

Über ein Problem der Relativitätstheorie: Wann sind Punktabbildungen des \mathbb{R}^n linear?

Von *Hans-Jürgen Borchers* und *Gerhard C. Hegerfeldt*

Vorgelegt von Herrn H.-J. Borchers in der Sitzung vom 14. Juli 1972

1. Einleitung

In der Physik charakterisiert man Ereignisse durch Angabe von Zeit- und Ortskoordinaten, $(x_0, x_1, x_2, x_3) =: x$. Dieses Viertupel kann als Punkt eines \mathbb{R}^4 aufgefaßt werden. Geht man zu einem anderen Bezugssystem, einer anderen Beschreibungsweise über, so wird dasselbe Ereignis durch andere Koordinaten beschrieben, etwa durch $x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$. Dieser Übergang vermittelt also eine Punktabbildung des \mathbb{R}^4 auf sich, und es ist die Frage, ob man unter physikalisch vernünftigen Annahmen etwas über die Struktur dieser Abbildung sagen kann, insbesondere darüber, ob sie linear (genauer: affin) ist. In dieser Arbeit werden hinreichende und notwendige Bedingungen dafür angegeben, wann eine bestimmte Klasse von Abbildungen nur aus linearen besteht.

Häufig wird zur Begründung der Linearität der Begriff des Inertialsystems benutzt, in dem sich kräftefreie Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, d. h., ihre „Weltlinien“ im \mathbb{R}^4 sind Geraden. Also, so wird gefolgert, müssen Geraden in Geraden übergehen, und deshalb muß nach dem Hauptsatz der projektiven Geometrie die Abbildung linear sein. Dieses Argument übersieht jedoch, daß die Geschwindigkeit materieller Körper durch die Lichtgeschwindigkeit nach oben begrenzt ist. Deshalb weiß man von der Physik her nur, daß Geraden mit Richtung im Lichtkegel in Geraden übergehen. Wie in [3] gezeigt, folgt daraus aber auch schon sehr leicht die Linearität.

Ein anderer Weg wird in [5] eingeschlagen. Im wesentlichen wird dort verlangt, daß die Abbildung T ebenso wie T^{-1} stetig ist und lichtartige Geraden (d. h. solche, die auf einem Lichtkegel liegen) auf lichtartige Geraden abbildet. Dann folgt die Linearität. In [2] wurde dieses Ergebnis und das von [3] wesentlich verallgemeinert. Man braucht keine Stetigkeitsvoraussetzungen, sondern nur, daß T eineindeutig ist und lichtartige Geraden auf *irgendwelche* Geraden abbildet. Dieses Ergebnis kann sowohl auf die spezielle als auch Galileische Relativitätstheorie angewendet werden.

Es liegt nun die Frage nahe, wieviel Geraden man wirklich für die Linearität braucht. Diese Frage soll im folgenden beantwortet werden.

Wir zeichnen im affinen Raum \mathbb{R}^n einen Nullpunkt aus und kennzeichnen Punkte durch ihren Verbindungsvektor vom Nullpunkt. Sei L eine Menge von Richtungen im \mathbb{R}^n ; wir fassen L als Menge von Vektoren auf, die mit einem Vektor auch jedes von Null verschiedene Vielfache enthält. Sei $\{h_1, \dots, h_n\}$ eine Basis im \mathbb{R}^n (d.h., des zugrundeliegenden Vektorraums). Dann läßt sich jedes $l \in L$ schreiben als $l = \sum \lambda_i h_i$; wir bezeichnen den *Zahlkörper*, der von allen Verhältnissen der Form λ_i/λ_j mit $\lambda_j \neq 0$ und $l \in L$ erzeugt wird, mit

$$(1.1) \quad K(L; h_1, \dots, h_n).$$

Dieser Unterkörper der reellen Zahlen wird in der Regel von der Basiswahl abhängen; er enthält aber stets die rationalen Zahlen. In § 4 wird jedoch gezeigt, daß $K(L; h_1, \dots, h_n)$ immer eine endliche Erweiterung vom Rang höchstens n^2 eines nur von L abhängenden Körpers ist.

Ferner sagen wir, daß L auf einem *Kegel 2. Ordnung* liegt, wenn alle $l \in L$, $l = \sum \lambda_i h_i$, eine Gleichung der Form

$$(1.2) \quad Q(l, l) := \sum_{i,j} a_{ij} \lambda_i \lambda_j = 0$$

mit einer symmetrischen Matrix $0 \neq A = (a_{ij})$ erfüllen. Der Kegel heißt *entartet*, wenn A den Eigenwert 0 besitzt. Für $n \geq 3$ ist z. B. die Vereinigung zweier Hyperebenen ein entarteter Kegel, da die zugehörige Gleichung das Produkt zweier linearer Faktoren ist. Der folgende Satz und der Zusatz stellen unser Hauptergebnis dar.

Satz 1. *Es sei L eine Menge von Richtungen im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, und \mathfrak{T}_L sei die Menge aller $1-1$ -Abbildungen T des \mathbb{R}^n in sich, die jede zu L parallele Gerade auf eine Gerade abbilden. Dann gilt: Jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ ist genau dann linear (affin), d. h. $T(x) = Ax + a$, wobei A eine lineare Abbildung ist, wenn*

(i) *L nicht auf einem entarteten Kegel 2. Ordnung liegt und, für $n = 2$, mehr als 2 Richtungen enthält;*

(ii) *für irgendeine Basis $\{h_1, \dots, h_n\}$ von \mathbb{R}^n der Körper $K(L; h_1, \dots, h_n)$ gleich dem Körper der reellen Zahlen ist.*

Wir werden später zeigen, daß Bedingung (ii) entweder für jede Basis gilt oder für keine. Während des Beweises von Satz 1 werden wir auf folgendes Zusatzergebnis stoßen.

Zusatz 1. *Betrachtet man $1-1$ -Abbildungen von \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m mit $m > n \geq 2$, dann gilt: Jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ ist genau dann linear, wenn L auf keinem Kegel 2. Ordnung liegt und die Bedingung (ii) von Satz 1 erfüllt ist.*

Hinreichend für das Erfülltsein der Bedingung (ii) ist z. B., wenn L eine einparametrische Schar von Richtungen enthält. Man hat also bereits Linearität,

wenn man sich nur ein Stück des Lichtkegels vorgibt. Man braucht aber stets überabzählbar viele Richtungen, damit (ii) gilt.

Einen Kegel kann man im \mathbb{R}^n durch $\frac{1}{2}n(n+1) - 1$ Richtungen festlegen. In § 2 wird gezeigt, daß eine etwas stärkere Form der Bedingung (i) bereits die Additivität der Abbildung nach sich zieht. Setzt man zu (i) nur noch die Stetigkeit in einem einzigen Punkt voraus, so folgt auch schon die Linearität; dann kommt man für $n \geq 3$ also mit $\frac{1}{2}n(n+1) - 1$ geeignet gewählten Richtungen aus. Hat man die Additivität erst einmal, so braucht man auch nur noch Geraden zu betrachten, die durch einen festen Punkt, etwa den Nullpunkt, gehen.

Die geometrische Bedeutung der Körperbedingung (ii) wird in § 4 diskutiert. Sie hängt mit aus L „konstruierbaren“ Geraden zusammen.

2. Die Additivität der Abbildungen

Eine Abbildung des affinen \mathbb{R}^n in dem \mathbb{R}^m heiße *additiv*, wenn die zugehörige Abbildung des Vektorraumes additiv ist. D.h., $\hat{T}(x) := T(x) - T(0)$ erfüllt $\hat{T}(x+y) = \hat{T}(x) + \hat{T}(y)$ für alle Ortsvektoren x, y .

Satz 2. *Es sei L eine Menge von Richtungen im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, und die Menge \mathfrak{T}_L von Abbildungen des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^n sei definiert wie in Satz 1. Damit jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ additiv ist, ist notwendig, daß L auf keinem entarteten Kegel 2. Ordnung liegt. Ferner gilt:*

(i) *Es sei $n \geq 3$. Wenn L auf keinem Kegel 2. Ordnung oder auf einem eindeutig bestimmten nichtentarteten Kegel 2. Ordnung liegt, dann ist jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ additiv. Ist diese Bedingung nicht erfüllt und macht man keine weitere Voraussetzung über L , dann braucht nicht jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ additiv zu sein.*

(ii) *Es sei $n = 2$. Dann ist jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ genau dann additiv, wenn L mindestens drei verschiedene Richtungen enthält.*

(iii) *Es gebe eine im Sinne von Lemma 1 (s.u.) standard-normierte Basis $l_1, \dots, l_n \in L$, so daß $K(L; l_1, \dots, l_n) = \mathbb{R}$ gilt. Dann ist jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ genau dann additiv, wenn L nicht auf einem entarteten Kegel 2. Ordnung liegt.*

Bemerkung. Für ungerades n folgt aus (i): Jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ ist genau dann additiv, wenn L auf keinem entarteten Kegel 2. Ordnung liegt. Denn jetzt hat die Gleichung $\det(A + \lambda B) = 0$ stets eine Lösung, so daß, wenn L zwar auf einem Kegel, aber auf keinem entarteten liegt, der Kegel eindeutig ist.

Für Abbildungen des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m mit $m > n$ erhalten wir in Verlauf des Beweises

Zusatz 2. *Ist der Bildraum \mathbb{R}^m mit $m > n \geq 2$, dann gilt: Jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ ist genau dann additiv, wenn L auf keinem Kegel 2. Ordnung liegt.*

Wir werden die Additivität in der folgenden, etwas stärkeren Form beweisen.

Proposition 1. Es mögen die Bedingungen aus (i) oder (ii) von Satz 2 oder die Bedingung von Zusatz 2 gelten. Dann lassen sich zu jedem System n linear unabhängiger Richtungen aus L zugehörige Vektoren l_1, \dots, l_n so wählen, daß jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ die Form

$$(2.1) \quad T(\sum \mu_i l_i) = \sum \varphi(\mu_i) T_i + T(0)$$

hat, wobei die Funktion $\varphi(\tau) = \varphi(\tau; T)$ eine additive 1-1-Abbildung von \mathbb{R} auf sich ist, mit $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(0) = 0$, und die Produktregel $\varphi(\tau\lambda) = \varphi(\tau)\varphi(\lambda)$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in K(L; l_1, \dots, l_n)$ erfüllt. Ist die Bedingung aus (iii) von Satz 2 erfüllt, so gilt Gl. (2.1) für die dortige Basis.

Zum Beweis der obigen Behauptungen benötigen wir mehrere Hilfssätze. Es bestehe $\mathfrak{T}_L^0 \subset \mathfrak{T}_L$ aus allen $T \in \mathfrak{T}_L$, die den Ursprung auf den Ursprung abbilden. Wir können uns auf \mathfrak{T}_L^0 beschränken.

