

Twist-2-Partialwellen  
höherer Korrelationsfunktionen  
in  
global konform-invarianter  
Quantenfeldtheorie

Diplomarbeit

vorgelegt von

Ingo Rüdiger Falk Wagner

geboren in

Kassel

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik  
der Georg-August-Universität Göttingen  
April 2009

betreut von

Karl-Henning Rehren

*Für Arno Blümner*

---

# Einleitung

## Motivation

Es erscheint uns sinnvoll, sich in der Einleitung einer Diplomarbeit mit dem kompliziert anmutenden Titel „Twist-2-Partialwellen höherer Korrelationsfunktionen in global konform-invarianter Quantenfeldtheorie“ die Mühe zu machen, dem Leser die einzelnen Titelbausteine zu erläutern. Entsprechend wollen wir verfahren und erklären zunächst die Bedeutung der Worte „global konform-invariante Quantenfeldtheorie“.

Das Verständnis moderner physikalischer Theorien ist untrennbar mit dem Verständnis der den Theorien zugrundeliegenden Symmetrien verbunden. So trägt die Symmetriegruppe einer Theorie die Information über Koordinatensysteme, in denen die durch die Theorie festgelegten physikalischen Gesetze die gleiche Form besitzen. Symmetrietransformationen beschreiben als Elemente der Symmetriegruppe den Übergang von einem dieser Koordinatensysteme in ein anderes. Zwei sich in verschiedenen Systemen aufhaltende Beobachter, die in jeweils ihrem System dieselben Experimente durchführen, erhalten die gleichen Ergebnisse, sofern ihre Systeme durch eine Koordinatentransformation der Symmetriegruppe der die Experimente beschreibenden Theorie ineinander überführt werden können. Das prominenteste Beispiel einer Symmetriegruppe ist die Poincaré-Gruppe, die der Speziellen Relativitätstheorie und damit auch der relativistischen Quantenfeldtheorie zugrunde liegt. Die durch sie beschriebenen gleichberechtigten Beobachter zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Weltlinien Geraden der Raumzeit darstellen, sie sich also geradlinig gleichförmig gegeneinander bewegen. Die definierende Eigenschaft der Poincaré-Gruppe, die Metrik der Raumzeit unter den durch sie beschriebenen Koordinatentransformationen invariant zu lassen, ist gleichbedeutend mit der Erhaltung von Längen und Winkeln von bzw. zwischen Tangentialvektoren der Raumzeit. Die global-konforme Quantenfeldtheorie zeichnet sich gegenüber der relativistischen Quantenfeldtheorie dadurch aus, dass ihr anstelle der Poincaré-Gruppe die konforme Gruppe als Symmetriegruppe zugrunde liegt, deren Elemente den metrischen Tensor der Theorie bis auf einen Vorfaktor, der als Quadrat einer glatten Funktion der Raumzeit gegeben ist, invariant lassen. Dies entspricht der Erhaltung von Winkeln zwischen Tangentialvektoren der Raumzeit unter konformen Koordinatentransformationen, wogegen Längen im Allgemeinen nicht erhalten sind. Die Poincaré-Gruppe ist somit als Untergruppe in der konformen Gruppe enthalten. Eine der folgenreichsten Eigenschaften global konformer Symmetrie ist die Möglichkeit jedes raumartig zueinander liegende Punktepaar auf ein zeitartig zueinander liegendes und jedes zeitartig zueinander liegende Punktepaar auf ein raumartig zueinander liegendes mittels eines Elements der Symmetriegruppe abzubilden. Diese Eigenschaft geht jedoch durch Einschränkung auf lokal konforme Symmetrie verloren, bei der lediglich infinitesimale konforme Transformationen betrachtet werden.

Das zuvor beschriebene Verhältnis einer Symmetriegruppe zu den physikalischen Gesetzen einer Theorie kann auch umgekehrt werden, indem man einer a priori unbekanntem Theorie eine Symmetriegruppe vorschreibt. In diesem Fall werden die möglichen physikalischen Gesetze der Theorie

durch ihr Verhalten unter den Koordinatentransformationen der Symmetriegruppe eingeschränkt. Die Einschränkungen sind dabei umso stärker, je größer die Symmetriegruppe ist. Beschreitet man diesen Weg und untersucht zunächst unbekannte Quantenfeldtheorien, so stellt die Forderung der global konformen Symmetrie eine stärkere Einschränkung an mögliche physikalische Gesetze dar als lediglich die lokal konforme oder die relativistische Symmetrie. Beispiele der Restriktivität der global konformen Symmetrie in der Quantenfeldtheorie sind das Huygenssche Prinzip<sup>1</sup> und die Rationalität aller Korrelationsfunktionen (siehe [16, 17]). Ersteres Resultat besagt, dass der Kommutator zweier bosonischer Felder in zwei nicht lichtartig zueinander liegenden Punkten verschwindet, und ist eine Konsequenz der oben beschriebenen Möglichkeit, jedes Paar zeitartig zueinander liegender Punkte konform auf jedes Paar raumartig zueinander liegender Punkte abzubilden. Letzteres Ergebnis besagt, dass die  $N$ -Punktfunktionen konformer Felder stets als rationale Funktionen der Abstandsquadrate ihrer Punkte mit allein durch die Felder selbst bestimmten oberen Schranken der Polordnungen darstellbar sind. Als unmittelbare Konsequenz dessen ergibt sich, dass die Menge dieser Funktionen eine endliche Parametrisierung besitzt. So sind etwa die skalaren Zwei- und Dreipunktfunktionen bis auf eine Normierungskonstante eindeutig bestimmt. Anhand der genannten Beispiele erkennt man deutlich den Zuwachs an Übersichtlichkeit konformer gegenüber relativistischer Quantenfeldtheorien. Diese überschaubare Struktur motiviert die Untersuchung konformer Symmetrie zur Konstruktion wechselwirkender Quantenfeldtheorien, an denen akuter Mangel besteht. In diesem Sinn lassen sich konforme Quantenfeldtheorien als „Spielzeugmodell“ auffassen, für die der Bereich des Möglichen technisch einfacher ausgeleuchtet werden kann und deren erfolgreiche Konzepte man anschließend auf Quantenfeldtheorien weniger restriktiver Symmetrien auszudehnen versucht.

Gleichwohl der Betrachtungsweise als Spielzeugmodell stellt sich die Frage der Realisierung konformer Symmetrien in der Natur. Hierbei sind die Maxwellgleichungen des Vakuums zu nennen, die konforme Invarianz besitzen. Weiterhin können konforme Quantenfeldtheorien als Grenzfall relativistischer Quantenfeldtheorien bei hohen Energien angesehen werden, sodass die Ruheenergie der beschriebenen Teilchen gering gegenüber ihrer Gesamtenergie ist.

Innerhalb der global konformen Quantenfeldtheorie haben Partialwellenentwicklungen ein besonderes Interesse gewonnen (siehe [3, 4, 13]). Ihr quantenmechanisches Analogon sind die Partialwellenzerlegungen von Wellenfunktionen nach Kugelflächenfunktionen, die durch die Quantenzahlen des Bahndrehimpulses und des magnetischen Moments bestimmt werden. Partialwellenentwicklungen beschreiben die Darstellung von Korrelationsfunktionen als Reihe von Funktionen, den Partialwellen, die durch Quantenzahlen, bezeichnet als Twist und Spin, bestimmt werden. Die dabei auftretenden Entwicklungskoeffizienten sind von besonderem physikalischem Interesse, da etwa für Vierpunktfunktionen eines skalaren Feldes die Positivität aller Partialwellenkoeffizienten äquivalent zur Wightman-Positivität der Funktionen ist, die wiederum die Positivität des physikalischen Hilbert-Raums der Quantenfeldtheorie impliziert. Man kann nun das Verhältnis von Symmetriegruppe und Theorie wie beschrieben umkehren und Distributionen untersuchen, deren Verhalten unter konformen Transformationen dem von Vierpunktfunktionen einer konformen Quantenfeldtheorie entspricht. Wie bereits erwähnt besitzt die Menge dieser Distributionen eine endliche Parametrisierung. Entwickelt man die Distributionen nach Partialwellen, so bestimmen sich die Entwicklungskoeffizienten einzig aus den endlich vielen, die möglichen Korrelationsfunktionen beschreibenden Parametern. Entsprechend ergibt die Forderung der Positivität der Partialwellenkoeffizienten der Distributionen, die zur Definition einer Quantenfeldtheorie notwendig ist, Einschränkungen an die Wertebereiche der Parameter. Derartige Einschränkungen wurden in [13]

---

<sup>1</sup>Das Huygenssche Prinzip wird auch als starke Lokalität bezeichnet.

diskutiert. Die beschriebenen Positivitätsuntersuchungen existieren jedoch bislang nur für Partialwellen von Vierpunktfunktionen. Eine Erweiterung der für Vierpunktfunktionen durchgeführten Partialwellenanalyse auf Sechspunkt- und Achtpunktfunktionen ist wünschenswert und erste Betrachtungen einer solchen Erweiterung auf Sechspunktfunktionen sind unter anderem Gegenstand der vorliegenden Diplomarbeit.

Technisch kann der Ursprung von Partialwellenentwicklungen in Operator-Produkt-Entwicklungen zweier skalarer Felder gleicher Skalendimension gesehen werden, die auf die Definition von durch die Quantenzahlen Twist und Spin festgelegten Quantenfeldern führen, wobei man als Skalendimension die negative Homogenität bezeichnet, die jedes konform kovariante Feld besitzen muss. Angewendet auf den Vakuumzustand der Theorie erzeugen diese Felder Unterräume des physikalischen Hilbert-Raums, die für verschiedene Paare von Twist und Spin zueinander orthogonal sind und in ihrer Gesamtheit den kompletten Hilbert-Raum aufspannen. Die Partialwellenentwicklung ist als Entwicklung von Korrelationsfunktionen nach diesen Unterräumen zu verstehen

Eine Besonderheit der Tensoren vom Twist 2 ist das Erfüllen von Erhaltungssätzen. Als Beispiel sei hier der Energie-Impuls-Tensor genannt, der durch Twist 2 und Spin 2 charakterisiert wird und der in jeder Operator-Produkt-Entwicklung eines Produkts zweier gleicher skalarer Felder auftreten muss. Analog zur Forderung der Positivität stellt das eine Einschränkung an den zugehörigen Partialwellenkoeffizienten der Vierpunktfunktion des Feldes dar. Eine Umordnung der Operator-Produkt-Entwicklung, bei der alle Beiträge des gleichen Twists zusammengefasst werden, führt auf die Definition von sogenannten bilokalen Feldern. Da sich das bilokale Feld zu Twist 2 ausschließlich aus erhaltenen Feldern zusammensetzt, erfüllt es die zu allen Erhaltungssätzen äquivalente Bedingung der sogenannten Biharmonizität.

## Aufbau

Ebenso wie den Titel der Arbeit wollen wir ihren Aufbau erläutern. Kapitel 1 enthält eine kurze Zusammenfassung der Grundlagen der konformen Quantenfeldtheorie. Wir definieren in diesem Kapitel die konforme Gruppe und beweisen einige grundlegende Theoreme (vergleiche [6, 17, 23]). Weiterhin geben wir in Abschnitt 1.3 die Wightman-Axiome in global konform-invarianter Form und für beliebige Raumzeitdimensionen an und definieren die Bedingung global konformer Invarianz von Korrelationsfunktionen. Die konforme Gruppe erzeugt eine konforme Lie-Algebra, der wir uns in Abschnitt 1.5 widmen. Zudem werden wir dort die Wirkung der Elemente der konformen Lie-Algebra auf Felder einer konformen Wightman-Theorie diskutieren. Insbesondere besitzt die konforme Lie-Algebra ein quadratisches Casimirelement, dessen Wirkung auf eine bestimmte Klasse von Vektoren des physikalischen Hilbert-Raums wir in Abschnitt 1.6 in Form eines Differentialoperators angeben. Abschnitt 1.7 führt wichtige Ergebnisse der global konformen Quantenfeldtheorie auf. Dies sind die bereits erwähnten Resultate Huygens-Lokalität, Rationalität aller Wightman-Distributionen sowie die universellen Schranken ihrer Polgrade (siehe [16, 17]). Abschließend betrachten wir in Abschnitt 1.8 die Operator-Produkt-Entwicklung zweier Skalarfelder gleicher Skalendimension, mittels der wir eine Zerlegung des physikalischen Hilbert-Raums in paarweise disjunkte Unterräume einführen, die ihrerseits die Partialwellenentwicklung definiert. Desweiteren führt uns die Summation aller Anteile der Operator-Produkt-Entwicklung eines vorgegebenen Twists auf die Definition der bilokalen Felder, wobei wir insbesondere das harmonische bilokale Feld zum Twist 2 betrachten.

Kapitel 2 beginnen wir mit einer im weiteren Verlauf der Arbeit häufig verwendeten Transformation von Differentialoperatoren bestimmter Bauart. In Abschnitt 2.2 berechnen wir die Partialwellen von Vierpunktfunktionen für Raumzeiten der Dimensionen  $n = 2$  und  $n = 4$  als Eigenfunktionen der quadratischen Casimirgleichung mit bestimmtem asymptotischen Verhalten (vergleiche [4]) und geben im anschließenden Abschnitt 2.3 ein in [13] entwickeltes Schema zur Partialwellenentwicklung von Vierpunktfunktionen spezieller Bauart in  $n = 4$  Raumzeitdimensionen an, das eine Zerlegung von Teilen der Vierpunktfunktion in sogenannte chirale Variablen erfordert. Einen dafür geeigneten Zerlegungsalgorithmus diskutieren wir in Abschnitt 2.4. Schließlich untersuchen wir in Abschnitt 2.5 die Regularität von Partialwellen mit kritischem Verhalten.

In Kapitel 3 untersuchen wir den Twist-2-Anteil von Vektoren, die durch Wirkung zweier skalarer Felder auf den Vakuumzustand entstehen. Wir beschränken uns dabei auf  $n = 4$  Raumzeitdimensionen und nutzen die Harmonizität der in Kapitel 1.8 definierten bilokalen Felder zum Twist 2 aus, um eine Twist-2-Projektion innerhalb spezieller Vierpunktfunktionen durch die Harmonizität der Funktion bezüglich ihrer ersten beiden Punkte zu charakterisieren. In den Abschnitten 3.2 und 3.3 geben wir jeweils zwei zur Biharmonizität der speziellen Vierpunktfunktionen äquivalente Differentialgleichungen bezüglich des dritten und vierten Punktes der Funktionen an, die eine allgemeine Charakterisierung des Twist-2-Anteils von Vektoren liefern, die aus der Wirkung der beiden Felder auf den Vakuumzustand entstehen. Die Äquivalenz der Differentialgleichungen bezüglich des dritten und vierten Punktes der Vierpunktfunktion zu ihrer Harmonizität in den ersten beiden Punkten weisen wir dabei über die Transformation aller Gleichungen in kollektive Variablen nach, durch welche die Vierpunktfunktion dargestellt werden kann. Das Interesse an einer allgemeinen Charakterisierung des Twist-2-Anteils ist dabei begründet durch die in [4] dargestellte Methode Partialwellen als Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zu berechnen. Im Allgemeinen sind Partialwellen Lösungen verschiedener Casimirgleichungen, wobei auch Casimirelemente der konformen Algebra von kubischer und von quartischer Ordnung Einschränkungen liefern. Um diese sehr unhandlichen Casimirelemente höherer Ordnung zumindest bei der Berechnung der Partialwellen vom Twist 2 zu umgehen kann die allgemeine Charakterisierung des Twist-2-Anteils durch die oben genannten partiellen Differentialgleichungen benutzt werden. Die Twist-2-Partialwellen sind in diesem Fall als Eigenfunktionen des quadratischen Casimiroperators sowie als Lösung der Twist-2-Differentialgleichungen charakterisiert.

In Kapitel 4 untersuchen wir den Twist-2-Anteil von Vektoren, die durch Wirkung dreier skalarer Felder auf den Vakuumzustand entstehen. Wir beschränken uns auf  $n = 4$  Raumzeitdimensionen und nutzen erneut die Harmonizität bilokaler Felder zum Twist 2, um Twist-2-Projektionen innerhalb spezieller Fünfpunktfunktionen zu charakterisieren. In Abschnitt 4.2 geben wir ein System von Lösungsfunktionen der Biharmonizitätsbedingung an, dessen Unvollständigkeit wir in 4.3 beweisen. Schließlich diskutieren wir in Abschnitt 4.4 eine Strategie den Twist-2-Anteil von Vektoren zu charakterisieren, die durch die Wirkung der drei Felder auf den Vakuumzustand entstehen. Das Interesse an einer allgemeinen Charakterisierung des Twist-2-Anteils im Fall dreier skalarer Felder ist dabei genau wie im Fall zweier skalarer Felder begründet. Ziel zukünftiger Untersuchungen ist eine Berechnung der Twist-2-Partialwellen von Sechspunktfunktionen als Eigenfunktionen des quadratischen Casimiroperators sowie als Lösung der Twist-2-Differentialgleichungen.

Anhang A gibt einen Überblick über Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion. Insbesondere beweisen wir in Abschnitt A.1 die in Kapitel 2 benötigten Expansionsformeln. Schließlich definieren wir in Abschnitt A.2 die zum Beweis von Satz 3.3.4 in Anhang B benötigten Gegenbauer-Polynome. In den Anhängen C und D sind die in konform-invariante Variablen transformierten Operatoren der Abschnitte 4.1 bzw. 4.4 in tabellarischer Form angegeben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>9</b>
1.1	Konforme Abbildungen . . . . .	9
1.2	Konforme Gruppe . . . . .	10
1.3	Wightman-Axiome . . . . .	14
1.4	Wightman-Distributionen . . . . .	17
1.5	Konforme Lie-Algebra . . . . .	18
1.6	Konformer Casimiroperator . . . . .	20
1.7	Allgemeine Resultate der konformen Quantenfeldtheorie . . . . .	24
1.8	Operator-Produkt-Entwicklung . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Partialwellenentwicklungen von Vierpunktfunktionen</b>	<b>30</b>
2.1	Transformation der Operatoren . . . . .	30
2.2	Partialwellen von Vierpunktfunktionen . . . . .	32
2.2.1	Transformation der Casimirgleichung in chirale Variablen . . . . .	33
2.2.2	Lösungen im Fall zweidimensionaler Raumzeit . . . . .	34
2.2.3	Lösungen im Fall vierdimensionaler Raumzeit . . . . .	34
2.3	Zur Partialwellenentwicklung spezieller Vierpunktfunktionen . . . . .	36
2.4	Zur Zerlegung in chirale Variablen . . . . .	37
2.4.1	Polschranken der konform-invarianten Variablen . . . . .	37
2.4.2	Ein Algorithmus zur Zerlegung in chirale Variablen . . . . .	39
2.5	Kritische Partialwellen . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Zum Twist-2-Anteil zweier skalarer Felder</b>	<b>47</b>
3.1	Transformation der Harmonizitätsbedingungen . . . . .	48
3.2	Gleiche Skalendimension . . . . .	49
3.3	Unterschiedliche Skalendimension . . . . .	49
3.4	Resultate . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Zum Twist-2-Anteil dreier skalarer Felder</b>	<b>55</b>
4.1	Transformation der Operatoren . . . . .	56
4.2	Konstruktion von Lösungen . . . . .	56
4.2.1	Konstruktionsidee . . . . .	56
4.2.2	Klassifikation von Lösungen . . . . .	59
4.2.3	Explizite Form der Lösungen . . . . .	60
4.2.4	Alternative Darstellung der Lösungen . . . . .	61
4.3	Zur Unvollständigkeit der Lösungen . . . . .	63
4.4	Zur Charakterisierung des Twist-2-Anteils . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Abschließende Bemerkungen und Ausblicke</b>	<b>68</b>

<b>A</b>	<b>Hypergeometrische Funktion</b>	<b>71</b>
A.1	Expansionsformeln . . . . .	73
A.2	Gegenbauer-Polynome . . . . .	76
<b>B</b>	<b>Beweis von Satz 3.3.4</b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>Operatoren zu Abschnitt 4.1</b>	<b>85</b>
<b>D</b>	<b>Operatoren zu Abschnitt 4.4</b>	<b>89</b>
<b>5</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>94</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>95</b>



# 1 Grundlagen

Wir möchten in diesem Kapitel zunächst einen Überblick über die konforme Gruppe  $\text{Conf}(\mathcal{M})$  geben, die als Untergruppe der Diffeomorphismengruppe einer semiriemannschen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  die Eigenschaft besitzt, dass ihre Elemente die Mannigfaltigkeit winkeltreu in sich abbilden. Die konforme Gruppe umfasst insbesondere die isometrischen Abbildungen von  $\mathcal{M}$ . Für unsere Zwecke ist es ausreichend, den Fall  $n$ -dimensionaler Raumzeiten mit flacher Metrik

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p\text{-mal}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q\text{-mal}})$$

zu betrachten, wobei  $p + q = n$  gilt. Wir werden die zugehörigen Räume mit  $\mathbb{R}^{p,q}$  bezeichnen. Generell gilt es zwei Fälle zu unterscheiden:

- $p + q = n = 2$ :  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  ist in diesem Fall nicht endlichdimensional.
- $p + q = n > 2$ :  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  ist endlichdimensional und lässt sich durch  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  Variablen parametrisieren.

Konforme Abbildungen besitzen die Eigenschaft, dass sie winkeltreu abbilden, d.h. dass sie den metrischen Tensor bis auf das Quadrat einer glatten, reellwertigen Funktion  $\omega$  auf  $\mathbb{R}^{p,q}$  invariant lassen.

$$\frac{\partial c^\alpha}{\partial x^\mu}(x) \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial c^\beta}{\partial x^\nu}(x) = \omega^2(x) \eta_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Dabei setzen wir  $x' = c(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$  und verwenden die Einsteinsche Summenkonvention. Mit  $x \cdot y := x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu$  werden wir das Produkt zweier Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^{p,q}$  bezüglich  $\eta$  und mit  $x^2 := x \cdot x$  das Quadrat von  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$  bezeichnen.

## 1.1 Konforme Abbildungen

Wir betrachten im Folgenden den  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^{p,q}$  für  $p + q = n > 2$ . Es gibt die folgenden Klassen konformer Abbildungen:

- **Isometrien**: Setzt man in (1.1) zusätzlich noch  $\omega = 1$  voraus, so erhält man die definierende Gleichung für Isometrien  $(\Lambda, a) \in O(p, q) \ltimes \mathbb{R}^{p,q}$  des Raumes  $\mathbb{R}^{p,q}$ .

$$\begin{aligned} (\Lambda, a) : \mathbb{R}^{p,q} &\rightarrow \mathbb{R}^{p,q} \\ x &\mapsto \Lambda x + a \quad (\Lambda \in O(p, q), a \in \mathbb{R}^{p,q}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Für  $p = 1$  und  $q = 3$  sind dies gerade die Poincaré-Transformationen  $c = (\Lambda, a) \in L \ltimes \mathbb{R}^4 = P \subset \text{Conf}(\mathbb{R}^{1,3})$ . Die Gruppe  $P_+^\uparrow$  der eigentlichen orthochronen Poincaré-Transformationen, die die Symmetriegruppe der relativistischen Quantenfeldtheorie darstellt, ist also eine Untergruppe der konformen Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,3})$ .

- **Dilatationen:** Weiterhin sind die Dilatationen, die Längen von Vektoren  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$  um einen konstanten Faktor ändern, in  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  enthalten.

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}^{p,q} &\rightarrow \mathbb{R}^{p,q} \\ x &\mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Zusammen mit den Isometrien bilden die Dilatationen die sogenannte Weyl-Gruppe.

- **Spezielle konforme Transformationen:** Spezielle konforme Abbildungen sind nichtlineare Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} S_b : \mathbb{R}^{p,q} \setminus R_b &\rightarrow \mathbb{R}^{p,q} \\ x &\mapsto \frac{x - x^2 b}{1 - 2(x \cdot b) + x^2 b^2} \quad (b \in \mathbb{R}^{p,q}) \quad , \end{aligned} \quad (1.4)$$

wobei wir mit  $R_b$  die Nullstellenmenge der Funktion  $r_b(x) = 1 - 2(x \cdot b) + x^2 b^2$  bezeichnen.

Man beachte, dass die speziellen konformen Transformationen nicht auf dem gesamten Raum  $\mathbb{R}^{p,q}$  definiert sind. Diesen Missstand, der die Betrachtung der Menge der aufgeführten Abbildungen als Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  verhindert, beheben wir im folgenden Abschnitt.

## 1.2 Konforme Gruppe

Wir wollen den  $n$ -dimensionalen semiriemannschen Raum  $\mathbb{R}^{p,q}$  kompakt in einen höherdimensionalen Raum einbetten [6, 17, 23]. Die Kompaktifizierung von  $\mathbb{R}^{p,q}$  werden wir mit  $N^{p,q}$  bezeichnen. Als Ergebnis dieser Bemühungen erhalten wir die Möglichkeit, die konformen Abbildungen  $c$ , die im Allgemeinen lediglich auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^{p,q}$  definiert sind, als Diffeomorphismen  $\bar{c}$  des kompaktifizierten Raumes  $N^{p,q}$  fortzusetzen. Dies erlaubt schließlich die Definition der konformen Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ . Wir betrachten den projektiven Raum  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{p+1,q+1})$ , der als Quotient

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^{p+1,q+1}) = (\mathbb{R}^{p+1,q+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

bezüglich der Äquivalenzrelation

$$\xi \sim \xi' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \xi = \lambda \xi'$$

definiert ist. Es sei  $\gamma : \mathbb{R}^{p+1,q+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{p+1,q+1})$  die Quotientenabbildung zwischen beiden Räumen. Mit  $(\xi_{-1}, \dots, \xi_n)$  bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes  $\xi \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}$  und entsprechend mit  $(\xi_{-1} : \dots : \xi_n)$  die homogenen Koordinaten von  $\gamma(\xi) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{p+1,q+1})$ . Letztere erfüllen die Relation

$$(\xi_{-1} : \dots : \xi_n) = (\lambda \xi_{-1} : \dots : \lambda \xi_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad .$$

Wir betten  $\mathbb{R}^{p,q}$  mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa : \quad \mathbb{R}^{p,q} &\rightarrow \mathbb{R}^{p+1,q+1} \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\mapsto \left( \frac{1-x^2}{2}, x_0, \dots, x_{n-1}, \frac{1+x^2}{2} \right) =: \left( \frac{1-x^2}{2}, x, \frac{1+x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

in  $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$  ein und definieren weiterhin durch  $\iota := \gamma \circ \kappa$  die Einbettung von  $\mathbb{R}^{p,q}$  in  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{p+1,q+1})$ . Es gilt für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}^{p,q}$  die Beziehung

$$(x - y)^2 = -2 \kappa(x) \cdot \kappa(y) = (\kappa(x) - \kappa(y))^2 \quad . \quad (1.5)$$

Aus dieser Identität ergibt sich als Spezialfall  $(\kappa(x))^2 = 0$ , der es uns erlaubt,  $\mathbb{R}^{p,q}$  mittels der sogenannten Klein-Dirac-Quadrik  $N^{p,q}$  zu kompaktifizieren.

$$N^{p,q} := \{\gamma(\xi) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{p+1,q+1}) \mid \xi \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}, \xi^2 = 0\}$$

Die Punkte  $\gamma(\xi) \in N^{p,q} \setminus \iota(\mathbb{R}^{p,q})$  sind charakterisiert durch die Eigenschaft  $\xi_{-1} + \xi_n = 0$ . Mittels der Definition  $\xi_\infty := (1, 0, \dots, 0, -1)$  lässt sich die Menge dieser Punkte  $N_\infty^{p,q}$  als  $(n-1)$ -dimensionaler Kegelmantel mit Spitze in  $\gamma(\xi_\infty)$  schreiben.

$$N_\infty^{p,q} := \{\gamma(\xi) \in N^{p,q} \mid 0 = 2(\xi_{-1} + \xi_n) = 2(\xi \cdot \xi_\infty) = -(\xi - \xi_\infty)^2\}$$

Dass zu  $\gamma(\xi) \in N^{p,q}$  mit  $\xi_{-1} + \xi_n \neq 0$  für einen Repräsentanten ein  $x \in \mathbb{R}^{p,q}$  mit  $\iota(x) = \gamma(\xi)$  existiert, ergibt sich aus Definition der Abbildung

$$\begin{aligned} i : N^{p,q} \setminus N_\infty^{p,q} &\rightarrow \mathbb{R}^{p,q} \\ \gamma(\xi) &\mapsto \frac{(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})}{\xi_{-1} + \xi_n} \end{aligned} .$$

Diese ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten  $\xi$ , somit wohldefiniert und es gilt  $\iota(i(\gamma(\xi))) = \gamma(\xi)$ . Im Folgenden erweitern wir die konformen Abbildungen  $c$  zu konformen Transformationen  $\bar{c} : N^{p,q} \rightarrow N^{p,q}$ .

**Definition 1.2.1.** Sei  $M$  eine dichte offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{p,q}$  und  $c : M \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$  eine konforme Abbildung. Wir nennen einen Diffeomorphismus  $\bar{c} : N^{p,q} \rightarrow N^{p,q}$  eine konforme Erweiterung von  $c$ , falls  $\bar{c}(\iota(x)) = \iota(c(x)) \quad \forall x \in M$  gilt.

Wir erhalten die konformen Erweiterungen in einem Zwischenschritt über lineare Abbildungen  $c' \in \text{SO}(p+1, q+1)$ , die auf kanonische Weise die Erweiterungen  $\bar{c}(\gamma(\xi)) = \gamma(c'\xi)$  definieren. Mit  $\mathbf{1}_n$  bezeichnen wir dabei die Einheitsmatrix und mit  $\eta$  den metrischen Tensor auf  $\mathbb{R}^{p,q}$ .

1. **Isometrien:** Sei  $c(x) = \Lambda x \quad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}$  mit  $\Lambda \in \text{O}(p, q)$ . Wir definieren die Abbildung  $\Lambda'$  auf  $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$  durch die Blockmatrix

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SO}(p+1, q+1) \quad .$$

Dann gilt aufgrund  $(\Lambda x)^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}$

$$\begin{aligned} \bar{c}(\iota(x)) &= \left( \frac{1-x^2}{2} : (\Lambda x) : \frac{1+x^2}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1-(\Lambda x)^2}{2} : (\Lambda x) : \frac{1+(\Lambda x)^2}{2} \right) \\ &= \iota(c(x)) \quad . \end{aligned}$$

Sei  $c(x) := x + a \quad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}$  mit  $a \in \mathbb{R}^{p,q}$ . Wir definieren eine Abbildung  $a'$  auf  $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$  durch die Blockmatrix

$$a' = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{2} & -(\eta a)^T & -\frac{a^2}{2} \\ a & \mathbf{1}_n & a \\ \frac{a^2}{2} & (\eta a)^T & 1 + \frac{a^2}{2} \end{pmatrix} \in \text{SO}(p+1, q+1) \quad .$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\bar{c}(\iota(x)) &= \left( \frac{1-x^2}{2} - (a \cdot x) - \frac{a^2}{2} : (x+a) : \frac{1+x^2}{2} + (a \cdot x) + \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1-(x+a)^2}{2} : (x+a) : \frac{1+(x+a)^2}{2} \right) \\ &= \iota(c(x)) \quad .\end{aligned}$$

2. **Dilatationen:** Sei  $c(x) := \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Wir definieren eine Abbildung  $\lambda'$  auf  $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$  durch die Blockmatrix

$$\lambda' = \begin{pmatrix} \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} & 0 & \frac{1-\lambda^2}{2\lambda} \\ 0 & \mathbf{1}_n & 0 \\ \frac{1-\lambda^2}{2\lambda} & 0 & \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} \end{pmatrix} \in \text{SO}(p+1, q+1) \quad .$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\bar{c}(\iota(x)) &= \left( \frac{1-\lambda^2 x^2}{2\lambda} : x : \frac{1+\lambda^2 x^2}{2\lambda} \right) \\ &= \left( \frac{1-(\lambda x)^2}{2} : (\lambda x) : \frac{1+(\lambda x)^2}{2} \right) \\ &= \iota(c(x)) \quad .\end{aligned}$$

3. **Spezielle konforme Transformationen:** Sei  $c(x) := S_b(x) = \frac{x-x^2 b}{1-2(x \cdot b) + x^2 b^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q} \setminus R_b$  mit  $b \in \mathbb{R}^{p,q}$ . Wir definieren eine Abbildung  $S'_b$  auf  $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$  durch die Blockmatrix

$$S'_b = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b^2}{2} & -(\eta b)^T & \frac{b^2}{2} \\ b & \mathbf{1}_n & -b \\ -\frac{b^2}{2} & -(\eta b)^T & 1 + \frac{b^2}{2} \end{pmatrix} \in \text{SO}(p+1, q+1) \quad .$$

Damit gilt aufgrund  $(S_b(x))^2 = \frac{x^2}{r_b(x)}$  für  $r_b(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}\bar{c}(\iota(x)) &= \left( \frac{r_b(x) - x^2}{2} : (x - x^2 b) : \frac{r_b(x) + x^2}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1 - \frac{x^2}{r_b(x)}}{2} : \frac{x - x^2 b}{1 - 2(x \cdot b) + x^2 b^2} : \frac{1 + \frac{x^2}{r_b(x)}}{2} \right) \\ &= \iota(c(x)) \quad .\end{aligned}$$

Der folgende Satz motiviert die Definition der konformen Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ .

**Satz 1.2.2** ([23]). *Jede konforme Abbildung  $c : M \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$  auf einer dichten offenen Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$  besitzt eine eindeutige konforme Erweiterung  $\bar{c} : N^{p,q} \rightarrow N^{p,q}$ . Die Gruppe dieser Abbildungen ist isomorph zu  $O(p+1, q+1)/\{\pm 1\}$ . Die Zusammenhangskomponente der Identität ist entweder isomorph zu  $SO(p+1, q+1)$  oder zu  $SO(p+1, q+1)/\mathbb{Z}_2$ .*

**Definition 1.2.3** ([23]). Die konforme Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  ist die Zusammenhangskomponente der Identität in der Gruppe der konformen Diffeomorphismen  $\bar{c}$  auf der konformen Kompaktifizierung  $N^{p,q}$  von  $\mathbb{R}^{p,q}$ .

**Bemerkung:** Für den physikalisch wichtigen Fall  $(p, q) = (1, 3)$  gilt  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,3}) \cong \frac{\text{SO}(2,4)}{\mathbb{Z}_2}$ .

**Satz 1.2.4** ([17]). Es seien  $x, y \in \mathbb{R}^{p,q}$  zwei beliebige Punkte im Definitionsbereich der konformen Abbildung  $c$ . Dann gibt es eine Funktion, genannt konformer Faktor,  $\varrho$  mit der Eigenschaft

$$(c(x) - c(y))^2 = \frac{(x - y)^2}{\varrho(c, x) \varrho(c, y)} \quad (1.6)$$

**Beweis.** Aus der Definition der Einbettungsabbildung  $\iota$  sowie der Transformation  $\bar{c}$  ergibt sich die Existenz eines konformen Faktors  $\varrho(c, x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , der  $c'\kappa(x)$  und  $\kappa(c(x))$  miteinander verknüpft.

$$\begin{aligned} \gamma(c'\kappa(x)) &= \bar{c}(\gamma(\kappa(x))) = \bar{c}(\iota(x)) = \iota(c(x)) = \gamma(\kappa(c(x))) \\ \Leftrightarrow c'\kappa(x) &= \varrho(c, x) \kappa(c(x)) \end{aligned}$$

Der konforme Faktor kann durch  $\varrho(c, x) = \frac{(c'\kappa(x)) \cdot \xi_\infty}{\kappa(x) \cdot \xi_\infty}$  berechnet werden. Da  $c' \in \text{SO}(p+1, q+1)$  für alle konformen Abbildungen  $c$  gilt, folgt unmittelbar

$$(c(x) - c(y))^2 = -2 \kappa(c(x)) \cdot \kappa(c(y)) = -2 \frac{(c'\kappa(x)) \cdot (c'\kappa(y))}{\varrho(c, x) \varrho(c, y)} = \frac{(x - y)^2}{\varrho(c, x) \varrho(c, y)} \quad .$$

□

**Definition 1.2.5.** Zwei Punkte  $\gamma(\xi_1), \gamma(\xi_2) \in N^{p,q}$  heißen zueinander isotrop, falls  $(\xi_1 \cdot \xi_2) = 0$  gilt. Entsprechend heißen zwei Punkte  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{p,q}$  zueinander isotrop, falls  $(x_1 - x_2)^2 = 0$  gilt.

**Bemerkungen:**

- Die Verbindung zwischen beiden Teilen der Definition stellt Gleichung (1.5) her.
- Die Isotropie von Punkten  $\gamma(\xi_1), \gamma(\xi_2) \in N^{p,q}$  ist invariant unter konformen Abbildungen.

**Lemma 1.2.6** ([16]). Jedes Paar nicht-isotrop zueinander liegender Punkte  $\gamma(\xi_1), \gamma(\xi_2) \in N^{p,q}$ , lässt sich auf jedes andere Paar nicht-isotrop zueinander liegender Punkte  $\gamma(\xi'_1), \gamma(\xi'_2) \in N^{p,q}$  durch eine konforme Transformation  $\bar{c}$  abbilden.

**Beweis.** Die Wirkung von  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  auf  $N^{p,q}$  ist transitiv. Somit gibt es eine Transformation  $\bar{c}_1 \in \text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ , die das Paar  $(\iota(x_1), \iota(x_2))$  auf das Paar  $(\bar{c}_1(\gamma(x_1)), \bar{c}_1(\gamma(x_2))) = (\gamma(\xi_\infty), \gamma(\zeta))$  abbildet. Ebenso gibt es eine Transformation  $\bar{c}_2 \in \text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ , die das Paar  $(\gamma(\xi'_1), \gamma(\xi'_2))$  auf das Paar  $(\bar{c}_2(\gamma(x_1)), \bar{c}_2(\gamma(\xi'_2))) = (\gamma(\xi_\infty), \gamma(\zeta'))$  abbildet. Da die Isotropie eines Punktepaars invariant unter konformen Transformationen ist, gilt zudem  $\gamma(\zeta), \gamma(\zeta') \notin N_\infty^{p,q}$ . Die Translationen sind im Stabilisator des Punktes  $\gamma(\xi_\infty)$  der konformen Gruppe zum Punkt  $\gamma(\xi_\infty)$  enthalten und wirken transitiv auf  $N^{p,q} \subset N_\infty^{p,q}$ . Es gibt somit eine Translation  $\bar{c}_3 \in \text{Stab}(\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q}), \gamma(\xi_\infty))$  mit  $\bar{c}_3(\gamma(\zeta)) = \gamma(\zeta')$ . Die konforme Transformation  $\bar{c} := \bar{c}_1 \circ \bar{c}_3 \circ \bar{c}_2^{-1}$  leistet dann das Gewünschte. □

Der folgende Hilfssatz stellt eine Verallgemeinerung des Hilfssatzes 1.2.6 dar. Ein ausführlicher Beweis der Aussage ist in [16] zu finden.

**Lemma 1.2.7.** *Zu jedem  $(N+2)$ -Tupel  $(x_1, x_2, y_1, \dots, y_N)$  von Punkten in  $\mathbb{R}^{p,q}$  mit  $(x_1 - x_2)^2 \neq 0$  und zu jedem Paar  $(x'_1, x'_2)$  nicht-isotroper Punkte in  $\mathbb{R}^{p,q}$  gibt es eine konforme Abbildung  $c$  mit  $c(x_1) = x'_1$ ,  $c(x_2) = x'_2$  und  $c(y_i) \in \mathbb{R}^{p,q}$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ .*

*Beweisskizze.* Die Aussage des Lemmas lässt sich durch Induktion nach  $N$  beweisen, wobei der Induktionsanfang bei  $N = 0$  bereits mit Lemma 1.2.6 erbracht ist. Für Punkte  $(x_1, x_2, y_1, \dots, y_{N+1})$  können wir die Existenz einer Abbildung  $c$  mit Fortsetzung  $\bar{c}$  auf  $N^{p,q}$ , die  $(x_1, x_2, y_1, \dots, y_N)$  wie gewünscht abbildet, voraussetzen. Es kann nun entweder  $\bar{c}(\iota(y_{N+1})) \in N^{p,q} \setminus N_\infty^{p,q}$  oder  $\bar{c}(\iota(y_{N+1})) \in N_\infty^{p,q}$  eintreten. Im ersten Fall ist die Aussage des Lemmas bereits bewiesen. Im zweiten Fall ist der Stabilisator der Punkte  $\iota(x'_1), \iota(x'_2)$  groß genug, um den Punkt  $\bar{c}(\iota(y_{N+1})) \in N_\infty^{p,q}$  auf einen Punkt  $\xi \in N^{p,q} \setminus N_\infty^{p,q}$  abzubilden ohne  $\bar{c}(\iota(y_i))$  für  $i \in \{1, \dots, N\}$  nach  $N_\infty^{p,q}$  abzubilden.  $\square$

### 1.3 Wightman-Axiome

In diesem Abschnitt wollen wir einen kurzen Überblick über das axiomatische Fundament geben, auf dem die von uns untersuchten Theorien aufbauen. Wir wählen als Grundlage die Wightman-Axiome<sup>1</sup> (siehe [24]). Diese machen Aussagen über die Art des Raumes, auf dem physikalische Zustände dargestellt werden, beschreiben die mathematische Einbindung einer Symmetriegruppe, fordern die Existenz eines Vakuumzustandes sowie die Positivität der Energie, legen die Beschreibung der Felder sowie ihr Transformationsverhalten unter Elementen der Symmetriegruppe fest und stellen die Lokalität der ihnen genügenden Theorien sicher. In ihrer ursprünglichen Form wurden die Wightman-Axiome zur Konstruktion relativistisch-invarianter Theorien angegeben ( $p = 1$ ,  $q = 3$ ,  $n = p + q = 4$ ) und enthalten deshalb nur eine Aussage über das Transformationsverhalten der Felder unter Elementen der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{1,3}$ , der universellen Überlagerungsgruppe der Poincaré-Gruppe (vergleiche [8, 19, 23, 24]). Die Poincaré-Gruppe ist jedoch eine echte Untergruppe der konformen Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,3})$ , die über die Poincaré-Transformationen hinaus noch Dilatationen und spezielle konforme Transformationen enthält. Um global konform-invariante Theorien zu beschreiben, müssen die Wightman-Axiome entsprechend der größeren Symmetriegruppe modifiziert werden. Man kann dazu ein Transformationsverhalten der Felder unter Elementen der Gruppe  $\text{Spin}(2, 4) \cong \text{SU}(2, 2)$ , der vierfachen Überlagerungsgruppe von  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,3})$ , betrachten. Die Einbindung von Überlagerungsgruppen in die Wightman-Axiome liefert in ihrer relativistisch-invarianten wie in ihrer global konform-invarianten Version die Beschreibung sowohl bosonischer als auch fermionischer Felder. Da wir im Verlauf der Arbeit ausschließlich global konform-invariante, bosonische Felder betrachten, deren Transformationsverhalten bereits durch die Elemente der konformen Gruppe selbst bestimmt ist, verzichten wir auf die Einbindung von Überlagerungsgruppen. Das erlaubt uns insbesondere eine einfache Verallgemeinerung der Axiome auf  $n$ -dimensionale Raumzeiten  $\mathbb{R}^{1, n-1}$ . Es sei jedoch angemerkt, dass sich die Wightman-Axiome global konform-invarianter Theorien im Fall  $n$ -dimensionaler Raumzeiten für sowohl bosonische als auch fermionische Felder formulieren lassen, indem man allgemein Darstellungen der Gruppe  $\text{Spin}(2, n)$ , einer Überlagerungsgruppe der konformen Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1, n-1})$ , betrachtet (siehe [12]).

