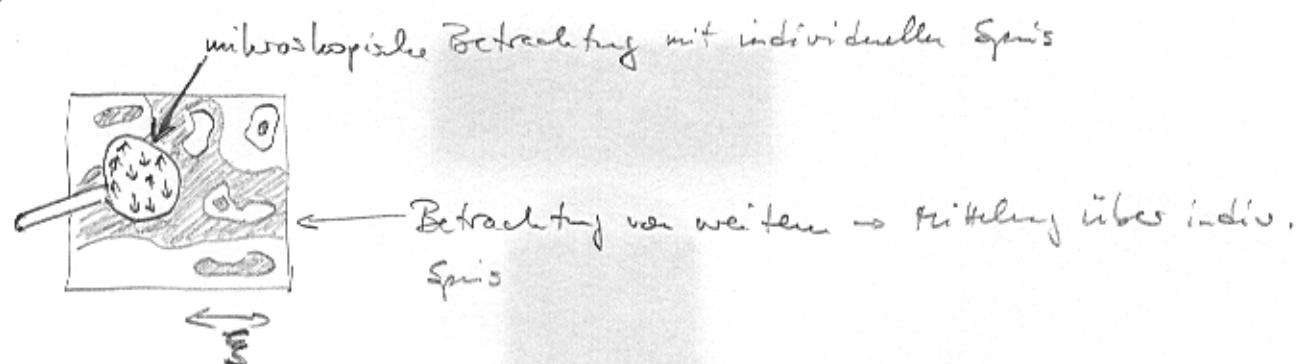


Renormierungsgruppe (RG)

9.6.2005

Zunächst: Einführung in RG am Beispiel des Ferromagneten.

Zentrale Idee der RG: gehe einen Schritt zurück und betrachte das System von weiter



Spins sind stark korreliert auf Längsskalen $1 \ll l \ll \xi$

Betrachte daher z.B. Blockspins

$$S_I := \text{sign} \left(\frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} s_i \right)$$

$$\bar{s}_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \langle s_i \rangle$$

| \leftrightarrow | |
|-------------------|---|
| X | X |
| X | X |
| X | X |
| X | X |

etc.

(Gesamtw. ungeordn. Anzahl
Spins pro Block)

$$\text{Hamiltonfkt. des wsgl. Syst.: } H = - \underbrace{\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j}_{K_1} - \underbrace{\beta h \sum_i s_i}_{K_2}$$

$$\text{Zustandssumme: } Z = \text{Tr}_{\{s_i\}} = \text{Tr}_{\{S_I\}} e^{-\beta H} = \prod_I \sum_{S_I} e^{-\beta H(S_I)}$$

Betrachte jetzt Zustandssumme als fkt. der Blockspins:

$$Z = \text{Tr}_{\{S_I\}} \exp(-\beta H) = \text{Tr}_{\{S_I\}} \exp \left(\pi \delta(S_I - \text{sign}(\sum_{i \in I} s_i)) \right)$$

aw formula
Silviusweise

$$= \text{Tr}_{\{S_I\}} \exp \left\{ -\beta H'(\{S_I\}) \right\}$$

$$\text{Entscheidende Beobachtung: } \beta H'(\{S_I\}) = K'_0 + K'_1 \sum_{\langle I, J \rangle} S_I S_J + K'_2 \sum_I S_I$$

$$+ K'_3 \sum_{\langle I, J \rangle} S_I S_J + K'_4 \sum_{\langle I, J, K \rangle} S_I S_J S_K + \dots$$

mit neuen Kopplungskonstanten K'_0, \dots, K'_n

①

Das System aus Blockspins stellt ein neues Ising-System dar mit neuen Kopplungskonstanten K_0', K_1', K_2', \dots !

