Wiederholung Replika-Trick 16.6.05

Replika-Trick: $\ln \overline{Z^n} = n\,\overline{\ln Z} + \frac{n^2}{2}\left(\overline{\ln^2 Z} - \overline{\ln Z}^2\right) + \mathcal{O}(n^3)$

$$\Rightarrow \overline{\ln Z} = \lim_{n\to 0} \frac{\ln \overline{Z^n}}{n}$$

Berechne $\overline{Z^n}$ für $n \in \mathbb{N} \to n$ Replikas

$$\overline{Z^n} = \overline{\mathrm{Tr}_{\{s^1 \dots s^n\}}\, e^{\beta \sum_\alpha \sum_{i<j} J_{ij} s_i^\alpha s_j^\alpha}}$$

$$= \mathrm{Tr}_{\{s^1 \dots s^n\}}\, e^{\frac{J^2\beta^2}{2N} \sum_{i<j} \sum_{\alpha\beta} s_i^\alpha s_i^\beta s_j^\alpha s_j^\beta}$$

Entkoppelung von Gitterplätzen i und j durch Hubbard-Stratonovich-Transf. (1 Integral pro Paar (α,β))

$\hat{=}$ geordnetes, translationsinvariantes System mit nN Spins und 4-Spin-WW

$$= e^{Nn\frac{J^2\beta^2}{4}} \int \left(\prod_{\alpha<\beta} \frac{dQ_{\alpha\beta}}{\sqrt{2\pi}}\right) \exp\left\{N\left[-\frac{J^2\beta^2}{2}\sum_{\alpha<\beta} Q_{\alpha\beta}^2 + \ln \mathrm{Tr} \exp\left(J^2\beta^2 \sum_{\alpha<\beta} Q_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta\right)\right]\right\}$$

Spur über n Spins

großes Parameter $\to$ Sattelpunktsintegration

Replika-Symmetrischer Ansatz: $Q_{\alpha\beta} = Q$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha<\beta} Q_{\alpha\beta}^2 = Q^2 \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{sowie}$$

$$\sum_{\alpha<\beta} Q_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta = \frac{Q}{2} \sum_{\alpha\neq\beta} s^\alpha s^\beta = \frac{Q}{2}\left(\sum_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta - n\right)$$

$$= \frac{Q}{2}\left(\sum_\alpha s^\alpha\right)^2 - \frac{Q}{2} n$$

Hubbard-Stratonovich $\longrightarrow x\sqrt{Q} \sum_\alpha s^\alpha$

Spur über Spins kann ausgerechnet werden. Danach sind alle Summen über Replikas $\sum_{\alpha=1}^{n} \cdots$ verschwunden, es ist nur noch Parameter: Führe Grenzwert $n \to 0$ aus.

Leider führt diese Methode zum falschen Ergebnis (Entropie <0 für $T=0$) für $T<T_c$.

Es muss also etwas falsch sein, und zwar der RS Ansatz.

RSB

Die Schwierigkeit ist, $\mathrm{Tr}\exp\left(J^2\beta^2\sum_{\alpha<\beta} Q_{\alpha\beta}s^\alpha s^\beta\right)$ auszurechnen, wenn Q nicht RS-Form hat. Idee: in der Nähe des Phasenübergangs ist $Q_{\alpha\beta}$ klein (denn für $T>T_c$ ist $Q_{\alpha\beta}=0$ die richtige Lösung), also kann man die exp-Fkt. entwickeln.

Berechne also $\mathrm{Tr}\exp\left(\frac{J^2\beta^2}{2}\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}s^\alpha s^\beta\right)$ mit Konvention $Q_{\alpha\beta}=Q_{\beta\alpha}$, $Q_{\alpha\alpha}=0$.

$$\exp\left(\frac{J^2\beta^2}{2}\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}s^\alpha s^\beta\right) = 1+\frac{J^2\beta^2}{2}\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}s^\alpha s^\beta + \frac{1}{2!}\left(\frac{J^2\beta^2}{2}\right)^2\left(\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}s^\alpha s^\beta\right)^2 + \dots$$

Berechne Spur termweise:

0. Ordnung:

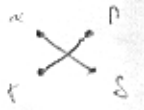
$$\mathrm{Tr}\,1 = \sum_{s^1=\pm1}\cdots\sum_{s^n=\pm1} 1 = 2^n$$