<sup>1</sup>Die Wightman-Axiome wurden zuerst von Arthur Strong Wightman formuliert und sind Grundlage der konstruktiven Quantenfeldtheorie. Es sei angemerkt, dass weitere Axiomensysteme existieren, die rigorose Zugänge zu Quantenfeldtheorien bieten, wie etwa die Haag-Kastler-Axiome (siehe [8]), welche die Grundlage der algebraischen Quantenfeldtheorie darstellen.

- **Hilbert-Raum und Symmetriegruppe:** Die Zustände einer Quantenfeldtheorie werden durch Einheitsstrahlen eines separablen Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  beschrieben, auf dem die konforme Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,n-1})$  über eine unitäre Darstellung wirkt.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \text{Conf}(\mathbb{R}^{1,n-1}) &\rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H}) \\ \bar{c} &\mapsto \mathcal{U}(\bar{c}) \end{aligned}$$

Weiterhin existiert ein Vektor  $\Omega \in \mathcal{H}$ , der invariant unter der Darstellung  $\mathcal{U}$  ist und als Vakuumvektor bezeichnet wird. Der Vakuumvektor ist bis auf einen Faktor eindeutig festgelegt. Das Spektrum der Generatoren  $\mathcal{P}^\mu$  der Translationen  $c = (\mathbf{1}_n, a)$ , der durch  $\mathcal{U}((\mathbf{1}_n, a)) =: \exp(ia_\mu \mathcal{P}^\mu)$  definiert wird, liegt im Abschluss des Vorwärtskegels  $V_+$ .

$$\sigma(\mathcal{P}^\mu) \subset \overline{V_+} := \{p^\mu \in \mathbb{R}^{1,n-1} : p_\mu p^\mu \geq 0, p^0 \geq 0\} \quad (1.7)$$

- **Felder:** Die Felder  $\Phi$  einer Quantenfeldtheorie sind Multiplets von operatorwertigen Distributionen  $\Phi_k$  ( $k \in \{1, \dots, m\}$ ) auf dem Schwartz-Raum.

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^{1,n-1}, \mathbb{C}))^m &\rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}) \\ f := (f^1, \dots, f^m) &\mapsto \Phi(f) = \sum_{k=1}^m \Phi_k(f^k) =: \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^{1,n-1}} \Phi_k(x) f^k(x) dx \end{aligned}$$

Verschiedene Felder werden durch die Notation  $\Phi^{(l)}(f^{(l)})$  unterschieden. Die Operatoren  $\Phi(f)$  sind auf einer dichten Teilmenge  $\mathcal{D} \in \mathcal{H}$  definiert, welche die Wightman-Domäne

$$\text{span} \left\{ \Phi^{(l_1)}(f^{(l_1)}) \Phi^{(l_2)}(f^{(l_2)}) \dots \Phi^{(l_N)}(f^{(l_N)}) \Omega \in \mathcal{H} \mid N \in \mathbb{N} \right\} \quad (1.8)$$

umfasst.  $\mathcal{D}$  ist invariant unter  $\mathcal{U}$ .

$$\mathcal{U}(\bar{c})\mathcal{D} \subset \mathcal{D} \quad \forall \bar{c} \in \text{Conf}(\mathbb{R}^{1,n-1}) \quad (1.9)$$

- **Hermitizität:** Durch  $\Phi^*(f) := (\Phi(\bar{f}))^\dagger \quad \forall f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^{1,n-1}, \mathbb{C}))^m$  wird ebenfalls ein Feld  $\Phi^*$  definiert.  $\Phi$  heißt selbstadjungiert, falls die Bedingung  $\Phi^* = \Phi$  erfüllt ist.
- **Lokalität:** Sind die Träger  $\text{supp}(f^{(k)})$  und  $\text{supp}(f^{(l)})$  der Abbildungen  $f^{(k)}$  und  $f^{(l)}$  raumartig getrennt, d.h.  $(x_k - x_l)^2 < 0 \quad \forall x_k \in \text{supp}(f^{(k)}), \forall x_l \in \text{supp}(f^{(l)})$ , so kommutieren die Feldoperatoren  $\Phi^{(k)}(f^{(k)})$  und  $\Phi^{(l)}(f^{(l)})$ .

$$[\Phi^{(k)}(f^{(k)}), \Phi^{(l)}(f^{(l)})] = 0 \quad (1.10)$$

- **Vollständigkeit:** Jede unter Anwendung der Feldoperatoren invariante Unterdomäne  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$  ist dicht in  $\mathcal{H}$ .
- **Kovarianz:** Die Felder transformieren sich unter Elementen  $\bar{c} \in \text{Conf}(\mathbb{R}^{1,n-1})$  mit zugehöriger konformer Abbildung  $c$  gemäß

$$\mathcal{U}(\bar{c})\Phi(f)\mathcal{U}(\bar{c})^{-1} = \Phi(f_{(\omega, \bar{c})}) \quad (1.11)$$

Dabei sind die Komponenten der zurückgeholt Testfunktion  $f_{(\omega, \bar{c})} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))^m$  für den Fall  $c^{-1}(x) \in \mathbb{R}^{(1,n-1)}$  definiert durch:

$$f_{(\omega, \bar{c})}^k(x) := \begin{cases} 0 & , \quad i \in \bar{c}(i(x)) \in N_\infty^{1,n-1} \\ \sum_{l=0}^m |\det(\partial(c^{-1}))(x)| \omega(c, c^{-1}(x))^k_l f^l(c^{-1}(x)) & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Die matrixwertige Abbildung  $\omega$  erfüllt zudem die Bedingungen:

- Für beliebige konforme Abbildungen  $c_1, c_2$  mit  $c_2(x) \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  gilt:

$$\omega(c_1, c_2(x)) \omega(c_2, x) = \omega(c_1 c_2, x) \quad (1.12)$$

- Für spezielle konforme Abbildungen  $c$  gilt:

$$\omega(c, 0) = \mathbf{1}_m \quad (1.13)$$

- Die Einschränkung von  $\omega$  auf die Isometrien innerhalb der konformen Gruppe definiert eine Darstellung  $D$  der Isometrien, die eine triviale Unterdarstellung der Translationen enthält, d.h. für alle  $(\Lambda, a), (\Lambda', a') \in \text{SO}(1, n-1) \times \mathbb{R}^{1,n-1}$  gilt:

$$\begin{aligned} D((\Lambda', a')) D((\Lambda, a)) &= D((\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a')) \\ D((\mathbf{1}_n, a)) &= \mathbf{1}_m \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dabei ist  $D((\Lambda, a)) := \omega((\Lambda, a), x)$  unabhängig von  $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ .

### Bemerkungen zu den Wightman-Axiomen:

- Die Operatoren  $\Phi(f)$  sind im Allgemeinen unbeschränkt.
- Wir werden im Folgenden keine Unterscheidung mehr zwischen  $\bar{c} \in \text{Conf}(\mathbb{R}^{1,n-1})$  und der zugehörigen konformen Abbildung  $c$  notieren.
- Der Kovarianzeigenschaft (1.11) entspricht die formale Eigenschaft

$$\mathcal{U}(c) \Phi_l(c) \mathcal{U}(c)^{-1} = \sum_{k=0}^m \omega(c, x)^k {}_l \Phi_k(x) =: (\omega(c, x) \Phi(x))_l \quad .$$

- Wir verwenden im weiteren Verlauf der Arbeit stets die folgende Schreibweise:

$$\left| \Phi^{(l_1)}(x_1) \Phi^{(l_2)}(x_2) \dots \Phi^{(l_N)}(x_N) \right\rangle := \Phi^{(l_1)}(x_1) \Phi^{(l_2)}(x_2) \dots \Phi^{(l_N)}(x_N) \Omega$$

Wir betrachten Felder  $\Phi$ , die als Multipllett der durch Indizes  $\mu_k \in \{0, \dots, n-1\}$  mit  $k \in \{1, \dots, L\}$  beschriebenen Komponenten  $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_L}$  gegeben sind. Ihr Verhalten unter konformen Transformationen  $c$  mit  $x, c(x) \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  ist formal gegeben durch

$$\mathcal{U}(c) \Phi_{\nu_1 \dots \nu_L}(x) \mathcal{U}(c)^{-1} = \omega(c, x)^{\mu_1 \dots \mu_L} {}_{\nu_1 \dots \nu_L} \Phi_{\mu_1 \dots \mu_L}(c(x)) \quad . \quad (1.15)$$

Eine konkrete Transformationsvorschrift des Feldes  $\Phi$  kann mittels  $\Delta \in \mathbb{N}_0$  durch

$$\omega(c, x)^{\mu_1 \dots \mu_L} {}_{\nu_1 \dots \nu_L} = |\det(\partial c(x))|^{\frac{\Delta}{n}} \left( \frac{\partial c(x)}{|\det(\partial c(x))|^{\frac{1}{n}}} \right)^{\mu_1} \dots \left( \frac{\partial c(x)}{|\det(\partial c(x))|^{\frac{1}{n}}} \right)^{\mu_L} {}_{\nu_L} \quad (1.16)$$

angegeben werden. Man beachte, dass  $\omega$  insbesondere die Bedingungen (1.12), (1.13) und (1.14) erfüllt. Insbesondere transformiert sich ein Feld  $\phi$  mit  $L = 0$  und  $d := \Delta \in \mathbb{N}_0$  formal gemäß

$$\mathcal{U}(c) \phi(x) \mathcal{U}(c)^{-1} = |\det(\partial c(x))|^{\frac{d}{n}} \phi(c(x)) \quad .$$



**Definition 1.3.1** (Global konforme Kovarianz, Skalendimension, Spin, Twist). *Ein Feld  $\Phi$  der oben gegebenen Form, das sich gemäß (1.15) und (1.16) transformiert, nennen wir ein global konform-kovariantes Feld der Skalendimension  $\Delta$  und des Spins  $L$ . Die Größe  $2\kappa := \Delta - L$  wird als Twist des Feldes bezeichnet. Ein Feld der Skalendimension  $\Delta = d$  und des Spins  $L = 0$  nennen wir ein skalares global konform-kovariantes Feld der Skalendimension  $d$ .*

In  $n = 4$  Raumzeitdimensionen gilt aufgrund der Klassifikation<sup>2</sup> der unitären Strahldarstellungen der  $SU(2, 2)$  in [10], dass der Twist  $2\kappa$  eine nicht-negative Größe ist. Zudem sind die einzigen Felder vom Twist  $2\kappa = 0$  durch skalare Vielfache des Einheitsoperators gegeben.

## 1.4 Wightman-Distributionen

Wir betrachten in diesem Abschnitt das durch die Wightman-Axiome bestimmte Verhalten der Wightman-Distributionen  $\mathcal{W}_{l_1 \dots l_N}$ , die wir auch als  $N$ -Punktfunktionen oder Korrelationsfunktionen bezeichnen werden und die durch

$$\mathcal{W}_{l_1 \dots l_N}(x_1, \dots, x_N) := \langle \Omega, \Phi^{(l_1)}(x_1) \dots \Phi^{(l_N)}(x_N) \Omega \rangle =: \langle \Phi^{(l_1)}(x_1) \dots \Phi^{(l_N)}(x_N) \rangle$$

definiert sind. Aufgrund des Schwartzschen Kerntheorems (siehe [7]) können die Komponenten von  $N$ -Punktfunktionen als Distributionen auf  $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{1, n-1})^N, \mathbb{C})$  aufgefasst werden. Das Transformationsverhalten der  $N$ -Punktfunktionen unter konformen Transformationen ist gegeben durch die Kovarianzeigenschaft (1.11) der in ihnen enthaltenen Felder. Aufgrund der Invarianz des Vakuums unter  $\mathcal{U}$  gilt mit den zu den Feldern  $\Phi^{(l)}$  gehörenden Transformationsabbildungen  $\omega^{(l)}$  formal

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{(l_1)}(x_1) \dots \Phi^{(l_N)}(x_N) \rangle &= \langle U(c) \Phi^{(l_1)}(x_1) \dots \Phi^{(l_N)}(x_N) U(c)^{-1} \rangle \\ &= \left\langle \left( U(c) \Phi^{(l_1)}(x_1) U(c)^{-1} \right) \dots \left( U(c) \Phi^{(l_N)}(x_N) U(c)^{-1} \right) \right\rangle \\ &= \left( \omega^{(l_1)}(c, x_1) \otimes \dots \otimes \omega^{(l_N)}(c, x_N) \right) \langle \Phi^{(l_1)}(c(x_1)) \dots \Phi^{(l_N)}(c(x_N)) \rangle \quad . \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft der machen wir zur Definition global konformer Invarianz (vergleiche [16]).

**Definition 1.4.1** (Global konforme Invarianz ([16])). *Es sei  $c$  eine konforme Transformation und  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^{1, n-1}$  Punkte derart, dass  $c(x_1), \dots, c(x_N) \in \mathbb{R}^{1, n-1}$  gilt. Wir bezeichnen eine Wightman-Distribution  $\mathcal{W}_{l_1 \dots l_N}$  als global konform-invariant, falls*

$$\mathcal{W}_{l_1 \dots l_N}(x_1, \dots, x_N) = \left( \omega^{(l_1)}(c, x_1) \otimes \dots \otimes \omega^{(l_N)}(c, x_N) \right) \mathcal{W}_{l_1 \dots l_N}(c(x_1), \dots, c(x_N)) \quad . \quad (1.17)$$

für jede konforme Transformation an entsprechenden Punkten gilt. Eine Wightman-Theorie bezeichnen wir als global konform-invariant, falls all ihre Wightman-Distributionen global konform-invariant sind.

Der letzte Teil der Definition motiviert sich durch das Rekonstruktionstheorem, welches besagt, dass eine Wightman-Theorie bis auf unitäre Äquivalenz aus ihren Wightman-Distributionen rekonstruiert werden kann (siehe [24]). Wir geben weitere Eigenschaften der Wightman-Distributionen an, die direkte Folgerungen aus den Wightman-Axiomen sind.

<sup>2</sup>Die von uns eingeführten Felder der Skalendimension  $\Delta$  und des Spins  $L$  besitzen in der Klassifikation von [10] das konforme Gewicht  $(\Delta, \frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ .

- **Lokalität:** Die Lokalität der Felder (1.10) impliziert für raumartig getrennte Punkte  $x_i, x_{i+1}$  eine Lokalitätsbedingung der Wightman-Distributionen

$$\mathcal{W}_{l_1..l_i l_{i+1}..l_N}(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) = \mathcal{W}_{l_1..l_{i+1} l_i..l_N}(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_N) \quad .$$

- **Spektralbedingung:** Aufgrund der Translationsinvarianz der Wightman-Distributionen  $\mathcal{W}_{l_1..l_N}$  gibt es eine reduzierte Wightman-Distribution  $W_{l_1..l_N}$ , deren Komponenten Distributionen bezüglich der Differenzvektoren  $x_{ij} := x_i - x_j$  ( $1 \leq i < j \leq N$ ) auf  $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{1,n-1})^{(N-1)}, \mathbb{C})$  sind. Beide Distributionen sind durch die Bedingung  $\mathcal{W}_{l_1..l_N}(x_1, \dots, x_N) = W_{l_1..l_N}(x_{12}, \dots, x_{N-1N})$  für alle  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  verknüpft. Die Fouriertransformierte  $\hat{W}_{l_1..l_N}$  von  $W_{l_1..l_N}$ , die durch

$$\hat{W}_{l_1..l_N}(q_1, \dots, q_{N-1}) := \int_{(\mathbb{R}^{1,n-1})^{(N-1)}} W_{l_1..l_N}(y_1, \dots, y_N) \exp(i \sum_{k=1}^N q_k \cdot y_k) dy_1 \dots dy_N$$

definiert ist, hat aufgrund der Spektraleigenschaft des Impulsoperators (1.7) die Trägereigenschaft  $\text{supp}(W) \subset (\bar{V}_+)^{(N-1)}$ . Die Distribution  $W$  ist Randwert einer in der negativen Röhre  $T_-^{N-1} = \{(z_1, \dots, z_N) | z_i \in \mathbb{C}^{1,n-1}, \text{Im}(z_i) \in V_-\}$  analytischen Funktion.

- **Wightman-Positivität:** Aus der Positivität der Norm von endlichen Linearkombinationen von Vektoren, die durch Wirkung von endlichen Produkten von Operatoren  $\Phi(f)$  auf den Vakuumzustand  $\Omega$  entstehen, folgt, dass für alle endlichen Folgen von Testfunktionen  $f_p$

$$\sum_{p,q} \int_{(\mathbb{R}^{1,n-1})^{(p+q)}} \bar{f}_p(x_1, \dots, x_p) \mathcal{W}_{l'_p..l'_1 l_1..l_q}^{p,q}(x_p, \dots, x_1, y_1, \dots, y_q) f_q(y_1, \dots, y_q) dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q \geq 0,$$

mit  $\mathcal{W}_{l'_p..l'_1 l_1..l_q}^{p,q}(x_p, \dots, x_1, y_1, \dots, y_q) := \langle \Phi^{(l'_p)*}(x_p) \dots \Phi^{(l'_1)*}(x_1) \Phi^{(l_1)}(x_1) \dots \Phi^{(l_q)}(x_q) \rangle$  gilt.

## 1.5 Konforme Lie-Algebra

Die konforme Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  korrespondiert zur konformen Lie-Algebra  $\text{conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ , die durch die Generatoren der unitären Darstellung  $\mathcal{U}$  der konformen Gruppe auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  und deren Kommutatoren gegeben ist. Die Generatoren werden mit  $\mathcal{P}^\mu$  für die Translationen,  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$  für die Lorentz-Transformationen,  $\mathcal{D}$  für die Dilatationen und  $\mathcal{K}^\mu$  für die speziellen konformen Transformationen bezeichnet und ergeben sich durch Differentiation von  $\mathcal{U}$  nach den Parametern der konformen Gruppe an der Stelle der Gruppenidentität  $c = \text{id}$ . Entsprechend Satz 1.2.2 für die konforme Gruppe, korrespondiert die konforme Lie-Algebra zu  $\text{so}(p+1, q+1)$ , der Lie-Algebra von  $\text{SO}(p+1, q+1)$ . Wir schreiben  $\eta$  für den metrischen Tensor von  $\mathbb{R}^{p,q}$  und  $\bar{\eta}$  für den metrischen Tensor von  $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$ . Es seien  $\mathcal{L}_{AB}$  mit  $A, B \in \{-1, \dots, n\}$  die Erzeuger von  $\text{so}(p+1, q+1)$ , deren Kommutatorrelationen durch

$$[\mathcal{L}_{AB}, \mathcal{L}_{CD}] = i(\bar{\eta}_{AD} \mathcal{L}_{BC} + \bar{\eta}_{BC} \mathcal{L}_{AD} - \bar{\eta}_{AC} \mathcal{L}_{BD} - \bar{\eta}_{BD} \mathcal{L}_{AC}) \quad (1.18)$$

gegeben sind. Die Generatoren von  $\text{conf}(p, q)$  hängen mit den Generatoren von  $\text{so}(p+1, q+1)$  zusammen über:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu\nu} &= \mathcal{J}_{\mu\nu} & \mathcal{L}_{-1\nu} &= \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\nu + \mathcal{K}_\nu) \\ \mathcal{L}_{n\nu} &= \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\nu - \mathcal{K}_\nu) & \mathcal{L}_{-1n} &= \mathcal{D} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dabei gilt  $\mu, \nu \in \{0, \dots, n-1\}$ . Ein etwas intuitiveres Bild dazu liefert die folgende Schreibweise:

$$\mathcal{L}_{AB} = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\nu + \mathcal{K}_\nu) & \mathcal{D} \\ \hline & \mathcal{J}_{\mu\nu} & \\ \hline & \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\nu - \mathcal{K}_\nu) & 0 \end{array} \right)$$

Die Einträge der Matrix  $\mathcal{L}_{AB}$  sind antisymmetrisch zu ergänzen. Entsprechend (1.18) und (1.19) ist die konforme Lie-Algebra durch die Kommutatoren

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] &= 0 \\ [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] &= i (\eta_{\mu\rho}\mathcal{P}_\sigma - \eta_{\mu\sigma}\mathcal{P}_\rho) \\ [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{K}_\nu] &= i 2 \cdot (\eta_{\mu\nu}\mathcal{D} - \mathcal{J}_{\mu\nu}) \\ [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{D}] &= i \mathcal{P}_\mu \\ [\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] &= i (\eta_{\nu\rho}\mathcal{J}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\mathcal{J}_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\mathcal{J}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\mathcal{J}_{\mu\rho}) \\ [\mathcal{J}_{\rho\sigma}, \mathcal{K}_\nu] &= i (\eta_{\sigma\nu}\mathcal{K}_\rho - \eta_{\rho\nu}\mathcal{K}_\sigma) \\ [\mathcal{J}_{\rho\sigma}, \mathcal{D}] &= 0 \\ [\mathcal{K}_\mu, \mathcal{K}_\nu] &= 0 \\ [\mathcal{K}_\mu, \mathcal{D}] &= -i \mathcal{K}_\mu \end{aligned} \tag{1.20}$$

bestimmt. Mittels (1.18) können wir unmittelbar ein quadratisches Casimirelement von  $\text{conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  angeben, da  $\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{AB}\mathcal{L}^{AB}$  ein solches für  $\text{so}(p+1, q+1)$  darstellt.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\mathcal{L}_{AB}\mathcal{L}^{AB} \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\mu\nu}\mathcal{L}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{4\nu}\mathcal{L}^{4\nu} + \mathcal{L}_{\mu 4}\mathcal{L}^{\mu 4} + \mathcal{L}_{-1\nu}\mathcal{L}^{-1\nu} + \mathcal{L}_{\mu-1}\mathcal{L}^{\mu-1} + \mathcal{L}_{4-1}\mathcal{L}^{4-1} + \mathcal{L}_{-14}\mathcal{L}^{-14}) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mu\nu}\mathcal{L}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{4\nu}\mathcal{L}^{4\nu} + \mathcal{L}_{-1\nu}\mathcal{L}^{-1\nu} + \mathcal{L}_{-14}\mathcal{L}^{-14} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\nu - \mathcal{K}_\nu)\frac{1}{2}(\mathcal{K}^\nu - \mathcal{P}^\nu) + \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\nu + \mathcal{K}_\nu)\frac{1}{2}(\mathcal{K}^\nu + \mathcal{P}^\nu) - \mathcal{D}^2 \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}^\nu - \mathcal{P}_\nu\mathcal{K}^\nu - \mathcal{K}_\nu\mathcal{P}^\nu + \mathcal{K}_\nu\mathcal{K}^\nu) + \frac{1}{4}(\mathcal{P}_\nu\mathcal{P}^\nu + \mathcal{P}_\nu\mathcal{K}^\nu + \mathcal{K}_\nu\mathcal{P}^\nu + \mathcal{K}_\nu\mathcal{K}^\nu) - \mathcal{D}^2 \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\nu\mathcal{K}^\nu + \mathcal{K}_\nu\mathcal{P}^\nu) - \mathcal{D}^2 \end{aligned}$$

Somit haben wir das Casimirelement

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{AB}\mathcal{L}^{AB} = \frac{1}{2}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\mu\mathcal{K}^\mu + \mathcal{K}_\mu\mathcal{P}^\mu) - \mathcal{D}^2 \tag{1.21}$$

gefunden. Weiterhin geben wir die Wirkung der konformen Generatoren auf die Felder einer Wightman-Theorie an. Diese wird beschrieben durch die Kommutatoren der Generatoren mit den Feldern und ergeben sich aus der Wirkung der unitären Darstellung  $\mathcal{U}$  auf Felder  $\Phi$  durch Differentiation nach den Parametern der konformen Gruppe an der Stelle des neutralen Elements  $c = \text{id}$  der Gruppe. Nehmen wir ein Feld  $\Phi$  der Skalendimension  $\Delta$  und des Spins  $L$  an so ergibt sich etwa für die Dilatationen

$$i[D, \Phi(x)] = \frac{d}{d\lambda} U(\lambda)\Phi(x)U(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda} (\lambda^\Delta \Phi(\lambda x)) \Big|_{\lambda=1} = (x \cdot \partial + \Delta) \Phi(x) \tag{1.22}$$

Für die gesamte konforme Gruppe erhält man mit  $L_{\sigma\rho\mu\nu} := \eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu} - \eta_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu}$  die Wirkungen

$$\begin{aligned}
i[\mathcal{P}_\mu, \Phi_{\rho_1 \dots \rho_L}(x)] &= \partial_\mu \Phi_{\rho_1 \dots \rho_L}(x) \\
i[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \Phi_{\rho_1 \dots \rho_L}(x)] &= (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Phi_{\rho_1 \dots \rho_L}(x) + \sum_{k=1}^L L_{\rho_k \mu \nu}^{\sigma_k} \Phi_{\rho_1 \dots \sigma_k \dots \rho_L}(x) \\
i[\mathcal{K}_\mu, \Phi_{\rho_1 \dots \rho_L}(x)] &= (2x_\mu(x \cdot \partial) - x^2 \partial_\mu + 2\Delta x_\mu) \Phi_{\rho_1 \dots \rho_L}(x) - 2 \sum_{k=1}^L x^\nu L_{\rho_k \mu \nu}^{\sigma_k} \Phi_{\rho_1 \dots \sigma_k \dots \rho_L}(x) \\
i[\mathcal{D}, \Phi_{\rho_1 \dots \rho_L}(x)] &= ((x \cdot \partial) + \Delta) \Phi_{\rho_1 \dots \rho_L}(x) \quad .
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Vektoren der Form  $|\Phi(x)\rangle$  sind Eigenvektoren von  $\mathcal{C}$  zum Eigenwert  $\lambda_{\kappa L}$ , wobei  $2\kappa = \Delta - L$  der Twist von  $\Phi$  ist.

$$\mathcal{C}|\Phi(x)\rangle = \underbrace{(\Delta(\Delta - n) + L(L + n - 2))}_{=:\lambda_{\kappa L}} |\Phi(x)\rangle \tag{1.24}$$

Diese Identität ergibt sich unter Verwendung von (1.23) aus (1.21).

## 1.6 Konformer Casimiroperator

Wir untersuchen die Wirkung des Casimirelements  $\mathcal{C}$  auf einen Vektor der Form  $|\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle$ , wobei  $\phi_i$  für  $i \in \{1, \dots, N\}$  konforme Skalarfelder der Skalendimensionen  $\Delta_i$  seien. Ziel ist es das Casimirelement  $\mathcal{C}$  durch Verwendung der Kommutatorrelationen (1.23) als Differentialoperator  $\mathcal{C}_{1, \dots, N}$  bezüglich der Variablen  $x_i$  auszudrücken. Wir beginnen mit der schematischen Darstellung der Transformation von  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{C}_{1, \dots, N}$ .

1. Wir vertauschen das Casimirelement mit dem Feld  $\phi_1$  und erhalten einen Term, der den Kommutator von  $\mathcal{C}$  mit  $\phi_1$  enthält, sowie einen weiteren Term, der den Casimiroperator  $\mathcal{C}_{2, \dots, N}$  enthält.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle &= |([\mathcal{C}, \phi_1(x_1)] + \phi_1(x_1)\mathcal{C})\phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle \\
&= |[\mathcal{C}, \phi_1(x_1)]\phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle + |\phi_1(x_1)\mathcal{C}\phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle \\
&= |[\mathcal{C}, \phi_1(x_1)]\phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle + \mathcal{C}_{2, \dots, N}|\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle
\end{aligned} \tag{1.25}$$

2. Wir werden im Folgenden nur den ersten Summanden auf der rechten Seite der Gleichung betrachten. Aufgrund der Bilinearität des Kommutators zerfällt die Berechnung von  $[\mathcal{C}, \phi_1(x_1)]$  in die Berechnung der Kommutatoren

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{D}^2, \phi_1(x_1)] \\
&[\mathcal{P}_\mu \mathcal{K}^\mu, \phi_1(x_1)] \\
&[\mathcal{K}_\mu \mathcal{P}^\mu, \phi_1(x_1)] \\
&[\mathcal{J}_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}, \phi_1(x_1)] \quad .
\end{aligned}$$

Diese lassen sich mittels der Leibnizregel  $[\mathcal{G} \mathcal{H}, \phi_1(x_1)] = \mathcal{G}[\mathcal{H}, \phi_1(x_1)] + [\mathcal{G}, \phi_1(x_1)] \mathcal{H}$  vereinfachen, wobei  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  Generatoren  $\mathcal{D}, \mathcal{P}_\mu, \mathcal{K}_\mu$  oder  $\mathcal{J}_{\mu\nu}$  repräsentieren, für die nach (1.23)

$[\mathcal{G}, \phi_i(x_i)] = \mathcal{G}_i \phi_i(x_i)$  und  $[\mathcal{H}, \phi_i(x_i)] = \mathcal{H}_i \phi_i(x_i)$  mit Differentialoperatoren  $\mathcal{G}_i$  bzw.  $\mathcal{H}_i$  bezüglich der Variablen  $x_i$  gilt<sup>3</sup>. Die Differentialoperatoren vertauschen zudem mit den Generatoren  $\mathcal{D}, \mathcal{P}_\mu, \mathcal{K}_\mu$  und  $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ , da sie Differentialoperatoren der Variablen  $x_i$  darstellen, von welcher das Feld  $\phi_i(x_i)$  abhängt, und keine Operatoren auf dem Hilbert-Raum der Zustände selbst sind, wie dies etwa auf die Generatoren zutrifft.

$$\begin{aligned}
& |[\mathcal{G} \mathcal{H}, \phi_1(x_1)] \phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle \\
&= |\mathcal{G} [\mathcal{H}, \phi_1(x_1)] \phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle + |[\mathcal{G}, \phi_1(x_1)] \mathcal{H} \phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle \\
&= \mathcal{H}_1 |\mathcal{G} \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle + \mathcal{G}_1 |\phi_1(x_1) \mathcal{H} \phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle \\
&= \left( \mathcal{H}_1 \sum_{k=1}^N \mathcal{G}_k \right) |\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle + \left( \mathcal{G}_1 \sum_{k=2}^N \mathcal{H}_k \right) |\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle \\
&= \left( \mathcal{H}_1 \sum_{k=1}^N \mathcal{G}_k + \mathcal{G}_1 \sum_{k=2}^N \mathcal{H}_k \right) |\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass für jeden Generator  $\mathcal{G}$

$$|\phi_1(x_1) \dots \phi_{l-1}(x_{l-1}) \mathcal{G} \phi_l(x_l) \dots \phi_N(x_N)\rangle = \left( \sum_{k=l}^N \mathcal{G}_k \right) |\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle$$

gilt. Diese Relation erhält man durch sukzessives Kommutieren des Generators  $\mathcal{G}$  nach rechts durch die Felder  $\phi_i$ , bis  $\mathcal{G}$  auf das Vakuum wirkt und dieses annihiliert.

Wir kommen nun zunächst zur Ausführung des zweiten Schritts des Schemas. Dazu betrachten wir einzeln die in der Berechnung von  $[\mathcal{C}, \phi_1(x_1)]$  vorkommenden Paarungen von  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$ . Wir benutzen die folgenden Notationen. Mit griechischen Buchstaben  $\mu$  und  $\nu$  werden die Komponenten  $x_{k\mu}, x_k^\mu$  der Vektoren  $x_k \in \mathbb{R}^{p,q}$  bezeichnet. Mit  $x_k^2$  sei jedoch stets das Quadrat des Vektors  $x_k$  und nicht seine zweite Raumkomponente bezeichnet. Analog dazu wählen wir die Bezeichnungen für den Gradienten  $\partial_k$  bezüglich der Variablen  $x_k$ . Schließlich sei  $(x_k \otimes x_k) \cdot (\partial_k \otimes \partial_k) := x_{k\mu} x_{k\nu} \partial_k^\mu \partial_k^\nu$  definiert.

1. Für  $\mathcal{G} = \mathcal{D}$  und  $\mathcal{H} = -\mathcal{D}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_1 \sum_{k=1}^N \mathcal{G}_k + \mathcal{G}_1 \sum_{k=2}^N \mathcal{H}_k = -\mathcal{D}_1^2 - 2 \mathcal{D}_1 \sum_{k=2}^N \mathcal{D}_k \\
&= ((x_1 \cdot \partial_1) + \Delta_1)^2 + 2 \sum_{k=2}^N ((x_1 \cdot \partial_1) + \Delta_1) ((x_k \cdot \partial_k) + \Delta_k) \\
&= (x_1 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_1) + (2\Delta_1 + 1)(x_1 \cdot \partial_1) + \Delta_1^2 \\
&\quad + 2 \sum_{k=2}^N (x_1 \otimes x_k) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_k) + \Delta_k (x_1 \cdot \partial_1) + \Delta_1 (x_k \cdot \partial_k) + \Delta_1 \Delta_k
\end{aligned}$$

<sup>3</sup>Die Operatoren  $\mathcal{G}_i$  und  $\mathcal{H}_i$  sind erster Ordnung. Gemäß des obigen Schemas zur Transformation des Casimiroperators in einen Differentialoperator können höchstens zwei der Operatoren nacheinander auf den Vektor  $|\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)\rangle$  wirken. Der entstehende Differentialoperator kann somit maximal von zweiter Ordnung in  $x_1$  und  $x_2$  sein.

2. Für  $\mathcal{G} = \mathcal{J}_{\mu\nu}$  und  $\mathcal{H} = \mathcal{J}^{\mu\nu}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 \sum_{k=1}^N \mathcal{G}_k + \mathcal{G}_1 \sum_{k=2}^N \mathcal{H}_k &= \mathcal{J}_{1\mu\nu} \mathcal{J}_1^{\mu\nu} + 2 \mathcal{J}_{1\mu\nu} \sum_{k=2}^N \mathcal{J}_k^{\mu\nu} \\
&= -(x_{1\mu} \partial_{1\nu} - x_{1\nu} \partial_{1\mu})(x_1^\mu \partial_1^\nu - x_1^\nu \partial_1^\mu) - 2 \sum_{k=2}^N (x_{1\mu} \partial_{1\nu} - x_{1\nu} \partial_{1\mu})(x_k^\mu \partial_k^\nu - x_k^\nu \partial_k^\mu) \\
&= -2 x_1^2 \partial_1^2 + 2(x_1 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_1) + 2(n-1)(x_1 \cdot \partial_1) \\
&\quad - 4 \sum_{k=2}^N (x_1 \cdot x_k)(\partial_1 \cdot \partial_k) - (x_k \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_k)
\end{aligned}$$

3. Für  $\mathcal{G} = \mathcal{P}_\mu$  und  $\mathcal{H} = \mathcal{K}^\mu$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 \sum_{k=1}^N \mathcal{G}_k + \mathcal{G}_1 \sum_{k=2}^N \mathcal{H}_k &= \mathcal{K}_{1\mu} \sum_{k=1}^N \mathcal{P}_k^\mu + \mathcal{P}_{1\mu} \sum_{k=2}^N \mathcal{K}_k^\mu \\
&= - \sum_{k=1}^N (2x_1^\mu (x_1 \cdot \partial_1) - x_1^2 \partial_1^\mu + 2\Delta_1 x_1^\mu) \partial_{k\mu} - \sum_{k=2}^N \partial_{1\mu} (2x_k^\mu (x_k \cdot \partial_k) - x_k^2 \partial_k^\mu + 2\Delta_k x_k^\mu) \\
&= -2(x_1 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_1) + x_1^2 \partial_1^2 - 2\Delta_1 (x_1 \cdot \partial_1) \\
&\quad - \sum_{k=2}^N 2(x_1 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_k) - x_1^2 (\partial_1 \cdot \partial_k) + 2\Delta_1 (x_1 \cdot \partial_k) \\
&\quad - \sum_{k=2}^N 2(x_k \otimes x_k) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_k) - x_k^2 (\partial_1 \cdot \partial_k) + 2\Delta_k (x_k \cdot \partial_1)
\end{aligned}$$

4. Für  $\mathcal{G} = \mathcal{K}_\mu$  und  $\mathcal{H} = \mathcal{P}^\mu$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 \sum_{k=1}^N \mathcal{G}_k + \mathcal{G}_1 \sum_{k=2}^N \mathcal{H}_k &= \mathcal{P}_{1\mu} \sum_{k=1}^N \mathcal{K}_k^\mu + \mathcal{K}_{1\mu} \sum_{k=2}^N \mathcal{P}_k^\mu \\
&= - \sum_{k=1}^N \partial_{1\mu} (2x_k^\mu (x_k \cdot \partial_k) - x_k^2 \partial_k^\mu + 2\Delta_k x_k^\mu) - \sum_{k=2}^N (2x_1^\mu (x_1 \cdot \partial_1) - x_1^2 \partial_1^\mu + 2\Delta_1 x_1^\mu) \partial_{k\mu} \\
&= -2(x_1 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_1) + x_1^2 \partial_1^2 - 2\Delta_1 (x_1 \cdot \partial_1) - 2(n-1)(x_1 \cdot \partial_1) - 2n\Delta_1 \\
&\quad - \sum_{k=2}^N 2(x_k \otimes x_k) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_k) - x_k^2 (\partial_1 \cdot \partial_k) + 2\Delta_k (x_k \cdot \partial_1) \\
&\quad - \sum_{k=2}^N 2(x_1 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_k) - x_1^2 (\partial_1 \cdot \partial_k) + 2\Delta_1 (x_1 \cdot \partial_k)
\end{aligned}$$

Wir berechnen die beiden Spezialfälle  $N = 1$  und  $N = 2$ . Für  $N = 1$  wurde bereits im vorigen Abschnitt die Formel (1.24) gefunden. Es gilt also  $\mathcal{C}_1 = \Delta_1(\Delta_1 - n)$ . Dies ist der einzige Fall, für den der Casimiroperator keinen echten Differentialoperator zweiter Ordnung darstellt. Für  $N = 2$  bedienen wir uns der Identität (1.25) sowie des Resultats im Fall  $N = 1$ . In Tabelle 1.1 sind die Ergebnisse des obigen Schemas aufgelistet. Die Operatoren der linken Spalte bilden eine Basis

der Lorentz-invarianten Operatoren zweiter Ordnung der Variablen  $x_1$  und  $x_2$ , aus denen sich der Casimiroperator zusammensetzen muss. Nebenstehend finden sich die Koeffizienten, mit denen diese Operatoren im Vektor  $|\mathcal{X}, \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle$  auftreten.

Operator	$\mathcal{X} = -\mathcal{D}^2$	$\mathcal{X} = \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\mu \mathcal{K}^\mu + \mathcal{K}_\mu \mathcal{P}^\mu)$	$\mathcal{X} = \frac{1}{2}(\mathcal{J}_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu})$
$x_1^2(\partial_1 \cdot \partial_1)$	0	1	-1
$x_2^2(\partial_1 \cdot \partial_1)$	0	0	0
$(x_1 \cdot x_2)(\partial_1 \cdot \partial_1)$	0	0	0
$(x_1 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_1)$	1	-2	1
$(x_2 \otimes x_2) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_1)$	0	0	0
$(x_1 \otimes x_2) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_1)$	0	0	0
$(x_2 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_1)$	0	0	0
$x_1^2(\partial_1 \cdot \partial_2)$	0	1	0
$x_2^2(\partial_1 \cdot \partial_2)$	0	1	0
$(x_1 \cdot x_2)(\partial_1 \cdot \partial_2)$	0	0	-2
$(x_1 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_2)$	0	-2	0
$(x_2 \otimes x_2) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_2)$	0	-2	0
$(x_1 \otimes x_2) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_2)$	2	0	0
$(x_2 \otimes x_1) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_2)$	0	0	2
$x_1 \cdot \partial_1$	$2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 1$	$-2\Delta_1 - n$	$n - 1$
$x_2 \cdot \partial_1$	0	$-2\Delta_2$	0
$x_1 \cdot \partial_2$	0	$-2\Delta_1$	0
$x_2 \cdot \partial_2$	$2\Delta_1$	0	0
1	$2\Delta_2\Delta_1 + \Delta_1^2$	$-n\Delta_1$	0

Tabelle 1.1: Tabelle zur Berechnung des Casimiroperators für  $N = 2$

Insgesamt erhalten wir aus Tabelle 1.1 für  $N = 2$  das Ergebnis<sup>4</sup>

$$|\mathcal{C}\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \mathcal{C}_{1,2}|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle \quad (1.26)$$

<sup>4</sup>Man beachte, dass alle Ableitungen zweiter Ordnung in (1.26) gemischte Ableitungen nach  $x_1$  und  $x_2$  sind.

mit dem Operator  $\mathcal{C}_{1,2}$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{1,2} &:= \mathcal{C}_{1,2}^{(2)} + \mathcal{C}_{1,2}^{(1)} + \mathcal{C}_{1,2}^{(0)} \\
\mathcal{C}_{1,2}^{(0)} &= (\Delta_1 + \Delta_2)^2 - n(\Delta_1 + \Delta_2) \\
\mathcal{C}_{1,2}^{(1)} &:= 2\Delta_2(x_{12} \cdot \partial_1) + 2\Delta_1(x_{21} \cdot \partial_2) \\
\mathcal{C}_{1,2}^{(2)} &:= x_{12}^2(\partial_1 \cdot \partial_2) - 2(x_{12} \otimes x_{12}) \cdot (\partial_1 \otimes \partial_2) \quad .
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Die Verallgemeinerung dieses Ergebnisses für beliebiges  $N \in \mathbb{N}$  stellt der folgende Satz dar.

