Zufallsmatrizen und Graßmann-Variablen

Vortrag im Rahmen des Seminars:
Statistische Mechanik ungeordneter Systeme
Dozenten: Dr. Timo Aspelmeier und Dr. Alexander Hartmann
Universität Göttingen
Georg Müller*

15. Juli 2005

Zusammenfassung

In dieser Ausarbeitung soll das gemittelte Spektrum einer Zufallsmatrix berechnet werden, genauer die Zustandsdichte im Gaußschen unitären Ensemble. Das Problem soll unter Benutzung von Graßmann-Variablen mit Hilfe der fermionischen Methode, die z. B. in [4], S. 694ff, zu finden ist, gelöst werden. Daher wird ein Abschnitt über die Graßmann-Variable eingeschoben.

1 Was sind Zufallsmatrizen?

In Arbeiten von Wigner ([8], [9]) wurde zuerst vorgeschlagen, das Spektrum komplexer Systeme, beschrieben durch einen Hamiltonoperator H_{ij} in Matrixdarstellung, mit dem von Zufallsmatrizen zu vergleichen. Dabei sollen diese Matrizen normalverteilte Elemente enthalten, die natürlich auch die Symmetrie des Systems widerspiegeln sollen. Es sind drei Symmmetrien zu unterscheiden (Vgl. [3], S. 89f):

- Der Hamiltonoperator sei invariant unter Zeitumkehr, dann sind nach einem Satz der Quantenmechanik alle Eigenfunktionen reell darstellbar. Die entsprechende Matrix ist offensichtlich reell und symmetrisch. Die entsprechenden Zufallsmatrizen bilden das Gaußsche orthogonale Ensemble.

- In Gegenwart magnetischer Wechselwirkungen wird die Zeitumkehrsymmetrie verletzt und der Hamiltonoperator ist im Allgemeinen eine hermitesche Matrix. Die entsprechenden Zufallsmatrizen bilden das Gaußsche unitäre Ensemble.

- Bei halbzahligem Gesamtspin liegt nach Kramers Theorem (Vgl. z. B. [5], S. 215ff) jeder Zustand zweifach entartet vor, also muss in diesem Fall jeder Eigenwert die Vielfachheit 2 haben. Die Menge der Zufallsmatrizen, die diese Symmetrie aufweist, heißen Gaußsches symplektisches Ensemble.

*Email-Adresse: mail@georg-mueller.net

Das statistische Gewicht einer Matrix H im Gaußschen unitären Ensemble kann also durch folgenden Boltzmannfaktor beschrieben werden:

$$P(H)dH = const\ \exp - \left(\frac{1}{2}\beta N\, tr(HH^\dagger)\right) \prod_{i=1}^{N} dH_{ii} \times \prod_{i\leq j\leq N} d\Re H_{ij} d\Im H_{ij}, \tag{1}$$

wobei der konstante Vorfaktor so zu wählen ist, dass die Verteilung normiert ist, und wobei N im Exponenten eingefügt worden ist, damit an späterer Stelle bequem der thermodynamische Limes $N \to \infty$ ausgeführt werden kann.
In [6] wird die Zufallsmatrizentheorie ausführlich behandelt; hier soll nun allerdings die Zustandsdichte über einen ganz anderen Weg berechnet werden; dafür betrachten wir nun die Resolvente $(z-H)^{-1}$. Ihr gewichtetes Mittel sollte invariant unter allen unitären Transformationen sein, da wir schließlich keine Raumrichtung ausgzeichnet haben und nur die Hermitiztät fordern. Dies kann nur eine Diagonalmatrix erfüllen:

$$\left\langle \left(\frac{1}{z-H}\right)_{jk} \right\rangle = \delta_{jk} F(z). \tag{2}$$

