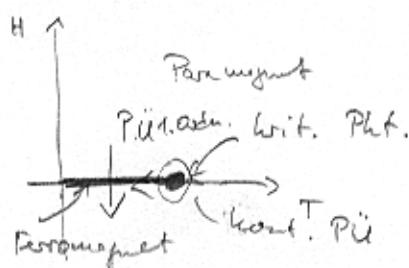


Wiederholung und Nachtrag PÜ in geordneten Systemen

Phasendiagramm
Ferromagnet



Vorbericht in den Kriterien

PÜ 1. Ordnung: Unstetigkeit im Ordnungsparameter

kont. PÜ: stetig, aber nicht differenzierbar.

kont. PÜ gekennzeichnet durch Exponenten: alle
beobachtbaren Verhalten sich beim PÜ wie $\propto |T-T_c|^\alpha$
mit Exponent α . Es gibt nur zwei unabhängige Exponenten,
alle anderen sind durch sog. Skalenrelationen darauf
zurückzuführen. Diese Universalität wird bewiesen
durch die Skalenform

$$\frac{F}{VT} \approx \tau^{2-\alpha} F_s(\tau^{-\delta}) \quad (\tau = \left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|)$$

↑ Skalenfunktion

in der Nähe des krit. Punktes, die nur zwei krit. Exponenten
enthält (α und δ).

↳ Universalitätsklassen (P.U. lassen sich einteilen gemäß ihrer
Exponenten in nur wenige Klassen ($\alpha \approx 0.25$)), z.B.

- 2d, 3d, Mean-field Ising Universalitätsklasse

- 2d - 5d, Mean-field Perkolation

Bemerkung: Die Namen der Exponenten sind „gezogen“;

- α : spez. Wärme
- β : Ordnungsparameter
- γ : Suszeptibilität
- δ : krit. Isotherme
- ν : Korrelationslänge
- η : Korrelationsfkt. am krit. Pkt. $G \sim r^{(d-2+\eta)}$

Ungeordneter Ferromagnet

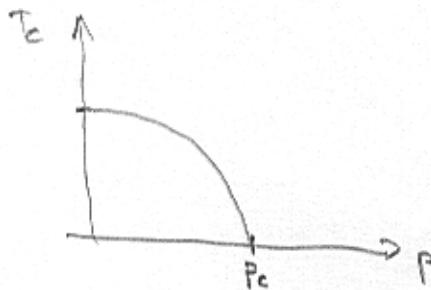
Das einfachste System, welches Kondensierung und dynamische Freiheitsgrade kombiniert, ist der ungeordnete Ferromagnet. In diesem Modell nimmt man einen Ising-Ferromagneten mit $\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i$ und entfernt zufällig Spins zufällig mit Wahrscheinlichkeit p . Man wählt also für jeden Spin ~~zufällig~~ die Zufallsvariable $e_i = \begin{cases} 0 & \text{Wahrsch } p \\ 1 & \text{Wahrsch } 1-p \end{cases}$ aus und schreibt

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i e_i s_j e_j - H \sum_i s_i e_i.$$

Offensichtlich handelt es sich um eine Verknüpfung von Ferromagnet und Perkolation. Diese Kondensierung ist schwach, weil sie keine Frustration erzeugt.

Nun ~~wie~~ weint es offensichtlich, dass die Entfernung eines kleinen Bruchteils der Spins nichts ausmachen sollte - der Phasenübergang sollte davon unbeeinträchtigt bleiben. Andernfalls führt die Entfernung von zu vielen Spins dazu, dass es keine unendl. große zusammenhängende Cluster mehr gibt. Spätestens dann muss der Phasenübergang zusammenbrechen (scharfe Phasenübergänge treten nur in unendl. großen Systemen auf).

Dazwischen sollte, sofern das PÜ unbeeinträchtigt bleibt, die kritische Temperatur sinken, weil durch die fehlenden Ww die Spins keine so große Tendenz mehr haben, sich zu ordnen.



