Quantisierung

Nach der Ehrenfest'schen Adiabatenhypothese sind (im Rahmen der Bohrschen Theorie) nur solche Größen zu quantisieren, die bei langsamer Änderung konstant bleiben oder sich zumindest so wenig verschieben, dass keine Übergänge zwischen den diskreten Niveaus möglich sind. Diese Forderung führt zur Bohr-Sommerfeld-(Watson-)-Quantisierungsbedingung für die Wirkungsvariablen

$$\oint pdq = nh ,$$

wobei h das **Plancksche Wirkungsquantum** und n eine natürliche Zahl ist. Meist arbeitet man mit $\hbar := h/(2\pi)$, d.h.

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = n\hbar .$$

Aus Zeitgründen diskutieren wir nur die einfachsten Beispiele:

$\alpha)$ *eindimensionaler harmonische Oszillator*

Aus $I = E/\omega_0$ ergeben sich als Energieniveaus

$$E_{(n)} = n\hbar\omega_0 \quad ; \quad n = 0, 1, \dots \quad .$$

Das stimmt bis auf den additiven Term $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ der "Nullpunktsenergie" mit den exakten quantenmechanischen Energiewerten überein.

$\beta)$ *Drehimpulsquantisierung*

Für ein Zentralpotential $V(r)$ ist $p_\varphi = \text{const.} = M$

Also folgt aus

$$\frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = M = n\hbar$$

die Quantisierung der Drehimpulskomponente um die Achse, die auf der Ebene der Bewegung senkrecht steht. (Letzteres Konzept verliert aber im Rahmen der Quantenmechanik seine Bedeutung).

$\gamma)$ *Das Wasserstoffatom*

Im *cgs*-System ist das Couloumbpotential durch $-e^2/r$ gegeben, wobei e die Ladung des Elektrons ist. Im Rahmen der *2d*-Beschreibung von S. 217/218 ergibt sich also

$$E(I_1, I_2) = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(I_1 + I_2)^2}.$$

Setzt man $I_i = n_i \hbar$, so ergibt sich mit $n := n_1 + n_2$

$$E(n) = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} \right). \quad n = 1, 2, \dots$$

Dabei bezeichnet man n als ‘‘Hauptquantenzahl’’. Man erhält dasselbe Ergebnis auch, wenn man von der dreidimensionalen Beschreibung des Problems ausgeht.

In den diskutierten Beispielen stimmt das Ergebnis der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung mit dem exakten quantenmechanischen Ergebnis überein. Wie zuerst von Einstein (1917) diskutiert, ist diese Art der Quantisierung auf **integrable** Systeme beschränkt. Die Frage der ‘‘**quasiklassischen**’’ Quantisierung **chaotischer** Systeme stellt ein aktuelles Forschungsgebiet dar.

18 Systeme mit zwei Freiheitsgraden

18.1 Poincaré-Schnitte, KAM-Theorem

In diesem Kapitel soll eine qualitative Diskussion der Bewegung **autonomer** Systeme mit zwei Freiheitsgraden gegeben werden. Wie bereits mehrfach fruhier erwähnt, sind solche Systeme i. A. **nicht integrabel**.

Der Phasenraum solcher Systeme ist **vierdimensional**. Durch die Energieerhaltung

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E = \text{const.}$$

werden die Phasenraumtrajektorien auf die **3-dimensionale** Hyperfläche $H = E$ eingeschränkt. Diese Gleichung ermöglicht es, eine der kanonischen Variablen, z.B. p_2 , durch die anderen auszudrücken

$$p_2 = p_2(q_1, q_2, p_1; E).$$

Es genügt daher, die Projektion der Bahn auf den dreidimensionalen Raum q_1, q_2, p_1 zu betrachten. Ein wichtiger Kunstgriff zur Veranschaulichung der verschiedenen Bewegungsformen ist die Methode der Poincaré-Schnitte: (Poincaré 1892)

Man wählt eine **zweidimensionale Hyperfläche** Σ im vierdimensionalen Phasenraum und bezeichnet die beiden Seiten der Fläche z. B. mit “links” und “rechts”. Ist nun eine Phasenraumtrajektorie gegeben, so betrachtet man die **Durchstoßpunkte** der Trajektorie durch die Fläche Σ , wobei immer nur die Punkte in Betracht gezogen werden, die die Fläche Σ im **selben** Richtungssinn durchstoßen. Findet die Bewegung in einem endlichen Raumgebiet des vierdimensionalen Phasenraums statt, so wird bei geeigneter Wahl der Fläche Σ diese als Funktion der Zeit immer wieder durchstoßen und man erhält im Limes $t \rightarrow \infty$ i. A. eine unbeschränkte Zahl von Durchstoßpunkten. Das Studium der im Poincaré-Schnitt erzeugten **Punktmenge auf Σ** ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Klassifikation der Bewegungsformen. In den folgenden Beispielen wählen wir als Σ die $q_1 - p_1$ -Ebene ($q_2 = 0$).

