

SEMINAR ZUR VORLESUNG  
"STATISTISCHE MECHANIK UNGEORDNETER SYSTEME"  
AM INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN  
SOMMERSEMESTER 2005

---

*Das Random-Energy-Model  
(REM)*

---

Andrea Fiege

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Verwandte Modelle des REM</b>	<b>1</b>
2.1	Das Sherrington-Kirkpatrick-Modell . . . . .	1
2.2	Die p-Spin-Modelle . . . . .	1
2.3	REM als Limes des p-Spin-Modells . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Das Random-Energy-Modell</b>	<b>4</b>
3.1	Definition des Random-Energy-Modells . . . . .	4
3.2	Lösung im mikrokanonischen Ensemble . . . . .	4
3.3	Kanonische Lösung im kanonischen Ensemble, Replica-Trick . . . . .	7
3.4	Externes Magnetfeld . . . . .	9
3.5	Zusätzliche ferromagnetische Wechselwirkungen . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>14</b>

# 1 Einleitung

Das Sherrington-Kirkpatrick-Modell für Ising-Spinalgäser wurde 1975 vorgestellt. Es konnte jedoch mithilfe des Replica-Tricks nicht exakt gelöst werden. In der Tieftemperaturphase erhält man unphysikalische Ergebnisse, wie eine negative Entropie. Das Random-Energy-Modell wurde 1980 von Bernard Derrida vorgeschlagen. Es ist ein Modell, was exakt gelöst werden kann und erstaunliche Ähnlichkeiten mit dem SK-Modell aufweist, jedoch im Vergleich wesentlich weniger Aufwand erfordert, um Ergebnisse zu erhalten.

Im Folgenden soll zunächst das Sherrington-Kirkpatrick-Modell vorgestellt werden und zum p-Spin-Modell verallgemeinert werden. Das Random-Energy-Modell wird als Grenzfall des p-Spin-Modells eingeführt. Das Modell wird im mikrokanonischen Formalismus gelöst. Im kanonischen Ensemble wird gezeigt, dass der Replika-Trick nur in der Hochtemperaturphase die korrekte Freie Energie liefert und in der Tieftemperaturphase die Replika-Symmetrie gebrochen ist. Anschließend wird das REM im externen Magnetfeld betrachtet, was durch die Abhängigkeit der kritischen Temperatur vom Feld am Phasenübergang ein Phasendiagramm liefert. Ebenso wird das Phasendiagramm des REMs mit zusätzlichen ferromagnetischen Wechselwirkungen diskutiert.

## 2 Verwandte Modelle des REM

### 2.1 Das Sherrington-Kirkpatrick-Modell

Das Sherrington-Kirkpatrick-Modell (SK-Modell) ist ein Modell für ein Ising-Spinalgas, in dem alle Spins paarweise miteinander wechselwirken. Die Wechselwirkung ist also nicht auf die nächsten Nachbarn beschränkt, wie beim Edwards-Anderson-Modell. In gewisser Weise ist die Wechselwirkung damit  $\infty$ -dimensional, da jeder Spin  $\infty$  viele nächste Nachbarn hat, mit denen er wechselwirkt. Die Wechselwirkung hängt nicht vom räumlichen Abstand der Spins ab („infinite-range“).

Die Hamiltonfunktion des SK-Modells ist

$$H = - \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1)$$

mit der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichte für die Austauschkonstanten:

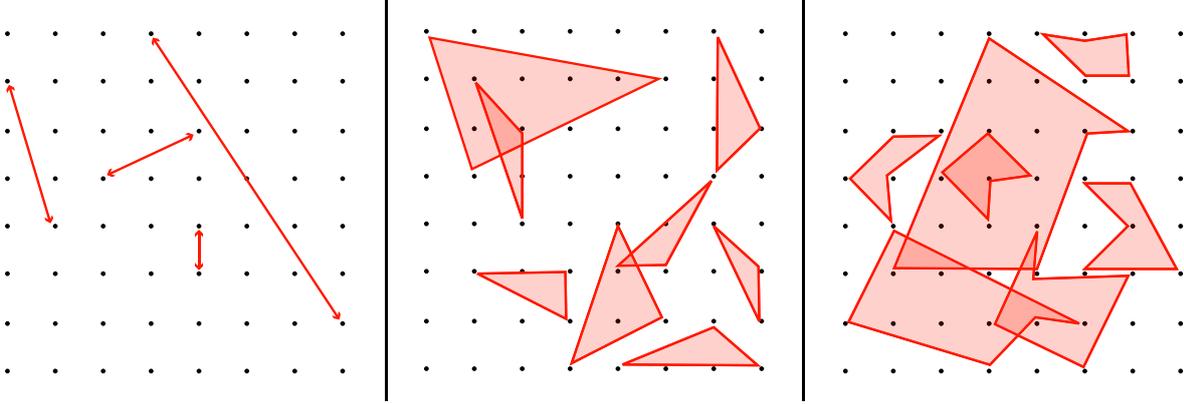
$$P(J_{ij}) = \sqrt{\frac{N}{2\pi J^2}} \exp\left(-\frac{N J_{ij}^2}{2J^2}\right) \quad (2)$$

### 2.2 Die p-Spin-Modelle

Nun kann man sich aber auch ein Spinalgas-Modell vorstellen, bei dem eine Gruppe von  $p$  Spins miteinander wechselwirkt, anstatt der Paare  $\sigma_i, \sigma_j$ . Diese Klasse von Spinalgas-Modellen wurde von Bernard Derrida eingeführt.