**Satz 1.6.1.** *Es seien  $\phi_i(x_i)$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) Skalarfelder der Skalendimensionen  $\Delta_i$ . Die Wirkung des quadratischen Casimirelements  $\mathcal{C}$  auf einen Vektor der Form  $|\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle$  ist gegeben durch einen Differentialoperator  $\mathcal{C}_{1, \dots, N}$  zweiter Ordnung bezüglich der Variablen  $x_i$ .*

$$|\mathcal{C}\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle = \mathcal{C}_{1, \dots, N} |\phi_1(x_1) \dots \phi_N(x_N)\rangle \tag{1.28}$$

Dabei ist der Casimiroperator  $\mathcal{C}_{1, \dots, N}$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{1, \dots, N} &= \mathcal{C}_{1, \dots, N}^{(2)} + \mathcal{C}_{1, \dots, N}^{(1)} + \mathcal{C}_{1, \dots, N}^{(0)} \\
\mathcal{C}_{1, \dots, N}^{(0)} &= \left( \sum_{i=1}^N \Delta_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^N \Delta_i \\
\mathcal{C}_{1, \dots, N}^{(1)} &= \sum_{i,j=1}^N \Delta_i (x_{ji} \cdot \partial_j) \\
\mathcal{C}_{1, \dots, N}^{(2)} &= \sum_{i < j=1}^N x_{ij}^2 (\partial_i \cdot \partial_j) - 2(x_{ij} \otimes x_{ij}) \cdot (\partial_i \otimes \partial_j) \quad .
\end{aligned} \tag{1.29}$$

**Beweis.** Der Induktionsanfang ist mit den Ergebnissen für  $N = 1$  und  $N = 2$  bereits gezeigt. Für beliebiges  $N > 2$  führen wir die Berechnung von  $\mathcal{C}_{1, \dots, N}$  mittels (1.25) auf die Berechnung von  $\mathcal{C}_{2, \dots, N}$  und  $|\mathcal{C}, \phi_1(x_1)\rangle \phi_2(x_2) \dots \phi_N(x_N)\rangle$  zurück. Der erste Term besitzt nach Induktionsannahme die vom Satz besagte Form und den zweiten Term haben wir in obigem Schema allgemein als Differentialoperator ausgedrückt. Der Rest ergibt sich aus Zusammenfügen aller gegebenen Terme z.B. in einer Tabelle analog zu Tabelle 1.1.  $\square$

## 1.7 Allgemeine Resultate der konformen Quantenfeldtheorie

Wir wollen in diesem Abschnitt im Wesentlichen drei der wichtigsten Resultate der konformen Quantenfeldtheorie angeben. Diese sind aufeinander aufbauend das Huygenssche Prinzip, die Rationalität aller Wightman-Distributionen und die Universalität der Schranken der Polgrade von Wightman-Distributionen. Wir orientieren uns an der Darstellung der Ergebnisse in [11, 16, 17]. Zu Beginn benötigen wir einen Darstellungssatz spezieller temperierter Distributionen, den wir ohne Beweis angeben. Für den Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$  definieren wir  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_k$  sowie  $\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}}$ .



**Satz 1.7.1** ([21]). Sei  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$  mit  $\text{supp}(\Psi) \subset \{0\}$ . Dann gibt es ein  $K \in \mathbb{N}$  und  $c_\alpha \in \mathbb{C}$  mit

$$\Psi = \sum_{|\alpha| \leq K} c_\alpha \partial^\alpha \delta \quad .$$

**Satz 1.7.2** (Huygensches Prinzip ([16,17])).  $\Phi^{(1)}$  und  $\Phi^{(2)}$  seien zwei global konform-kovariante Felder und  $x_1$  und  $x_2$  seien zueinander nicht-isotrope Punkte. Dann kommutieren die beiden Felder. Insbesondere gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  gilt:

$$\left( (x_1 - x_2)^2 \right)^N \left[ \Phi^{(1)}(x_1), \Phi^{(2)}(x_2) \right] = 0 \quad (1.30)$$

**Beweis.** Es können nur die Fälle  $(x_1 - x_2)^2 < 0$  oder  $(x_1 - x_2)^2 > 0$  eintreten. Im ersten Fall sind die Felder bereits raumartig getrennt und ihre Komponenten kommutieren gemäß (1.10). Im zweiten Fall gibt es nach 1.2.6 eine konforme Transformation  $c$ , die das Paar lichtartig getrennter Punkte  $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^{1,n-1})^2$  auf ein Paar  $(c(x_1), c(x_2)) = (x'_1, x'_2) \in (\mathbb{R}^{1,n-1})^2$  raumartig getrennter Punkte abbildet. Für beliebige Zustände  $\Omega'_1 = \mathcal{U}(c)\Omega_1$  und  $\Omega'_2 = \mathcal{U}(c)\Omega_2$  im Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  der Felder gilt dann:

$$\begin{aligned} \left\langle \Omega_1, \left[ \Phi^{(1)}(x_1), \Phi^{(2)}(x_2) \right] \Omega_2 \right\rangle &= \left\langle \Omega'_1, U(c) \left[ \Phi^{(1)}(x_1), \Phi^{(2)}(x_2) \right] U(c)^{-1} \Omega'_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \Omega'_1, \left[ U(c)\Phi^{(1)}(x_1)U(c)^{-1}, U(c)\Phi^{(2)}(x_2)U(c)^{-1} \right] \Omega'_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \Omega'_1, \left[ \omega^{(1)}(c, x_1)\Phi^{(1)}(c(x_1)), \omega^{(2)}(c, x_2)\Phi^{(2)}(c(x_2)) \right] \Omega'_2 \right\rangle \\ &= \left( \omega^{(1)}(c, x_1) \otimes \omega^{(2)}(c, x_2) \right) \left\langle \Omega'_1, \left[ \Phi^{(1)}(x'_1), \Phi^{(2)}(x'_2) \right] \Omega'_2 \right\rangle = 0 \quad . \end{aligned}$$

Das beweist die erste Aussage von Satz 1.7.2. Die Existenz eines  $N \in \mathbb{N}$  wie in 1.30 ergibt sich zunächst nur für jede der komplexwertigen temperierten Distributionen  $\left\langle \Omega_1, \left[ \Phi^{(1)}(x_1), \Phi^{(2)}(x_2) \right] \Omega_2 \right\rangle$ . Die Unabhängigkeit der Potenz  $N$  von den Zuständen  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{D}$  weisen wir im Beweis von Satz 1.7.3 nach.  $\square$

Zur Beschreibung der  $N$ -Punktfunktionen in den folgenden Sätzen definieren wir zu Punkten  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  die Abstandskvadratrate  $\rho_{ij} := (x_i - x_j)^2 + i0(x_i^0 - x_j^0)$  mit  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ .

**Satz 1.7.3** (Rationalität der Wightman-Distributionen ([16])). Global konform-invariante Wightman-Distributionen  $\mathcal{W}_{l_1 \dots l_N}(x_1, \dots, x_N)$  lassen sich mit  $\mu_{kl}^N \in \mathbb{N}_0$  und Polynomen  $\mathcal{P}_{l_1 \dots l_N}$  darstellen als rationale Funktionen des Typs

$$\mathcal{W}_{l_1 \dots l_N}(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{P}_{l_1 \dots l_N}(x_1, \dots, x_N) \prod_{1 \leq k < l} (\rho_{kl})^{-\mu_{kl}^N} \quad . \quad (1.31)$$

Die Exponenten  $\mu_{kl}^N$  können unabhängig von  $N$  gewählt werden.

**Beweisskizze.**

1. Innerhalb der offenen Menge  $O \subset (\mathbb{R}^{1,n-1})^N$  der paarweise nicht-isotropen Punkte können aufgrund von Lemma 1.2.7 die Felder der Wightman-Distribution vertauscht werden, weshalb  $\mathcal{W}_{l_1 \dots l_N}(x_1, \dots, x_N)$  für  $(x_1, \dots, x_N) \in O$  invariant unter Vertauschungen der Indizes  $1, \dots, N$  ist.

2. Über die Wightman-Distribution  $\mathcal{W}_{l_1..l_N}$  und ihre Reduzierte  $W_{l_1..l_N}$  lassen sich mittels geeignet groß gewählter Zahlen  $\mu_{kl}^N \in \mathbb{N}$  temperierte Distributionen  $\mathcal{P}_{l_1..l_N}$  und  $P_{l_1..l_N}$  definieren, die auf ganz  $(\mathbb{R}^{1,n-1})^N$  translationsinvariant sind, wobei  $\mathcal{P}_{l_1..l_N}$  zusätzlich invariant unter Vertauschung der Indizes ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{l_1..l_N}(x_1, \dots, x_N) &:= \mathcal{W}_{l_1..l_N}(x_1, \dots, x_N) \prod_{1 \leq k \leq l} (\rho_{kl})^{\mu_{kl}^N} \\ &= W_{l_1..l_N}(x_{12}, \dots, x_{N-1 N}) \prod_{1 \leq k \leq l} (\rho_{kl})^{\mu_{kl}^N} =: P_{l_1..l_N}(x_{12}, \dots, x_{N-1 N}) \end{aligned}$$

Derartige Potenzen  $\mu_{kl}^N$  existieren, da die Wightman-Distribution temperiert und somit endlicher Ordnung ist. Insbesondere lässt sich die Fouriertransformierte von  $\hat{P}_{l_1..l_N}$  durch Anwendung eines Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten aus  $\hat{W}_{l_1..l_N}$  gewinnen. Damit folgt  $\text{supp}(\hat{P}_{l_1..l_N}) \subset \text{supp}(\hat{W}_{l_1..l_N}) \subset (\bar{V}_+)^{(N-1)}$ .

3. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft  $\mathcal{P}_{l_1..l_N}(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{P}_{l_N..l_1}(x_N, \dots, x_1)$  folgt unmittelbar  $P_{l_1..l_N}(x_{12}, \dots, x_{N-1 N}) = P_{l_N..l_1}(-x_{N-1 N}, \dots, -x_{12})$  und damit  $\text{supp}(\hat{P}) \subset (\bar{V}_-)^{(N-1)}$ . Insgesamt gilt deshalb  $\text{supp}(\hat{P}_{1..N}) \subset ((\bar{V}_+)^{(N-1)} \cap (\bar{V}_-)^{(N-1)}) = \{0\}$  und  $\hat{P}_{l_1..l_N}$  hat eine Darstellung gemäß Satz 1.7.1. Die Funktion  $P_{l_1..l_N}$  ist somit ein Polynom.
4. Aufgrund von (1.7) besitzt  $W_{l_1..l_N}$  eine analytische Fortsetzung in die Rückwärtsröhre  $T_-^{N-1}$ . Die Darstellung (1.31) ergibt sich dann durch Betrachtung der Randwerte der analytischen Fortsetzung.
5. Die Distribution  $\Psi_{N-1N}(x_{N-1}, x_N) := |\Phi^{(l_{N-1})}(x_N)\Phi^{(l_N)}(x_N)\rangle$ , deren Werte im physikalischen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  liegen, ist als temperierte Distribution von endlicher Ordnung und aufgrund des Reeh-Schlieder Theorems (siehe [24]) sowie des Huygensschen Prinzips symmetrisch für nicht-isotrope Punktpaare, d.h. es gilt  $\Psi_{N-1N}(x_{N-1}, x_N) = \Psi_{NN-1}(x_N, x_{N-1})$  für alle  $x_{N-1}, x_N \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  mit  $(x_{N-1} - x_N)^2 = 0$ . Es gibt deshalb ein  $\mu_{N-1N} \in \mathbb{N}$ , sodass für  $\Psi'_{N-1N}(x_{N-1}, x_N) := (\rho_{N-1N})^{\mu_{N-1N}} \langle \Upsilon, \Psi_{N-1N}(x_{N-1}, x_N) \rangle$  mit beliebigem  $\Upsilon \in \mathcal{H}$   $\Psi'_{N-1N}(x_{N-1}, x_N) = \Psi'_{NN-1}(x_N, x_{N-1})$  für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  gilt.
6. Die Universalität von  $\mu_{N-1N}$  ergibt sich, indem man  $\Upsilon := \langle \Phi^{(l_1)*}(x_1) \dots \Phi^{(l_{N-2})*}(x_{N-2}) |$  setzt. Aufgrund der Lokalität gilt das Resultat dann aber auch für jedes andere Punktpaar. □

Das folgende Resultat gilt für  $n = 4$  Raumzeitdimensionen. Wir verzichten an dieser Stelle auf den Beweis und geben es in einer für unsere Zwecke angepassten Form an, wobei  $[x]$  die Gauß-Klammer von  $x \in \mathbb{R}$  bezeichnet. Ein ausführlicher Beweis des Satzes findet sich in [16].

**Satz 1.7.4** (Universelle Polschranken ([16])). *Es seien  $\Phi$  und  $\Phi'$  Felder der Skalendimensionen  $\Delta$  bzw.  $\Delta'$  und der Spins  $L$  bzw.  $L'$ . Dann gilt für die Polordnung  $\mu_{kl}$  von  $\rho_{kl}$  innerhalb der Wightman-Distribution  $\{\dots\Phi(x_k)\dots\Phi'(x_l)\dots\}$  die Schranke*

$$\mu_{kl} \leq \left[ \frac{\Delta + \Delta' + L + L'}{2} - \frac{1 - \delta_{LL'} \delta_{\Delta\Delta'}}{2} \right] . \quad (1.32)$$

Insbesondere ergibt sich für skalare Felder  $\phi$  und  $\phi'$  der Skalendimensionen  $d$  und  $d'$

$$\mu_{kl} \leq \left[ \frac{d + d' + \delta_{dd'} - 1}{2} \right] . \quad (1.33)$$

Wightman-Distributionen skalarer Felder  $\phi^{(l)}$  der Skalendimension  $d_l$  sind sogar als Laurent-Polynome der Abstandsquadrate festgelegt. Die Invarianz einer solchen Wightman-Distribution  $\mathcal{W}_{l_1..l_N}$  unter Poincaré-Transformationen bedingt, dass  $\mathcal{W}_{l_1..l_N}$  nur von Abstandsquadraten abhängen kann. Wir fassen die Abstandsquadrate zum Vektor  $\rho := (\rho_{ij})_{1 \leq i < j \leq N}$  zusammen und definieren  $\mu := \sum_{i < j=1}^N \mu_{ij}$  sowie  $\rho^{-\mu} := \prod_{i < j=1}^N (\rho_{ij})^{-\mu_{ij}}$  für einen Multiindex  $\mu = (\mu_{ij})_{1 \leq i < j \leq N}$ . Die Wightman-Distribution  $\mathcal{W}_{l_1..l_N}$  besitzt dann die Darstellung

$$\mathcal{W}_{l_1..l_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_k \sum_{\mu, \nu = k} a_{\mu} \rho^{-\mu} \quad .$$

Beide Summationen sind aufgrund der Polschranken der Abstandsquadrate endlich. Die Invarianz der Wightman-Distribution unter Dilatationen und speziellen konformen Transformationen erfordert zusätzlich  $\sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ji} + \sum_{j=i+1}^N \mu_{ij} = d_{l_i}$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ , sodass  $\mathcal{W}_{l_1..l_N}$  mit  $d := \sum_{i=1}^N d_{l_i}$  die Darstellung

$$\mathcal{W}_{l_1..l_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\mu, \nu = \frac{1}{2}d} a_{\mu} \rho^{-\nu} = \left( \prod_{i < j=1}^N \left( \frac{1}{\rho_{ij}} \right)^{\mu_{ij}} \right) f_{l_1..l_N}(c_1, \dots, c_K) \quad (1.34)$$

besitzt, wobei  $\nu = (\nu_{ij})_{1 \leq i < j \leq N}$  ein Multiindex sei, der die geforderten Homogenitätseigenschaften besitzt, und  $f_{l_1..l_N}$  für  $N \geq 4$  ein Laurent-Polynom der  $K = \frac{N(N-3)}{2}$  unabhängigen konform-invarianten Variablen  $c_1, \dots, c_K$  ist, welche die Homogenitätseigenschaften der Wightman-Distribution nicht ändern. Wir geben eine mögliche Wahl dieser Variablen (siehe [15]) an, wobei wir aus Notationsgründen  $c_1, \dots, c_K$  durch drei Sätze von Variablen  $s_i, t_i$  und  $r_{ij}$  ausdrücken.

$$s_i := \frac{\rho_{12}\rho_{3i}}{\rho_{13}\rho_{2i}} \quad t_i := \frac{\rho_{1i}\rho_{23}}{\rho_{13}\rho_{2i}} \quad r_{ij} := \frac{\rho_{12}\rho_{23}\rho_{ij}}{\rho_{13}\rho_{2i}\rho_{2j}} \quad (4 \leq i < j \leq N) \quad (1.35)$$

Zwei- und Dreipunktfunktionen skalarer Felder sind durch global konforme Invarianz sogar bis auf eine Normierungskonstante eindeutig festgelegt. Für skalare Felder  $\phi_1, \phi_2$  und  $\phi_3$  der Skalendimensionen  $d_1, d_2$  bzw.  $d_3$  gilt (mit einer gewählten Normierung)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{12}(x_1, x_2) &= \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = \frac{1}{\rho_{12}^{d_1}} \delta_{d_1 d_2} \\ \mathcal{W}_{123}(x_1, x_2, x_3) &= \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) \rangle = \frac{1}{\rho_{12}^{\frac{d_1+d_2-d_3}{2}} \rho_{13}^{\frac{d_1+d_3-d_2}{2}} \rho_{23}^{\frac{d_2+d_3-d_1}{2}}} \quad . \end{aligned} \quad (1.36)$$

## 1.8 Operator-Produkt-Entwicklung

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Operator-Produkt-Entwicklung von zwei konformen skalaren Feldern  $\phi_1$  und  $\phi_2$  gleicher Skalendimensionen  $d$  [3, 11, 12, 15]. Diese führt auf die Definition von Tensorfeldern  $O^{(\kappa, L)}(x)$  des Twists  $2\kappa$  und des Spins  $L$ , durch die sich die Operator-Produkt-Entwicklung von  $\phi_1$  und  $\phi_2$  ausdrücken lässt und die Partialwellenentwicklungen motiviert. Desweiteren führen wir bilokale Felder  $V_{\kappa}$  ein, die sich aus allen Beiträgen der Operator-Produkt-Entwicklung zu vorgegebenem Twist  $\kappa$  und beliebigem Spin  $L$  zusammensetzen. Wir definieren dazu die Distribution

$$U(x_1, x_2) := (x_{12}^2)^d \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \quad .$$

Diese ist nach (1.33) zumindest im schwachen Sinn glatt in  $x_{12}$  und bildet ein Huygens-bilokales Feld, d.h. es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$((x_1 - x)^2(x_2 - x)^2)^N [U(x_1, x_2), \Phi(x)] = 0 \quad \forall x_1, x_2, x \in \mathbb{R}^{1, n-1}$$

gilt, wobei  $\Phi$  ein konformes bosonisches Feld sei. Wir führen eine Taylorentwicklung von  $U$  um den Punkt  $x_2$  durch und erhalten

$$U(x_1, x_2) = \sum_{K=0}^{\infty} X_{\mu_1 \dots \mu_K}^{(K)}(x_2) (x_{12})^{\mu_1} \dots (x_{12})^{\mu_K} \quad (1.37)$$

mit operatorwertigen Feldern  $X^{(K)}$  des Rangs und der Skalendimension  $K$ , die zwar symmetrische und lokale, jedoch nicht quasiprimäre Felder sind, d.h. sie transformieren sich nicht irreduzibel gemäß Abschnitt 1.3. Wir können aber zu einem System symmetrischer quasiprimärer Felder  $O^{(\kappa, L)}$  übergehen, indem wir zunächst von  $X^{(K)}$  Ableitungen von Tensoren niedrigeren Rangs  $X^{(K')}$  mit geeigneten Vorfaktoren  $\lambda_{K'} \in \mathbb{C}$  abziehen und so ein System von universellen Feldern  $O^{(\kappa, L)}$  definieren, d.h. Feldern, die unabhängig vom zugrundeliegenden Modell der Skalarfelder  $\phi_1$  und  $\phi_2$  sind.

$$O_{\mu_1 \dots \mu_K}^{(K)}(x) = X_{\mu_1 \dots \mu_K}^{(K)}(x) - \sum_{K'=0}^{K-1} \lambda_{K'} \left( \partial^{\otimes (K-K')} \otimes X^{(K')}(x) \right)_{[\mu_1 \dots \mu_K]}$$

Die eckigen Klammern geben die Symmetrisierung bezüglich der Lorentz-Indizes an. In einem zweiten Schritt gehen wir durch Zerlegung der Operatoren  $O^{(K)}$  in spurfreie symmetrische Operatoren zu einem System von Operatoren über, dessen Elemente  $O^{(\kappa, L)}$  symmetrisch, spurfrei und quasiprimär sind.  $\Delta = 2\kappa + L$  ist dabei die Skalendimension und  $L \geq 0$  der Spin des Feldes  $O^{(\kappa, L)}$ . Die Größe  $2\kappa$  ist somit der Twist von  $O^{(\kappa, L)}$ . Eine Besonderheit der Felder  $O^{(1, L)}$  vom Twist 2 ist, dass sie Erhaltungssätze erfüllen.

$$\partial^{\mu_1} O_{\mu_1 \dots \mu_L}^{(1, L)}(x) = 0 \quad (1.38)$$

Felder unterschiedlichen Twists oder Spins spannen durch ihre Wirkung auf den Vakuumzustand zueinander orthogonale Unterräume  $\mathcal{H}_{\kappa, L} \subset \mathcal{H}$  des physikalischen Hilbert-Raums auf, d.h. für  $(\kappa, L) \neq (\kappa', L')$  gilt für alle  $\mu_1, \dots, \mu_L, \nu_1, \dots, \nu_{L'} \in \{0, \dots, n-1\}$  und  $x, x' \in \mathbb{R}^{p, q}$  beliebig

$$\left\langle O_{\mu_1 \dots \mu_L}^{(\kappa, L)}(x) O_{\nu_1 \dots \nu_{L'}}^{(\kappa', L')}(x') \right\rangle = 0 \quad (1.39)$$

Das System der Felder  $O^{(\kappa, L)}$  induziert auf diese Weise ein System orthogonaler Projektionen  $\Pi_{\kappa L}$  von  $\mathcal{H}$  auf  $\mathcal{H}_{\kappa, L}$ , die ihrerseits Partialwellenentwicklungen von Korrelationsfunktionen definieren. Wir schreiben  $\Pi_{\kappa} := \sum_L \Pi_{\kappa L}$  für die Projektion auf  $\mathcal{H}_{\kappa} := \bigoplus_L \mathcal{H}_{\kappa, L} \subset \mathcal{H}$  und entsprechend  $\Pi_L := \sum_{\kappa} \Pi_{\kappa L}$  für die Projektion auf  $\mathcal{H}_L := \bigoplus_{\kappa} \mathcal{H}_{\kappa, L} \subset \mathcal{H}$ . Im Fall von  $n = 4$  Raumzeitdimensionen, auf den wir uns nun konzentrieren, gilt aufgrund der Mackschen Klassifizierung der Darstellungen der konformen Gruppe in [10], dass nur Vielfache des Einheitsfeldes  $\mathbf{1}$  den Twist 0 besitzen und für alle nicht konstanten Felder der betrachteten Operator-Produkt-Entwicklung  $\kappa \in \mathbb{N}$  gilt. Wir drücken in der Entwicklung (1.37) die Felder  $X^{(K)}$  über die Felder  $O^{(\kappa, L)}$  aus und fassen alle Terme gleichen Twists zusammen.

$$U(x_1, x_2) = C \mathbf{1} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \rho_{12}^{\kappa} V_{\kappa}(x_1, x_2) \quad (1.40)$$

Dabei bezeichnet  $B$  die Eulersche Betafunktion<sup>5</sup> und  $C \in \mathbb{C}$  eine Normierungskonstante. Die sogenannten Bifelder  $V_\kappa$  sind mit dem Pochhammer-Symbol  $(\lambda)_k := \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$  für  $\lambda, k \in \mathbb{R}$  sowie Konstanten  $C_{\kappa L} \in \mathbb{C}$  gegeben durch ([12])

$$V_\kappa(x_1, x_2) = \sum_{L=0}^{\infty} C_{\kappa L} \int_0^1 K_{\kappa L}(\alpha, \rho_{12} \square_2) O^{(\kappa, L)}(x_2 + \alpha x_{12}, x_{12}) d\alpha$$

$$K_{\kappa L}(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha)^{L+\kappa+n-1}}{B(\kappa+L, \kappa+L)} \frac{-\left(\frac{z}{4}\right)^n}{n!(2\kappa+L-d_0)_n} \quad .$$

**Satz 1.8.1** ([12,15]). *Das System der Differentialgleichungen (1.38) ist äquivalent zur Bedingung der Harmonizität des Bifelds  $V_1$  des Twists 2 in beiden Argumenten, d.h. es gilt*

$$\square_1 V_1(x_1, x_2) = 0 = \square_2 V_1(x_1, x_2) \quad .$$

### Bemerkungen:

- Wir benutzen die Biharmonizität des Feldes  $V_1$ , welches wir im Folgenden nur mit  $V$  bezeichnen, in den Kapiteln 3 und 4 zur Projektion auf den Unterraum  $\mathcal{H}_{\kappa=1}$ .
- Die Zerlegung (1.40) entspricht dem Fall einer Entwicklung des Produktes der Felder  $\phi_1$  und  $\phi_2$  von der Form

$$\phi_1(x_1)\phi_2(x_2) = (x_{12}^2)^{-d} \left( C \mathbf{1} + \sum_{\kappa=1}^{d-1} (x_{12}^2)^\kappa V_\kappa(x_1, x_2) \right) + : \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) : \quad .$$

Der Term  $: \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) :$  bezeichnet das normalgeordnete Produkt der Felder  $\phi_1$  und  $\phi_2$ .

Wir formulieren eine Annahme, die in die Untersuchungen der Abschnitte 3 und 4 eingeht.

**Arbeitshypothese:** Es seien  $V(x_1, x_2) := V_1(x_1, x_2)$  die biharmonischen Felder, die durch Operator-Produkt-Entwicklungen des zuvor betrachteten Typs definiert sind. Die durch Anwendung der biharmonischen Felder auf den Vakuumzustand erzeugten Vektoren  $|V(x_1, x_2)\rangle$  spannen einen dichten Unterraum von  $\mathcal{H}_{\kappa=1}$  auf.

<sup>5</sup>Zur Definition der Betafunktion sei der Leser auf Anhang A verwiesen.

## 2 Partialwellenentwicklungen von Vierpunktfunktionen

Partialwellenentwicklungen von Korrelationsfunktionen sind von besonderem Interesse innerhalb der konformen Quantenfeldtheorie, da sie Information über den physikalischen Inhalt einer Theorie liefern. Analog den Partialwellenentwicklungen der Quantenmechanik, bei denen Wellenfunktionen nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden, die als Eigenfunktionen von Operatoren der Drehimpulsalgebra durch die Quantenzahlen des Drehimpulses und des magnetischen Moments festgelegt werden, sind Partialwellenentwicklungen Entwicklungen von Korrelationsfunktionen nach Partialwellen, welche als Eigenfunktionen von Operatoren der konformen Lie-Algebra durch die Quantenzahlen Twist und Spin bestimmt sind. Die physikalische Information, die Partialwellenentwicklungen über ein bestimmtes Modell geben, ist in ihren Entwicklungskoeffizienten enthalten. So ist für vier Raumzeitdimensionen die Positivität aller Partialwellenkoeffizienten einer Vierpunktfunktion äquivalent zur Wightman-Positivität der Funktion (siehe [13]). Weiterhin folgt aus der strengen Positivität eines speziellen Partialwellenkoeffizienten die Existenz eines Energie-Impuls-Tensors innerhalb der untersuchten Theorie (siehe [13]). Wir führen in Abschnitt 2.2 die Partialwellen von Vierpunktfunktionen skalarer Felder gemäß [4] als Lösungen einer Differentialgleichung mit bestimmtem asymptotischen Verhalten ein und geben in 2.2.1 für zwei und vier Raumzeitdimensionen explizite Lösungen an. Anschließend betrachten wir ausschließlich den Fall vierdimensionaler Raumzeit und stellen in Abschnitt 2.3 einen in [13] entwickelten Algorithmus zur Durchführung spezieller Partialwellenentwicklungen vor. Innerhalb des Algorithmus können singuläre Terme auftreten; die daraus resultierende Partialwellenentwicklung muss jedoch stets regulär bleiben. Wir untersuchen dieses Problem in Abschnitt 2.5 und betrachten dazu in Abschnitt 2.4 einen bestimmten Schritt des Entwicklungsalgorithmus, der Aufschluss darüber liefert, welche singulären Terme auftreten können.

### 2.1 Transformation der Operatoren

Wir stellen ein Schema zur Transformation von Differentialoperatoren vor, welches im Folgenden häufig Anwendung findet. Betrachtet werden Operatoren der Algebra  $\mathcal{A}_N$ , die von Elementen

$$\rho_{ij}^q, \quad x_{ij} \cdot \partial_k, \quad \partial_k \cdot \partial_l$$

mit  $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, N\}$  und  $q \in \mathbb{Q}$  erzeugt wird. In einem ersten Schritt lassen wir Operatoren dieser Algebra auf eine Funktion  $g$  der  $\frac{N(N-1)}{2}$  unabhängigen Abstandskvadrat  $\rho_{ij}$  mit  $1 \leq i < j \leq N$  wirken, wie sie etwa durch jede konform kovariante Wightman-Distribution  $N$  skalarer Felder definiert wird. Ziel ist es, den Operator in einen Differentialoperator bezüglich der Abstandskvadrat zu transformieren. Dazu verwenden wir die Kettenregel in der Form

$$\frac{\partial}{\partial(x_k)_\mu} g = -2 \sum_{j=1}^{k-1} (x_{jk})^\mu \frac{\partial}{\partial \rho_{jk}} g + 2 \sum_{l=k+1}^N (x_{kl})^\mu \frac{\partial}{\partial \rho_{kl}} g$$

sowie die Identität

$$2(x_{ij} \cdot x_{kl}) = -x_{ik}^2 + x_{il}^2 - x_{jl}^2 + x_{jk}^2 \quad .$$

Man erkennt unmittelbar, dass sich durch Verwendung dieser beiden Regeln Operatoren der Form  $x_{ij} \cdot \partial_k$  und  $\partial_k \cdot \partial_j$  in Operatoren transformieren lassen, die vollständig durch die Abstandsquadrate  $\rho_{ij}$  sowie Ableitungen nach diesen beschrieben werden. Somit lässt sich jedes Element aus  $\mathcal{A}_N$  in der geforderten Weise darstellen. Wir definieren  $\frac{\partial}{\partial \rho_{kk}} g := 0$  sowie  $\frac{\partial}{\partial \rho_{kl}} := \frac{\partial}{\partial \rho_{lk}}$  für  $k > l$  und geben einige wichtige Beispiele an.

$$\begin{aligned} (x_{ij} \cdot \partial_k) g &= \sum_{l=1}^N (-\rho_{ik} + \rho_{il} - \rho_{jl} + \rho_{jk}) \frac{\partial g}{\partial \rho_{kl}} \\ (x_{ij} \cdot \partial_i) g &= \sum_{l=1}^N (\rho_{il} - \rho_{jl} + \rho_{ij}) \frac{\partial g}{\partial \rho_{il}} \\ (\partial_i \cdot \partial_j) g &= 2 \sum_{k,l=1}^N (\rho_{il} + \rho_{jk} - \rho_{ij} - \rho_{kl}) \frac{\partial^2 g}{\partial \rho_{ik} \partial \rho_{jl}} - 2n \frac{\partial g}{\partial \rho_{ij}} \\ ((x_{ij} \otimes x_{ji}) \cdot (\partial_i \otimes \partial_j)) g &= \sum_{k,l=1}^N (\rho_{ij} + \rho_{ik} - \rho_{jk}) (\rho_{ij} + \rho_{jl} - \rho_{il}) \frac{\partial^2 g}{\partial \rho_{ik} \partial \rho_{jl}} + 2\rho_{ij} \frac{\partial g}{\partial \rho_{ij}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

**Definition 2.1.1.** Eine Funktion  $g$  der  $\frac{N(N-1)}{2}$  Abstandsquadrate  $\rho_{ij}$  mit  $1 \leq i < j \leq N$  heiÙe homogen vom Grad  $p$  im Index 1, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$g(\lambda \rho_{12}, \dots, \lambda \rho_{1N}; \rho_{23}, \rho_{24}, \dots, \rho_{N-1N}) = \lambda^p g(\rho_{12}, \dots, \rho_{1N}; \rho_{23}, \rho_{24}, \dots, \rho_{N-1N}) \quad (2.2)$$

Analog wird Homogenität im Index 2, 3, .. usw. definiert.

Eine Funktion  $g$  wie in der Definition erfüllt  $\sum_{j=1}^N \rho_{1j} \frac{\partial g}{\partial \rho_{1j}} = p g$ . Der d'Alembert-Operator  $\square_1 = \partial_1 \cdot \partial_1$  ergibt sich für diese Funktionen zu<sup>1</sup>

$$\square_1 g = -4 \sum_{j < l=1}^N \rho_{jl} \frac{\partial^2 g}{\partial \rho_{1j} \partial \rho_{1l}} + 4(p+1) \sum_{j=1}^N \frac{\partial g}{\partial \rho_{1j}} \quad . \quad (2.3)$$

Wir betrachten nun Funktionen  $g$  der Abstandsquadrate, für die Funktionen  $h$  und  $f$  existieren, sodass  $h$  ein Produkt von Termen  $\rho_{ij}^q$  mit  $q \in \mathbb{Q}$  und  $f$  eine Funktion der  $K := \frac{N(N-3)}{2}$  konform-invarianten Variablen  $c_1, \dots, c_K$  ist und  $g = hf$  gilt. Die im vorangegangenen Transformationsverfahren erhaltenen Operatoren können unter erneuter Anwendung der Kettenregel auf die Funktion  $g$  in Differentialoperatoren transformiert werden, die auf  $f$  wirken und Ableitungen der konform-invarianten Variablen enthalten. Man nutzt dabei, dass sich alle Ableitungen von  $h$  sich über  $h$  selbst und Faktoren  $\rho_{ij}^q$  darstellen lassen, sowie die Kettenregel in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \rho_{ij}} f = \sum_{l=1}^M \frac{\partial c_l}{\partial \rho_{ij}} \frac{\partial f}{\partial c_l} = \frac{1}{\rho_{ij}} \sum_{l=1}^M \Theta_{c_l}(i, j) c_l \frac{\partial f}{\partial c_l} \quad .$$

<sup>1</sup>Indem man den Index 1 in (2.3) durch  $j$  ersetzt erhält man jeden anderen d'Alembert-Operator  $\square_j$  für homogene Funktionen vom Grad  $p$  im Index  $j$ .

Dabei ist das Gewicht  $\Theta_{c_l}(i, j)$  der konform-invarianten Variable  $c_l$  definiert durch

$$\Theta_{c_l}(i, j) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \rho_{ij} \text{ nicht in } c_l \text{ enthalten} \\ +1 & , \text{ falls } \rho_{ij} \text{ im Zähler von } c_l \text{ steht} \\ -1 & , \text{ falls } \rho_{ij} \text{ im Nenner von } c_l \text{ steht} \end{cases} .$$

Es sei angemerkt, dass die bei dieser Transformation entstehenden Operatoren zwar ausschließlich Ableitungen nach den Variablen  $c_l$  enthalten, die zugehörigen Koeffizientenfunktionen aber rationale Funktionen von  $\rho_{ij}^q$  sind, die nicht notwendig geschlossen in den Variablen  $c_l$  darstellbar sind.

## 2.2 Partialwellen von Vierpunktfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Form der Partialwellen von Vierpunktfunktionen skalarer Felder  $\phi_i$  der Skalendimension  $d_i$  gewinnen ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) und orientieren uns dabei an der Vorgehensweise aus [3, 4]. Zunächst lassen wir beliebige Raumzeitdimension  $n$  zu. Wir definieren für unsere Betrachtungen  $d_{ij} := d_i - d_j$  und schreiben die Vierpunktfunktion der Felder gemäß den Betrachtungen aus Abschnitt 1.7 in der Form

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle = \frac{1}{\rho_{12}^{\frac{d_1+d_2}{2}} \rho_{34}^{\frac{d_3+d_4}{2}}} \left( \frac{\rho_{24}}{\rho_{14}} \right)^{\frac{d_{12}}{2}} \left( \frac{\rho_{14}}{\rho_{13}} \right)^{\frac{d_{34}}{2}} f(s, t) . \quad (2.4)$$

Dabei ist  $f$  eine rationale Funktion der konform-invarianten Variablen  $s$  und  $t$ , die durch

$$s := \frac{\rho_{12}\rho_{34}}{\rho_{13}\rho_{24}}, \quad t := \frac{\rho_{14}\rho_{23}}{\rho_{13}\rho_{24}}$$

gegeben sind. Wir fügen nun das Casimirelement  $\mathcal{C}$  zwischen den Feldern  $\phi_2$  und  $\phi_3$  in die Vierpunktfunktion ein und erhalten, wie bereits in Abschnitt 1.6 beschrieben, über die Kommutatorrelationen der Felder mit den Erzeugern einen Differentialoperator  $\mathcal{C}_{3,4}$  der Variablen  $x_3$  und  $x_4$ , der auf die Vierpunktfunktion (2.4) wirkt. Dieser Operator lässt sich, indem man ihn an dem Vorfaktor

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{1}{\rho_{12}^{\frac{d_1+d_2}{2}} \rho_{34}^{\frac{d_3+d_4}{2}}} \left( \frac{\rho_{24}}{\rho_{14}} \right)^{\frac{d_{12}}{2}} \left( \frac{\rho_{14}}{\rho_{13}} \right)^{\frac{d_{34}}{2}}$$

„vorbeizieht“, in einen Operator der konform-invarianten Variablen  $\mathcal{C}_{s,t}$  überführen, der lediglich auf die Funktion  $f$  wirkt.

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\mathcal{C}\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle &= \mathcal{C}_{3,4} \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle \\ &= \mathcal{C}_{3,4} \left( \frac{1}{\rho_{12}^{\frac{d_1+d_2}{2}} \rho_{34}^{\frac{d_3+d_4}{2}}} \left( \frac{\rho_{24}}{\rho_{14}} \right)^{\frac{d_{12}}{2}} \left( \frac{\rho_{14}}{\rho_{13}} \right)^{\frac{d_{34}}{2}} f(s, t) \right) \\ &= \frac{1}{\rho_{12}^{\frac{d_1+d_2}{2}} \rho_{34}^{\frac{d_3+d_4}{2}}} \left( \frac{\rho_{24}}{\rho_{14}} \right)^{\frac{d_{12}}{2}} \left( \frac{\rho_{14}}{\rho_{13}} \right)^{\frac{d_{34}}{2}} ((\mathcal{C}_{3,4})_{s,t} f(s, t)) \end{aligned}$$



Wir erinnern an die Form des Casimiroperators  $\mathcal{C}_{3,4}$  aus Abschnitt 1.6.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{3,4} &= \mathcal{C}_{3,4}^{(2)} + \mathcal{C}_{3,4}^{(1)} + \mathcal{C}_{3,4}^{(0)} \\ \mathcal{C}_{3,4}^{(0)} &= (d_3 + d_4)^2 - n(d_3 + d_4) \\ \mathcal{C}_{3,4}^{(1)} &= 2d_4(x_{34} \cdot \partial_3) + 2d_3(x_{43} \cdot \partial_4) \\ \mathcal{C}_{3,4}^{(2)} &= x_{34}^2(\partial_3 \cdot \partial_4) - 2(x_{34} \otimes x_{34}) \cdot (\partial_3 \otimes \partial_4)\end{aligned}$$

Dieser transformiert sich gemäß Abschnitt 2.1 zum Operator  $(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}$  (vergleiche [4])

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t} &= \mathcal{C}_{s,t}^{(2)} + \mathcal{C}_{s,t}^{(1)} + \mathcal{C}_{s,t}^{(0)} \\ (\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}^{(0)} &:= \frac{1}{2}d_{12}d_{34} \\ (\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}^{(1)} &:= -ns\frac{\partial}{\partial s} + (d_{12} - d_{34}) \left( (1+s-t) \left( s\frac{\partial}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial t} \right) - (1-s-t)\frac{\partial}{\partial v} \right) \\ (\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}^{(2)} &:= ((t-1)^2 - s(t+1))t\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (1+t-s)s^2\frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2(1+s-t)st\frac{\partial^2}{\partial s\partial t} .\end{aligned}\tag{2.5}$$

**Satz 2.2.1** (Partialwellen von Vierpunktfunktionen ([4])). *Die Partialwellen  $\beta_{\kappa L}^{(d_{12}, d_{34})}$  von Vierpunktfunktionen sind die Eigenfunktionen von  $(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}$  zum Eigenwert*

$$\lambda_{\kappa L} = (2\kappa + L)(2\kappa + L - n) + L(L + n - 2) ,$$

die für  $s \rightarrow 0$  das asymptotische Verhalten  $\beta_{\kappa L}^{(d_{12}, d_{34})} \sim s^\kappa(1-t)^L$  besitzen. Die Partialwellenentwicklung der Vierpunktfunktion (2.4) ergibt sich durch die vollständige Zerlegung der Funktion  $f$  in die Partialwellen.