Als erstes Beispiel betrachten wir ein System nichtlinearer gekoppelter Oszillatoren (s. z.B.: Deng u. Hieu, Phys. Rev. Lett. 55, 1539 (1985))

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2) + \lambda(q_1^4 + 2Cq_1^2q_2^2 + q_2^4) .$$

Je nach dem Wert des Parameters C ergeben sich “linienförmige” oder “flächenartige” Punktmenge. Die Fälle $C = 0$ und $C = 3$ (zwei entkoppelte eindimensionale anharmonische Oszillatoren) und $C = 1$ (Zentralpotential) sind **integrabel** (Üb.). Der **wesentliche Punkt** ist (wie im allgemeinen Fall), ob außer H ein **weiteres** unabhängiges **Bewegungsintegral** $I(q_1, q_2, p_1, p_2) = I_0$ existiert. Ist dies der Fall, so wird die Phasentrajektorie im vierdimensionalen Phasenraum auf eine **zweidimensionale Fläche** eingeschränkt. Der Schnitt dieser Fläche mit der Poincaréfläche Σ ist dann typischerweise **linienartig**. Existiert solch ein weiteres Bewegungsintegral (in unserem Beispiel für $C = 1$ ist das z. B. der Drehimpuls $q_1p_2 - q_2p_1$), so ist das Problem integrabel. Für **integrable Systeme sind die Poincaréschnitte also i. A. “linienartig”**. Diese “Linien” können zu einer endlichen Zahl von Punkten entarten.

Wir betrachten dazu zwei entkoppelte lineare Oszillatoren

$$H_0(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2q_2^2$$

mit der allgemeinen Lösung (wir setzen im folgenden die Masse $m = 1$)

$$\begin{aligned} q_1(t) &= a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{10}) ; & q_2(t) &= a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{20}) ; \\ p_1(t) &= \omega_1 a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) ; & p_2(t) &= \omega_2 a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{20}) . \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel lässt sich die Punktmenge auf $\Sigma : q_1, p_1$ -Ebene ($q_2 = 0$) leicht explizit angeben. Aus der Forderung $q_2(t_m) = 0$ folgt $\omega_2 t_m + \varphi_{20} = m\pi ; m \in \mathbb{N}$, d.h.

$$t_m = \frac{m\pi - \varphi_{20}}{\omega_2} .$$

Damit der “Durchstoßungssinn” immer der gleiche ist, darf nur jede zweite natürliche Zahl gewählt werden, d.h. z. B. $m = 2n$; $n \in \mathbb{N}$. Eingesetzt erhält man für den n -ten Punkt der Punktmenge

$$q_1^{(n)} = a_1 \sin \left[2n\pi \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) + \varphi_0 \right] , \quad p_1^{(n)} = a_1 \omega_1 \cos \left[2n\pi \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) + \varphi_0 \right] .$$

mit $\varphi_0 = \varphi_{10} - (\omega_1/\omega_2)\varphi_{20}$. Den $(n+1)$ -ten Punkt erhält man also aus dem n -ten Punkt mit Hilfe der “**Poincaré-Abbildung**”

$$\begin{pmatrix} q^{(n+1)} \\ p^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\alpha & \frac{1}{\omega_1} \sin 2\pi\alpha \\ -\omega_1 \sin 2\pi\alpha & \cos 2\pi\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{(n)} \\ p^{(n)} \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = \omega_1/\omega_2$ (Übungsaufgabe). Wie im allgemeinen Fall gilt

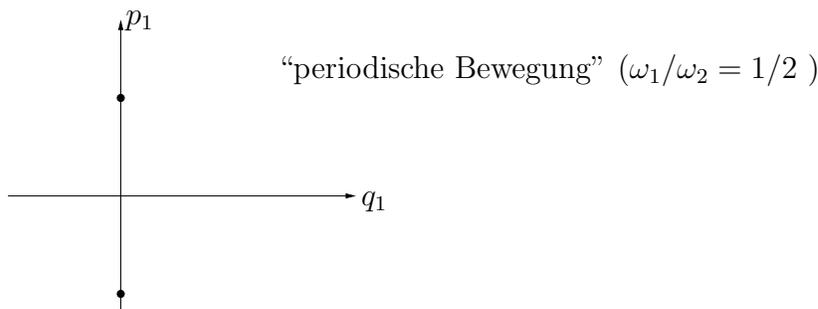
$$\frac{\partial q^{(n+1)}}{\partial q^{(n)}} \cdot \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial p^{(n)}} - \frac{\partial q^{(n+1)}}{\partial p^{(n)}} \cdot \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial q^{(n)}} = 1 .$$

d.h. die Abbildung ist “**flächentreu**”.