Die Hamiltonfunktion des Random- $p$ -Spinalgas-Modells lautet

$$H_{(p)} = - \sum_{i_1, \dots, i_p} J_{i_1, \dots, i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} \quad (3)$$

Abbildung 1: Die Fälle  $p = 2$ ,  $p = 3$  und  $p = 5$ 

wobei die Summation über alle möglichen  $p$ -Tupel läuft und die Verteilung der Austauschkonstanten gegeben ist durch:

$$P(J_{i_1, \dots, i_p}) = \sqrt{\frac{N^{p-1}}{\pi J^{2p}}} \exp\left(-\frac{N^{p-1} J_{i_1, \dots, i_p}^2}{J^{2p}}\right) \quad (4)$$

Der Fall  $p = 2$  repräsentiert gerade wieder das SK-Modell. Die Unordnung des Systems ist auch hier „quenched“, d.h., die mittlere Freie Energie  $F$  des Systems, die man experimentell beobachten würde, berechnet sich durch

$$F = \langle F(J_{i_1, \dots, i_p}) \rangle \quad (5)$$

$$= \int \prod_{i_1, \dots, i_p} dJ_{i_1, \dots, i_p} F(J_{i_1, \dots, i_p}) P(J_{i_1, \dots, i_p}) \quad (6)$$

$$= -T \int \left[ \prod_{i_1, \dots, i_p} dJ_{i_1, \dots, i_p} P(J_{i_1, \dots, i_p}) \right] \ln Z(\{J_{i_1, \dots, i_p}\}) \quad (7)$$

$$= -T \langle \ln Z(J_{i_1, \dots, i_p}) \rangle \quad (8)$$

### 2.3 REM als Limes des $p$ -Spin-Modells

Der Grenzfall des  $p \rightarrow \infty$  des  $p$ -Spinglas-Modells im thermodynamischen Limes  $N \rightarrow \infty$  mit  $\frac{p}{N} \rightarrow 0$  bezeichnet man als Random-Energy-Model (REM). Der Grund für diese Bezeichnung wird später klar werden.

Die Spinkonfiguration sei mit  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Energie  $E$ , also die Wahrscheinlichkeit, dass das System mit Spinkonfiguration  $\sigma$  die Energie  $E$  hat, ist dann:

$$P(E) = \langle \delta(E - H(\sigma)) \rangle \quad (9)$$

Die Mittelung  $\langle \dots \rangle$  über die (gequenchede) Unordnung, also das Integral Gl. (6) kann

man ausrechnen, indem man die Deltafunktion als Fouriertransformierte schreibt:

$$P(E) = \int \prod_{i_1, \dots, i_p} dJ_{i_1, \dots, i_p} P(J_{i_1, \dots, i_p}) \delta(E - H(\sigma)) \quad (10)$$

$$= \int \prod_{i_1, \dots, i_p} dJ_{i_1, \dots, i_p} \sqrt{\frac{N^{p-1}}{\pi J^2 p!}} e^{-\frac{N^{p-1} J_{i_1, \dots, i_p}^2}{J^2 p!}} \int \frac{ds}{2\pi} e^{-is \left( E + \sum_{i_1, \dots, i_p} J_{i_1, \dots, i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} \right)} \quad (11)$$

$$= \int \prod_{i_1, \dots, i_p} dJ_{i_1, \dots, i_p} \sqrt{\frac{N^{p-1}}{\pi J^2 p!}} \int \frac{ds}{2\pi} e^{-\sum_{i_1, \dots, i_p} \frac{N^{p-1} J_{i_1, \dots, i_p}^2}{J^2 p!}} e^{-is \left( E + \sum_{i_1, \dots, i_p} J_{i_1, \dots, i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} \right)} \quad (12)$$

Die Summe in der Exponentialfunktion faktorisiert:

$$= \int \prod_{i_1, \dots, i_p} dJ_{i_1, \dots, i_p} \sqrt{\frac{N^{p-1}}{\pi J^2 p!}} \int \frac{ds}{2\pi} e^{-iEs} \left( \prod_{i_1, \dots, i_p} e^{-\frac{N^{p-1} J_{i_1, \dots, i_p}^2}{J^2 p!} - is J_{i_1, \dots, i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}} \right) \quad (13)$$

$$= \left( \prod_{i_1, \dots, i_p} \sqrt{\frac{N^{p-1}}{\pi J^2 p!}} \right) \int \frac{ds}{2\pi} e^{-isE} \left( \prod_{i_1, \dots, i_p} e^{\left( \frac{-(s\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p})^2}{4 \frac{N^{p-1}}{J^2 p!}} \right)} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{N^{p-1}}{J^2 p!}}} \right) \quad (14)$$

$$= \int \frac{ds}{2\pi} e^{-isE} \left[ e^{\left( \frac{-(s\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p})^2}{4 \frac{N^{p-1}}{J^2 p!}} \right)} \right]^{\frac{NP}{p!}} \quad (15)$$

$$= \int \frac{ds}{2\pi} e^{-isE} e^{\left( -\frac{NJ^2}{4} s^2 \right)} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{NJ^2}} \exp\left(\frac{-E^2}{NJ^2}\right) \quad (17)$$

Damit ist die Energiedichte  $P(E)$  insbesondere unabhängig von der Spinkonfiguration  $\sigma$  des Systems. Bis zu diesem Punkt verhalten sich alle  $p$ -Spin-Modelle gleich.

Die Wahrscheinlichkeit  $P(E_1, E_2)$ , dass zwei vorgegebene Spinkonfigurationen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die Energien  $E_1$  und  $E_2$  haben, ist:

$$P(E_1, E_2) = \langle \delta(E_1 - H(\sigma_1)) \cdot \delta(E_2 - H(\sigma_2)) \rangle \quad (18)$$

Da  $P(E)$  bereits unabhängig von der vorgegebenen Konfiguration  $\sigma$  war, kann  $P(E_1, E_2)$  nur von der Anzahl der Spins abhängen, die in beiden Konfigurationen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  gleich sind, also der „Überlappung“  $x = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_{1i} \sigma_{2i} \in [-1, 1]$ ; mit einer ähnlichen Rechnung wie vorangegangen erhält man

$$P(E_1, E_2) = \frac{1}{N\pi J^2 \sqrt{(1+x^p)(1-x^p)}} e^{\left( -\frac{(E_1+E_2)^2}{2NJ^2[1+(2x-1)^p]} - \frac{(E_1-E_2)^2}{2NJ^2[1-(2x-1)^p]} \right)} \quad (19)$$

