Inhaltsverzeichnis

1 Probleme der Quantenmechanik

In der am breitesten akzeptierten Interpretation der Quantenmechanik, der Kopenhagener Deutung, ist der physikalische Zustand eines Systems vollständig durch seine Wellenfunktion definiert, die jedoch nur Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen eines statistischen Ensembles gleichartiger Messungen beschreibt. Die Möglichkeit, dass weitere dynamische Variablen, die das tatsächliche Verhalten jedes individuellen Systems auf Quantenebene darstellen, existieren, wird zurückgewiesen. Diese These wird durch den bekannten Beweis von von Neumann gestützt, dass die Annahme von verborgenen Variablen unvereinbar mit den bereits erhaltenenen Ergebnissen der Quantenmechanik ist.
Andererseits gibt es sowohl theoretische als auch praktische Gründe die gegenwärtige Form der Quantentheorie für unbefriedigend zu halten. Das mittlerweile berühmte Einstein-Podolsky-Rosen-Experiment besagt, dass die Theorie unvollständig ist und Bell hat ebenfalls gezeigt, dass von Neumanns Beweis auf gewissen unnötig einschränkenden Annahmen aufbaut und dass der Beweis zusammenbricht, wenn diese nicht gemacht werden.
Es scheint, dass die Frage nach verborgenen Variablen, die der Quantentheorie zugrundeliegen, weiterhin problematisch ist. Wenn also die Behauptungen von von Neumanns Theorem als richtig akzeptiert würden, folgte aus den Fakten die die momentane Quantentheorie bestätigen, dass ein anderes allgemeines Modell der Realität unmöglich wäre. So wird klar, dass die sprachliche Struktur der Quantenmechanik sogar die Annahme der Möglichkeit verhindert, dass die grundsätzlichen Postulate die der momentanen Theorie zugrundeliegen falsch sind. Daraus würde wiederum folgen, dass bestimmte Besonderheiten der grundsätzlichen Postulate der momentanen Theorie absolute Wahrheiten sind, die nicht widerlegt werden könnten, oder von denen gezeigt werden könnte, dass sie nur Näherungen oder Grenzfälle sind.
Es gab viele Versuche andere Interpretation der Quantenmechanik zu entwickeln und es wurden einige Theorien mit verborgenen Variablen vorgeschlagen. Die gesamte Kontroverse krankte jedoch immer an stillschweigenden Annahmen, meist eher philosophischer als physikalischer Natur, die zu den oben beschriebenen Schwierigkeiten in Bezug auf das Verhältnis zwischen verborgenen Variablen, dem experimentellen Inhalt der Quantentheorie und von Neumanns Beweis führten. Zustätzlich enthält die Theorie des Messprozesses viele unklare Besonderheiten und ungelöste Probleme, die hauptsächlich auftreten, weil die Rolle des Messinstruments beim Phänomen des 'Kollaps' des Wellenpakets beim quantenmechanischen Messprozess unklar ist. Dies wurde auch als das Messproblem der Quantenmechanik bezeichnet.
Eine wichtige Besonderheit einer jeden verborgene-Variablen-Theorie ist der potentielle Widerspruch zur Quantenmechanik, welche natürlich als Spezialfall enthalten ist. Eine solche Theorie eröffnet nämlich neue experimentelle Möglichkeiten.

1.1 Prinzipien der Quantenmechanik

Die grundlegenden Prinzipien der Quantenmechanik wurden zwar schon vielfach dargestellt, aber es ist nötig, die Besonderheiten der Quantenbeschreibung hier kurz vorzustellen, mit dem Hauptaugenmerk auf der Klärung der Annahmen hinter der üblichen Interpretation der Quantenmechanik und wie diese sich in der Entwicklung von verborgenen Variablen ändern könnten. Daneben soll unterschieden werden zwischen Annahmen, die bereits im Experiment bestätigt wurden und solchen, die weitestgehend auf stillschweigenden Vorgaben von eher philosophischem als physikalischem Charakter basieren. Einige dieser Annahmen sind sehr vage und unklar gehalten, besonders bei der Frage nach dem Verhältnis zwischen individuellen Zuständen

und statistischen Ensembles.
Zwei der grundsätzlichen Postulate der Quantenmechanik lauten wie folgt:

1. Der Zustand eines quantenmechanischen Systems ist durch eine kontinuierliche, eindeutige Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{x}, t)$ beschrieben, die einer deterministischen Bewegungsgleichung, der Schrödingergleichung, gehorcht:

$$i\hbar(\partial\Psi/\partial t) = H\Psi \tag{1}$$

2. Die Wellenfunktion bestimmt die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse irgendeiner Messung am System. Gleichermaßen errechnet sich der Durchschnitt oder Erwartungswert $\tilde{R}$ für ein Ensemble einer Observablen R aus Ψ durch:

$$\tilde{R} = (\Psi, \mathbf{R}\Psi) = \int \Psi^*(\mathbf{x}) R(\mathbf{x}, -i\hbar\nabla)\Psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{2}$$

   wobei $\mathbf{R}$ der Operator entsprechend der Observablen R ist.

Diese zwei Postulate, welche fundamental bei einer konventionellen Formulierung der Quantenmechanik sind, arbeiten die Aussage der Wahrscheinlichkeit grundlegend in die Theorie ein. Allerdings ist nicht sofort klar wie die Ensembles, auf die sich diese Wahrscheinlichkeiten beziehen, zustandekommen und was ihre eigentlichen Elemente sind. Denn gerade die Terminologie der Quantenmechanik enthält die unübliche und signifikante Besonderheit, dass das, was physikalischer Zustand eines individuellen Systems genannt wird, sich selbst nur in einem Ensemble von Systemen widerspiegelt.
Es ist tatsächlich mysteriös, dass ein individuelles System sich nur als statistisches Ensemble manifestiert und es ist überwiegend bei Physikern so, dass dieses Problem bei der Interpretation der Wellenfunktion stillschweigend umgangen wird, indem man direkt von einem Ensemble anstatt von einem individuellen System spricht. Mit anderen Worten, es wird oft angenommen, dass eine Wellenfunktion nicht mit einem individuellen System zusammenhängt, sondern nur mit einem Ensemble gleichartiger Systeme. Diese Interpretation ist tatsächlich unhaltbar, was durch ein einfaches hypothetisches Experiment gezeigt werden kann.
Man nehme einen Doppelspalt-Versuch mit Elektronen, der so aufgebaut ist, dass eine Kamera die Fotoplatte in der üblichen Anordnung ersetzt. Wenn der Film sich mit einem Bild pro Sekunde bewegt und die Elektronen eines nach dem anderen am Spalt ankommen, ebenfalls mit einer Rate von eins pro Sekunde, so nimmt jedes Bild der Kamera den Verlauf eines einzelnen Elektrons auf. Wenn jedes Elektron in gleicher Weise präpariert ist, haben ihre Wellenpakete die gleiche Form und jedes wird durch die gleiche Funktion Ψ repräsentiert. Angenommen, ein Elektron passiert einen Spalt und ein Zeitabschnitt, welcher es innerhalb einer Region der Größe Δr lokalisiert. Nach der Schrödingergleichung gibt es dann ein langsam expandierendes Wellenpaket, das anfangs genau diese Größe hat und sich dann durch den Spalt zur Fotoplatte bewegt. Durch dieses Paket ist etwas über das individuelle System bekannt: nämlich dass sich das Elektron irgendwo in der Region aufhält, in der die Wellenfunktion bestimmt ist. Gleichermaßen liegt der Impuls des Elektrons irgendwo dort, wo der Fourierkoeffizient der Funktion annehmbar ist. Tatsächlich ist das die Art und Weise wie die Quantenmechanik die Definitheit der klassischen Konzepte von Impuls und Ort eines einzelnen Elektrons in Angriff nimmt. Diese sind natürlich, wenn es um gleichzeitige Messung von Ort und Impuls geht, durch die Unbestimmtheitsrelation beschränkt. Daher kann man, wenn man ein einzelnes Elektron betrachtet, das durch den Spalt tritt, anhand der Schrödingergleichung vorhersagen, dass dieses