Harris-Kriterium

also

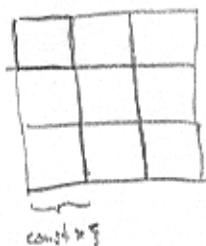
Gehen wir von der plausiblen Annahme, dass die PÜ unverändert bleibt, d.h. in der gleichen Universalitätsklasse wie bei $p=0$ (gekennzeichneter Fermionenp.).

Jetzt teilen wir das System auf in Untersysteme der Größe $(\text{const} \times \xi)$,

bei einer Temperatur T in der Nähe von $T_c(p)$.

$$\Delta T := T - T_c(p)$$

$$\xi \sim |\Delta T|^{\nu}$$



Die Untersysteme sind groß (denn $\xi \sim |\Delta T|^{\nu}$ ist groß), daher sollten Oberflächeneffekte zu vernachlässigen sein. Jeder der Untersysteme sollte also ~~anfangs~~ ~~vorher~~ an den ~~an dem~~ ~~an dem~~ Phasenübergang ~~dar~~

Die Fehlstelle sind in jedem Untersystem ~~zufällig~~ (und unabh. von den anderen) verteilt. Somit wird auch die Anzahl n der Fehlstelle im Untersyst. fluctuieren. Natürlich gilt

$$\overline{u} = (\text{const} \times \xi)^{\frac{1}{\nu}} p = V_u p \quad V_u := (\text{const} \times \xi)^{\frac{1}{\nu}}$$

Die Schwankung ist gegeben durch

$$\Delta u^2 = \overline{u^2} - \overline{u}^2 \quad \begin{array}{c} V_u \\ \downarrow \\ \sum_{i=0}^n e_i \end{array} \quad \begin{array}{c} V_u \\ \downarrow \\ \sum_{i=0}^n e_i p (1-p) \end{array} \quad \begin{array}{c} V_u-n \\ \downarrow \\ \sum_{i=n+1}^n e_i \end{array}$$

Berechnen wir also $\overline{u^2}$.

$$\overline{u^2} = \left(\sum_{i=1}^{V_u} (1-e_i) \right)^2 = \sum_{ij} (1-e_i)(1-e_j) = \sum_{ij} (1-e_i e_j + e_i e_j)$$

$$= \underbrace{V_u V_u^2}_{= V_u^3} - \underbrace{2 V_u \sum_i e_i}_{\sum_i e_i} + \underbrace{\sum_{ij} e_i e_j}_{= V_u^2}$$

$$= \sum_{i \neq j} (1-e_i)(1-e_j) + \sum_i (1-e_i)^2 = \sum_{i,j} \underbrace{(1-e_i)}_p \underbrace{(1-e_j)}_p + \sum_i \underbrace{(1-e_i)^2}_p$$

$$= V_u (V_u - 1) p^2 + V_u p = V_u p (1-p) + V_u^2 p^2$$

$$\hookrightarrow \Delta u^2 = \overline{u^2} - \overline{u}^2 = V_u p (1-p)$$

$\hookrightarrow p_u =$ Leistungen konz. in Unter systemen

$$= \frac{u}{V_u}$$

$$\hookrightarrow \Delta p_u^2 = \overline{p_u^2} - \overline{p_u}^2 = \frac{1}{V_u^2} \Delta u^2 = \frac{p(1-p)}{V_u}$$

\hookrightarrow Typischerweise ist in einem Unter systemen

$$p_u = p \pm \Delta p_u = p \pm \sqrt{\frac{p(1-p)}{V_u}}$$

\hookrightarrow die kritische Temperatur im Unter systemen ist

$$T_{cu} = T_c(p \pm \Delta p_u) \approx T_c(p) \pm T'_c(p) \Delta p_u$$

Damit der Phasenübergang unverändert bleibt

Die Annahme war, dass der p_u unverändert bleibt. Das bedeutet, dass alle (oder zumindest fast alle) Unter systeme auf der gleichen Seite der krit. Temperatur sein müssen, also