Im Limes  $p \rightarrow \infty$  erhält man das wichtige Ergebnis

$$P(E_1, E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \quad (20)$$

solange  $|q| \neq 1$ , die Konfigurationen also mikroskopisch voneinander zu unterscheiden sind. Die Wahrscheinlichkeitsdichten der Energieniveaus faktorisieren also. Man kann leicht nachrechnen, dass auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch für mehrere Energielevel faktorisieren. Damit sind die Energielevel im Limes  $p \rightarrow \infty$  unabhängige Zufallsvariablen (Gleichung 20 ist gerade die definierende Gleichung für unabhängige Zufallsvariablen)! Beachten muss man dabei, dass der Limes  $p \rightarrow \infty$  erst nach dem thermodynamischen Limes genommen werden darf, damit  $p \ll N$  bleibt.

Für jeden Spin gibt zwei Möglichkeiten, entweder +1 oder -1. Daher gibt mit es  $N$  Spins insgesamt  $2^N$  Konfigurationen.

Das Random-Energy-Modell definiert sich nun über die  $2^N$  Energieniveaus, deren Energiedichten nach Gl. (20) faktorisieren. Damit ist auch der Name „Random-Energy-Modell“ klar.

In gewissem Sinne liegt das SK-Modell mit  $p = 2$  zwischen dem Fall nicht wechselwirkender Spins im Zufallsmagnetfeld (Hamiltonian:  $H_{(p=1)} = -\sum_i J_i \sigma_i$ ) und dem REM. Setzt man eine gewisse Stetigkeit der p-Spin-Modelle in  $p$  voraus, so kann man probieren, aus einer Art „Interpolation“ zwischen den beiden Modellen auf Eigenschaften des SK-Modells zu schließen.

## 3 Das Random-Energy-Modell

### 3.1 Definition des Random-Energy-Modells

Nach den vorhergehenden Bemerkungen kann man das REM exakt durch drei Eigenschaften definieren:

1. Das System hat  $2^N$  Energielevel.
2. Diese Energielevel sind verteilt nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(E_i) = \frac{1}{\sqrt{N\pi J^2}} \exp\left(-\frac{E_i^2}{NJ^2}\right), i = 1, \dots, 2^N \quad (21)$$

3. Die Energielevel sind unabhängige Zufallsvariablen.

Die ersten beiden Eigenschaften sind auch Eigenschaften anderer Spinglas-Modelle, die dritte Eigenschaft jedoch ist die spezifische Eigenschaft des REM. Durch diese wird das Modell so weit vereinfacht, dass es exakt gelöst werden kann. In Hinsicht auf reale Systeme ist die dritte Eigenschaft aber eine große Einschränkung, da Korrelationen zwischen den Energielevels vernachlässigt werden.

### 3.2 Lösung im mikrokanonischen Ensemble

Für eine vorgegebene Energie  $E$  des Systems sei  $n(E)$  die Anzahl der Energiezustände im Intervall  $(E, E + dE)$ . Die Zahl  $n(E)$  fluktuiert von System zu System. Daher muss

man die mittlere Zahl  $\langle n(E) \rangle$  berechnen, was jedoch recht einfach ist:

$$\langle n(E) \rangle = 2^N \cdot P(E) \quad (22)$$

$$\sim \exp(N \cdot (\ln 2)) \exp\left(-\frac{E^2}{NJ^2}\right) \quad (23)$$

$$= \exp\left(N \ln 2 - \frac{E^2}{NJ^2}\right) \quad (24)$$

$$= \exp\left(N \left(\ln 2 - \left(\frac{E}{NJ}\right)^2\right)\right) \quad (25)$$

Damit ist eine kritische Energie  $E_0$  gegeben durch die Bedingung

$$\ln 2 - \left(\frac{E}{NJ}\right)^2 = 0 \quad (26)$$

$$\Rightarrow \frac{E_0}{N} = J\sqrt{\ln 2} \quad (27)$$

denn im thermodynamischen Limes gilt:

- Für  $|E| < E_0$  ist die mittlere Zahl von Energieniveaus viel größer als 1 ( $N \rightarrow \infty$ ),  $\langle n(|E| < E_0) \rangle \gg 1$ .
- Für  $|E| > E_0$  ist die mittlere Zahl  $\langle n(E > E_0) \rangle \ll 1$ , also ist für nahezu alle Systeme  $n(E) = 0$  und nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit  $n(E) \geq 1$ . Daher existieren nahezu keine Energieniveaus  $E$  mit  $E > E_0$  oder  $E < -E_0$ .

Wegen der statistischen Unabhängigkeit der Energielevel sind die Fluktuationen von  $n(E)$  um den Mittelwert von der Ordnung  $\sqrt{\langle n(E) \rangle}$  und klein gegen  $\langle n(E) \rangle$  und damit vernachlässigbar, also  $n(E) \sim \langle n(E) \rangle$ .