Elektron in einem bestimmten Bereich eines bestimmten Bildes auftrifft, in dem die transformierte Wellenfunktion Ψ messbar ist. Nach dem Experiment gibt eine Überlagerung aller Bilder die Streuverteilung, dargestellt durch $\mid \Psi \mid^2$, wieder, wobei Ψ eine typische Wellenfunktion ist. Obwohl alle Elektronen von der gleichen Funktion von $\mathbf{x}$ abhängen, hat jedes Elektron doch eine Wellenfunktion, die auf seine eigene Weise von t abhängt, denn nur ein Elektron befindet sich zur gleichen Zeit im System. Die Wellenpakete haben zwar die gleiche Form, unterscheiden sich aber in der Zeiten, in denen sie sich durch den Spalt bewegen.
Daher bezieht sich die Wellenfunktion hauptsächlich auf ein einzelnes Elektron und das statistische Ensemble auf eine Anzahl von Elektronen, die verschiedene Wellenfunktionen gleicher Form haben. Trotzdem kann die Wellenfunktion nicht zeigen, wie sich das Elektron im Spalt bewegt, was detaillierter ist als die Grenzen der Anwendbarkeit der klassischen Konzepte einzelner Teilchen, wie sie die Unbestimmtheitsrelation vorschreibt, weil die Wahrscheinlichkeitsinterpretation ihre einzige Bedeutung ist.
Bevor wir weiter auf das dritte und problematischste Postulat der üblichen Theorie eingehen, wollen wir abschweifen und zwischen reinen und gemischten Ensembles in der Quantenmechanik unterscheiden.
Ein reines (oder homogenes) Ensemble besteht aus einzelnen Teilchen (d.h. Elektronen) die alle gleiche Wellenfunktionen haben, obwohl sie alle unterschiedlich im Raum und in der Zeit angeordnet sind. In einem reinen Ensemble definiert daher die typische Wellenfunktion Ψ die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Ensemble, so dass der Erwartungswert einer Observablen R gegeben ist durch:

$$\tilde{R} = \int \Psi^* R(x, -i\hbar\nabla)\Psi(x)dx. \tag{3}$$

Ein gemischtes Ensemble setzt sich aus einzelnen Teilchen zusammen, deren Wellenpakete nicht alle gleich sind. Wenn in der gegebenen Darstellung die Koeffizienten der Aufspaltung einer Funktion Ψ in ein orthonormales Set von Basisfunktionen $S_i(x)$ durch ψ_i gegeben sind, so kann der Erwartungswert für eine Observable R, der durch diese Wellenfunktion definiert wird, ausgedrückt werden durch:

$$\tilde{R} = \sum_{ij} \psi_i^* R_{ij} \psi_j, \tag{4}$$

wobei R_{ij} die Matrix $(S_i, \mathbf{R}S_j)$ ist. Bei einem gemischten Ensemble erhält man den Erwartungswert, indem man über alle anwesenden Wellenfunktionen mittelt, d.h.

$$\begin{aligned} < \tilde{R} >_{Av} &= \sum_{ij} < \psi_i^* \psi_j >_{Av} R_{ij} && (5) \\ &= \sum_{ij} \rho_{ij} R_{ij}, && (6) \end{aligned}$$

wobei $\rho_{ij} =< \psi_i^* \psi_j >$ die Dichtematrix darstellt, so dass

$$< R >_{Av} = Tr(f \cdot \mathbf{R}). \tag{7}$$

Aus den obigen Annahmen folgt, dass f hermitesch und $< \tilde{R} >_{Av}$ reell ist.

3. Nach einer genauen Messung der Observable repräsentiert durch den Operator $\mathbf{R}$, die den Eigenwert R_i ergibt, wird die Wellenfunktion $\Psi(x) = \sum_i \Psi_i R_i(x)$ zu $R_i(x)$.

Dieses Phänomen ist als 'Kollaps der Wellenfunktion' bekannt und das betreffende Postulat wird manchmal auch 'Projektionspostulat' genannt, weil der Vektor der Ψ im Hilbert Raum widerspiegelt auf einen der Basisvektoren projiziert wird in welchem die Matrix des Operators der gemessenen Observablen diagonal ist. Dieses Postulat ist notwendig um die Reproduzierbarkeit von Messergebnissen zu gewährleisten: nachdem R mit dem Ergebnis R_i gemessen wurde, sollte eine unmittelbar darauffolgende Messung das gleiche Ergebnis R_i liefern, sonst wäre die Theorie offenbar nicht passend. Es ist jedoch nicht vereinbar mit der Schrödingergleichung, denn ein Ensemble von Messungen an gleichermaßen mit der Wellenfunktion Ψ präparierten Systemen liefert ein gemischtes Ensemble, repräsentiert durch die eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von Eigenfunktionen $R_i(x)$, von denen jede den Anteil $p_i = \mid \psi_i \mid^2$ hat. Dies bedeutet eine irreversible Änderung, die eine nichtunitäre Transformation von Ψ beinhaltet. Im Gegensatz zur klassischen Situation, wo jeder dynamische Prozess prinzipiell durch den Hamilton-Formalismus beschrieben werden kann, gehört der Messprozess der Quantenmechanik in eine eigene Kategorie.
Es mag vielleicht hilfreich sein, zu bemerken, dass in der üblichen Interpretation der Quantenmechanik der Prozess des Kollaps' der Annahme gleichkommt, dass die gegebene Wellenfunktion durch eine zweite Wellenfunktion nach der Messung ersetzt wird, dies jedoch aus keinem sichtbaren Grund: die zweite Wellenfunktion kann nicht aus der ersten, die das anfängliche System beschreibt, als eine Lösung der Schrödingergleichung der Bewegung abgeleitet werden. Wenn wir ein reines Ensemble von gleichartigen ersten Wellenfunktion annehmen, so ist dieses Ensemble verbunden mit einem zweiten Ensemble von Wellenfunktionen, das im Allgemeinen nicht rein ist, d.h. die einzelnen Teilchen haben unterschiedliche Wellenfunktionen.
An diesem Punkt scheint es sinnvoll, dass die Unterschiede der zweiten Wellenfunktion (nach der Messung) über Änderungen der ersten Wellenfunktion (vor der Messung) durch Werte von neuen Variablen ausgedrückt werden könnten. Diese sind zwar momentan noch 'verborgen', aber letztlich, mit den passenden Methoden, messbar. Da das Verhalten eines jeden Systems sowohl von diesen verborgenen Variablen als auch von der Wellenfunktion anhängen würde, ist es verständlich, wie Elektronen mit anfänglich gleichen Wellenfunktionen durch die Änderungen der verborgenen Variablen andere Eigenschaften zeigen, wenn sie gemessen werden. Die quantenmechanischen Verteilungen von gemessenen Ergebnissen könnten dann durch eine Mittelung über ein passendes Ensemble verborgener Variablen im ersten reinen Ensemble erhalten werden.

1.2 von Neumanns Beweis

Von Neumanns Beweis, dass verborgene Variablen von der Quantenmechanik ausgeschlossen werden können, basiert auf folgenden Annahmen:

(i) There corresponds to each observable of a quantum mechanical system a unique hypermaximal Hermitian operator in Hilbert space. This correspondence is assumed to be one-one, i.e., each such operator corresponds to an observable.

(ii) If the observable R has the operator $\mathbf{R}$, then the observable $f(R)$ has the operator $f(\mathbf{R})$.