### 2.2.1 Transformation der Casimirgleichung in chirale Variablen

Um eine geschlossene Form für die Partialwellen angeben zu können, müssen wir  $(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}$  erneut in einen anderen Operator  $(\mathcal{C}_{3,4})_{u,v}$  der sogenannten chiralen Variablen  $u$  und  $v$  transformieren (vergleiche [3, 4]). Letztere sind implizit über die Gleichung

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u & v \\ (u-1) & (v-1) \end{pmatrix}$$

definiert. Um die Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial s}$  und  $\frac{\partial}{\partial t}$  in (2.5) zu ersetzen, benötigt man die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{u-v} \begin{pmatrix} u-1 & -u \\ 1-v & v \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{u-1}{u-v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1-v}{u-v}\frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-u}{u-v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{v}{u-v}\frac{\partial f}{\partial v} .$$

Die Eigenwertgleichung der Partialwellen transformiert sich insgesamt zu

$$2 \underbrace{\left( u \mathcal{H}_{(-\frac{1}{2}d_{12}, \frac{1}{2}d_{34}; 0; u)} + v \mathcal{H}_{(-\frac{1}{2}d_{12}, \frac{1}{2}d_{34}; 0; v)} + (n-2) \mathcal{R} \right)}_{=:(\mathcal{C}_{3,4})_{u,v}} \beta_{\kappa L}^{(d_{12}, d_{34})} = \lambda_{\kappa L} \beta_{\kappa L}^{(d_{12}, d_{34})} \quad (2.6)$$

Dabei haben wir den hypergeometrischen Differentialoperator  $\mathcal{H}_{(a,b;c;u)}$  und den Operator  $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(a,b;c;u)} &:= u(1-u) \frac{\partial^2}{\partial u^2} + (c - (a+b+1)u) \frac{\partial}{\partial u} - ab \\ \mathcal{R} &:= \frac{uv}{u-v} \left( (1-u) \frac{\partial}{\partial u} - (1-v) \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

definiert. Die Lösungen müssen, da sie Funktionen der Variablen  $s$  und  $t$  sind, nach Definition der chiralen Variablen symmetrisch in  $u$  und  $v$  sein. Weiterhin haben die Lösungen die Asymptotik<sup>2</sup>

$$\beta_{\kappa L}^{(d_{12}, d_{34})}(s, t) \underset{v \rightarrow 0, u \rightarrow 0}{\sim} u^{\kappa+L} v^{\kappa},$$

welche sich aus der von Satz 2.2.1 geforderten Asymptotik ergibt. Wir werden im Folgenden Lösungen der Casimirgleichung (2.6) für die Raumzeitdimensionen  $n = 2$  und  $n = 4$  angeben. Erstere werden wir dabei verwenden, um Letztere zu berechnen.

### 2.2.2 Lösungen im Fall zweidimensionaler Raumzeit

Für  $n = 2$  entfällt der Term, der den Operator  $\mathcal{R}$  enthält. Der Casimiroperator  $(\mathcal{C}_{3,4})_{u,v}$  ist in diesem Fall die Summe zweier hypergeometrischer Differentialoperatoren der Variablen  $u$  bzw.  $v$ . Beachtet man die für die hypergeometrische Funktion<sup>3</sup> gültige Identität

$$u \mathcal{H}_{a,b;c;u} [u^p F(p+a, p+b; 2p+c; u)] = p(p+c-1) u^p F(p+a, p+b; 2p+c; u) \quad (2.8)$$

so ergeben sich die Lösungen der Casimirgleichung mit den geforderten Symmetrieeigenschaften und dem notwendigen asymptotischen Verhalten nach [3] zu

$$\beta_{\kappa L}^{(d_{12}, d_{34})}(s, t) = G_{\kappa+L}^{(d_{12}, d_{34})}(u) G_{\kappa}^{(d_{12}, d_{34})}(v) + G_{\kappa+L}^{(d_{12}, d_{34})}(v) G_{\kappa}^{(d_{12}, d_{34})}(u) \quad (2.9)$$

mit den Funktionen

$$G_m^{(k,l)}(u) := u^m F\left(m - \frac{k}{2}, m + \frac{l}{2}; 2m; u\right) .$$

### 2.2.3 Lösungen im Fall vierdimensionaler Raumzeit

Für  $n = 4$  erhält man einen von  $\mathcal{R}$  abhängigen Operator. Wir können dennoch die Lösungen des Falls  $n = 4$  auf die Lösungen des Falls  $n = 2$  zurückführen. Wir definieren in Verallgemeinerung von  $(\mathcal{C}_{3,4})_{u,v}$  den Operator  $(\mathcal{C}_{3,4})_{(n,a,b;c;u,v)}$  durch

$$(\mathcal{C}_{3,4})_{(n,a,b;c;u,v)} := 2 \left[ u \mathcal{H}_{(a,b;c;u)} + v \mathcal{H}_{(a,b;c;v)} + (n-2) \mathcal{R} \right] .$$

<sup>2</sup>Man beachte hierbei, dass der Grenzwert  $v \rightarrow 0$  zuerst ausgeführt werden muss.

<sup>3</sup>Eine Definition sowie einige Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion sind in Anhang A aufgeführt.

In diesem Fall ist  $(\mathcal{C}_{3,4})_{(n, -\frac{1}{2}d_{12}, \frac{1}{2}d_{34}; 0; u, v)} = (\mathcal{C}_{3,4})_{u, v}$  der in chiralen Variablen ausgedrückte Casimiroperator bei vorgegebener Raumzeitdimension  $n$ . Es gilt die Operatoridentität

$$(\mathcal{C}_{3,4})_{(4, a, b, c; u, v)} \frac{1}{u-v} = \frac{1}{u-v} \left( (\mathcal{C}_{3,4})_{(2, a-1, b-1; c-2; u, v)} - (c-2) \right) \quad (2.10)$$

Der Operator auf der rechten Seite enthält keine Beiträge von  $\mathcal{R}$  und man kann erneut (2.8) anwenden, um Lösungen der Eigenwertgleichungen zu konstruieren. Mit

$$G_m^{(k, l)}(u) := u^m F \left( m - \frac{k}{2} - 1, m + \frac{l}{2} - 1; 2m - 2; u \right)$$

folgt im Fall von  $n = 4$  Raumzeitdimensionen

$$\beta_{\kappa L}^{(d_{12}, d_{34})}(s, t) = \frac{1}{u-v} \left( G_{\kappa+L+1}^{(d_{12}, d_{34})}(u) G_{\kappa}^{(d_{12}, d_{34})}(v) - G_{\kappa+L+1}^{(d_{12}, d_{34})}(v) G_{\kappa}^{(d_{12}, d_{34})}(u) \right) \quad (2.11)$$

Wir betrachten abschließend noch den Spezialfall  $\delta := d_{34} = -d_{12}$ , der etwa bei Untersuchung von Vierpunktfunktion der Form  $\langle A(x_1)B(x_2)B(x_3)A(x_4) \rangle$  auftritt. Mit der Funktionalgleichung der hypergeometrischen Funktion gilt

$$\begin{aligned} G_m^{(-\delta, \delta)}(u) &= u^m F \left( m + \frac{\delta}{2} - 1, m + \frac{\delta}{2} - 1; 2m - 2; u \right) \\ &= u^m \left( (1-u)^{-\delta} F \left( m - \frac{\delta}{2} - 1, m - \frac{\delta}{2} - 1; 2m - 2; u \right) \right) \\ &= u^{\frac{\delta}{2}+1} (1-u)^{-\delta} \left( u^{m-\frac{\delta}{2}-1} F \left( m - \frac{\delta}{2} - 1, m - \frac{\delta}{2} - 1; 2 \left( m - \frac{\delta}{2} - 1 \right) + \delta; u \right) \right) \\ &= \left( \frac{u}{(1-u)^2} \right)^{\frac{\delta}{2}} u \underbrace{\left( u^{m'} F \left( m', m'; 2m' + \delta; u \right) \right)}_{=: G_{m'}^{\delta}(u)} . \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir  $m' = m - 1 - \frac{\delta}{2}$  gesetzt. In (2.11) nimmt  $m$  die Werte  $m = \kappa + L + 1$  und  $m = \kappa$  an.  $m'$  nimmt entsprechend die Werte  $m' = \kappa + L - \frac{\delta}{2}$  und  $m' = \kappa - 1 - \frac{\delta}{2}$  an. Wir schreiben

$$\beta_{\kappa L}^{\delta}(s, t) := \frac{uv}{u-v} \left( G_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}}^{\delta}(u) G_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}}^{\delta}(v) - G_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}}^{\delta}(v) G_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}}^{\delta}(u) \right) \quad (2.12)$$

und erhalten mit dieser Definition die Beziehung

$$\beta_{\kappa L}^{(-\delta, \delta)}(s, t) = \left( \frac{s}{t^2} \right)^{\frac{\delta}{2}} \beta_{\kappa L}^{\delta}(s, t) .$$

Der Vorfaktor  $\left( \frac{s}{t^2} \right)^{\frac{\delta}{2}}$  auf der linken Seite der Gleichung kann durch Umdefinition von  $h$  absorbiert werden. Im Fall  $d := d_1 = d_4$  gilt

$$\tilde{h}(x_1, x_2, x_3, x_4) := h(x_1, x_2, x_3, x_4) \left( \frac{s}{t^2} \right)^{\frac{\delta}{2}} = \frac{1}{\rho_{12}^d \rho_{23}^{\delta} \rho_{34}^d} . \quad (2.13)$$

Der Vorfaktor  $\tilde{h}$  ist aufgrund seiner hohen Symmetrie besser geeignet zur Untersuchung von Vierpunktfunktionen des Typs  $\langle A(x_1)B(x_2)B(x_3)A(x_4) \rangle$  als der ursprüngliche Vorfaktor  $h$ .

## 2.3 Zur Partialwellenentwicklung spezieller Vierpunktfunktionen

Wir möchten in diesem Abschnitt ein Schema zur Durchführung einer Partialwellenentwicklung von Vierpunktfunktionen der Form  $\langle A(x_1)B(x_2)B(x_3)A(x_4) \rangle$  angeben, wobei wir  $A$  und  $B$  als skalare Felder der Skalendimensionen  $d_A$  und  $d_B$  annehmen. Der vorgestellte Algorithmus wurde in [13] entwickelt. Wir erinnern an die Definition der Funktionen  $G_m^l$

$$G_m^l(z) := z^m F(m, m; 2m + l; z)$$

sowie die Konventionen  $d := d_A$  und  $\delta := d_B - d_A$  entsprechend den Betrachtungen des vorigen Abschnitts, definieren  $\hat{z} := \frac{z}{1-z}$  und schreiben die Vierpunktfunktion in der Form

$$\langle A(x_1)B(x_2)B(x_3)A(x_4) \rangle := \frac{1}{\rho_{12}^d \rho_{23}^\delta \rho_{34}^d} f(s, t) \quad . \quad (2.14)$$

Nach [4] besitzen die Partialwellen die Darstellung (2.12). Es gilt für die Partialwellenentwicklung

$$\begin{aligned} \langle A(x_1)B(x_2)B(x_3)A(x_4) \rangle &= \sum_{\kappa, L} \langle A(x_1)B(x_2)\Pi_{\kappa L}B(x_3)A(x_4) \rangle \\ &= \frac{1}{\rho_{12}^d \rho_{23}^\delta \rho_{34}^d} \sum_{\kappa, L} B_{\kappa L} \beta_{\kappa L}^\delta(s, t) \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Größen  $B_{\kappa L} \in \mathbb{R}$  sind dabei die Partialwellenkoeffizienten, deren Positivität etwa nach [13] äquivalent zur Wightman-Positivität der entwickelten Vierpunktfunktion ist. Durch Vergleich von (2.14) mit (2.15) ergibt sich unter Verwendung von (2.12)

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \sum_{\kappa, L} B_{\kappa L} \beta_{\kappa L}^\delta(s, t) \\ \Leftrightarrow \frac{u-v}{uv} f(s, t) &= \sum_{\kappa, L} B_{\kappa L} \left( G_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}}^\delta(u) G_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}}^\delta(v) - (u \leftrightarrow v) \right) \end{aligned}$$

**Durchführung:** (vergleiche [13])

1. Wir schreiben  $\hat{u} = \frac{u}{1-u}$  und  $\hat{v} = \frac{v}{1-v}$  und zerlegen  $f(s, t)$  antisymmetrisch in  $u$  und  $v$ .

$$\frac{u-v}{uv} f(s, t) := \left( \sum_m a_m u^m + b_m \hat{u}^m \right) \left( \sum_n c_n v^n + d_n \hat{v}^n \right) - (u \leftrightarrow v) \quad (2.16)$$

2. Wir machen Gebrauch von Spezialfällen der Expansionsformeln

$$\begin{aligned} z^m &= \sum_{\mu=m}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-m}}{(\mu-m)!} \frac{((m)_{\mu-m})^2}{(\mu+m+\delta-1)_{\mu-m}} G_\mu^\delta(z) \\ \hat{z}^m &= \left( \frac{z}{1-z} \right)^m = \sum_{\mu=m}^{\infty} \frac{1}{(\mu-m)!} \frac{(m)_{\mu-m} (m+\delta)_{\mu-m}}{(\mu+m+\delta-1)_{\mu-m}} G_\mu^\delta(z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

aus Anhang A, die wir für  $z \in \{u, v\}$  auf jeden in (2.16) auftretenden Summanden anwenden.

3. Ausmultiplizieren und Umordnen der Terme führt zu:

$$\begin{aligned}
\frac{u-v}{uv} f(s, t) &= \sum_{\mu, \nu} X_{\mu\nu} G_{\mu}^{\delta}(u) G_{\nu}^{\delta}(v) - (u \leftrightarrow v) \\
&= \sum_{\mu > \nu} X_{\mu\nu} G_{\mu}^{\delta}(u) G_{\nu}^{\delta}(v) + \sum_{\nu > \mu} X_{\mu\nu} G_{\mu}^{\delta}(u) G_{\nu}^{\delta}(v) - (u \leftrightarrow v) \\
&= \sum_{\mu > \nu} X_{\mu\nu} G_{\mu}^{\delta}(u) G_{\nu}^{\delta}(v) + \sum_{\mu > \nu} X_{\nu\mu} G_{\mu}^{\delta}(v) G_{\nu}^{\delta}(u) - (u \leftrightarrow v) \\
&= \sum_{\mu > \nu} (X_{\mu\nu} - X_{\nu\mu}) \left( G_{\mu}^{\delta}(u) G_{\nu}^{\delta}(v) - (u \leftrightarrow v) \right)
\end{aligned}$$

4. Im letzten Schritt setzen wir  $\mu := \kappa + L - \frac{\delta}{2}$  sowie  $\nu := \kappa - 1 - \frac{\delta}{2}$  und erhalten mit  $B_{\kappa L} := X_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}, \kappa-1-\frac{\delta}{2}} - X_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}, \kappa+L-\frac{\delta}{2}}$  die Darstellung

$$\frac{u-v}{uv} f(s, t) = \sum_{\kappa, L} B_{\kappa L} \left( G_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}}^{\delta}(u) G_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}}^{\delta}(v) - (u \leftrightarrow v) \right) .$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle A(x_1)B(x_2)B(x_3)A(x_4) \rangle &= \frac{1}{\rho_{12}^d \rho_{23}^{\delta} \rho_{34}^d} f(s, t) \\
&= \frac{1}{\rho_{12}^d \rho_{23}^{\delta} \rho_{34}^d} \sum_{\kappa, L} B_{\kappa L} \frac{uv}{u-v} \left( G_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}}^{\delta}(u) G_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}}^{\delta}(v) - (u \leftrightarrow v) \right) \\
&= \frac{1}{\rho_{12}^d \rho_{23}^{\delta} \rho_{34}^d} \sum_{\kappa, L} B_{\kappa L} \beta_{\kappa L}^{\delta}(s, t) .
\end{aligned}$$

## 2.4 Zur Zerlegung in chirale Variablen

Wir geben einen Algorithmus zur Zerlegung von  $f(s, t)$  in chirale Variablen gemäß (2.16) an. Insbesondere interessieren uns mögliche untere Schranken der Potenzen von  $u$ ,  $v$ ,  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$ , da für negative Potenzen dieser Variablen die Expansionsformeln (2.17), die wir zur Partialwellenentwicklung von (2.14) benutzen, singuläre Terme enthalten können. Die Partialwellenentwicklung von (2.14) darf jedoch weder singuläre Partialwellen noch singuläre Partialwellenkoeffizienten enthalten. Diesem Problem widmen wir uns in Abschnitt 2.5.

### 2.4.1 Polschranken der konform-invarianten Variablen

Zur Berechnung der Partialwellenentwicklung der Vierpunktfunktion (2.14) ist es gemäß (2.16) notwendig und hinreichend, Terme der Form

$$\frac{u-v}{uv} (s^p t^q) \tag{2.18}$$

mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  vollständig durch Potenzen der Variablen  $u$  und  $v$  bzw.  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  auszudrücken<sup>4</sup>. Aufgrund der Rationalität der Wightman-Distributionen in den Variablen  $\rho_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) ist die Funktion  $f(s, t)$  ein Laurent-Polynom der konform-invarianten Variablen, d.h. die zulässigen Werte von  $p$  und  $q$  besitzen sowohl obere als auch untere Schranken. Für Skalarfelder gilt im Allgemeinen die Formel (1.33). Multiplikation einer in den Variablen  $\rho_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) rationalen Funktion mit der Variablen  $s$  hat die Wirkung:

1. Erhöhung des maximalen Polgrades in den Variablen  $\rho_{13}$  und  $\rho_{24}$  um jeweils 1
2. Verminderung des maximalen Polgrades in den Variablen  $\rho_{12}$  und  $\rho_{34}$  um jeweils 1

Analog ist die Wirkung bei Multiplikation mit  $t$  gegeben durch:

1. Erhöhung des maximalen Polgrades in den Variablen  $\rho_{13}$  und  $\rho_{24}$  um jeweils 1
2. Verminderung des maximalen des Polgrades in den Variablen  $\rho_{14}$  und  $\rho_{23}$  um jeweils 1

Aus diesen Wirkungen erhalten wir mit dem Vorfaktor  $\frac{1}{\rho_{12}^d \rho_{23}^\delta \rho_{34}^d}$  in (2.14) und der Ungleichung (1.33) Einschränkungen der Werte der Exponenten  $p$  und  $q$ . Diese sind in Tabelle 2.1 aufgelistet. In der mittleren Spalte finden sich die aus (1.33) resultierenden Schranken der links nebenstehenden Abstandskquadrate. In der rechten Spalte sind die daraus resultierenden Einschränkungen der Exponenten  $p$  und  $q$  aufgeführt.

Abstandskquadrat	Polschranke	Einschränkung für $p$ und $q$
$\rho_{12}$	$\mu_{12} \leq (d + [\frac{\delta-1}{2}])$	$p \geq -[\frac{\delta-1}{2}]$
$\rho_{13}$	$\mu_{13} \leq (d + [\frac{\delta-1}{2}])$	$p + q \leq (d + [\frac{\delta-1}{2}])$
$\rho_{14}$	$\mu_{14} \leq d_A = -d$	$q \geq -d$
$\rho_{23}$	$\mu_{23} \leq d_B = -(d + \delta)$	$q \geq -d$
$\rho_{24}$	$\mu_{24} \leq (d + [\frac{\delta-1}{2}])$	$p + q \leq (d + [\frac{\delta-1}{2}])$
$\rho_{34}$	$\mu_{34} \leq (d + [\frac{\delta-1}{2}])$	$p \geq -[\frac{\delta-1}{2}]$

Tabelle 2.1: Zur Einschränkung der Exponenten  $p$  und  $q$

<sup>4</sup>Eine derartige Zerlegung ist nicht eindeutig.

Insgesamt ergeben sich an die Terme  $s^p t^q$  die Einschränkungen

$$\begin{aligned} -\left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor &\leq p \leq 2d + \left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor \\ -d &\leq q \leq d + 2 \left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor \\ p+q &\leq d + \left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad . \quad (2.19)$$

### 2.4.2 Ein Algorithmus zur Zerlegung in chirale Variablen

Wir betrachten die Zerlegung eines Terms der Form (2.18) in die Variablen  $u, v, \hat{u}, \hat{v}$  und versuchen aus den Einschränkungen (2.19) der Potenzen  $p$  und  $q$  Einschränkungen für die auftretenden Potenzen von  $u, v, \hat{u}$  und  $\hat{v}$ . Wir geben zu diesem Zweck einen Algorithmus zur Zerlegung von (2.18) in chirale Variablen gemäß (2.16) an.

$$\begin{aligned} \frac{u-v}{uv} s^p t^q &= \frac{u-v}{uv} (uv)^p ((1-u)(1-v))^q \\ &= (u-v) u^{p-1} (1-u)^q v^{p-1} (1-v)^q \\ &= u^p (1-u)^q v^{p-1} (1-v)^q - (u \leftrightarrow v) \end{aligned}$$

Es ist aus Symmetriegründen ausreichend, eine Zerlegung des Terms  $u^r (1-u)^q$  mit  $r \in \{p-1, p\}$  in Potenzen der Variablen  $u$  und  $\hat{u}$  zu betrachten. Da die Expansionsformeln nur für negative Potenzen von  $u$  bzw.  $\hat{u}$  singuläre Terme beinhalten, suchen wir untere Schranken der Potenzen von  $u$  und  $\hat{u}$ . Es ist die folgende Fallunterscheidung angebracht, bei der stets  $m, n \in \mathbb{N}_0$  gelte.

1.  $m = r \geq 0, n = q \geq 0$ : Wir zerlegen wie folgt:

$$\begin{aligned} u^m (1-u)^n &= u^m \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-u)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (u)^{m+k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Hierbei erhalten wir nur nicht-negative Potenzen von  $u$  in der Entwicklung.

2.  $-m = r < 0, n = q \geq 0$ : Wie bereits bei (2.20) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{(1-u)^n}{u^m} &= u^{-m} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-u)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (u)^{k-m} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Als niedrigste Potenz von  $u$  erhalten wir  $-m$ , indem wir in der Summe  $k = 0$  setzen.

3.  $m = p \geq 0$ ,  $-n = q < 0$ ,  $m > n$ : Wir zerlegen wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{u^m}{(1-u)^n} &= \frac{u^{m-1}(u-1+1)}{(1-u)^n} \\ &= -\frac{u^{m-1}}{(1-u)^{n-1}} + \frac{u^{m-1}}{(1-u)^n} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wir erhalten auf der rechten Seite von (2.22) zwei Summanden. Beim ersten Summanden sind sowohl der Grad des Zählers als auch der des Nenners um 1 gegenüber der linken Seite der Gleichung vermindert. Beim zweiten Summanden auf der rechten Seite ist der Grad des Zählers um 1 geringer als der Grad des Zählers der linken Seite. Es können folgende Fälle eintreten:

- $(n-1=0)$ : In diesem Fall gilt  $\frac{u^{m-1}}{(1-u)^{n-1}} = u^{m-1}$  und der erste Summand auf der rechten Seite der Gleichung ist vollständig zerlegt.
- $(m-1=n)$ : In diesem Fall gilt  $\frac{u^{m-1}}{(1-u)^n} = \hat{u}^n$  und der zweite Summand auf der rechten Seite der Gleichung muss nicht weiter zerlegt werden.
- Tritt der Fall a) nicht ein, so ist der erste Summand  $\frac{u^{m-1}}{(1-u)^{n-1}}$  auf der rechten Seite von (2.22) von der gleichen Bauart wie der Term auf der linken Seite der Gleichung und muss durch erneute Anwendung von (2.22) in zwei weitere Summanden zerlegt werden.
- Tritt der Fall b) nicht ein, so ist der zweite Summand  $\frac{u^{m-1}}{(1-u)^n}$  auf der rechten Seite von (2.22) von der gleichen Bauart wie der Term auf der linken Seite der Gleichung und muss durch erneute Anwendung von (2.22) in zwei weitere Summanden zerlegt werden.

Bei Eintreten der Fälle c) oder d) muss nach der erneuten Anwendung von (2.22) für die entstehenden Summanden jeweils das Eintreten von Fall a) bzw. b) überprüft werden. So können wir den Term  $\frac{u^m}{(1-u)^n}$  durch rekursive Anwendung von (2.22) komplett in eine Summe aus Potenzen von  $u$  und  $\hat{u}$  zerlegen. Die Rekursion bricht immer dann ab, wenn für einen neu entstandenen Summanden Fall a) oder b) eintritt. Diesem Algorithmus folgend kann die vollständige Zerlegung nur nicht-negative Potenzen von  $u$  und  $\hat{u}$  enthalten.

4.  $m = p \geq 0$ ,  $-n = q < 0$ ,  $m < n$ : Wir zerlegen wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{u^m}{(1-u)^n} &= \frac{u^m(1-u+u)}{(1-u)^n} \\ &= \frac{u^m}{(1-u)^{n-1}} + \frac{u^{m+1}}{(1-u)^n} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Wir erhalten auf der rechten Seite von (2.23) zwei Summanden. Beim ersten Summanden ist der Grad des Nennerterms um 1 gegenüber der linken Seite der Gleichung vermindert. Beim zweiten Summanden auf der rechten Seite ist der Grad des Zählers um 1 gegenüber dem Grad des Zählers der linken Seite erhöht. Es können folgende Fälle eintreten:

- $(n-1=0)$ : In diesem Fall gilt  $\frac{u^m}{(1-u)^{n-1}} = u^m$  und der erste Summand auf der rechten Seite der Gleichung ist vollständig zerlegt.



- b) ( $m + 1 = n$ ): In diesem Fall gilt  $\frac{u^{m+1}}{(1-u)^n} = \hat{u}^n$  und der zweite Summand auf der rechten Seite der Gleichung muss nicht weiter zerlegt werden.
- c) Tritt der Fall a) nicht ein, so ist der erste Summand  $\frac{u^m}{(1-u)^{n-1}}$  auf der rechten Seite von (2.23) von der gleichen Bauart wie der Term auf der linken Seite der Gleichung und muss durch erneute Anwendung von (2.23) in zwei weitere Summanden zerlegt werden.
- d) Tritt der Fall b) nicht ein, so ist der zweite Summand  $\frac{u^{m+1}}{(1-u)^n}$  auf der rechten Seite von (2.23) von der gleichen Bauart wie der Term auf der linken Seite der Gleichung und muss durch erneute Anwendung von (2.23) in zwei weitere Summanden zerlegt werden.

Bei Eintreten der Fälle c) oder d) muss nach der erneuten Anwendung von (2.23) für die entstehenden Summanden jeweils das Eintreten von Fall a) bzw. b) überprüft werden. So können wir den Term  $\frac{u^m}{(1-u)^n}$  durch rekursive Anwendung von (2.23) komplett in eine Summe aus Potenzen von  $u$  und  $\hat{u}$  zerlegen. Die Rekursion bricht immer dann ab, wenn für einen neu entstandenen Summanden Fall a) oder b) eintritt. Diesem Algorithmus folgend kann die vollständige Zerlegung nur nicht-negative Potenzen von  $u$  und  $\hat{u}$  enthalten.

5.  $m = p \geq 0$ ,  $-n = q < 0$ ,  $m = n$ : In diesem Fall hat der Term

$$\frac{u^m}{(1-u)^n} = \frac{u^n}{(1-u)^n} = \hat{u}^n \quad (2.24)$$

bereits die gewünschte Form.

6.  $-m = p \leq 0$ ,  $-n = q \leq 0$ : Wir zerlegen wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^m (1-u)^n} &= \frac{1-u+u}{u^m (1-u)^n} \\ &= \frac{1}{u^m (1-u)^{n-1}} + \frac{1}{u^{m-1} (1-u)^n} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Wir erhalten auf der rechten Seite von (2.25) zwei Summanden. Beim ersten Summanden ist der Grad von  $(1-u)$  um 1 gegenüber der linken Seite der Gleichung erhöht. Beim zweiten Summanden auf der rechten Seite ist der Grad von  $u$  um 1 gegenüber der linken Seite erhöht. Es können folgende Fälle eintreten:

- a) ( $n - 1 = 0$ ): In diesem Fall gilt  $\frac{1}{u^m (1-u)^{n-1}} = u^{-m}$  und der erste Summand auf der rechten Seite der Gleichung ist vollständig zerlegt.
- b) ( $(m - 1) \leq 0$ ): Der zweite Summand der rechten Seite lässt sich dann entweder wie unter Punkt 3) oder wie unter Punkt 4) dargestellt zerlegen.
- c) Tritt der Fall a) nicht ein, so kann auf  $\frac{1}{u^m (1-u)^{n-1}}$  Gleichung (2.25) mit  $0 > n' := n - 1$  erneut angewendet werden.
- d) Tritt der Fall b) nicht ein, so kann auf  $\frac{1}{u^{m-1} (1-u)^n}$  Gleichung (2.25) mit  $0 > m' := m - 1$  erneut angewendet werden.

Bei Eintreten der Fälle c) oder d) muss nach erneuter Anwendung von (2.25) für die entstehenden Summanden jeweils das Eintreten von Fall a) bzw. b) überprüft werden. So können wir den Term  $\frac{u^m}{(1-u)^n}$  durch rekursive Anwendung von (2.25) entweder komplett in eine Summe aus Potenzen von  $u$  und  $\hat{u}$  zerlegen oder auf einen der bereits behandelten Fälle 3) oder 4) zurückführen, die ihrerseits lediglich zu positiven Potenzen von  $u$  und  $\hat{u}$  führen. Unter rekursiver Anwendung von (2.25) ist der niedrigste für  $u$  vorkommende Grad  $-m$ . Insgesamt erhalten wir nicht-negative Potenzen von  $\hat{u}$  sowie Potenzen von  $u$ , deren Grad größer als  $-m$  ist.

Wir halten die Ergebnisse des Zerlegungsalgorithmus im folgenden Theorem fest.

**Satz 2.4.1.** *Es sei  $f$  ein Laurent-Polynom in den Variablen  $s$  und  $t$ , dessen Monome  $s^p t^q$  die Bedingung (2.19) erfüllen. Es gibt stets eine Zerlegung von  $\frac{u-v}{uv} f(s, t)$  in chirale Variablen gemäß (2.16), die lediglich negative Potenzen von  $u$  und  $v$  nicht jedoch von  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  enthält. Die niedrigste Potenz  $r$  von  $u$ , die in der Zerlegung (2.16) vorkommen kann, ist durch die niedrigste Potenz  $q$  von  $s$  gegeben.*

$$r \geq p - 1 \geq - \left\lfloor \frac{\delta - 1}{2} \right\rfloor - 1 = - \left\lfloor \frac{\delta + 1}{2} \right\rfloor . \quad (2.26)$$

Die Fall  $r = - \left\lfloor \frac{\delta + 1}{2} \right\rfloor$  wird dabei immer auch angenommen. Die gleiche untere Schranke ergibt sich für Potenzen von  $v$ .

## 2.5 Kritische Partialwellen

Wir untersuchen die Regularität der in den Expansionsformeln auftretenden Terme für Zerlegungen des Typs aus Satz 2.4.1. Die erste Expansionsformel kann bei Entwicklung von  $u^m$  und  $v^n$  mit negativen Potenzen  $m$  bzw.  $n$  singuläre Terme enthalten. Sie behält jedoch stets Gültigkeit, da sich die auftretenden Singularitäten systematisch wegheben<sup>5</sup>. Die zweite Expansionsformel muss nicht weiter untersucht werden, da gemäß Satz 2.4.1 negative Potenzen von  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  nicht vorkommen und beide Expansionsformeln für nicht-negative Potenzen ausschließlich reguläre Terme enthalten. Die unteren Grenzen der Potenzen  $m$  und  $n$  der chiralen Variablen  $u$  bzw.  $v$  sind bestimmt durch die Differenz  $\delta = d_B - d_A$  der Skalendimensionen der Felder  $A$  und  $B$ .

$$m \geq - \left\lfloor \frac{\delta + 1}{2} \right\rfloor, \quad n \geq - \left\lfloor \frac{\delta + 1}{2} \right\rfloor$$

**Satz 2.5.1.** *Die Partialwellen  $\beta_{\kappa L}^\delta$  des Twists  $2\kappa \geq 3$  sind für beliebiges  $\delta$  regulär.*

**Beweis.** Zum Beweis des Satzes betrachten wir lediglich die Definition der Partialwellen (2.12).

$$\beta_{\kappa L}^\delta = \frac{uv}{u-v} \left( G_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}}^\delta(u) G_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}}^\delta(v) - (u \leftrightarrow v) \right)$$

In diesem Ausdruck treten für  $\kappa \geq \frac{3}{2}$  ausschließlich reguläre Funktionen  $G_n^l$  auf.

$$\begin{aligned} G_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}}^\delta(u) &= u^{\kappa+L-\frac{\delta}{2}} F \left( \kappa + L - \frac{\delta}{2}, \kappa + L - \frac{\delta}{2}; 2 \left( \kappa + L - \frac{\delta}{2} \right) + \delta; u \right) \\ &= u^{\kappa+L-\frac{\delta}{2}} F \left( \kappa + L - \frac{\delta}{2}, \kappa + L - \frac{\delta}{2}; 2(\kappa + L); u \right) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Der Leser sei dazu auf den Beweis der Expansionsformeln in A.1 verwiesen.

Der dritte Parameter  $c$  der hypergeometrischen Funktion  $F(a, b; c; z)$  hat den Wert  $c = 2\kappa + L \geq 3 > 0$ . Somit ist die Funktion  $G_{\kappa+L-\frac{\delta}{2}}^\delta$  bereits regulär. Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} G_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}}^\delta(v) &= v^{\kappa-1-\frac{\delta}{2}} F\left(\kappa-1-\frac{\delta}{2}, \kappa-1-\frac{\delta}{2}; 2\left(\kappa-1-\frac{\delta}{2}\right) + \delta; v\right) \\ &= v^{\kappa-1-\frac{\delta}{2}} F\left(\kappa-1-\frac{\delta}{2}, \kappa+L-\frac{\delta}{2}; 2(\kappa-1); v\right) \end{aligned}$$

Hier gilt analog  $c = 2(\kappa-1) \geq 1 > 0$ , womit  $G_{\kappa-1-\frac{\delta}{2}}^\delta$  regulär ist.  $\square$

Es ist sinnvoll, eine Fallunterscheidung für verschiedene Werte von  $\delta$  zu machen. Aufgrund der Antisymmetrie des Problems in  $u$  und  $v$  genügt es, nur die Potenzen  $m$  von  $u$  zu untersuchen.

### Fallunterscheidung:

- $\delta = 1$ : In diesem Fall erhält man die Bedingung  $m \geq -\left[\frac{1+1}{2}\right] = -1$ . Singuläre Terme können somit nur in der Expansion von  $u^{-1}$  auftreten. Genauer gilt

$$u^{-1} = \sum_{\mu \in -1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \frac{((-1)_{\mu+1})^2}{(\mu-1)_{\mu+1}} u^\mu F(\mu, \mu; 2\mu+1; u)$$

Kritisch innerhalb dieser Expansion sind die hypergeometrische Funktion  $F(\mu, \mu; 2\mu+1; u)$  für  $\mu = -1$  sowie das Pochhammer-Symbol<sup>6</sup>  $(\mu-1)_{\mu+1}$  in den Nennern der Koeffiziententerme bei Werten  $\mu \in \{-1, 0, 1\}$ . Für die hypergeometrische Funktion gilt mit beliebigen  $b, c \in \mathbb{R}$

$$F(a, b; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n (b)_n \frac{z^n}{(b)_n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n (c)_n \frac{z^n}{(c)_n n!} = F(a, c; c; z) \quad .$$

Insbesondere gilt also  $F(-1, -1; -1, u) = F(-1, 1; 1; u)$ , wobei die rechte Seite der Gleichung eine reguläre Funktion darstellt. Man erhält somit, dass nur reguläre hypergeometrische Funktionen im Fall  $\delta = 1$  auftreten. Damit sind auch die aus ihnen zusammengesetzten Partialwellen  $\beta_{\kappa L}^1(s, t)$  für alle  $\kappa, L$  regulär. Die in der Expansionsformel direkt auftretenden Pochhammer-Symbole sind im Fall  $m = -1$  ebenfalls alle regulär. Tabelle 2.2 führt die kritischen Pochhammer-Symbole auf, wobei in der dritten Spalte der für die Expansionsformeln charakteristische Quotient von Pochhammersymbolen betrachtet wurde. Zur Untersuchung der Regularität des Quotienten wurde ein Übergang  $\delta \rightarrow \delta' := \delta + \epsilon$  vollzogen, sodass für negatives, ganzzahliges  $\delta$  das Pochhammersymbol  $(\nu+m+\delta'-1)_{\nu-m}$  nicht verschwindet. Der Quotient bleibt regulär, falls ein endlicher Grenzwert für  $\epsilon \rightarrow 0$  existiert. Alle größeren

$\nu$	$(-1)_{\nu+1}$	$(\nu-1)_{\nu+1}$	$\frac{((-1)_{\nu+1})^2}{(\nu-1+\epsilon)_{\nu+1}}$	Regularität
-1	$(-1)_0 = 1$	$(-2+\epsilon)_0 = 1$	1	regulär für $\epsilon \rightarrow 0$
0	$(-1)_1 = -1$	$(-1+\epsilon)_1 = -1+\epsilon$	$\frac{1}{1-\epsilon}$	regulär für $\epsilon \rightarrow 0$
1	$(-1)_2 = (-1) \cdot 0$	$(0+\epsilon)_2 = \epsilon \cdot (1+\epsilon)$	0	regulär für $\epsilon \rightarrow 0$

Tabelle 2.2: Zur Regularität der Beiträge zu Partialwellenkoeffizienten

Werte  $\mu > 1$  liefern reguläre Beiträge zu den Partialwellenkoeffizienten. Da singuläre Terme ohnehin nur bei ganzzahligem  $\delta$  auftreten können, erhalten wir das folgende Lemma.

<sup>6</sup>Zur Definition des Pochhammer-Symbols siehe Abschnitt 1.8 oder Anhang A.

**Lemma 2.5.2.** *Die Partialwellen  $\beta_{\kappa L}^\delta$  und die zugehörigen Partialwellenkoeffizienten  $B_{\kappa L}^\delta$  sind im Fall  $0 \leq \delta \leq 1$  regulär.*

- $\delta > 1$  ungerade: Die untere Schranke der Potenz  $m$  ist für  $\delta = 2k + 1$  mit  $k \in \mathbb{N}$  gegeben durch

$$m \geq - \left\lfloor \frac{\delta + 1}{2} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{(2k + 1) + 1}{2} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{2(k + 1)}{2} \right\rfloor = - [(k + 1)] = -(k + 1) \quad .$$

Für  $m \geq -k$  sind die Funktionen  $u^\mu F(\mu, \mu; 2\mu + 2k + 1; u)$  mit  $\mu \geq m$  alle regulär, da der Parameter  $2\mu + 2k + 1$  der hypergeometrischen Funktion in diesem Fall positiv ist. Terme der Art  $u^m v^n$  mit  $m, n \geq -k$  in (2.16) besitzen nur reguläre Partialwellen zu  $\kappa \geq \frac{3}{2}$ , da  $\kappa = \mu + 1 + \frac{\delta}{2} \geq -k + 1 + \frac{2k+1}{2} = \frac{3}{2}$  gilt. Gleiches gilt für Terme der Form  $u^m \hat{v}^{n'}$  und  $\hat{u}^{m'} v^n$  mit  $m, n \geq -k$  und  $m', n' \geq 0$ . Die Beiträge zu den Partialwellenkoeffizienten in der Expansion dieser Terme sind ebenfalls regulär. Hierbei ist  $(0)_0 := 1$  zu beachten. Für  $m = -(k + 1)$  treten singuläre hypergeometrische Funktionen innerhalb der Expansionsformeln auf, deren Singularitäten auch in den Partialwellen erhalten bleiben und die sich nicht zum Beispiel aufgrund der Antisymmetrie der Partialwellen in den chiralen Variablen gegenseitig wegheben. Solche Partialwellen tragen zwangsläufig den Twist  $\kappa = -m + 1 + \frac{\delta}{2} = -(k + 1) + 1 + \frac{2k+1}{2} = \frac{1}{2}$ .