~~Neues System hat Korrelationslänge ξ' (denn es wurde ja nichts verändert), aber gemessen im neuen Gitterabstand ergibt sich~~

$$\xi' = \frac{\xi}{\ell} < \xi$$

Diese Prozedur definiert (formal) die RG-Transformation

$$K' = R_e(K)$$

Rekursionsbeziehung

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{neue} & & \text{alte} \\ \text{Kopplungskonst.} & & \text{Kopplungskonst.} \end{array}$$

Korrelationslänge des neuen Systems ist ξ (denn die Zustandsumme wurde ja nicht verändert, nur teilweise ausgerechnet). Gemessen in Einheiten des neuen Gitterabstandes ist aber

$$\xi' = \frac{\xi}{\ell} < \xi \quad \rightarrow \text{neues Syst. ist weiter entfernt von krit. Pkt.}$$

RG-Transf. ~~ist~~ bildet Semigruppe

$$[R_e \circ R_{e'} = R_{ee'}]$$

es gibt kein Inverses ($\ell > 1$), daher Semigruppe

$\ell < 1$ ist möglich zu konstruieren, weil Information weggeworfen wird.

Wesentliche Idee jetzt: suche Fixpunkte von $B_e[\underline{k}^*]$, d.h.

$$\underline{k}^* = B_e(\underline{k}^*)$$

Am Fixpunkt: $\underline{\xi}' = \frac{\underline{\xi}}{c} = \underline{\xi} \quad \Rightarrow \quad \underline{\xi} = 0 \text{ oder } \underline{\xi} = \infty$

d.h. Fixpunkte beschreiben kritische Punkte $\underline{\xi}$ und Punkte ohne Korrelationen!

Sofortige Folgerung: Syst. am krit. Pkt. ist selbstähnlich!
Wechsel der Längenebene ändert nichts.

Stabilität der Fixpunkte

Fixpunkt stabil: Wiederholte Iteration führt zum Fixpunkt bestimmt die "Ball"-Phase

Fixpunkt instabil: Iteration führt zunächst zu Rüttig Fixpunkt, wird dann umgeleitet zu Rüttig stab. Fixpunkt.

Exponent

Verhalten in der Nähe des Fixpunktes

Linearisiere $B_e(\underline{k})$ um den Fixpunkt:

$$\underline{k}' = \underline{k}^* + \Delta \underline{k}' = B_e(\underline{k}^* + \Delta \underline{k}) = \underbrace{B_e(\underline{k}^*)}_{= \underline{k}^*} + \sum_j \frac{\partial B_e(\underline{k}^*)}{\partial k_j} \Delta k_j + \dots$$

$$\Rightarrow \Delta \underline{k}' = \sum_j \underbrace{\frac{\partial B_e(\underline{k}^*)}{\partial k_j}}_{=: M_{eij}} \Delta k_j$$

Oft ist M_e bereits diagonal; wenn nicht, macht orthogonale Transf. in Diagonalaris, Eigenwerte λ_{ei} .

Nun ist M_e

OE dA: M_e sei diagonal, $M_e = \begin{pmatrix} \lambda_{e_1} & 0 \\ 0 & \lambda_{e_n} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Delta K'_i = \lambda_{e_i} \Delta k_i$$

RG Semigruppe $\Rightarrow B_{e^0} B_{e^2} = B_{e^2} \Rightarrow M_e M_e = M_{e^2}$

$$\Rightarrow \lambda_{e_i}^2 = \lambda_{e^2 i} \Rightarrow \lambda_{e_i} = e^{y_i} \quad (\lambda_{e_i}^2 = e^{2y_i} - (e^2)^{y_i} = \lambda_{e^2 i})$$