(iii) If the observables R, S, $\cdots$ have the operators $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\cdots$, then the observable $R + S + \cdots$ has the operator $\mathbf{R} + \mathbf{S} + \cdots$

(iv) If the observable R is by nature a nonnegative quantity, for example, if it is the square of another quantity S, then $\tilde{R} \geq 0$, where $\tilde{R}$ is the expectation value of R for an ensemble of measurements.

(v) If R, S, $\cdots$ are arbitrary observables and a, b, $\cdots$ real numbers, then $< aR+bS+\cdots >_{Av}= a\tilde{R} + b\tilde{S} + \cdots$.

Zwei Definitionen sind ebenfalls relevant:

(a) Ein Ensemble ist für jede Observable R dispersionsfrei, wenn $(\tilde{R})^2 =< R^2 >_{Av}$.

(b) Ein Ensemble ist homogen oder rein, wenn es nicht in Unterensembles mit anderen statistischen Eigenschaften aufgespalten werden kann.

Auf Basis dieser Annahme zeigte von Neumann, dass es eine semidefinite hermitesche Matrix U_{mn} gibt, so dass für jede Observable R gilt:

$$\tilde{R} = \sum_{mn} U_{mn} R_{mn} = Tr(\mathbf{UR}). \tag{8}$$

Das heisst jedes Ensembles ist in der Quantenmechanik durch eine bestimmte Dichtematrix definiert, aus der der Durchschnitt einer jeden Observablen mit einem bestimmten Algorithmus abgeleitet werden kann.
Da es keine physikalisch sinnvolle Dichtematrix mit Dispersion von Null für alle Observablen gibt, zog von Neumann als ersten Schluss, dass es keine dispersionsfreien Ensembles gibt. Zusätzlich gibt es Dichtematrizen, die homogene Ensembles darstellen, d.h. es ist nicht immer möglich ein Ensemble in Unterensembles mit unterschiedlichen statistischen Eigenschaften aufzuspalten. Die Deutung dieses Ergebnisses bezüglich verborgener Variablen ist, dass die Statistik des homogenen Ensembles nicht aus dem Mitteln über die verborgenen Variablen kommen kann, denn erstens könnte das homogene Ensemble dann als Mischung zweier unterschiedlicher Ensembles dargestellt werden und zweitens kann es keine dispersionsfreien Unterensembles geben, die aus einem oder mehreren individuellen Systemen bestehen.
Die Argumentation folgt hier analog der klassischen statistischen Mechanik. Eine klassische Observable ist als eine Funktion der Koordinaten und Impulse definiert, die die Mikrozustände des Systems bestimmen:

$$R = R(q_1, q_2, \cdots ; p_1, p_2, \cdots), \tag{9}$$

welche symbolisch als $R(q, p)$ abgekürzt wird. Wenn der 'Zustand' des Systems nur durch bestimmte thermodynamische Variablen definiert ist, berrechnet sich der Erwartungswert R eines solchen Systems als das Mittel über ein passend definiertes Ensemble von Systemen:

$$\tilde{R} = \int \rho(T, q, p) R(q, p) dp dq = \tilde{R}(T), \tag{10}$$

wobei T die thermodynamischen Variablen darstellt, die den 'Zustand' des Systems makroskopisch definieren, und ρ eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Im Ruhezustand können die statistischen oder thermodynamischen Eigenschaften des Systems aus der 'normalen' Boltzmannverteilung $C \cdot e^{-E/kT}$ erhalten werden:

$$\tilde{R} = \int C \cdot e^{-E(q,p)/kT} R(p,q) dq dp, \tag{11}$$

wobei T die Temperatur ist. Im Allgemeinen können wir jede Verteilung annehmen, im speziellen den Grenzfall der δ-Funktion, die ein dispersionsfreies Ensemble darstellt, in dem die Werte für q und p genau bestimmt sind und einen Wert für jede Observable $R(q,p)$ ohne Dispersion ergeben.
Gleichermaßen sollte es in einer statistischen Erklärung der Quantenmechanik mit verborgenen Variablen 'nicht-normale' Verteilungen geben, ebenso wie 'normale' die wieder die Ergebnisse der Quantenmechanik reproduzieren. Der Grenzfall einer solchen 'nicht-normalen' Verteilung wäre ein dispersionsfreies Ensemble, in welchem die Werte aller verborgener Variablen präzise bestimmt wären und folglich einen genauen Wert für jede Observable lieferten. Von Neumann hat also gezeigt, dass die Existenz solcher 'nicht-normalen' Ensembles, deren statistische Eigenschaften die der Quantenmechanik verletzen, nicht möglich ist.
Es scheint also, da das Konzept verborgener Variablen unvereinbar mit von Neumanns Annahmen ist und da die Ablehnung dieser die Ablehnung der Postulate der Quantenmechanik nach sich ziehen würde, dass jedwede verborgene-Variablen-Theorie den experimentellen Ergebnissen widerspräche, die die Quantenmechanik stützen.

1.2.1 Gegenbeweis

Wenn von Neumanns Annahmen akzeptiert werden, ist die Schlussfolgerung unausweichlich. Jedoch sind diese Annahmen, ob ihrer scheinbaren Einfachheit, unnötig einschränkend. Sei die Dispersion in den gemessenen Werten einer Observablen R der Dispersion in den Werten verborgener Variablen, die hinter dem Ensemble gemessenener Systeme stecken, zuzurechnen, dann ist der Erwartungswert $\tilde{R}$ der Observablen R als der Durchschnitt der Verteilung der verborgenen Variablen anzunehmen. Daher sollte die Gleichung

$$\tilde{R} = \sum_{mn} U_{mn} R_{mn} \tag{12}$$

geschrieben werden als

$$\tilde{R} = \sum_{mn} \tilde{U}_{mn} R_{mn} \tag{13}$$

dabei wird $\tilde{U}_{mn}$, die Dichtematrix die die Statistiken eines quantenmechanischen Systems bestimmt, als Mittel über die Verteilung der verborgenen Variablen des Ensmbles berechnet. Nämlich:

$$\tilde{U}_{mn} = \int U_{mn}(\Psi, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \tag{14}$$

womit gilt, dass

$$\tilde{R} = \sum_{mn} \int U_{mn}(\Psi, \lambda) R_{mn} \rho(\lambda) d\lambda, \tag{15}$$

wobei λ benutzt wird, um ein Set von verborgenen Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ und $\rho(\lambda) = \rho(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser bezeichnen.
Diese Beziehung impliziert, dass für bestimmte Werte von Ψ und λ, nämlich dispersionsfreie Fälle, der Wert von $\tilde{R}$ durch

$$R^{'} = \sum_{mn} U_{mn}(\Psi^{'}, \lambda^{'}) R_{mn} \tag{16}$$

bestimmt ist. Dabei bezeichnet $'$ den bestimmten Wert des Parameters. Dies ist ein lineares Verhältnis zwischen dem Wert der Observablen R und der zugeordneten Matrix R_{mn}. Es gibt allerdings keinen Grund, warum R nicht durch eine nicht-lineare Funktion von Ψ, verborgenen Variablen und der Matrix R_{mn} bestimmt sein sollte:

$$R = F(\Psi, \lambda, R_{mn}) \tag{17}$$

in einem Ensemble

$$\tilde{R} = \int F(\Psi, \lambda, R_{mn}) \rho(\lambda) d\lambda \tag{18}$$

und man sollte erwarten, die statistischen Ergebnisse der Quantenmechanik aus einem 'normalen' Ensemble, definiert über ein $\rho_N(\lambda)$, zu erhalten.
Von Neumanns implizite Wahl einer bestimmten linearen Form von F als Funktion von R_{mn}

$$F = \sum_{mn} U_{mn}(\Psi, \lambda) R_{mn} \tag{19}$$

hing grundsätzlich von der Linearitätsannahme (v) ab, d.h. für irgendein Set von Observablen R, S, $\cdots$ (ob gleichzeitig messbar oder nicht) sollte $< aR + bS + \cdots >_{Av} = a\tilde{R} + b\tilde{S} + \cdots$ gelten. Die Linearitätsannahme folgt aber direkt aus der Annahme für Linearität von F:

$$\begin{aligned} < R + S >_{Av} &= \sum_{mn} \int U_{mn}(\Psi, \lambda)(R + S)_{mn} \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{mn} \int U_{mn}(\Psi, \lambda)(R_{mn} + S_{mn}) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{mn} \int U_{mn}(\Psi, \lambda)(R_{mn}) \rho(\lambda) d\lambda + \sum_{mn} \int U_{mn}(\Psi, \lambda)(S_{mn}) \rho(\lambda) d\lambda = \tilde{R} + \tilde{S} \end{aligned}$$