Wir nehmen zunächst an, daß L nicht auf einem entarteten Kegel liegt und mehr als zwei Richtungen enthält. Es gibt dann n linear unabhängige Richtungen in L , da sonst L in einer Hyperebene und somit in einem entarteten Kegel enthalten wäre. Es gilt:

Lemma 1. Sei L nicht in der (mengentheoretischen) Vereinigung zweier Hyperebenen enthalten. Es seien l_1, \dots, l_n vorgegebene linear unabhängige Vektoren aus L . Dann gibt es stets s weitere Richtungen aus L , für ein geeignetes $1 \leq s \leq n-1$, so daß Folgendes gilt: Es gibt eine Umnummerierung von l_1, \dots, l_n , Indizes $1 < r_1, \dots, < r_s = n$ und Zahlen $\mu_j \neq 0$, so daß sich die s weiteren Vektoren ausdrücken lassen als

$$(2.2) \quad \begin{aligned} l_{n+1} &= \sum_{j=1}^{r_1} \mu_j l_j \\ l_{n+i+1} &= \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_j^{(i)} \mu_j l_j + \sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}} \mu_j l_j, \quad i = 1, \dots, s-1 \end{aligned}$$

mit der Zusatzbedingung, daß für jedes $i = 1, \dots, s-1$ mindestens eine der Zahlen $\lambda_j^{(i)}$ gleich 1 ist.

Die n linear unabhängigen Vektoren l_1, \dots, l_n sollen *standard-normiert* heißen, wenn es Vektoren $l_{n+i} \in L$ der Form (2.2) mit $\mu_j = 1$ gibt, $j = 1, \dots, n$. Setzt man oben $\hat{l}_j = \mu_j l_j$, dann sind $\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n$ standard-normiert.

Beweis. Würde aus $\sum \lambda_i l_i \in L$ stets folgen, daß höchstens ein λ_i ungleich Null ist, so läge L in der Vereinigung der von l_1, \dots, l_{n-1} und l_2, \dots, l_n aufgespannten Hyperebenen. Es gibt also ein $r_1 > 1$ und $\mu_j \neq 0$, $j = 1, \dots, r_1$, so daß $\sum_{j=1}^{r_1} \mu_j l_j \in L$, bei geeigneter Numerierung von $\{l_1, \dots, l_n\}$. Nun seien bereits $r_1, \dots, r_i, \lambda_k^{(\alpha)}$ und μ_j definiert, $k = 1, \dots, r_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, i-1$ und $j = 1, \dots, r_i$. Wenn

$r_i < n$ ist, gibt es ein $r_{i+1} > r_i$, eine geeignete Numerierung von $\{l_j; j > r_i\}$, Zahlen $\mu_j \neq 0$, $j = r_i + 1, \dots, r_{i+1}$ und Zahlen $\lambda_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, r_i$, die nicht alle verschwinden, so daß l_{n+i+1} , gegeben durch Gl. (2.2), in L liegt; denn anderenfalls läge L in der Vereinigung der von $\{l_1, \dots, l_r\}$ und von $\{l_{r+1}, \dots\}$ aufgespannten Unterräume. Wir können ein $\lambda_j^{(i)}$ gleich 1 wählen. QED.

Es sei $l \in L$. Dann bildet $T \in \mathfrak{T}_L$ die Gerade $\{x; x = \tau l + a, -\infty < \tau < \infty\}$ auf eine Gerade ab, die für $\tau = 0$ durch $T(a)$ und für $\tau = 1$ durch $T(l+a)$ geht. Also kann man schreiben

$$(2.3) \quad T(\tau l + a) = \varphi(\tau; l, a)[T(l+a) - T(a)] + T(a),$$

wobei $\varphi(\tau) = \varphi(\tau; l, a)$ eine von l, a und T abhängige 1-1-Abbildung von \mathbb{R} auf sich ist mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Wir zeigen, daß φ unabhängig von a ist.

Lemma 2. L liege nicht in der Vereinigung zweier Hyperebenen, und es sei $T \in \mathfrak{T}_L$. Dann gilt mit der Bezeichnung von Gl. (2.3)

$$\varphi(\tau; l, a) = \varphi(\tau; l, 0)$$

für alle $l \in L$ und alle $a \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Es sei $l' \in L$ nicht parallel zu l . Wir zeigen zunächst

$$(2.4) \quad \varphi(\tau; l, a) = \varphi(\tau; l, l' + a).$$

Wenn das Bild der Ebene $\{x; x = \tau l + \tau' l' + a, -\infty < \tau, \tau' < \infty\}$ wieder in einer Ebene liegt, dann gehen die Geraden in τ bzw. τ' auf jeweils parallele Geraden. Aus den Parallelsätzen der Elementargeometrie folgt dann mit $\tau' = 0$ und $\tau' = 1$ für alle τ

$$\varphi(\tau; l, a)[T(l+a) - T(a)] = \varphi(\tau; l, l' + a)[T(l+l'+a) - T(l'+a)].$$

Daraus ergibt sich $\varphi(\tau; l, a) = c\varphi(\tau; l, l' + a)$. Mit $\tau = 1$ erhält man $c = 1$.

Liegt das Bild *nicht* in einer Ebene, so wenden wir Gl. (2.3) zuerst auf τl und dann auf $\tau' l'$ an und erhalten

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &T(\tau l + \tau' l' + a) - T(\tau l + a) \\ &= \varphi(\tau; l, \tau' l' + a)\varphi(\tau'; l', l + a)[T(l+l'+a) - T(l+a)] \\ &\quad + \varphi(\tau'; l', a)\{1 - \varphi(\tau; l, \tau' l' + a)\}[T(l'+a) - T(a)] \\ &\quad + \{\varphi(\tau; l, \tau' l' + a) - \varphi(\tau; l, a)\}[T(l+a) - T(a)]. \end{aligned}$$

Für feste τ ist die linke Seite eine Gerade in τ' durch 0, also von der Form $\varphi(\tau'; \tau) b(\tau)$, wobei $\varphi(\tau'; \tau)$ in τ' eine eindeutige Funktion von \mathbb{R} auf \mathbb{R} und $b(\tau)$ ein Vektor ungleich 0 ist. Da das Bild nicht in einer Ebene liegt, sind die Ausdrücke in den drei eckigen Klammern linear unabhängig. Deshalb folgt aus dem letzten Term mit einer von τ abhängigen Konstanten

$$(2.6) \quad \varphi(\tau; l, \tau' l' + a) - \varphi(\tau; l, a) = c(\tau)\varphi(\tau'; \tau).$$

Offenbar gilt $c(1) = 0$. Wäre $c(\tau_0) \neq 0$ für irgendein $\tau_0 \neq 1$, dann durchliefe die linke Seite von Gl. (2.6) als Funktion von τ ganz \mathbb{R} . Es gäbe also ein τ_0 derart, daß $\varphi(\tau_0; l, \tau_0 l + a) = 1$ wäre; das würde aber $\tau_0 = 1$ bedeuten. Also gilt $c(\tau) = 0$, d.h., Gl. (2.4).

Nun kann man zu jedem $l \in L$ n linear unabhängige $l'_1, \dots, l'_n \in L$ finden, von denen keines parallel zu l ist; denn zunächst kann man l mit $l'_1, \dots, l'_{n-1} \in L$ zu einer Basis ergänzen, und dann gibt es ein $l'_n \in L$, das weder in der von l, l'_1, \dots, l'_{n-2} noch der von l'_1, \dots, l'_{n-1} aufgespannten Hyperebene liegt. Mit $a = \sum \alpha_i l'_i$ setze man in Gl. (2.4) sukzessive $l' = \alpha_i l'_i$, $i = 1, \dots, n$. Daraus folgt die Behauptung. QED.

Lemma 3. L liege nicht in der Vereinigung zweier Hyperebenen, und es sei $T \in \mathfrak{T}_L^0$. Dann ist die in Gl. (2.3) eingeführte Funktion $\varphi(\tau; l)$ additiv in τ , und es gilt daher $\varphi(q\tau; l) = q\varphi(\tau; l)$ für alle rationalen q .

Beweis. Aus Gl. (2.3) erhält man mit der Abkürzung $\varphi(\tau; l) =: \psi(\tau)$:

$$(2.7) \quad \psi(\tau_1 + \tau_2)T(l) = T(\tau_1 l + \tau_2 l) = [\psi(\tau_1)\{\psi(\tau_2 + 1) - \psi(\tau_2)\} + \psi(\tau_2)]T(l).$$

Die rechte Seite muß symmetrisch in τ_1 und τ_2 sein; setzt man in der daraus resultierenden Identität $\tau_1 = -1$, so ergibt sich

$$(2.8) \quad \psi(-1)\psi(\tau_2 + 1) = -\psi(\tau_2) + \psi(-1).$$

Wählt man jetzt in Gl. (2.7) $\tau_2 = -\tau_1 = \tau$ und setzt für $\psi(\tau + 1)$ Gl. (2.8) ein, so erhält man

$$\psi(\tau) = -\psi(-\tau) \left\{ 1 - \left[1 + \frac{1}{\psi(-1)} \right] \psi(\tau) \right\}.$$

Wäre die eckige Klammer ungleich 0, so gäbe es ein $\tau_0 \neq 0$, derart daß die geschweifte Klammer verschwände. Dann wäre aber $\psi(\tau_0) = 0$. Also gilt $\psi(-1) = -1$. Aus Gl. (2.8) folgt dann $\psi(\tau_2 + 1) = \psi(\tau_2) + 1$ und aus Gl. (2.7) die Additivität. Daraus ergibt sich die zweite Behauptung des Lemmas in der üblichen Schlußweise. QED.

Wenn l_1, \dots, l_n n linear unabhängige Vektoren aus L sind, dann kann man Gl. (2.3) sukzessive auf $T(\sum \mu_i l_i)$ anwenden. Setzt man zur Abkürzung $T_i := T(l_i)$ und $\varphi_i(\tau) := \varphi(\tau; l_i)$, so erhält man für $T \in \mathfrak{T}_L^0$ den allgemeinen Ausdruck

$$(2.9) \quad T(\sum \mu_i l_i) = \sum_{r=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_r} \varphi_{i_1}(\mu_{i_1}) \dots \varphi_{i_r}(\mu_{i_r}) T_{i_1 \dots i_r},$$

wobei die genaue Form der Vektoren $T_{i_1 \dots i_r}$ für $r \geq 2$ keine Rolle spielen wird. Zur Vereinfachung setzen wir $I := \{i_1, \dots, i_r\}$, $|I| := r$, $T_{i_1 \dots i_r} := T_I$ und $\varphi_I(\mu) = \prod_{i \in I} \varphi_i(\mu_i)$. Man kann also die rechte Seite von Gl. (2.9) als eine

Summe über alle nichtleeren Teilmengen von $I_n := \{1, \dots, n\}$ schreiben. Die folgende Aufspaltung wird sich als nützlich erweisen:

$$(2.10) \quad T(\sum \mu_i l_i) = \sum \varphi_i(\mu_i) T_i + \sum_{\substack{J \subset I \\ 0 \leq |J| \leq n-2}} \varphi_J(\mu) \sum_{\{i < j\} \cap J = \emptyset} \varphi_i(\mu_i) \varphi_j(\mu_j) T_{\{i, j\} \cup J},$$

wobei wir $\varphi_J(\mu) = 1$ setzen für $J = \emptyset$.

Wir wollen zeigen (Lemma 6), daß $T_I = 0$ ist für $|I| \geq 3$. Dazu benötigen wir zunächst Lemma 4 und 5, wobei das letztere auch später von zentraler Bedeutung ist.

