

LOKALE GLEICHGEWICHTSZUSTÄNDE DES  
ELEKTROMAGNETISCHEN FELDDES

Diplomarbeit vorgelegt von

MARTIN UECKER

aus

WÜRZBURG

angefertigt im Institut für Theoretische Physik  
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2005



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Relativistische Quantenfeldtheorie</b>	<b>7</b>
2.1	Observablen-Algebra . . . . .	8
2.2	Wightman-Axiome . . . . .	9
2.3	Zustände . . . . .	10
2.3.1	n-Punktfunktionen . . . . .	10
2.3.2	Korrelationsfunktionen und quasifreie Zustände . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Das elektromagnetische Feld</b>	<b>13</b>
3.1	Maxwell-Gleichungen . . . . .	13
3.2	Kommutator . . . . .	14
3.3	Polarisation . . . . .	15
3.4	Automorphismen der Feldalgebra . . . . .	17
3.5	Thermodynamische Gleichgewichtszustände . . . . .	18
3.5.1	KMS-Bedingung . . . . .	18
3.5.2	KMS-Zustände . . . . .	19
3.6	Vakuumzustand . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Lokales Gleichgewicht</b>	<b>21</b>
4.1	Thermale Observable . . . . .	21
4.2	Referenzzustände . . . . .	23
4.3	Thermale Funktionen . . . . .	23
4.4	Zulässige thermale Observable . . . . .	25
4.5	Energie-Impuls-Tensor . . . . .	28
4.6	Entropie . . . . .	29
4.7	Phasenraumdichte . . . . .	30
4.7.1	Quanten-Stokes-Parameter . . . . .	30
4.7.2	Polarisations-Makroobservable . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Transportgleichungen</b>	<b>37</b>
5.1	Lifts der Zustände auf die Makroobservablen . . . . .	37
5.2	Evolutionsgleichungen . . . . .	40
5.3	Evolutionsgleichungen für die Lifts . . . . .	41
5.4	Phasenraumdichte . . . . .	46
5.4.1	Transportgleichungen . . . . .	46
5.4.2	Rekonstruktion von Funktionalen . . . . .	47

5.5	Singularitäten . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Beispiele lokaler Gleichgewichtszustände</b>	<b>53</b>
6.1	Zustände scharfer Temperatur . . . . .	53
6.2	Hot-Bang-Zustand . . . . .	54
6.2.1	Thermale Eigenschaften . . . . .	56
6.3	Polarisierte Zustände . . . . .	57
6.4	Anisotrope Zustände . . . . .	60
6.4.1	Das inverse Schwarzkörper-Problem . . . . .	60
6.4.2	Das mehrdimensionale Problem . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Kosmischer Mikrowellenhintergrund</b>	<b>63</b>
7.1	Dipol . . . . .	64
7.2	Anisotropien höherer Ordnung . . . . .	65
7.3	Robertson-Walker-Universum . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Konventionen</b>	<b>71</b>
<b>B</b>	<b>Weyl-Algebra</b>	<b>73</b>
<b>C</b>	<b>KMS-Zustände</b>	<b>75</b>
<b>D</b>	<b>Symbole</b>	<b>79</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Grundlegende Idee der statistischen Mechanik ist es, physikalische Ensemble durch einen reduzierten Satz von makroskopisch relevanten Observablen zu beschreiben. So wird ein globaler Gleichgewichtszustand (wenn man von der Möglichkeit verschiedener Phasen absieht) durch chemisches Potential und Temperatur vollständig beschrieben.

Für Systeme in einem endlichen Volumen werden die globalen Gleichgewichtszustände durch das Gibbs-Ensemble beschrieben. Eine Verallgemeinerung auf Systeme im thermodynamischen Limes ist die Kubo-Martin-Schwinger (KMS)-Bedingung. Mit dieser Bedingung lassen sich globale Gleichgewichtszustände klassifizieren. Wesentlich schwieriger ist es, Zustände zu charakterisieren, die nur lokal im thermodynamischen Gleichgewicht sind. Eine Methode solche Zustände zu beschreiben wurde in zwei Arbeiten von Buchholz, Ojima und Roos [BOR01] und von Buchholz [Buc03] vorgestellt.

