1.12.2005

Sei $w_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ W.-Dichte für $\underline{X}$
$\Rightarrow$W.-Dichte für Untermenge durch Integration über übrige Variablen, z.B.

$$w_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \int dx_n\, w(w_1,\ldots,x_{n-1},x_n) \tag{10.13}$$

Def. <u>bedingte Wahrscheinlichkeiten/dichten</u>:
$\overline{w_{k|n-k}(x_1,\ldots,x_k|x_{k+1},\ldots,x_n) = \text{W.-Dichte}}$, dass bei Vorliegen der Werte $x_{k+1},\ldots,x_n$ der Werte-Vektor $x_1,\ldots,x_k$ auftritt. Es ist

$$w_n(x_1,\ldots,x_n) = w_{k|n-k}(x_1,\ldots,x_k|x_{k+1},\ldots,x_n)w_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)$$

$$\Rightarrow \quad w_{k|n-k}(x_1,\ldots,x_k|x_{k+1},\ldots,x_n) = \frac{w_n(x_1,\ldots,x_n)}{w_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)} \tag{10.14}$$

<u>Zentraler Grenzwertsatz:</u>
Gegeben: unabhängige Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ mit gleichen W.-Dichten $w(x_1), w(x_2), \ldots, w(x_N)$.
Gesucht: W.-Dichte für $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ für $N \to \infty$.
(Bsp: 1-dim Random-Walk = Summe von Zufallschritten $X_i = +1/-1$, Y = Position nach N Schritten)
Wir betrachten $Z = \sum_i (X_i - \langle X\rangle)/\sqrt{N} = (Y - N\langle X\rangle)/\sqrt{N}$

$$\begin{aligned}
w_Z(z) &\overset{(10.11)}{=} \int dx_1\ldots dx_N\, w(x_1)\ldots w(x_N)\,\delta\left(z - \frac{x_1+\ldots+x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N}\langle X\rangle\right)\\
&\overset{(10.10)}{=} \int dx_1\ldots dx_N\, w(x_1)\ldots w(x_N) \int \frac{dk}{2\pi}\exp\left(ikz - ik\frac{x_1+\ldots+x_N}{\sqrt{N}} + ik\sqrt{N}\langle X\rangle\right)\\
&\overset{(10.6)}{=} \int \frac{dk}{2\pi}\exp\left(ikz + ik\sqrt{N}\langle X\rangle\right)\left(\chi\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)\right)^N\\
&\overset{(10.8)}{=} \int \frac{dk}{2\pi}\exp\left(ikz + ik\sqrt{N}\langle X\rangle + N\left(-i\frac{k}{\sqrt{N}}\langle X\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)^2(\Delta x)^2 + O(\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)^3)\right)\right)
\end{aligned}$$

Vernachlässige Terme $1/\sqrt{N}$ und kleiner ($\to 0$ für $N\to\infty$)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad w_Z(z) &= \int \frac{dk}{2\pi}\exp\left(ikz - \frac{1}{2}k^2(\Delta x)^2\right)\\
&= \int \frac{dk}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(\Delta x)^2\left(k^2 - \frac{2iz}{(\Delta x)^2}k + \left(\frac{iz}{(\Delta x)^2}\right)^2\right) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\left(\frac{iz}{(\Delta x)^2}\right)^2\right)\\
&= \exp\left(-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}\right)\frac{1}{2\pi}\int dk\,\exp\left(-\frac{1}{2}(\Delta x)^2(k-k_0)^2\right)
\end{aligned}$$

Mit $\int dk\,\exp(-a(k-k_0)^2) = \sqrt{\pi/a} \Rightarrow$

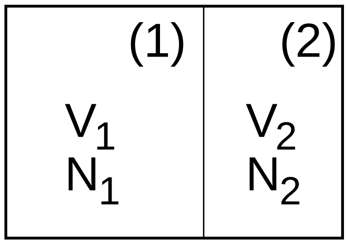
$$w_Z(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}\right)\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi/(\Delta x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}}\exp\left(-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}\right)$$

Mit $W(y)dy = W(z)dz$, also $dz = dy/\sqrt{N} \Rightarrow$

$$w_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\Delta x)^2}}\exp\left(-\frac{(y-N\langle X\rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}\right) \tag{10.15}$$

Also $Y \to$ Gaußverteilung mit
Mittwelwert $\langle Y \rangle_N = N \langle X \rangle$
Standardabweichung (Schwankung) $\Delta y = \Delta x \sqrt{N}$
relative Schwankung: $\Delta y / \langle Y \rangle_N = \Delta x \sqrt{N} / (N \langle X \rangle) = \Delta x / (\sqrt{N} \langle X \rangle)$
$\Rightarrow$Messwerte werden relativ gesehen scharf!