Daraus folgt offensichtlich:

$$NF(z) = \left\langle tr \frac{1}{z-H} \right\rangle. \tag{3}$$

Für die mittlere Zustandsdichte $\rho(\lambda)$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda) &= \frac{1}{N}\left\langle \sum_{i=1}^{N} \delta(\lambda-\lambda_i) \right\rangle \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{N\pi} \left\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha}{(\lambda-\lambda_i)^2+\alpha^2} \right\rangle \\
&= -\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{N\pi} \Im \left\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(\lambda+i\alpha)-\lambda_i} \right\rangle \\
&= -\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{N\pi} \Im \left\langle tr \frac{1}{(\lambda+i\alpha)-H} \right\rangle \\
&= -\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\pi} \Im F(\lambda+i\alpha).
\end{aligned} \tag{4}$$

Unser Ziel ist es also nun, $F(z)$ zu berechnen. Wir wollen die Resolvente als Gaußsches Integral schreiben. Im Folgenden sei $\Im z > 0$. Als erstes stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}
I_+ &= \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j\, d\Im x_j}{\pi}\right) \exp\, i \left\{ \sum_{1\leq k,l\leq N} \bar{x}_k (z-H)_{kl} x_l \right\} \\
&= \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j\, d\Im x_j}{\pi}\right) \prod_{1\leq k,l\leq N} \exp\, i \left\{ \Re x_k (z-H)_{kl} \Re x_l \right\} \exp\, i \{ \Im x_k (z-H)_{kl} \Im x_l \} \\
&= \frac{i^N}{\det(z-H)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Dabei wurde anstelle des gewohnten Minuszeichens ein i geschrieben, damit das Integral auch dann konvergiert, wenn H nicht positiv ist, da $\Im z > 0$ sein soll. Zum Ausrechnen des Integrals wurde eine Hauptachsentransformation durchgeführt. Wir wollen aber $(z-H)^{-1}$ berechnen, dazu fügen wir lineare Terme in den Exponenten ein und lösen mit quadratischer Ergänzung ($u_i \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} I_+ &= \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j \, d\Im x_j}{\pi} \right) \exp\, i \left\{ \sum_{1 \le k,l \le N} \bar{x}_k (z-H)_{kl} x_l + \sum_{1 \le k \le N} (\bar{u}_k x_k + \bar{x}_k u_k) \right\} \\ &= \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j \, d\Im x_j}{\pi} \right) \exp\, i \left\{ (\bar{x}^t + \bar{u}^t (z-H)^{-1})(z-H)(x + (z-H)^{-1} u) - \bar{u}^t (z-H)^{-1} u \right\} \\ &= \frac{i^N \exp\, -i \left\{ u \cdot (z-H)^{-1} u \right\}}{\det(z-H)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Durch zweimaliges partielles Differenzieren erhalten wir die Identität,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 I_+}{\partial \bar{u}_q u_p} \right|_{u=0} &= -\int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j \, d\Im x_j}{\pi} \right) \bar{x}_p x_q \exp\, i \left\{ \sum_{1 \le k,l \le N} \bar{x}_k (z-H)_{kl} x_l \right\} \\ &= -\frac{i^{N+1}}{\det(z-H)} (z-H)^{-1}_{q,p}, \end{aligned} \tag{7}$$

womit durch Mittelung über alle Matrizen nach (1)

$$F(z) = -\frac{i^{-N+1}}{N} \left\langle \det(z-H) \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j \, d\Im x_j}{\pi} \right) x \cdot x \exp\, i \left\{ x \cdot (z-H) x \right\} \right\rangle \tag{8}$$

folgt. Hiermit sind wir allerdings nun vorerst in einer Sackgasse gelandet, da wir die Determinante einer Zufallsmatrix berechnen müssten. Es wird sich zeigen, dass mit Hilfe eines Tricks dieses Problem umgangen werden kann. Dafür müssen Graßmann-Variablen eingeführt werden.

2 Graßmann-Variablen

Graßmann (deutscher Gymnasiallehrer im 19. Jahrhundert) führte die nach ihm benannte antikommutative Algebra ein, um das ebenfalls antikommutative vektorielle Kreuzprodukt genauer zu untersuchen. Während seine Anwendungen somit hauptsächlich geometrischer Natur waren, wurden Mitte des 20. Jahrhunderts von Berezin auch Integrale über Graßmann-Variablen eingeführt ([1], [2]).