Lemma 4. Es seien $l_1, \dots, l_n \in L$ linear unabhängig, und sei $T \in \mathfrak{T}_L^0$ durch Gl. (2.9/10) gegeben. Dann gilt für jedes $l = \sum \lambda_i l_i \in L$ und jedes $J \subset \{1, \dots, n\}$ mit $0 \leq |J| \leq n-2$

$$(2.11) \quad \sum_{\{i < j\} \cap J = \emptyset} \varphi_i(\lambda_i) \varphi_j(\lambda_j) T_{\{i, j\} \cup J} = 0.$$

Beweis. Es sei $a = \sum \alpha_i l_i$ beliebig vorgegeben. Da $\{\tau l + a; \tau \in \mathbb{R}\}$ auf eine Gerade abgebildet wird, gilt für alle rationalen Zahlen q nach Lemma 3 und Gl. (2.9)

$$q[T(l + a) - T(a)] + T(a) = T(ql + a) = \sum_{I \subset I_n} \varphi_I(q\lambda + \alpha) T_I.$$

Da die linke Seite linear in q ist, müssen auf der rechten, wenn man nach Potenzen von q ordnet, alle quadratischen und höheren Terme verschwinden. Die Additivität von φ_i und Ausmultiplikation ergibt für den Koeffizienten von q^2

$$\sum_{\substack{J \subset I_n \\ 0 \leq |J| \leq n-2}} \varphi_J(\alpha) \sum_{\{i < j\} \cup J = \emptyset} \varphi_i(\lambda_i) \varphi_j(\lambda_j) T_{\{i, j\} \cup J}.$$

Diese Gleichung muß identisch in $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ erfüllt sein. Da $\varphi_i(\alpha_i)$ frei wählbar ist und $\varphi_J(\alpha) \neq \varphi_{J'}(\alpha)$ für $J \neq J'$ gilt, folgt Gl. (2.11) durch Koeffizientenvergleich. QED.

Wir beweisen jetzt eine zentrale *Produktregel*.

Lemma 5. Seien $l_1, \dots, l_n \in L$ im Sinne von Lemma 1 standard-normiert und $T \in \mathfrak{T}_L^0$. Dann sind die in Gl. (2.9) auftretenden φ_i 's unabhängig von i , $\varphi_1(\tau) = \dots = \varphi_n(\tau) =: \varphi(\tau)$, und φ erfüllt

$$(2.12) \quad \varphi(\tau\lambda + \alpha) = \varphi(\tau)\varphi(\lambda) + \varphi(\alpha)$$

für alle $\tau, \alpha \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in K(L; l_1, \dots, l_n)$.

Beweis. a) Sei $l = \sum \lambda_i l_i \in L$ beliebig. Wir zeigen zunächst

$$(2.13) \quad \varphi(\tau; l) \varphi_i(\lambda_i) - \varphi_i(\tau\lambda_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \tau \in \mathbb{R}.$$

Nun, aus Lemma 4 und Gl. (2.10) folgt

$$q(\tau; l) T(l) = T(\tau l) = \sum_i q_i(\tau \lambda_i) T_i.$$

Wegen $q(1; l) = 1$ kann man $T(l)$ durch die T_i s ausdrücken und erhält

$$(2.14) \quad \sum_i \{q(\tau; 1) q_i(\lambda_i) - q_i(\tau \lambda_i)\} T_i = 0.$$

Wenn T_1, \dots, T_n linear unabhängig sind, folgt Gl. (2.13) sofort. Im Fall der linearen Abhängigkeit bemerken wir, daß wegen der Eineindeutigkeit von T nicht alle T_I mit $|I| \geq 2$ verschwinden können; denn aus $\sum \beta_i T_i = 0$, nicht alle β_i gleich 0, würde sonst folgen, daß $b := \sum q_i^{-1}(\beta_i) l_i \neq 0$ ist, aber $T(b) = 0$ gilt. Also können in Gl. (2.11) von Lemma 4 nicht alle $T_{\{i,j\} \cup J}$ für alle J verschwinden. Für jedes solche J können wir eine Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus den $\{T_{\{i,j\} \cup J}\}$ wählen, etwa $S_i^{(J)}, \dots, S_{m_J}^{(J)}$, und die restlichen nach ihnen entwickeln, etwa $T_{\{i,j\} \cup J}$ mit Koeffizienten $\alpha_{i,j}^{(J,m)}$, wobei nicht alle von ihnen verschwinden. Definieren wir für jedes solche J und $m = 1, \dots, m_J$ die symmetrische $n \times n$ -Matrix $A^{(J,m)}$ durch die Matrixelemente ($i \leq j$)

$$A_{ij}^{(J,m)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } \{i, j\} \cap J \neq \emptyset \\ \frac{1}{2} \alpha_{ij}^{(J,m)} & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist Gl. (2.11) äquivalent zu

$$(2.15) \quad \sum_{i,j=1}^n q_i(\lambda_i) q_j(\lambda_j) A_{ij}^{(J,m)} = 0.$$

Da mit $l \in L$ auch $(\tau + \tau')l \in L$ gilt für beliebige $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$, gilt Gl. (2.15) auch, wenn man λ_k durch $(\tau + \tau')\lambda_k$ ersetzt, $k = 1, \dots, n$. Wegen der Additivität von q_k und der Symmetrie der Matrix erhält man durch Ausmultiplikation

$$(2.16) \quad \sum_{i,j} q_i(\tau \lambda_i) q_j(\tau' \lambda_j) A_{ij}^{(J,m)} = 0.$$

Nun gibt es endlich viele linear unabhängige Funktionen $\psi_1(\tau), \dots, \psi_N(\tau)$, nach denen man die linke Seite von Gl. (2.13) entwickeln kann,

$$(2.17) \quad q(\tau; l) q_i(\lambda_i) - q_i(\tau \lambda_i) = \sum_v \beta_{iv} \psi_v(\tau), \quad i = 1, \dots, n.$$

Wir nehmen an, daß nicht alle β_{iv} verschwinden. Multipliziert man beide Seiten mit T_i und summiert über i , so erhält man links Null wegen Gl. (2.14). Aus der linearen Unabhängigkeit von ψ_1, \dots, ψ_N folgt also

$$(2.18) \quad \sum_{i=1}^n \beta_{iv} T_i = 0, \quad v = 1, \dots, N.$$

Jetzt multiplizieren wir Gl. (2.17) für i und τ mit derjenigen für j und τ' , multiplizieren die resultierende Gleichung mit $A_{ij}^{(J,m)}$ und summieren über i und j . Nach Gl. (2.16) erhält man auf der linken Seite 0, so daß für die rechte gilt

$$0 = \sum_{v'} \sum_v \sum_{i,j} A_{ij}^{(J,m)} \beta_{iv} \beta_{jv'} \psi_v(\tau) \varphi_{v'}(\tau').$$

Faßt man τ' als Variable auf, so erkennt man aus der linearen Unabhängigkeit von ψ_1, \dots, ψ_N , daß jeder Term der Summe über v' verschwindet. Analog verschwindet auch anschließend jeder Term der Summe über v . Also gilt für jedes $v, v', 0 \leq |J| \leq n-2$ und $m = 1, \dots, m_J$

$$\sum_{i,j} \beta_{iv} \beta_{jv'} A_{ij}^{(J,m)} = 0.$$

Daraus folgt aber für jedes $0 \leq |J| \leq n-2$

$$(2.19) \quad \sum_{\{i,j\} \cup J = \emptyset} \beta_{iv} \beta_{jv} T_{\{i,j\} \cup J} = 0, \quad v = 1, \dots, N.$$

Nach Annahme gibt es ein v , so daß $b := \sum_i q_i^{-1}(\beta_{iv}) l_i \neq 0$ gilt. Berechnet man jetzt $T(b)$ mit Hilfe von Gl. (2.10), so folgt aus Gl. (2.18/19) $T(b) = 0$, im Widerspruch zur Eineindeutigkeit von T . Also verschwinden alle β_{iv} in Gl. (2.17), und Gl. (2.13) ist bewiesen.

b) Die Behauptung des Lemmas folgt jetzt aus Gl. (2.13) und Lemma 1. Wenn in $l = \sum \lambda_i l_i \in L$ etwa $\lambda_j = \lambda_k = 1$ ist für festes j, k , dann folgt aus Gl. (2.13)

$$q_j(\tau) = q(\tau; l) = q_k(\tau).$$

Nach geeigneter Ummumerierung von l_1, \dots, l_n können wir für l nacheinander die Vektoren l_{n+i} von Lemma 1 nehmen, in denen jeweils zwei Koeffizienten gleich 1 sind. Also folgt $q_1(\tau) = \dots = q_n(\tau) =: \varphi(\tau)$. Lemma 3 ergibt die Additivität von φ .

Sei jetzt $l = \sum \lambda_i l_i \in L$ beliebig vorgegeben und etwa $\lambda_j \neq 0$ für ein festes j . Aus Gl. (2.13) folgt

$$q\left(\tau; \frac{1}{\lambda_j} l\right) q(\lambda_i/\lambda_j) = q(\tau \lambda_i/\lambda_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

Für $i = j$ ergibt sich $q\left(\tau; \frac{1}{\lambda_j} l\right) = \varphi(\tau)$, und damit hat man Gl. (2.12) für $\lambda = \lambda_i/\lambda_j$. Wenn Gl. (2.12) für λ' und λ'' gilt, dann offenbar auch für $\lambda = \lambda' \pm \lambda''$ und $\lambda = \lambda' \lambda''$. Ist $\lambda' \neq 0$, so folgt

$$\varphi(\tau) = \varphi\left(\frac{\tau}{\lambda'} \lambda'\right) = \varphi(\tau/\lambda') \varphi(\lambda').$$

Für $\tau = 1$ ergibt das $\varphi(1/\lambda') = \varphi(\lambda')^{-1}$. Durch Einsetzen erhält man

$$\varphi(\tau/\lambda') = \varphi(\tau) \varphi(1/\lambda').$$

Damit gilt Gl. (2.12) auch für λ''/λ' und damit für ganz $K(L; l_1, \dots, l_n)$. QED.

Nun können wir Gl. (2.9) für T wesentlich vereinfachen. Dabei geht zum ersten Male die Nichtentartung des Kegels ein.

Lemma 6. L liege nicht auf einem entarteten Kegel. Die linear unabhängigen Vektoren $l_1, \dots, l_n \in L$ seien standard-normiert. Dann hat jedes $T \in \mathfrak{T}_L^0$ die Form

$$(2.20) \quad T(\sum_i \mu_i l_i) = \sum_i \varphi(\mu_i) T_i + \sum_{i < j} \varphi(\mu_i) \varphi(\mu_j) T_{ij}.$$

Dabei erfüllt φ Gl. (2.12) und insbesondere $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Ferner sind T_1, \dots, T_n linear unabhängig.