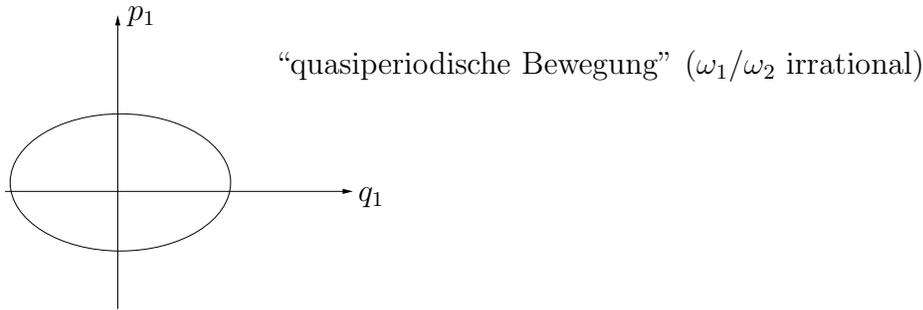
Ob es sich hierbei um eine endliche oder eine unendliche Punktmenge handelt, hängt vom Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 ab. Ist ω_1/ω_2 eine **rationale Zahl** p/q mit $p, q \in \mathbb{N}$ und p, q teilerfremd, so ist die Punktmenge **endlich** (und die Bahn im “Ortsraum” geschlossen). Für den Fall $\omega_1/\omega_2 = 1/2$ erhält man für die Anfangsbedingung $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$

$$q_1^{(n)} = a_1 \sin(n\pi) ; \quad p_1^{(n)} = a_1 \omega_1 \cos(n\pi) ,$$

d.h. die Punktmenge besteht nur aus 2 Punkten.



Für **irrationale** ω_1/ω_2 liegen die Punkte auf der Ellipse $p_1^2/2m + \frac{1}{2}m\omega_1^2 q_1^2 = E_1$ (wieder mit Masse m) **dicht**.



Nach "hinreichend langer Zeit" wird die Punktmenge also "linienartig".

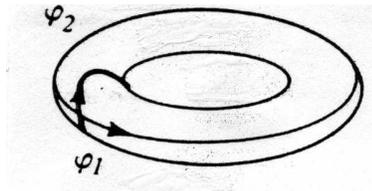
Für die **entkoppelten** harmonischen Oszillatoren gelten zwei Erhaltungssätze

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2 q_1^2 = E_1 \quad ; \quad \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_2^2 q_2^2 = E_2$$

und man kann durch kanonische Transformationen

$$(q_1, p_1) \rightarrow (\varphi_1, I_1) \quad , \quad (q_2, p_2) \rightarrow (\varphi_2, I_2)$$

zu Winkel- und Wirkungsvariablen übergehen. Die linear in t zeitabhängigen Winkelvariablen stellt man am besten auf einem Torus dar.



Im vierdimensionalen $(\varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2)$ -Raum findet die Bewegung im betrachteten integrierbaren Spezialfall auf diesem zweidimensionalen Torus statt.

Eine wesentliche Frage im Zusammenhang mit der Bewegungsform **nichtintegrabler** Systeme ist die Frage, was aus einem solchen Torus beim Einschalten einer "kleinen Störung" wird:

$$h(I_1, I_2) \rightarrow h(I_1, I_2) + \varepsilon H_1(\varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2)$$

Eine wichtige Antwort auf diese Frage gibt das berühmte **KAM-Theorem** (Kolmogoroff (1954) - Arnold (1961/63)-Moser (1962/66)), das (unter bestimmten Annahmen) etwa folgende Aussage macht: Ist ω_1/ω_2 "hinreichend irrational", so sind die entsprechenden Tori gegenüber dem Anlegen einer "kleinen" ($\varepsilon \ll 1$) Störung stabil, d.h. sie werden nur leicht deformiert.

Dabei bedeutet “hinreichend irrational”, dass Ungleichungen der Art ($r, s \in \mathbb{N}$, teilerfremd)

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{c}{s^\tau}$$

mit festen c und $\tau \leq 2.5$ bestehen. Es lässt sich zeigen, dass die meisten irrationalen Zahlen eine solche Bedingung erfüllen. Sie lässt sich dazu verwenden, den “Grad der Irrationalität” einer Zahl zu definieren. Der Abstand zu den rationalen Zahlen wird größer, wenn τ kleiner und c größer werden. Man nennt eine Zahl W_1 irrationaler als eine Zahl W_2 , wenn das zu W_1 gehörige minimale τ kleiner und das maximale c größer sind als die entsprechenden Werte für W_2 . In diesem Sinn erweist sich das **Verhältnis g des goldenen Schnittes** als die **irrationalste** Zahl.

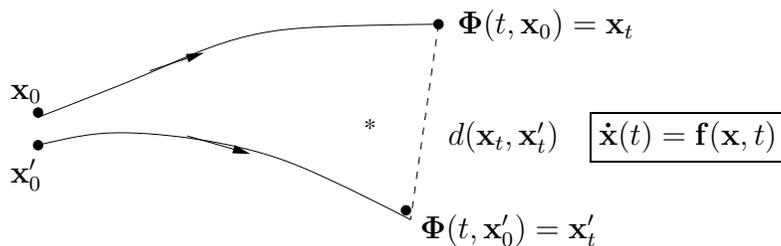
$$g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618034 \dots$$

Sie erlaubt eine “Abschätzung” mit $\tau = 2$ und $c = g^2$. All dies mag nach Zahlenmystik klingen, spielt aber z. B. für das dynamische Verhalten des Doppelpendels eine wichtige Rolle.