1. Ordnung:

$$\mathrm{Tr}\,s^\alpha s^\beta = \sum_{s^1=\pm1}\cdots\underbrace{\sum_{s^\alpha=\pm1} s^\alpha}_{=0}\cdots\underbrace{\sum_{s^\beta=\pm1} s^\beta}_{=0}\cdots\sum_{s^n=\pm1} 1 = 0$$

2. Ordnung:

$$\mathrm{Tr}\,s^\alpha s^\beta s^\gamma s^\delta = \begin{cases} 0 & \text{mind. ein Index ist allein} \\ 2^n & \text{alle Indizes sind verpaart.}\end{cases}$$

grafisch:  oder $\boxed{\text{2 Möglichkeiten}}$

 tritt nicht auf, da $Q_{\alpha\alpha}=0$

$$\hookrightarrow \mathrm{Tr}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Q_{\alpha\beta}Q_{\gamma\delta}\,s^\alpha s^\beta s^\gamma s^\delta = 2^n\sum_{\alpha\beta}\left(Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\alpha}+Q_{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta}\right)$$

$$= 2\cdot 2^n\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2$$

3. Ordnung:

$$\mathrm{Tr} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\chi} Q_{\alpha\beta} Q_{\gamma\delta} Q_{\varepsilon\chi} \, s^\alpha s^\beta s^\gamma s^\delta s^\varepsilon s^\chi$$

$\rightsquigarrow$ 

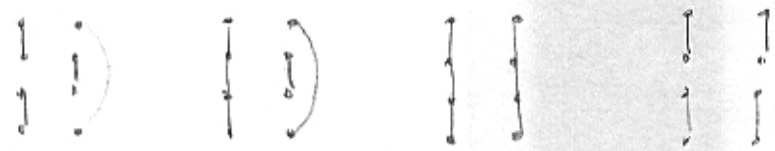
unterschiedliche Farben $\hat{=}$ unterschiedliche Werte der Indizes (z.B. $\alpha \neq \beta$ etc.)

$4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten

$$= 2^n \cdot 8 \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha}$$

(unterschiedliche Werte der Indizes gewährleistet wg. $Q_{\alpha\alpha} = 0$)

4. Ordnung:



$6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ $\quad 2^4 \cdot 3 = 48$ $\quad 2^3 = 8$ $\quad 6 \cdot 2 = 12$

$$\hookrightarrow \mathrm{Tr} \left(\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta \right)^4 = 2^n \Big[$$

enthält 96 × Diagramm 2
48 × Diagramm 3

$$48 \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\delta} Q_{\delta\alpha}$$

~~enthält 48 × Diagramm 3~~

$$-48 \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}^2 Q_{\alpha\gamma}^2$$

$$+8 \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4$$

enthält 48 × Diagramm 2
24 × Diagramm 3

$$+12 \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Q_{\alpha\beta}^2 Q_{\gamma\delta}^2$$

enthält 48 × Diagramm 3

$$-48 \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}^2 Q_{\alpha\gamma}^2$$

$$+24 \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4 \Big]$$

$$= 2^n \left(48 \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\delta} Q_{\delta\alpha} + 12 \left(\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2 \right)^2 - 64 \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4 - 48 \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}^2 Q_{\alpha\gamma}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr} \exp\left(\frac{J^2\beta^2}{2} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta\right) = 2^n \Big[1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{J^2\beta^2}{2}\right)^2 2 \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{J^2\beta^2}{2}\right)^3 \cdot 8 \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4!}\left(\frac{J^2\beta^2}{2}\right)^4 \Big(48 \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\delta} Q_{\delta\alpha}$$

$$+ 12\Big(\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2\Big)^2 - 64 \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4 - 48 \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}^2 Q_{\alpha\gamma}^2 \Big) + \mathcal{O}(Q^5) \Big]$$

Re-exponentiieren:

$$= 2^n \exp\Big\{ \frac{J^4\beta^4}{4} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2 + \frac{J^6\beta^6}{6} \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} + J^8\beta^8 \Big(\frac{1}{8} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\delta} Q_{\delta\alpha}$$

$$- \frac{1}{12} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4 - \frac{1}{8} \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}^2 Q_{\alpha\gamma}^2 \Big) + \mathcal{O}(Q^5) \Big\}$$

(der Term $12\left(\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2\right)^2$ ist verschwunden, weil es bei der Entwicklung der exp-Funktion vom Term $\frac{J^4\beta^4}{4} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2$ generiert wird)