$$T > T_{cu} \quad \text{für (fast) alle Unter systeme} \quad (T > T_c(p)) \quad \text{bzw.}$$

$$T < T_{cu} \quad \text{---} \quad (T < T_c(p))$$

$$\hookrightarrow T = \Delta T + T_c(p) > T_c(p) + \Delta p_u T'_c(p) \quad \text{bzw.}$$

$$T = \Delta T + T_c(p) < T_c(p) - \Delta p_u T'_c(p)$$

$$\hookrightarrow |\Delta T| > \Delta p_u T'_c(p)$$

$$\hookrightarrow c \cdot \xi^{-1/2} > T'_c(p) \sqrt{p(1-p)} V_u^{-1/2} = T'_c(p) \sqrt{p(1-p)} \text{ const} \times \xi^{-d/2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\xi^{d/2 - 1/2} > \text{const} T'_c(p) \sqrt{p(1-p)}} \quad \textcircled{*}$$

Falls $\frac{d}{2} - \frac{1}{\delta} > 0 \Leftrightarrow \boxed{d\omega > 2}$, so ist die Bedingung ④

um so besser erfüllt, je näher man an der PÜ herangeht

($\xi \rightarrow \infty$, wenn $\Delta T \rightarrow 0$). Mit Skalarelation $\alpha = 2 - d\omega$

erhält man auch $\alpha < 0$.

Wenn jedoch $d\omega < 2$ bzw. $\alpha > 0$, so ist die Bedingung um so schlechter erfüllt, je näher man an der PÜ kommt. Das heißt, dass die ursprüngliche Annahme, der PÜ sei unverändert geblieben, zu einem Widerspruch führt!

Überraschenderweise gilt das Kriterium für alle $p \neq 0$, d.h.

Falls $\alpha > 0$ ist, so zerstört bereits eine infinitesimale Veränderung $p \neq 0$ der PÜ. Die ursprüngliche, scheinbar plausible Überlegung, dass nur wenige entfernte Spins keinen Unterschied machen sollten, war also falsch.

Dies ist das erste Beispiel dafür, dass Unordnung neue und unerwartete, ja sogar kontraintuitive Effekte hervorrufen kann.

Nicht-Erfülltsein des Harris-Krit.

Harris-Krit. erfüllt \rightarrow PÜ unverändert \rightarrow nicht Neues

Harris-Krit. nicht erfüllt \rightarrow ?

Es gibt mehrere Möglichkeiten

1. PÜ wird „aufgeweitet“, d.h. kein scharfer PÜ mehr, sondern ein mehr oder weniger breiter Crossoverbereich. Dies kommt vor, ist aber nicht der gewöhnliche Fall.

2. PÜ wird ersetzt durch eine neue PÜ mit einer neuen Universitätsklasse. Die Exponenten des neuen PÜ erfüllen ihrerseits das Harris-Krit.

Bsp.:

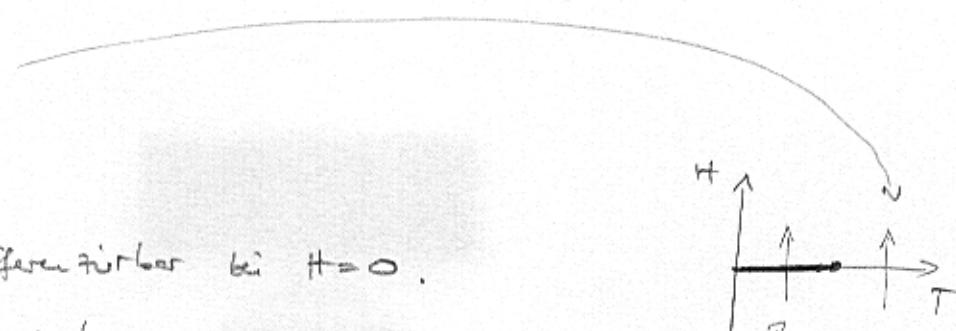
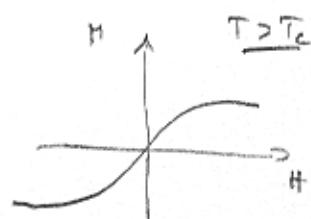
	$d=2$	$d=3$	mit Umordnung
Ising	$\alpha = 0 ?$	$\alpha \approx 0,12 > 0$ $\nu = 0,637$	$\alpha = -0,04$ $\nu = 0,68$
XY			
Heisenberg		$\alpha \approx -0,09 < 0$ $\nu = 0,698$	siehe links