Beweis. Wir nehmen an, daß für $r \geq 3$ nicht alle $T_{i_1 \dots i_r}$ in Gl. (2.9) verschwinden. Für jedes $l = \sum \lambda_i l_i \in L$ erfüllen dann die Größen $\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n)$ die quadratische Gleichung (2.15), für irgendein J mit $|J| \geq 1$, wobei nicht alle $A_{ij}^{(j)}$ Null sind. Jedoch gilt $A_{ij}^{(j)} = 0$ für i oder j in J . Deshalb charakterisiert die Matrix \hat{A} mit Elementen

$$\hat{A}_{ij} = \varphi^{-1}(A_{ij}^{(j)})$$

einen entarteten Kegel. Nach Lemma 5 und Gl. (2.15) gilt für jedes $l = \sum \lambda_i l_i \in L$, für das ein $\lambda_k = 1$ ist,

$$\varphi(\sum \hat{A}_{ij} \lambda_i \lambda_j) = \sum A_{ij}^{(j)} \varphi(\lambda_i) \varphi(\lambda_j) = 0.$$

Folglich liegt L auf dem durch \hat{A} bestimmten entarteten Kegel, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit folgt Gl. (2.20).

Wären nun T_1, \dots, T_n linear abhängig, so gäbe es Zahlen β_1, \dots, β_n , die nicht alle verschwinden, mit $\sum \beta_i T_i = 0$. Wir setzen $b := \sum \varphi^{-1}(\beta_i) l_i$. Dann ist $b \neq -b$, aber nach Gl. (2.20) gilt $T(b) = T(-b)$, im Widerspruch zur Eineindeutigkeit von T . QED.

Es bleibt zu zeigen, daß der quadratische Term in Gl. (2.20) verschwindet. Wir bemerken, daß bisher noch keine Annahme über die Dimension des Bildraumes benutzt wurde. Die eine Richtung von Zusatz 2 und ein Teil von Proposition 1 folgt jetzt aus

Lemma 7. L sei in keinem Kegel 2. Ordnung enthalten, und $l_1, \dots, l_n \in L$ seien standard-normiert. Sei $T \in \mathfrak{T}_L^0$. Dann gilt in Gl. (2.20) $T_{ij} = 0$ für alle $i < j$.

Beweis. Wenn nicht alle T_{ij} verschwinden, dann erfüllen für jedes $l = \sum \lambda_i l_i$ die Größen $\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n)$ Gl. (2.15) für $J = \emptyset$. Wie im Beweis von Lemma 6 schließt man jetzt, daß L auf einem Kegel liegt. QED.

Im folgenden setzen wir voraus, daß auch der Bildraum die Dimension n hat. Dann bilden nach Lemma 6 T_1, \dots, T_n eine Basis. Die Entwicklungskoeffizienten von T_{ij} nach dieser Basis seien $a_{ij}^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$. Sei $A^{(k)}$ die

symmetrische Matrix mit Elementen $A_{ii}^{(k)} = 0$, $i = 1, \dots, n$ und $A_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} a_{ij}^{(k)}$ für $i < j$. Es bezeichne μ bzw. $\varphi(\mu)$ einen Spaltenvektor mit Elementen μ_1, \dots, μ_n bzw. $\varphi(\mu_1), \dots, \varphi(\mu_n)$; analog für Matrizen. In Matrixschreibweise lautet Gl. (2.20) dann

$$(2.21) \quad T(\sum \mu_i l_i) = \sum_{i=1}^n [\varphi(\mu_i) + \varphi(\mu)^t A^{(i)} \varphi(\mu)] T_i.$$

Um die quadratischen Terme in Gl. (2.21) auszuschließen, wollen wir die Eineindeutigkeit von T ausnutzen. Dazu beweisen wir zunächst:

Lemma 8. Die Abbildung T des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^n sei durch Gl. (2.21) gegeben, wobei φ eine additive 1-1-Abbildung von \mathbb{R} auf sich sei mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann ist T genau dann eineindeutig, wenn es zu jedem $\alpha \neq 0$ ein β gibt, so daß gilt:

$$(2.22) \quad \sum_i \beta_i \alpha_i = 1$$

$$(2.23) \quad \sum_i \beta_i A^{(i)} \alpha = 0.$$

Beweis. Sei $\alpha \neq 0$ vorgegeben. Wir setzen $a := \sum \varphi^{-1}(\alpha_i) l_i$. T ist genau dann eineindeutig, wenn die Gleichung

$$(2.24) \quad T(x + a) = T(x)$$

für kein α eine Lösung besitzt. Definiert man ξ durch $x = \sum \varphi^{-1}(\xi_i) l_i$ und berechnet dann beide Seiten von Gl. (2.24) gemäß Gl. (2.21), so wird Gl. (2.24) äquivalent zum inhomogenen linearen Gleichungssystem

$$(2.25) \quad 2\xi^t A^{(i)} \alpha + \alpha^t A^{(i)} \alpha + \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

für ξ_1, \dots, ξ_n . Sei $C = (C_{ij})$ eine invertierbare $n \times n$ -Matrix, derart daß

$$(2.26) \quad \sum_i C_{ki} \alpha_i = \delta_{1k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Wir setzen

$$(2.27) \quad B^{(k)} := \sum_i C_{ki} A^{(i)}.$$

Multiplikation von Gl. (2.25) mit C_{ki} und Summation über i liefert das äquivalente System

$$(2.28) \quad 2\xi^t B^{(k)} \alpha = -\alpha^t B^{(k)} \alpha - \delta_{1k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Die letzten $n-1$ Gleichungen sind verträglich, denn $\xi = -\frac{1}{2}\alpha$ befriedigt die Gleichungen für $k \geq 2$. Wenn für $k=1$ die Koeffizientenzeile der linken Seite keine Linearkombination aus denjenigen für $k \geq 2$ ist, dann ist das System widerspruchsfrei und besitzt eine Lösung. Ist die erste Zeile dagegen eine Linearkombination der übrigen, etwa

$$(2.29) \quad \sum_k \gamma_k B^{(k)} \alpha = 0, \quad \gamma_1 = 1,$$

dann ist das System wegen des Gliedes $\delta_{11} = 1$ in der ersten Gleichung widerspruchsvoll und besitzt keine Lösung.

T ist also genau dann eineindeutig, wenn Gl. (2.29) für alle $\alpha \neq 0$ erfüllt ist. Setzt man für $B^{(k)}$ Gl. (2.27) ein und definiert

$$\beta_i = \sum_k \gamma_k C_{ki},$$

so erhält man die zweite Bedingung des Lemmas. Aus Gl. (2.26) folgt die erste. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so folgt Gl. (2.29) mit $\gamma_1 = 1$, wenn man $\gamma = (C^t)^{-1}\beta$ setzt. QED.

Nun können wir mit den Bedingungen von Satz 2 schließen, daß die quadratischen Glieder in Gl. (2.20/21) für T verschwinden.

Lemma 9. Es sei $l_1, \dots, l_n \in L$ standard-normiert und $T \in \mathfrak{L}_L^0$ durch Gl. (2.21) gegeben. Es gelte eine der folgenden Bedingungen:

(i) L ist in einem *eindeutig* bestimmten nichtentarteten Kegel 2. Ordnung enthalten.

(ii) L ist *nicht* in einem entarteten Kegel 2. Ordnung enthalten und $K(L; l_1, \dots, l_n) = \mathbb{R}$.

Dann verschwinden alle $A^{(i)}$ in Gl. (2.21).

Beweis. Wir nehmen an, daß nicht alle $A^{(i)}$ verschwinden. Nach Lemma 4 und Lemma 5 liegt L auf den durch $\varphi^{-1}(A^{(i)})$ gegebenen Kegeln, falls $A^{(i)} \neq 0$. Wir wollen zeigen, daß L dann wegen der Eineindeutigkeit auf einem entarteten Kegel liegen muß, im Widerspruch zu (i) und (ii). Nach Lemma 8 gibt es ein $\alpha \neq 0$ und ein β , so daß $\sum \beta_i A^{(i)} \neq 0$ und $\sum \beta_i A^{(i)} \alpha = 0$.

Zunächst zu (ii). Nach der Produktregel, die nach Annahme (ii) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, folgt, daß L auf dem durch $\sum \varphi^{-1}(\beta_i) \varphi^{-1}(A^{(i)}) \neq 0$ gegebenen Kegel liegt. Dieser ist aber wegen $\sum \varphi^{-1}(\beta_i) \varphi^{-1}(A^{(i)}) \varphi^{-1}(\alpha) = 0$ entartet.

Nun zu (i). Da der Kegel, auf dem L liegt, eindeutig ist, sind alle $\varphi^{-1}(A^{(i)})$ Vielfache einer Matrix, etwa $\varphi^{-1}(A^{(i)}) = \gamma_i Q$. Wir wollen zeigen, daß dann auch die $A^{(i)}$ Vielfache einer Matrix sind; dies geht nicht direkt, da die Produktregel nicht für beliebige Produkte gilt. Man kann jedoch $Q = (Q_{ij})$ so wählen, daß $Q_{ik} \in K(L; l_1, \dots, l_n)$ gilt; denn wegen der Eineindeutigkeit des Kegels gibt es $\frac{1}{2}n(n+1) - 1$ Vektoren $l^{(k)} = \sum_i \lambda_i^{(k)} l_i \in L$, derart daß die Gleichungen

$$\sum_{i,j} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)} Q_{ij} = 0, \quad k = 1, \dots, n(n+1) - 1,$$

Q_{ij} bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmen. Der Spaltenrang des Systems ist also $\frac{1}{2}n(n+1) - 1$. Bringt man eine geeignete Spalte auf die rechte Seite, so erhält man alle Lösungen durch Multiplikation mit der inversen Koeffizientenmatrix der linken Seite. Deren Koeffizienten sind aber aus $K(L; l_1, \dots, l_n)$, wenn die $\{l^{(k)}\}$ so gewählt sind, daß für jedes k ein $\lambda_i^{(k)}$ gleich 1 ist.

Mit $Q_{ij} \in K(L; l_1, \dots, l_n)$ folgt aus der Produktregel $A^{(i)} = \gamma_i Q'$ mit $\gamma'_i := \varphi(\gamma_i)$ und $Q' := \varphi(Q)$. Damit gilt $0 \neq \sum \beta_i A^{(i)} = (\sum \gamma'_i \beta_i) Q'$ und deshalb $Q' \alpha = 0$. Mit $\alpha' := \varphi^{-1}(\alpha) \neq 0$ folgt nun $Q \alpha' = \varphi(Q' \alpha) = 0$. QED.

Da man nach Lemma 1 zu jedem System n linear unabhängiger Richtungen aus L zugehörige standard-normierte Vektoren finden kann, folgt Proposition 1 aus den Lemmas 6, 7 und 9, insbesondere also die Additivität. Es bleibt die andere Richtung von Satz 2 und Zusatz 2 zu zeigen.

Gegenbeispiele. 1. L liege auf einem entarteten Kegel $Q(x, x) = 0$, $n \geq 2$. Sei $l_0 \neq 0$ so, daß $Q(l_0, a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gilt. Wir definieren

$$(2.30) \quad T(x) := x + Q(x, x)l_0.$$

T ist offenbar nicht additiv. Sei $l \neq 0$ und $Q(l, l) = 0$. Dann gilt

$$T(\tau l + a) = \tau l + a + 2\tau Q(l, a)l_0 + Q(a, a)l_0.$$

Die Summe der τ -Glieder ist ungleich 0, denn für l parallel zu l_0 verschwindet der zweite Termin in τ . Folglich ist die rechte Seite wieder eine Gerade. Wählt man l_0 als n -ten Basisvektor, so sieht man sofort direkt oder mit Lemma 8, daß T eindeutig ist. *Wenn Q nicht entartet ist, ist 1-1-verteilt.*

2. Es sei $m > n \geq 2$, und L liege auf einem Kegel $Q(x, x) = 0$. Es sei $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^n$. Dann beweist offenbar

$$(2.31) \quad T(x) := x + Q(x, x)b$$

die Notwendigkeit der Bedingung von Zusatz 2. Wir bemerken, daß für $b \in \mathbb{R}^n$ die Eineindeutigkeit verletzt sein kann.