Von Neumann rechtfertigte seine Annahme (v) mit der Bemerkung, dass diese in der Quantenmechanik immer wahr ist, d.h. für jeden Quantenzustand Ψ gilt:

$$(\Psi, (R+S)\Psi) = (\Psi, R\Psi) + (\Psi, S\Psi). \tag{20}$$

Daher trifft (v) für jedes reine oder gemischte Ensemble zu. Aber diese Beziehung könnte ebenfalls für normale Ensembles, bestimmt durch ein $\rho_N(\lambda)$, reproduziert werden, ohne dass man die Möglichkeit einer nicht-linearen Funktion F ausschließt. Das würde bedeuten, dass die Annahme (v) im Allgemeinen falsch und nur in speziellen Fällen, die die Ensembles der Quantenmechanik einschließen, richtig ist.
Ohne die Voraussetzung der Linearität

$$\tilde{R} = \sum_{mn} \int U_{mn}(\Psi, \lambda) R_{mn} \rho(\lambda) d\lambda \tag{21}$$

die stillschweigend in von Neumanns Annahme (v) enhalten ist, ist der Beweis nicht haltbar, weil er auf der Ananylse der statistischen Eigenschaften der Dichtematrix

$$\tilde{U}_{mn} = \int U_{mn}(\Psi, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \tag{22}$$

aufbaut, die jetzt nicht mehr charakteristisch für alle erhältlichen Ensembles sind.
Dieser Beweis entmutigte die weitere Arbeit an verborgenen-Variablen-Theorien für einige Zeit. Im Lichte der obigen Untersuchung scheint es allerdings, dass der Beweis nur solche verborgene-Variablen-Theorien zurückweist, die auf einem linearen Gesetz in der Form von Gleichung (15) aufbauen. In einer möglichen verborgenen-Variablen-Theorie wird das Augenmerk daher auf der allgemeineren Annahme

$$\tilde{R} = \int F(\Psi, \lambda, R_{mn}) \rho(\lambda) d\lambda \tag{23}$$

liegen.
Wie gezeigt wurde, ist Folgerung (15) von von Neumann nicht länger richtig und der Beweis bricht zusammen. Ein weiterer Unmöglichkeitsbeweis wurde von Jauch und Piron vorgeschlagen, in welchem sie zu dem gleichen Ergebnis wie von Neumann kommen, aber ohne die Annahme der Linearität. Diesem Beweis wollen wir uns im nächsten Kapitel widmen.

1.3 Jauch und Pirons Beweis

Das Argument, mit dem Jauch und Piron zu beweisen versuchen, dass die Struktur der Quantentheorie unvereinbar mit verborgenen Variablen ist, basiert auf der Art von experimenteller Frage, die man sich in der Theorie stellen kann. Daher betrachten sie solche Observablen eines physikalischen Systems, die nur zwei mögliche Werte, 1 oder 0, 'ja' oder 'nein', 'wahr' oder 'falsch' annehmen können und die in der Quantenmechanik durch den Projektionsoperator repräsentiert werden. Die Ergebnisse solcher ja-nein Versuche, z.B. dass eine gewisse Observable P den Wert P' hat oder dass der Wert von P positiv ist, werden hier Propositionen (Aussagen im Sinne mathematischer Logik) des Systems genannt, die entweder kompatibel oder inkompatibel sein können, abhängig davon, ob die betreffenden Messungen gleichzeitig durchgeführt werden können oder nicht. Jauch und Piron beziehen sich auf die Arbeit von Birkoff und von Neumann, 'The Logic of Quantum Mechanics', in der diese formell ein logisches Kalkül von

Propositionen für die Quantenmechanik, basierend auf dem Verhältnis zwischen den Propositionen eines quantenmechanischen Systems und den damit verbundenen Projektionsoperatoren entwickeln. Im Gegensatz zum Aussagenkalkül normaler Logik, das auf klassische Mechanik anwendbar ist, ist dieses System um das Konzept der 'Inkompatibilität' der Quantenmechanik erweitert. Der Beitrag von Jauch und Piron ist es, in diesem Kalkül als Theorem zu zeigen, dass wenn ein Aussagensystem verborgene Variablen zulässt, alle Propositionen inkompatibel sind. Da die Propositionen der Quantenmechanik nicht alle kompatibel sind, weil es bestimmte Messungen gibt, die nicht gleichzeitig durchgeführt werden können, wird die Möglichkeit verborgener Variablen die der Quantentheorie unterliegen zurückgewiesen.
Auf den ersten Blick ist nicht ganz klar, warum Jauch und Piron die Terminologie der Logik verwenden wollen, um experimentelle Fragen einer physikalischen Theorie zu beschreiben, sofern sie nicht einen tiefen Zusammenhang zwischen der Theorie und dem gesamten menschlichen Denken herstellen wollen. Wenn das der Fall ist, könnte die Unmöglichkeit einer verborgene-Variablen-Theorie für Mikrosysteme auf Beschränkungen in unserem Denkprozess zurückgeführt werden.
Wie man sieht, machen Jauch und Piron in Wirklichkeit nur Annahmen über physikalische Zusammenhänge und die vorgeschlagene Verbindung zur Logik ist sowohl künstlich als auch irreführend. Da dem so ist, ist es wichtig herauszufinden, wie diese physikalischen Annahmen aussehen und zu überprüfen ob sie fundiert sind. Damit in Verbindung steht die Kernaussage, dass die Existenz inkompatibler Propositionen ein 'empirisches Faktum' ist. Solche inkompatiblen Propositionen könnten allerdings nur als notwendige Folgerungen aus dem Experiment genommen werden, wenn festgestellt werden könnte, dass keine Propositionen außer der Quantenmechanik auf ein Mikrosystem anwendbar sind, woraus folgen würde, dass die einzigen relevanten experimentellen Fragen die der Quantenmechanik sind. Aber das ist eigentlich das was Jauch und Piron überhaupt zeigen wollten, um verborgene Variablen aus der Quantenmechanik auszuschließen. Denn wenn es solche verborgenen Variablen gäbe, würden sie eine Sprache ermöglichen, in der relevante experimentelle Fragen keine inkompatiblen Propositionen enthielten, sondern nur inkompatible Messungen, bei denen man, indem man eine Messung an einem System durchführte, physikalisch in eine andere Messung an diesem System eingreifen würde. Auf diese Weise wird klar, dass die Hauptannahme von Jauch und Piron die ist, dass die konzeptuelle Struktur aller Gesetze der Physik die gleiche ist, wie die der momentanen Gesetze der Quantenmechanik und weiter nichts. Aber es ist schon lange klar, dass keine verborgenen Variablen in die Theorie eingeführt werden können, ohne die konzeptuelle Struktur der Gesetze der Quantenmechanik zu erweitern oder zu verändern. Jauch und Piron haben also tatsächlich nichts neues bewiesen, was aber scheinbar durch die Benutzung der Terminologie der Logik verschleiert wurde, wodurch auf den ersten Blick die alte konzeptuelle Struktur so aussah, als hätte sie eine neue Bedeutung.