Grundlegende Idee ist dabei, Zustände auf einer geeigneten Menge von lokalen Observablen mit globalen Gleichgewichtszuständen zu vergleichen. Dazu geht man folgendermaßen vor: Man wählt sich für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^4$  eine Menge lokaler Observablen  $\mathcal{S}_x$  und eine Menge von Referenzzustände  $\mathcal{C}$ . Stimmt nun ein gegebener Zustand  $\omega$  an einem Punkt  $x$  mit einem Referenzzustand aus  $\omega_x \in \mathcal{C}$  überein, dann kann man dem Zustand  $\omega$  am Punkt  $x$  die wohldefinierten thermischen Eigenschaften des Referenzzustandes zuschreiben. Ein solcher Zustand wird  $\mathcal{S}_x$ -thermal genannt. Stimmt ein Zustand an jedem Punkt aus einem Gebiet  $\mathcal{O}$  mit einem Referenzzustand überein, hat der Zustand an jedem Punkt in diesem Gebiet eine thermale Interpretation. Entscheidend ist jetzt, daß sich der Referenzzustand von Punkt zu Punkt verändern kann. Dieser Rahmen läßt es deshalb zu, daß thermische Größen (wie zum Beispiel die Temperatur) räumlich variieren. Indem man verschiedene Mengen lokaler thermaler Observablen  $\mathcal{S}_x$  zuläßt, lassen sich Zustände hinsichtlich ihrer thermalen Stabilität vergleichen. Ein Zustand, der nur auf einer Untermenge  $\mathcal{R}_x \subset \mathcal{S}_x$  mit einem Referenzzustand übereinstimmt, ist nur hinsichtlich einer größeren Betrachtungsweise im thermischen Gleichgewicht. Eine genaue Analyse auf dem größeren

Raum der thermalen Observablen würde nichtthermale Eigenschaften offenbaren.

An Hand des konkreten Modells eines masselosen neutralen Skalarfeldes wurde gezeigt, daß sich in diesem methodischen Rahmen aus der mikroskopischen Dynamik auch Evolutionsgleichungen für die thermalen Makroobservablen ergeben. In der Arbeit von Buchholz [BOR01] wurde darüberhinaus noch ein Singularitätentheorem bewiesen: Zustände, die im Sinne dieser Methode lokal im thermischen Gleichgewicht sind und eine nichttriviale Ortsabhängigkeit der thermischen Größen besitzen, können nur in einem Gebiet lokal thermal sein, das in einem Schnitt charakteristischen Halbebenen enthalten ist. Solche Zustände zeichnen damit einen Zeitpfeil aus.

In der vorliegenden Arbeit sollen diese Methoden auf das quantisierte elektromagnetische Feld angewendet werden. Im ersten Kapitel wird dazu der allgemeine theoretische Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie vorgestellt. Im zweiten Kapitel wird die Algebra des elektromagnetischen Feldes beschrieben, und es werden deren KMS-Zustände berechnet. Im dritten Kapitel schließlich werden Räume lokaler thermaler Observablen und die Referenzzustände ausgewählt und die thermische Interpretation der thermalen Observablen in den Referenzzuständen bestimmt. Zusätzlich wird gezeigt, daß sich wichtige Makroobservable wie Temperatur, Energie-Impuls-Tensor und Phasenraumdichte durch Messen der lokalen thermischen Observablen bestimmen lassen. Im vierten Kapitel werden dann aus den Maxwellgleichungen Evolutionsgleichungen für die Makroobservablen hergeleitet. Genau wie im Falle des neutralen Skalarfeldes läßt sich ein Singularitätentheorem beweisen. Im vorletzten Kapitel werden einige Beispiele für lokale Gleichgewichtszustände angegeben. Dazu werden die Zustände mit scharfer Temperatur klassifiziert. Diese sind entweder Zustände mit konstanter Temperaturverteilung oder als Konsequenz des Singularitätentheorems Zustände, die eine Hitze-Explosion beschreiben. Es werden Zustände beschrieben, die polarisiert sind, und nur in Bezug auf eine verkleinerte Menge lokaler Observabler thermal sind. Schließlich werden noch Zustände beschrieben, für die ein fester Beobachter eine anisotrope Temperaturverteilung feststellen würde. Im letzten Kapitel werden die Zustände, die eine Hitze-Explosion beschreiben (Hot-Bang-Zustände), mit den experimentellen Daten der Hintergrundstrahlung verglichen.