2.1 Defintion der Graßmann-Algebra und Grundsätzliches

Es sei $\{\zeta_i\}$, $i = 1..r$ eine Menge von Variablen. Man definiere die Multplikation unter ihnen, so dass

$$\zeta_i \zeta_j = -\zeta_j \zeta_i. \tag{9}$$

Damit folgt natürlich sofort. dass

$$\zeta_i{}^2 = 0 \tag{10}$$

Diese ζ_i heißen Graßmann-Variablen. Die Basis der Graßmann-Algebra soll die folgenden Element enthalten:

$$\begin{aligned}
&1\\
&\zeta_i \quad i = 1...r\\
&\zeta_i\zeta_j \quad i < j\\
&...\\
&\zeta_1\zeta_2...\zeta_r.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe vollständiger Induktion lässt es sich leicht überlegen, dass es 2^r solcher Basiselemente gibt. Die Elemente der Algebra seien komplexe Linearkombinationen dieser Vektoren. Also lässt sich jedes Element schreiben als

$$a = a^{(0)} + \sum_i a_i^{(1)}\zeta_i + \sum_{i<j} a_{ij}^{(2)}\zeta_i\zeta_j + \dots\,, \quad a_{i_1 i_2 .. i_m}^{(m)} \in \mathbb{C} \tag{11}$$

Die Multplikation wird folgendermaßen eingeführt: Für Monome $a = a^{(k)}\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}...\zeta_{i_k}$ und $b = b^{(l)}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}...\zeta_{j_l}$ gilt als Vorschrift

$$ab = a^{(k)}b^{(l)}\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}...\zeta_{i_k}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}...\zeta_{j_l}. \tag{12}$$

Die Multplikation von Linearkombinationen erfolgt so, dass das Distributivgesetz erfüllt wird. Damit wird dann auch das Assoziativgesetz erfüllt, so dass alle Eigenschaften einer Algebra erfüllt sind. Das komplex Konjugierte $\bar{a}$ eines Elements a soll auch zu dieser Algebra gehören und wird für Polynome mit Hilfe von

$$\overline{\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}...\zeta_{i_l}} = \bar{\zeta}_{i_1}\bar{\zeta}_{i_2}...\bar{\zeta}_{i_l} \tag{13}$$

definiert. $\bar{\zeta}_i$ wird nur als weiteres Element der Algebra gefordert, man kann es nicht wie bei den komplexen Zahlen berechnen. Wir definieren aber $\bar{\bar{\zeta}}_i$ folgendermaßen:

$$\bar{\bar{\zeta}}_i = -\zeta_i \tag{14}$$

Diese Definition ist sinnvoll, da z. B. nun

$$\overline{\bar{\zeta}_i\zeta_i} = -\zeta_i\bar{\zeta}_i = \bar{\zeta}_i\zeta_i \tag{15}$$

als reell betrachtet werden kann und ein Analogon zum Betragsquadrat für komplexe Zahlen darstellt. Wir stellen fest, dass die Algebra solche Elemente enthält, die untereinander kommutieren, und solche, die untereinander antikommutieren. Letztere sind natürlich Linearkombinationen von Monomen ungeraden Ranges, die die Menge $\mathcal{A}_-$ bilden, erstere sind Linearkombinationen geraden Ranges, die analog die Menge $\mathcal{A}_+$ bilden. Das Polynom a (11) lässt sich also eindeutig schreiben als

$$a = a_+ + a_-\,, \;\; a_\pm \in \mathcal{A}_\pm \tag{16}$$

Es ist leicht nachvollziehbar, dass alle Elemente aus $\mathcal{A}_+$ untereinander kommutieren und alle Elemente aus $\mathcal{A}_-$ antikommutieren. Aufgrund dieser Einteilung nennt man die Graßmmann-Algebra auch graduierte Algebra. Jedes Element lässt sich noch auf eine andere Art und Weise aufteilen und zwar bezeichnet man $a^{(0)}$ in (11) als gewöhnlichen Anteil $ord(a)$ und den Rest als nilpotenten Anteil $nil(a) = a - a^{(0)}$, da offensichtlich gilt $nil(a)^{r+1} = 0$. Mit Hilfe dieser Aufteilung lassen sich sinnvoll Funktionen auf dieser Algebra definieren. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hinreichend oft differenzierbar, dann schreiben wir