1.4 Hindernisse der Kopenhagener Interpretation

Es gibt vielfache Gründe eine verborgene-Variablen-Theorie zu entwickeln. Wie gezeigt wurde, zieht die Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik, bei der der Kollaps der Wellenfunktion als fundamentales Phänomen angenommen wird, jede Aufgabe eines Konzepts der Ordnung und Struktur der Bewegung eines Mikrosystems nach sich, um dagegen eine Anzahl von Regeln zur Vorhersage der Ergebnisse bestimmter Versuche zu haben. Selbstverständlich ist ein System zur Berechnung experimenteller Wahrscheinlichkeiten nützlich, jedoch ist Wissenschaft mehr als eine Anzahl von Algorithmen für ein Ingenieurshandbuch. In der Wissenschaft geht es besonders auch um das Verständnis der alles übergreifenden Zusammenhänge der Be-

wegung vom kleinsten Atom bis hin zu ganzen Galaxien. Zwar hat die Wissenschaft auch den Auftrag der sinnvollen Anwendung, diese kann aber nicht mit dem Akt des vollständigen Verstehens der Struktur eines komplexen Prozesses durch eine Anzahl kohärenter Regeln gleichgesetzt werden. Von letzteren kann man dann die Beziehungen der unterschiedlichen Teile ableiten, welche Vorhersagen möglich machen.
Der Unterschied zwischen Verstehen und bloßer Vorhersage kann durch ein Beispiel deutlich gemacht werden: Man stelle sich vor, man wolle den Weg durch eine unbekannte Stadt finden. Nun kann man bestimmten Anweisungen folgen, in welche Richtung man sich zu wenden habe, welche letztlich Vorhersagen über die Orte der Straßen und Gebäude sind an denen man vorbeikommt. Eine Karte der Stadt aber gibt einem ein einheitliches kohärentes Verständnis der übergeordneten Struktur, anhand derer man durch lesen Vorhersagen treffen kann. Momentan hält die Quantenmechanik eine kohärente Struktur der Mathematik bereit; die physikalischen Vorhersagen jedoch stellen Richtungsanweisungen dar, wie wenn man seinen Weg durch eine Stadt finden will. Daher macht Quantenmechanik Vorhersagen, welche Verteilungen Elektronen, die z.B. in ein Doppelspaltsystem eintreten, annehmen, wenn sie dieses verlassen. Aber diese sind nicht von einem Konzept der übergeordneten Struktur der Bewegung der Elektronen abgeleitet. Viel eher haben sie den Charakter eines mathematischen Algorithmus, zu vergleichen mit bestimmten Richtungsangaben. Dieser Algorithmus ist sicherlich eine Darstellung des ganzen Naturgesetzes, aber anzunehmen, dass alle Theorien folglich die Form eines solchen Algorithmus annehmen müssen, schränkt das Verständnis ein und konzentriert die Forschung auf Studien der statistischen Eigenschaften von Beobachtungsprozessen, die diese Kollapse beinhalten.
Dieser Punkt kann vielleicht weiter aufgeklärt werden, wenn man betrachtet, dass es eine sehr wichtige Methodologische Rechtfertigung der Einbeziehung von verborgene-Variablen-Theorien gibt, auch dieser, die nicht notwendigerweise als 'richtig' angesehen werden können. Denn die Sprache der Quantenmechanik in der üblichen Art des Formalismus macht es praktisch unmöglich sprachlich zu fassen, was mit der detaillierten Struktur des Prozesses des Kollaps gemeint ist, weil es schon in die Struktur der Sprache eingebaut ist, die Bedeutung des Kollaps zu verneinen. Auf diese Weise scheint die Theorie das innere statistische Konzept, das es für ein einzelnes System gibt, zu rechtfertigen.
Das alleine ist schon ein sehr ernster Fehler in der üblichen Formulierung der Quantenmechanik, denn, wie Popper angedeutet hat, ist es eine der Grundvoraussetzungen für ein System, dass es in Begriffen dargestellt wird, die es widerlegbar machen. Quantenmechanik jedoch wird in einer sprachlichen Form dargelegt, die selbst die hypothetische Annahme der Kritik an den grundsätzlichen Postulaten verhindert, denn dies würde offenbar eine Änderung in den experimentellen Fakten, auf denen die Theorie basiert, nach sich ziehen. Da aber die Ablehnung des experimentellen Inhalts der Theorie absurd ist und da man zu den Postulaten weder etwas Gegenteiliges sagen noch denken kann, scheinen die Prinzipien der Quantenmechanik unausweichliche und absolute Wahrheiten zu sein, die von einer gewaltigen Menge von Experimenten bestätigt werden.
In der gegenwärtigen Sprache können wir nur Fragen stellen und Experimente betrachten, die sich nicht außerhalb der Struktur dieser Sprache bewegen. Solange wir also diese Sprache benutzen, ist es nicht wahrscheinlich, dass Experimente erdacht werden, die die Postulate widerlegen könnten und so die Postulate auf die Probe stellen. Wir werden immer nach Energiezuständen, Streuwahrscheinlichkeiten, magnetischen Momenten usw. suchen, und sollten sie nicht wie vorhergesagt eintreffen, können wir immer noch eine Änderung der Kräfte zwischen den Atomen annehmen oder neue Eigenschaften einführen, aber wir werden die Experimente gewiss wieder in Einklang mit der Theorie bringen, ohne die oben genannten Postulate verändern zu müssen, abgesehen davon dass ihnen etwas hinzugefügt und sie angereichert werden. Mit anderen

Worten: wir brauchen niemals etwas anzunehmen, was ihnen zuwiderläuft. Selbstverständlich kann man auf die eine oder andere Weise jede Theorie mit einer ausreichenden Anzahl von Annahmen so anpassen, dass sie die gesammelten Daten widerspiegelt, aber die momentane sprachliche Form der Quantentheorie hat daneben die Besonderheit, dass sie die logische Unmöglichkeit irgendeines anderen Schemas, das zu den heutigen Fakten passen würde, verteidigt. Deshalb ist es nötig diese Anschauung in Frage zu stellen, denn andernfalls könnten wir Gefangene in einem Set von Konzepten werden, ohne dass wir es überhaupt mitbekommen. Wie bereits angedeutet, wollen wir das tun, indem wir die Sprache der Quantenmechanik insofern ändern, dass Fragen gestellt werden können, die aufzeigen, was es bedeutete, wenn die Postulate falsch wären. Selbst wenn die Theorie, die die neue Sprache verkörpert, nicht korrekt sein sollte, kann dieses Fragen auf theoretischer Grundlage nützlich sein, weil es letztlich zu Experimenten führt, die die grundsätzlichen Postulate der Quantenmechanik überprüfen.

2 BOHMsche Mechanik

2.1 Was ist BOHMsche Mechanik

BOHMsche Mechanik ist ein neue Theorie, die im Gegensatz zu herkömmlicher Quantenmechanik, von einem deterministischen Teilchenbild ausgeht. Sie wurde 1952 von DAVID JOSEPH BOHM[1] formuliert, als eine Verfeinerung der Pilot- bzw. Führungswellen Theorie von DE BROGLIE. Die BOHMsche Mechanik versucht, durch Berücksichtigung verborgener Variablen, das Meßproblem der Quantenmechanik zu lösen. Sie ist (in gewissem Sinne) eine Minimaltheorie, die die Galileische Raum-Zeit-Symmetrie respektiert und die, wie die herkömmliche Quantenmechanik auch, die Newtonsche Mechanik als Näherung enthält. Die statistische Theorie der BOHMschen Mechanik liefert in idealisierten Situationen den quantenmechanischen Formalismus. In der BOHMschen Mechanik hat das Feld in jedem Punkt des Raums eine wohldefinierte Amplitude und Phase und entwickelt sich gemäß deterministischen aber nichtlinearen und nicht-lokalen Feldgleichungen. Der „klassische“ Welle-Teilchen-Dualismus verschwindet, da das Teilchen und das Feld eine gemeinsame unendlich-dimensionale Wellenfunktion besitzen, welche aufgrund der Bewegungsgleichungen der Bohm-Theorie gleichzeitig die Teilcheneigenschaften der Felder und die Welleneigenschaften der Teilchen liefert.