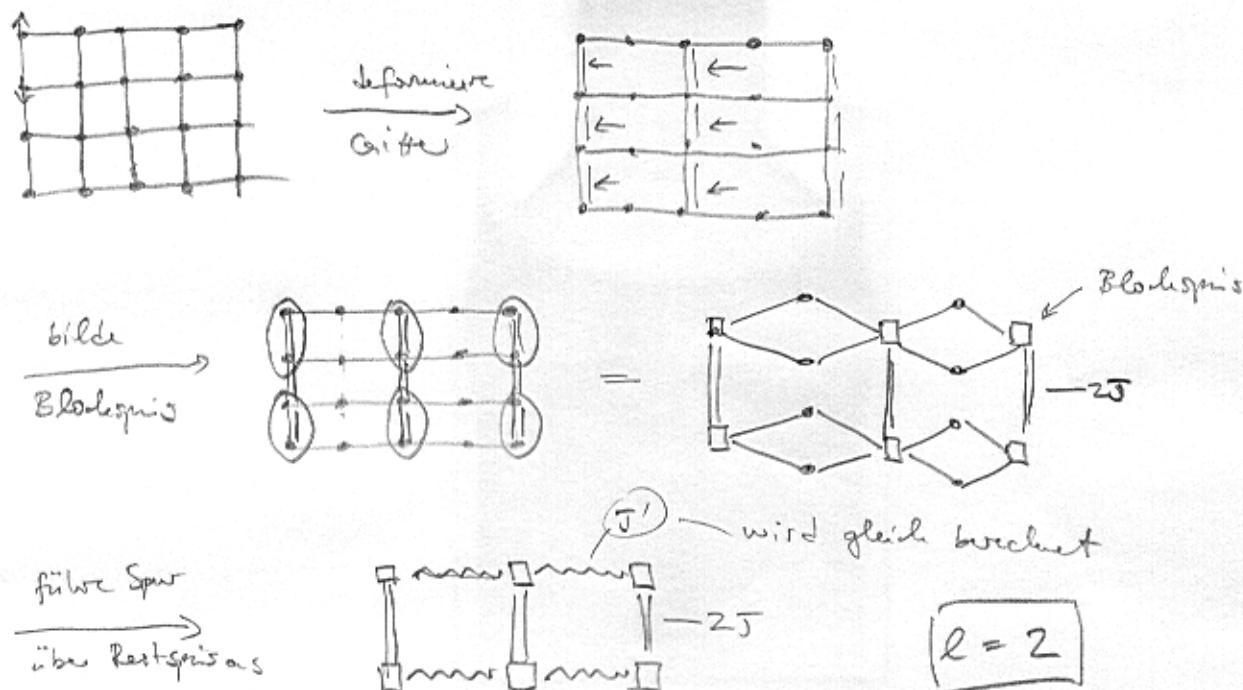
$|\lambda_{e_i}| < 1$: stabile Richtung im Parameterraum des $k_i \Leftrightarrow y_i < 0$

$|\lambda_{e_i}| > 1$: instabile Richtung $\Leftrightarrow y_i > 0$

Anwendung: Migdal-Kadanoff RG

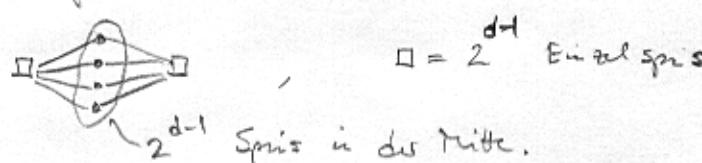
Ordnungsgrößen Deutlichkeit möglich, aber technisch sehr aufwendig.

Daher hier: MK RG. Benutzt unkontrollierte Näherungen, ist aber einfacher zu berechnen.