$$f(a) = f(a^{(0)}) + f'(a^{(0)})nil(a) + \frac{1}{2}f''(a^{(0)})nil(a)^2 + ... \,. \tag{17}$$

2.2 Differentiation und Integration

Sei $f(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ eine Funktion mit $\zeta_1, ..., \zeta_n \in \mathcal{A}_-$; es ist offensichtlich, dass ζ_i nur in erster Ordnung auftreten kann. Zur Bildung des Differentialquotienten kann man also ζ_i durch $\Delta\zeta_i$ ersetzen. Um $\Delta\zeta_i$ zu kürzen, kann man es entweder nach links oder nach rechts aus dem jeweiligen Monom herausziehen; dies liefert i. A. unterschiedliche Ergebnisse:

$$f(\zeta_1, ..., \zeta_n) = f(0) + \zeta_i f_l = f(0) + f_r \zeta_i. \tag{18}$$

Somit haben wir eine linksseitige $\frac{\partial}{\partial\zeta_i}$ und eine rechtsseitige Ableitung $\partial/\partial\zeta_i$ definiert. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} &= f_l \\ \partial f/\partial\zeta_i &= f_r. \end{aligned} \tag{19}$$

Wir werden hier nun weiter mit der Linksableitung arbeiten, daher schreiben wir auch beim Integrieren die Differentiale links der Funktion. Die Ableitungen nach ungeraden Variablen antikommutieren auch, wie man sich leicht klar macht:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j} = -\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta_j\partial\zeta_i}. \tag{20}$$

Für Ableitung nach $z \in \mathcal{A}_+$ fällt diese Unterscheidung bei der Differentiation nicht an.

Für bestimmte Integrale über kommutierende Variable gilt bekanntlich Translationsinvarianz $(x, a \in \mathcal{A}_+)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x+a). \tag{21}$$

Dies soll die definierende Eigenschaft von Integralen über ungerade Variablen sein. Man fordert $(\zeta, a \in \mathcal{A}_-)$:

$$\int d\zeta\, f(\zeta) = \int d\zeta\, f(\zeta + a). \tag{22}$$

Dies kann nur erfüllt werden, falls $\int a\, d\zeta = 0$. Daher definiert man:

$$\int d\zeta = 0 \tag{23}$$

$$\int d\zeta\, \zeta = 1. \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Aus dieser Defintion folgt, dass Integration und Linksdifferentiation (wie wir uns geeinigt haben) übereinstimmen:

$$\int d\zeta\, f(\zeta) = \frac{df}{d\zeta}. \tag{26}$$

Jetzt wollen wir, wie oben bereits für komplexe Zahlen bzw. allgemeiner für gerade Varibalen getan, Gaußintegrale über ungerade Variablen berechnen. Das zu berechnende Integral lautet

$$I_- = \int \prod_{1\le k\le N} (d\zeta_k d\bar{\zeta}_k) \exp i \left\{ \sum_{1\le k,l\le N} \bar{\zeta}_k (z-H)_{kl}\zeta_l \right\}, \tag{27}$$

wobei wir nur in Analogie zu den Integralen über gerade Variable das Komplexkonjugierte als zweite Integrationsvariable verwenden. In der Graßmann-Algebra machte es keinen Unterschied, eine andere Integrationsvariable zu nehmen. Dieses Integral lässt sich induktiv berechnen. Wir beginnen die Induktion mit $N = 1$ und können die Exponentialfunktion nach (17) schreiben als:

$$\int d\zeta_1 d\bar{\zeta}_1 \exp i\bar{\zeta}_1 (z-H)_{11}\zeta_1 = \int d\zeta_1 d\bar{\zeta}_1 (1 + i\bar{\zeta}_1(z-H)_{11}\zeta_1) = i(z-H)_{11}. \tag{28}$$