2.2 Konzept der BOHMschen Mechanik

2.2.1 Die Grundzüge der Theorie

Um uns der Theorie zu nähern, gehen wir zunächst von einem klassischen Mehrteilchensystem aus. Die Realität wird in der BOHMsche Mechanik beschrieben durch die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{q}, t)$ mit $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ und die Teilchenkonfiguration $\mathbf{Q} = (Q_1, ..., Q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$. Der

[1] amerikanischer Physiker, * 20.12.1917 Wilkes-Barre, † 27.10.1992; 1951-55 Professor in São Paulo; 1961 Professor am Birbeck College der Universität in London; bedeutende Arbeiten zur Quantentheorie und über Plasmaphysik, insbesondere über Plasmaschwingungen der Elektronen in Metallen, sowie über Raum-Zeit-Geometrie und -Topologie; befaßte sich eingehend mit dem von J. von Neumann eingeführten Konzept der sog. „verborgenen Parameter“; nach ihm benannt ist die Bohm-Diffusion (durch Instabilitäten hervorgerufene Diffusion geladener Teilchen in einem von Magnetfeldern zusammengehaltenen [Kernfusions-]Plasma), die 1952 von ihm und D. Pines (* 1924) entwickelte Bohm-Pines-Theorie der Plasmaschwingungen von Elektronen in Metallen, sowie der von ihm und Y. Aharonov 1956 vorausgesagte Aharonov-Bohm-Effekt.

Konfigurationsraum ist, wie wir gleich sehen werden, äquivalent zum Phasenraum. Er stellt, anders als der Phasenraum in der klassischen Mechanik, keine mathematische Abstraktion dar, sondern ist entscheidend für das Verständnis BOHMscher Mechanik . Wie in herkömmlicher Quantenmechanik gilt die Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{24}$$

Der Hamiltonoperator ist hierbei gegeben durch:

$$H = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\hbar}{2m_k} \nabla_k^2 + V \qquad \text{mit} \qquad \nabla_k = \frac{\partial}{\partial q} \tag{25}$$

Die Zeitentwicklung der Konfiguration $\mathbf{Q}$ wird beschrieben durch die sogenannte „Leitgleichung“:

$$v_k = \frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar}{m_k} \frac{\Im\left(\psi^* \nabla_k \psi\right)}{\psi^* \psi}(Q_1, ..., Q_N, t) \tag{26}$$

Für eine N Teilchensystem, das nichtrelativistisch behandelt wird, ist dies schon die vollständige Definition der Theorie. Insbesondere sind keine weiteren Axiome über Obserablen oder Auswirkungen von Messungen (z.B. Kollaps der Wellenfunktion) notwendig. Diese ergeben sich später aus der statistischen Theorie der BOHMschen Mechanik . Es fällt auf, dass in der Definition der Geschwindigkeit (26) einer imaginären Größe untypischerweise eine reale Bedeutung zugesprochen wird. Dies ist prinzipiell nur ein neuer Weg um Zeitumkehrinvarianz zu realisieren, denn es gilt dann $v_k^{\psi^*} = -v_k^{\psi}$. Man erhält die Zeitumkehr durch komplexe konjugation der Wellenfunktion.

In der statistischen Theorie der BOHMschen Mechanik beginnt man mit einer statistischen Konfiguration $\varrho(\mathbf{q}, t)$. Man fordert zunächst, dass $\varrho(\mathbf{q}, 0) = |\psi(\mathbf{q}, 0)|^2$ gilt. Aus der quantenmechanischen Kontinuitätsgleichung, die eine Folge der Schrödingergleichung ist, ergibt sich:

$$\frac{\partial |\psi(\mathbf{q}, t)|^2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}^{\psi}(\mathbf{q}, t) = 0 \tag{27}$$

Wobei über $\mathbf{J}^{\psi} = (J_1^{\psi}, ..., J_n^{\psi})$ mit $J_k^{\psi} = \frac{\hbar}{m_k} \Im(\psi^* \nabla_k \psi)$ der quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsfluss definiert wird. Vergleicht man diesen mit der Definition der Teilchengeschwindigkeiten, dann erhält man sofort:

$$J_k^{\psi} = (\psi^* \psi) \frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} = \varrho v \tag{28}$$

Deshalb ergibt sich aus (27) in der BOHMsche Mechanik einfach die bekannte klassische Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho v = 0 \tag{29}$$

Aus dieser Kontinuitätsgleichung folgt bekanntermaßen:

$$\varrho(\mathbf{q}, t_0) = |\psi(\mathbf{q}, t_0)|^2 \quad \rightarrow \quad \varrho(\mathbf{q}, t) = |\psi(\mathbf{q}, t)|^2 \tag{30}$$

Wenn dies gilt, spricht man in der BOHMtheorie vom sogenannten Quantengleichgewicht. Es ist nun aber gar nicht klar, ob sich ein System im Anfangszustand $\mathbf{Q}_0$ im Quantengleichgewicht befand. Aus der Analogie zur Thermodynamik und der Tatsache, dass unser Universum nicht im thermischen Gleichgewicht ist, könnte man folgern, dass auch Quantengleichgewicht nicht gegeben sein muß. Man kann jedoch zeigen, dass sich ein Quantensystem tatsächlich fast immer im Quantengleichgewicht befindet. Dies erfordert jedoch tiefergehende Betrachtungen, die über eine qualitative Einführung hinausgehen. Prinzipiell kann die Quantengleichgewichtshypothese aus den Postulaten hergeleitet werden. Es zeigt sich dann, dass die Menge der Nichtgleichgewichtszustände in der Menge aller möglichen Anfangszustände eine Nullmenge ist, wenn man die Teilchenzahl gegen unendlich gehen läßt.

Interressant ist noch die Quantenpotential Formulierung der BOHMschen Mechanik, in der eine große Ähnlichkeit zur klassischen Mechanik besteht. Man wählt hierfür folgende Darstellung der ψ-Funktion:

$$\psi(x) = R(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} \tag{31}$$

Wobei S die Dimension eine Wirkung hat. Die Schrödinger Gleichung erhält eine Form, in der sie sich nur durch ein zusätzliches „Quantenpotential“ U von der klassischen Hamilton-Jacobi-Gleichung unterscheidet:

$$\tilde{H} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\text{kanonische Transformation}} + \underbrace{H(\nabla S, q)}_{\text{Hamiltonfunktion}} + \underbrace{V}_{\text{klassischesPotential}} + \underbrace{U}_{\text{Quantenpotential}} = 0 \tag{32}$$

Hierbei ist S die Erzeugende der kanonischen Transformation die $\tilde{H} = 0$ liefert. Das Quantenpotential $U = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\nabla^2|\psi|}{|\psi|}$ macht hier den großen Unterschied zur NEWTONschen Mechanik aus. Es ist mit dem Betrag der Wellenfunktion normiert und fällt daher nicht mit dem Abstand ab. Da das Quantenpotential jedoch massenabhängig ist, verschwindet es für makroskopische Objekte. Anzumerken ist noch, dass $\dot{\mathbf{Q}}$, im Gegensatz zur Hamilton-Jacobi-Theorie, keine freie Variable mehr ist. Man erhält in diesem Formalismus die Leitgleichung zu:

$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\nabla_k S}{m_k} \tag{33}$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass es unendlich viele Theorien der BOHMschen Art gibt, die alle mit den empirischen Konsequenzen der Kopenhagener Version der Quantenmechanik übereinstimmen. Diese Theorien unterscheiden sich von der BOHMschen Theorie nur dadurch, dass sie unterschiedliche Vorhersagen für die Teilchenbahnen liefern. Dies ist kein Gegenargument gegen BOHMtheorie, sondern bedeutet lediglich, dass diese Theorien für den Beobachter prinzipiell ununterscheidbar sind.