3. $n = 2$: L bestehe aus den Vielfachen von l_1 und l_2 . Dann ist, wenn φ_1 und φ_2 beliebige nichtadditive 1-1-Abbildungen von \mathbb{R} auf sich sind, die Abbildung T ,

$$(2.32) \quad T(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) = \varphi_1(\alpha_1)l_1 + \varphi_2(\alpha_2)l_2$$

aus \mathfrak{L}_L , aber nicht additiv.

4. Teil (i) von Satz 2: L liege im Durchschnitt zweier nichtentarteter Kegel, aber auf keinem entarteten Kegel. Die Dimension n ist dann notwendigerweise gerade.

Wir betrachten zuerst $n = 4$ und die Matrix

$$(2.33) \quad Q(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \varrho \\ 0 & 0 & \varrho & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$(2.34) \quad \det Q(\lambda) = \lambda^4 - \varrho^2 \lambda^2 + \varrho^2.$$

Für die Nullstellen der rechten Seite gilt

$$\lambda^2 = \varrho^2/2 \pm \varrho \sqrt{\varrho^2/4 - 1},$$

d.h., für $|\varrho| < 2$ existiert keine reelle Nullstelle, und $Q(\lambda)$ ist für alle λ nicht-entartet. L bestehe aus den Viertupeln

$$(2.35) \quad \begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= (1, 0, 1, 0), & \mathbf{l}_2 &= (1, 0, -1, 0), & \mathbf{l}_3 &= (1, 0, 0, 1), & \mathbf{l}_4 &= (0, 1, 0, 1); \\ \mathbf{l}_5 &= (1, 0, 0, -1), & \mathbf{l}_6 &= (0, 1, 0, -1), & \mathbf{l}_7 &= (\varrho^2/2 - 1, \varrho, 1, -\varrho^2/2) \\ \mathbf{l}_8 &= (1, \varrho - 1, \varrho - 1, -1). \end{aligned}$$

Dann liegt L im Durchschnitt der durch $Q(0)$ und $(\varepsilon_i \delta_{ik})$ mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$ gegebenen Kegel, d.h., auf jedem durch $Q(\lambda)$ gegebenen Kegel, jedoch nicht auf einem entarteten Kegel.

Es sei jetzt $\varrho = 1 - \sqrt{2}$ und $\varrho' = 1 + \sqrt{2}$ und $K(\varrho)$ die Erweiterung des rationalen Zahlkörpers durch ϱ . Da ϱ und ϱ' Wurzeln derselben irreduziblen Gleichung $x^2 - 2x - 1 = 0$ sind, gibt es einen Automorphismus ψ von $K(\varrho)$, der ϱ in ϱ' überführt [4]. Wir betrachten jetzt \mathbb{R} als Vektorraum über $K(\varrho)$ und führen eine Hamelbasis $\{f_\sigma\}_{\sigma \in M}$ in \mathbb{R} bezüglich $K(\varrho)$ ein; man kann $f_1 = 1$ wählen. Jedes $\tau \in \mathbb{R}$ ist dann von der Form

$$\tau = \sum_{\sigma \in M} \tau_\sigma f_\sigma, \quad \tau_\sigma \in K(\varrho),$$

wobei nur endlich viele τ_σ ungleich Null sind. Wir definieren die eindeutige Abbildung φ von \mathbb{R} auf sich durch

$$(2.36) \quad \varphi(\tau) := \sum_{\sigma} \varphi(\tau_\sigma) f_\sigma.$$

Dann gilt $\varphi(\tau\lambda + \alpha) = \varphi(\tau)\varphi(\lambda) + \varphi(\alpha)$ für alle $\tau, \alpha \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in K(\varrho)$. Es sei $Q' := \varphi(Q(0))$ die Matrix, die man aus $Q(0)$ durch Ersetzen von ϱ durch ϱ' in $Q(0)$ erhält. Da $\varrho' > 2$ gilt, ist Q' entartet. Es sei β ein Nullvektor von Q' . Wir definieren die Abbildung T des \mathbb{R}_4 in sich durch

$$(2.37) \quad T(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \{\varphi(\mathbf{x})^t Q' \varphi(\mathbf{x})\} \beta.$$

Wählt man im Bildraum ein Koordinatensystem, in dem β ein Basisvektor ist, so sieht man sofort, daß T eindeutig ist und \mathbb{R}^4 auf sich abbildet. Man kann auch $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_4$ als Basis in \mathbb{R}^4 wählen; da deren Komponenten ganzzahlig sind, nimmt T die Form (2.21) an mit $A^{(i)} = \beta_i B' Q' B$, wobei B nur ganzzahlige Elemente hat. Lemma 8 liefert dann ebenfalls die Eindeutigkeit. Da die Komponenten von $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_8$ in $K(\varrho)$ liegen, folgt sofort für $i = 1, \dots, 8$

$$\varphi(\mathbf{l}_i)^t Q' \varphi(\mathbf{l}_i) = \varphi(\mathbf{l}_i^t Q(0) \mathbf{l}_i) = 0.$$

Wie im Beispiel 1. bildet also T jede Gerade mit Richtungsvektor aus L auf eine Gerade ab.

Dieses Beispiel läßt sich sofort auf beliebige höhere geradzahlige Dimensionen verallgemeinern. Man braucht aus $Q(\lambda)$ nur eine $2n \times 2n$ -Matrix durch Hinzu-fügen von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

in der rechten unteren Ecke zu machen. Man findet dann stets $\frac{1}{2} n'(n' + 1) - 2$, $n' = 2n$, Vektoren mit Komponenten in $K(\varrho)$, die auf den dadurch bestimmten nichtentarteten Kegeln, aber auf keinem entarteten Kegel liegen. Statt $\varrho = 1 - \sqrt{2}$ und $\varrho' = 1 + \sqrt{2}$ kann man natürlich auch andere Zahlen nehmen, insbesondere transzendente, da einfache transzendente Körpererweiterungen stets äquivalent sind [4].

3. Die Linearität. Diskussion

Wir zeigen zunächst, daß die Bedingungen (i) und (ii) von Satz 1 für die Linearität hinreichend sind. Dazu nehmen wir zunächst an, daß für irgendeine im Sinne von Lemma 1 standard-normierte Basis $\{l_1, \dots, l_n\}$ der Körper $K(L; l_1, \dots, l_n)$ gleich dem reellen Zahlkörper ist. Dann gilt für jedes $T \in \mathfrak{T}_L$ Gl. (2.1) von Proposition 1, wobei φ ein Automorphismus von \mathbb{R} ist. Da dieser nur den trivialen besitzt, gilt $\varphi(\tau) \equiv \tau$.

Um die Unabhängigkeit dieser Argumentation von einer speziellen Basis zu erhalten, benutzen wir ein Resultat von Artin und Schreier [1], nach dem keine endliche Erweiterung eines echten Unterkörpers von \mathbb{R} ganz \mathbb{R} ergeben kann. Damit beweisen wir jetzt

Lemma 10. Gilt $K(L; h_1, \dots, h_n) = \mathbb{R}$ für irgendeine Basis $\{h_1, \dots, h_n\}$ von \mathbb{R}^n , so gilt dies für jede Basis.

Beweis. Sei $\{h'_1, \dots, h'_n\}$ eine andere Basis. Der Übergang werde mit der Matrix $A = (a_{ik})$ beschrieben. Wenn $l = \sum \lambda_i h_i = \sum \lambda'_i h'_i \in L$ ist, gilt für $\lambda'_j \neq 0$

$$\lambda'_i / \lambda'_j = \sum_k a_{ik} \lambda_k / \sum_k a_{jk} \lambda_k.$$

Deshalb ist $K(L; h_1, \dots, h_n)$ in dem Körper enthalten, der durch Adjunktion der Elemente der Matrix A^{-1} zu $K(L; h'_1, \dots, h'_n)$ entsteht, da man durch Multiplikation mit a_{i1}^{-1} und Summation sowie durch Inversenbildung alle λ'_j / λ'_i erhält. Wenn dieser Erweiterungskörper gleich \mathbb{R} ist, muß nach dem zitierten Resultat dasselbe für $K(L; h'_1, \dots, h'_n)$ gelten. QED.

Damit ist die eine Richtung von Satz 1 bewiesen. Wegen Satz 2 ist Bedingung (i) sicherlich notwendig. Es bleibt die Notwendigkeit von Bedingung (ii) zu zeigen.

Gegenbeispiel. 5. Es sei $K := K(L; l_1, \dots, l_n) \neq \mathbb{R}$ für irgendeine Basis aus L . Jede Richtung in L kann in dieser Basis durch eine Linearkombination mit Koeffizienten aus K charakterisiert werden. Wir betrachten jetzt \mathbb{R} als unendlichdimensionalen Vektorraum über K und führen eine Hamelbasis $\{f_\alpha\}$ in \mathbb{R} bezüglich K ein. Wir definieren die Funktion $\varphi(\tau)$ auf \mathbb{R} als bezüglich K lineares Funktional auf \mathbb{R} , indem wir die Werte von φ auf der Hamelbasis vorgeben, etwa $\varphi(f_\alpha) = f_\alpha$ für $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2$, und $\varphi(f_{\alpha_1}) = f_{\alpha_2}$, $\varphi(f_{\alpha_2}) = f_{\alpha_1}$, mit beliebig vorgegebenen $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Dann hat

$$T(\sum \mu_i l_i) := \sum \varphi(\mu_i) l_i$$

die gewünschte Eigenschaft. Denn T ist eine nichtlineare 1 — 1-Abbildung von \mathbb{R}^n auf sich, und für $l = \sum \lambda_i l_i$ mit $\lambda_i \in K$ gilt

$$T(\tau l + \sum \mu_i l_i) = \sum \lambda_i \varphi(\tau) l_i + \sum \varphi(\mu_i) l_i.$$

Dies ist wieder eine Gerade.

Damit ist Satz 1 endgültig bewiesen. Zusatz 1 folgt sofort aus Zusatz 2.

Diskussion. Wenn $T \in \mathfrak{T}_L$ in einem einzigen Punkt stetig ist oder eine einzige Gerade mit Richtungsvektor aus L in einem Punkt stetig abbildet, dann folgt aus der Additivität von φ und der Normierung $\varphi(1) = 1$ sofort, daß $\varphi(\tau) \equiv \tau$ gilt. Dann ist also T bereits linear, wenn L nicht auf einem entarteten Kegel 2. Ordnung liegt, da Lemma 9 in diesem Falle in trivialer Weise aus Lemma 8 folgt.