Nun können wir (27) nach $\bar{\zeta}_N$ differenzieren, was gleichzeitig ja auch der Integration entspricht, und erhalten:

$$I_- = \int \prod_{1\le k\le (N-1)} (d\zeta_k d\bar{\zeta}_k) d\zeta_N \sum_{1\le n\le N} \zeta_n i(z-H)_{Nn} \exp i \left\{ \sum_{\substack{1\le k\le (N-1)\\ 1\le l\le N}} \bar{\zeta}_k (z-H)_{kl}\zeta_l \right\}. \tag{29}$$

Der nächste Schritt sollte natürlich Integration nach ζ_n sein; dabei muss allerdings beachtet werden, dass auch die Differentiale ungerader Variablen kommutieren:

$$I_- = \sum_{1\le n\le N} (-1)^{N+n} i(z-H)_{Nn} \int \prod_{\substack{1\le k\\ \le (n-1)}} (d\zeta_k d\bar{\zeta}_k) \prod_{\substack{(n+1)\le k\\ \le N}} (d\zeta_k d\bar{\zeta}_{k-1}) \exp i \left\{ \sum_{\substack{k\ne N\\ l\ne n}} \bar{\zeta}_k (z-H)_{kl}\zeta_l \right\}. \tag{30}$$

Da für $N = 1$ das Integral gerade der Determinante der 1×1-Matrix entspricht, stellt die obige Gleichung den Laplaceschen Entwicklungssatz für Matrizen nach der Nten Zeile dar. Das Ergebnis lautet also:

$$I_- = \int \prod_{1\le k\le N} (d\zeta_k d\bar{\zeta}_k) \exp i \left\{ \sum_{1\le k,l\le N} \bar{\zeta}_k (z-H)_{kl}\zeta_l \right\} = i^N \det(z-H), \tag{31}$$

somit können wir (8) umschreiben.

3 Die Fermionische Methode

In (8) kann man die Determinante mit Hilfe von (31) ersetzen:

$$F(z) = -\frac{i}{N} \left\langle \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j\, d\Im x_j\, d\zeta_j d\bar{\zeta}_j}{\pi} \right) x\cdot x \exp\, i\left\{ x\cdot(z-H)x + \zeta\cdot(z-H)\zeta \right\} \right\rangle. \tag{32}$$

Dieser Lösungsweg wird in [4] als fermionische Methode bezeichnet, da die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren denselben Vertauschungsregeln wie Graßmann-Variablen gehorchen. Die einzige zu mittelnde Größe ist die Exponentialfunktion mit dem Hamiltonian, also ergibt sich:

$$F(z) = -\frac{i}{N}\int \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{d\Re x_j \, d\Im x_j \, d\zeta_j d\bar{\zeta}_j}{\pi}\right) x{\cdot}x \exp\, iz\left\{x\cdot x + \zeta\cdot\zeta\right\}\langle \exp\, -i\left\{x\cdot Hx + \zeta\cdot H\zeta\right\}\rangle\,. \tag{33}$$

Diese Mittelung lässt sich aber ausführen. Wir schreiben den zu mittelnden Term mit Hilfe der Matrix $K_{jk} = x_j\bar{x}_k - \zeta_j\bar{\zeta}_k$ um zu

$$\langle \exp\, -i\left\{x\cdot Hx + \zeta\cdot H\zeta\right\}\rangle = \left\langle \exp\, -i\left\{\sum_{1\le j,k\le N} H_{kj}(x_j\bar{x}_k - \zeta_j\bar{\zeta}_k)\right\}\right\rangle = \langle \exp\, -i\, tr(HK)\rangle\,. \tag{34}$$