Also ist (mit einer Wahrscheinlichkeit von nahezu 1) die mittlere Entropie gegeben durch:

$$S = \langle \ln n(E) \rangle \quad (28)$$

$$= \langle \ln (\langle n(E) \rangle) \rangle \quad (29)$$

$$= \ln (\langle n(E) \rangle) \quad (30)$$

$$\sim \ln \left\{ \exp \left[ N \left( \ln 2 - \left( \frac{E}{NJ} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad |E| < E_0 \quad (31)$$

$$s = \frac{S}{N} = \left( \ln 2 - \left( \frac{E}{NJ} \right)^2 \right) \quad |E| < E_0 \quad (32)$$

Für die Berechnung der Freien Energie nutzt man die Beziehung  $\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$ .

$$\frac{dS}{dE} = N \frac{d}{dE} \left( \ln 2 - \left( \frac{E}{NJ} \right)^2 \right) \quad (33)$$

$$= \left( -\frac{2E}{NJ^2} \right) \quad (34)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{T} \quad (35)$$

$$\Rightarrow E = -\frac{NJ^2}{2T} \quad (36)$$

$$T = -\frac{NJ^2}{2E} \quad (37)$$

Legendre-Transformation:

$$F = E - TS \quad (38)$$

$$= -\frac{NJ^2}{2T} - TN \left( \ln 2 - \left( \frac{E}{NJ} \right)^2 \right) \quad (39)$$

$$= -\frac{NJ^2}{2T} - TN \left( \ln 2 - \left( \frac{-\frac{NJ^2}{2T}}{NJ} \right)^2 \right) \quad (40)$$

$$= -\frac{NJ^2}{2T} - TN \ln 2 + \frac{NJ^2}{4T} \quad (41)$$

$$= -TN \ln 2 - \frac{NJ^2}{4T} \quad (42)$$

$$f = \frac{F}{N} = -T \ln 2 - \frac{J^2}{4T} \quad (43)$$

Die kritische Temperatur lässt sich damit auch angeben:

$$T_C = T(E_0) \quad (44)$$

$$= -\frac{NJ^2}{2E_0} \quad (45)$$

$$= -\frac{NJ^2}{2NJ\sqrt{\ln 2}} \quad (46)$$

$$= \frac{J}{2\sqrt{\ln 2}} \quad (47)$$

Für Temperaturen unterhalb von  $T_C$  existieren eigentlich keine Zustände mit entsprechenden Energieniveaus ( $n(E) = 0$ ). Damit das System trotzdem „physikalisch“ ist, muss es in einem Zustand einfrieren, der eine Energie  $E = -E_0$  hat. Daher hat die Tieftemperaturphase Entropie Null. Die Freie Energie ist dann:

$$f = -E_0 - TS \quad (48)$$

$$= -J\sqrt{\ln 2} - T \cdot 0 \quad (49)$$

$$= -J\sqrt{\ln 2} \quad (50)$$

Damit hat man einen kontinuierlichen Phasenübergang am Punkt mit der Temperatur  $T_C$  gefunden. Der Phasenübergang ist also eine Folge der nicht vorhandenen Energieniveaus unterhalb von  $-E_0$ .

Die mittlere Freie Energie ist zusammengefasst

$$f = \begin{cases} -T \ln 2 - \frac{J^2}{4T} & T > T_C \\ -J\sqrt{\ln 2} & T < T_C \end{cases} \quad (51)$$

und  $T_C = \frac{J}{2\sqrt{\ln 2}}$ .

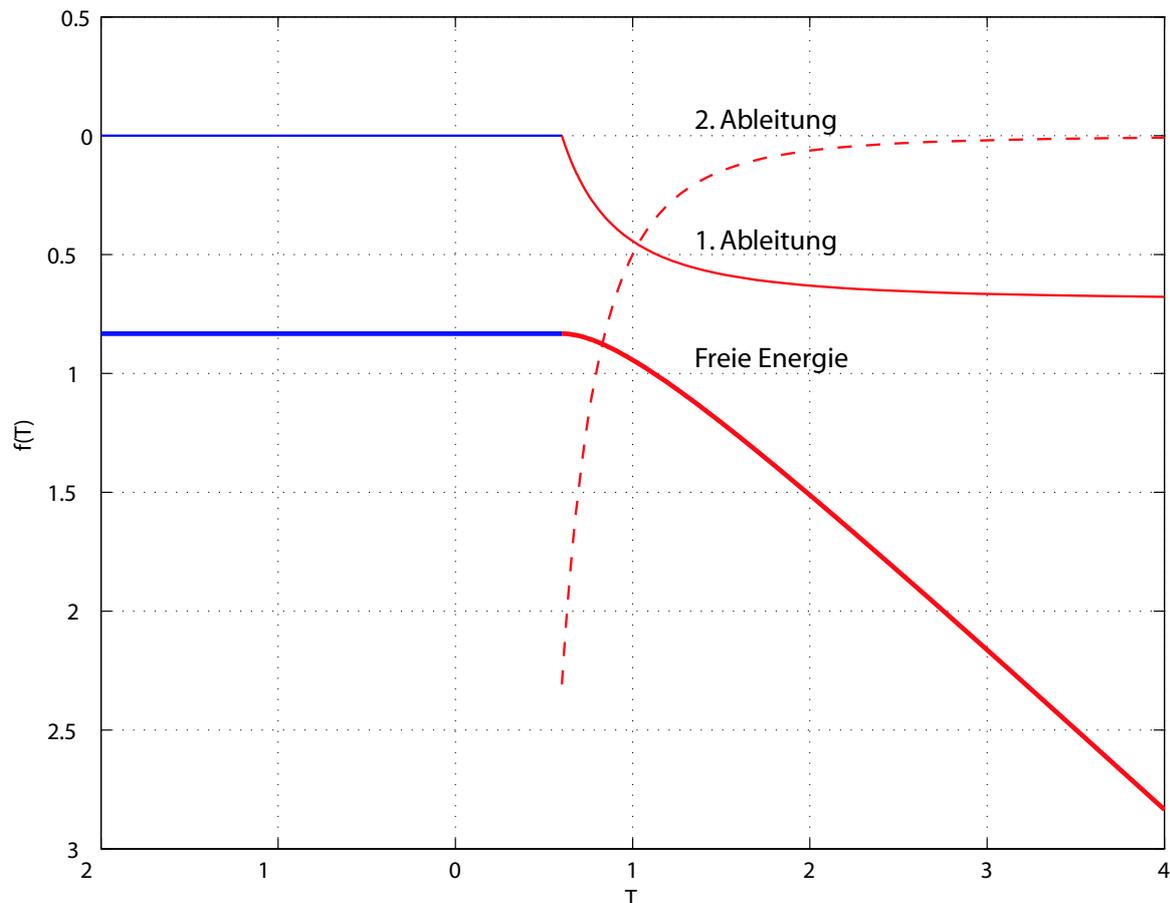


Abbildung 2: Mittlere Freie Energie  $f$  des REM am Phasenübergang für  $J = 1$

### 3.3 Kanonische Lösung im kanonischen Ensemble, Replica-Trick

Ein System ist gegeben durch die Angabe von  $2^N$  Energien  $\{E_i\}$ . Die Zustandssumme ist