- $\delta > 1$  gerade: Die untere Schranke der Potenz  $m$  ist für  $\delta = 2k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  gegeben durch

$$m \geq - \left\lfloor \frac{\delta + 1}{2} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{2k + 1}{2} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = - [k] = -k \quad .$$

Für  $m > -k$  sind die Funktionen  $u^\mu F(\mu, \mu; 2\mu + 2k; u)$  mit  $\mu \geq m$  alle regulär, da der Parameter  $2\mu + 2k$  der hypergeometrischen Funktion in diesem Fall positiv ist. Terme der Art  $u^m v^n$  mit  $m, n > -k$  in (2.16) besitzen nur reguläre Partialwellen zu  $\kappa \geq \frac{3}{2}$ , da  $\kappa = \mu + 1 + \frac{\delta}{2} \geq -(k - 1) + 1 + \frac{2k}{2} = 2 > \frac{3}{2}$  gilt. Gleiches gilt für Terme der Form  $u^m \hat{v}^{n'}$  und  $\hat{u}^{m'} v^n$  mit  $m, n > -k$  und  $m', n' \geq 0$ . Die Beiträge zu den Partialwellenkoeffizienten in der Expansion dieser Terme sind ebenfalls regulär. Erneut ist hierfür  $(0)_0 := 1$  zu beachten. Für  $m = -k$  können singuläre hypergeometrische Funktionen innerhalb der Expansionsformeln auftreten. Wir erhalten jedoch auch das folgende Ergebnis für  $m = -k$ .

**Lemma 2.5.3.** *Sei  $\delta \in \mathbb{N}$  gerade. Dann sind die Partialwelle  $\beta_{10}^\delta(s, t)$  und der zugehörige Partialwellenkoeffizient  $B_{10}$  regulär.*

**Beweis.** Um die Regularität der Partialwelle  $\beta_{10}^\delta$  nachzuweisen, vollziehen wir den Übergang  $G_n^\delta \rightarrow G_n^{\delta+\epsilon}$  mit  $|\epsilon| \ll 1$  in den zur Darstellung der Partialwelle verwendeten Funktionen.

$$\beta_{10}^{\delta+\epsilon}(s, t) = \frac{uv}{u-v} \left( G_{1-\frac{\delta}{2}}^{\delta+\epsilon}(u) G_{-\frac{\delta}{2}}^{\delta+\epsilon}(v) - (u \leftrightarrow v) \right)$$

Die Partialwelle  $\beta_{10}^\delta$  ist regulär, falls der Grenzwert  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta_{10}^{\delta+\epsilon}$  existiert und eine reguläre

Funktion definiert.

$$\begin{aligned} G_{1-\frac{\delta}{2}}^{\delta+\epsilon}(u) &= u^{1-\frac{\delta}{2}} F\left(1-\frac{\delta}{2}, 1-\frac{\delta}{2}; 2\left(1-\frac{\delta}{2}\right) + \delta + \epsilon; u\right) = u^{1-\frac{\delta}{2}} F\left(1-\frac{\delta}{2}, 1-\frac{\delta}{2}; 2 + \epsilon; u\right) \\ &= u^{1-\frac{\delta}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left(1-\frac{\delta}{2}\right)_n \right)^2 \frac{u^n}{(2+\epsilon)_n n!} \right) \\ &= u^{-\frac{\delta}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\frac{\delta}{2}-1} \left( \left(1-\frac{\delta}{2}\right)_n \right)^2 \frac{u^{n+1}}{(2+\epsilon)_n n!} \right) \end{aligned}$$

$$G_{-\frac{\delta}{2}}^{\delta+\epsilon}(v) = v^{-\frac{\delta}{2}} F\left(-\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}; 2 + \epsilon; v\right) = v^{-\frac{\delta}{2}} \left( \sum_{k=0}^{\frac{\delta}{2}} \left( \left(-\frac{\delta}{2}\right)_k \right)^2 \frac{v^k}{(\epsilon)_k k!} \right)$$

Für die undefinierte Partialwelle  $\beta_{10}^{\delta+\epsilon}$  folgt damit

$$\begin{aligned} \beta_{10}^{\delta}(s, t) &:= \frac{u^{1-\frac{\delta}{2}} v^{1-\frac{\delta}{2}}}{u-v} \left( \sum_{n=0}^{\frac{\delta}{2}-1} \left( \left(1-\frac{\delta}{2}\right)_n \right)^2 \frac{u^{n+1}}{(2+\epsilon)_n n!} \sum_{k=0}^{\frac{\delta}{2}} \left( \left(-\frac{\delta}{2}\right)_k \right)^2 \frac{v^k}{(\epsilon)_k k!} - (u \leftrightarrow v) \right) \\ &= \frac{u^{1-\frac{\delta}{2}} v^{1-\frac{\delta}{2}}}{u-v} \left( \left( \sum_{n=0}^{\frac{\delta}{2}-1} 1 \left( \left(1-\frac{\delta}{2}\right)_n \right)^2 \frac{u^{n+1}}{(2+\epsilon)_n n!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^{\frac{\delta}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{\delta}{2}-1} \left( \left(1-\frac{\delta}{2}\right)_n \right)^2 \left( \left(-\frac{\delta}{2}\right)_k \right)^2 \frac{u^{n+1} v^k}{(2+\epsilon)_n (\epsilon)_k n! k!} \right) - (u \leftrightarrow v) \right) \end{aligned}$$

Nur die Terme der Doppelsumme können singular werden. Es ist also ausreichend, im Weiteren ausschließlich diese zu betrachten.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\frac{\delta}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{\delta}{2}-1} \left( \left(1-\frac{\delta}{2}\right)_n \right)^2 \left( \left(-\frac{\delta}{2}\right)_k \right)^2 \frac{u^{n+1} v^k}{(2+\epsilon)_n (\epsilon)_k n! k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{\delta}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{\delta}{2}} \left( \left(1-\frac{\delta}{2}\right)_{n-1} \right)^2 \left( \left(-\frac{\delta}{2}\right)_k \right)^2 \frac{u^n v^k}{(2+\epsilon)_{n-1} (\epsilon)_k (n-1)! k!} \\ &= \left( \frac{2}{\delta} \right)^2 \sum_{n,k=1}^{\frac{\delta}{2}} \left( \left(-\frac{\delta}{2}\right)_n \right)^2 \left( \left(-\frac{\delta}{2}\right)_k \right)^2 \frac{u^n v^k}{(\epsilon+2)_{n-1} (\epsilon)_k (n-1)! k!} \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Identität  $(\alpha+1)_{n-1} = \frac{(\alpha)_n}{\alpha}$  für  $\alpha \neq 0$  ausgenutzt. Aufgrund der Antisymmetrie der von  $\beta_{10}^{\delta+\epsilon}$  in  $u$  und  $v$  ergibt sich für die Potenz  $u^n v^k$  in der Potenzreihenentwicklung von  $\beta_{10}^{\delta+\epsilon}$  der Koeffizient

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon(\epsilon+1)n}{(\epsilon+n)(\epsilon)_n (\epsilon)_k n! k!} - \frac{\epsilon(\epsilon+1)k}{(\epsilon+k)(\epsilon)_n (\epsilon)_k n! k!} = \frac{n(\epsilon+k)\epsilon(\epsilon+1) - k(\epsilon+n)\epsilon(\epsilon+1)}{(\epsilon+n)(\epsilon+k)(\epsilon)_n (\epsilon)_k n! k!} \\ &= \frac{nk\epsilon - nk\epsilon + (n-k)\epsilon^2(\epsilon+1)}{(\epsilon+n)(\epsilon+k)(\epsilon)_n (\epsilon)_k n! k!} = \frac{(n-k)(\epsilon+1)}{(\epsilon+n)(\epsilon+k)(1+\epsilon)_{n-1} (1+\epsilon)_{k-1} n! k!} \end{aligned}$$

wobei wir den in  $n$  und  $k$  symmetrischen und regulären Faktor  $(\frac{2}{\delta})^2 ((-\frac{\delta}{2})_n)^2 ((-\frac{\delta}{2})_k)^2$  der Übersicht halber abgespalten haben. Der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{(n-k)(\epsilon+1)}{(\epsilon+n)(\epsilon+k)(1+\epsilon)_{n-1}(1+\epsilon)_{k-1} n! k!} \right) = \frac{n-k}{nk(1)_{n-1}(1)_{k-1} n! k!}$$

existiert für beliebiges  $n, k \geq 1$  und die Partialwelle  $\beta_{10}^\delta$  ist regulär.

Der Partialwellenkoeffizient  $B_{10}$  kann einzig aus Expansion des Terms  $u^{-\frac{\delta}{2}} v^{1-\frac{\delta}{2}} - (u \leftrightarrow v)$  Beiträge erhalten. Der Beitrag entsteht durch Multiplikation der Summanden zu  $\mu = 0$  der ersten Expansionsformel (2.17), in denen das Pochhammer-Symbol des Typs  $(\alpha)_0$  im Nenner auftritt und das unabhängig von  $\alpha \in \mathbb{R}$  als  $(\alpha)_0 := 1$  definiert ist. Somit ist auch der Partialwellenkoeffizient regulär.  $\square$

Die Partialwellen zu  $\kappa = 1$  und Spin  $L > 0$  sind im Allgemeinen nicht regulär. Dies motiviert die Aussage, dass für  $\delta \neq 0$  der Twist-2-Anteil von  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$  nur aus einem Anteil zum Spin  $L = 0$  besteht. Eine abgewandelte Form dieser Aussage beweisen wir in Satz 3.3.1.

Wir fassen die Ergebnisse im folgenden Satz über die Regularität von Partialwellen zusammen.

**Satz 2.5.4** (Regularität von Partialwellen). *Die Partialwellen  $\beta_{\kappa L}^\delta$  zu  $\kappa \geq \frac{3}{2}$  sind für beliebiges  $\delta \geq 0$  regulär. Zusätzlich gilt:*

- Für  $0 \leq \delta \leq 1$  sind alle Partialwellen  $\beta_{\kappa L}^\delta$  regulär.
- Für  $\delta > 0$  gerade ist die Partialwelle  $\beta_{10}^\delta$  regulär.
- Für  $\kappa < \frac{3}{2}$  und beliebiges  $\delta$  sind die Partialwellen im Allgemeinen nicht regulär.

### 3 Zum Twist-2-Anteil zweier skalarer Felder

Die folgenden Betrachtungen dienen der Untersuchung des Twist-2-Anteils von Vektoren der Form  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$ , wobei  $A$  und  $B$  skalare Felder der Skalendimensionen  $d_A$  und  $d_B$  seien. Wir beschränken unsere Betrachtung dabei wie auch in Abschnitt 4 auf  $n = 4$  Raumzeitdimensionen. Ziel ist es, Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_{3,4}$  und  $\mathcal{E}_{3,4}$  bezüglich der Variablen  $x_3$  und  $x_4$  zu finden, die Erwartungswerte der Form  $\langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3)A(x_4) \rangle$  annihilieren. Die Punkte stehen stellvertretend für einen Ausdruck, der keine Abhängigkeit von  $x_3$  und  $x_4$  besitzt, ansonsten aber beliebig gewählt sein kann<sup>1</sup>. Somit ist  $\langle \dots \Pi_{\kappa=1} |$  ein beliebiger Vektor des Unterraums<sup>2</sup>  $\mathcal{H}_{\kappa=1} \subset \mathcal{H}$ . Die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{3,4} \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3)A(x_4) \rangle &= 0 \\ \mathcal{E}_{3,4} \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3)A(x_4) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

stellen in diesem Fall eine allgemeine Einschränkung für den Twist-2-Anteil von  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$  dar. Um die gewünschten Operatoren  $\mathcal{D}_{3,4}$  und  $\mathcal{E}_{3,4}$  zu finden, verwenden wir die folgende Strategie:

1. Wir setzen  $\langle \dots \Pi_{\kappa=1} | = \langle V(x_1, x_2) |$  und betrachten zunächst nur die speziellen Funktionen

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) := \langle V(x_1, x_2) B(x_3) A(x_4) \rangle = \frac{f(s, t)}{\rho_{14}^{1-b} \rho_{13}^b \rho_{23} \rho_{34}^{a-1}} \quad (3.2)$$

mit  $a := \frac{d_B + d_A}{2}$  und  $b := \frac{d_B - d_A}{2}$ .  $f$  ist eine Funktion der konform-invarianten Variablen  $s$  und  $t$ . Die Funktion  $g$  ist harmonisch in den Variablen  $x_1$  und  $x_2$ .

2. Wir transformieren die Harmonizitätsbedingungen  $\square_1 g = 0$  und  $\square_2 g = 0$  in Bedingungen der Form  $(\square_1)_{s,t} f = 0$  und  $(\square_2)_{s,t} f = 0$ , wobei  $(\square_1)_{s,t}$  und  $(\square_2)_{s,t}$  Differentialoperatoren bezüglich der Variablen  $s$  und  $t$  sind. Die Gleichungen  $(\square_1)_{s,t} f = 0$  und  $(\square_2)_{s,t} f = 0$  erhält man aus den Gleichungen  $\square_1 g = 0$  und  $\square_2 g = 0$ , indem man den Vorfaktor  $\frac{1}{\rho_{14}^{1-b} \rho_{13}^b \rho_{23} \rho_{34}^{a-1}}$  mittels Kettenregel an den Operatoren „vorbezieht“.
3. Ebenso lassen sich Differentialoperatoren  $\mathcal{O}_{3,4}$ , die bezüglich der Variablen  $x_3$  und  $x_4$  auf die Funktion  $g$  wirken, in Operatoren  $(\mathcal{O}_{3,4})_{s,t}$  bezüglich der Variablen  $s$  und  $t$  umwandeln, die auf die Funktion  $f$  wirken.
4. Die Operatoren  $\mathcal{D}_{3,4}$  und  $\mathcal{E}_{3,4}$  sind dann genau die Operatoren, deren bezüglich der Variablen  $s$  und  $t$  transformierte Operatoren  $(\mathcal{D}_{3,4})_{s,t}$  und  $(\mathcal{E}_{3,4})_{s,t}$  eine zu  $(\square_1)_{s,t} f = 0 = (\square_2)_{s,t} f$  äquivalente Bedingung an  $f$  stellen, was wiederum der Harmonizität von  $g$  in  $x_1$  und  $x_2$  äquivalent ist. Man betrachte dazu das folgende Diagramm.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_{3,4} g = 0 &\Leftrightarrow (\mathcal{D}_{3,4})_{s,t} f = 0 \\ \mathcal{E}_{3,4} g = 0 &\Leftrightarrow (\mathcal{E}_{3,4})_{s,t} f = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} (\square_1)_{s,t} f = 0 &\Leftrightarrow \square_1 g = 0 \\ (\square_2)_{s,t} f = 0 &\Leftrightarrow \square_2 g = 0 \end{aligned} \right.$$

<sup>1</sup>Man kann z.B. an die Funktion  $\langle A(x_1)B(x_2)\Pi_{\kappa=1}B(x_3)A(x_4) \rangle$  denken.

<sup>2</sup>Die Definition der Räume findet sich in 1.8.

5. Da die Vektoren  $\langle V(x_1, x_2) |$  dicht im Unterraum  $\mathcal{H}_{\kappa=1}$  liegen und nicht von den Variablen  $x_3$  und  $x_4$  abhängen, können wir in der Definition von  $g$  den Vektor  $\langle V(x_1, x_2) |$  durch einen beliebigen Vektor  $\langle \dots \Pi_{\kappa=1} |$ , der ebenfalls keine Abhängigkeit der Variablen  $x_3$  und  $x_4$  trägt, ersetzen, sodass  $\mathcal{D}_{3,4}$  und  $\mathcal{E}_{3,4}$  die auf diese Art entstandene Funktion weiterhin annihilieren. Wir erhalten damit die gewünschte Charakterisierung von  $\langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle$  durch (3.1).

### 3.1 Transformation der Harmonizitätsbedingungen

Wir transformieren die Harmonizitätsbedingungen von  $g$  gemäß (2.3), sodass die resultierenden Operatoren nur noch von den Abstandskwadrate abhängen. Der zweite Summand auf der rechten Seite von (2.3) verschwindet für die Funktion  $g$ , da ihre Homogenität in den Indizes 1 und 2 jeweils  $p = -1$  ist.

$$\square_1 g = -4 \sum_{j < l} \rho_{jl} \frac{\partial^2 g}{\partial \rho_{1j} \partial \rho_{1l}} = 0 = -4 \sum_{j < l} \rho_{jl} \frac{\partial^2 g}{\partial \rho_{2j} \partial \rho_{2l}} = \square_2 g$$

Diese Operatoren können, da sie  $g$  annihilieren, durch Multiplikation mit einem rationalen Ausdruck in den Abstandskwadrate  $\rho_{ij}$  sogar in Operatoren  $(\square_1)_{s,t}$  und  $(\square_2)_{s,t}$  überführt werden, deren Koeffizientenfunktionen sich ausschließlich als Funktionen von  $s$  und  $t$  ausdrücken lassen. Die Ergebnisse der Operatortransformation für Funktionen der Form (3.2) können Tabelle 3.1 entnommen werden. In der linken Spalte sind die Ableitungen der Funktion  $f$  nach den Variablen  $s$  und  $t$  aufgeführt, in der mittleren Spalte befindet sich die zugehörige Koeffizientenfunktion von  $(\square_1)_{s,t}$  zur links nebenstehenden Ableitung und in der rechten Spalte die entsprechende Funktion für  $(\square_2)_{s,t}$ . Man erkennt, dass  $(\square_1)_{s,t}$  und  $(\square_2)_{s,t}$  die gleichen Koeffizientenfunktionen in den

Ableitung	$(\square_1)_{s,t}$	$(\square_2)_{s,t}$
$f$	$b(1 - b)$	0
$\frac{\partial f}{\partial s}$	$b(1 - t - s) - (1 + t - s)$	$-(1 + t - s)$
$\frac{\partial f}{\partial t}$	$-2bt$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$	$-st$	$-st$
$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	$-t^2$	$-t^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$	$t(1 - t - s)$	$t(1 - t - s)$

Tabelle 3.1: Ergebnis der Transformation  $\square_1 \rightarrow (\square_1)_{s,t}$  und  $\square_2 \rightarrow (\square_2)_{s,t}$



Ableitungen zweiter Ordnung besitzen und für  $b = 0 \Leftrightarrow d_A = d_B$  sogar identisch sind. Aus der Bedingung  $((\square_1)_{s,t} - (\square_2)_{s,t})f = 0$  lässt sich für  $b \neq 0 \Leftrightarrow d_A \neq d_B$  ein Operator  $\mathcal{Y}$  erster Ordnung gewinnen, der  $f$  annihiliert.

$$b\mathcal{Y}_{s,t} := (\square_1)_{s,t} - (\square_2)_{s,t} = b((1-t-s)\partial_s - 2t\partial_t + (1-b)) \quad (3.3)$$

Wir werden deshalb die Fälle gleicher Skalendimension  $d_A = d_B$  und unterschiedlicher Skalendimension  $d_A \neq d_B$  im Folgenden getrennt behandeln.

## 3.2 Gleiche Skalendimension

Im Fall gleicher Skalendimension ( $b = 0$  und  $a = d_A = d_B$ ) gilt nach Tabelle 3.1

$$\square_1 g = 0 = \square_2 g \Leftrightarrow \left( t(1-t-s) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - st \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (1+t-s) \frac{\partial}{\partial s} \right) f = 0 \quad (3.4)$$

Wir wenden nun die Operatoren  $\square_3$  und  $\square_4$  auf  $\tilde{g}(x_1, x_2, x_3, x_4) := \rho_{34}^{a-1} g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{f(s,t)}{\rho_{14}\rho_{23}}$  an. Diese lassen sich wie bereits die d'Alembert-Operatoren bezüglich  $x_1$  und  $x_2$  mittels (2.3) als Operatoren der Abstandsquadrate ausdrücken, wobei erneut die zweite Summe auf der rechten Seite von (2.3) entfällt, da die Homogenität von  $\tilde{g}$  in den Indizes 3 und 4 jeweils  $p = -1$  beträgt. Nach Durchführung des zweiten Transformationsschrittes erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \square_3 \tilde{g} &= -4 \frac{1}{\rho_{14}\rho_{23}} \frac{\rho_{12}}{\rho_{13}\rho_{23}} \left( t(1-t-s) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - st \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (1+t-s) \frac{\partial}{\partial s} \right) f \\ \square_4 \tilde{g} &= -4 \frac{1}{\rho_{14}\rho_{23}} \frac{\rho_{12}}{\rho_{14}\rho_{24}} \left( t(1-t-s) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - st \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (1+t-s) \frac{\partial}{\partial s} \right) f \end{aligned} \quad (3.5)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (3.4) mit (3.5) erkennt man, dass die Operatoren  $\mathcal{D}_{3,4} := \square_3 \rho_{34}^{a-1}$  und  $\mathcal{E}_{3,4} := \square_4 \rho_{34}^{a-1}$  die gesuchten Differentialoperatoren bezüglich der Variablen  $x_3$  und  $x_4$  sind und eine Charakterisierung des Twist-2-Anteils von  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$  ermöglichen.

$$(\square_3 \rho_{34}^{a-1}) \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3)A(x_4) \rangle = 0 = (\square_4 \rho_{34}^{a-1}) \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3)A(x_4) \rangle \quad (3.6)$$

## 3.3 Unterschiedliche Skalendimension

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit<sup>3</sup> den Fall  $b = \frac{d_B - d_A}{2} \in \mathbb{N}$  an und zeigen zunächst, dass die Twist-2-Komponente von  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$  genau eine Partialwelle vom Spin  $L = 0$  enthält. Unsere Strategie dabei ist, zu zeigen, dass die Biharmonizität von  $g$  bereits impliziert, dass die Casimirgleichung  $(\mathcal{C}_{3,4} - \lambda_{10})g = 0$  erfüllt ist.

Wir erinnern an die Form des Casimiroperators aus Abschnitt 1.6 im Fall zweier skalarer Felder.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{3,4} &= \mathcal{C}_{3,4}^{(2)} + \mathcal{C}_{3,4}^{(1)} + \mathcal{C}_{3,4}^{(0)} \\ \mathcal{C}_{3,4}^{(0)} &= (d_A + d_B)^2 - 4(d_A + d_B) \\ \mathcal{C}_{3,4}^{(1)} &= 2d_A(x_{34} \cdot \partial_3) + 2d_B(x_{43} \cdot \partial_4) \\ \mathcal{C}_{3,4}^{(2)} &= x_{34}^2(\partial_3 \cdot \partial_4) - 2((x_{34} \otimes x_{34}) \cdot (\partial_3 \otimes \partial_4)) \quad . \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Die Felder  $A$  und  $B$  können innerhalb von  $g$  vertauscht werden und für halbzahliges  $b$  verschwindet  $g$ .

In Tabelle 3.2 finden sich analog zu Tabelle 3.1 die Koeffizientenfunktionen von  $(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}$ . Unser Ziel

Ableitung	Koeffizientenfunktion von $(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}$
$f$	$2 \left[ \frac{b}{t}(s+t-1) + \frac{1-s}{t} - 3 \right]$
$\frac{\partial f}{\partial s}$	$2s [(b+1)(t-s-1) + 2]$
$\frac{\partial f}{\partial t}$	$2t \left[ \left( \frac{b-1}{t} + b + 1 \right) (1+t-s) - 4b \right]$
$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$	$2s^2 [1+t-s]$
$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	$2t^2 \left[ \frac{1-s}{t} + t - s - 2 \right]$
$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$	$4st [t-s-1]$

Tabelle 3.2: Ergebnis der Transformation  $\mathcal{C}_{3,4} \rightarrow (\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}$

ist es, zu zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass  $f$  von den Operatoren  $(\square_1)_{s,t}$  und  $(\square_2)_{s,t}$  annihiliert wird, folgt, dass  $f$  Eigenfunktion des Casimiroperators ist. Dazu reicht es aus, den Operator  $(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t}$  bis auf die konstante Ordnung als Linearkombination von  $(\square_1)_{s,t}$  und  $(\square_2)_{s,t}$  darzustellen, wobei die Koeffizienten  $\alpha, \beta$  in der Linearkombination

$$(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t} = \alpha(\square_1)_{s,t} + \beta(\square_2)_{s,t} + \lambda_{10} \quad (3.7)$$

beliebige Differentialoperatoren darstellen können. Zur Berechnung der richtigen Linearkombinationen verwenden wir die folgende Strategie:

1. Wir berechnen aus den Bedingungen  $(\square_1)_{s,t} f = 0$  und  $(\square_2)_{s,t} f = 0$  drei neue Operatoren  $\mathcal{X}_{s,t}^0, \mathcal{X}_{s,t}^1, \mathcal{X}_{s,t}^2$  zweiter Ordnung in den Variablen  $s$  und  $t$ , die voneinander linear unabhängig in den Termen zweiter Ordnung sind, eine möglichst einfache Struktur besitzen und die Funktion  $f$  annihilieren.
2. Wir kombinieren die Operatoren zu drei Operatoren zweiter Ordnung  $\mathcal{Y}_{s,t}^0, \mathcal{Y}_{s,t}^1, \mathcal{Y}_{s,t}^2$ , die folgende Kriterien erfüllen:
  - a)  $\mathcal{Y}_{s,t}^0$  besitzt eine nicht verschwindende Koeffizientenfunktion zur Ableitung  $\partial_s \partial_t$ .
  - b)  $\mathcal{Y}_{s,t}^1$  besitzt eine nicht verschwindende Koeffizientenfunktion zur Ableitung  $\partial_t^2$  und ist unabhängig von  $\partial_s \partial_t$ .
  - c)  $\mathcal{Y}_{s,t}^2$  besitzt eine nicht verschwindende Koeffizientenfunktion zur Ableitung  $\partial_s^2$  und ist unabhängig von  $\partial_t^2$  und  $\partial_s \partial_t$ .
3. Wir wählen  $c_0$ , sodass  $\mathcal{P}_{s,t} := (\mathcal{C}_{3,4})_{s,t} - c_0 \mathcal{Y}_{s,t}^0$  unabhängig von  $\partial_s \partial_t$ .

4. Wir wählen  $c_1$ , sodass  $\mathcal{Q}_{s,t} := \mathcal{P}_{s,t} - c_1 \mathcal{Y}_{s,t}^1$  nicht von  $\partial_s^2$  und  $\partial_s \partial_t$  abhängt.
5. Wir wählen  $c_2$ , sodass  $\mathcal{R}_{s,t} := \mathcal{Q}_{s,t} - c_2 \mathcal{Y}_{s,t}^2$  ein Operator erster Ordnung ist.
6. Wir wählen  $c$ , sodass  $\mathcal{R}_{s,t} - c \mathcal{Y}_{s,t}$  die Konstante  $\lambda_{10}$  ist.
7. Gemäß dieser Konstruktion ist  $c \mathcal{Y}_{s,t} + \sum_{k=0}^2 c_k \mathcal{Y}_{s,t}^k$  die gesuchte Linearkombination von Operatoren.

**Satz 3.3.1.** *Die Harmonizität der Funktion  $g$  aus Gleichung (3.2) bezüglich der Variablen  $x_1$  und  $x_2$  impliziert für  $\frac{dB-dA}{2} = b \in \mathbb{N}$ , dass  $g$  die Casimirgleichung bezüglich der Variablen  $x_3$  und  $x_4$  zum Eigenwert  $\lambda_{10}$  erfüllt.*

$$\left. \begin{array}{l} \square_1 g = 0 \\ \square_2 g = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{C}_{3,4} g = \lambda_{10} g$$

**Beweis.** Zum Beweis des Satzes führen wir schrittweise das obige Schema aus.

1. Wir wählen zunächst  $\mathcal{X}^0 := (\square_2)_{s,t}$  und erhalten durch Ableiten des Operators  $\mathcal{Y}_{s,t} = (\square_1)_{s,t} - (\square_2)_{s,t}$  die beiden Operatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{s,t}^1 &:= s \partial_s \mathcal{Y}_{s,t} = -2st \partial_s \partial_t + s(1-t-s) \partial_s^2 - bs \partial_s \\ \mathcal{X}_{s,t}^2 &:= t \partial_t \mathcal{Y}_{s,t} = t(1-t-s) \partial_s \partial_t - 2t^2 \partial_t^2 - t \partial_s - (b+1)t \partial_t . \end{aligned}$$

Die Operatoren  $\mathcal{X}_{s,t}^0, \mathcal{X}_{s,t}^1, \mathcal{X}_{s,t}^2$  besitzen linear unabhängige Koeffizientenfunktionen und lassen sich wie gewünscht als Linearkombination schreiben.

2. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{s,t}^0 &:= \mathcal{X}_{s,t}^1 - \mathcal{X}_{s,t}^0 \\ &= t(t-s-1) \partial_s \partial_t - s(1-s) \partial_s^2 + t^2 \partial_t^2 + (1+t-(b+1)s) \partial_s \\ \mathcal{Y}_{s,t}^1 &:= \mathcal{X}_{s,t}^0 - \mathcal{X}_{s,t}^2 \\ &= -st \partial_s^2 + t^2 \partial_t^2 + (s-1) \partial_s + (b+1)t \partial_t \\ \mathcal{Y}_{s,t}^2 &:= 4\mathcal{X}_{s,t}^0 + \frac{1-t-s}{s} \mathcal{X}_{s,t}^1 - 2\mathcal{X}_{s,t}^2 \\ &= ((1-t-s)^2 - 4st) s^2 \partial_s^2 + ((b+4)(s-1) + (b-2)t) \partial_s + 2(b-1)t \partial_t \end{aligned}$$

3. Wir wählen  $c_0 = 2s$ . Dann ist der Operator  $\mathcal{P}_{s,t} := (\mathcal{C}_{3,4})_{s,t} - c_0 \mathcal{Y}_{s,t}^0$  unabhängig von  $\partial_s \partial_t$ .
4. Wir wählen  $c_1 = (b+1) \frac{1-s}{t} + t - 3s - 2$ . Dann ist der Operator  $\mathcal{Q}_{s,t} := \mathcal{P}_{s,t} - c_1 \mathcal{Y}_{s,t}^1$  unabhängig von  $\partial_s^2$  und  $\partial_s \partial_t$ .
5. Wir wählen  $c_2 = s$ . Dann ist  $\mathcal{R}_{s,t} := \mathcal{Q}_{s,t} - c_2 \mathcal{Y}_{s,t}^2$  ein Operator erster Ordnung bezüglich der Variablen  $s$  und  $t$ .
6. Wir wählen  $c := \frac{1-t-s}{t}$ . Dann ist  $\mathcal{R} - c \mathcal{Y}_{s,t} = \lambda_{10}$ .
7. Wir erhalten insgesamt  $(\mathcal{C}_{3,4})_{s,t} - c \mathcal{Y}_{s,t} - \sum_{k=0}^2 c_k \mathcal{Y}_{s,t}^k = \lambda_{10}$

□

Als Ergebnis von 3.3.1 erhalten wir den Operator  $\mathcal{D}_{3,4} := \mathcal{C}_{3,4} - \lambda_{10}$ , der alle Funktionen von der Form  $\langle \dots \prod_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle$  annihiliert.

**Satz 3.3.2** ([2]). *Die Harmonizität der Funktion  $g$  bezüglich der Variablen  $x_1$  und  $x_2$  legt  $g$  für  $\frac{d_B - d_A}{2} = b \in \mathbb{N}$  bis auf eine Normierungskonstante fest. Eine Darstellung von  $g$  ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{\rho_{14}^{1-b} \rho_{13}^b \rho_{23} \rho_{34}^{a-1}} \sum_{m=0}^{b-1} \sum_{n=0}^{b-m-1} \frac{(m+1-b)_n (m+1)_n}{(n+1)!} s^n t^{-(n+m)} \\ &= \frac{1}{\rho_{14}^{1-b} \rho_{13}^b \rho_{23} \rho_{34}^{a-1}} \sum_{m=0}^{b-1} F\left((m+1-b), m+1; 1; \frac{s}{t}\right) \left(\frac{1}{t}\right)^m. \end{aligned} \quad (3.8)$$

**Beweis.** Die Eindeutigkeit von  $g$  ergibt sich aus der Aussage des vorigen Satzes zusammen mit der Eindeutigkeit der Partialwellen (vergleiche [3, 4]). Anwenden der Operatoren  $(\square_1)_{s,t}$  und  $\mathcal{Y}_{s,t} = (\square_1)_{s,t} - (\square_2)_{s,t}$  auf die Funktion  $f(s, t) := \sum_{m=0}^{b-1} \sum_{n=0}^{b-m-1} \frac{(m+1-b)_n (m+1)_n}{(n+1)!} s^n t^{-(n+m)}$  zeigt, dass die Funktion  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{f(s,t)}{\rho_{14}^{1-b} \rho_{13}^b \rho_{23}}$  harmonisch in  $x_1$  und  $x_2$  ist. Sie liefert zudem die in Satz 2.2.1 geforderte Asymptotik und ist bis auf eine Normierungskonstante mit der Partialwelle nach [4] identisch.  $\square$

**Satz 3.3.3.** *Die Funktion  $\rho_{34}^{a-1} \langle V(x_1, x_2) B(x_3) A(x_4) \rangle$  ist für  $b > 0$  ein homogenes Polynom in den Variablen  $\rho_{i4}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) vom Grad  $b - 1$ .*

**Beweis.** Wir benutzen die Darstellung (3.8) und zeigen für jede Potenz  $s^n t^{-(n+m)}$  der Summe mit  $0 \leq m \leq b - 1$  und  $0 \leq n \leq b - m - 1$  einzeln die Aussage des Satzes. Wir definieren dazu  $l := b - m - 1 - n \geq b - m - 1 - (b - m - 1) = 0$ .

$$\begin{aligned} \rho_{34}^{a-1} \frac{1}{\rho_{14}^{1-b} \rho_{13}^b \rho_{23} \rho_{34}^{a-1}} s^n t^{-(n+m)} &= \frac{\rho_{14}^{b-1}}{\rho_{13}^b \rho_{23}} \left( \frac{s^n t^l}{t^{b-1}} \right) \\ &= \frac{\rho_{14}^{b-1}}{\rho_{13}^b \rho_{23}} \frac{\left( \frac{\rho_{12} \rho_{34}}{\rho_{13} \rho_{24}} \right)^n \left( \frac{\rho_{14} \rho_{23}}{\rho_{13} \rho_{24}} \right)^l}{\left( \frac{\rho_{14} \rho_{23}}{\rho_{13} \rho_{24}} \right)^{b-1}} = \frac{\rho_{14}^{b-1}}{\rho_{13}^b \rho_{23}} \frac{1}{\rho_{14}^{b-1} \rho_{23}^{b-1}} \frac{\rho_{12}^n \rho_{34}^n \rho_{14}^l \rho_{23}^l}{\rho_{13}^{n+l} \rho_{24}^{n+l}} \rho_{13}^{b-1} \rho_{24}^{b-1} \\ &= \frac{1}{\rho_{13}^b \rho_{23}^b} \left( \rho_{12}^n \rho_{34}^n \rho_{14}^l \rho_{23}^l \rho_{13}^{b-1-n-l} \rho_{24}^{b-1-n-l} \right) \end{aligned}$$

Der auftretende Grad von  $\rho_{14}$  ist  $l \in \mathbb{N}_0$  und entsprechend  $b-1-n-l \in \mathbb{N}_0$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  für  $\rho_{24}$  bzw.  $\rho_{34}$ . Damit definiert jeder Summand ein homogenes Polynom in den Variablen  $\rho_{i4}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) vom Grad  $l + (b - 1 - n - l) + n = b - 1 \in \mathbb{N}_0$ . Da die Homogenität im Index 4 nicht vom betrachteten Summanden abhängt, ist auch  $\rho_{34}^{a-1} \langle V(x_1, x_2) B(x_3) A(x_4) \rangle$  ein homogenes Polynom in den Variablen  $\rho_{i4}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) vom Grad  $b - 1$ .  $\square$

Um den zweiten Operator  $\mathcal{E}_{3,4}$  zu definieren bedienen wir uns des folgenden Satzes, dessen Aussage sich aus Extrapolation der Fälle  $b = 0, 1, 2$  ergab.

**Satz 3.3.4.** *Es sei  $\mathcal{R}_{b-1}$  der Raum der rationalen und im Index 4 homogenen Funktionen vom Grad  $b-1$  und  $\mathcal{P}_{b-1} \subset \mathcal{R}_{b-1}$  der Unterraum der homogenen Polynome. Dann gilt für den spurlosen Differentialoperator  $\left(\partial_4^{\otimes b}\right)_{\text{traceless}}$  auf  $\mathcal{R}_{b-1}$*

$$\text{Ker} \left[ \left(\partial_4^{\otimes b}\right)_{\text{traceless}} \right] = \mathcal{P}_{b-1} \quad . \quad (3.9)$$

*Mit anderen Worten: Der Differentialoperator  $\left(\partial_4^{\otimes b}\right)_{\text{traceless}}$  annihiliert auf  $\mathcal{R}_{b-1}$  genau die homogenen Polynome in den Variablen  $\rho_{i4}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) vom Grad  $b-1$ .*

Der Beweis des Satzes findet sich in Anhang B. Als Resultat der Sätze 3.3.3 und 3.3.4 erhalten wir, dass der Operator

$$\mathcal{E}_{3,4} := \left(\partial_4^{\otimes b}\right)_{\text{traceless}} \rho_{34}^{a-1} \quad (3.10)$$

die Funktion  $\langle V(x_1, x_2)B(x_3)A(x_4) \rangle$  und damit auch jede Funktion der Form  $\langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3)A(x_4) \rangle$  annihiliert.

### Beispiel

Wie möchten noch das Beispiel angeben, welches die allgemeinen Resultate der Sätze 3.3.1, 3.3.3 und 3.3.4 wesentlich motivierte. Wir betrachten dabei die folgende Situation:

- $\phi$  sei ein freies skalares Feld und somit von der Skalendimension  $d = 1$ .
- $W$  sei ein konformes Vektorfeld der Skalendimension  $\Delta > 3$ .
- Wir definieren durch  $(\partial\phi W) := \partial_\mu \phi \otimes W^\mu - \frac{1}{\Delta-3} \phi \otimes \partial_\mu W^\mu$  ein Skalarfeld der Skalendimension  $\Delta + 2$ .
- Das skalare Feld  $A$  der Skalendimension  $d_A = 2\Delta$  sei durch  $A := W_\mu W^\mu$  gegeben.
- Das skalare Feld  $B$  der Skalendimension  $d_B = 2\Delta + 4$  sei durch  $B := (\partial\phi W)(\partial\phi W)$  gegeben.

Es gilt somit  $2b = d_B - d_A = 4$ . Der Twist-2-Anteil von  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$  kann durch Kontraktion aller Komponenten des Vektorfeldes  $W$  berechnet werden. Genauer gilt

$$\begin{aligned} |\Pi_{\kappa=1} B(x_2)A(x_4)\rangle &\sim \rho_{34}^{-(d_A+1)} |X(x_3, x_4)\rangle \\ X(x_3, x_4) &:= (\rho_{34} \square_3 + 4(x_{34} \cdot \partial_3) + 8) \phi^2(x_3) \quad . \end{aligned}$$

Der Twist-2-Anteil der Felder  $A$  und  $B$  enthält also lediglich eine Komponente vom Spin  $L = 0$ . Entsprechend wird  $X(x_3, x_4)$  durch den Operator

$$\mathcal{C}'_{3,4} := \rho_{34} (\partial_3 \cdot \partial_4) - 2((x_{34} \otimes x_{34}) \cdot (\partial_3 \otimes \partial_4)) - 2((x_{34} \cdot \partial_3) + 6(x_{34} \cdot \partial_4))$$

annihiliert. Diese Bedingung ist äquivalent zur Aussage von Satz 3.3.1, dass die Gleichung

$$\mathcal{C}_{3,4} |\Pi_{\kappa=1} B(x_3)A(x_4)\rangle = \lambda_{10} |\Pi_{\kappa=1} B(x_3)A(x_4)\rangle$$

im betrachteten Fall erfüllt ist. Zudem erfüllt  $X(x_3, x_4)$  die Differentialgleichung

$$((\partial_4 \otimes \partial_4) - \eta \square_4) X(x_3, x_4) = 0$$

Der dabei verwendete Operator entspricht genau dem Operator  $\left(\partial_4^{\otimes b}\right)_{\text{traceless}}$  im Fall  $b = 2$ .

### 3.4 Resultate

Wir fassen an dieser Stelle die wichtigen Resultate des Kapitels in einem Theorem zusammen.

**Satz 3.4.1.** *Es seien  $A$  und  $B$  zwei skalare Felder der Skalendimensionen  $d_A$  bzw.  $d_B$ . Weiterhin seien  $a = \frac{d_A+d_B}{2}$  und  $b = \frac{d_B-d_A}{2}$ . Die Projektion auf Twist  $2\kappa = 2$  innerhalb der Funktion  $\langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle$  wird für  $b = 0$  charakterisiert durch die beiden Bedingungen*

$$\begin{aligned} \square_3 \rho_{34}^{a-1} \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle &= 0 \\ \square_4 \rho_{34}^{a-1} \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Für  $b > 0$  wird die Projektion durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{3,4} - \lambda_{10}) \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle &= 0 \\ \left( \left( \partial_4^{\otimes b} \right)_{\text{traceless}} \rho_{34}^{a-1} \right) \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

und für  $b < 0$  durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{3,4} - \lambda_{10}) \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle &= 0 \\ \left( \left( \partial_3^{\otimes (-b)} \right)_{\text{traceless}} \rho_{34}^{a-1} \right) \langle \dots \Pi_{\kappa=1} B(x_3) A(x_4) \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

charakterisiert. Insbesondere enthält für  $b \neq 0$  die Twist-2-Komponente von  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$  nur Anteile vom Spin  $L = 0$ .