Damit ergibt sich nach Gleichung 1:

$$\begin{aligned}
\langle \exp\, -i\, tr(HK)\rangle &= const\int \prod_{1\le i\le N} dH_{ii} \times \prod_{i\le j\le N} d\Re H_{ij} d\Im H_{ij} \exp -\frac{1}{2}\beta N\, tr(HH^\dagger)\exp\, -i\; tr(HK) \\
&= const\int \prod_{1\le i\le N} dH_{ii} \times \prod_{i\le j\le N} d\Re H_{ij} d\Im H_{ij}\; \exp -\frac{1}{2}\beta N\, {H_{ii}}^2\; \exp\, -i\, H_{ii}K_{ii} \\
&\quad \exp -\beta N\left(|\Re H_{ij}|^2 + |\Im H_{ij}|^2\right) exp\, -\, i\,\left\{\Re H_{ij}(K_{ij}+K_{ji}) + i\Im H_{ij}(K_{ij}-K_{ji})\right\} \\
&= \exp -\frac{1}{2\beta N}\sum_{\substack{1\le i\le N\\ i<j\le N}}\left({K_{ii}}^2 + \frac{(K_{ij}+K_{ji})^2}{2} - \frac{(K_{ij}-K_{ji})^2}{2}\right) \\
&= \exp -\frac{1}{2\beta N}\sum_{1\le i,j\le N} K_{ij}K_{ji} \\
&= \exp -\frac{1}{2\beta N} trK^2.
\end{aligned} \tag{35}$$

Mit den jeweiligen Vertauschungsregeln ergibt sich

$$tr\, K^2 = \sum_{1\le j,k\le N}(x_j\bar{x}_k - \zeta_j\bar{\zeta}_k)(x_k\bar{x}_j - \zeta_k\bar{\zeta}_j) = (x\cdot x)^2 - (\zeta\cdot\zeta)^2 + 2(\zeta\cdot x)(x\cdot\zeta), \tag{36}$$

so dass wir (33) schreiben können:

$$\begin{aligned}
F(z) &= -\frac{i}{N}\int \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{d\Re x_j \, d\Im x_j \, d\zeta_j d\bar{\zeta}_j}{\pi}\right) x\cdot x \exp\, iz\left\{x\cdot x + \zeta\cdot\zeta\right\} \\
&\quad \exp\, -\frac{1}{2\beta N}\left\{(x\cdot x)^2 - (\zeta\cdot\zeta)^2 + 2(\zeta\cdot x)(x\cdot\zeta)\right\}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Ein Faktor des Integranden lässt sich über eine Hubbard-Stratonovich-Transformation umschreiben:

$$\exp\, \frac{1}{2\beta N}(\zeta\cdot\zeta)^2 = \sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}}\int d\mu\, exp - \left\{\mu\zeta\cdot\zeta + \frac{1}{2}\beta N\mu^2\right\}. \tag{38}$$

Durch Einführen der Matrix

$$M_{jk} = (\mu - iz)\delta_{jk} + \frac{1}{\beta N} x_j \bar{x}_k \tag{39}$$

kann man nun alle Faktoren, die Graßmann-Variablen enthalten, als ein Gaußsches Integral ausdrücken:

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{i}{N}\sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int d\mu \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j \, d\Im x_j \, d\zeta_j d\bar{\zeta}_j}{\pi} \right) \\ &\quad \exp -(\zeta \cdot M\zeta) \; x \cdot x \exp \left\{ iz \, x \cdot x - \frac{1}{2\beta N}(x \cdot x)^2 - \frac{1}{2}\beta N \mu^2 \right\}. \end{aligned} \tag{40}$$

Nach Gleichung 31 können wir das Integral über Graßmann-Variablen ausrechnen. Es gilt:

$$\int \prod_{j=1}^{N} \left(d\zeta_j d\bar{\zeta}_j \right) \, \exp -(\zeta \cdot M\zeta) = \det M. \tag{41}$$