Satz 2 und Proposition 1, die Additivität der Abbildungen in \mathfrak{T}_L , gilt auch, wenn man \mathbb{R} durch einen beliebigen anderen kommutativen Körper ersetzt, dessen Charakteristik 0 oder größer als die Raumdimension n ist. Alle Hilfssätze und Beweise in § 2 lassen sich fast wörtlich auf diesen allgemeineren Fall übertragen.

Satz 1 gilt für solche allgemeineren Körper nur in abgewandelter Form: Die Abbildungen sind bis auf einen Körperautomorphismus linear, wenn $K(L; l_1, \dots, l_n)$ für eine standard-normierte Basis den gesamten Körper ergibt und L auf keinem entarteten Kegel liegt. Da Lemma 10 nicht mehr zu gelten braucht, reicht es in der Regel nicht mehr, wenn $K(L; h_1, \dots, h_n)$ für irgendeine Basis den gesamten Körper ergibt.

4. Zur geometrischen Interpretation

Da das Ergebnis der vorliegenden Arbeit als eine geometrische Aussage gedeutet werden kann, scheint es wünschenswert, auch den algebraischen Teil der Voraussetzungen geometrisch zu interpretieren. Zu diesem Zweck haben wir die Kombination von Richtungen in geometrischen Operationen auszudrücken.

Seien l_1, l_2, \dots, l_{k+1} linear abhängige Richtungen, und jeweils k seien linear unabhängig. Dann existiert ein bis auf Dehnung und bis auf Permutation der

Seiten eindeutiges geschlossenes Polygon, dessen Seiten zu jeweils einem der l_i parallel sind. Sei s_i eine Seite des Polygons mit den Endpunkten P_i und P_{i+1} und g_i die von s_i erzeugte Gerade. Einen Punkt $P \in g_i$ bezeichnen wir als konstruierbar, wenn $\vec{P_i P}$ rationales Vielfaches von $\vec{P_i P_{i+1}}$ ist. Mit anderen Worten, ein Punkt ist konstruierbar, wenn er mit Hilfe des Strahlensatzes (Zeichnen von Geraden und Parallelverschiebung von Geraden und Strecken) aus den Eckpunkten des obigen Polygons gewonnen werden kann. Zeichnen wir nun eine Gerade durch zwei konstruierbare Punkte, so soll die dadurch repräsentierte Richtung konstruierbar heißen. Selbstverständlich ist die gewonnene Richtung von einer Dehnung des Polygons unabhängig. Diese Konstruktion führt uns zur folgenden

Definition. Sei L ein Büschel von Richtungen, so nennen wir L rational abgeschlossen, wenn L unter der obigen Konstruktionsvorschrift abgeschlossen ist.

Sei L ein Büschel von Richtungen, so nennen wir eine neue Richtung l „ L -konstruierbar“, wenn l in dem kleinsten, L umfassenden rational abgeschlossenen Richtungsbüschel enthalten ist.

Wir wenden uns jetzt der geometrischen Interpretation unseres Ergebnisses zu. Dabei wollen wir nur solche Abbildungen betrachten, die schon der Bedingung von Satz 2 genügen, also additiv sind. Wir erhalten:

Lemma 11. Im \mathbb{R}^n sei ein Büschel L von Richtungen gegeben. Ferner sei T eine Abbildung vom \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m mit den Eigenschaften

- T ist eineindeutig,
- T bildet jede Gerade der Form $\{x_0 + \tau l; \tau \in \mathbb{R}\}$ mit $l \in L$ wieder auf eine Gerade ab,
- T ist additiv und läßt den Nullpunkt fest.

Dann wird jede Gerade der Form $\{x_0 + \tau l'; \tau \in \mathbb{R}\}$ wieder auf eine Gerade abgebildet, wenn die Richtung l' L -konstruierbar ist.

Beweis. Sei \hat{L} das kleinste Büschel von Richtungen, so daß die Geraden $\{x_0 + \tau l'; \tau \in \mathbb{R}\}$, $l' \in \hat{L}$, von allen Abbildungen, die die Bedingungen a — c erfüllen, wieder auf Geraden abgebildet werden. Wir haben zu zeigen, daß \hat{L} rational abgeschlossen ist. Seien l_1, l_2, \dots, l_{k+1} linear abhängige Richtungen aus \hat{L} , von denen jeweils k linear unabhängig sind, so existieren Zahlen μ_i mit $\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i l_i = 0$. Sei $i < j \leq k+1$ und a der Ortsvektor eines konstruierbaren Punktes auf der Geraden $\{\sum_{\alpha=1}^{i-1} \mu_\alpha l_\alpha + \tau l_i\}$, so existiert eine rationale Zahl ϱ_1 mit

$$a = \sum_{\alpha=1}^{i-1} \mu_\alpha l_\alpha + \varrho_1 \mu_i l_i.$$

Ebenso erhalten wir für einen konstruierbaren Punkt auf der j -ten Geraden,

$$b = \sum_{\alpha=1}^{j-1} \mu_{\alpha} l_{\alpha} + \varrho_2 \mu_j l_j.$$

Somit wird

$$\tau(a-b) = \tau \left\{ \sum_{\alpha=i+2}^{j-1} \mu_{\alpha} l_{\alpha} + \varrho_2 \mu_j l_j + (1-\varrho_1) \mu_i l_i \right\}.$$

Damit erhält man

$$T(\tau(a-b)) = \sum_{\alpha=i+2}^{j-1} \varphi(\tau; \mu_{\alpha} l_{\alpha}) T(\mu_{\alpha} l_{\alpha}) + \varphi(\tau \varrho_2; \mu_j l_j) T(\mu_j l_j) + \varphi(\tau(1-\varrho_1); \mu_i l_i) T(\mu_i l_i).$$

Da $\sum \mu_{\alpha} l_{\alpha} = 0$ ist, gilt

$$\varphi(\tau; \mu_i l_i) = \varphi(\tau; \mu_j l_j) = \varphi(\tau),$$

und da ϱ_2 und $1-\varrho_1$ rational sind, erhalten wir

$$T(\tau(a-b)) = \varphi(\tau) \left\{ \sum_{\alpha=i+2}^j T(\mu_{\alpha} l_{\alpha}) + \varrho_2 T(\mu_j l_j) + (1-\varrho_1) T(\mu_i l_i) \right\}.$$

Also wird die Gerade durch die durch a und b gekennzeichneten Punkte wieder auf eine Gerade abgebildet. Somit ist L rational abgeschlossen. QED.

Als nächstes wollen wir den Zusammenhang zwischen rational abgeschlossenen Richtungsbüscheln und Unterkörpern der reellen Zahlen herstellen. Dazu benötigen wir spezielle Richtungsbüschel, die eine Art Kopplungseigenschaft besitzen. In Anlehnung an Gl. (2.2) von Lemma 1 definieren wir:

Definition. 1. Sei L ein Büschel von Richtungen im \mathbb{R}^n , so nennen wir zwei Richtungen l_1, l_2 gekoppelt bezüglich L , wenn wir eine endliche Anzahl von Richtungen

$$l_{v,i}; \quad v = 1 \dots N, \quad i = 1 \dots k_v + 1; \quad k_v \leq n$$

in L finden können mit den Eigenschaften

- a) $l_{1,1} = l_1, l_{N, k_N+1} = l_2$,
- b) $l_{v, k_v+1} = l_{v+1, 1}$,
- c) für jedes v sind die $k_v + 1$ Vektoren $l_{v,1} \dots l_{v, k_v+1}$ linear abhängig, jedoch jeweils k_v dieser Vektoren sind linear unabhängig.

2. Ein Büschel L von Richtungen nennen wir gekoppelt, wenn alle Paare von Richtungen aus L bezüglich L gekoppelt sind.

Wir wollen nun zur Charakterisierung rational abgeschlossener Richtungsbüschel kommen. Wir beginnen mit dem Spezialfall des zweidimensionalen Raumes.

Lemma 12. Sei L ein Richtungsbüschel im \mathbb{R}^2 , das mindestens drei verschiedene Richtungen enthält. Aus L seien drei verschiedene Richtungen herausgegriffen, die durch die Vektoren l_1, l_2, l_3 repräsentiert werden und die der Gleichung $l_1 + l_2 + l_3 = 0$ genügen.

L ist genau dann rational abgeschlossen, wenn ein Unterkörper K der reellen Zahlen existiert mit der Eigenschaft, daß die durch $\{l_1 + \kappa l_2; \kappa \in K\}$ und l_2 repräsentierten Richtungen L (bis auf Vielfache) ausschöpfen.

Der Körper K hängt dabei nur von L und nicht von der Wahl von l_1, l_2, l_3 ab.

Beweis. 1. Das Richtungsbüschel sei rational abgeschlossen. Die Richtungen seien repräsentiert durch l_2 und $\{l_1 + \kappa l_2, \kappa \in K\}$. Wir haben zu zeigen, daß K ein Körper ist.

$\alpha)$ $\kappa \in K$ impliziert $q\kappa \in K$ für jedes rationale q . $l_1, \kappa l_2$ und $-(l_1 + \kappa l_2)$ bilden ein geschlossenes Dreieck. Deshalb charakterisiert $l_1 + q\kappa l_2$ einen konstruierbaren Punkt P auf der Geraden durch l_1 und $l_1 + \kappa l_2$. Somit repräsentiert $l_1 + q\kappa l_2 = \overrightarrow{OP}$ eine konstruierbare Richtung.

$\beta)$ $\kappa_1, \kappa_2 \in K$ impliziert $\kappa_1 + \kappa_2 \in K$. Sei $\kappa_1 \neq \kappa_2$, so bilden $l_1 + \kappa_1 l_2, (\kappa_2 - \kappa_1) l_2, -(l_1 + \kappa_2 l_2)$ ein geschlossenes Dreieck. Also ergibt $l_1 + \kappa_1 l_2 + \frac{1}{2}(\kappa_1 - \kappa_2) l_2$ einen konstruierbaren Punkt P . Somit repräsentiert $\overrightarrow{OP} = l_1 + \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) l_2$ eine Richtung in L . Damit ist $l_1, \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) l_2$ und $-(l_1 + \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) l_2)$ wieder ein geschlossenes Dreieck und $l_1 + (\kappa_1 + \kappa_2) l_2$ Ortsvektor eines konstruierbaren Punktes. Also gilt $\kappa_1 + \kappa_2 \in K$. Ist $\kappa_1 = \kappa_2$, so liefert die letzte Konstruktion das gewünschte Ergebnis.

$\gamma)$ $0 \neq \kappa \in K$ impliziert $\kappa^{-1} \in K$. Da mit l_1 und l_2 auch $l_1 + l_2$ in L ist, folgt daß auch $l_1 - l_2$ in L ist. Deshalb bilden $\frac{1}{2}(\kappa + 1)(l_1 + l_2), \frac{1}{2}(\kappa - 1)(-l_1 + l_2), -(l_1 + \kappa l_2)$ ein geschlossenes Dreieck. Nun stellt

$$\frac{1}{2}(\kappa + 1)(l_1 + l_2) - \frac{1}{2}(\kappa - 1)(-l_1 + l_2) = \kappa l_1 + l_2$$

einen konstruierbaren Punkt P dar, und somit repräsentiert $\overrightarrow{OP} = \kappa(l_1 + \kappa^{-1} l_2)$ eine konstruierbare Richtung. Folglich ist $\kappa^{-1} \in K$.