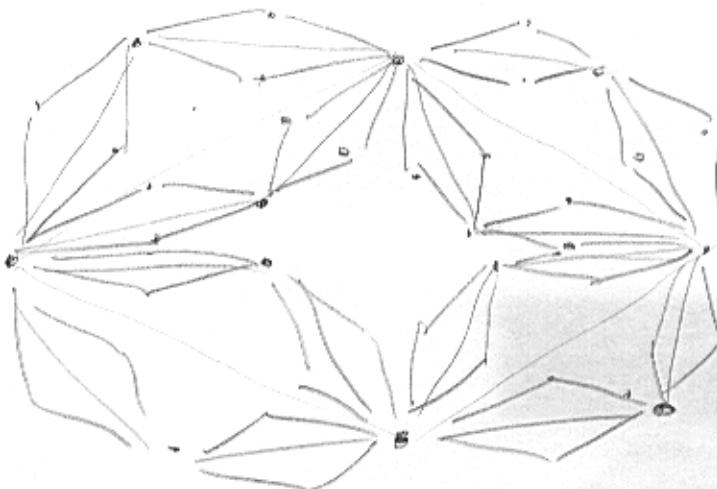


Führt Anisotropie ein: ignorieren

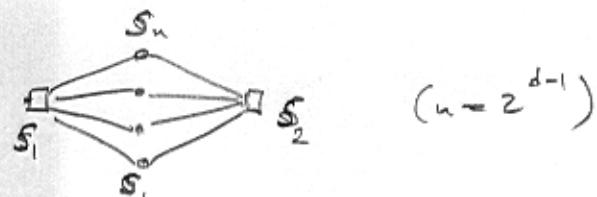
In d Dimensionen:



MKRG ist exakt auf Berker-Gitter und für $d=1$.



Wie bekommt man J' ? Betrachte



$$Z = \text{Tr}_{S_1, S_2} \text{Tr}_{S_3, \dots, S_n} \exp \left\{ K_1 \sum_{i=1}^n S_i s_i + K_2 \sum_{i=1}^n S_2 s_i + c K_2 (S_1 + S_2) + \sum_{i=1}^n K_2 s_i \right\}$$

jeder S_i besteht aus n
wspgl. Spins $\Rightarrow c=n$
oder Berker-Gitter $\Rightarrow c=1$

$$= \text{Tr}_{S_1, S_2} \text{Tr}_{S_3, \dots, S_n} \exp \left\{ K_1 \sum_{i=1}^n (S_1 + S_2) s_i + K_2 \sum_{i=1}^n s_i + c K_2 (S_1 + S_2) \right\}$$

$$= \text{Tr}_{S_1, S_2} \text{Tr}_{S_3, \dots, S_n} \exp \left\{ \sum_i [K_1 (S_1 + S_2) + K_2] s_i + c K_2 (S_1 + S_2) \right\}$$

$$= \text{Tr}_{S_1, S_2} \exp (c K_2 (S_1 + S_2)) \left(\prod_{i=1}^n 2 \cosh (K_1 (S_1 + S_2) + K_2) \right)$$

$$= \text{Tr}_{S_1, S_2} 2^n \exp \left\{ c K_2 (S_1 + S_2) + n \ln \cosh (K_1 (S_1 + S_2) + K_2) \right\}$$

| $S_1 \backslash S_2$ | +1 | -1 |
|----------------------|----|----|
| +1 | A | B |
| -1 | B | C |

$$A = n \ln \cosh (2 K_1 + K_2)$$

$$B = n \ln \cosh (K_2)$$

$$C = n \ln \cosh (2 K_1 - K_2)$$

$$\ln \cosh (K_1(S_1 + S_2) + K_2) = a(S_1 + S_2) + b S_1 S_2 + c$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2 = 1 :$$

$$2a + b + c = A$$

$$S_1 S_2 = -1 :$$

$$-b + c = B$$

$$S_1 = S_2 = -1 :$$

$$-2a + b + c = C$$

$$2a + 2c = A + B$$

$$-2a + 2c = B + C$$

$$4c = A + 2B + C$$

$$2a = A + B - \frac{1}{2}(A + 2B + C)$$

$$-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C$$

$$b + c - B = \frac{1}{4}(A - 2B + C)$$

un interessanter Faktor

$$\hookrightarrow Z = T_{SS_1 S_2} 2^u \exp \left\{ c K_2 (S_1 + S_2) + a(S_1 + S_2) + b S_1 S_2 + c \right\}$$

$$\Rightarrow K'_2 = c K_2 + a = c K_2 + \frac{u}{4} \ln \frac{\cosh(2K_1 + K_2)}{\cosh(2K_1 - K_2)}$$

RG-Transf.

$$K'_1 = \frac{u}{2} \ln \frac{\sqrt{\cosh(2K_1 + K_2) \cosh(2K_1 - K_2)}}{\cosh K_2}$$

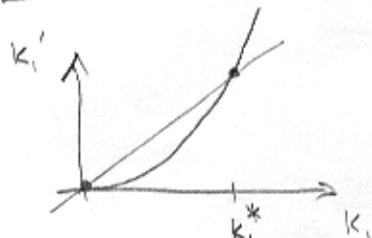
MKRG generiert keine neuen WW-Konstanten!

