

Aufgabe 23: In der Vorlesung wurde der natürliche Logarithmus über das Integral

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} du, \quad x > 0$$

definiert. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution, daß $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ gilt. Achtung: Bei der Substitution müssen die Integrationsgrenzen mit verändert werden.

Aufgabe 24: Bestimmen Sie die Stammfunktion von

a) $f(x) = xe^{-x^2}$ (Hinweis: Substitution)

b) $g(x) = \ln(x)$

und berechnen Sie die bestimmten Integrale $\int_0^{1/2} f(x) dx$ und $\int_1^2 g(x) dx$. Achtung: Bei der Substitution müssen die Integrationsgrenzen mit verändert werden.

Aufgabe 25: Beim freien Fall (im Gravitationsfeld der Erde) mit Reibung ist die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t durch $v(t) = gt_0 + (v_0 - gt_0)e^{-t/t_0}$ gegeben, wobei g die Erdbeschleunigung, t_0 eine von der Stärke der Reibung abhängige Zeitkonstante und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist. Geben Sie die zeitliche Abhängigkeit des Abstands eines Körpers vom Erdboden an, der zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Höhe h_0 mit der Geschwindigkeit v_0 auf die Erde fällt.

Aufgabe 26: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - xy = 0, \quad y(0) = 1$$

mit einem Potenzreihenansatz.

Aufgabe 27: Bestimmen Sie die Taylorreihe - d.h. bestimmen Sie *alle* Entwicklungskoeffizienten a_n - der Funktion $f(x) = (1-x)^{1/2}$ mit $|x| < 1$ um den Punkt $x = 0$. Wie lautet $g_3(x)$ für die Entwicklung um den Punkt $x = 1/2$?

bitte wenden

Aufgabe 28: Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von $\sin x$ und $\cos x$ die in der Vorlesung nur graphisch diskutierten Grenzwerte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}.$$