18.2 Liapunov-Exponenten

Bevor wir auf dieses spezielle System eingehen, sollen zunächst die Stabilitätskonzepte aus Kap. II etwas allgemeiner diskutiert werden, wobei insbesondere das Konzept der “**Liapunov-Exponenten**” zusätzlich eingeführt wird. Diese erlauben es, das zur Charakterisierung chaotische System wichtige Konzept der “**empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen**”, zu quantifizieren:

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0$ seien in allen Koordinaten auf 10 Dezimalen gleich:



Dabei definiert man den Abstand $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$ zweier Punkte z. B. durch die euklidische Norm

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} .$$

Für Systeme, in denen obiges Verhalten auftritt, ist eine **Langzeitvorhersage nicht möglich**, da die Anfangsbedingung immer nur mit einer endlichen Genauigkeit bekannt ist.

Als "Liapunovexponenten" $\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0)$ definiert man die Rate des experimentellen Anwachsens des Abstandes

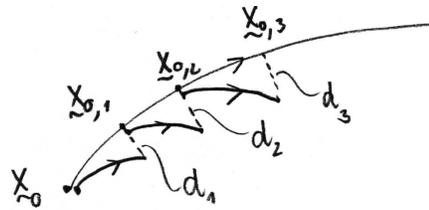
$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) := \lim_{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}'_t)}{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0)} .$$

Es ist keineswegs offensichtlich, dass dieser Grenzwert existiert. Die Existenz (unter Bedingungen, die hier nicht genauer diskutiert werden können) wurde zuerst von Oseledec (1968) gezeigt.

Im n -dimensionalen Phasenraum gibt es n unabhängige Richtungen \mathbf{e}_i um von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x}'_0 zu gelangen. Man kann also zum Punkt \mathbf{x}_0 n unabhängige Liapunovexponenten λ_i definieren. Man nennt die hier definierten Liapunovexponenten auch "LE 1. Ordnung". Für das Auftreten chaotischer Trajektorien ist das Vorliegen eines positiven Liapunovexponenten eine **notwendige** Vorbedingung.

Anmerkung: n ist im Folgenden wieder die Dimension des Differentialgleichungssystems und nicht die Zahl der Freiheitsgrade. Für Hamiltonsche Systeme ist n also eine **gerade** Zahl.

Für Trajektorien, die sich über einen **beschränkten** Teil des Phasenraums erstrecken, bleibt $d(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}'_t)$ endlich, so dass eine modifizierte Definition im Fall positiver Liapunovexponenten verwendet werden muss. Nach endlichen Zeiten τ wird der Abstand d_n auf den Abstand d_0 verkleinert.



Man betrachtet dann das Verhalten von $\frac{1}{n\tau} \sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{d_n}{d_0} \right)$.

Für **lineare** Systeme $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$, d.h.

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = U(t, t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

gilt $\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t'} = U(t, 0) (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0) \equiv U(t, 0) \delta \mathbf{x}_0$, d.h.

$$\left(\frac{d(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}'_t)}{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0)} \right)^2 = \frac{U(t, 0)\delta\mathbf{x}_0 \cdot U(t, 0)\delta\mathbf{x}_0}{\delta\mathbf{x}_0 \cdot \delta\mathbf{x}_0} = \frac{\delta\mathbf{x}_0 \cdot U^T(t, 0)U(t, 0)\delta\mathbf{x}_0}{\delta\mathbf{x}_0 \cdot \delta\mathbf{x}_0} .$$

Für zeitunabhängige Systeme gilt $U(t, 0) = e^{At}$ (s. S. 160). Sei nun \mathbf{a}_i Eigenvektor von A zum **reellen Eigenwert** $a_i = \operatorname{Re}(a_i)$ (s. auch die folgende Anmerkung), so erhält man für $\delta\mathbf{x}_0 \sim \mathbf{a}_i$ wegen $U(t, 0)\mathbf{a}_i = a_i^t \mathbf{a}_i$ das Ergebnis $(d_t/d_0)^2 = e^{2a_i t}$ für beliebige Zeiten und daraus

$$\lambda_i = \operatorname{Re}(a_i) .$$

d.h. die **Liapunovexponenten** sind durch die **Realteile der Eigenwerte** von A gegeben.