## Kapitel 2

# Relativistische Quantenfeldtheorie

Relativistische Quantenfeldtheorien vereinigen die Quantenmechanik mit dem Nahwirkungsprinzip der Speziellen Relativitätstheorie. Die Lokalität der SRT zwingt einen zu Betrachtung von punkartig-lokalisierten Observablen. Die Unschärferelation der Quantenmechanik gibt diesen aber einen singulären Charakter. Um diese Ultraviolett-Divergenzen zu regularisieren, verwendet man als Observable Felder, die mit Testfunktionen „verschmiert“ wurden:

$$\phi(f) = \int d^4x f(x)\phi(x)$$

Charakteristisch für die Quantenfeldtheorie ist nun, daß es zu der abstrakten Observablen-Algebra verschiedene inäquivalente irreduzible Darstellungen als Operatoren auf einem Hilbertraum gibt. Diese verschiedenen Darstellungen entsprechen verschiedenen physikalischen Situationen, die sich durch Superauswahlregeln oder ihrem Verhalten im Unendlichen unterscheiden. Eine Konsequenz ist, daß die (reduziblen) Darstellungen, die thermodynamischen Gleichgewichtszuständen entsprechen, welche sich in ihren thermodynamischen Eigenschaften wie Temperatur und chemischem Potential unterscheiden, disjunkt sind.

Deshalb bietet sich ein von der gewöhnlichen Quantenmechanik abweichendes Vorgehen an: Statt Zustände durch Dichtematrizen und Observable durch selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum zu beschreiben, geht man von einer abstrakten Algebra aus und beschreibt Zustände durch Funktionale über dieser Algebra, die die Erwartungswerte der Observablen in diesem Zustand kodieren. Hat man einen konkreten Zustand gegeben, läßt sich dann eine entsprechende Darstellung auf einem Hilbertraum rekonstruieren.

## 2.1 Observablen-Algebra

In diesem Abschnitt soll kurz die Konstruktion der abstrakten Algebra der verschmierten Observablen beschrieben werden. [BW92] [BLOT90]

Als Testfunktionen-Raum dient der Raum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  der glatten Funktionen mit kompakten Trägern. Um Impulsraummethoden zur Verfügung zu haben, wird oft auch der Schwartzraum (der Raum der schnell abfallenden Funktionen) benützt. Das schränkt die Menge der Zustände dann etwas ein. Um Tensorfelder (bzw. Spinorfelder) beschreiben zu können, muß man den Testfunktionenraum mit einem entsprechenden endlichdimensionalen Raum tensorieren. Ausgangspunkt für die Konstruktion der Feldalgebra ist dann die freie Tensoralgebra über den Testfunktionen. Diese wird von den Elementen der Form

$$\{\otimes_{i=1}^n f_i \mid f_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4), n \in \mathbb{N}_0\}$$

aufgespannt. Mit folgender (linear fortzusetzender) Definition der Involution wird sie zu einer topologischen  $\star$ -Algebra (Borchers-Uhlmann-Algebra):

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^\star \doteq \bar{f}_n \otimes \cdots \otimes \bar{f}_1$$

Morphismen von  $\star$ -Algebren sind lineare Abbildungen, die Multiplikation und Involution respektieren. Man kann auf natürliche Weise einen Homomorphismus von der Poincarégruppe in die Automorphismen-Gruppe der Algebra definieren:

$$\alpha_{(a,\Lambda)}(f)(x) \doteq D(\Lambda)f(\Lambda^{-1}(x-a))$$

Dabei ist  $D$  eine Matrixdarstellung der Poincarégruppe, die dem Tensorcharakter des Feldes entspricht.