## 4 Zum Twist-2-Anteil dreier skalarer Felder

Wir dehnen in diesem Kapitel unsere Untersuchungen auf den Twist-2-Anteil von Vektoren der Form  $|C(x_3)B(x_4)A(x_5)\rangle$ ,  $|\Pi_L C(x_3)B(x_4)A(x_5)\rangle$  und  $|\Pi_L C(x_3)\Pi_{\kappa'L'} B(x_4)A(x_5)\rangle$  aus, wobei  $A$ ,  $B$  und  $C$  skalare Quantenfelder der Skalendimensionen  $d_A$ ,  $d_B$  bzw.  $d_C$  in  $n = 4$  Raumzeitdimensionen bezeichnen. Zur Projektion auf den Twist-2-Anteil beider Vektoren verwenden wir erneut den Vektor  $\langle V(x_1, x_2)|$  und untersuchen Fünfpunktfunktionen, die als Skalarprodukt dieses Vektors und den drei zuvor aufgeführten Vektoren definiert sind. Zunächst definieren wir ein System konform-invarianter Variablen.

$$\begin{aligned} r &:= \frac{\rho_{12}\rho_{34}\rho_{35}}{\rho_{13}\rho_{23}\rho_{45}} & s_1 &:= \frac{\rho_{13}\rho_{45}}{\rho_{14}\rho_{35}} & s_2 &:= \frac{\rho_{23}\rho_{45}}{\rho_{24}\rho_{35}} \\ & & t_1 &:= \frac{\rho_{15}\rho_{34}}{\rho_{14}\rho_{35}} & t_2 &:= \frac{\rho_{25}\rho_{34}}{\rho_{24}\rho_{35}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die fünf Variablen  $r$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  sind unabhängig voneinander und bilden ein unter Vertauschung der Punkte  $x_1$  und  $x_2$  invariantes System. Wir definieren weiterhin die Parameter

$$a := \frac{d_B + d_C - d_A}{2}, \quad b := \frac{d_A + d_C - d_B}{2}, \quad c := \frac{d_A + d_B - d_C}{2} \quad (4.2)$$

und betrachten in diesem Rahmen folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} g_0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= \langle V(x_1, x_2)C(x_3)B(x_4)A(x_5)\rangle &= \frac{f_0(r, s_1, s_2, t_1, t_2)}{\rho_{12}\rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c} \\ g_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= \langle V(x_1, x_2)\Pi_L C(x_3)B(x_4)A(x_5)\rangle &= \frac{f_1(r, s_1, s_2, t_1, t_2)}{\rho_{12}\rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c} \\ g_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= \langle V(x_1, x_2)\Pi_L C(x_3)\Pi_{\kappa'L'} B(x_4)A(x_5)\rangle &= \frac{f_2(r, s_1, s_2, t_1, t_2)}{\rho_{12}\rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Funktionen  $g_i$  genügen Systemen partieller Differentialgleichungen, die wie in Abschnitt 2.1 beschrieben in Gleichungssysteme der Funktionen  $f_i$  transformiert werden können. Für alle  $i \in \{0, 1, 2\}$  sind die Funktionen  $g_i$  harmonisch in den Variablen  $x_1$  und  $x_2$ .

$$\begin{aligned} \square_1 g_i = 0 &\Leftrightarrow (\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0 \\ \square_1 g_i = 0 &\Leftrightarrow (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dies charakterisiert den Twist-2-Anteil. Die Funktionen  $g_i$  mit  $i \in \{1, 2\}$  genügen zusätzlich der Casimirgleichung

$$\mathcal{C}_{3,4,5} g_i = \lambda_{1L} g_i \Leftrightarrow (\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = \lambda_{1L} f_i \quad (4.5)$$

und  $g_2$  erfüllt darüber hinaus noch eine zweite Casimirgleichung

$$\mathcal{C}_{4,5} g_2 = \lambda_{\kappa'L'} g_2 \Leftrightarrow (\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_2 = \lambda_{\kappa'L'} f_2 \quad (4.6)$$

**Bemerkung:** Die Funktion  $g_2$  ist durch die Bedingungen (4.4) bis (4.6) eindeutig festgelegt. Die Lösungen des Systems aus (4.4) und (4.5) sowie die Lösungen von (4.4) besitzen dagegen Freiheitsgrade. Wir werden in Abschnitt 4.2 ein System von Lösungen zu (4.4) und (4.5) angeben.

## 4.1 Transformation der Operatoren

Die Ergebnisse der Transformationen der Differentialoperatoren  $\square_1, \square_2$  sowie  $\mathcal{C}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{C}_{4,5}$  in Differentialoperatoren  $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}, (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  bzw.  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  und  $(\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  bezüglich der konform-invarianten Variablen durch Wirkung auf die Funktionen  $g_i$  aus (4.3) gemäß dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten Verfahren befinden sich im Anhang C in den Tabellen C.1 bis C.3. Das zentrale Ergebnis der Transformation halten wir in Form des folgenden Satzes fest.

**Satz 4.1.1.** *Die Operatoren  $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}, (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  und  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  sind unabhängig von den Skalendimensionen  $d_A, d_B$  und  $d_C$  der Felder  $A, B$  bzw.  $C$ .*

*Beweis.* Zum Beweis des Satzes betrachten wir die Tabellen C.1 bis C.2 in Anhang C.  $\square$

## 4.2 Konstruktion von Lösungen

Die Aussage des Satzes 4.1.1 wird es uns im Folgenden erlauben spezielle Lösungsfunktionen  $g_1$  von (4.4) und (4.5) für beliebige Skalendimensionen  $d_A, d_B$  und  $d_C$  zu konstruieren. Durch Linearkombinationen dieser Lösungen erhalten wir daraus Lösungsfunktionen  $g_0$  von (4.4).

### 4.2.1 Konstruktionsidee

#### Lösungen aus der Annahme $d_A = 0$

Keiner der transformierten Operatoren  $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}, (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  und  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  hängt von den Größen  $a, b$  und  $c$  ab, d.h. die Operatoren sind unabhängig von den Skalendimensionen  $d_A, d_B$  und  $d_C$  der beteiligten Skalarfelder  $A, B$  bzw.  $C$ . Setzen wir zunächst  $d_A = 0$ , so muss  $A$  einem skalaren Vielfachen des Einheitsoperators  $\mathbf{1}$  entsprechen, da diese die einzigen Operatoren der Skalendimension null sind. Das führt dazu, dass sich die Fünfpunktfunktion zu einer Vierpunktfunktion vereinfacht.

$$\langle V(x_1, x_2) \Pi_L C(x_3) B(x_4) A(x_5) \rangle \xrightarrow{d_A=0} \langle V(x_1, x_2) \Pi_L C(x_3) B(x_4) \rangle$$

Die Form der Vierpunktfunktion ist nach [4] und (3.8) bekannt. Mit den Definitionen des vorherigen Abschnitts gilt

$$a = \frac{d_B + d_C}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{d_C - d_B}{2} = -c \quad .$$

Aus der Behandlung der Vierpunktfunktionen wissen wir, dass die Lösung  $g_1$  des Systems

$$\begin{aligned} \square_1 g_1 &= 0 = \square_2 g_1 \\ \mathcal{C}_{3,4} g_1 &= \lambda_{1L} g_1 \end{aligned} \tag{4.7}$$



sich nach [4] als  $g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a} \left(\frac{\rho_{14}}{\rho_{13}}\right)^b f_{b,L}(s, t)$  mit einer bis auf einen konstanten Vorfaktor eindeutigen Funktion  $f_{b,L}$  der konformen Invarianten schreiben lässt. Wir benutzen die Identitäten  $rs_2 = s$  und  $\frac{s_2}{s_1} = t$  um die Lösung für unsere Zwecke geeignet umzuschreiben.

$$\begin{aligned} {}_A g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a} \left(\frac{\rho_{14}}{\rho_{13}}\right)^b f_{b,L}(s, t) \\ &= \frac{\rho_{45}^b}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b} \left(\frac{\rho_{14}\rho_{35}}{\rho_{13}\rho_{45}}\right)^b f_{b,L}\left(rs_2, \frac{s_2}{s_1}\right) \\ &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} \underbrace{\left(\frac{1}{s_1}\right)^b}_{=: Af_{b,L}(r, s_1, s_2, t_1, t_2)} f_{b,L}\left(rs_2, \frac{s_2}{s_1}\right) \end{aligned}$$

Der Index  $A$  kennzeichnet die Annahme  $d_A = 0$ . Im letzten Schritt der Rechnung haben wir  $b = -c$  ausgenutzt. Die Funktion  $Af_{b,L}$  entsteht also aus der Funktion  $Ag_{b,L}$ , indem man den Vorfaktor abspaltet, den wir zur Transformation der Operatoren im vorangegangenen Abschnitt benutzt haben. Sie löst somit für  $d_A = 0$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\square_1)_{r, s_1, s_2, t_1, t_2} Af_{b,L} &= 0 = (\square_2)_{r, s_1, s_2, t_1, t_2} Af_{b,L} \\ (\mathcal{C}_{3,4,5})_{r, s_1, s_2, t_1, t_2} Af_{b,L} &= \lambda_{1L} Af_{b,L} \quad . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Die Annahme  $d_A = 0$  fließt jedoch an keiner Stelle in die transformierten Operatoren  $(\square_1)_{r, s_1, s_2, t_1, t_2}$ ,  $(\square_2)_{r, s_1, s_2, t_1, t_2}$  und  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r, s_1, s_2, t_1, t_2}$  ein, die nach Satz 4.1.1 unabhängig von den Skalendimensionen der Felder sind, sodass ungeachtet der beteiligten Felder  $A, B, C$  die Funktion  $Af_{k,L}$  durch

$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{Af_{k,L}(r, s_1, s_2, t_1, t_2)}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

eine Lösung  $g_1$  von (4.4) und (4.5) definiert.

### Weitere Lösungen

Es können vollkommen analog zum Vorangegangenen Lösungen aus den Annahmen  $d_B = 0$  bzw.  $d_C = 0$  konstruiert werden. Wir definieren dazu für  $i, j \in \{3, 4, 5\}$  die Variablen

$$s_{i,j} := \frac{\rho_{12}\rho_{ij}}{\rho_{1i}\rho_{2j}} \quad \text{und} \quad t_{i,j} := \frac{\rho_{1j}\rho_{2i}}{\rho_{1i}\rho_{2j}} \quad . \tag{4.9}$$

Man beachte, dass  $s_{3,4} = s$  und  $t_{3,4} = t$  gilt. Die Variablen lassen sich wie in Tabelle 4.1 aufgeführt über die konform-invarianten Variablen  $r, s_1, s_2, t_1, t_2$  darstellen. Dabei befinden sich in der zweiten Spalte die Indizes  $(i, j)$ , die für die Variablen  $s_{i,j}$  und  $t_{i,j}$  zu verwenden sind, um die Lösung aus der Annahme der ersten Spalte darzustellen. Da die Operatoren (4.8) ein unter Vertauschung von  $x_1$  und  $x_2$  symmetrisches System bilden, sind auch alle Funktionen, die man aus der Vertauschung der Indizes 1 und 2 in den konform-invarianten Variablen der Lösungsfunktionen erhält, Lösungen des Systems (4.8). Wir führen zusätzlich die Variablen

$$\hat{s}_{i,j} := \frac{\rho_{12}\rho_{ij}}{\rho_{1j}\rho_{2i}} = \frac{s_{i,j}}{t_{i,j}} \quad \text{und} \quad \hat{t}_{i,j} := \frac{\rho_{1i}\rho_{2j}}{\rho_{1j}\rho_{2i}} = \frac{1}{t_{i,j}} \tag{4.10}$$

Lösung aus Annahme	$(i, j)$	$s_{i,j}$	$\hat{s}_{i,j}$	$t_{i,j}$	$\hat{t}_{i,j}$
$d_A = 0$	(3, 4)	$r \cdot s_2$	$r \cdot s_1$	$\frac{s_2}{s_1}$	$\frac{s_1}{s_2}$
$d_B = 0$	(3, 5)	$\frac{r \cdot s_2}{t_2}$	$\frac{r \cdot s_1}{t_1}$	$\frac{s_1 \cdot t_2}{s_2 \cdot t_1}$	$\frac{s_2 \cdot t_1}{s_1 \cdot t_2}$
$d_C = 0$	(4, 5)	$\frac{r \cdot s_1 \cdot s_2}{t_2}$	$\frac{r \cdot s_1 \cdot s_2}{t_1}$	$\frac{t_2}{t_1}$	$\frac{t_1}{t_2}$

Tabelle 4.1: Zu den Variablen (4.9) und (4.10)

ein, welche genau durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 aus  $s_{i,j}$  und  $t_{i,j}$  hervorgehen. Auch diese lassen sich, wie in Tabelle 4.1 aufgeführt, über die konform-invarianten Variablen  $r, s_1, s_2, t_1, t_2$  darstellen.

Aus der Annahme  $d_B = 0$  erhalten wir unter Verwendung von  $a = -c$  die Lösungen

$$\begin{aligned}
{}_{B}g_1(x_1, x_2, x_3, x_5) &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{35}^b} \left( \frac{\rho_{15}}{\rho_{13}} \right)^a f_{a,L}(s_{3,5}, t_{3,5}) \\
&= \frac{\rho_{45}^a}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b} \left( \frac{\rho_{15}\rho_{34}}{\rho_{13}\rho_{45}} \right)^a f_{a,L} \left( \frac{r s_2}{t_2}, \frac{s_2 t_1}{s_1 t_2} \right) \\
&= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} \underbrace{\left( \frac{t_1}{s_1} \right)^a f_{a,L} \left( \frac{r s_2}{t_2}, \frac{s_2 t_1}{s_1 t_2} \right)}_{=: {}_{B}f_{a,L}(r, s_1, s_2, t_1, t_2)}.
\end{aligned}$$

Aus der Annahme  $d_C = 0$  erhalten wir unter Verwendung von  $a = -b$  die Lösungen

$$\begin{aligned}
{}_{C}g_1(x_1, x_2, x_4, x_5) &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{45}^c} \left( \frac{\rho_{15}}{\rho_{14}} \right)^a f_{a,L}(s_{4,5}, t_{4,5}) \\
&= \frac{\rho_{35}^a}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{45}^c} \left( \frac{\rho_{15}\rho_{34}}{\rho_{14}\rho_{35}} \right)^a f_{a,L} \left( \frac{r s_1 s_2}{t_2}, \frac{t_1}{t_2} \right) \\
&= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} \underbrace{(t_1)^a f_{a,L} \left( \frac{r s_1 s_2}{t_2}, \frac{t_1}{t_2} \right)}_{=: {}_{C}f_{a,L}(r, s_1, s_2, t_1, t_2)}.
\end{aligned}$$

### 4.2.2 Klassifikation von Lösungen

Die Lösungen der Gleichungen (4.8) lassen sich durch die Eigenwerte  $\lambda_{1L}$  des transformierten Casimiroperators klassifizieren. Wir werden die zugehörigen Eigenräume mit  $\mathcal{E}_{1,L}$  bezeichnen. Weiterhin sei  $\mathcal{E}_1 = \bigoplus_{L=0}^{\infty} \mathcal{E}_{1,L}$  der Raum aller Lösungen von (4.8). Die Anzahl der von uns konstruierten Lösungen hängt vom Spin  $L$  ab. Wir beschränken uns bei den folgenden Betrachtungen wieder auf die Lösungen des Spezialfalls  $d_A = 0$ . Die Resultate gelten aber vollkommen analog auch für die weiteren Lösungen.

#### Felder unterschiedlicher Skalendimension

Die Tatsache, dass die Funktion  $\langle V(x_1, x_2)C(x_3)B(x_4) \rangle$  für unterschiedliche Skalendimensionen  $d_C \neq d_B$  durch die Partialwelle zum Spin  $L = 0$  festgelegt ist, führt dazu, dass für  $b \neq 0$  nur Lösungen der Form

$$Af_{b,0}(r, s_1, s_2, t_1, t_2) = \left(\frac{1}{s_1}\right)^b f_{b,0}\left(rs_2, \frac{s_2}{s_1}\right)$$

angegeben werden können. Dies liefert eine biharmonische Funktion zum Eigenwert  $\lambda_{10}$  des Casimiroperators.

#### Felder gleicher Skalendimension

Im Fall  $b = 0$  sind alle Partialwellen gemäß [4] vom Twist 2 Lösungen der Gleichungen (4.7). Sie werden durch den Spin  $L \in \mathbb{N}_0$  indiziert. Hierbei ist der Eigenwert der Lösung bei Anwendung des Casimiroperators  $\lambda_{1L}$  also vom Spin  $L$  abhängig.

#### Zusammenfassung

Da alle Lösungen biharmonisch sind, liegen sie im Raum  $\mathcal{E}_1$  der Partialwellenentwicklung zu  $\kappa = 1$ . Da sie weiterhin Eigenfunktionen des Casimiroperators zum Eigenwert  $\lambda_{1L}$  sind, müssen sie sogar in den Unterräumen  $\mathcal{E}_{1,L}$  zum Spin  $L$  liegen. Es ist also nicht möglich, dass die konstruierten Lösungen in Eigenräumen höheren Twists mit niedrigerem Spin liegen, was aufgrund der Abhängigkeit des Eigenwerts  $\lambda_{\kappa L}$  von den beiden Quantenzahlen Twist  $2\kappa$  und Spin  $L$  denkbar wäre. Insgesamt können wir folgende Fakten festhalten:

- Wir erhalten drei Scharen von Lösungen von (4.7) bzw. (4.8) gemäß den Fällen  $d_A = 0$ ,  $d_B = 0$  und  $d_C = 0$ .
- Aus jedem Element dieser Scharen lässt sich durch die Vertauschung  $x_1 \leftrightarrow x_2$  eine weitere Lösung bestimmen.
- Jede der Scharen liefert beliebig viele Lösungen im Eigenraum  $\mathcal{E}_{1,0}$  zum Twist 2 und Spin  $L = 0$ .
- Jede der Scharen liefert genau eine Lösung im Eigenraum  $\mathcal{E}_{1,L}$  zum Twist 2 und  $L \in \mathbb{N}$ .

### 4.2.3 Explizite Form der Lösungen

Die im Folgenden aufgeführten speziellen Lösungen  $g_{\delta,(i,j)}$  und  $g_{(i,j),L}$  sind über Funktionen der konform-invarianten Variablen  $r, s_1, s_2, t_1, t_2$  definiert. Der Index  $(i, j) = (3, 4)$  kennzeichnet dabei Lösungen, die man aus der Annahme  $d_A = 0$  erhält. Die Indizes  $(i, j) = (3, 5)$  und  $(i, j) = (4, 5)$  kennzeichnen entsprechend die Lösungen der Betrachtungen  $d_B = 0$  bzw.  $d_C = 0$ . Wir nehmen nun eine der Lösungsscharen an, die dem Spezialfall entstammen, dass eines der Felder  $A, B$  oder  $C$  die Skalendimension 0 besitzt. Da im Fall nicht verschwindender Skalendimensionsdifferenz  $\delta = 2k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  der anderen beiden Felder gemäß Satz 3.3.1 nur der Fall des Spins  $L = 0$  eine Lösung liefert, entfällt die Spinabhängigkeit der Lösung und wir können  $g_{\delta,(i,j)}$  schreiben. Im Fall  $\delta = 0$  hingegen werden die Lösungen  $g_{(i,j),L}$  durch den Spin  $L$  indiziert und tragen keine  $\delta$ -Abhängigkeit mehr. Zur Darstellung der Lösungen definieren wir sogenannte chirale Variablen zu  $s$  und  $t$  durch

$$s_{i,j} =: u_{i,j} v_{i,j} \quad \text{und} \quad t_{i,j} =: (u_{i,j} - 1) (v_{i,j} - 1) \quad .$$

Analog müssen wir chirale Variablen für  $\hat{s}_{i,j}$  und  $\hat{t}_{i,j}$  einführen.

$$\begin{aligned} \hat{s}_{i,j} &=: \hat{u}_{i,j} \hat{v}_{i,j} = \frac{u_{i,j}}{u_{i,j} - 1} \frac{v_{i,j}}{v_{i,j} - 1} \\ \hat{t}_{i,j} &=: (\hat{u}_{i,j} - 1) (\hat{v}_{i,j} - 1) = \frac{1}{u_{i,j} - 1} \frac{1}{v_{i,j} - 1} \end{aligned}$$

Benutzt man die Relationen zwischen  $\hat{s}_{i,j}, \hat{t}_{i,j}$  und  $s_{i,j}, t_{i,j}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i,j} \hat{v}_{i,j} &= \hat{s}_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{t_{i,j}} = \frac{u_{i,j}}{u_{i,j} - 1} \frac{v_{i,j}}{v_{i,j} - 1} \\ (\hat{u}_{i,j} - 1) (\hat{v}_{i,j} - 1) &= \hat{t}_{i,j} = \frac{1}{t_{i,j}} = \frac{1}{u_{i,j} - 1} \frac{1}{v_{i,j} - 1} = \left( \frac{u_{i,j}}{u_{i,j} - 1} - 1 \right) \left( \frac{v_{i,j}}{v_{i,j} - 1} - 1 \right) \quad . \end{aligned}$$

Daraus lässt sich unmittelbar (vergleiche mit Definition von  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  im Abschnitt 2.3)

$$\hat{u}_{i,j} = \frac{u_{i,j}}{u_{i,j} - 1} \quad \text{und} \quad \hat{v}_{i,j} = \frac{v_{i,j}}{v_{i,j} - 1}$$

ablesen. Wir geben außerdem einen Ausdruck für die inverse Transformation von konform-invarianten Variablen in chirale Variablen an (siehe [14]), der für  $s_{i,j} < (1 - \sqrt{t_{i,j}})^2$  mit  $u_{i,j}, v_{i,j} \in \mathbb{R}$  und  $u_{i,j} + v_{i,j} < 1 - t_{i,j} + s_{i,j} < 2$  gültig ist.

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{2} \left( (1 - t_{i,j} + s_{i,j}) + \sqrt{(1 - t_{i,j} + s_{i,j})^2 - 4s_{i,j}} \right) \\ v_{i,j} &= \frac{1}{2} \left( (1 - t_{i,j} + s_{i,j}) - \sqrt{(1 - t_{i,j} + s_{i,j})^2 - 4s_{i,j}} \right) \end{aligned}$$

Weiterhin definieren wir zur Verkürzung der auftretenden Terme die beiden Funktionen (vergleiche mit den Definitionen aus Kapitel 2 und mit [4])

$$\begin{aligned} G_{k,\mu}(x) &:= x^{\mu+1} F \left( \mu, \mu + \frac{k}{2}; 2\mu; x \right) \\ E_{k,\nu}(x, y) &:= \frac{1}{x - y} (G_{k,1+\nu}(x) G_{k,0}(y) - G_{k,1+\nu}(y) G_{k,0}(x)) \quad . \end{aligned}$$

Die Lösungen von (4.4) und (4.5) schreiben sich somit in der Form

$$\begin{aligned} g_{\delta,(i,j)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} (q_{(i,j)}(s_1, t_1))^{\frac{\delta}{2}} E_{\delta,0}(u_{i,j}, v_{i,j}) \\ g_{(i,j),L}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} E_{0,L}(u_{i,j}, v_{i,j}) \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Durch Vertauschung von  $x_1$  und  $x_2$  erhält man zusätzlich die Lösungen

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\delta,(i,j)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} (q_{(i,j)}(s_2, t_2))^{\frac{\delta}{2}} E_{\delta,0}(\hat{u}_{i,j}, \hat{v}_{i,j}) \\ \hat{g}_{(i,j),L}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} E_{0,L}(\hat{u}_{i,j}, \hat{v}_{i,j}) \quad . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dabei gilt stets  $\frac{\delta}{2} \in \mathbb{Z}$ . Die Form der Funktionen  $q_{(i,j)}$  kann Tabelle 4.2 entnommen werden.

$q_{(3,4)}(x, y)$	$q_{(3,5)}(x, y)$	$q_{(4,5)}(x, y)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{y}{x}$	$y$

Tabelle 4.2: Definition von  $q_{(i,j)}$

Wir haben eine Menge spezieller Lösungen  $g_1$  des Systems der Gleichungen (4.4) und (4.5) konstruiert. Durch Linearkombination dieser Lösungen lassen sich wiederum allgemeinere Lösungen  $g_0$  von (4.4) konstruieren. Eine Lösung  $g_2$  konnte für beliebige Skalendimensionen  $d_A$ ,  $d_B$  und  $d_C$  der Felder  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$  nicht gefunden werden, da in diesem Fall der Operator  $(\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,s_3,s_4}$  von den Skalendimensionen der Felder abhängt. Lediglich die Lösung  $g_2 :=_A g_1$  liefert für  $d_A = 0$  eine Lösung  $g_2$  zum Spezialfall  $\mathcal{C}_{4,5}$   $g_2 = \lambda_{1,L} g_2$  von Gleichung (4.6).

#### 4.2.4 Alternative Darstellung der Lösungen

Wir können alternativ zur Darstellung der Partialwellen nach [4] für den Spezialfall  $\delta \neq 0$  und  $L = 0$  auch die Lösungsdarstellung (3.8) benutzen. Für  $d_A = 0$  und  $\delta = 2b$  erhält man

$$\begin{aligned} Ag_{b,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{\rho_{14}^{1-b}\rho_{13}^b\rho_{23}\rho_{34}^{a-1}} f_b(s_{3,4}, t_{3,4}) \\ &= \frac{\rho_{45}^{-b}}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b} \frac{\rho_{12}\rho_{34}\rho_{35}^b}{\rho_{14}^{1-b}\rho_{13}^b\rho_{23}\rho_{45}^b} f_b(s_{3,4}, t_{3,4}) \\ &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} \frac{\rho_{12}\rho_{34}\rho_{35}}{\rho_{13}\rho_{23}\rho_{45}} \left( \frac{\rho_{14}\rho_{35}}{\rho_{13}\rho_{45}} \right)^{b-1} f_b(s_{3,4}, t_{3,4}) \\ &= \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c} r s_1^{-b+1} f_b(s_{3,4}, t_{3,4}) \quad . \end{aligned}$$

Setzen wir  $d_B = 0$  und  $\delta = 2a$  gilt

$$\begin{aligned}
B g_{a,0}(x_1, x_2, x_3, x_5) &= \frac{1}{\rho_{15}^{1-a} \rho_{13}^a \rho_{23} \rho_{35}^{b-1}} f_a(s_{3,5}, t_{3,5}) \\
&= \frac{\rho_{45}^a}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b} \frac{\rho_{12} \rho_{15}^{a-1} \rho_{34}^a \rho_{35}}{\rho_{13}^a \rho_{23} \rho_{45}^a} f_a(s_{3,5}, t_{3,5}) \\
&= \frac{\rho_{45}^a}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b} \frac{\rho_{12} \rho_{34} \rho_{35}}{\rho_{13} \rho_{23} \rho_{45}} \left( \frac{\rho_{15} \rho_{34}}{\rho_{13} \rho_{45}} \right)^{a-1} f_a(s_{3,5}, t_{3,5}) \\
&= \frac{1}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c} r \left( \frac{t_1}{s_1} \right)^{a-1} f_a(s_{3,5}, t_{3,5}) .
\end{aligned}$$

Für  $d_C = 0$  und  $\delta = 2a$  folgt

$$\begin{aligned}
C g_{a,0}(x_1, x_2, x_4, x_5) &= \frac{1}{\rho_{15}^{1-a} \rho_{14}^a \rho_{24} \rho_{45}^{c-1}} f_a(s_{4,5}, t_{4,5}) \\
&= \frac{\rho_{35}^a}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{45}^c} \frac{\rho_{12} \rho_{15}^{a-1} \rho_{34}^a \rho_{45}}{\rho_{14}^a \rho_{24} \rho_{35}^a} f_a(s_{4,5}, t_{4,5}) \\
&= \frac{\rho_{35}^a}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b} \frac{\rho_{12} \rho_{34} \rho_{45}}{\rho_{14} \rho_{24} \rho_{35}} \left( \frac{\rho_{15} \rho_{34}}{\rho_{14} \rho_{35}} \right)^{a-1} f_a(s_{4,5}, t_{4,5}) \\
&= \frac{1}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c} r s_1 s_2 t_1^{a-1} f_a(s_{4,5}, t_{4,5}) .
\end{aligned}$$

Die Funktion  $f_m(x, y)$  ist definiert durch

$$f_m(x, y) := \sum_{k=0}^{m-1} F \left( k - m + 1, k + 1; 1; \frac{x}{y} \right) \left( \frac{1}{y} \right)^k .$$

Man erhält mit den in Tabelle 4.3 aufgeführten Funktionen  $p_{\delta,(i,j)}$  die Lösungen

$$\begin{aligned}
F_{\delta,(i,j)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c} \cdot p_{\frac{\delta}{2},(i,j)}(r, s_1, s_2, t_1, t_2) f_{\frac{\delta}{2}}(s_{i,j}, t_{i,j}) \\
\hat{F}_{\delta,(i,j)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c} \cdot p_{\frac{\delta}{2},(i,j)}(r, s_2, s_1, t_2, t_1) f_{\frac{\delta}{2}}(\hat{s}_{i,j}, \hat{t}_{i,j}) .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$p_{m,(3,4)}(v, w, x, y, z)$	$p_{m,(3,5)}(v, w, x, y, z)$	$p_{m,(4,5)}(v, w, x, y, z)$
$v \left( \frac{1}{w} \right)^{m-1}$	$v \left( \frac{y}{w} \right)^{m-1}$	$v w x (y)^{m-1}$

Tabelle 4.3: Zur Definition von  $p_{m,(i,j)}$

### 4.3 Zur Unvollständigkeit der Lösungen

Wir wollen in diesem Abschnitt einen Beweis dafür geben, dass das von uns in Kapitel 4.2 konstruierte System von Lösungen unvollständig ist und formulieren folgenden Satz.

**Satz 4.3.1.** *Die speziellen Lösungen  $g_{\delta,(i,j)}$  und  $g_{(i,j),L}$  mit  $i \in \{3, 4, 5\}$  bilden kein vollständiges System von Lösungen zu (4.4). Mit anderen Worten: Es gibt biharmonische Funktionen  $g$ , die nicht vollständig nach den Lösungen  $g_{\delta,(i,j)}$  und  $g_{(i,j),L}$  entwickelt werden können.*

**Beweis.** Zum Beweis betrachten wir zunächst die Lösungen  $g_{\delta,(3,4)}$  und  $g_{(3,4),L}$ . Diese hängen per Konstruktion nicht von den beiden Abstandskwadrate  $\rho_{15}$  und  $\rho_{25}$  ab. Ebenso können  $\hat{g}_{\delta,(3,4)}$  und  $\hat{g}_{(3,4),L}$ , da sie lediglich durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 in den Abstandskwadrate aus  $g_{\delta,(3,4)}$  bzw.  $g_{(3,4),L}$  hervorgehen, nicht von diesen Variablen abhängen. Die Lösungen zu  $(i, j) = (3, 4)$  liegen somit allesamt im Kern des Operators

$$\mathcal{A}_5 := \frac{\partial}{\partial \rho_{15}} + \frac{\partial}{\partial \rho_{25}} \quad .$$

Analog findet man, dass die Lösungen zu  $(i, j) = (3, 5)$  nicht von  $\rho_{14}$  und  $\rho_{24}$  und die Lösungen zu  $(i, j) = (4, 5)$  nicht von  $\rho_{13}$  und  $\rho_{23}$  abhängen können. In Tabelle 4.4 sind die drei Typen der Lösungen aus Kapitel 4.2, unterschieden durch den Index  $(i, j)$ , angegeben. Nebenstehend finden sich die Variablen, von denen die Lösungen per Definition nicht abhängen, und in der rechten Spalte ein Operator, der die Lösungen annulliert. Da die drei Operatoren in der rechten Spalte

Typ der Lösung	Nicht auftretende Variablen	Annihilierender Operator
$(i, j) = (3, 4)$	$\rho_{15}, \rho_{25}$	$\mathcal{A}_5 = \frac{\partial}{\partial \rho_{15}} + \frac{\partial}{\partial \rho_{25}}$
$(i, j) = (3, 5)$	$\rho_{14}, \rho_{24}$	$\mathcal{A}_4 = \frac{\partial}{\partial \rho_{14}} + \frac{\partial}{\partial \rho_{24}}$
$(i, j) = (4, 5)$	$\rho_{13}, \rho_{23}$	$\mathcal{A}_3 = \frac{\partial}{\partial \rho_{13}} + \frac{\partial}{\partial \rho_{23}}$

Tabelle 4.4: Zu den Lösungen von (4.7)

miteinander kommutieren, ist

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_5 = \left( \frac{\partial}{\partial \rho_{13}} + \frac{\partial}{\partial \rho_{23}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \rho_{14}} + \frac{\partial}{\partial \rho_{24}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \rho_{15}} + \frac{\partial}{\partial \rho_{25}} \right)$$

ein Operator, der beliebige Linearkombinationen aller in 4.2 gefundenen Lösungen annulliert. Würden die von uns konstruierten Lösungen von (4.8) ein vollständiges System bilden, so ließe sich jede Fünfpunktfunktion der Form

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := \langle : \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) : C(x_3)B(x_4)A(x_5) \rangle \quad (4.14)$$

komplett nach diesen Lösungen entwickeln. Dabei sind  $\phi_1$  und  $\phi_2$  freie Felder und das normalgeordnete Produkt  $:\phi_1(x_1)\phi_2(x_2):$  tritt an die Stelle von  $V(x_1, x_2)$ <sup>1</sup>. Da der Operator  $\mathcal{A}$  jedoch jede der Partialwellen einzeln annihiliert, müsste er auch die komplette Fünfpunktfunktion (4.14) annihilieren. Wir konstruieren nun eine Fünfpunktfunktion, die nicht von  $\mathcal{A}$  annihiliert wird und deshalb nicht vollständig nach den von uns konstruierten Lösungen entwickelt werden kann. Dazu definieren wir Felder  $C$ ,  $B$  und  $A$ , die aus dem Multipllett der Felder  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$  der Skalendimension 1 sowie deren Ableitungen gebildet sind. Sei zunächst

$$\left( : \phi \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi : \right) (x) := (: \phi(\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \phi)\psi :) (x)$$

für zwei beliebige Skalarfelder  $\phi$  und  $\psi$  definiert. Die Felder  $A$ ,  $B$ ,  $C$  wählen wir

$$\begin{aligned} C(x_3) &:= :(\phi_0 \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \phi_2)(\phi_1 \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \phi_3): (x_3) \\ B(x_4) &:= : \phi_0 \phi_1 : (x_4) \\ A(x_5) &:= : \phi_1 \phi_3 : (x_5) \quad . \end{aligned}$$

Das folgende Kontraktionsschema definiert unser Gegenbeispiel<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} & \langle : \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) : \left( : \underbrace{(\phi_0 \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \phi_2)(\phi_1 \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \phi_3)}_{\text{Klammern}} : (x_3) \right) \left( : \phi_0 \phi_1 : (x_4) \right) \left( : \phi_1 \phi_3 : (x_5) \right) \rangle \\ &= \frac{1}{\rho_{15}} \langle \phi_0(x_3)\phi_0(x_4) \rangle \langle \phi_2(x_2) (\partial_{3\mu} \phi_2(x_3)) \rangle \langle \phi_1(x_3)\phi_1(x_4) \rangle \langle (\partial_3^\mu \phi_3(x_3)) \phi_3(x_5) \rangle \\ &- \frac{1}{\rho_{15}} \langle \phi_0(x_3)\phi_0(x_4) \rangle \langle \phi_2(x_2) (\partial_{3\mu} \phi_2(x_3)) \rangle \langle (\partial_3^\mu \phi_1(x_3)) \phi_1(x_4) \rangle \langle \phi_3(x_3)\phi_3(x_5) \rangle \\ &- \frac{1}{\rho_{15}} \langle (\partial_{3\mu} \phi_0(x_3)) \phi_0(x_4) \rangle \langle \phi_2(x_2)\phi_2(x_3) \rangle \langle \phi_1(x_3)\phi_1(x_4) \rangle \langle (\partial_3^\mu \phi_3(x_3)) \phi_3(x_5) \rangle \\ &+ \frac{1}{\rho_{15}} \langle (\partial_{3\mu} \phi_0(x_3)) \phi_0(x_4) \rangle \langle \phi_2(x_2)\phi_2(x_3) \rangle \langle (\partial_{3\mu} \phi_1(x_3)) \phi_1(x_4) \rangle \langle \phi_3(x_3)\phi_3(x_5) \rangle \\ &= \frac{1}{\rho_{15}} \frac{1}{\rho_{34}} \left( \partial_{3\mu} \frac{1}{\rho_{23}} \right) \frac{1}{\rho_{34}} \left( \partial_3^\mu \frac{1}{\rho_{35}} \right) - \frac{1}{\rho_{15}} \frac{1}{\rho_{34}} \left( \partial_{3\mu} \frac{1}{\rho_{23}} \right) \frac{1}{\rho_{35}} \cdot \left( \partial_3^\mu \frac{1}{\rho_{34}} \right) \\ &- \frac{1}{\rho_{15}} \frac{1}{\rho_{23}} \left( \partial_{3\mu} \frac{1}{\rho_{34}} \right) \frac{1}{\rho_{34}} \left( \partial_3^\mu \frac{1}{\rho_{35}} \right) + \frac{1}{\rho_{15}} \frac{1}{\rho_{23}} \left( \partial_{3\mu} \frac{1}{\rho_{34}} \right) \frac{1}{\rho_{35}} \left( \partial_3^\mu \frac{1}{\rho_{34}} \right) \\ &= \frac{4}{\rho_{15}\rho_{23}\rho_{34}^2\rho_{35}} \left( \frac{x_{32} \cdot x_{35}}{\rho_{23}\rho_{35}} - \frac{x_{32} \cdot x_{34}}{\rho_{23}\rho_{34}} - \frac{x_{34} \cdot x_{35}}{\rho_{34}\rho_{35}} + \frac{x_{34} \cdot x_{34}}{\rho_{34}\rho_{34}} \right) \\ &= \frac{2}{\rho_{15}\rho_{23}\rho_{34}^2\rho_{35}} \left( \frac{\rho_{35} - \rho_{25} + \rho_{23}}{\rho_{23}\rho_{35}} - \frac{\rho_{34} - \rho_{24} + \rho_{23}}{\rho_{23}\rho_{34}} - \frac{\rho_{35} - \rho_{45} + \rho_{34}}{\rho_{34}\rho_{35}} + \frac{2}{\rho_{34}} \right) \\ &= \frac{2}{\rho_{15}\rho_{23}\rho_{34}^2\rho_{35}} \left( \frac{\rho_{24}}{\rho_{23}\rho_{34}} + \frac{\rho_{45}}{\rho_{34}\rho_{35}} - \frac{\rho_{25}}{\rho_{23}\rho_{35}} \right) \end{aligned}$$

Diese Fünfpunktfunktion ist per Konstruktion harmonisch in der Variablen  $x_1$  und  $x_2$  und wird vom Operator  $\mathcal{A}$  nicht annihiliert, da der erste Summand auf der rechten Seite einen Term das Verhalten  $\frac{\rho_{24}}{\rho_{15}\rho_{23}^2}$  liefert. Sie kann deswegen nicht vollständig nach den Lösungen von Abschnitt 4.2 entwickelt werden.  $\square$

<sup>1</sup>Dies ist möglich, da  $V(x_1, x_2)$  sich aus Termen der Form  $:\phi_1(x_1)\phi_2(x_2):$  zusammensetzt, die manifest Twist-2-Komponenten besitzen.

<sup>2</sup>Kontraktionen werden durch eine Klammer oberhalb oder unterhalb der Korrelationsfunktion gekennzeichnet und geben die Abspaltung der Zweipunktfunktion der beiden geklammerten Felder  $\phi_i$   $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  vom Rest der Korrelationsfunktion an.



## 4.4 Zur Charakterisierung des Twist-2-Anteils

Analog den im Fall zweier skalarer Felder  $A$  und  $B$  gefundenen Twist-2-charakterisierenden Operatoren  $\mathcal{D}_{3,4}$  und  $\mathcal{E}_{3,4}$  ist es wünschenswert Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  der Variablen  $x_3$ ,  $x_4$  und  $x_5$  zu finden, die Funktionen des Typs  $\langle V(x_1, x_2)C(x_3)B(x_4)A(x_5) \rangle$  und somit auch jede andere Funktion der Form  $\langle \dots \Pi_{\kappa=1} C(x_3)B(x_4)A(x_5) \rangle$  annihilieren, sodass eine Charakterisierung der Twist-2-Projektion gegeben ist. Unsere Strategie solche Operatoren zu finden ist wie im Vierpunktfall die Transformation der Operatoren in konform-invariante Variablen. Die Gleichungen  $\mathcal{D}_{3,4,5} g_i = 0$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5} g_i = 0$  charakterisieren die Projektion auf Twist 2 durch  $\langle V(x_1, x_2) |$  äquivalent zu  $\square_1 g_i = 0$  und  $\square_2 g_i = 0$ , falls die transformierten Gleichungen  $(\mathcal{D}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0$  und  $(\mathcal{E}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0$  ein zum System  $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0$  und  $(\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0$  äquivalentes System partieller Differentialgleichungen bilden. Dies ist im folgenden Diagramm dargestellt.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{D}_{3,4,5} g_i = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{D}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0 \\ \mathcal{E}_{3,4,5} g_i = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{E}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0 \Leftrightarrow \square_1 g_i = 0 \\ (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f_i = 0 \Leftrightarrow \square_2 g_i = 0 \end{array} \right.$$

Wir werden jedoch in diesem Abschnitt aufzeigen, dass die von uns verfolgte Strategie die Operatoren  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  zu finden mit Schwierigkeiten verbunden ist. Dazu treffen wir die folgende Definition.