(Da A als **reelle** Matrix angenommen wird, treten komplexe Eigenwerte a_j nur in Paaren (a_j und a_j^*) auf. Für (reelle) $\delta\mathbf{x}_0 = c_j \mathbf{a}_j + c_j^* \mathbf{a}_j^*$ gilt

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_t = c_j e^{a_j t} \mathbf{a}_j + c_j^* e^{a_j^* t} \mathbf{a}_j^* = e^{\operatorname{Re}(a_j)t} (c_j e^{i\operatorname{Im}(a_j)t} \mathbf{a}_j + c_j^* e^{-i\operatorname{Im}(a_j)t} \mathbf{a}_j^*) =: e^{\operatorname{Re}(a_j)t} \mathbf{b}_j^{(t)}$$

Da $\mathbf{b}_j^{(t)}$ für alle Zeiten ein **beschränkter** Vektor ist, ist der Liapunovexponent nur durch den Vorfaktor bestimmt, d.h. es gilt wie im Fall reeller Eigenwerte $\lambda_j = \operatorname{Re}(a_j)$.)

Gibt man $\delta\mathbf{x}_0$ **beliebig** vor, so wählt man die Zerlegung $\delta\mathbf{x}_0 = c_{\max} \mathbf{a}_{\max} + \delta\mathbf{x}'_0$ wobei \mathbf{a}_{\max} der Eigenvektor zum Eigenwert mit dem größten Realteil ist. Die angegebene Zerlegung ($\delta\mathbf{x}'_0$ hat keine Komponente in \mathbf{a}_{\max} -Richtung) gilt für **reelles** a_{\max} (sonst wie oben).

Selbst wenn c_{\max} sehr klein ist, so gilt für **große** Zeiten

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_t \approx c_{\max} \mathbf{a}_{\max} e^{a_{\max} t}$$

und man erhält als Liapunovexponent $\lambda = \operatorname{Re}(a_{\max})$.

Chaotisches Verhalten kann nur in **nichtlinearen** Systemem auftreten. Zur näherungsweisen Berechnung der Liapunovexponenten **linearisiert** man das Differentialgleichungssystem um die Bahn $\mathbf{x}_t = \Phi(t, \mathbf{x}_0)$ und setzt $\mathbf{x}'_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{u}(t)$. Das liefert

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = (Df_{\mathbf{x}_t})\mathbf{u}(t) + \dots$$

Da die "Vergleichsbahn" \mathbf{x}_t im Allgemeinen auch nur numerisch berechnet werden kann, erhält man manchmal einen "ersten Anhaltspunkt" über die Liapunovexponenten, wenn man die Linearisierung um den Anfangspunkt \mathbf{x}_0 durchführt, d.h. $Df_{\mathbf{x}_t}$ durch $Df_{\mathbf{x}_0}$ ersetzt. Im Fall einer einzigen Variablen x kann man das Vorgehen an analytisch lösbaren Beispielen diskutieren.

Wir veranschaulichen die Vorgehensweise an einem **eindimensionalen Beispiel**:

$$\dot{x} = -x - x^2 \equiv f(x) \quad ; \quad f'(x) = -(1 + 2x) .$$

Trennung der Variablen $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx = -dt$ liefert mit $x(0) = x_0$

$$x(t) = \frac{x_0}{(1+x_0)e^t - x_0} .$$

Die linearisierte Gleichung $\dot{u}(t) = f'(x(t))u(t)$ lautet

$$\dot{u}(t) = - \left(1 + \frac{2x_0}{(1+x_0)e^t - x_0} \right) u(t) .$$

Die Lösung dieser linearen Gleichung mit zeitabhängigem Koeffizienten ist gegeben durch ($u_0 = u(0)$)

$$u(t) = u_0 \exp \left\{ t - 2 \ln [(1+x_0)e^t - x_0] \right\} .$$

Verwendet man dagegen die Linearisierung um den Ausgangspunkt $\dot{\tilde{u}}(t) = f'(x_0)\tilde{u}(t)$, so erhält man

$$\tilde{u}(t) = u_0 e^{-(1+x_0)t} .$$

Man kann nun den exakten Liapunovexponenten berechnen und mit den zwei genäherten Verfahren vergleichen.

Die exakte Lösung liefert wegen $x(t) \rightarrow \frac{x_0}{1+x_0} e^{-t}$ für $t \rightarrow \infty$ d.h. $x(t) - x'(t) \rightarrow \left(\frac{x_0}{1+x_0} - \frac{x'_0}{1+x'_0} \right) e^{-t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{x(t) - x'(t)}{x_0 - x'_0} \right| = -1 \quad , \quad \text{d.h.} \quad \lambda^{exakt} = -1 .$$

Aus $u(t) \rightarrow u_0 e^{-t}$ für $t \rightarrow \infty$ folgt, dass die Linearisierung um die Bahn $x(t)$ auch das exakte Ergebnis $\lambda = -1$ liefert. Verwendet man dagegen die Linearisierung um den Anfangspunkt, so erhält man $\lambda^{(x_0)} = -(1+2x_0)$, was nur für $x_0 \ll 1$ eine vernünftige Näherung darstellt.

Wie wir bereits in Kap. I erwähnt haben, kann chaotisches Verhalten nur für $n \geq 3$ auftreten.