Suche Fixpunkte

Falls $K_2 = 0$, so ist auch $K'_2 = 0$. Suche also Fixpunkt für $K_2 = 0$,

$$\text{d.h. } K_1^* = \frac{u}{2} \ln \cosh 2K_1^*$$

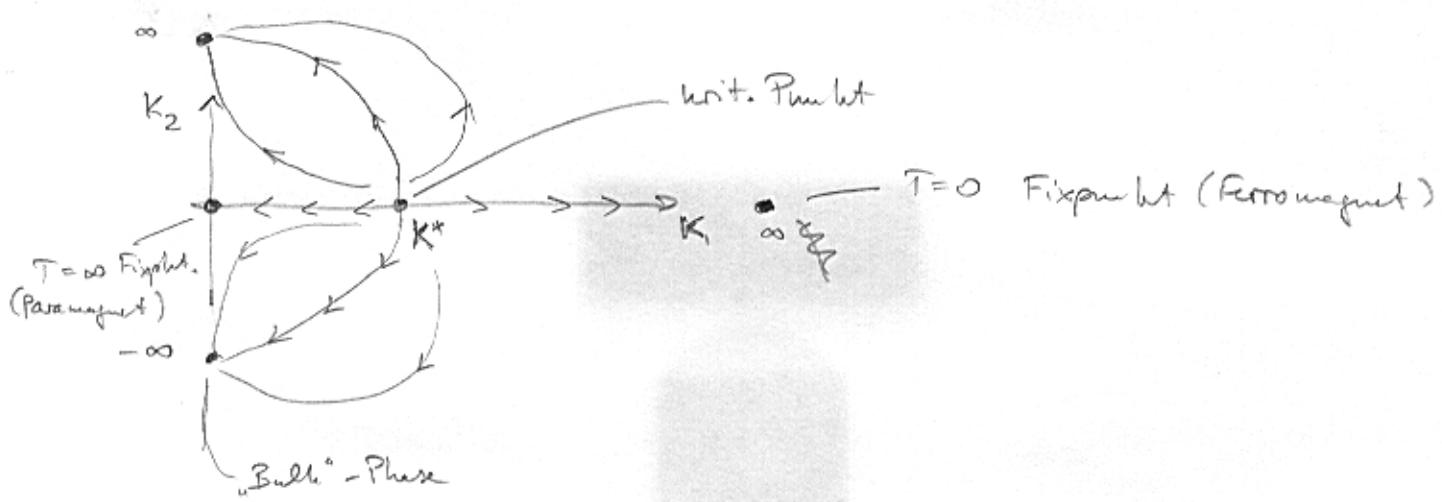
Fixpunkte bei $K_1 = 0, K_1 = K_1^*, K_1 = \infty$



(Bemerkung: kein Fixpunkt für $u=1$, d.h. d=1)

$K_2 > 0 \rightsquigarrow K_2' > K_2$, $K_2 < 0 \rightsquigarrow K_2' < K_2 \Rightarrow$ Fixpunkte bei $K_1=0, K_2=\pm\infty$

RG - Fluss



freie Energie in der Nähe des unit. Fixpunktes

$$t := \frac{T-T_c}{T_c}$$

$$f(t, h) = \frac{F(t, h)}{N} = \frac{F(t', h')}{N} e^{\frac{h}{T_c}} = e^{-d} f(t', h')$$