**Definition 4.4.1.** *Einen Differentialoperator bezüglich der Variablen  $x_1, \dots, x_5$  nennen wir 1-2-symmetrisch, wenn er invariant unter der Vertauschung  $x_1 \leftrightarrow x_2$  ist. Entsprechend heißen Differentialoperatoren bezüglich der Abstandskvadratrate oder bezüglich der konform-invarianten Variablen 1-2-symmetrisch, wenn sie invariant unter der Vertauschung  $\rho_{1j} \leftrightarrow \rho_{2j} \quad \forall j \in \{3, 4, 5\}$  bzw. der Vertauschung  $s_1 \leftrightarrow s_2$  sowie  $t_1 \leftrightarrow t_2$  sind.*

Wir bemerken, dass bei entsprechendem Austausch der Indizes 1 und 2 innerhalb der Operatoren  $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  und  $(\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  die Operatoren zwar in einander jedoch nicht in sich selbst überführt werden. Die Operatoren sind somit nicht 1-2-symmetrisch. Es sei  $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}^{(1)}$  ein Differentialoperator der konform-invarianten Variablen und  $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}^{(2)}$  der durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 in allen Termen von  $\mathcal{A}_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}^{(1)}$  entstehende Operator. Dann ist der Operator

$$\mathcal{A}_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}^{(1)} (\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} + \mathcal{A}_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}^{(2)} (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} \quad (4.15)$$

1-2-symmetrisch. Insbesondere ist für jede Funktion  $h$  der konform-invarianten Variablen

$$h(r, s_1, s_2, t_1, t_2) (\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} + h(r, s_2, s_1, t_2, t_1) (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} \quad (4.16)$$

1-2-symmetrisch. Wir betrachten für  $i, j, k \in \{3, 4, 5\}$ ,  $q \in \mathbb{Q}$  die Operatoren

$$\rho_{ij}^q, \quad x_{ij} \cdot \partial_k, \quad \partial_i \cdot \partial_j \quad (4.17)$$

und die von den Operatoren aufgespannte Algebra  $\mathcal{A}_3$ , in der  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  enthalten sind.

**Satz 4.4.2.** *Sei  $\mathcal{O}_{3,4,5} \in \mathcal{A}_3$  ein Operator und  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := \frac{f(r,s_1,s_2,t_1,t_2)}{\rho_{12}^a \rho_{34}^b \rho_{35}^c \rho_{45}^d}$  eine Funktion, sodass die Wirkung von  $\mathcal{O}_{3,4,5}$  auf  $g$  über einen auf die Funktion  $f$  wirkenden Operator  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  bezüglich der konform-invarianten Variablen  $r, s_1, s_1, t_1, t_1$  angegeben werden kann. Dann ist  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  1-2-symmetrisch.*

**Beweis.** Zunächst bemerken wir, dass die oben aufgeführten Generatoren von  $\mathcal{A}_3$  nicht von den Punkten  $x_1$  und  $x_2$  abhängen und somit 1-2-symmetrisch sind. Unter algebraischen Operationen bleibt die 1-2-Symmetrie erhalten und somit folgt, dass jedes Element  $\mathcal{O}_{3,4,5} \in \mathcal{A}$  1-2-symmetrisch ist.  $\mathcal{O}_{3,4,5}$  transformiert sich deshalb angewendet auf eine Funktion  $g$  der Abstandsquadrate zu einem Differentialoperator  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_\rho$  der Abstandsquadrate.  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_\rho$  ist aufgrund der 1-2-Symmetrie von  $\mathcal{O}_{3,4,5}$  ebenfalls 1-2-symmetrisch. Zur Veranschaulichung betrachten wir die Generatoren von  $\mathcal{A}_3$  angewendet auf eine Funktion  $g$  der Abstandsquadrate.

$$\begin{aligned} (x_{ij} \cdot \partial_k) g &= \sum_{l=1}^5 (-\rho_{ik} + \rho_{il} - \rho_{jl} + \rho_{jk}) \frac{\partial g}{\partial \rho_{kl}} \\ (\partial_i \cdot \partial_j) g &= 2 \sum_{l,m=1}^5 (\rho_{il} + \rho_{jm} - \rho_{ij} - \rho_{lm}) \frac{\partial^2 g}{\partial \rho_{im} \partial \rho_{jl}} - 8 \frac{\partial g}{\partial \rho_{ij}} \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen ergeben sich aus den Betrachtungen von Abschnitt 2.1, wobei  $i, j, k \in \{3, 4, 5\}$  gilt. Auf den linken Seiten treten 1-2-symmetrische Operatoren von  $x_1, \dots, x_5$  und auf den rechten Seiten 1-2-symmetrische Operatoren der entsprechenden Abstandsquadrate auf. Algebraischen Verknüpfungen der Operatoren der linken Seiten entsprechen den gleichen algebraischen Operationen der Operatoren der rechten Seiten. Somit gilt, dass aus der 1-2-Symmetrie von  $\mathcal{O}_{3,4,5} \in \mathcal{A}_3$  bereits die 1-2-Symmetrie von  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_\rho$  folgt. Wir nutzen nun die spezielle Form  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{f(r, s_1, s_2, t_1, t_2)}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c}$  sowie die Existenz von  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_{r, s_1, s_2, t_1, t_2}$ . Direkt aus der Definition der konform-invarianten Variablen im Fünfpunktfall (4.1) folgt:

- Nur die Variable  $r$  trägt eine Abhängigkeit von  $\rho_{12}$ .
- $s_1$  trägt die gleiche Abhängigkeit von  $\rho_{34}$ ,  $\rho_{35}$  und  $\rho_{45}$  wie  $s_2$ .
- $t_1$  trägt die gleiche Abhängigkeit von  $\rho_{34}$ ,  $\rho_{35}$  und  $\rho_{45}$  wie  $t_2$ .
- $s_1$  trägt die gleiche Abhängigkeit von  $\rho_{13}$ ,  $\rho_{14}$  und  $\rho_{15}$  wie  $s_2$  von  $\rho_{23}$  bzw.  $\rho_{24}$  bzw.  $\rho_{25}$ .
- $t_1$  trägt die gleiche Abhängigkeit von  $\rho_{13}$ ,  $\rho_{14}$  und  $\rho_{15}$  wie  $t_2$  von  $\rho_{23}$  bzw.  $\rho_{24}$  bzw.  $\rho_{25}$ .

In einem ersten Schritt lässt sich der 1-2 symmetrische Differentialoperator  $\mathcal{O}_{3,4,5}$  durch Anwendung auf  $g$  zu einem Operator 1-2-symmetrischen  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_\rho$  der Abstandsquadrate wirkend auf  $g$  transformieren. Aufgrund der 1-2-Symmetrie des in der Definition von  $g$  auftretenden Faktors  $\frac{1}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c}$  und der symmetrischen Wahl der konform-invarianten Variablen  $r$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  und  $t_2$  ist dann der im zweiten Transformationsschritt durch

$$(\mathcal{O}_{3,4,5})_\rho g = \frac{1}{\rho_{12} \rho_{34}^a \rho_{35}^b \rho_{45}^c} (\mathcal{O}_{3,4,5})_{r, s_1, s_2, t_1, t_2} f$$

bestimmte Operator  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_{r, s_1, s_2, t_1, t_2}$  in den konform-invarianten Variablen 1-2-symmetrisch.  $\square$

Als Folgerung dieser Betrachtungen ergibt sich, dass es keine Elemente  $\mathcal{D}_{3,4,5} \in \mathcal{A}_3$  mit  $\mathcal{D}_{3,4,5} g = 0$  gibt, für die ein transformierter Operator  $(\mathcal{D}_{3,4,5})_{r, s_1, s_2, t_1, t_2}$  existiert, sodass  $(\mathcal{D}_{3,4,5})_{r, s_1, s_2, t_1, t_2} f = 0$  entweder zu  $(\square_1)_{r, s_1, s_2, t_1, t_2} f = 0$  oder zu  $(\square_2)_{r, s_1, s_2, t_1, t_2} f = 0$  äquivalent ist. Die Bedingung  $(\mathcal{D}_{3,4,5})_{r, s_1, s_2, t_1, t_2} f = 0$  kann jedoch dazu äquivalent sein, dass ein Operator in (4.15) mit geeignet gewählten  $\mathcal{A}^{(1)}$  und  $\mathcal{A}^{(2)}$  die Funktion  $f$  annihiliert.

Es ist sinnvoll, den einfachsten Fall zu untersuchen, in dem  $\mathcal{A}^{(1)}$  und  $\mathcal{A}^{(2)}$  gemäß (4.16) durch eine Funktion  $h$  gegeben sind, sodass durch (4.16) ein Differentialoperator zweiter Ordnung definiert

wird. Die einfachsten Operatoren zweiter Ordnung in  $\mathcal{A}_3$ , deren Wirkung auf  $g$  in Form von Operatoren  $(\mathcal{O}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  wirkend auf  $f$  angegeben werden können, sind die d'Alembert-Operatoren  $\frac{\rho_{34}\rho_{35}}{\rho_{45}} \square_3$ ,  $\frac{\rho_{34}\rho_{45}}{\rho_{35}} \square_4$  und  $\frac{\rho_{35}\rho_{45}}{\rho_{34}} \square_5$  sowie die Casimiroperatoren  $\mathcal{C}_{3,4,5}$ ,  $\mathcal{C}_{3,4}$ ,  $\mathcal{C}_{3,5}$  und  $\mathcal{C}_{4,5}$ . Wir werden zeigen, dass keine Funktion  $h$  existiert, sodass es eine Linearkombination  $\mathcal{D}_{3,4,5} \in \mathcal{A}_3$  der aufgezählten Operatoren gibt, für die

$$(\mathcal{D}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} f = 0$$

$$\Leftrightarrow (h(r, s_1, s_2, t_1, t_2) (\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} + h(r, s_2, s_1, t_2, t_1) (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}) f = 0$$

gilt. Wir betrachten dazu lediglich die Ableitungen zweiter Ordnung der in konform-invariante Variablen transformierten Operatoren. Diese sind in Anhang D in den Tabellen D.1 bis D.5 zu finden. Die zweiten Ableitungen des transformierten  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  ergeben sich aus Addition entsprechender Koeffizientenfunktionen der anderen Casimiroperatoren und wurden nicht extra angegeben. Man erkennt anhand von Tabelle D.1, dass unabhängig von der Wahl der Funktion  $h$  der Operator (4.16) verschwindende Koeffizientenfunktionen zu den Ableitungstermen  $\frac{\partial}{\partial s_1 \partial s_2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial s_1 \partial t_2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial s_2 \partial t_1}$  und  $\frac{\partial}{\partial t_1 \partial t_2}$  besitzt. Gleiches müsste für die gesuchte Linearkombination  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  der Operatoren aus D.2 bis D.5 gelten. Es lässt sich jedoch keine nichttriviale Linearkombination der betrachteten Operatoren finden, die diese Bedingung erfüllt. Wir zeigen dies am Beispiel der Koeffizientenfunktion  $\frac{\partial}{\partial s_1 \partial s_2}$ . Für  $a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{C}$  folgt aus

$$\begin{aligned} & a_1 \left( \frac{s_2 t_1 + s_1 t_2 - r s_1 s_2}{s_1 s_2} \right) + a_2 (t_1 + t_2 - r s_1 s_2) + 2a_3 \\ & + 2a_4 \left( \frac{r s_1 s_2 - s_1 - s_2}{s_1} + \frac{r s_1 s_2 - s_1 - s_2}{s_2} + \frac{1 + s_1 - t_1}{s_1} + \frac{1 + s_2 - t_2}{s_2} + s_1 + s_2 - t_1 - t_2 - 2 \right) \\ & + 2a_5 \left( \frac{s_1 + t_1 - 1}{s_1} + \frac{s_2 + t_2 - 1}{s_2} \right) + 2a_6 (6 + t_1 + t_2 - s_1 - s_2) \\ & \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

für beliebige Werte von  $r, s_1, s_2, t_1, t_2$ , dass  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$  gilt. Wir können somit den folgenden Satz formulieren

**Satz 4.4.3.** *Es gibt keine Linearkombination der Operatoren  $\frac{\rho_{34}\rho_{35}}{\rho_{45}} \square_3$ ,  $\frac{\rho_{34}\rho_{45}}{\rho_{35}} \square_4$  und  $\frac{\rho_{35}\rho_{45}}{\rho_{34}} \square_5$  sowie der Casimiroperatoren  $\mathcal{C}_{3,4,5}$ ,  $\mathcal{C}_{3,4}$ ,  $\mathcal{C}_{3,5}$  und  $\mathcal{C}_{4,5}$  und zusätzlicher Operatoren erster Ordnung bezüglich der Variablen  $x_3, x_4$  und  $x_5$ , die einen der Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  oder  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  definiert.*

## 5 Abschließende Bemerkungen und Ausblicke

Wir wollen diese Diplomarbeit mit einigen Bemerkungen und Ausblicken beschließen. Das erste wesentliche Resultat der Arbeit stellt die Transformation des Casimirelements  $\mathcal{C}$  dar, das wir in Abschnitt 1.5 eingeführt und dessen Wirkung auf Vektoren  $|\phi(x_1)\dots\phi_N(x_N)\rangle$  wir in Abschnitt 1.6 in Form des quadratischen konformen Casimiroperators  $\mathcal{C}_{1,\dots,N}$  angegeben haben. Hervorzuheben ist dabei, dass die Darstellung des Casimiroperators  $\mathcal{C}_{1,\dots,N}$  in Satz 1.6.1 für beliebige Raumzeitdimensionen  $n$  und beliebig viele verschiedene Skalarfelder  $\phi_i$  gültig ist. Somit kann der in Satz 1.6.1 angegebene Casimiroperator in zukünftigen Arbeiten z.B. zur Untersuchung der Partialwellen von Korrelationsfunktionen  $2N$  skalarer Felder benutzt werden. Die Motivation, den quadratischen Casimiroperator zu solchen Untersuchungen zu verwenden, ist dabei die überschaubare Form, die er gemäß Satz 1.6.1 besitzt.

In Kapitel 3 haben wir mit Satz 3.4.1 den Twist-2-Anteil von Vektoren  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$  durch Angabe von Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_{3,4}$  und  $\mathcal{E}_{3,4}$  charakterisieren können. Ein wichtiges Nebenresultat der Untersuchungen ist die Erkenntnis, dass im Fall unterschiedlicher Skalendimensionen  $d_A$  und  $d_B$  der Felder  $A$  bzw.  $B$  der Twist-2-Anteil von  $|B(x_3)A(x_4)\rangle$  durch eine einzige Partialwelle zum Spin  $L = 0$  bestimmt ist. Motiviert wurde dieses Ergebnis durch die Regularitätsuntersuchungen der Partialwellen in Abschnitt 2.5 und speziell durch die Aussage von Satz 2.5.4. Es bleibt anzumerken, dass die Form der Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_{3,4}$  und  $\mathcal{E}_{3,4}$  aus Satz 3.4.1 für den Fall unterschiedlicher Skalendimensionen  $d_A \neq d_B$  sehr viel komplizierter ist als im Fall gleicher Skalendimension. Im Fall gleicher Skalendimension sind  $\mathcal{D}_{3,4}$  und  $\mathcal{E}_{3,4}$  im Wesentlichen durch d'Alembert-Operatoren, also als Operatoren zweiter Ordnung, gegeben. Im Fall unterschiedlicher Skalendimension ist allgemein nur der durch den Casimiroperator bestimmte Differentialoperator  $\mathcal{D}_{3,4} = \mathcal{C}_{3,4} - \lambda_{10}$  von zweiter Ordnung. Der Differentialoperator  $\mathcal{E}_{3,4}$  besitzt hingegen eine Ordnung, die mit der Differenz der Skalendimensionen der beiden Felder  $A$  und  $B$  wächst. Dieses Ergebnis ist besonders in Hinblick auf die Untersuchung des Twist-2-Anteils dreier skalarer Felder in Kapitel 4 von Interesse. Analog den Ergebnissen von Satz 3.4.1 wäre es wünschenswert gewesen, eine Charakterisierung des Twist-2-Anteils von Vektoren der Form  $|C(x_3)B(x_4)A(x_5)\rangle$  durch Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  zu erhalten. Das den Twist-2-Anteil charakterisierende System von Differentialgleichungen muss jedoch im Spezialfall  $A = \mathbf{1}$  zum System der Differentialgleichungen aus Satz 3.4.1 äquivalent sein, welches, wie bereits erwähnt, eine mit der Differenz der Skalendimensionen der beteiligten Felder wachsende Ordnung besitzt. Es ist daher nicht zu erwarten, dass  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  als Differentialoperatoren zweiter Ordnung gewählt werden können. Das zuletzt in Abschnitt 4.4 durch Satz 4.4.3 dargestellte Resultat, dass Linearkombinationen einfacher konform-invarianter Differentialoperatoren zweiter Ordnung zur Definition einer der gesuchten Operatoren  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  nicht ausreichen, bestätigt dies. Die Ergebnisse aus Abschnitt 4.4 sind trotz der Tatsache, dass wir keine Operatoren  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  angeben konnten, die den Twist-2-Anteil von  $|C(x_3)B(x_4)A(x_5)\rangle$  charakterisieren, von Bedeutung, da sie aufzeigen welche Struktur die gesuchten Differentialoperatoren nicht besitzen, und somit weitere Untersuchungsbestrebungen beeinflussen können.

Die zentralen Ergebnisse der Analyse des Twist-2-Anteils dreier skalarer Felder  $|C(x_3)B(x_4)A(x_5)\rangle$  in Kapitel 4 sind die Unabhängigkeit der transformierten Operatoren  $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$ ,  $(\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  und  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  von den Skalendimensionen  $d_A$ ,  $d_B$  und  $d_C$  der Felder  $A$ ,  $B$  und  $C$ , welche die Konstruktion spezieller Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungssysteme erlaubt. Trotz der großen Anzahl an konstruierten Lösungen konnten wir in 4.3, zeigen, dass das in 4.2 angegebene Lösungssystem nicht vollständig ist. Auch diese Resultate sind von Bedeutung, da die bereits vorhandenen Lösungen Aufschluss über die Struktur weiterer Lösungen liefern können. Durch Ergänzung zu einem vollständigen Lösungssystem könnte genug Information über den Twist-2-Anteil von  $|C(x_3)B(x_4)A(x_5)\rangle$  gewonnen werden, um die gewünschten Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_{3,4,5}$  und  $\mathcal{E}_{3,4,5}$  zu finden. Mit diesen wäre dann die Berechnung von Twist-2-Partialwellen von Sechspunktfunktionen als Lösungen der Twist-2-Differentialgleichungen sowie als Eigenfunktionen des quadratischen Casimiroperators möglich. Darauf aufbauend könnten analog zur Partialwellenanalyse von Vierpunktfunktionen in [13] Positivitätsuntersuchungen global konform-invarianter Sechspunktfunktionen durchgeführt werden.

## Danksagung

Mit dem Schluss dieser Arbeit ist der geeignete Punkt erreicht, mich bei all den Menschen zu bedanken, die mich in den nun vergangenen Jahren des Studiums und insbesondere während meiner Zeit am Institut für Theoretische Physik der Georg-August-Universität Göttingen begleiteten und mein Leben somit entscheidend prägten.

Gedankt sei in erster Linie Herrn Prof. Dr. Karl-Henning Rehren, der mir die Möglichkeit gab, diese Diplomarbeit innerhalb seiner Arbeitsgruppe zu schreiben, meine Fragen stets mit viel Geduld beantwortete und mich mit neuen Denkanstößen förderte.

Prof. Dr. Detlev Buchholz danke ich für das Übernehmen des Koreferendariats.

Weiterhin bedanke ich mich bei Sarah Becker, Matthias George und Christoph Solveen, die meine Diplomarbeit trotz guten Wetters mit Sorgfalt durchsahen und entscheidend mit Korrekturen und Verbesserungsvorschlägen zu dieser beitrugen. Martin Kienes danke ich für das Korrekturlesen der Arbeit sowie für seine weisen Ratschläge in allen Lebenslagen. Marcel Bischoff und Timo Reinhold sei für die kompetente Beantwortung  $\text{\TeX}$ -nischer Fragen gedankt.

Dank gilt meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums finanziell unterstützten.

Ein wesentlicher Teil meiner Zeit am Institut für Theoretische Physik wurde durch meine Arbeit als Übungsgruppenleiter geprägt, die ich in durchweg positiver Erinnerung behalten werde. Ich möchte mich deshalb bei allen Menschen bedanken, die mir diese Tätigkeit ermöglichten, sowie allen Teilnehmern meiner Übungsgruppen, da sie zu einem freundlichen Arbeitsklima beitrugen und somit für die Positivität besagter Erinnerungen verantwortlich sind.

## A Hypergeometrische Funktion

Die hypergeometrische Funktion<sup>1</sup> spielt eine zentrale Rolle innerhalb der konformen Quantenfeldtheorie. So besitzen etwa die Partialwellen von Vierpunktfunktionen aus Kapitel 2 eine Darstellung über diese Funktion. Sie ist eine von einem Parametertripel  $(a, b; c)$  abhängige Funktion einer komplexen Veränderlichen und wird hier über ihre Reihendarstellung definiert. Weiterhin werden in diesem Exkurs zur hypergeometrischen Funktion eine Integraldarstellung und Funktionalgleichungen hergeleitet sowie die für die Partialwellenentwicklung wichtigen Expansionsformeln bewiesen. Die Darstellung erhebt dabei keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Es wurden lediglich wichtige Identitäten aus [1, 5, 13] zusammengetragen. Umfassende Diskussionen der hypergeometrischen Funktion finden sich in [1, 5].

**Definition A.0.4** (Hypergeometrische Funktion). *Seien  $a, b \in \mathbb{C}$  und  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . Dann wird die hypergeometrische Funktion  $F$  auf  $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  definiert durch:*

$$F(a, b; c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{A.1})$$

Dabei bezeichnet  $(a)_n$  das Pochhammer-Symbol, welches durch

$$(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (\text{A.2})$$

definiert ist.

Die hypergeometrische Funktion ist holomorph in  $D$  und eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung<sup>2</sup>

$$z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2}(z) + (c - (a+b+1)z) \frac{df}{dz}(z) - ab f(z) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Sie beinhaltet zudem viele Funktionen und Funktionenklassen als Spezialfälle. So gilt etwa ([1])

$$\begin{aligned} F(a, c; c; z) &= (1-z)^{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_+) \\ F(1, 1; 2; z) &= -z^{-1} \ln(z) \\ F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) &= z^{-1} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\ F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) &= z^{-1} \arctan(z) \\ F(-n, n+1; 1; z) &= P_n(1-2z) \quad (n \in \mathbb{N}_0), \end{aligned}$$

wobei  $P_n$  das  $n$ -te Legendre-Polynom bezeichnet.

<sup>1</sup>Die hypergeometrische Reihe stellt in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der Exponentialreihe dar und wurde zuerst von Carl Friedrich Gauß untersucht.

<sup>2</sup>Sie ist jedoch lediglich eine von 24 verschiedenen Lösungen dieser Differentialgleichung, die nach Ernst Eduard Kummer auch als Kummer-Lösungen bezeichnet werden.

**Satz A.0.5** (Integraldarstellung). *Die hypergeometrische Funktion besitzt die folgende Integraldarstellung*

$$F(a, b; c; z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$$

**Beweis.** Wir betrachten die Betafunktion, die durch

$$B(x, y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

gegeben ist<sup>3</sup>. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt &= \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{(tz)^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{(z)^n}{n!} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{(z)^n}{n!} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(b+n+c-b)} \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) \quad . \end{aligned}$$

□

**Satz A.0.6** (Funktionalgleichungen). *Für die hypergeometrische Funktion gelten die Funktionalgleichungen*

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \\ &= (1-z)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right) \\ F(a, b; c; z) &= (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) \quad . \end{aligned} \tag{A.4}$$

**Vorbemerkungen:**

- Durch  $i(z) := \frac{z}{z-1}$  wird eine Involution definiert, d.h. es gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$

$$(i \circ i)(z) = \frac{i(z)}{i(z)-1} = \frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}-1} = \frac{z}{1-(z-1)} = z \quad .$$

- Es gilt  $(1-i(z)) = \frac{(z-1-z)}{z-1} = -(z-1)^{-1}$ .

<sup>3</sup>Die Gleichheit beider Darstellungen der Betafunktion kann etwa aus dem Satz von Bohr-Mollerup gefolgert werden.



**Beweis des Satzes.** Durch Substitution von  $s := 1 - t$  in der Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{1-a} dt &= - \int_1^0 (1-s)^{b-1}(1-(1-s))^{c-b-1}(1-(1-s)z)^{-a} ds \\ &= (1-z)^{-a} \int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1} \left( \frac{1-z+sz}{1-z} \right)^{-a} ds \\ &= (1-z)^{-a} \int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1} \left( 1-s \frac{z}{z-1} \right)^{-a} ds \quad . \end{aligned}$$

Das beweist die erste Funktionalgleichung. Die zweite Funktionalgleichung ergibt sich aus der Symmetrie der hypergeometrischen Funktion in den ersten beiden Parametern. Durch Komposition der ersten beiden Funktionalgleichungen ergibt sich mit der zweiten Vorbemerkung schließlich die dritte Funktionalgleichung.  $\square$

## A.1 Expansionsformeln

In diesem Abschnitt soll ein Beweis der Expansionsformeln aus [13] gegeben werden, die in Kapitel 2 zur Durchführung der Partialwellenentwicklungen benötigt werden. Im Folgenden seien stets  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  mit  $2p + \gamma > 0$  sowie

$$\begin{aligned} C_{\alpha, \beta, \gamma}(\mu, p) &:= \frac{(-1)^{\mu-p}}{(\mu-p)!} \frac{(p+\alpha)_{\mu-p} (p+\beta)_{\mu-p}}{(\mu+p+\gamma-1)_{\mu-p}} \\ D_{\alpha, \beta, \gamma}(\mu, p) &:= \frac{1}{(\mu-p)!} \frac{(p+\alpha)_{\mu-p} (p+\gamma-\beta)_{\mu-p}}{(\mu+p+\gamma-1)_{\mu-p}} \end{aligned}$$

für  $\mu \geq p$  definiert.

**Satz A.1.1** (Expansionsformeln). *Mit den eingeführten Bezeichnungen gelten die beiden Expansionsformeln*

$$\begin{aligned} z^p &= \sum_{\mu=p}^{\infty} C_{\alpha, \beta, \gamma}(\mu, p) z^\mu F(\mu + \alpha, \mu + \beta; 2\mu + \gamma; z) \\ \left( \frac{z}{1-z} \right)^p &= (1-z)^\alpha \sum_{\mu=p}^{\infty} D_{\alpha, \beta, \gamma}(\mu, p) z^\mu F(\mu + \alpha, \mu + \beta; 2\mu + \gamma; z) \quad . \end{aligned} \tag{A.5}$$

**Beweis.** Wir folgen dem Beweis der Expansionsformeln aus [13]. Durch Anwendung der ersten Funktionalgleichung der hypergeometrischen Funktion (A.4) erkennt man, dass sich die zweite

Expansionsformel auf die erste Expansionsformel zurückführen lässt.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z-1}\right)^p &= \sum_{\nu=p}^{\infty} C_{\alpha,\beta,\gamma}(\nu,p) \left(\frac{z}{z-1}\right)^\nu F\left(\nu+\alpha, \nu+\beta; 2\nu+\gamma; \frac{z}{z-1}\right) \\
&= \sum_{\nu=p}^{\infty} C_{\alpha,\beta,\gamma}(\nu,p) z^\nu (z-1)^{-\nu} \left(1-\frac{z}{z-1}\right)^{-(\nu+\alpha)} F(\nu+\alpha, \nu+\gamma-\beta; 2\nu+\gamma; z) \\
&= (1-z)^\alpha \sum_{\nu=p}^{\infty} C_{\alpha,\beta,\gamma}(\nu,p) z^\nu (z-1)^{-\nu} (1-z)^\nu F(\nu+\alpha, \nu+\gamma-\beta; 2\nu+\gamma; z) \\
&= (1-z)^\alpha \sum_{\nu=p}^{\infty} (-1)^\nu C_{\alpha,\gamma-\beta',\gamma}(\nu,p) z^\nu F(\nu+\alpha, \nu+\beta'; 2\nu+\gamma; z) \\
&= (-1)^p (1-z)^\alpha \sum_{\nu=p}^{\infty} D_{\alpha,\beta',\gamma}(\nu,p) z^\nu F(\nu+\alpha, \nu+\beta'; 2\nu+\gamma; z)
\end{aligned}$$

wobei  $\beta' := \gamma - \beta$  gesetzt wurde. Das beweist die Äquivalenz beider Formeln. Wir verwenden im weiteren Verlauf des Beweises die folgenden Identitäten des Pochhammer-Symbols:

$$\begin{aligned}
(a)_l &= (a)_n (n+a)_{l-n} \\
(\tilde{\gamma}+2n-1) &= \frac{(\tilde{\gamma}+l+n-1)n}{l} + \frac{(\tilde{\gamma}+n-1)(l-n)}{l} \\
\frac{\tilde{\gamma}+2n-1}{(\tilde{\gamma}+n-1)_{l+1}} &= \frac{1}{(\tilde{\gamma}+n-1)_n} \frac{1}{(2n+\tilde{\gamma})_{l-n}}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Wir müssen lediglich die erste Expansionsformel beweisen. Diese lässt sich auf eine einfachere Aussage zurückführen.

$$\begin{aligned}
z^p &= \sum_{\nu=p}^{\infty} C_{\alpha,\beta,\gamma}(\nu,p) z^\nu F(\nu+\alpha, \nu+\beta; 2\nu+\gamma; z) \\
&= \sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-p}}{(\nu-p)!} \frac{(p+\alpha)_{\nu-p} (p+\beta)_{\nu-p}}{(\nu+p+\gamma-1)_{\nu-p}} z^\nu F(\nu+\alpha, \nu+\beta; 2\nu+\gamma; z) \\
\Leftrightarrow 1 &= \sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-p}}{(\nu-p)!} \frac{(p+\alpha)_{\nu-p} (p+\beta)_{\nu-p}}{(\nu+p+\gamma-1)_{\nu-p}} z^{\nu-p} F(\nu+\alpha, \nu+\beta; 2\nu+\gamma; z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\tilde{\alpha})_n (\tilde{\beta})_n}{(n+\tilde{\gamma}-1)_n} z^n F\left(n+\tilde{\alpha}, n+\tilde{\beta}; 2n+\tilde{\gamma}; z\right)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir  $\tilde{\alpha} := \alpha + p$ ,  $\tilde{\beta} := \beta + p$ ,  $\tilde{\gamma} := \gamma + 2p$  und  $n := \nu - p$  gesetzt. Nun drücken wir die hypergeometrische Funktion über ihre Potenzreihendarstellung aus und sortieren nach Potenzen

von  $z$ .

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\tilde{\alpha})_n(\tilde{\beta})_n}{(n + \tilde{\gamma} - 1)_n} z^n F\left(n + \tilde{\alpha}, n + \tilde{\beta}; 2n + \tilde{\gamma}; z\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\tilde{\alpha})_n(\tilde{\beta})_n}{(n + \tilde{\gamma} - 1)_n} z^n \frac{(n + \tilde{\alpha})_k (n + \tilde{\beta})_k}{(2n + \tilde{\gamma})_k} \frac{z^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\tilde{\alpha})_n(\tilde{\beta})_n}{(n + \tilde{\gamma} - 1)_n} z^n \frac{(n + \tilde{\alpha})_{l-n} (n + \tilde{\beta})_{l-n}}{(2n + \tilde{\gamma})_{l-n}} \frac{z^{l-n}}{(l-n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^n}{l!} \frac{(\tilde{\alpha})_l(\tilde{\beta})_l}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_n} \binom{l}{n} \frac{1}{(2n + \tilde{\gamma})_{l-n}} z^l
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun feste Potenzen  $z^l$ , so ergibt sich als Koeffizient dieser Potenz

$$\frac{(\tilde{\alpha})_l(\tilde{\beta})_l}{l!} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_n} \binom{l}{n} \frac{1}{(2n + \tilde{\gamma})_{l-n}} .$$

Für  $l = 0$  ergibt dies mit den üblichen Definitionen  $(\alpha)_0 := 1$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $0! := 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{(\tilde{\alpha})_l(\tilde{\beta})_l}{l!} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_n} \binom{l}{n} \frac{1}{(2n + \tilde{\gamma})_{l-n}} \\
&= \frac{(\tilde{\alpha})_0(\tilde{\beta})_0}{0!} \left( \frac{(-1)^0}{(\tilde{\gamma} - 1)_0} \binom{0}{0} \frac{1}{(\tilde{\gamma})_0} \right) \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

Für  $l \in \mathbb{N}$  ergibt sich mit  $\binom{l}{-m} = 0$  für  $m \in \mathbb{N}$  und  $\binom{l}{m} = 0$  für  $l < m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\frac{(\tilde{\alpha})_l(\tilde{\beta})_l}{l!} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_n} \binom{l}{n} \frac{1}{(2n + \tilde{\gamma})_{l-n}} \\
&= \frac{(\tilde{\alpha})_l(\tilde{\beta})_l}{l!} \sum_{n=0}^l (-1)^n \frac{\tilde{\gamma} + 2n - 1}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_{l+1}} \binom{l}{n} \\
&= \frac{(\tilde{\alpha})_l(\tilde{\beta})_l}{l!} \sum_{n=0}^l (-1)^n \left( \frac{(\tilde{\gamma} + l + n - 1)n}{l} + \frac{(\tilde{\gamma} + n - 1)(l - n)}{l} \right) \frac{l!}{n!(l-n)!} \frac{1}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_{l+1}} \\
&= \frac{(\tilde{\alpha})_l(\tilde{\beta})_l}{l!} \sum_{n=0}^l (-1)^n \left( \binom{l-1}{n-1} \frac{(\tilde{\gamma} + l + n - 1)}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_{l+1}} + \binom{l-1}{n} \frac{(\tilde{\gamma} + n - 1)}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_{l+1}} \right) \\
&= \frac{(\tilde{\alpha})_l(\tilde{\beta})_l}{l!} \sum_{n=0}^l (-1)^n \left( \binom{l-1}{n-1} \frac{1}{(\tilde{\gamma} + n - 1)_l} + \binom{l-1}{n} \frac{1}{(\tilde{\gamma} + n)_l} \right) \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

□

## A.2 Gegenbauer-Polynome

Die Gegenbauer-Polynome<sup>4</sup>  $C_l^\lambda$  sind eine Verallgemeinerung der assoziierten Legendre-Polynome und bilden für  $\lambda > -\frac{1}{2}$  ein im Intervall  $[-1, 1]$  orthogonales System von Polynomen bezüglich des Maßes  $\rho(x)dx$  mit  $\rho(x) := (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \quad \forall x \in [-1, 1]$ . Sie können über die hypergeometrische Funktion angegeben werden.

$$\begin{aligned} C_l^\lambda(x) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\lambda+l-m)}{m!(l-2m)} (2x)^{l-2m} \\ &= \frac{(2\lambda)_l}{l!} F\left(-l, l+2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \end{aligned} \tag{A.7}$$

Aus der hypergeometrischen Differentialgleichung ergibt unter Verwendung von (A.7) die Gegenbauer-Differentialgleichung.

$$\left[ (1-x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (2l+3) \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \right] C_l^\lambda(x) = 0 \tag{A.8}$$

Desweiteren genügen die Gegenbauerpolynome der Rekursionsrelation

$$l C_l^\lambda(t) = 2(\lambda+l-1) C_{l-1}^\lambda(t) - (2\lambda+l-2) C_{l-2}^\lambda(t) \quad . \tag{A.9}$$

---

<sup>4</sup>Die Polynome wurden nach Leopold Gegenbauer benannt.

## B Beweis von Satz 3.3.4

Dieser Abschnitt ist dem Beweis von Theorem 3.3.4 gewidmet. Zunächst benötigen wir den folgenden Hilfssatz

**Lemma B.0.1.** *Sei  $T$  eine total symmetrische  $l$ -Linearform auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $T(X, X, \dots, X) = 0$  für alle  $X \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt bereits  $T = 0$ .*

**Beweis.** Im Beweis benutzen wir Multiindizes. Für  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$  und  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{N}_0^l$  setzen wir  $\lambda^\alpha := \prod_{i=1}^l \lambda_i^{\alpha_i}$ . Weiterhin seien  $|\alpha| := \sum_{i=1}^l \alpha_i$  und  $\underline{1} := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^l$  definiert. Wir betrachten für beliebige, aber fest gewählte  $X_1, X_2, \dots, X_l \in \mathbb{R}^d$  und variables  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$  den Vektor

$$X := \sum_{m=1}^l \lambda_m X_m \quad .$$

Dann gilt aufgrund der Multilinearität von  $T$

$$\begin{aligned} 0 = T(X, X, \dots, X) &= T\left(\sum_{m=1}^l \lambda_m X_m, X, \dots, X\right) = \sum_{m=1}^l \lambda_m T(X_m, X, \dots, X) \\ &= \sum_{m_1=1}^l \dots \sum_{m_l=1}^l \lambda_{m_1} \dots \lambda_{m_l} T(X_{m_1}, \dots, X_{m_l}) \quad . \end{aligned}$$

Wir ordnen obige Summe um, indem wir die Symmetrie von  $T$  ausnutzen und Multiindexschreibweise mit  $\alpha \in \mathbb{N}^l$  verwenden.

$$\begin{aligned} T(X, X, \dots, X) &= \sum_{|\alpha|=l} C_\alpha \lambda^\alpha T(\underbrace{X_1, \dots, X_1}_{\alpha_1\text{-mal}}, \dots, \underbrace{X_l, \dots, X_l}_{\alpha_l\text{-mal}}) \\ &= \sum_{|\alpha|=l} D_\alpha \lambda^\alpha \\ &= 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Für alle Multiindizes  $\alpha$  gilt  $C_\alpha \geq 0$ . Insbesondere findet sich der der Term  $T(X_1, X_2, \dots, X_l)$  genau  $C_{\underline{1}} = l!$  mal. Somit ist  $D_{\underline{1}} = l! T(X_1, X_2, \dots, X_l)$  der Koeffizient zu  $\lambda^{\underline{1}}$ . Wir fassen nun  $T(X, X, \dots, X)$  als ein homogenes Polynom  $p$  vom Grad  $l$  auf.

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^l &\rightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto p(\lambda) := \sum_{|\alpha|=l} D_\alpha \lambda^\alpha \end{aligned}$$

Da dieses Polynom nach (B.1) verschwindet, müssen sämtliche Koeffizienten  $D_\alpha$  verschwinden. Insbesondere gilt:

$$D_{\underline{1}} = l! T(X_1, \dots, X_l) = 0 \Leftrightarrow T(X_1, \dots, X_l) = 0 \quad .$$

□

Wir betrachten nun symmetrische Tensoren vom Rang  $l$  des Typs  $Y^{\otimes l}$  mit  $Y \in \mathbb{R}^d$ . Derartige Tensoren sind symmetrisch in allen  $l$  Indizes. Sei  $\mathcal{E}$  die Projektion vom Raum der symmetrischen Tensoren des Rangs  $l$  auf den Unterraum der spurlosen, symmetrischen Tensoren der Ordnung  $l$ . Der spurlose, symmetrische Tensor  $\mathcal{E}(Y^{\otimes l})$  definiert auf kanonische Weise eine symmetrische  $l$ -Linearform  $T$ .

$$T : \underbrace{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_{n\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(X_1, \dots, X_l) \mapsto T(X_1, \dots, X_l) := (X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_l) \cdot \mathcal{E}(Y^{\otimes l})$$

Nach [3] besitzt  $T(X, X, \dots, X)$  eine Darstellung über die Gegenbauerpolynome  $C_l^\lambda$  (siehe A.2).

$$T(X, X, \dots, X) = (X^{\otimes l}) \cdot \mathcal{E}(Y^{\otimes l}) = \frac{l!}{2^l \left(\frac{d}{2} - 1\right)_l} (X^2 Y^2)^{\frac{l}{2}} C_l^{\frac{d}{2}-1}(t) \quad (\text{B.2})$$

Dabei ist  $t := \frac{X \cdot Y}{(X^2 Y^2)^{\frac{1}{2}}}$  definiert. Bei den anschließenden Betrachtungen sind stets  $l = n + 1$  und  $d = 4$  zu setzen. Wir werden Satz 3.3.4 in zwei Schritten beweisen.

**Satz B.0.2.** *Der spurlose Ableitungsoperator  $\mathcal{O}_4^{(n)} := \left(\partial_4^{\otimes(n+1)}\right)_{\text{traceless}}$  der Ordnung  $(n + 1)$  bezüglich der Variablen  $x_4$  annihiliert alle Polynome  $p_k$  in den Variablen  $\rho_{i4}$  vom Grad  $k \leq n$ .*

Zum Beweis des Satzes durch Induktion nach  $n$  beschränken wir uns aufgrund der Linearität von  $\mathcal{O}_4^{(n)}$  auf homogene Polynome  $p_k$  und gehen wie folgt vor.

- Wir möchten  $\left(\partial_4^{\otimes(n+1)}\right)_{\text{traceless}} p_k = 0$  für alle  $k < n$  zeigen und nutzen dabei aus, dass der spurlose, symmetrische Tensor  $\left(\partial_4^{\otimes(n+1)}\right)_{\text{traceless}} p_n$  vom Rang  $(n+1)$  eine  $(n+1)$ -Linearform  $T$  induziert, die nach Lemma B.0.1 verschwindet, falls  $T(X, X, \dots, X) = 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^4$  gilt.
- Zur Berechnung von  $T(X, X, \dots, X)$  bedienen wir uns Formel (B.2). Man erhält auf diese Weise einen skalaren Ableitungsoperator  $T_\partial(X)$  der Ordnung  $(n+1)$  bezüglich der Variablen  $x_4$  wirkend auf  $p_n$ , für den

$$T_\partial(X)p_n = T(X, X, \dots, X)$$

gilt. Zudem folgt aus Lemma B.0.1

$$T_\partial(X)p_n = T(X, X, \dots, X) = 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\partial_4^{\otimes(n+1)}\right)_{\text{traceless}} p_n = 0 \quad .$$

- Für  $n = 0$  und  $n = 1$  weisen wir die Aussage des Satzes B.0.2 direkt nach.
- Im Induktionsschritt können wir für  $n > 1$  aufgrund der Linearität des Operators die Relation  $p_n = \rho_{i4} p_{n-1}$  für irgendein Abstandskadrat  $\rho_{i4}$  ausnutzen und ziehen den Faktor  $\rho_{i4}$  durch den Ableitungsoperator  $T_\partial(X)$ . Man erhält schließlich einen Ableitungsoperator  $\tilde{T}_\partial(x_{i4}, X)$  der Ordnung  $(n + 1)$  mit

$$\tilde{T}_\partial(x_{i4}, X)p_{n-1} = T_\partial(X)p_n \quad .$$

- Durch Ausnutzung der Eigenschaften der Gegenbauerpolynome sowie der Induktionsannahme lässt sich  $\tilde{T}_\partial(x_{i4}, X)p_{n-1} = 0$  zeigen.

Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen, sei darauf hingewiesen, dass die Definition von  $t$  für  $Y = \partial_4$  zunächst nicht sinnvoll ist, weil in ihr der Term  $\frac{1}{(X^2 \square_4)^{\frac{1}{2}}}$  auftritt. Da dieser Term jedoch gemäß der Definition der Gegenbauerpolynome  $C_l^\lambda$  höchstens in der Ordnung  $\frac{l}{2}$  auftritt und in Gleichung (B.2) das Gegenbauerpolynom mit dem Faktor  $(X^2 Y^2)^{\frac{l}{2}}$  multipliziert wird, ist Gleichung (B.2) für  $Y = \partial_4$ ,  $l = n + 1$  und  $d = 4$  auf folgende Weise zu verstehen:

$$(X^2 Y^2)^{\frac{l}{2}} C_l^1(t) := \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m}$$

Dies entspricht dem Fall, dass wir für  $0 \leq 2k \leq l$

$$(X^2 \square_4)^{\frac{l}{2}} t^{l-2k} := (X^2 \square_4)^2 (2X \cdot \partial_4)^{l-2k}$$

definieren. Damit ergibt sich für eine beliebige Funktion  $f$

$$\left( X^{\otimes(n+1)} \right) \cdot \left( \partial_4^{\otimes(n+1)} \right)_{\text{traceless}} f = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} f .$$

In formaler Schreibweise für  $f$  gilt somit

$$\left( X^{\otimes(n+1)} \right) \cdot \mathcal{E}(\partial_4^{\otimes(n+1)} f) = \left( X^{\otimes(n+1)} \right) \cdot \left( \left( \partial_4^{\otimes(n+1)} \right)_{\text{traceless}} f \right) = \frac{l!}{2^l (1)_l} (X^2 \square_4)^{\frac{l}{2}} C_l^1(t) f .$$

Zuletzt berechnen wir noch die für uns relevante Rekursionsformel, die sich aus der formalen Anwendung der Rekursionsgleichung (A.9) der Gegenbauerpolynome ergibt.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} \\ &= (X^2 Y^2)^{\frac{n+1}{2}} C_{n+1}^1(t) \\ &= \frac{1}{n+1} (X^2 Y^2)^{\frac{n+1}{2}} (2(n+1)t C_n^1(t) - (n+1)C_{n-1}^1(t)) \\ &= (2X \cdot \partial_4) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+1-m)}{m!(n-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} \\ &- (X^2 \square_4) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n-m)}{m!(n-1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} \end{aligned} \tag{B.3}$$

### ***Beweis von Satz B.0.2.***

Induktionsanfang

$(n=0)$  ( $k=0$ ): In diesem Fall ist das homogene Polynom  $p_k$  einfach eine Konstante  $c \in \mathbb{C}$  und  $\mathcal{O}_4^{(n)} = \left( \partial_4^{\otimes(n+1)} \right)_{\text{traceless}} = \partial_4$  der Ableitungsoperator.

$$\mathcal{O}_4^{(n)} p_n = \left( \partial_4^{\otimes(n+1)} \right)_{\text{traceless}} p_n = \partial_4 p_n = 0$$

$(n = 1), (k = 1)$ : In diesem gilt  $p_k = p_n := \rho_{i4}$  für ein  $i$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_4^{(n)} p_k &= (X^{\otimes 2}) \cdot ((\partial_4^{\otimes 2})_{\text{traceless}} p_k) \\
&= \frac{\Gamma(3)}{0!2!} (2X \cdot \partial_4)^2 \rho_{i4} - \frac{\Gamma(2)}{1!0!} (X^2 \square_4) \rho_{i4} \\
&= -2(2X \cdot \partial_4)(2X \cdot x_{i4}) + 2X^2 (\partial_4 \cdot x_{i4}) \\
&= 4X \cdot (2X) - 8X^2 = 0
\end{aligned}$$

$(n = 1), (k = 0)$ :

$$\mathcal{O}_4^{(n)} p_k = \left( \frac{\Gamma(3)}{0!2!} (2X \cdot \partial_4)^2 - \frac{\Gamma(2)}{1!0!} (X^2 \square_4) \rho_{i4} \right) 1 = 0$$

Induktionsschritt  $(n - 1) \rightarrow n$

$(k = n)$ : Wir nutzen die Darstellung  $p_k = p_n := \rho_{i4} p_{n-1}$  und berechnen zunächst den Term

$$\begin{aligned}
(2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_n &= (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} \rho_{i4} p_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1-2m} \binom{n+1-2m}{k} ((2X \cdot \partial_4)^k \rho_{i4}) ((2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m-k} p_{n-1}) \\
&= \underbrace{\rho_{i4} \underbrace{(2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_{n-1}}_{=:g_1}}_{=:T_1} - 2 \underbrace{(n+1-2m)(2X \cdot x_{i4})(2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1}}_{=:T_2} \\
&+ \underbrace{4(n+1-2m)(n-2m)X^2(2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} p_{n-1}}_{=:T_3} .
\end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\begin{aligned}
(X^2 \square_4)^m (\rho_{i4} g_1) &= (X^2)^m (\rho_{i4} \square_4^m - 4m(x_{i4} \partial_4) \square_4^{m-1} + 4m(m+1) \square_4^{m-1}) g_1 \\
(X^2 \square_4)^m T_1 &= (X^2 \square_4)^m \rho_{i4} (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_{n-1} \\
&= (X^2)^m (\rho_{i4} \square_4^m - 4m(x_{i4} \cdot \partial_4) \square_4^{m-1} + 4m(m+1) \square_4^{m-1}) (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_{n-1} \\
(X^2 \square_4)^m T_2 &= -4(n+1-2m)(X^2 \square_4)^m (X \cdot x_{i4}) (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1} \\
&= -4(n+1-2m)(X^2)^m ((X \cdot x_{i4}) \square_4^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} \\
&\quad - m(\square_4^{m-1} (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m}) p_{n-1} \\
(X^2 \square_4)^m T_3 &= 4(X^2)^{m+1} (n+1-2m)(n-2m) \square_4^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} p_{n-1}
\end{aligned}$$

Wir sortieren die Terme nach Potenzen von  $x_{i4}$  und weisen nach, dass die Summen über den Index  $m$  dieser Terme verschwinden. Mittels der Rekursionsgleichung für den spurlosen Ableitungsope-



rator folgt für die in  $x_{i4}$  quadratischen Terme

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} \rho_{i4} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_{n-1} \\
&= \rho_{i4} (2X \cdot \partial_4) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+1-m)}{m!(n-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1} \\
&- \rho_{i4} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n-m)}{m!(n-1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} (X^2 \square_4) p_{n-1} \quad .
\end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite verschwindet nach Induktionsannahme für  $(n-1)$ . Der zweite Summand lässt sich auffassen als  $\rho_{i4} \mathcal{O}_{n-2} f$  mit  $f := \square_4 p_{n-1}$ . Aufgrund der Produktregel besteht  $f$  aus Summanden, bei denen beide Ableitungsoperatoren auf den gleichen Faktor  $\rho_{j4}$  in  $p_{n-1}$  wirken, und Summanden, bei denen die Ableitungsoperatoren auf zwei unterschiedliche Faktoren  $\rho_{j4}$  und  $\rho_{l4}$  von  $p_{n-1}$  wirken. Der erste Fall liefert aufgrund  $\square_4 \rho_{j4} = 8$  ein homogenes Polynom vom Grad  $n-2$ . Im zweiten Fall gilt  $(\partial_4 \rho_{j4}) \cdot (\partial_4 \rho_{l4}) = 4(x_{j4} \cdot x_{l4})$ . Diese Skalarprodukte lassen sich jedoch mittels der Formel  $2(x_{ij} \cdot x_{kl}) = -\rho_{ij} + \rho_{il} - \rho_{jl} + \rho_{jk}$  erneut über Abstandskvadrat ausdrücken. Der zweite Fall liefert Polynome in  $\rho_{i4}$  vom Grad kleiner  $n-1$ . Somit ist  $f$  ein Polynom in  $\rho_{i4}$  vom Grad  $\leq n-2$  und wird von  $\mathcal{O}_{n-2}$  nach Induktionsvoraussetzung annulliert.

Für die in  $x_{i4}$  linearen Terme setzen wir nach B.0.1 ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x_{i4} = X$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} (-4X^2 m) (x_{i4} \cdot \partial_4) (X^2 \square_4)^{m-1} (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_{n-1} \\
&= 2 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^{m-1} \frac{\Gamma(n+1-(m-1))}{m(m-1)!(n-1-2(m-1))!} m X^2 (X^2 \square_4)^{m-1} (2X \cdot \partial_4)^{n-2(m-1)} p_{n-1} \\
&= 2X^2 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+1-m)}{m!(n-1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1} \\
&= 2X^2 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+1-m)}{m!(n-2m)!} (n-2m) (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1} \\
& \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} (-4)(n+1-2m) (X \cdot x_{i4}) (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1} \\
&= -4 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{(n+1-m)\Gamma(n+1-m)}{m!(n+1-2m)!} X^2 (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1} \\
&= -2X^2 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\Gamma(n+1-m)}{m!(n-2m)!} (2n+2-2m) (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1}
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit für  $(X \cdot x_{i4})$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} [-4X^2 m(x_{i4} \cdot \partial_4)(X^2 \square_4)^{m-1} (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} \\
& -4(n+1-2m)(X \cdot x_{i4})(X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m}] p_{n-1} \\
= & 2X^2 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+1-m)}{m!(n-2m)!} \underbrace{[(n-2m) - (2n+2-2m)]}_{=-(n+2)} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1} \\
= & -2X^2 (n+2) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+1-m)}{m!(n-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_{n-1} \\
= & 0
\end{aligned}$$

Für den dritten Summanden gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} m(m+1)(n+1-2m)(X^2 \square_4)^{m-1} (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_{n-1} \\
= & - \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^{m-1} \frac{\Gamma(n+1-(m-1))}{m(m-1)!(n-1-2(m-1))!} m(m+1+n+1-2m)(X^2 \square_4)^{m-1} \times \\
& \times (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2(m-1)} p_{n-1} \\
= & - \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+1-m)}{m!(n-1-2m)!} (n+1-m)(X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} p_{n-1} \\
= & - \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} (n-2m)(n+1-2m)(X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} p_{n-1} \\
= & - \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} (n+1-2m)(n-2m)(X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} p_{n-1}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m!(n+1-2m)!} 4X^2(m(m+1) + 4X^2(n+1-2m))(X^2 \square_4)^{m-1} \times \\
& \times (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_{n-1} + 4X^2(n+1-2m)(n-2m)(X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} p_{n-1} \\
= & 0
\end{aligned}$$

( $k < n$ ): In diesem Fall lässt sich von vornherein die Rekursionsgleichung (B.3) ausnutzen. Wie zuvor gilt:  $q_{k-1} := \square_4 p_k$  ist ein Polynom in  $\rho_{i4}$  vom Grad  $\leq k-1$  und wird von  $\mathcal{O}_4^{(n)}$  annihilert.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+2-m)}{m! \cdot (n+1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n+1-2m} p_k \\
&= \underbrace{(2X \cdot \partial_4) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n+1-m)}{m! (n-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-2m} p_k}_{=0} \\
&- \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n-m)}{m! (n-1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} ((X^2 \square_4) p_k) \\
&= - \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n-m)}{m! (n-1-2m)!} (X^2 \square_4)^m (2X \cdot \partial_4)^{n-1-2m} q_{k-1} = 0
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage von Satz B.0.2 vollständig bewiesen.  $\square$

**Satz B.0.3.** Die in den Variablen  $\rho_{i4}$  homogenen Polynome  $p_n$  sind die einzigen rationalen homogenen Funktionen vom Grad  $n$  in den Variablen  $\rho_{i4}$ , die im Kern des Ableitungsoperators  $\mathcal{O}_4^{(n)} = \left( \partial_4^{\otimes(n+1)} \right)_{\text{traceless}}$  liegen.

**Beweis von Satz B.0.3.** Wir lassen negative Potenzen der Variablen  $\rho_{i4}$  innerhalb der Laurent-Reihen der homogenen Funktionen zu und zeigen, dass bei Anwendung des Operators  $\mathcal{O}_4^{(n)}$  Terme erzeugt werden, die nicht annihilert werden können. Wir nehmen an, dass

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) := \sum_{\substack{k, l, m = -N \\ k+l+m=n}}^N C_{klm} \rho_{14}^k \rho_{24}^l \rho_{34}^m \quad (\text{B.4})$$

gilt, wobei die Bedingung  $k+l+m=n$  die geforderte Homogenität im Index 4 sicherstellt. Die Grenze  $N < \infty$  existiert, da  $g$  nach Voraussetzung eine rationale Funktion der Abstandsquadrate sein soll. Es sei angenommen, dass  $C_{klm} \neq 0$  für ein  $k < 0$  oder ein  $l < 0$  oder ein  $m < 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir die Existenz eines  $k < 0$  an. Wir suchen uns das negativste solche  $k = -k'$  mit  $k' \in \mathbb{N}$  heraus. Sollte die Wahl nicht eindeutig sein, so wählen wir von den verbleibenden Kandidaten zusätzlich noch den Term mit dem niedrigsten Wert von  $l$ . Sollte die Wahl dann immer noch nicht eindeutig sein, so wählen wir unter den verbleibenden Kandidaten den Term mit dem niedrigsten Wert von  $m$ . Durch Anwendung des Differentialoperators  $\mathcal{O}_4^{(n)}$  ergibt sich via Produktregel insbesondere ein Term, bei dem sämtliche Ableitungen auf den Nenner  $\rho_{14}^{k'}$  wirken.

$$\begin{aligned}
& (\partial_4^{\otimes(n+1)})^{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} C_{-k'lm} \frac{\rho_{24}^l \rho_{34}^m}{\rho_{14}^{k'}} \\
&= C_{-k'lm} (2)^{n+1} \frac{k' (k'+1) \dots (k'+n)}{\rho_{14}^{k'+n+1}} \rho_{24}^l \rho_{34}^m x_{14}^{\mu_1} \dots x_{14}^{\mu_{n+1}} \\
&+ \text{Terme geringerer Polordnung in } \rho_{14}
\end{aligned}$$

Die Komponenten des ersten Summanden können nicht über teilweise Ersetzung durch Komponenten des metrischen Tensors  $g_{\mu_i \mu_j}$  als ein Spurateil geschrieben werden, weshalb der erste Summand durch Projektion auf spurlose Tensoren nicht annulliert wird. Weiterhin kann er aufgrund seiner speziellen Polordnung von keinem weiteren Term der rechten Seite von (B.5) annulliert werden. Ebenfalls aufgrund seiner Polordnung kann er nicht von Termen annulliert werden, die aus Anwendung von  $\partial_4^{\otimes(n+1)}$  auf andere Summanden entstehen. Somit ist bereits

$$(\partial_4^{\otimes(n+1)})_{\text{traceless}} g \neq 0$$

gezeigt. □

Die Sätze B.0.2 und B.0.3 liefern zusammengenommen die Aussage von Satz 3.3.4.

## C Operatoren zu Abschnitt 4.1

In diesem Anhang befinden sich die Tabellen, denen die transformierten Operatoren  $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$ ,  $(\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  sowie  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  und  $(\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  entnommen werden können. Die Tabellen sind somit ein wichtiges Resultat der Anstrengungen von Kapitel 4. In den linken Spalten sind jeweils alle partiellen Ableitungen bezüglich der konform invarianten Variablen  $r$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  und  $t_2$  bis zur zweiten Ordnung aufgeführt. Rechts nebenstehend finden sich die zur partiellen Ableitung des transformierten Operators gehörenden Koeffizientenfunktionen. Das zentrale Ergebnis der Transformation der Operatoren  $\square_1$ ,  $\square_2$  und  $\mathcal{C}_{3,4,5}$  in den Tabellen C.1 bzw. C.2 ist die Unabhängigkeit von den Parametern  $a$ ,  $b$  und  $c$ , die durch

$$\begin{aligned} a &:= \frac{d_B + d_C - d_A}{2} \\ b &:= \frac{d_A + d_C - d_B}{2} \\ c &:= \frac{d_A + d_B - d_C}{2} \end{aligned}$$

definiert sind. Die Operatoren  $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$ ,  $(\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  und  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  sind somit unabhängig von den Skalendimensionen  $d_A$ ,  $d_B$  und  $d_C$  der Felder  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$ . Dies trifft jedoch nicht auf  $(\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  zu, wie Tabelle C.3 zeigt. Weiterhin ist auffällig, dass der transformierte Casimiroperator dreier Punkte  $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$  eine sehr viel einfachere Form besitzt als der transformierte Casimiroperator zweier Punkte  $(\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$ . Der Grund dafür liegt in der hohen Symmetrie der Funktion

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := \frac{1}{\rho_{12}\rho_{34}^a\rho_{35}^b\rho_{45}^c},$$

die zur Transformation der Operatoren benutzt wurde.

Ableitung	Koeffizientenfunktion zu $(\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$	Koeffizientenfunktion zu $(\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$
$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$	$-s_2 t_1$	$-s_1 t_2$
$s_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}$	$-r s_1 s_2 t_1$	0
$s_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}$	0	$-r s_1 s_2 t_2$
$t_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}$	$-r s_1^2 s_2$	0
$t_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$	0	$-r s_1 s_2^2$
$r s_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_1}$	$(s_2 - s_1 + r s_1 s_2) t_1$	0
$r s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_2}$	0	$(s_1 - s_2 + r s_1 s_2) t_2$
$r t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_1}$	$(t_2 - t_1 + r s_2 (t_1 - 1)) s_1$	0
$r t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_2}$	0	$(t_1 - t_2 + r s_1 (t_2 - 1)) s_2$
$s_1 s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$	0	0
$s_1 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_1}$	$r s_1 s_2 (1 - s_1 - t_1)$	0
$s_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_2}$	0	0
$s_2 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_1}$	0	0
$s_2 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_2}$	0	$r s_1 s_2 (1 - s_2 - t_2)$
$t_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}$	0	0
$r \frac{\partial f}{\partial r}$	0	0
$s_1 \frac{\partial f}{\partial s_1}$	$-(s_2 - s_1 + r s_1 s_2) t_1$	0
$s_2 \frac{\partial f}{\partial s_2}$	0	$-(s_1 - s_2 + r s_1 s_2) t_2$
$t_1 \frac{\partial f}{\partial t_1}$	$-(t_2 - t_1 + r s_1 s_2) s_1$	0
$t_2 \frac{\partial f}{\partial t_2}$	0	$-(t_1 - t_2 + r s_1 s_2) s_2$
$f$	0	0

Tabelle C.1: Ergebnisse der Transformationen  $\square_1 \rightarrow (\square_1)_{s,t}$  und  $\square_2 \rightarrow (\square_2)_{s,t}$

Ableitung	Koeffizientenfunktion von $(\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$
$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$	4
$s_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}$	0
$s_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}$	0
$t_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}$	0
$t_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$	0
$rs_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_1}$	$2 \left( \frac{s_1 - s_2 - rs_1 s_2}{s_2} \right)$
$rs_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_2}$	$2 \left( \frac{s_2 - s_1 - rs_1 s_2}{s_1} \right)$
$rt_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_1}$	$2 \left( \frac{t_1 - t_2 - rs_2(t_1 - 1)}{s_2 t_1} \right) s_1$
$rt_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_2}$	$2 \left( \frac{t_2 - t_1 - rs_1(t_2 - 1)}{s_1 t_2} \right) s_2$
$s_1 s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$	$2 \left( \frac{rs_1 s_2 - s_1 - s_2}{s_1} \right) + 2 \left( \frac{rs_1 s_2 - s_1 - s_2}{s_2} \right) + 8$
$s_1 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_1}$	0
$s_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_2}$	$2 \left( \frac{rs_1 s_2 (s_1 + t_2 - 1) + s_1 t_2 + s_2 t_1 - s_1 t_1 - s_2 t_2}{s_1 t_2} \right)$
$s_2 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_1}$	$2 \left( \frac{rs_1 s_2 (s_2 + t_1 - 1) + s_1 t_2 + s_2 t_1 - s_1 t_1 - s_2 t_2}{s_2 t_1} \right)$
$s_2 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_2}$	0
$t_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}$	$2 \left( \frac{rs_1 s_2 - t_1 - t_2}{t_1} \right) + 2 \left( \frac{rs_1 s_2 - t_1 - t_2}{t_2} \right) + 8$
$r \frac{\partial f}{\partial r}$	-4
$s_1 \frac{\partial f}{\partial s_1}$	0
$s_2 \frac{\partial f}{\partial s_2}$	0
$t_1 \frac{\partial f}{\partial t_1}$	0
$t_2 \frac{\partial f}{\partial t_2}$	0
$f$	0

Tabelle C.2: Ergebnis der Transformation  $\mathcal{C}_{3,4,5} \rightarrow (\mathcal{C}_{3,4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$

Ableitung	Koeffizientenfunktion von $(\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$
$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$	4
$s_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}$	$2(1 + t_1 - s_1)$
$s_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}$	$2(1 + t_2 - s_2)$
$t_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}$	$2(t_1 - s_1 - 1) + 2\left(\frac{1-t_1-s_1}{t_1}\right)$
$t_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$	$2(t_2 - s_2 - 1) + 2\left(\frac{1-t_2-s_2}{t_2}\right)$
$rs_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_1}$	$2(s_1 - t_1 - 1) - 4$
$rs_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_2}$	$2(s_2 - t_2 - 1) - 4$
$rt_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_1}$	$2\left(\frac{1+t_1-s_1}{t_1}\right) + 2(s_1 - t_1 - 1)$
$rt_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_2}$	$2\left(\frac{1+t_2-s_2}{t_2}\right) + 2(s_2 - t_2 - 1)$
$s_1 s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$	$2(1 + t_1 - s_1) + 2(1 + t_2 - s_2)$
$s_1 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_1}$	$4(t_1 - s_1 - 1)$
$s_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_2}$	$2(t_1 + t_2 - s_1 - s_2) - 2\left(\frac{t_1+t_2-rs_1s_2}{t_2}\right)$
$s_2 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_1}$	$2(t_1 + t_2 - s_1 - s_2) - 2\left(\frac{t_1+t_2-rs_1s_2}{t_1}\right)$
$s_2 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_2}$	$4(t_2 - s_2 - 1)$
$t_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}$	$2(1 + t_1 - s_1) + 2(1 + t_2 - s_2) + 2\left(\frac{1+rs_1s_2-s_1-t_2}{t_1}\right) + 2\left(\frac{1+rs_1s_2-s_2-t_1}{t_2}\right) - 8$
$r \frac{\partial f}{\partial r}$	$-4a - 4b + 12$
$s_1 \frac{\partial f}{\partial s_1}$	$2(b+1)(1 + t_1 - s_1) + 4a - 8$
$s_2 \frac{\partial f}{\partial s_2}$	$2(b+1)(1 + t_2 - s_2) + 4a - 8$
$t_1 \frac{\partial f}{\partial t_1}$	$2(b+1)(1 + t_1 - s_1) + 2(1-a)\left(\frac{1+t_1-s_1}{t_1}\right) + 4a - 4b - 8$
$t_2 \frac{\partial f}{\partial t_2}$	$2(b+1)(1 + t_2 - s_2) + 2(1-a)\left(\frac{1+t_2-s_2}{t_2}\right) + 4a - 4b - 8$
$f$	$(a+b)^2 - 4(a+b)$

Tabelle C.3: Ergebnis der Transformation  $\mathcal{C}_{4,5} \rightarrow (\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$



## D Operatoren zu Abschnitt 4.4

Ableitung	$h(r, s_1, s_2, t_1, t_2) (\square_1)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2} + h(r, s_2, s_1, t_2, t_1) (\square_2)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$
$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$	$-s_2 t_1 h(r, s_1, s_2, t_1, t_2) - s_1 t_2 h(r, s_2, s_1, t_2, t_1)$
$s_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}$	$-r s_1 s_2 t_1 h(r, s_1, s_2, t_1, t_2)$
$s_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}$	$-r s_2 s_1 t_2 h(r, s_2, s_1, t_2, t_1)$
$t_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}$	$-r s_1^2 s_2 h(r, s_1, s_2, t_1, t_2)$
$t_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$	$-r s_2^2 s_1 h(r, s_2, s_1, t_2, t_1)$
$r s_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_1}$	$(s_2 - s_1 + r s_1 s_2) t_1 h(r, s_1, s_2, t_1, t_2)$
$r s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_2}$	$(s_1 - s_2 + r s_1 s_2) t_2 h(r, s_2, s_1, t_2, t_1)$
$r t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_1}$	$(t_2 - t_1 + r s_2 (t_1 - 1)) s_1 h(r, s_1, s_2, t_1, t_2)$
$r t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_2}$	$(t_1 - t_2 + r s_1 (t_2 - 1)) s_2 h(r, s_2, s_1, t_2, t_1)$
$s_1 s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$	0
$s_1 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_1}$	$r s_1 s_2 (1 - s_1 - t_1) h(r, s_1, s_2, t_1, t_2)$
$s_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_2}$	0
$s_2 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_1}$	0
$s_2 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_2}$	$r s_1 s_2 (1 - s_2 - t_2) h(r, s_2, s_1, t_2, t_1)$
$t_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}$	0

Tabelle D.1: Zu den Ableitungen zweiter Ordnung von (4.16)

Ableitung	$\left(\frac{\rho_{34}\rho_{35}}{\rho_{45}} \square_3\right)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$	$\left(\frac{\rho_{34}\rho_{45}}{\rho_{35}} \square_4\right)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$	$\left(\frac{\rho_{35}\rho_{45}}{\rho_{34}} \square_5\right)_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$
$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$	$\frac{s_1+s_2-(r+1)s_1s_2+s_2t_1+s_1t_2}{s_1s_2}$	1	1
$s_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}$	$\frac{t_1}{s_1}$	$t_1$	1
$s_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}$	$\frac{t_2}{s_2}$	$t_2$	1
$t_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}$	1	$s_1$	$\frac{s_1}{t_1}$
$t_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$	1	$s_2$	$\frac{s_2}{t_2}$
$rs_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_1}$	$\frac{(r+1)s_1s_2-2s_2t_1-s_1t_2-s_2}{s_1s_2}$	$(1+s_1-t_1)$	-2
$rs_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_2}$	$\frac{(r+1)s_1s_2-2s_1t_2-s_2t_1-s_1}{s_1s_2}$	$(1+s_2-t_2)$	-2
$rt_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_1}$	$\frac{s_1+s_2-s_2t_1-s_1t_2}{s_1s_2}$	$(1+s_1-t_1)$	$\frac{1-t_1-s_1}{t_1}$
$rt_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_2}$	$\frac{s_1+s_2-s_2t_1-s_1t_2}{s_1s_2}$	$(1+s_2-t_2)$	$\frac{1-t_2-s_2}{t_2}$
$s_1s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$	$\frac{s_2t_1+s_1t_2-rs_1s_2}{s_1s_2}$	$(t_1+t_2-rs_1s_2)$	2
$s_1t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_1}$	$\frac{s_1+t_1-1}{s_1}$	$(s_1+t_1-1)$	$\frac{t_1+s_1-1}{t_1}$
$s_1t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_2}$	$\frac{s_1+t_1-1}{s_1}$	$(s_1+t_2-rs_1s_2-1)$	$\frac{t_2+s_2-1}{t_2}$
$s_2t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_1}$	$\frac{s_2+t_2-1}{s_2}$	$(s_2+t_1-rs_1s_2-1)$	$\frac{t_1+s_1-1}{t_1}$
$s_2t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_2}$	$\frac{s_2+t_2-1}{s_2}$	$(s_2+t_2-1)$	$\frac{t_2+s_2-1}{t_2}$
$t_1t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}$	2	$(s_1+s_2-rs_1s_2)$	$\frac{s_1t_2+s_2t_1-rs_1s_2}{t_1t_2}$

Tabelle D.2: Zu den Ableitungen zweiter Ordnung der d'Alembert-Operatoren

Ableitung	Koeffizientenfunktion zu $(C_{3,4})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$
$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$	$2 \left( \frac{1-t_1}{s_1} + \frac{1-t_2}{s_2} \right)$
$s_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}$	$2 \left( \frac{1-s_1-t_1}{s_1} \right) + 2(s_1 - t_1 - 1)$
$s_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}$	$2 \left( \frac{1-s_2-t_2}{s_2} \right) + 2(s_2 - t_2 - 1)$
$t_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}$	$2(1 + s_1 - t_1)$
$t_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$	$2(1 + s_2 - t_2)$
$r s_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_1}$	$4 \left( \frac{t_1+s_1-1}{s_1} \right) + 2 \left( \frac{s_1+s_2-rs_1s_2}{s_2} \right) + 2 \left( \frac{t_2-1}{s_2} \right) + 2(t_1 - s_1)$
$r s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_2}$	$4 \left( \frac{t_2+s_2-1}{s_2} \right) + 2 \left( \frac{s_1+s_2-rs_1s_2}{s_1} \right) + 2 \left( \frac{t_1-1}{s_1} \right) + 2(t_2 - s_2)$
$r t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_1}$	$2 \left( \frac{s_1+s_2-rs_1s_2}{s_2} \right) - 2(1 + s_1 - t_1) + 8$
$r t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_2}$	$2 \left( \frac{s_1+s_2-rs_1s_2}{s_1} \right) - 2(1 + s_2 - t_2) + 8$
$s_1 s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$	$2 \left( \frac{rs_1s_2-s_1-s_2}{s_1} + \frac{rs_1s_2-s_1-s_2}{s_2} \right) + 2 \left( \frac{1+s_1-t_1}{s_1} + \frac{1+s_2-t_2}{s_2} \right) + 2(s_1 + s_2 - t_1 - t_2 - 2)$
$s_1 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_1}$	$4(s_1 - t_1 - 1)$
$s_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_2}$	$2 \left( \frac{rs_1s_2-s_1-s_2}{s_1} \right) + 2(s_1 + s_2 - (t_1 + t_2))$
$s_2 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_1}$	$2 \left( \frac{rs_1s_2-s_1-s_2}{s_2} \right) + 2(s_1 + s_2 - (t_1 + t_2))$
$s_2 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_2}$	$4(s_2 - t_2 - 1)$
$t_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}$	$2(2 + s_1 + s_2 - (t_1 + t_2))$

Tabelle D.3: Zu den Ableitungen zweiter Ordnung von  $(C_{3,4})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$

Ableitung	Koeffizientenfunktion zu $(\mathcal{C}_{3,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$
$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$	$2 \left( \frac{s_2+t_2-1}{s_2} \right) + 2 \left( \frac{1-s_1-t_1}{s_1} \right) - 4$
$s_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}$	$2 \left( \frac{s_1+t_1-1}{s_1} \right)$
$s_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}$	$2 \left( \frac{s_2+t_2-1}{s_2} \right)$
$t_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}$	$2 \left( \frac{s_1+t_1-1}{t_1} \right)$
$t_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$	$2 \left( \frac{s_2+t_2-1}{t_2} \right)$
$rs_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_1}$	$4 \left( \frac{1-t_1}{s_1} \right) + 2 \left( \frac{1-s_2-t_2}{s_2} \right)$
$rs_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_2}$	$4 \left( \frac{1-t_2}{s_2} \right) + 2 \left( \frac{1-s_1-t_1}{s_1} \right)$
$rt_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_1}$	$2 \left( \frac{s_1+t_1-1}{t_1} \right) + 2 \left( \frac{rs_1s_2-s_1t_2-s_2t_1}{s_2t_1} \right) - 8$
$rt_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_2}$	$2 \left( \frac{s_1+t_1-1}{t_1} \right) + 2 \left( \frac{rs_1s_2-s_1t_2-s_2t_1}{s_2t_1} \right) - 8$
$s_1s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$	$2 \left( \frac{s_1+t_1-1}{s_1} \right) + 2 \left( \frac{s_2+t_2-1}{s_2} \right)$
$s_1t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_1}$	8
$s_1t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_2}$	$2 \left( \frac{s_1t_2+s_2t_1-rs_1s_2}{s_1t_2} \right) + 4$
$s_2t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_1}$	$2 \left( \frac{s_1t_2+s_2t_1-rs_1s_2}{s_2t_1} \right) + 4$
$s_2t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_2}$	8
$t_1t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}$	$2 \left( \frac{s_1+t_1-1}{t_1} \right) + 2 \left( \frac{s_2+t_2-1}{t_2} \right)$

Tabelle D.4: Zu den Ableitungen zweiter Ordnung von  $(\mathcal{C}_{3,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$

Ableitung	Koeffizientenfunktion zu $(\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$
$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$	4
$s_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}$	$2(1 + t_1 - s_1)$
$s_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}$	$2(1 + t_2 - s_2)$
$t_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}$	$2\left(\frac{1-t_1-s_1}{t_1}\right) + 2(t_1 - s_1 - 1)$
$t_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$	$2\left(\frac{1-t_2-s_2}{t_2}\right) + 2(t_2 - s_2 - 1)$
$rs_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_1}$	$2(s_1 - t_1 - 3)$
$rs_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s_2}$	$2(s_2 - t_2 - 3)$
$rt_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_1}$	$2(s_1 - t_1 - 1) + 2\left(\frac{1+t_1-s_1}{t_1}\right)$
$rt_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t_2}$	$2(s_2 - t_2 - 1) + 2\left(\frac{1+t_2-s_2}{t_2}\right)$
$s_1 s_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$	$2(6 + t_1 + t_2 - (s_1 + s_2))$
$s_1 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_1}$	$4(t_1 - s_1 - 1)$
$s_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial t_2}$	$2(t_1 + t_2 - (s_1 + s_2)) - 2\left(\frac{t_1+t_2-rs_1s_2}{t_2}\right)$
$s_2 t_1 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_1}$	$2(t_1 + t_2 - (s_1 + s_2)) - 2\left(\frac{t_1+t_2-rs_1s_2}{t_1}\right)$
$s_2 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial t_2}$	$4(t_2 - s_2 - 1)$
$t_1 t_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}$	$2(t_1 + t_2 - (s_1 + s_2)) + 2\left(\frac{1-(s_1+t_1+t_2)+rs_1s_2}{t_1}\right) + 2\left(\frac{1-(s_2+t_1+t_2)+rs_1s_2}{t_2}\right)$

Tabelle D.5: Zu den Ableitungen zweiter Ordnung von  $(\mathcal{C}_{4,5})_{r,s_1,s_2,t_1,t_2}$

## 5 Symbolverzeichnis

$\mathbb{R}^{p,q}$	$\mathbb{R}^n$ mit semiriemannscher Metrik der Signatur $(p, q)$
$\eta_{\mu\nu}$	metrischer Tensor von $\mathbb{R}^{p,q}$
$x_{ij}$	Differenzvektor der Punkte $x_i, x_j \in \mathbb{R}^{p,q}$
$\rho_{ij}$	Abstandsquadrat der Punkte $x_i, x_j \in \mathbb{R}^{p,q}$
$\partial_i$	Ableitungsoperator bezüglich des Punktes $x_i \in \mathbb{R}^{p,q}$
$\square_i$	d'Alembert-Operator bezüglich des Punktes $x_i \in \mathbb{R}^{p,q}$
$\otimes$	Tensorprodukt
$\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$	Konforme Gruppe von $\mathbb{R}^{p,q}$
$O(p, q)$	Gruppe der Isometrien von $\mathbb{R}^{p,q}$
$\text{conf}(\mathbb{R}^{p,q})$	von der konformen Gruppe $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ erzeugte Lie-Algebra
$\text{so}(p, q)$	von der Isometriegruppe $O(p, q)$ erzeugte Lie-Algebra
$\mathcal{J}_{\mu\nu}$	infinitesimale Erzeuger von $\text{so}(p, q)$
$\mathcal{P}_\mu$	infinitesimale Erzeuger von Translationen
$\mathcal{K}_\mu$	infinitesimale Erzeuger von speziellen konformen Transformationen
$\mathcal{D}$	infinitesimaler Erzeuger von Dilatationen
$\mathcal{C}$	quadratisches Casimirelement der konformen Lie Algebra
$\mathcal{C}_{1,\dots,N}$	quadratischer Casimiroperator
$\lambda_{\kappa L}$	Eigenwert des Casimiroperators zu Twist $2\kappa$ und Spin $L$
$\mathcal{H}$	physikalischer Hilbert-Raum
$\langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle$	Skalarprodukt der Vektoren $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{H}$
$\dagger$	Adjunktion bezüglich des Skalarproduktes von $\mathcal{H}$
$\mathcal{H}_\kappa, \mathcal{H}_L, \mathcal{H}_{\kappa,L}$	Unterräume von $\mathcal{H}$ zum Twist $\kappa$ und Spin $L$
$\Pi_\kappa, \Pi_L, \Pi_{\kappa L}$	Projektionen von $\mathcal{H}$ auf die Unterräume $\mathcal{H}_\kappa, \mathcal{H}_L$ bzw. $\mathcal{H}_{\kappa,L}$
$\Omega$	Vakuuzustand
$\mathcal{W}_{l_1\dots l_N}$	Wightman-Distribution
$W_{l_1\dots l_N}$	reduzierte Wightman-Distribution
$\hat{W}_{l_1\dots l_N}$	Fouriertransformierte der reduzierten Wightman-Distribution
$V_+$	Vorwärtslichtkegel
$[x]$	Gauß-Klammer von $x \in \mathbb{R}$
$[\Phi^{(1)}(x_1), \Phi^{(2)}(x_2)]$	Kommutator der Felder $\Phi^{(1)}(x_1)$ und $\Phi^{(2)}(x_2)$
$\text{supp}(f)$	Träger der Funktion $f$
$\mathcal{S}(\mathcal{R}^n, \mathbb{C})$	Schwartz-Raum der schnell abfallenden Funktionen

## Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 1964. – ISBN 0486612724
- [2] BISCHOFF, M.: Über die Polstruktur von höherer Korrelationsfunktionen in global konform-invarianter Quantenfeldtheorie. (2009)
- [3] DOLAN, F. A. ; OSBORN, H.: Conformal four point functions and the operator product expansion. In: *Nuclear Physics B*599 (2001), S. 459
- [4] DOLAN, F. A. ; OSBORN, H.: Conformal partial waves and the operator product expansion. In: *Nuclear Physics B*678 (2004), S. 491
- [5] ERDÉLYI, A. ; BATEMAN, H.: *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill, 1953
- [6] FERRARA, S. ; GATTO, R. ; GRILLO, A.F.: *Conformal algebra in space-time and operator product expansion*. Springer tracts in modern physics, 1973. – ISBN 3540062165
- [7] GASK, H.: A Proof of the Schwartz's Kernel Theorem. In: *Mathematica Scandinavica* (1960)
- [8] HAAG, R.: *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer, 1996. – ISBN 3540610496
- [9] JOST, R.: *The General Theory of Quantized Fields*. American Mathematical Society, 1965
- [10] MACK, G.: All Unitary Ray Representations of the Conformal Group  $SU(2,2)$  with Positive Energy. In: *Communications in Mathematical Physics* (1977)
- [11] MITEVA, A. M.: Models of Scalar Fields in 4D Globally Conformal Invariant Quantum Field Theory. (2006)
- [12] NIKOLAY, N. M. ; YASSEN, S. S. ; TODOROV, I.T.: Globally conformal invariant gauge field theory with rational correlation functions. In: *Nuclear Physics B*670 (2003), S. 373
- [13] NIKOLOV, N. M. ; REHREN, K. H. ; TODOROV, I. T.: Partial wave expansion and Wightman positivity in conformal field theory. In: *Nuclear Physics B*722 (2005), S. 266
- [14] NIKOLOV, N. M. ; REHREN, K. H. ; TODOROV, I. T.: Pole structure and biharmonic fields in conformal QFT in four dimensions. (2007)
- [15] NIKOLOV, N. M. ; REHREN, K. H. ; TODOROV, I.T.: Harmonic bilocal fields generated by globally conformal invariant scalar fields. (2007)
- [16] NIKOLOV, N. M. ; TODOROV, I. T.: Rationality of conformally invariant local correlation functions on compactified Minkowski space. In: *Communications in Mathematical Physics* 218 (2001), S. 417
- [17] NIKOLOV, N. M. ; TODOROV, I. T.: Conformal Quantum Field Theory in Two and Four Dimensions. (2002)

- 
- [18] REED, M. ; SIMON, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis*. Academic Press, 1972. – ISBN 0125850506
- [19] REED, M. ; SIMON, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, 1972. – ISBN 0125850026
- [20] REHREN, K. H.: Konforme Quantenfeldtheorie. In: *Vorlesungsskript*, online unter <http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/~rehren/vorl/ws9798.html>
- [21] SCHICK, Thomas: Kurz-Skript zu Funktionalanalysis 1. In: *Vorlesungsskript*, online unter <http://www.uni-math.gwdg.de/schick/teach/FA.pdf>
- [22] SCHNEIDER, A.: (2005)
- [23] SCHOTTENLOHER, M.: *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*. Springer, 2008. – ISBN 3540686258
- [24] STREATER, R. F. ; WIGHTMAN, A. S. ; RÖHL, W. H.: *Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie*. Bibliographisches Institut, 1969. – ISBN 3411004355
- [25] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer, 2007. – ISBN 3540725334