Die Determinante ist leicht zu bestimmen: M ist die Summe eines Vielfachen der Identität und eines Projektionsoperators. Ein Eigenvektor ist damit sicher der Vektor, auf den projiziert wird, nämlich x; der Eigenwert errechnet sich zu $\mu - iz + \frac{1}{\beta N} x \cdot x$. Alle übrigen Eigenvektoren sind $(n-1)$-fach zum Eigenwert $\mu - iz$ entartet. Nach Triagonalisierung berechnet sich die Determinante also zu

$$\det \; M = (\mu - iz)^{N-1} \left(\mu - iz + \frac{1}{\beta N} x \cdot x \right). \tag{42}$$

Damit sind wieder alle Graßmann-Variablen aus der Rechnung verschwunden:

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{i}{N}\sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int d\mu \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{d\Re x_j \, d\Im x_j}{\pi} \right) \; x \cdot x \, (\mu - iz)^{N-1} \left(\mu - iz + \frac{1}{\beta N} x \cdot x \right) \\ &\quad \exp \left\{ iz \, x \cdot x - \frac{1}{2\beta N}(x \cdot x)^2 - \frac{1}{2}\beta N \mu^2 \right\}. \end{aligned} \tag{43}$$

In diesem Integral kommt nur noch das Betragsquadrat von x vor, es bietet sich also an, in $2n$-dimensionale Polarkoordinaten zu transformieren. Die Jacobi-Determinante der Transformation lautet $(x \cdot x \equiv \nu)$:

$$\prod_{j=1}^{N} d\Re x_j \, d\Im x_j = d\nu \; 2N \frac{\pi^N}{N\Gamma(N)} \nu^{N-1} = d\nu \frac{2\pi^N}{(N-1)!} \nu^{N-1}, \tag{44}$$

so dass das Integral zu

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{2i}{N!}\sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{0}^{\infty} d\nu \, \nu^N (\mu - iz)^{N-1} \left(\mu - iz + \frac{\nu}{\beta N} \right) \\ &\quad \exp \left\{ iz \, \nu - \frac{1}{2\beta N}\nu^2 - \frac{1}{2}\beta N \mu^2 \right\} \end{aligned} \tag{45}$$

wird. Da uns, wie anfangs erwähnt, nur der thermodynamische Limes interessiert, können beide Integrale per Sattelpunktsmethode ausgewertet werden. Mit Hilfe der Stirlingschen Formel für große N $N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N \exp -N$ und der Substitution $\nu \equiv Nu$ schreiben wir den Integranden um:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= -\frac{2i}{N!}\sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \exp -N \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} N du\,(Nu)^N (\mu - iz)^{N-1} \left(\mu - iz + \frac{u}{\beta}\right) \\
&\quad \exp N \left\{ iz\,u - \frac{1}{2\beta}u^2 - \frac{1}{2}\beta\mu^2 + 1 \right\} \\
&= -\frac{iN\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} du\, \frac{\mu - iz + \frac{u}{\beta}}{\mu - iz} \\
&\quad \exp N \left\{ iz\,u - \frac{1}{2\beta}u^2 - \frac{1}{2}\beta\mu^2 + 1 + \ln u + \ln(\mu - iz) \right\}. \qquad (46)
\end{aligned}
$$

Durch Umlegen der Kontur erhält man nach der Sattelpunktsmethode:

$$
F(z) = \frac{1}{2}\beta\left(z - \sqrt{z^2 - 4/\beta}\right). \qquad (47)
$$

Nach Gleichung 4 können wir daraus die Zustandsdichte berechnen:

$$
\begin{aligned}
\rho(\lambda) &= -\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\pi} \Im F(\lambda + i\alpha) \\
&= -\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\pi} \Im \frac{1}{2}\beta \left(\lambda + i\alpha - \sqrt{(\lambda + i\alpha)^2 - 4/\beta}\right) \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\beta}{2\pi} \Im \sqrt{(\lambda + i\alpha)^2 - 4/\beta} \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\beta}{2\pi} \Im\, i\sqrt{4/\beta - \lambda^2 + \alpha^2 - 2i\alpha\lambda} \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\beta}{2\pi} \Im\, i\sqrt{|4/\beta - \lambda^2 + \alpha^2 - 2i\alpha\lambda|} \exp i \arg(4/\beta - \lambda^2 + \alpha^2 - 2i\alpha\lambda)/2 \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\beta}{2\pi} \sqrt{|4/\beta - \lambda^2 + \alpha^2 - 2i\alpha\lambda|} \cos \arg(4/\beta - \lambda^2 + \alpha^2 - 2i\alpha\lambda)/2 \\
&= \frac{\beta}{2\pi}\sqrt{4/\beta - \lambda^2} \cdot \Theta(4/\beta - \lambda^2) \\
&= \frac{2}{\pi\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{{\lambda_0}^2}} \cdot \Theta\left(1 - \frac{\lambda^2}{{\lambda_0}^2}\right), \qquad (48)
\end{aligned}
$$

wobei $\lambda_0 = \frac{4}{\beta}$. Dieser Ausdruck für das gemittelte Spektrum wird als Wignersches Halbkreisgesetz (vgl. [9]) bezeichnet.

Literatur

[1] Berezin, F.A.: In: *Dokl. Akad. Nauk SSR* 137 (1961), 31 S

[2] Berezin, F.A.: *The Method of Second Quantization.* New York : Academic Press, 1965

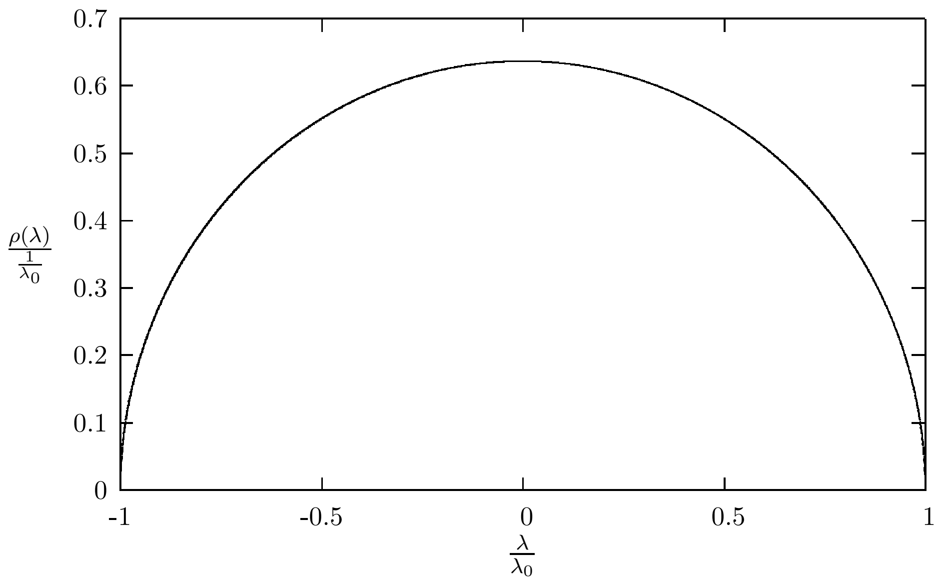

Abbildung 1: Das Wignersche Halbkreisgesetz

[3] EFETOV, K.: *Supersymmetry in Disorder and Chaos.* Cambridge University Press, 1997

[4] ITZYKSON, C. ; DROUFFE, J.-M.: *Statistical Field Theory.* Bd. 2. Cambridge University Press, 1989

[5] LANDAU, L.D. ; LIFSCHITZ, E.M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik.* Bd. 3: *Quantenmechanik.* Berlin : Akademie-Verlag, 1979

[6] MEHTA, M.L.: *Random Matrices.* San Diego : Academic Press, 1991

[7] WEGNER, F.: *Graßmann-Variable.* Universität Heidelberg, 1998

[8] WIGNER, E.P.: On a Class of Analytic Functions from the Quantum Theory of Collisions. In: *Ann. Math.* 53 (1951), S. 36

[9] WIGNER, E.P.: On the Distribution of the Roots of certain Symmetric Matrices. In: *Ann. Math.* 67 (1958), S. 325