$$Z(\{E_i\}) = \sum_{i=1}^{2^N} \exp(-\beta E_i) \quad (52)$$

Das Ziel ist die Berechnung der mittleren Freien Energie  $F$ , gegeben durch:

$$F = -T \langle \ln Z \rangle \quad (53)$$

$$= -T \int \prod_i dE_i P(E_i) \ln Z(\{E_i\}) \quad (54)$$

Die Berechnung der mittleren Freien Energie versucht man mithilfe des Replica-Tricks, der folgende Beziehung ausnutzt:

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle Z^n \rangle - 1}{n} \quad (55)$$

Damit „wälzt“ man die Berechnung über die eingefrorene Unordnung über auf die Berechnung über eine Unordnung (und die Replicas des Systems), die wie die thermische Unordnung vor dem Logarithmieren durchzuführen ist, was analytisch einfacher ist. Man berechnet die Momente  $\langle Z^n \rangle$  für  $n \in \mathbb{N}$  und interpoliert diese für  $n \rightarrow 0$ . Hierbei muss offenbar  $\lim_{n \rightarrow 0} \langle Z^n \rangle = 1$ , da sonst der Grenzwert nicht existiert. Die ersten paar Momente kann man einfach ausrechnen:

$$\langle Z \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{2^N} \exp\left(-\frac{1}{T} E_i\right) \right\rangle \quad (56)$$

$$= \int \prod_{i=1}^{2^N} dE_i P(E_i) \sum_{i=1}^{2^N} \exp\left(-\frac{1}{T} E_i\right) \quad (57)$$

$$= 2^N \int \frac{1}{\sqrt{N\pi J^2}} \exp\left(-\frac{E^2}{NJ^2}\right) \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE \quad (58)$$

$$= 2^N \frac{1}{\sqrt{N\pi J^2}} \int \exp\left(-\frac{1}{NJ^2} E^2 - \frac{1}{T} E\right) dE \quad (59)$$

$$= 2^N \frac{1}{\sqrt{N\pi J^2}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{NJ^2}}} \exp\left(\frac{\frac{1}{(T)^2}}{4\frac{1}{NJ^2}}\right) \quad (60)$$

$$= 2^N e^{\left(\frac{J}{T}\right)^2 \frac{N}{4}} \quad (61)$$

und

$$\langle Z^2 \rangle = \left\langle \left( \sum_{i=1}^{2^N} \exp\left(-\frac{1}{kT} E_i\right) \right)^2 \right\rangle \quad (62)$$

$$= 2^N e^{N\left(\frac{J}{T}\right)^2} + 2^N (2^N - 1) e^{\frac{N}{2}\left(\frac{J}{T}\right)^2} \quad (63)$$

Durch eine aufwändigere Rechnung kann man zeigen, dass für die Replicas allgemein gilt:

$$\langle Z^n \rangle \sim \begin{cases} \exp\left[Nn\left(\ln 2 + \frac{J^2}{4T^2}\right)\right] = \langle Z \rangle^n & \text{falls } T > T_n \\ \exp\left[N\left(\ln 2 + n^2 \frac{J^2}{4T^2}\right)\right] & \text{falls } T < T_n \end{cases} \quad (64)$$

mit  $T_n = \sqrt{n}T_C$ . Betrachtet man den Limes  $n \rightarrow 0$ , so sieht man

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle Z^n \rangle \sim \begin{cases} \exp \left[ 0 \cdot N \left( \ln 2 + \frac{J^2}{4T^2} \right) \right] = \langle Z \rangle^0 = 1 & \text{falls } T > T_n \\ \exp \left[ N \left( \ln 2 + 0 \cdot \frac{J^2}{4T^2} \right) \right] = \exp(N \ln 2) = 2^N \neq 1 & \text{falls } T < T_n \end{cases} \quad (65)$$

Somit kann man für die Tieftemperaturphase den Replica-Trick nicht anwenden. Die Replica-Symmetrie ist gebrochen ( $\rightarrow$  Vorlesung).

Wendet man nun Gl. (55) für die Hochtemperaturphase an, so erhält man

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle Z^n \rangle - 1}{n} \quad (66)$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle Z \rangle^n - 1}{n} \quad (67)$$

$$= \ln \langle Z \rangle \quad (68)$$

$$= \ln \left( 2^N e^{\left(\frac{J}{T}\right)^2 \frac{N}{4}} \right) \quad (69)$$

$$= N \ln 2 + \frac{N}{4} \left( \frac{J}{T} \right)^2 \quad (70)$$

Damit erhält man für die Freie Energie:

$$f = \frac{F}{N} = \frac{1}{N} (-T \langle \ln Z \rangle) \quad (71)$$

$$= -T \ln 2 - \frac{J^2}{4T} \quad (72)$$

was mit Gl. (51) übereinstimmt. Der Replika-Ansatz liefert also für die Hochtemperaturphase diegleiche Freie Energie wie in der mikrokanonischen Lösung. In der Tieftemperaturphase muss man die Zustandssumme mithilfe des Ansatzes von Parisi für die Replica-Symmetriebrechung berechnen, siehe [Der81]. Hier stellt sich heraus, dass die Replika-Symmetrie einfach gebrochen ist. Damit erhält man auch hier korrekte Ergebnisse.