3. In seltener Fällen gibt es exponentielles Shalen (d.h. keine Potenzgesetze mehr am krit. Punkt), ein eher exotisches Phänomen

Griffiths - Singularitäten

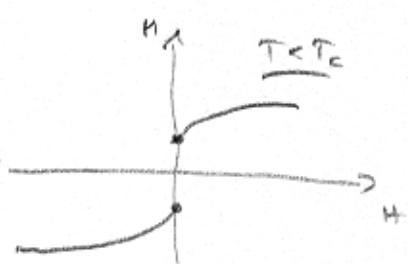
Schauen wir zunächst wieder den unverdünnten Ferromagneten, $\rho = 0, \mu_0$.

Für $T > T_c$ sieht die Magnetisierung als Funktion des Feldes so aus:

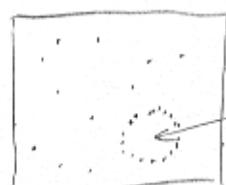


Diese Funktion ist differenzierbar bei $H=0$.

Für $T < T_c$ ist das anders:



Betrachte jetzt $\rho > 0$. Es gibt eine kleine, aber endliche, W-heit, einen Block aus M Spins zu finden, der durch die Leerstellen von Rest getrennt ist, aber selbst keine Leerstellen ~~ent~~ enthält.



isolierter Block aus $\approx M$ Spins

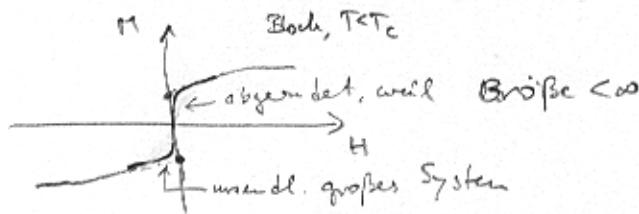
In Temperaturbereiche $T_c(\rho) < T < T_c(0)$ persistiert jetzt folgendes:

Da ein isolierter Block nicht mit dem restlichen System wechselt, ist die Gesamt magnetisierung ^{ist} die Summe aus der Magnetisierung des Blocks und des Restes,

$$M = M_{\text{Block}} + M_{\text{rest}},$$

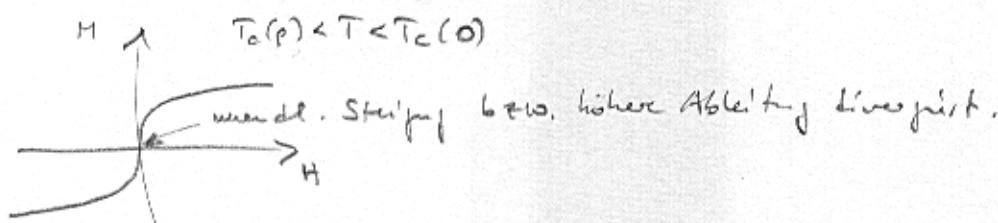
Nun ist der Block aber in seiner Tieftemperaturphase. Also sieht seine

Magnetisierungskurve so aus:

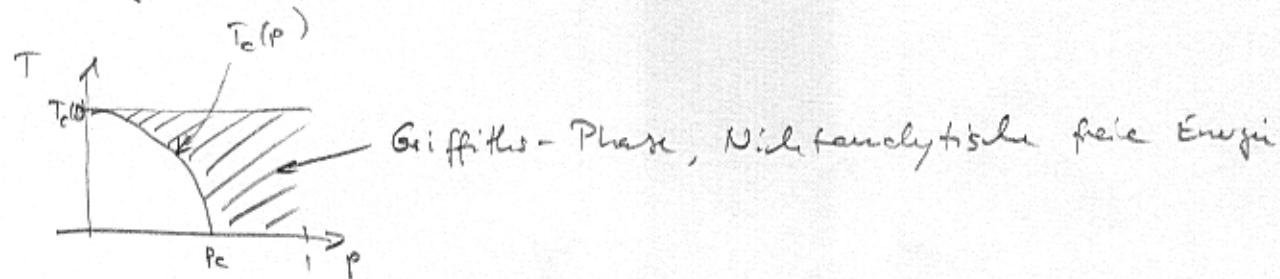


Da Blöcke beliebiger Größe mit endlicher Wahrscheinlichkeit auftauchen, tauchen auch Magnetisierungskurven mit beliebiger Steigung am Ursprung auf.

Es kann gezeigt werden, dass in der Summe diese großen Blöcke zwar stetig ist, aber dazu führen, dass die Magnetisierung nicht analytisch wird.



Es ergibt sich also



Obwohl diese großen Blöcke außergewöhnlich selten sind, haben sie trotzdem einen Einfluss auf die Thermodynamik des Systems.

Das Konzept hat weitreichende Konsequenzen für alle ungeraden Systeme, denn offensichtlich gibt es immer bei Anwesenheit von Unordnung die Möglichkeit, dass ~~zgk~~ aufgrund von Fluktuationen zusammenliegende Raumgebiete ungewöhnliche Verteilungen der Unordnung aufweisen.

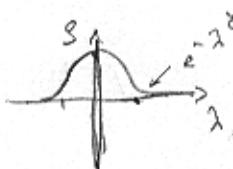
Dieser Satz

Die Betonung liegt dabei auf "zusammen liegenden Raumgebieten": In voll besetzten Systemen kann diese Art von Fluktuation keine Rolle spielen, weil jeder mit jedem anderen wechselt und es daher die Isolation nicht geben kann.

Anderes Beispiel: Zufallsmatrix



EV-Spektrum in voll besetzter Zufallsmatrix



EV-Spektrum in endlichem Zufallsmatrix

Große defektfreie Regionen sind ^{noch} exponentiell selten, und aber ihr Einfluss wird besonders deutlich für die Dynamik eines Systems, denn es dauert sehr lange, bis diese großen Regionen einmal komplett geflippt werden. Das äußert sich in den Autokorrelationsfunktionen

$$C = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i(0) s_i(t) \rangle \sim \begin{cases} e^{-t/t_0} & T > T_c(0) \\ e^{-(t/t_0)^{\gamma_2}} & T_c(p) < T < T_c(0) \quad (\text{Heisenberg}) \end{cases}$$

oder noch langsamer für Ising

Werkstoff Spingläser

Spingläser sind Systeme, bei denen die WW zwischen den Spins zufällig ist.

Die "einfachste" Variante ist das Ising-Spinglas, welches durch die Hamiltonfunktion

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

gegeben ist. Hierbei sind die J_{ij} Zufallsvariablen. Es werden hauptsächlich zwei Verteilungen der J_{ij} benutzt:

$$1. \quad J_{ij} = \begin{cases} J & \text{mit W-keit } p \\ -J & \text{mit W-keit } 1-p \end{cases} \quad \pm J \text{ Spinglas}$$

$$2. \quad P(J_{ij}) \sim e^{-\frac{J_{ij}^2}{2J^2}} \quad \text{Gaußisches Spinglas.}$$

Es gibt alternative

Wir haben gesehen, dass beim Ferromagneten die Spins in der Tieftemperaturphase bevorzugt in eine Richtung zeigen. Das ist beim Spinglas sicher nicht der Fall, denn das Vorzeichen der WW ist zufällig. Somit ist der Ordnungsparameter des Ferromagneten,

$$m = \frac{M}{N} = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle$$

kein guter Ordnungsparameter für das Spinglas, denn $\bar{m} = 0$ für alle T.