Feldgleichungen und Kommutator sollen als Relationen in der Algebra gültig sein. Dazu dividiert man durch geeignete Ausdrücke erzeugte beidseitige  $\star$ -Ideale heraus. Im Falle des masselosen skalaren Feldes haben diese zum Beispiel die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \{\square f\} \\ \mathcal{J} &= \{fg - gf - [f, g]\}. \end{aligned}$$

Damit die relativistischen Symmetrien erhalten bleiben, müssen diese Ideale invariant unter der automorphen Wirkung der Poincarégruppe sein. Die Elemente der so konstruierten Algebra bezeichnen wir mit  $\phi(f)$ .

Manchmal interessiert man sich nur für Observable in einem gewissen Teilraum der Raumzeit. Die Unteralgebra, die von den Testfunktionen mit Support in einer offenen Teilmenge  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$  des Minkowskiraums erzeugt wird, wird mit  $\mathcal{A}(\mathcal{O})$  bezeichnet. Die Zuordnung von der Kategorie der offenen Teilmengen des Minkowskiraum mit den Mengeninklusionen als Morphismen in die Kategorie der Algebren ist ein Funktor. Die Algebra  $\mathcal{A}$  ist dann der induktive Limes dieses Funktors. Solche Algebren heißen quasi-lokal.



## 2.2 Wightman-Axiome

Die Axiome einer relativistischen Quantenfeldtheorie (Wightman-Axiome) werden als Bedingungen formuliert, die die Theorie im Vakuumsektor erfüllen muß [SW64].

Um diese Axiome im algebraischen Rahmen formulieren zu können, fordert man die Existenz einer Vakuumdarstellung. Eine Darstellung ist dabei ein  $\star$ -Morphismus  $\pi_0$  von der abstrakten Algebra in die Algebra der unbeschränkten Operatoren  $\text{Op}(\mathcal{D})$  auf einen Hilbertraum mit einem gemeinsamen dichten und stabilen Definitionsbereich  $\mathcal{D}$ . Die dargestellten Observablen kann man dann als operatorwertige Distributionen verstehen.

Eine relativistische Quantenfeldtheorie muß dann folgende Axiome erfüllen:

- *Kovarianz*: Eine stark stetige unitäre Darstellung  $U$  der Poincarégruppe  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  (bzw. deren Überlagerungsgruppe), unter der sich die Felder kovariant transformieren (und die den Definitionsbereich stabil läßt):

$$U(a, \Lambda)\pi_0(\phi(f))U(a, \Lambda)^{-1} = \pi_0(\alpha_{(a, \Lambda)}(\phi(f)))$$

- *Vakuum*: Es gibt einen normierten und zyklischen (Vakuum-)Vektor  $\Omega_0 \in \mathcal{D}$ , der invariant unter der Wirkung der Poincarégruppe ist:

$$\overline{\pi_0(\mathcal{A})\Omega_0} = \mathcal{H} \quad U(a, \Lambda)\Omega_0 = \Omega_0$$

- *Spektrumsbedingung*: Das Spektrum der Generatoren der Darsteller der Translationen soll im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel enthalten sein:

$$U(\mathbf{1}, a) = e^{ia_\nu P^\nu} \quad \text{mit} \quad \text{supp } P \in \overline{V^+}$$

Diese Bedingung entspricht einer Forderung nach einer unteren Energieschranke für den Hamiltonoperator.

- *Lokalität*: Für Observable, die in raumartig getrennten Gebieten lokalisiert sind, gilt:

$$[\pi_0(\phi(f)), \pi_0(\phi(g))] = 0$$

Eine Theorie wird typischerweise im Vakuumsektor als konkrete Operatoralgebra konstruiert, die den Wightmanaxiomen und den Feldgleichungen genügt. Diese konkrete Darstellung wird dann als definierende Darstellung der abstrakten Algebra aufgefaßt.

## 2.3 Zustände

**Definition 2.3.1.** Eine Funktional  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer  $\star$ -Algebra mit Eins heißt Zustand, wenn für alle  $a, b \in \mathbb{C}$  und  $A, B \in \mathcal{A}$  gilt:

$$\begin{aligned} \omega(aA + bB) &= a\omega(A) + b\omega(B) && (\text{linear}) \\ \omega(A^*A) &\geq 0 && (\text{positiv}) \\ \omega(\mathbb{1}) &= 1 && (\text{normiert}) \end{aligned}$$

Ein solches Zustandsfunktional liefert den Erwartungswert einer Observablen  $A$  bei einer Messung an dem physikalischen System in diesem Zustand:

$$\langle A \rangle_\omega \doteq \omega(A)$$

Die definierenden Eigenschaften eines Zustandsfunktionals garantieren dabei die Verträglichkeit mit der statistischen Interpretation der Quantenmechanik.