18.3 Diskrete Abbildungen (logistische Abbildung)

Über die Methode der Poincaré-Schnitte ist auch das Studium **diskreter** Abbildungen

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_i)$$

ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung des Übergangs mechanischer Systeme zu chaotischem Verhalten. Die Stabilitätsbetrachtungen aus Kap. II lassen sich sehr einfach auf den diskreten Fall erweitern.

Als **Fixpunkt** bezeichnet man einen Punkt \mathbf{x}^* , für den $\mathbf{x}^* = \mathbf{T}(\mathbf{x}^*)$ gilt. Die Stabilität von Fixpunkten untersucht man wie im kontinuierlichen Fall durch Linearisierung $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{u}$, d.h.

$$\mathbf{u}_{i+1} = (DT_{\mathbf{x}^*}) \mathbf{u}_i + \dots ,$$

wobei $(DT)_{ij} = \partial T_i / \partial x_j$ die Jacobimatrix ist. Wegen

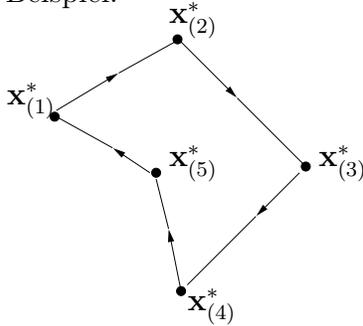
$$\mathbf{u}_{i+k} = (DT_{\mathbf{x}^*})^k \mathbf{u}_i$$

bestimmen wieder die Eigenwerte von $DT_{\mathbf{x}^*}$ das Stabilitätsverhalten.

An die Stelle periodischer Bahnen im kontinuierlichen Fall treten hier Fixpunkte der **k-fach iterierten Abbildung**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(\alpha)}^* &= \underbrace{T(T(\dots T(\mathbf{x}_{(\alpha)}^*) \dots))}_{k\text{-mal}} \\ &= : T^k(\mathbf{x}_{(\alpha)}^*) \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Beispiel:



nach 5-facher Iteration ist man wieder am Ausgangspunkt

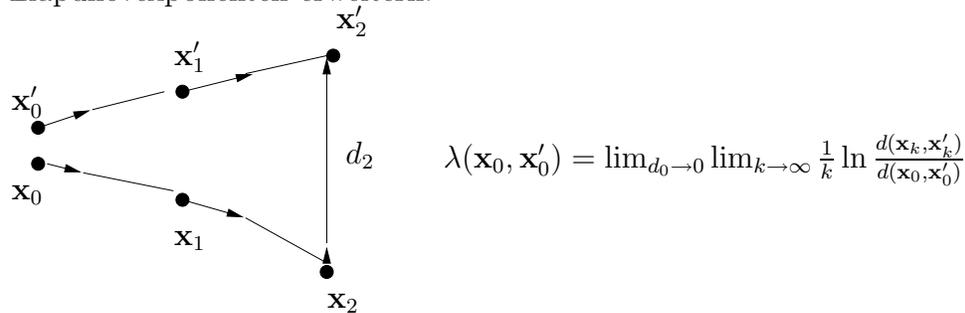
Die Stabilität der "Bahn" definiert man über die Stabilität der Fixpunkte von $T^k(\cdot)$, d.h. der k -fach iterierten Abbildung. Linearisierung $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(1)}^* + \mathbf{u}_i$ liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(1)}^* + \mathbf{u}_{i+1} &= T^k(\mathbf{x}_{(1)}^* + \mathbf{u}_i) \\ &= \mathbf{x}_{(1)}^* + (DT^k)_{\mathbf{u}_i=0} \mathbf{u}_i + \dots \end{aligned}$$

Die Jacobimatrix DT^k erhält man mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{T}^k}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=0} &= \frac{\partial \mathbf{T}(T(\dots T(\mathbf{x}_{(1)}^* + \mathbf{u}) \dots))}{\partial \mathbf{u}} \\ &= (DT)_{\mathbf{x}_{(k)}^*} (DT)_{\mathbf{x}_{(k-1)}^*} \dots (DT)_{\mathbf{x}_{(1)}^*} . \end{aligned}$$

Sie ist also durch das **Produkt** der Jacobimatrizen an den einzelnen “Bahnpunkten” gegeben. Für beliebige “Bahnen” kann man auch die Definition der Liapunovexponenten erweitern:



Berechnet man $\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k = T^k(\mathbf{x}_0) - T^k(\overbrace{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}'_0} + \mathbf{u})$ durch Linearisierung ($\approx (DT^k)_{\mathbf{x}_0} \mathbf{u}$), so erhält man das Spektrum der Liapunovexponenten, wenn man für \mathbf{u} die Eigenvektoren von DT^k mit Eigenwerten $t_j^k(\mathbf{x}_0)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) verwendet

$$\lambda_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |t_j^k(\mathbf{x}_0)| .$$

Besonders einfach wird dieses Resultat im eindimensionalen Fall ($n = 1$). Dann sind die DT ebenso wie DT^k Zahlen und man erhält