Trotzdem könnten die Spins einfrieren, d.h. $\langle s_i \rangle \neq 0$, aber eben mit zufälligen Vorzeichen. Ein besserer Ordnungsparameter ist daher

$$q = \frac{1}{N} \sum_i \underbrace{\langle s_i \rangle^2}_{\substack{\leftarrow \text{Mittelwert} \\ \text{therm. Mittel}}}$$

Wenn der thermische Mittelwert jedes einzelnen Spins = 0 ist, so ist $q = 0$. Wenn die Spins aber eingefroren sind, so ist $q > 0$.

Wie wir sehen werden, ist dieser Ordnungsparameter allerdings nicht der "richtige". Trotzdem kann er zwischen Hoch- und Tieftemperaturphase unterscheiden.

Beim Spinglas muss man, um der zufälligen Verteilung Herr zu werden, q i.d.R. immer ^{die} höhere Potenz des Observables betrachten. z.B. ist die gewöhnliche Suszeptibilität $\chi = \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial \langle s_i \rangle}{\partial H}$, also

$$\begin{aligned}\bar{\chi} &= \frac{\beta}{N} \sum_{ij} (\langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle) \\ &= \frac{\beta}{N} \sum_i \underbrace{(\langle s_i^2 \rangle - \langle s_i \rangle^2)}_{= 1-q} + \frac{\beta}{N} \sum_{i \neq j} \left(\underbrace{\langle s_i s_j \rangle}_{= 0} - \underbrace{\langle s_i \rangle \langle s_j \rangle}_{= 0} \right) \\ &= \beta (1-q)\end{aligned}$$

Somit divergiert χ nicht am PÜ, weil q nicht divergiert. Um eine wirkliche Singularität eines PÜ zu finden, muss man die Spinglassuszeptibilität anschauen:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{SG} &:= \frac{\beta}{N} \sum_{ij} (\langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle)^2 \\ &= \frac{\beta}{N} \sum_i \underbrace{(1 - 2\langle s_i \rangle^2 + \langle s_i \rangle^4)}_{= \Theta(1)} + \frac{\beta}{N} \sum_{i \neq j} \underbrace{(\langle s_i s_j \rangle^2 - 2\langle s_i s_j \rangle \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle + \langle s_i \rangle^2 \langle s_j \rangle^2)}_{> 0, \text{ Summe aus } \sim N(N-1) \text{ Termen, evtl. alle } \Theta(1) \Rightarrow \text{Divergenz von } \bar{\chi}_{SG}}\end{aligned}$$

Mean-field Spins

Mean-field für Ferromagnet:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j \approx -J \sum_i s_i z \langle s \rangle$$

Dieses Vorgehen funktioniert für das SG nicht ohne Weiteres, denn

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j \approx - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i \langle s \rangle$$

\uparrow macht keinen Sinn, da untersch.
 $\langle s_i \rangle \neq \langle s_j \rangle$

Bemerkte stattdessen alternative Möglichkeit, nämlich die des vollständig vernetzten Gitters, d.h.

$$\mathcal{H} = - \sum_{ij} J_{ij} s_i s_j$$

\uparrow Summe über alle Spin-Paare

Hinzu soll $P(J_{ij}) \sim e^{-\frac{J_{ij}^2}{2J^2}}$ sein (Gaußsches SG)

mit $\tilde{J} = \frac{J}{\sqrt{N}}$. Der Grund für die Skalierung mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$ wird später klar werden.

Zustandssumme:

$$Z = \text{Tr } e^{-\beta \mathcal{H}} = \text{Tr } e^{-\beta \sum_{ij} J_{ij} s_i s_j}$$

Ziel: freie Energie

$$F = -kT \overline{\ln Z}$$