$\delta)$ $\kappa_1, \kappa_2 \in K \Rightarrow \kappa_1 \kappa_2 \in K$. Wegen $(\kappa_1 + \kappa_2)^2 = \kappa_1^2 + 2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2$ genügt es zu zeigen, daß mit jedem $\kappa \in K$ auch κ^2 ein Element von K ist. Sei $\kappa \in K$, so bilden

$$l_1 + \frac{1}{\kappa} l_2, \quad \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right)(l_1 + 2\kappa l_2), \quad -\left(2 - \frac{1}{\kappa^2}\right)(l_1 + \kappa l_2)$$

ein geschlossenes Dreieck. Somit ergibt

$$l_1 + \frac{1}{\kappa} l_2 - \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right)(l_1 + 2\kappa l_2) = \frac{1}{\kappa^2} l_1 + \frac{1}{\kappa^2} (3\kappa - 2\kappa^3) l_2$$

einen konstruierbaren Punkt P . Da \overrightarrow{OP} eine konstruierbare Richtung repräsentiert, folgt $3\kappa - 2\kappa^3 \in K$ und deshalb auch $\kappa^3 \in K$. Da nun mit κ auch $1 + \kappa$

in K ist, folgt $(1 + \varkappa)^3 = 1 + 3\varkappa + 3\varkappa^2 + \varkappa^3 \in K$ und daraus ergibt sich $\varkappa^2 \in K$. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung des Lemmas gezeigt.

2. Wir nehmen jetzt an, daß K einen Körper bildet. Wir wollen zeigen, daß L rational abgeschlossen ist.

Seien drei verschiedene Richtungen gegeben durch die Vektoren

$$\lambda_i l_1 + \mu_i l_2, \quad i = 1, 2, 3$$

mit $\sum \lambda_i = \sum \mu_i = 0$ und $\mu_i/\lambda_i \in K$, wenn $\lambda_i \neq 0$ ist. Da die drei Richtungen verschieden sind, kann höchstens ein λ_i verschwinden. Diese Bedingungen können jedoch nur bestehen, wenn eine reelle Zahl $r \neq 0$ und Zahlen $\varkappa_i, k_i \in K$, existieren mit

$$\lambda_i = r \varkappa_i, \quad \mu_i = r k_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Seien nun P_1 und P_2 zwei konstruierbare Punkte; dann können wir annehmen, daß P_1 auf der Geraden $\{\tau(\lambda_1 l_1 + \mu_1 l_2); \tau \in \mathbb{R}\}$ und P_2 auf der Geraden $\{\lambda_1 l_1 + \mu_1 l_2 + \tau(\lambda_2 l_1 + \mu_2 l_2); \tau \in \mathbb{R}\}$ liegt. Also existieren zwei rationale Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 mit $P_1 \equiv \varrho_1(\lambda_1 l_1 + \mu_1 l_2)$ und $P_2 \equiv \lambda_1 l_1 + \mu_1 l_2 + \varrho_2(\lambda_2 l_1 + \mu_2 l_2)$. Damit wird

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} &= (1 - \varrho_1)(\lambda_1 l_1 + \mu_1 l_2) + \varrho_2(\lambda_2 l_1 + \mu_2 l_2) \\ &= \{(1 - \varrho_1)\lambda_1 + \varrho_2 \lambda_2\} l_1 + \{(1 - \varrho_1)\mu_1 + \varrho_2 \mu_2\} l_2. \end{aligned}$$

Wenn nun $(1 - \varrho_1)\lambda_2 + \varrho_2 \lambda_2 \neq 0$ ist, so folgt wegen der obigen Darstellung von λ_i und μ_i

$$\frac{(1 + \varrho_1)\mu_1 + \varrho_2 \mu_2}{(1 - \varrho_1)\lambda_1 + \varrho_2 \lambda_2} = \frac{(1 - \varrho_1)k_1 + \varrho_2 k_2}{(1 - \varrho_1)\varkappa_1 + \varrho_2 \varkappa_2} \in K.$$

Also repräsentiert die durch P_1, P_2 gehende Gerade eine Richtung, die zu L gehört. Somit ist L rational abgeschlossen.

3. Es bleibt noch zu zeigen, daß der Körper K von der Wahl des Ausgangsdreiecks unabhängig ist.

Seien drei verschiedene Richtungen durch die Vektoren $l'_i = \lambda_i l_1 + \mu_i l_2$, $i = 1, 2, 3$, mit $\sum \lambda_i = \sum \mu_i = 0$ gegeben. Dann gilt wieder

$$\lambda_i = r \varkappa_i, \quad \mu_i = r k_i, \quad 0 \neq r \in \mathbb{R}, \quad \varkappa_i, k_i \in K.$$

Lösen wir nach l_1 und l_2 auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} l_1 &= D^{-1}\{\mu_2 l'_1 - \mu_1 l'_2\} \\ l_2 &= D^{-1}\{-\lambda_2 l'_1 + \lambda_1 l'_2\}, \quad D = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1. \end{aligned}$$

Sei eine Richtung durch den Vektor $l_1 + \varkappa l_2$, $\varkappa \in K$, gegeben. Im neuen System ist dann die Richtung gegeben durch

$$D^{-1}\{(\mu_2 - \varkappa \lambda_2) l'_1 + (-\mu_1 + \varkappa \lambda_1) l'_2\}.$$

d. h. durch l'_2 , wenn $\mu_2 - \varkappa \lambda_2 = 0$, oder durch $l'_1 + \varkappa' l'_2$ mit $\varkappa' = \frac{-\mu_1 + \varkappa \lambda_1}{\mu_2 - \varkappa \lambda_2}$, wenn $\mu_2 - \varkappa \lambda_2 \neq 0$ ist.

Wegen der speziellen Gestalt von λ_i und μ_i erhalten wir im zweiten Fall

$$\varkappa' = \frac{-k_1 + \varkappa \varkappa_1}{k_2 - \varkappa \varkappa_2} \in K.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Den allgemeinen Fall wollen wir nun auf diesen Spezialfall zurückführen. Wir benötigen dazu jedoch einen weiteren Begriff, der in zwei Dimensionen nicht auftritt.

Definition. Es seien zwei Untermengen von L der Form (l_1, l_2) und (l_3, \dots, l_k) gegeben, wobei die Vektoren jedesmal paarweise nichtparallel sein mögen. Die von ihnen aufgespannten Unterräume $E(l_1, l_2)$ und $E(l_3, \dots, l_k)$ mögen den eindimensionalen Durchschnitt $\{\tau l_0; \tau \in \mathbb{R}\}$ haben. Wenn dann stets auch $l_0 \in L$ gilt, so sagen wir, daß L die *Durchschnittseigenschaft* besitzt.

Die Bedeutung dieser Definition ist klar; denn wenn wir eine Abbildung betrachten, die eineindeutig ist und $E(l_1, l_2)$ sowie $E(l_3, l_4, \dots, l_k)$ jeweils wieder auf lineare Unterräume abbilden, so wird die Gerade $\{\tau l_0; \tau \in \mathbb{R}\}$ wieder auf eine Gerade abgebildet.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir die

Proposition 2. Sei L ein Richtungsbüschel im \mathbb{R}^n , welches n linear unabhängige Richtungen enthält.

Ferner sei L gekoppelt und besitze die Durchschnittseigenschaft. Dann sind die folgenden Eigenschaften 1), 2), 3) äquivalent.

- 1) L ist rational abgeschlossen.
- 2) $\alpha)$ Zu je k linear unabhängigen Richtungsvektoren $l_1 \dots l_k \in L$ existieren weitere $\frac{1}{2}k(k+1)$ Vektoren l_ν , derart daß man aus den $\frac{1}{2}k(k+1)$ Richtungen ein Simplex bilden kann.
 $\beta)$ Zu je zwei beliebigen verschiedenen Richtungen $l_1, l_2 \in L$ ist die Untermenge der Richtungen $L_{l_1, l_2} = \{l \in L; l = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2\}$ in sich rational abgeschlossen.
 $\gamma)$ Der zu dem Richtungssystem L_{l_1, l_2} gehörende Körper K_{l_1, l_2} ist unabhängig von der Wahl der zwei Richtungen l_1, l_2 .
- 3) Zu jeder Basis e_1, \dots, e_n des \mathbb{R}^n existiert eine nicht ausgeartete Matrix $\alpha_{ik} \in R$, $i, k = 1 \dots n$, und ein Unterkörper K der reellen Zahlen, derart daß die Menge der Richtungen $\{l = \sum_{i,k=1}^n \varkappa_i \alpha_{ik} e_i; \varkappa_i \in K\}$ ganz L ausschöpft. Dabei ist K unabhängig von der Basis.

Beweis. 1) \Rightarrow 2): $\beta)$ Sei L rational abgeschlossen, so ist auch L_{l_1, l_2} in sich rational abgeschlossen, wenn L_{l_1, l_2} in sich gekoppelt ist. Deshalb genügt es zu zeigen,

daß L_{l_1, l_2} in sich gekoppelt ist. Da nun L_{l_1, l_2} ein zweidimensionales Richtungssystem ist, genügt es zu zeigen, daß es eine dritte von l_1 und l_2 verschiedene Richtung enthält. Dazu betrachten wir ein System von $k+1$ Richtungen $l_i \in L, i = 1 \dots k+1$, derart, daß die l_i linear abhängig sind, jedoch jeweils k von ihnen linear unabhängig sind. Da L rational abgeschlossen ist, folgt, daß mit jedem geschlossenen Polygon, welches aus den l_i konstruierbar ist, auch diejenigen Richtungen zu L gehören, welche durch die Diagonalen des Polygons repräsentiert werden. Also genügt es für die Kopplung nur Tripel von Richtungen zu betrachten, die in einer Ebene liegen. Als nächstes betrachten wir jetzt zwei benachbarte Zyklen, d.h. $\{l_1, l_2, l_3\}$ und $\{l_3, l_4, l_5\}$, derart, daß l_1, l_2, l_3 und l_3, l_4, l_5 nichtentartete Dreiecke bilden, d.h.,

$$\begin{aligned}\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 &= 0, \\ \mu_3 l_3 + \mu_4 l_4 + \mu_5 l_5 &= 0.\end{aligned}$$

Ist nun die Richtung l_5 in der von l_1 und l_2 aufgespannten Ebene enthalten und l_5 und l_1 linear unabhängig, so bilden $\{l_1, l_5, l_3\}$ oder $\{l_1, l_5, l_2\}$ ein nichtentartetes Dreieck. Ist dagegen l_5 nicht in der von l_1 und l_2 aufgespannten Ebene enthalten, so ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} l_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} l_2 - \frac{\mu_4}{\mu_3} l_4 - \frac{\mu_5}{\mu_3} l_5 = 0,$$

d.h. $\{l_1, l_2, l_4, l_5\}$ sind linear abhängig, jedoch alle Untergruppen von 3 Elementen sind linear unabhängig. Also existiert nach dem vorherigen eine Richtung l' , derart daß $\{l_1, l', l_5\}$ ein nichtentartetes Dreieck bilden. Durch Iteration dieses Verfahrens ist damit gezeigt, daß zu je zwei verschiedenen Richtungen $l_1, l_2 \in L$ eine dritte existiert, die von l_1, l_2 verschieden ist und in der von l_1 und l_2 aufgespannten Ebene liegt. Damit ist der zweite Teil der Bedingung von 2) bewiesen.