Anz. Spins in renormierten System

$$K_1 = \beta h = \frac{T_c}{T} = \frac{T_c}{T-T_c+T_c} = \frac{T_c}{T_c} = \frac{1}{\frac{T-T_c}{T_c} + 1} \stackrel{= k_i^*}{=} \frac{1}{t+1}, \quad K_i^* \approx K_i^*(1-t+\dots)$$

$$K_2 = \beta h = \frac{T_c}{T-T_c+T_c} \stackrel{h'}{=} \frac{h}{T_c} \stackrel{= k_i^*}{=} t + K_i^* \approx K_i^*(1-t+\dots)$$

$$K_1 = K_i^* + \Delta K_1 = K_i^* - K_i^* t \Rightarrow t = -\frac{\Delta K_1}{K_i^*}$$

$$\Rightarrow t' = -\frac{1}{K_i^*} \Delta K_1' = -\frac{1}{K_i^*} \lambda_{e1} \Delta K_1 = \lambda_{e1}, \quad t = \lambda^{Y_1} t'$$

$$K_2 = \beta h = \frac{h}{T} \Rightarrow K_2' = \frac{h'}{T'}, \quad \text{aber } T \neq T' \approx T_c$$

$$\Rightarrow K_2' \approx \frac{h'}{T_c} = K_2 \lambda_{e2} = \frac{h}{T_c} \lambda_{e2}$$

$$\Rightarrow h' = \lambda_{e2} h$$

$$\hookrightarrow f(t, h) = e^{-d} f(t', h') = e^{-d} f(\lambda^{Y_1} t, \lambda^{Y_2} h)$$

ℓ ist frei wählbar (unsere Rechnung war für $\ell=2$, aber andere ℓ sind genauso erlaubt)

wähle $\ell = \left(\frac{b}{t}\right)^{1/\gamma_1}$, $b \ll 1$ beliebig

$$\hookrightarrow f(t, h) = \left(\frac{b}{t}\right)^{-\frac{\ell}{\gamma_1}} f\left(b, h \left(\frac{b}{t}\right)^{\gamma_2/\gamma_1}\right) = t^{d/\gamma_1} F_s(h t^{-\gamma_2/\gamma_1})$$

Skalenform

Vgl. mit Postulat in früherer Vorlesung $f(t, h) = t^{2-\alpha} F_s(h t^{-\alpha})$

\Rightarrow RG liefert Skalenform in der Nähe des krit. Fixpunktes und eine Methode, die krit. Exponenten auszuschließen

Weiteres Beispiel: Korrelationslänge

$$\Xi' = \frac{\Xi}{\ell} \quad \text{oder} \quad \Xi(t, h) = \ell \Xi(t', h')$$

wähle wieder $\ell = \left(\frac{b}{t}\right)^{1/\gamma_1}$

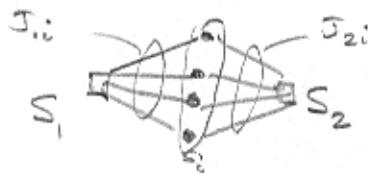
$$\hookrightarrow \Xi(t, h) = \left(\frac{b}{t}\right)^{1/\gamma_1} \Xi\left(b, h t^{-\gamma_2/\gamma_1}\right) = t^{-1/\gamma_1} \Xi(h t^{-\gamma_2/\gamma_1})$$

$$\text{setze } h=0 \Rightarrow \Xi(t, 0) \sim t^{-1/\gamma_1} \Rightarrow \text{Exponent } \boxed{\nu = \frac{1}{\gamma_1}}$$

Dies rechtfertigt die Wahl $\ell = \left(\frac{b}{t}\right)^{1/\gamma_1} = b^{1/\gamma_1} \cdot \text{const. } \Xi$, denn wir zu Anfang gesagt, sind Spuris nur für $\ell \ll \Xi$ korrekt, aber die Wahl $b \ll 1$ garantiert dieses.