2.2.2 Teilchentrajektorien in BOHMscher Mechanik

So stark sich auch BOHMsche Mechanik von klassischer Mechanik unterscheidet, weiterhin lassen sich in BOHMscher Mechanik Teilchentrajektorien berechnen. Ihnen kommt hier, anders als in herkömmlicher Quantenmechanik, eine reale Bedeutung zu. Ein Teilchen hat eine definierte

Bahn. Jede in einem mehrmals wiederholten Quantenexperiment aufgenommene „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ resultiert in der BOHMschen Mechanik aus der prinzipiellen Unfähigkeit des Experimentators, den Anfangszustand stets äquivalent zu präparieren. Die Bestimmung und damit die Festlegung der Trajektorien ist schon theoretisch unmöglich, denn eine „Ortsmessung“ hat auch immer eine Beeinflussung zur Folge. Die Teilchenorte sind deshalb verborgene Variablen.

Die Trajektorien in BOHMscher Mechanik können teilweise auf den ersten Blick merkwürdig erscheinen. Betrachtet man z.B. ein „Elektron“ im Grundzustand des Wasserstoffatoms, so ist die Lösung der zeitunabhängigen Einteilchen-Schrödingergleichung ein reelle, positive Funktion ψ_0. Betrachtet man die Definition der Geschwindigkeit (26), so fällt auf, dass für das Elektron $\dot{\mathbf{Q}} = 0$ und deshalb $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$ gilt. Das Elektron bewegt sich also nicht und ruht in einem konstanten Abstand zum Kern. Dies wiederspricht sogar dem BOHRschen Bild vom kreisenden Elektron. Die im Experiment gemessenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ergeben sich erst, wenn man ein Ensemble von Atomen betrachtet.

2.2.3 Deutung des Zweispaltexperiment in BOHMscher Mechanik

Da in der BOHMschen Mechanik der Wellenfunktion nur die Bedeutung einer Führungswelle zukommt und die (punktförmigen) Teilchen diskrete Bahnen haben, kann man recht einfach für leicht unterschiedliche Anfangsbedingungen die Trajektorien berechnen. In Abbildung 1 sind einige solcher Trajektorien eingezeichnet. Die BOHMsche Mechanik ist eine Theorie erster Ordnung auf Grund der Differentialgleichung:

$$\dot{\mathbf{Q}} = v^{\psi}(\mathbf{Q}, t) \tag{34}$$

Durch die Teilchenorte werden somit schon die Teilchengeschwindigkeiten festgelegt. Daher stellt der Konfigurationsraum den kompletten Phasenraum dar und Teilchen-Trajektorien können sich niemals kreuzen. Ein- und zweidimensionale Bewegungen können deshalb nicht besonders chaotisch sein. Das Doppelspaltexperiment kann dann so gedeutet werden, dass die ψ-Welle eines jeden Teilchens hinter dem Spalt nach dem Huygenschen Prinzip ein Beugungsbild erzeugt. Diese Welle gibt dann den Weg für die Teilchen vor. Qualitativ gelten folgende Regeln:

1. Die Bahnen können die Symmetrieachse nicht übertreten.
2. Die Bahnen laufen vorzugsweise entlang der Maxima und meiden die Täler weil dort $|\psi|^2 \approx 0$ gilt.
3. Die Bahnen folgen hauptsächlich den Maximahyperbeln
4. Je größer die Maxima, desto dichter liegen die Bahnen (s. Hauptmaximum = Symmetrieachse).

Dies führt dann bei auftreten sehr vieler Teilchen zu dem bekannten Interferenzmuster. Es entsteht, da nicht alle Elektronen von der selben Stelle im Spalt starten, sondern statistisch variierte Anfangspositionen haben.

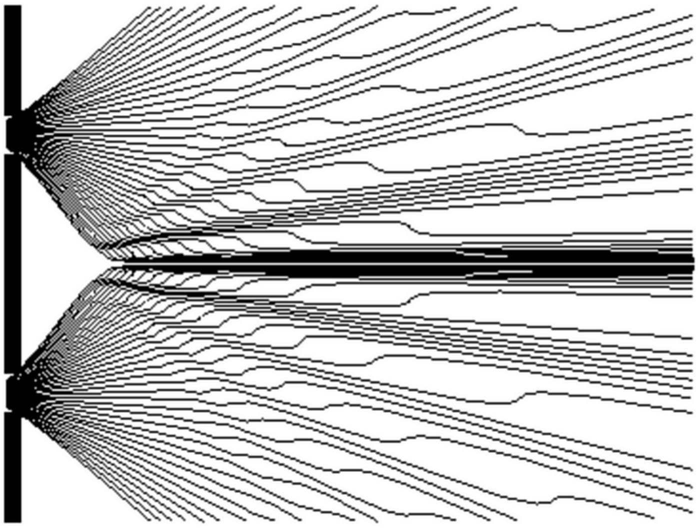

Abbildung 1: *Mögliche Bahnen*[1] *durch einen Doppelspalt*

2.2.4 Wie folgt die klassische Welt aus BOHMscher Mechanik ?

Die BOHMsche Mechanik ist, wie die klassische Mechanik, eine nichtlokale Theorie. In der klassischen Mechanik, sind die Konsequenzen noch relativ einsichtig, da die Wechselwirkungen relativ schnell mit dem Abstand abnehmen. Mit der spezielle Relativitätstheorie (SRT) wird die Mechanik aber zu einer lokalen Theorie, indem sie aus der Relativität der Beobachter folgert, dass „echte“ Wechselwirkungen (Energieaustausch) maximal mit Lichtgeschwindigkeit c_0 stattfinden können.

Wie die Verletzung der BELLschen Ungleichungen zeigt, muß eine realistische Interpretation der Quantenmechanik Nichtlokalität beinhalten. Die BOHMsche Mechanik erfüllt diese Forderung. Das kommt besonder darin zum Ausdruck, dass sie auf dem gesamten Konfigurationsraum definiert ist, mit einer, im allgemeinen verschränkten, Wellenfunktion, die alle Teilchen zugleich führt. Verschränkt bedeutet beispielsweise für ein Zweiteilchensystem, dass sich die Wellenfunktion nicht als ein Produkt: $\psi(q_1, q_2) = \phi(q_1)\varphi(q_2)$ schreiben läßt. Das bedeutet, dass jede lokale Veränderung der Wellenfunktion überall sofort spürbar ist. Damit dies effektiv geschieht muss jedoch eine gewisse Kohärenz aufrechterhalten werden. So kann die Beeinflussung dann auch über beliebig weite Distanz geschehen.

Um deutlich zu machen wie ein System dekohärent wird, betrachten wir noch einmal den Doppelspaltversuch, jedoch mit Luft zwischen Spalt und Schirm. Die Wellenfunktion des Systems wird durch einen Punkt im hochdimensionalen Konfigrationsraum des Elektrons und der Gasmoleküle beschrieben. Die beiden „Teilwellen“ die durch die beiden Spalte treten, ändern die Orte der Gasmoleküle. Da sie jedoch aus leicht unterschiedlichen Richtungen kommen, ändern sie die Position der Gasmoleküle auf jeweils unterschiedlich weise. Die beiden Teilwellenfunktionen liegen daher im Konfigurationsraum weit auseinander, wenn auch die beiden Spalte im Ortsraum nicht weit voneinander entfernt sind. Das Elektron kann nur noch von einer der beiden Teilwelle geführt werden und nicht mehr von beiden zugleich, da die beiden Teilwellen dekohärent sind. Für eine Ensemble von Teilchen erhält man dann die Intensitätsverteilung zweier Einzelspalte. Es tritt kein Interferenzmuster auf.