2 α) Den ersten Teil beweisen wir durch Induktion. Für $k=2$ haben wir diesen Teil gerade bewiesen. Wir nehmen jetzt an, wir hätten die zweite Aussage für $r=2, 3, \dots, k$ bewiesen. Wir haben also die Gültigkeit für $r=k+1$ nachzuweisen. Es seien $l'_i, i=1 \dots k+1$, linear unabhängige Richtungen aus L . Dann existieren nach Induktionsvoraussetzung Zahlen $0 \neq \mu_i \in \mathbb{R}, i=1 \dots k$, derart daß $\mu_i l'_i - \mu_j l'_j \in L$ für $i \neq j \leq k$ gilt. Wir setzen $\mu_i l'_i = l_i$. Nach dem schon bewiesenen Teil existiert weiter eine Zahl $0 \neq \mu_{k+1} \in \mathbb{R}$ mit $l_1 - \mu_{k+1} l'_{k+1} \in L$. Wir setzen ebenfalls $\mu_{k+1} l'_{k+1} = l_{k+1}$. Sei jetzt $1 < j < k+1$, so können wir eine Richtung $l \in L$ finden, derart daß die Gerade $\{l_j + \tau l\}$ die Gerade $\{\tau l_{k+1}\}$ schneidet. Es sei $\tau_0 l_{k+1}$ der Schnittpunkt. Ist $\tau_0 = 1$, so ist $l_j - l_{k+1} \in L$. Ist $\tau_0 \neq 1$, so liegen die 4 Richtungen $(l_j - l_1), (l_1 - l_{k+1}), (1 - \tau_0) l_{k+1}, (\tau_0 l_{k+1} + l_j)$ in einem \mathbb{R}^3 , und jeweils drei von ihnen sind linear unabhängig. Ferner bilden diese Vektoren ein geschlossenes Viereck. Nun ist $l_j - l_{k+1}$ eine Diagonale und somit eine konstruierbare Richtung;

d.h., $l_j - l_{k+1} \in L$. Damit ist 2 α) bewiesen, und es bleibt noch der dritte Teil zu zeigen.

2 γ) Da die Aussage für den zweidimensionalen Raum schon bewiesen ist, können wir \mathbb{R}^n mit $n \geq 3$ voraussetzen. Es seien zunächst drei linear unabhängige Richtungen $l_1, l_2, l_3 \in L$ gegeben. Nach dem schon Bewiesenen können wir annehmen, daß auch $l_1 - l_2, l_2 - l_3$ und $l_3 - l_1$ zu L gehören. Wir wollen zunächst zeigen, daß $K_{l_1 l_2} = K_{l_2 l_3}$ ist. Aus Symmetriegründen ist es ausreichend, $K_{l_1 l_2} \subset K_{l_2 l_3}$ zu beweisen. Es sei $\alpha \in K_{l_1 l_2}$ mit $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, dann ist die Richtung $\alpha l_2 - l_1$ in $L_{l_1 l_2}$ enthalten. Nun sind $(\alpha l_2 - l_1), (1 - \alpha) l_2, (l_3 - l_2), l_1 - l_3$ vier verschiedene Richtungen, von denen jeweils drei linear unabhängig sind und die ein geschlossenes Viereck bilden. Da nun jede Diagonale einer konstruierbaren Richtung entspricht, ist $\alpha l_2 - l_3 \in L$. Daraus folgt $-\alpha^{-1} \in K_{l_2 l_3}$, und da $K_{l_1 l_2}$ ein Körper ist, folgt $\alpha \in K_{l_2 l_3}$. Somit gilt also $K_{l_1 l_2} = K_{l_2 l_3}$. Seien nun l'_1, l'_2 bzw. l'_3, l'_4 aus L , die jeweils die gleichen Ebenen aufspannen, und von denen jeweils drei Vektoren linear unabhängig sind. Somit erhalten wir nach dem schon Bewiesenen:

$$K_{l_1 l_2} = K_{l'_1 l'_2} = K_{l'_2 l'_3} = K_{l'_3 l'_4} = K_{l_3 l_4}.$$

Damit sind also die Eigenschaften von 2) alle bewiesen.

Wir bemerken noch, daß wir bis jetzt von der Durchschnittseigenschaft von L keinen Gebrauch gemacht haben. Sie wird erst wichtig für die folgende Argumentation.

2) \Rightarrow 3): Da die Aussage 3) invariant ist gegenüber nicht ausgearteten Transformationen, genügt es, sie für ein spezielles Basissystem zu beweisen. Wir wählen zu diesem Zweck $l_1 \dots l_n \in L$ mit l_1, \dots, l_n linear unabhängig und $l_i - l_k \in L$ für $i \neq k$. Eine solche Wahl ist nach 2 α) möglich. Als Körper K wählen wir jetzt den durch 2 γ) festgelegten Körper. Ferner können wir voraussetzen, daß $n \geq 3$ ist. Sei jetzt $l' \in L$ mit $l' \neq l_i, i=1 \dots n$. Dann existiert nach 2 α) eine Zahl β mit $\beta l' - l_1 \in L$. Wir setzen $\beta l' = l$. Ferner existiert für $i \neq 1$ ein γ_i mit $l - \gamma_i l_i \in L$. Nun ist

$$\begin{aligned}\{\lambda l_1 + \mu l_i; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \cap \{l + \lambda(l_1 - l) + \mu(\gamma_i l_i - l); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ = \{l_1 + \lambda(\gamma_i l_i - l_1); \lambda \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Also ist wegen der Durchschnittseigenschaft $(\gamma_i l_i - l_1) \in L$, d.h. $\gamma_i \in K$. Da nun $\gamma_i l_i - l \in L$ und $\gamma_i \in K$ ist, folgt auch $l_i - l \in L$. Sei nun $l = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i l_i$ mit $\mu_i \neq 0$ für $i=1 \dots k, \mu_i = 0$ für $i=k+1 \dots n$. Sei $k \geq 3$, so ist der Durchschnitt der Unterräume $\{\lambda l_k + \mu l; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ und $\{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i l_i; \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ die Gerade $\{\tau \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i l_i; \tau \in \mathbb{R}\}$. Da l_k, l und $\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i l_i$ in einer Ebene liegen, existiert ein $\alpha \in K$ mit $\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i l_i = l + \alpha l_k$, d.h. $\mu_k \in K$. Wiederholen wir dieses Argument,

so erhalten wir $\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 \in L$ und $\mu_j \in K$ für $j > 2$. Daraus folgt $\mu_2/\mu_1 \in K$, und da ebenfalls $l_1, l_2, l_1 - l_2$, und $(\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2) - l_1 \in L$ sind, folgt

$$l_1 - l_2 = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} l_1 + \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} (\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2).$$

Daraus ergibt sich $-\frac{2}{\mu_1 + \mu_2} \in K$ und somit $\mu_1, \mu_2 \in K$.

Damit haben wir gezeigt, daß jedes Element $l \in L$ von der Gestalt $\lambda \sum \alpha_i l_i$, $\alpha_i \in K$, ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß jedes Element dieser Gestalt in L ist. Den Beweis führen wir durch Induktion. Für Elemente der Gestalt $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2$ ist dieses nach den Voraussetzungen 2 β) und 2 γ) der Fall. Angenommen, wir hätten schon bewiesen, alle Elemente der Gestalt $\sum_{i=1}^k \alpha_i l_i$, $\alpha_i \in K$, seien in L . Sei ferner $\{\alpha_i \in K; i = 1, \dots, k+1\}$ gegeben, so ist $\sum_{i=1}^k \alpha_i l_i =: l' \in L$ und ebenfalls $l' - l_i \in L$ für $i = 1 \dots k$. Damit folgt nach dem schon Bewiesenen, daß auch $l' - l_{k+1} \in L$ gilt. Somit folgt $l' + \alpha_{k+1} l_{k+1} \in L$ für $\alpha_{k+1} \in K$, da $l' + \alpha_{k+1} l_{k+1} \in L', l_{k+1}$ ist. Damit ist also $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i l_i \in L$ und die Bedingung 3 ist bewiesen.

3) \Rightarrow 1): Sei jetzt 3 vorausgesetzt, d.h., schöpfe $\{\sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} e_k; \alpha_{ik} \in K\}$ ganz L aus. Dann sind insbesondere $l_i = \sum_{i,k} \alpha_{ik} e_k$, $i = 1, \dots, n$, linear unabhängige Elemente in L . Wir erhalten also, daß L von $\{\sum_i \alpha_i l_i; \alpha_i \in K\}$ ausgeschöpft wird. Seien nun $l'_j = \sum_i \alpha_{ji} l_i$; $\alpha_{ji} \in K$, und $\sum l'_j = 0$, d. h. $\sum \alpha_{ji} = 0$. Seien q_1 und q_2 rationale Zahlen und $P_1 = q_1 l'_1$, $P_2 = \sum_{i=1}^j l'_i + q_2 l'_{j+1}$, so gilt

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \sum_{i=1}^j l'_i + q_2 l'_{j+1} - q_1 l'_1 = \sum_i \left\{ \sum_{k=1}^j \alpha_{ki} + q_2 \alpha_{j+1,i} - q_1 \alpha_{1i} \right\} l_i \in L,$$

da die Zahlen in den Klammern zu K gehören. Somit ist L rational abgeschlossen.

Dieses Ergebnis erlaubt es uns nun, die Bedeutung des Körpers K geometrisch zu interpretieren. Wir erhalten:

Satz 3. Sei T eine Abbildung des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m mit den Eigenschaften

- T ist eineindeutig;
- T ist additiv;
- T bildet die Geraden der Gestalt $\{x_0 + \tau l; \tau \in \mathbb{R}\}$ für alle $l \in L$ wieder auf Geraden ab.

Wenn L gekoppelt ist, dann gilt:

- Alle Geraden der Gestalt $\{x_0 + \tau l; \tau \in \mathbb{R}\}$ mit $l \in \hat{L}$ werden wieder auf Geraden abgebildet, wobei \hat{L} das kleinste rational abgeschlossene Richtungsbüschel ist, welches die Durchschnittseigenschaft besitzt und welches L enthält.
- Jede Abbildung T mit den Eigenschaften a, b, c ist genau dann linear, wenn das Richtungsbüschel \hat{L} alle Richtungen des \mathbb{R}^n enthält.

Literatur

- E. Artin und O. Schreier, Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927) 225—231. (Vgl. auch: The Collected Papers of Emil Artin, Edited by S. Lang and J. T. Tate. Addison-Wesley 1965, S. 289—295.)
- H.-J. Borchers und G. C. Hegerfeldt, The Structure of Space-Time Transformations. Commun. Math. Phys. 1972 (im Druck).
- G. C. Hegerfeldt, The Lorentz Transformations: Derivation of Linearity and Scale Factor. II Nuovo Cimento A **10** (1972), 257—267.
- B. L. van der Waerden, Algebra. 4. Auflage, Bd. 1. Berlin 1955 (§ 35).
- E. C. Zeeman, Causality Implies the Lorentz Group. J. Math. Phys. **5** (1964) 490—493.

[6] Baricchi, Nuovo Cim. 1968