### 3.4 Externes Magnetfeld

Für ein Spinglas mit  $p$ -Spinwechselwirkungen kann man den Hamiltonian aus Abschnitt 2.2 für ein externes Magnetfeld schnell modifizieren:

$$H'_p = H_p - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (73)$$

Wie zuvor kann man  $P(E)$  und  $P(E_1, E_2)$  berechnen. Ebenso stellt man fest, dass  $P(E_1, E_2)$  wieder faktorisiert, wenn man den Limes  $p \rightarrow \infty$  betrachtet. Jedoch hängt die Energieniveauverteilung nun vom Magnetfeld ab:

$$P(E) = \frac{1}{\sqrt{N\pi J^2}} \exp \left( -\frac{(E + Mh)^2}{NJ^2} \right) \quad (74)$$

wobei  $M = -\frac{\partial f}{\partial h} = \langle \sum_i \sigma_i \rangle$  die Magnetisierung der Spins ist. Die Verteilung ist also eine um  $Mh$  um die Ordinate verschobene Gauss-Verteilung. Damit hängt die Energieniveaueverteilung (indirekt) von der Spinkonfiguration ab!

Wie kann man nun gewährleisten, dass das Energieniveau gerade die Magnetisierung  $M$  hat? Die Gesamtzahl der Spins ist  $N = N(\sigma = +1) + N(\sigma = -1)$ , während die Magnetisierung neben der Definition auch dargestellt werden kann als  $M = N(\sigma = +1) - N(\sigma = -1)$ . Damit hat man ein lineares Gleichungssystem mit 2 unabhängigen Gleichungen, aus denen sich ergibt:  $N_\uparrow = \frac{N+M}{2}$ . Aus den  $N$  Spins muss man also  $\frac{N+M}{2}$  Spins auswählen. Es gibt demnach  $\binom{N}{\frac{N+M}{2}}$  Möglichkeiten, die Magnetisierung  $M$  im System zu haben.

Mit zusätzlichem Magnetfeld ist das REM also ein Modell mit  $2^N$  unabhängigen Energieniveaus, von denen  $\binom{N}{\frac{N+M}{2}}$  die Magnetisierung  $M$  haben. Wie im vorhergehenden Abschnitt kann man nun die Energieniveaudichte berechnen:

$$\langle n(E) \rangle = \sum_{M=-N}^{+N} \binom{N}{\frac{N+M}{2}} \frac{1}{\sqrt{N\pi J^2}} \exp\left(-\frac{(E + Mh)^2}{NJ^2}\right) \quad (75)$$

Nimmt man den thermodynamischen Limes, so braucht man nur dominante Terme in dieser Summe zu berücksichtigen. Dies entspricht der Sattelpunktsintegration bei „kontinuierlichen Summen“.

Dann erhält man

$$\frac{1}{N} \ln \langle n(E) \rangle = \max_{-1 \leq m \leq 1} \left[ -\frac{1+m}{2} \ln \frac{1+m}{2} - \frac{1-m}{2} \ln \frac{1-m}{2} - \left( \frac{E}{NJ} + m \frac{h}{J} \right)^2 \right] \quad (76)$$

mit  $m = \frac{M}{N}$ . Der Wert von  $m$ , der das Maximum in dieser Gleichung liefert, wird bestimmt durch die implizite Gleichung

$$m = -\tanh \left[ 2 \frac{h}{J} \left( \frac{E}{NJ} + m \frac{h}{J} \right) \right] \quad (77)$$

Da die Energieniveaus auch hier unabhängig voneinander sind, kann man das gleiche Argument wie zuvor benutzen:

- Wenn  $\frac{1}{N} \ln \langle n(E) \rangle > 0$  ( $\Leftrightarrow \langle n(E) \rangle > 1$ ), dann ist die mittlere Zahl von Energieniveaus sehr groß, und die mittlere Entropie ist gegeben durch

$$S = \ln \langle n(E) \rangle \quad (78)$$

- Wenn  $\frac{1}{N} \ln \langle n(E) \rangle < 0$  ( $\Leftrightarrow \langle n(E) \rangle < 1$ ), ist die mittlere Zahl von Energieniveaus sehr klein, also mit nahezu Wahrscheinlichkeit 1 ist kein Energieniveau vorhanden.

Die beiden Phasen sind durch eine kritische Energie  $E_0$  getrennt, die vom Magnetfeld abhängt. Wenn  $|E| > E_0(h)$ , ist die Entropie Null, für  $|E| < E_0(h)$  wie oben genannt. Mit  $\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$  und der entsprechenden Legendre-Transformation kann man wieder

die mittlere Freie Energie berechnen. Damit erhält man für die Hochtemperaturphase  $T > T_C(h)$  folgende Größen:

$$m = \tanh \frac{h}{T} \quad (79)$$

$$\frac{E}{N} = -\frac{J^2}{2T} - mh \quad (80)$$

$$\frac{S}{N} = \ln 2 - \frac{m}{2} \ln \left( \frac{1+m}{1-m} \right) - \frac{1}{2} \ln(1-m^2) - \frac{J^2}{4T^2} = s(m(h)) \quad (81)$$

und die kritische Temperatur ist diejenige, für die  $S = 0$  gilt.