Migdal - Kadanoff für Spingläser

Berechne effektive WW für



der Einfachheit halber ohne Feld.

$$Z = \text{Tr}_{S_1 S_2} \text{Tr}_{S_1 \dots S_n} \exp \left\{ \beta \sum_i s_i (J_{1i} S_1 + J_{2i} S_2) \right\} \quad \beta J_{ji} =: k_{ji} \quad (j=1,2)$$

$$= \text{Tr}_{S_1 S_2} \prod_{i=1}^n 2 \cosh (k_{1i} S_1 + k_{2i} S_2)$$

| | | |
|----|----|----|
| | +1 | -1 |
| +1 | A | B |
| -1 | B | A |

$$= \text{Tr}_{S_1 S_2} 2^n \exp \left\{ \sum_i \ln \cosh (k_{1i} S_1 + k_{2i} S_2) \right\}$$

$$= \text{Tr}_{S_1 S_2} 2^n \exp \left\{ \sum_i \frac{1+S_1 S_2}{2} \ln \cosh (k_{1i} + k_{2i}) + \sum_i \frac{1-S_1 S_2}{2} \ln \cosh (k_{1i} - k_{2i}) \right\}$$

$$\Rightarrow K' = \sum_i \frac{\cosh (k_{1i} + k_{2i})}{\cosh (k_{1i} - k_{2i})} = \sum_i \ln \frac{\cosh k_{1i} \cosh k_{2i} + \sinh k_{1i} \sinh k_{2i}}{\cosh k_{1i} \cosh k_{2i} - \sinh k_{1i} \sinh k_{2i}}$$

$$= \sum_i \ln \frac{1 + \tanh k_{1i} \tanh k_{2i}}{1 - \tanh k_{1i} \tanh k_{2i}} \quad (-\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x})$$

$$\Rightarrow \boxed{K' = \sum_{i=1}^n \tanh^{-1} (\tanh k_{1i} \tanh k_{2i})}$$

K' ist Zufallsvariable, weil k_{1i}, k_{2i} Zufallsvar. sind.

Brauchen also im Prinzip Verteilung von K'.

D.h. Fixpunkt gesucht im Raum der Verteilungen
mit Hilfslinie über k_{1i}, k_{2i}

$$P(K') = \frac{1}{\delta(K' - \sum_{i=1}^n \tanh^{-1} (\tanh k_{1i} \tanh k_{2i}))}$$

aussichtslos.

Nur möglich, einige Sonderfälle zu betrachten.

- Wenn $P(K)$ (Verteilg. der k_{1i}, k_{2i}) schmal und um 0 zentriert ist, so ist $\tanh^{-1}(\tanh k_{1i} \tanh k_{2i}) \approx k_{1i} k_{2i}$:

$$\Rightarrow K' = \sum_i k_{1i} k_{2i}$$

$$\Rightarrow \overline{K'^2} = \overline{\sum_{ij} k_{1i} k_{2i} k_{1j} k_{2j}} = \sum_i \overline{k_{1i}^2} \overline{k_{2i}^2} = n \overline{k^2}^2$$

Falls also $n \overline{k^2}^2 < \overline{k^2}$, so ist die ^{Variante von} ~~Breite~~ ~~K'~~

~~kleiner~~ kleiner als die der $k_{1i}, k_{2i} \rightarrow \text{Var } K' \rightarrow 0$ unter Iteration

$$\Rightarrow P(K') \rightarrow \delta(K')$$

Wenn $P(K)$ sehr breit ist, so ist $\tanh k_{1i} \tanh k_{2i} \approx \tanh(\min(|k_{1i}|, |k_{2i}|))$

(denn $\tanh(\max(|k_{1i}|, |k_{2i}|)) \approx 1$), also

$$K' = \sum_i (\pm) \min(|k_{1i}|, |k_{2i}|)$$

$\hookrightarrow P(K') \approx$ Gaußverteilung (zentraler Grenzwertsatz, falls n groß)

mit $\text{Var}(K') \approx n \text{Var}(K)$

$\Rightarrow \text{Var}(K') \rightarrow \infty$ unter Iteration