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |T'(x_i)| .$$

Da bei diskreten Abbildungen bereits für $n = 1$ **chaotisches Verhalten auftreten kann**, betrachten wir im Folgenden kurz diesen Fall:

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu) ,$$

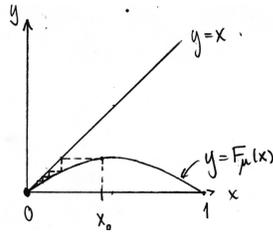
wobei μ ein Parameter und F eine **nichtlineare** Funktion des ersten Arguments ist. Der Fall, in dem F eine **monotone** Funktion des ersten Argument ist, kann **kein** chaotisches Verhalten liefern. Notwendige Bedingung für chaotisches Verhalten ist eine Funktion von x , die **nicht umkehrbar** ist.

Ein ausführlich untersuchtes Beispiel ist die “**logistische Abbildung**”

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \equiv F_\mu(x_n) ; \quad (F'_\mu = \mu(1 - 2x)),$$

die z.B. in der Populationsdynamik Verwendung gefunden hat. Wir betrachten das Parameterintervall $\mu \in [0, 4]$. Dann liefert $F_\mu(x)$ eine Abbildung $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

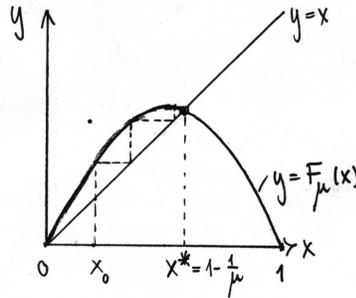
Es gilt $F_\mu(0) = 0$, d.h. $x^* = 0$ ist $\forall \mu$ **Fixpunkt**. Für $0 < \mu < 1$ ist $|F'_\mu(0)| = |\mu| < 1$, d.h. der Fixpunkt $x^* = 0$ ist für $0 < \mu < 1$ **stabil**



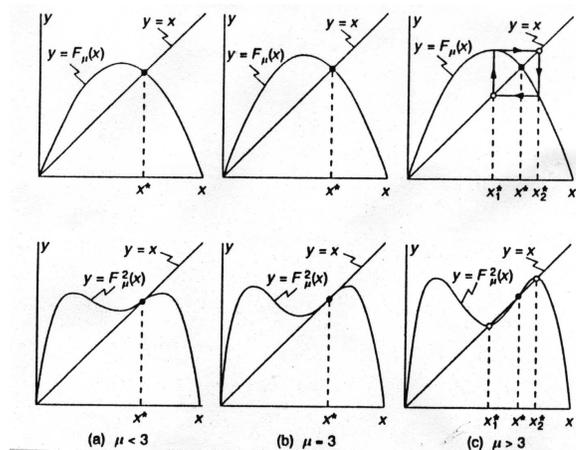
Alle Punkte aus $[0, 1]$ laufen in diesen Fixpunkt. Für $\mu > 1$ ist der Fixpunkt $x^* = 0$ **instabil**. Es tritt ein neuer Fixpunkt bei $x^* = 1 - 1/\mu$ auf. Für diesen Fixpunkt gilt

$$F'_\mu|_{x^*} = \mu(1 - 2x^*) = 2 - \mu,$$

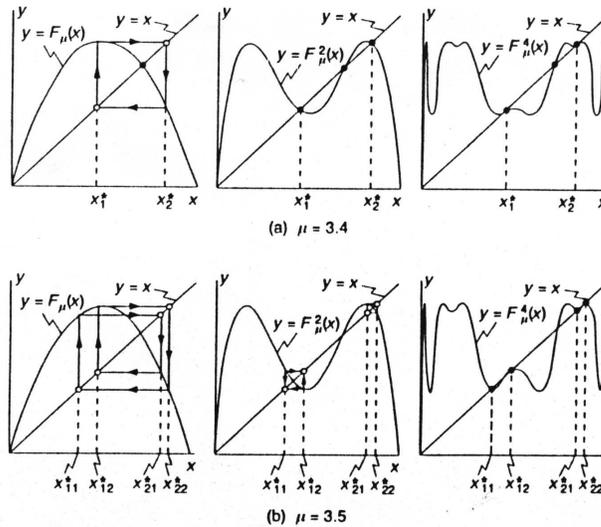
d.h. der Fixpunkt ist für $1 < \mu < 3$ **stabil**.