Für  $T < T_C(h)$  friert das System wieder im Grundzustand ein:

$$m = \tanh \left( \frac{h}{T_C(h)} \right) \quad (82)$$

$$\frac{E}{N} = -\frac{J^2}{2T_C(h)} - mh \quad (83)$$

$$\frac{S}{N} = 0 \quad (84)$$

Damit erhält man für die magnetische Suszeptibilität:

$$\chi = \left( \frac{\partial m}{\partial h} \right)_T \quad (85)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{T} \left( 1 - \tanh^2 \frac{h}{T} \right) & T > T_C \\ \frac{1}{T_C(h)} \left( 1 - \tanh^2 \frac{h}{T_C(h)} \right) & T < T_C \end{cases} \quad (86)$$

Für die Linie  $h = 0$  gilt:

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{T} & T > T_C \\ \frac{1}{T_C(h=0)} = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{J} = \text{const} & T < T_C \end{cases} \quad (87)$$

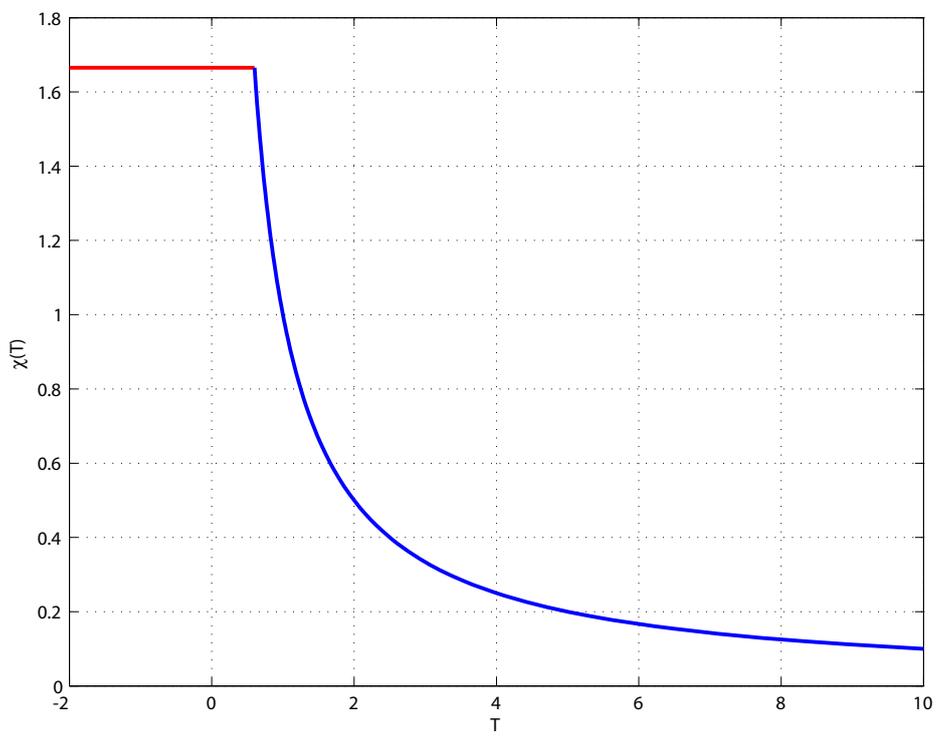


Abbildung 3: Auftragung der magnetischen Suszeptibilität  $\chi$  beim REM mit externem Magnetfeld

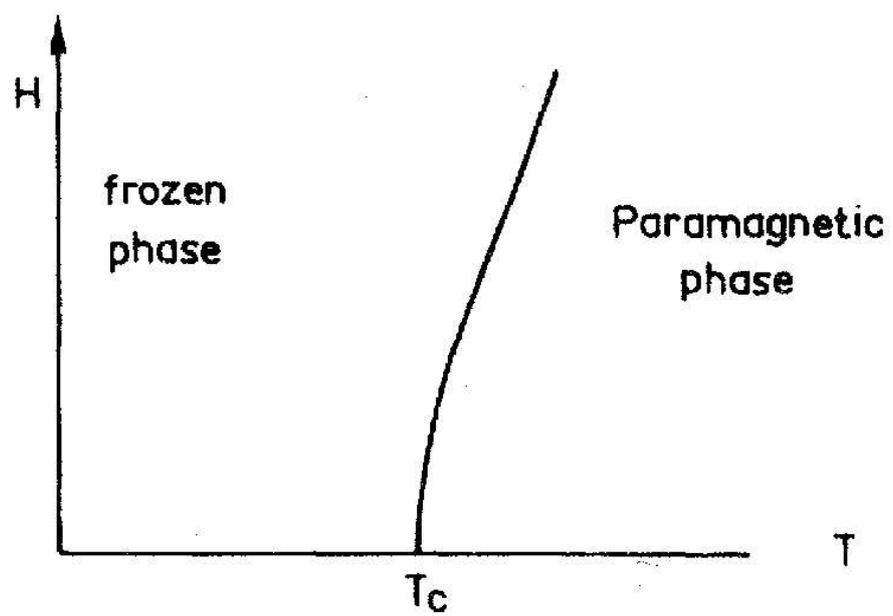


Abbildung 4: Phasendiagramm des REM mit externem Magnetfeld

### 3.5 Zusätzliche ferromagnetische Wechselwirkungen

Zusätzlich zu den Zufallswechselwirkungen kann man noch ferromagnetische Paarwechselwirkungen im Spinglas haben. Der Hamiltonian kann dann auch wieder schnell angegeben werden:

$$H_p'' = H_p - \frac{J_0}{N} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (88)$$

wobei die Wechselwirkung nun zwischen nächsten Nachbarn existiert (wie beim Ising-Ferromagneten). Wieder faktorisieren die Energieniveaudichten im Limes  $p \rightarrow \infty$  und es gilt:

$$P(E) \propto \exp\left(-\frac{(E + M^2 J_0)^2}{N J^2}\right) \quad (89)$$

Das weitere Vorgehen ist analog zum letzten Abschnitt. Man erhält vier Phasen:

- Paramagnetische Phase:  $m = 0$ ,  $f = \frac{F}{N} = -T \ln 2 - \frac{J^2}{4T}$
- Ferromagnetische Phase:  $m = \tanh\left(\frac{J_0 m}{T}\right)$ ,  $f = -T \ln 2 - \frac{J^2}{4T} + \frac{J_0 m^2}{2} + \frac{T}{2}(1 - m^2)$
- Eingefrorene Phase (1):  $m = 0$ ,  $f = -J\sqrt{\ln 2}$
- Eingefrorene Phase (2):  $m = m(T_{C(fm,2)}(J_0))$ ,  $f = \frac{1}{N} F(T_C(J_0))$  mit  $T_C$  als Übergangstemperatur des Übergangs von der ferromagnetischen zur eingefrorenen Phase