Zusammen:

$$\overline{Z^n} = e^{Nn\frac{J^2\beta^2}{4}} \int \Big(\prod_{\alpha\beta} \frac{dQ_{\alpha\beta}}{\sqrt{2\pi}}\Big) \exp\Big\{ N \Big[\underbrace{\Big(-\frac{J^2\beta^2}{4} + \frac{J^4\beta^4}{4}\Big)}_{=:\tau} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2$$

$$+ \frac{J^6\beta^6}{6} \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} + \frac{J^8\beta^8}{12} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4 + \mathcal{O}(Q^4) \Big] \Big\}$$

vernachlässigt, obwohl eigentlich relevant → schematisches Modell

effektive „freie Energie" in der Nähe von $T = T_c$

$$F_n[Q] := -\tau \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2 - \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\delta} - \frac{1}{12} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4$$

$$\tau = 1 - J^2\beta^2 \sim T - T_c$$

$$J^2\beta^2 \approx 1$$

wirkliche freie Energie

$$\bar{f} = \frac{\overline{F}}{N} = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} F_n[Q] \qquad \text{mit } Q_{\alpha\beta} \text{ aus SP}$$

Man suche also das Extremum von $F_n[Q]$ ($\hat{=}$ SP).

Wieder muss man einen Ansatz für $Q_{\alpha\beta}$ machen. Der Ansatz $Q_{\alpha\beta} = Q$ war fehlgeschlagen. Parisi ~~schlägt~~ probierte folgenden Ansatz:

1. Schritt

$$Q = \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 & & q_0 \\ & \boxed{q_1} & \\ q_0 & & \boxed{q_1} \end{pmatrix}}_{n = i\, m_0} \Big\}\, m_1 \qquad (\text{es gilt immer } Q_{\alpha\alpha} = 0)$$

1-Schritt RSB

2. Schritt: unterteile Unterblöcke in Unterblöcke

$$\underbrace{\boxed{\begin{matrix} q_2 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{matrix}}}_{m_1} \Big\}\, m_2$$

u.s.w. bis hin zur k-ten Hierarchie von Unterblöcken.

Offensichtlich sollte gelten $1 =: m_{k+1} \mid m_k \mid m_{k-1} \mid \dots \mid m_1 \mid m_0 = n$ (ist Teiler von)

Mit dieser ~~Unterteilung~~ Parametrisierung der Matrix durch $q_0 \dots q_k$, $m_0 \dots m_{k+1}$ kann man $F_n[Q]$ ~~schreiben als~~ folgendermaßen ausdrücken:

$$\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2 = \left(m_0^2 - \frac{m_0}{m_1} m_1^2\right) q_0^2 + \frac{m_0}{m_1}\left(m_1^2 - \frac{m_1}{m_2} m_2^2\right) q_1^2 + \frac{m_0 m_1}{m_1 m_2}\left(m_2^2 - \frac{m_2}{m_3} m_3^2\right) q_2^2 + \dots$$

$$\frac{m_0}{m_1} \dots \frac{m_{k-1}}{m_k}\left(m_k^2 - \frac{m_k}{m_{k+1}} m_{k+1}^2\right) q_k^2$$

$$= m_0(m_0 - m_1) q_0^2 + m_0(m_1 - m_2) q_1^2 + m_0(m_2 - m_3) q_2^2 \dots + m_0(m_k - m_{k+1}) q_k^2$$

$$= m_0 \sum_{k=0}^{k} (m_k - m_{k+1}) q_k^2$$

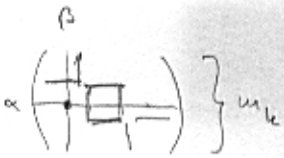
Analog:

$$\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4 = m_0 \sum_{k=0}^{K} (m_k - m_{k+1})\, q_k^4$$

Bleibt noch

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} \quad \cancel{4}.$$

Betrachte α, β.



drei Möglichkeiten: γ im selben Block wie β
γ im selben Block wie α
γ weder im selben Block wie α noch β.