10.2 Einfaches Modellsystem



Kasten mit N Teilchen gleichverteilt im Volumen V, zwei Teilsysteme $(1), (2)$ mit $N = N_1 + N_2$, $V = V_1 + V_2$
Jedes Teilchen kann in (1) oder (2) sein
$\Rightarrow 2^N$ Konfigurationen (links/rechts)^N.
Entartung: $\Gamma_N(N_1)$= Zahl Konf's mit N_1 Teilchen in (1) (und $N_2 = N - N_1$ in (2))

$$\Gamma_N(N_1) = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-N_1+1)}{N_1!} = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} =: \binom{N}{N_1} = \binom{N}{N-N_1} \tag{10.16}$$

Zur Erinnerung: Binomialformel

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} = (a+b)^N \tag{10.17}$$

Beweis [AKTIVATOR]: per vollständige Induktion nach N und mit (direkt Nachrechnen) $\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$.

Überprüfung (10.16):

$$\sum_{N_1} \Gamma_N(N_1) = \sum_{N_1} \binom{N}{N_1} 1^{N_1} 1^{N-N_1} \overset{(10.17)}{=} (1+1)^N = 2^N$$

Wahrsch. dass ein Teilchen in V_1 bzw. V_2 ist:

$$p_1 = \frac{V_1}{V}, \quad p_2 = \frac{V_2}{V}$$

Wahrsch. dass N_1 *bestimmte* Teilchen in V_1, die anderen N_2 in V_2 sind (Teilchen unabhängig angenommen):

$$p_1^{N_1} p_2^{N_2} = p_1^{N_1} p_2^{N-N_1}$$

Wahrsch. $w_N(N_1)$, dass irgendwelche N_1 Teilchen in V_1, die anderen in V_2
$\Rightarrow$Summation über alle passenden Aufteilungen auf (1),(2)
$\Rightarrow$Multiplikation mit (10.16)

$$\Rightarrow \quad w_N(N_1) = \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1} \tag{10.18}$$

Überprüfung der Normierung

$$\sum_{N_1=0}^{N} w_N(N_1) = \sum_{N_1=0}^{N} \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1} \overset{(10.17)}{=} (p_1+p_2)^N = 1^N = 1$$

Mittelwert:
Trick: nehme zuerst p_1, p_2 undabhängig an und setze zum Schluss $p_2 = 1 - p_1$

$$\begin{aligned}
\langle N_1 \rangle &= \sum_{N_1=0}^{N} N_1 w_N(N_1) \quad (\text{Term } N_1 = 0 \text{ verschwindet}) \\
&= \sum_{N_1=1}^{N} N_1 \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1} \Big|_{p_1+p_2=1} \\
&= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \sum_{N_1=1}^{N} \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1} \Big|_{p_1+p_2=1} \\
&\approx p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \sum_{N_1=\underline{0}}^{N} \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1} \Big|_{p_1+p_2=1} \\
&\overset{(10.17)}{=} p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1 + p_2)^N \Big|_{p_1+p_2=1} \\
&= p_1 N (p_1 + p_2)^{N-1} \big|_{p_1+p_2=1} \\
&= N p_1
\end{aligned} \tag{10.19}$$

[AKTIVATOR]: Zeigen Sie analog, dass für die Varianz gilt

$$(\Delta N_1)^2 = N p_1 (1 - p_1) \tag{10.20}$$

Hilfsmittel: Stirling-Formel: Für große m:

$$\ln m! \approx m(\ln m - 1) \tag{10.21}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\ln m! &= \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln m = \sum_{n=1}^{m} \ln n \\
&\approx \int_1^m dx\, \ln x = [x \ln x - x]_1^m \\
&= m \ln m - m + 1 \\
&\approx m \ln m - m
\end{aligned}$$

Gesucht: Maximum $\hat{N}_1$ von $w_N(N_1)$
$\Leftrightarrow$ Maximum $\hat{N}_1$ von $\ln w_N(N_1)$, mit (10.21) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\ln w_N(N_1) &= \ln \left(\frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1} \right) \\
&\approx N \ln N - N - N_1 \ln N_1 + N_1 - (N - N_1) \ln(N - N_1) + (N - N_1) \\
&\quad + N_1 \ln p_1 + (N - N_1) \ln p_2 \\
&= N \ln N - N_1 \ln N_1 - (N - N_1) \ln(N - N_1) + N_1 \ln p_1 + (N - N_1) \ln p_2
\end{aligned}$$

N_1 näherungsweise kontinuierlich, also Max! $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \frac{d}{dN_1} \ln w_N(N_1) \Big|_{\hat{N}_1} \\
&= -\ln \hat{N}_1 - 1 + \ln(N - \hat{N}_1) + 1 + \ln p_1 - \ln p_2 \\
\Leftrightarrow \quad \ln \frac{\hat{N}_1}{N - \hat{N}_1} &= \ln \frac{p_1}{p_2} \\
\Rightarrow \quad \hat{N}_1 &= p_1 N
\end{aligned} \tag{10.22}$$

$$\text{Da} \quad \frac{d^2}{dN_1^2} \ln w_N(N_1) \bigg|_{\hat{N}_1} = -\frac{1}{\hat{N}_1} - \frac{1}{N - N_1} < 0$$

$\Rightarrow$tatsächlich Maximum
Also: wahrscheinlichste = mittlere Teilchenzahl!