

**Aufgabe 41:** Berechnen Sie das Gradientenfeld  $\vec{\nabla}V$  der Funktion  $V(\vec{x}) = a/|\vec{x}|$ , wobei  $\vec{x}$  ein dreidimensionaler Vektor ist und  $a \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 42:** Berechnen Sie das Gradientenfeld  $\vec{\nabla}F$  der Funktion  $F(\vec{x}) = \exp(-|\vec{x}|^4 + |\vec{x}|^2)$ , wobei  $\vec{x}$  ein zweidimensionaler Vektor ist. Skizzieren Sie die Funktion  $F(\vec{x})$  und das Gradientenfeld  $\vec{\nabla}F$ .

**Aufgabe 43:** Bestimmen Sie die  $3 \times 3$ -Matrix  $\mathbf{A}$  mit Elementen  $a_{i,j}$ , die eine Rotation um die  $\vec{e}_3$ -Achse mit dem Winkel  $\pi/4$  beschreibt. Bestimmen Sie die Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ , die die Rotation rückgängig macht. Was fällt auf, wenn man die Matrixelemente von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^{-1}$  vergleicht?

**Aufgabe 44:** Zwei  $2 \times 2$ -Matrixen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sind durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Berechnen Sie die Matrix  $\mathbf{C} = 2\mathbf{A}$ .
- Berechnen Sie die Matrizen  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  und  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ .
- Berechnen Sie  $\mathbf{AB}$  und  $\mathbf{BA}$ . Was fällt auf?
- Bestimmen Sie  $\mathbf{A}^{-1}$ .

**Aufgabe 45:** Finden Sie zwei  $2 \times 2$ -Matrixen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  deren Produkt  $\mathbf{AB}$  die Nullmatrix  $\mathbf{0}$  liefert, die aber beide ungleich  $\mathbf{0}$  sind.

**Aufgabe 46:** Paula ist doppelt so alt wie Fritz. Zusammen sind sie 99 Jahre alt. Wie alt sind Fritz und Paula? Stellen Sie das zu diesem Problem gehörende Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten auf. Bestimmen Sie das Alter von Fritz und Paula, indem Sie die inverse Matrix verwenden - die Sie zunächst bestimmen müssen