1. Möglichkeit: $Q_{\alpha\beta} = q_k$
$Q_{\alpha\gamma} = q_k$
$Q_{\beta\gamma} = q_{k'}$ mit $k' > k$

2. Möglichkeit: $Q_{\alpha\beta} = q_k$
$Q_{\alpha\gamma} = q_{k'}$ mit $k' > k$
$Q_{\beta\gamma} = q_k$

3. Möglichkeit: $Q_{\alpha\beta} = q_k$

1. Untermöglichkeit: γ im Block m_k

$Q_{\alpha\gamma} = q_k$
$Q_{\beta\gamma} = q_k$

2. Untermöglichkeit: γ außerhalb des Blocks der Größe m_k

$Q_{\alpha\gamma} = q_{k'}$ mit $k' < k$
$Q_{\beta\gamma} = q_{k'}$ mit $k' < k$

Man sieht, dass für beliebige α, β, γ mindestens zwei der drei Zahlen $Q_{\alpha\beta}, Q_{\beta\gamma}, Q_{\gamma\alpha}$ gleich sind.

Die 2. Untermöglichkeit kann man weglassen, wenn man sie Möglichkeit 1 bzw. 2 zuschlägt mit vertauschten Rollen von α, β, γ.

Für die einzelnen Möglichkeiten gibt es folgende Häufigkeiten:

1. Mögl.: $\underbrace{m_0 (m_k - m_{k+1})}_{\text{Möglichkeiten, dass } \alpha \text{ und } \beta \text{ im Block } k \text{ liegen}} \underbrace{\cancel{(m_0 + 1)}}_{\cancel{\text{Möglichkeiten, dass } \gamma \text{ im gleichen Teilblock wie } \beta \text{ liegt, dass } \alpha\beta \text{ ist.}}}$ ~~m_0, weil Unterm. 2 hier dazugerechnet worden ist.~~

$\underbrace{(m_{k'} - m_{k'+1})}_{\text{Möglichkeiten, dass } \alpha\beta \text{ im Block } k' \text{ liegt}}$

2. Mögl.: $m_0 (m_k - m_{k+1})(m_{k'} - m_{k'+1})$

1. Mögl. + 2. Mögl. + Vertauschung $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$

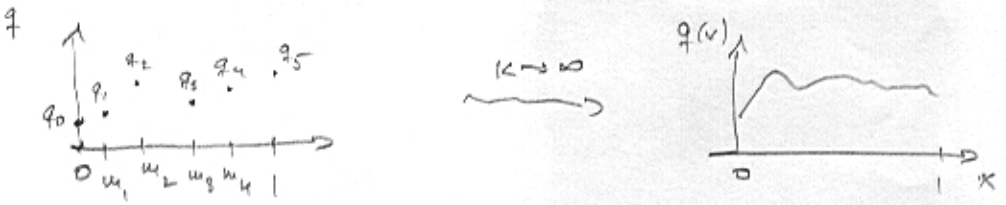
3. Mögl.: $m_0 (m_k - m_{k+1})(m_k - 2m_{k+1})$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} = 3 \sum_{k=0}^{K} m_0 (m_k - m_{k+1}) \, q_k^2 \sum_{k'=k+1}^{K} (m_{k'} - m_{k'+1}) q_{k'}$$

$$+ \sum_{k=0}^{K} m_0 (m_k - m_{k+1})(m_k - 2m_{k+1}) q_k^3$$

Entscheidender Punkt: wenn $n \to 0$, so klappen die m_k um, d.h.

$$0 \leq m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_K < m_{K+1} = 1$$



Ordnungsparameter $q_0 \dots q_K$ werden zur Funktion $q(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$!

Es ergibt sich

$$\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2 = u_0 \sum_{k=0}^{K} \underbrace{(u_k - u_{k+1})}_{-dx} q_k^2 \xrightarrow[u\to 0]{K\to\infty} -u \int_0^1 dx\, q^2(x)$$

$$\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^4 = u_0 \sum_{k=0}^{K} (u_k - u_{k+1})\, q_k^4 \longrightarrow -u \int_0^1 dx\, q^4(x)$$

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} \longrightarrow +3u \int_0^1 dx\, q^2(x) \int_x^1 dy\, q(y) \qquad \text{(2 neg. Differenziale)}$$

$$+u \int_0^1 dx\, x\, q^3(x) \qquad \text{(1 neg. Diff und } d(-x)\text{)}$$

$$\Rightarrow F_u[q(x)] = u\Big[+\tau \int_0^1 dx\, q^2(x) - \frac{1}{12}\int_0^1 dx\, q^4(x) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 dx\, q^2(x) \int_x^1 dy\, q(y) + \frac{1}{6}\int_0^1 dx\, x\, q^3(x)\Big]$$