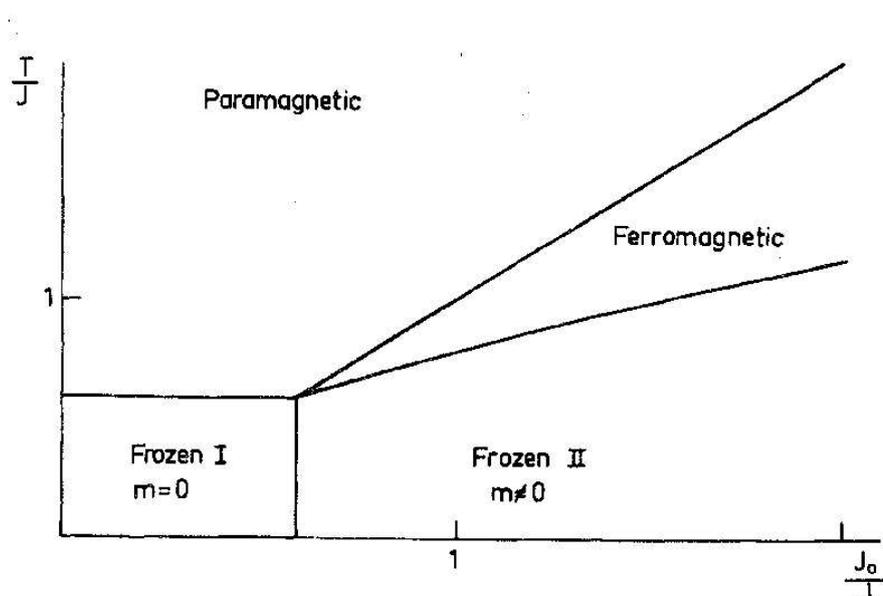


Abbildung 5: Phasendiagramm des REM mit ferromagnetischen NN-Wechselwirkungen

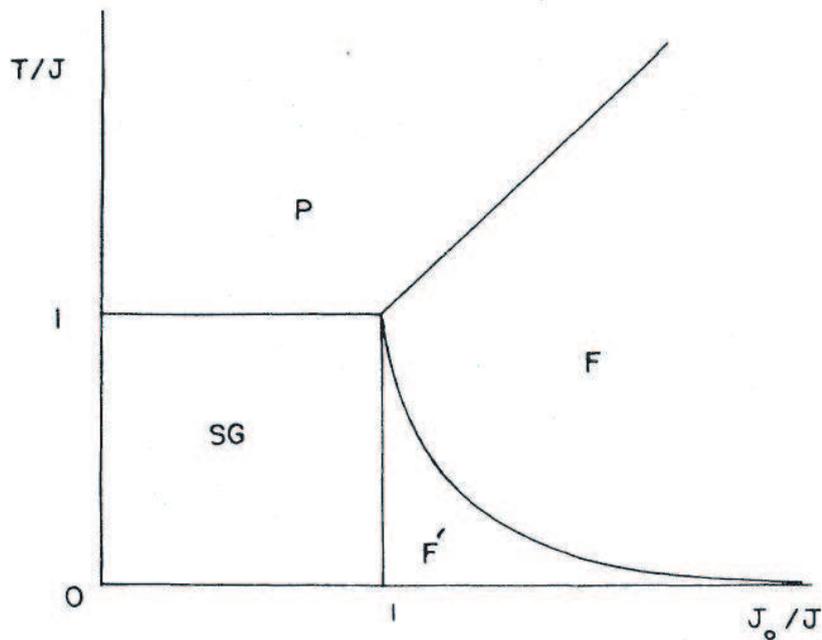


Abbildung 6: Zum Vergleich das Phasendiagramm des SK-Modells

## 4 Zusammenfassung

Das REM ist ein einfaches Spinglas-System mit unkorrelierten Energieniveaus. Es lässt sich im mikrokanonischen Formalismus exakt lösen, für die Berechnung im kanonischen Ensemble benutzt man den Replika-Trick. Dieser funktioniert nur in der Hochtemperaturphase. In der Tieftemperaturphase braucht man 1RSB-Rechnungen, die aber ebenfalls korrekte Ergebnisse liefern.

Qualitativ stimmen die Phasendiagramme des SK-Modells mit denen des REM überein.

## Literatur

- [BY86] Binder, K.; Young, A.P.: *Spin Glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions*. In: Reviews of Modern Physics **58**: 801-976 (1986)
- [Der80] Derrida, Bernhard: *Random-Energy Model: Limit of a Family of Disordered Systems*. In: Physical Review Letters **45**: 79-82 (1980)
- [Der81] Derrida, Bernhard: *Random-energy Model: An Exactly Solvable Model of Disorderd Systems*. In: Physical Review **B24**: 2613-2626 (1981)
- [FiHe91] Fischer, K. H.; Hertz, J. A.: *Spin Glasses*. In: Cambridge studies in magnetism (1). Cambridge University Press, Cambridge (1991)
- [Gol92] Goldenfeld, Nigel: *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. In: Frontiers In Physics (85). Westview Press (1992)
- [GM84] Gross, D. J.; Mézard, Marc: *The simplest Spin Glass*. In Nuclear Physics **B240**: 431-452 (1984)
- [MPV87] Mézard, Marc; Parisi, Giorgio; Virasoro, Miguel Angel: *Spin Glass Theory and Beyond*. In: World Scientific Lecture Notes in Physics (9). World Scientific, Singapore (1987)
- [Nis01] Nishimori, Hidetoshi: *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing. An Introduction*. In: International series of monographs on physics (111). Oxford University Press, Oxford (2001)
- [Pli94] Plischke, Michael; Bergersen, Birger: *Equilibrium Statistical Physics*. 2nd Edition. World Scientific, Singapore (1994)