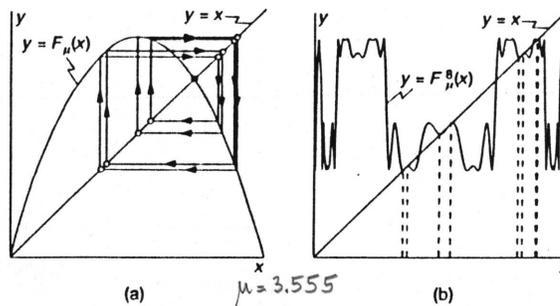
Für $\mu_1 = 3$ wird $|F'_\mu(x^*)| = 1$ und die Stabilität geht verloren. Man erhält für $3 < \mu < 1 + \sqrt{6} \approx 3.4494 \dots$ einen Zyklus der Periode 2, d.h. zwei stabile Fixpunkte der 2-fach iterierten Abbildung $F_\mu^2(x) \equiv F_\mu(F_\mu(x))$,



eine sog. **Periodenverdopplungs-Bifurkation**. Periodenverdopplung hatten wir zuerst beim getriebenen Pendel kennen gelernt. Für $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$ werden die beiden stabilen Fixpunkte von F_μ^2 instabil und man erhält einen Zyklus der Periode 4, d.h. vier stabile Fixpunkte der 4-fach iterierten Abbildung F_μ^4 .

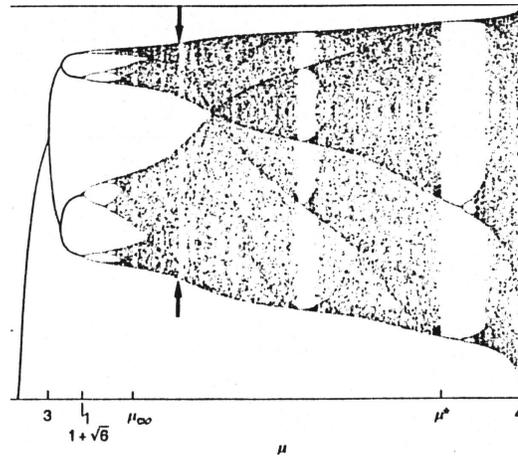


Bei weiterer Erhöhung von μ erhält man eine **Kaskade von Periodenverdopplungen** bei immer kleineren Werten von $\Delta\mu_k := \mu_{k+1} - \mu_k$

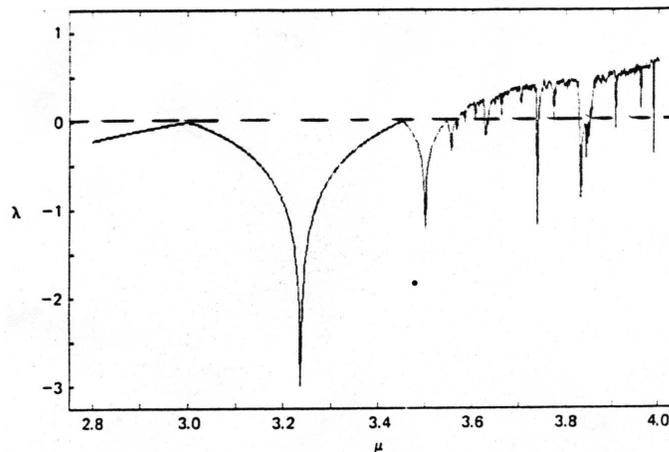


Für große k findet man $\Delta\mu_{k+1} \approx \delta^{-1} \Delta\mu_k$, wobei $\delta = 4.6692\dots$ als **Feigenbaum-Konstante** bezeichnet wird. Das Erstaunliche an diesem Verhalten der μ_k ist, dass man für jede andere Funktion $F_\mu(x)$, wenn sie nur ein Maximum in $[0, 1]$ mit negativer 2. Ableitung besitzt, dasselbe Szenario mit derselben **universellen** Feigenbaumkonstante δ liefert. Der Wert von μ_∞ , der bei der logistischen Abbildung $3.56994\dots$ beträgt, ist dagegen nicht universell.

Überschreitet μ den Wert μ_∞ , so beginnt ein Bereich **chaotischer Bewegung** mit aperiodischen Trajektorien.



Im chaotischen Bereich erhält man einen positiven Liapunovexponenten aus der Formel von S. 231



Wie man sieht, ergeben sich auch immer wieder “Fenster” mit periodischen Trajektorien, z. B. ein Bereich mit Periode 3 ab $\mu = 1 + \sqrt{8}$. Aus Zeitgründen können wir all dies nicht im Detail behandeln.

Wir wollen nur diskutieren, welche Eigenschaft der Abbildung für das chaotische Verhalten verantwortlich ist: Für $\mu \lesssim 4$ wird jedes der beiden Teilintervalle $[0, 1/2]$ und $[1/2, 1]$ für sich fast auf das ganze Intervall $[0, 1]$ abgebildet. Die Abbildung “**dehnt**” das Urbildintervall um einen Faktor ≈ 2 , wobei aber wegen der jeweiligen Abbildung der Teilintervalle auf $[0, 1]$ der Bildbereich “**zurückgefaltet**” werden muss. Hier ist also die Nichtumkehrbarkeit der Abbildung wesentlich. Diese Falten führen zu einem **Vermischen** der Bildpunkte. Das Zusammenspiel von **Dehnen** und **Falten** spielt auch in mechanischen Systemen häufig eine wichtige Rolle für das Auftreten von deterministischem Chaos.

18.4 Doppelpendel

Text folgt...