[2]Abbildung aus (Dür01)

2.2.5 Wie wird das „Messproblem“ gelöst?

In der Heisenberg-Schrödinger Quantenmechanik kennt man zwei grundsätzlich verschiedene Arten auf die sich ein Quantenzustand ändern kann:

1. *Nach der Schrödingergleichung:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = -iH\psi$
   d.h. unitäre (reversible, kausale und kontinuierliche) Zeitentwicklung
2. *Nach dem Reduktionspostulat:* „Messung erster Art“ an einem Zustand $\psi = c_a\psi_a + c_b\psi_b$
   d.h. Kollaps der Wellenfunktion auf Eigenzustände des Messoperators A ψ_a oder ψ_b (indeterministisch, irreversibel, stochastisch)

Frage: Hat man nach einer Messung in einem definierten Zustand (z.B. ψ_a oder ψ_b)?

Schrödingergleichung	$\longrightarrow$	Nein
Reduktionspostulat	$\longrightarrow$	Ja

Da ein Meßapparat selbst ein Quantensystem ist, stellt sich die Frage nach der Definition einer Messung. Während sich die Wahrscheinlichkeitsfunktionen des ungemessenen Systems deterministisch verhalten, sind die Observablen zufällig auf die möglichen Eigenwerte verteilt, und die weitere Entwicklung des Systems hängt vom tatsächlich gemessenen Wert ab. Woher kommt diese unterschiedliche Dynamik zwischen Messung und unbeobachteter Natur, wenn doch der Messapparat auch Teil der Natur ist? Wann ist welche Regel anzuwenden? Die Kopenhagener Interpretation beantwortet diese Frage so:

Die Welt wird in zwei Teile geteilt. Der eine Teil ist das beobachtete Objekt, welches quantenmechanisch beschrieben wird, der andere Teil die Messapparatur, welche klassisch beschrieben werden muss. Der Schnitt zwischen dem Objekt und dem Messapparat kann an beliebiger Stelle gemacht werden (sog. Heisenberg-Schnitt).

Mit dieser Interpretation erhält man jedoch das berühmte Schrödingersche Katzenparadoxon. In herkömmlicher Quantenmechanik gibt verschiedenste Argumentationen um dieses Paradoxon „aufzulösen“. In der Bohmschen Mechanik ist dieses Problem quasi nicht existent. Die Position der Teilchen ist klar definiert und damit auch der Zustand der Katze. Das Messproblem wird dadurch umgangen, dass der Beobachter ein Teil des Systems ist. Eine Messung im eigentlichen Sinne gibt es nicht, sondern nur Wechselwirkungen. Der Messapparat und der Beobachter selbst sind ebenfalls Quantenmechanisch zu behandeln.

2.3 Probleme der Bohmsche Mechanik

Dass in der Bohmschen Mechanik die Elektronen im Grundzustand des Wasserstoffatoms ruhen sollen, widerspricht sicherlich der üblichen Vorstellung vieler Physiker. In einem Artikel *„Surreal Trajectories in Bohm's Theory“* (Bar00), werden andere paradox anmutende Phänomene der Bohmschen Mechanik präsentiert. Gibt man beispielsweise einem Elektron die Möglichkeit, durch zwei Löcher mit Detektoren hindurch zu fliegen, so löst das Elektron, nach Bohmscher Mechanik , am Detektor des Loches durch das es nicht geflogen ist, ein Signal aus. Dieses Phänomen ist völlig im Einklang mit Bohmscher Mechanik . Es zeigt aber, dass auch eine deterministische Deutung nicht immer ein intuitives Abbild der Realität geben muß.

Das größte Problem der Quantenmechanik ist der unausgereifte Formalismus. Viele Phänomene, die in herkömmlicher Quantenmechanik wohlverstanden sind, können in BOHMscher Mechanik noch nicht beschrieben werden. Ohne eine solche Erweiterung jedoch ist die BOHMsche Mechanik der üblichen Quantenmechanik im POPPERschen Sinne unterlegen. Eine relativistische Bohmtheorie könnte hier zum Erfolg führen. Viele Kritiker der BOHMschen Mechanik vermuten jedoch, dass eine Umgestaltung zu einer relativistischen Theorie unmöglich ist, da eine relativistische Theorie an eine lokale Beschreibung geknüpft sein muüsse. Ein Unmöglichkeitsbeweis steht jedoch noch aus.

Grund der Zweifel ist vor allem, dass sich BOHMsche Mechanik nicht LORENTZinvariant auf den relativistischen Fall verallgemeinern läßt. Es gibt ein ausgezeichnetes Bezugssystem. Diese Tatsache wird nicht nur von Kritikern als „unschön“ bezeichnet. Man kann hier verschiedener Ansicht sein, ob dies ein Kriterium gegen BOHMsche Mechanik ist. Bei Stringtheorie beispielsweise wird das „Schönheits“-Kriterium meist nicht akzeptiert. Eine neue Theorie sollte insbesondere etwas neues liefern.

In der Tat haben verschiedene Anhänger der BOHMschen Theorie Vorschläge fur Effekte gemacht, die nicht aus der Kopenhagener Quantenmechanik folgen. Dazu gehören z. B. Berechnungen von Tunnelzeiten bei zerfallenden Atomkernen und Details von Streuprozessen. Zur Zeit gibt es jedoch keine experimentellen Hinweise auf einen moglichen größeren empirischen Gehalt der BOHMschen Theorie.

3 NELSON-Stochastik

3.1 Ein kurzer Überblick

Die Nelsonsche Stochastik ist eine klassische, realistische, stochastische Theorie. Sie macht dieselben Voraussagen wie die klassische Quantentheorie. Sie ist damit ein weiteres explizites Gegenbeispiel gegen die Behauptung, es gäbe keine realistischen Theorien mit verborgenen Variablen.

Im Gegensatz zur BOHMschen Mechanik wird die Größe v nicht als exakte Geschwindigkeit, sondern als mittlere Geschwindigkeit aufgefasst. Auch die mittlere Geschwindigkeit als Funktion des Ortes ist nicht messbar, weshalb auch die NELSON-Stochastik verborgene Variablen voraussetzt.

Die spezielle Form der Schrödinger Gleichung in der Nelson Stochastik ist generell für die Betrachtung des Übergangs von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik nützlich. Die Bewegung von Teilchen wird durch einen deterministischen Driftterm und einen stochastischen Diffusionsterm beschrieben. Es handelt sich deshalb um eine klassische BROWNsche Bewegung. Besonders interessant ist, dass das BOHMsche Quantenpotential hier aus der klassischen Stochastik heraus erklärt werden kann. Außerdem entsteht in der NELSONschen Stochastik nicht das Problem der Angleichung an das Quantengleichgewicht.

Literatur

[Bar00] BARRETT, Jeffrey A.: The Persistence of Memory: Surreal Trajectories in Bohm's Theorie. In: *arXiv* quant-ph/0002046 (2000)

[Bel66] Bell, John S.: On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. In: *Reviews of modern Physiks* 38 (1966), July, Nr. 3, S. 447–452

[Boh66a] Bohm, Jeffrey: A Proposed Solution of the Measurement Problem in Quantum Mechanics by a Hidden Variable Theory. In: *Reviews of modern Physiks* 38 (1966), July, Nr. 3, S. 453–469

[Boh66b] Bohm, Jeffrey: A Refutation of the Proof by Jauch and Piron that Hidden Variables Can be Excluded in Quantum Mechanics. In: *Reviews of modern Physiks* 38 (1966), July, Nr. 3, S. 470–475

[Dür01] Dürr, Detlef: *Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik*. Bd. 1. 1. Auflage. Heidelberg : Springer-Verlag Berlin, 2001

[Sch05] Schlagenhaufen, Thomas: *Bohmsche Mechanik*. January 2005. – Kurzer qualitativer Einblick in Bohmsche Mechanik

[wik05] `www.wikipedia.org`