Suche Extremum:

$$0 = \frac{1}{u}\frac{\delta F_u[q(x)]}{\delta(q(x))} = \tau\, 2q(x) - \frac{1}{3} q^3(x) + \frac{1}{2} x q^2(x)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta q(x)} \int_0^1 dx' dy'\, q^2(x')\, q(y')\, \Theta(y'-x')$$

R:

$$\frac{\delta}{\delta q(x)} \int_0^1 dx' dy'\, q^2(x')\, q(y')\, \Theta(y'-x')$$

$$= \int dx' dy' \left[2q(x')\,\delta(x-x')\, q(y') + q^2(x')\,\delta(x-y')\right]\Theta(y'-x')$$

$$= \int dy'\, 2q(x)\, q(y')\, \Theta(y'-x) + \int dx'\, q^2(x')\, \Theta(x-x')$$

$$= 2q(x) \int_x^1 dx'\, q(x') + \int_0^x dx'\, q^2(x')$$

$$\hookrightarrow 0 = 2\tau q(x) - \frac{1}{3} q^3(x) + \frac{1}{2} x q^2(x) + \frac{1}{2}\left(2q(x)\int_x^1 dx'\, q(x') + \int_0^x dx'\, q^2(x')\right)$$

Differenziere nach x:

$$0 = 2\tau\, q'(x) - q'(x)\, q^2(x) + \tfrac{1}{2} q^2(x) + x\, q'(x)\, q(x)$$

$$+ q'(x) \int_x^1 dx'\, q(x') - q^2(x) + \tfrac{1}{2} q^2(x)$$

$$\Rightarrow 0 = 2\tau - q^2(x) + x\, q(x) + \int_x^1 dx'\, q(x') \qquad (1)$$

Differenziere nochmal nach x:

$$0 = -2 q'(x) q(x) + q(x) + x\, q'(x) - q(x)$$

$$= q'(x)\big(x - 2q(x)\big)$$

$$\Rightarrow \boxed{q'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad q(x) = \frac{x}{2}}$$

Probiere $q(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x < x_1 \\ \frac{x_1}{2} & x > x_1 \end{cases}$ aus: Setze ein in (1)

$x < x_1$

$$0 = 2\tau - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \int_0^1 dx'\, q(x) - \underbrace{\int_0^x dx' \frac{x'}{2}}_{= \frac{x^2}{4}}$$

$$= 2\tau + \int_0^1 dx'\, q(x')$$

OK, solange $\int_0^1 dx'\, q(x') = -2\tau \qquad (\tau < 0)$

$x > x_1$

$$0 = 2\tau - \frac{x_1^2}{4} + x\,\frac{x_1}{2} + \underbrace{\int_x^1 dx' \frac{x_1}{2}}_{= (1-x)\frac{x_1}{2}}$$

$$= 2\tau - \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1}{2}$$

OK, solange $\frac{x_1}{2} - \frac{x_1^2}{4} = -2\tau$

$$\int_0^1 dx\, q(x) = \underbrace{\int_0^{x_1} dx \frac{x}{2}}_{\frac{x_1^2}{4}} + (1 - x_1)\frac{x_1}{2} = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_1}{2} - \frac{x_1^2}{4}$$

$\Rightarrow$ stimmt, wenn $x_1^2 - 2x_1 - 8\tau = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = 1 - \sqrt{1 + 8\tau}}$$

Somit ist die wirkliche freie Energie

$$\bar{f} = \frac{\overline{F}}{N} = \lim_{n \to 0} \frac{1}{n} F_n[q(x)]$$

$$= \int_0^1 dx \left[\tau q^2(x) - \frac{1}{12} q^4(x) + \frac{1}{2} q^2(x) \int_x^1 dy\, q(y) + \frac{1}{6} x q^3(x) \right]$$

<u>Bemerkungen</u>

1. RS ist in diesem Formalismus enthalten (entspricht $q(x) = q$ mit $q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+8\tau}$)
2. Mathematisch äußerst fragwürdig, Ergebnis aber mathematisch exakt bestätigt (Talagrand 2003)
3. Es muss nicht immer ∞-RSB sein. Viele Modelle, insbesondere auf Zufallsgraphen fester Konnektivität, haben 1-RSB Phasen. Weiteres Beispiel: REM
4.