Die Zustände über der Algebra bilden eine konvexe Menge. Extremale Zustände heißen rein. Alle anderen Zustände heißen Gemische.

Für jeden Zustand kann man mit der *Gelfand-Naimark-Segal-Konstruktion* eine Darstellung der Algebra konstruieren, in der der Zustand dann als Vektorzustand repräsentiert wird.

### 2.3.1 n-Punktfunktionen

Zustände können durch ihre n-Punktfunktionen charakterisiert werden:

$$\omega_n(f_1, \dots, f_n) \doteq \omega(\phi(f_1) \dots \phi(f_n)) \quad f_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$$

Umgekehrt definiert eine geeignete Familie von n-Punktfunktionen einen Zustand über der Algebra. Sind die n-Punktfunktionen in jedem Eintrag stetig, stellen sie in jedem Eintrag einzeln und damit nach dem *Satz vom Kern* auch über dem n-fachen topologischen Tensorprodukt des Testfunktionenraum eine eindeutig bestimmte Distribution dar.

Damit eine solche Distribution als Zustand über der Observablenalgebra interpretiert werden kann, muß dieser neben den definierenden Eigenschaften eines Zustands auch mit der Dynamik und der Kommutatorrelation verträglich sein. Für die Zweipunktfunktion heißt das im Sinne von Distributionen:

$$\begin{aligned} \square_x \omega(x, y) &= \square_y \omega(x, y) = 0 \\ \omega(x, y) - \omega(y, x) &= C(x, y) \end{aligned}$$

mit der Kommutatorfunktion  $C(x, y) \doteq \omega([\phi(x), \phi(y)])$ . Diese hängt für freie Felder (c-Zahl-Kommutatoren) nur von der Struktur der Feldalgebra ab.

### 2.3.2 Korrelationsfunktionen und quasifreie Zustände

Die Korrelation zweier (kommutierender) Observablen ist:

$$\langle AB \rangle_\omega - \langle A \rangle_\omega \langle B \rangle_\omega$$

Oft verschwinden Korrelation zwischen Observablen unter bestimmten Umständen (asymptotisch in der Zeit oder im Ort bzw. es verschwinden höhere Korrelationen). Dann ist es sinnvoll, statt der n-Punktfunktionen eine Familie von Funktionen zu betrachten, die Korrelationen direkt widerspiegeln. Man definiert Korrelationsfunktionen durch ([Haa96] S.62):

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_P \prod_{(j_i) \in P} \omega_T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$$

Dabei wird über alle ordnungserhaltenden Partitionen  $P$  der Menge  $\{1 \dots n\}$  summiert. Dieses Gleichungssystem läßt sich rekursiv auflösen:

$$\begin{aligned} \omega_T(x) &= \omega(x) \\ \omega_T(x_1, x_2) &= \omega(x_1, x_2) - \omega(x_1)\omega(x_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

Es gibt eine Klasse von Zuständen, für die die Korrelationsfunktionen für  $n > 2$  verschwinden. Solche Zustände heißen *quasifreie Zustände*. Alle n-Punktfunktionen werden dann schon durch die Ein- und Zweipunktfunktion rekursiv festgelegt. Wichtige Beispiele sind Vakuum und thermische Gleichgewichtszustände freier Felder. Für quasifreie Zustände reicht es, die Eigenschaften eines Zustands für die Zweipunktfunktion nachzuprüfen [Fre99].



## Kapitel 3

# Das elektromagnetische Feld

Die Feldgleichungen für das elektromagnetische Feld sind die Maxwellgleichungen. Sie werden wieder durch Herausteilen der durch entsprechende Ausdrücke erzeugten Ideale aus der freien Tensoralgebra  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^{4 \times 4}$  implementiert. Wir beschreiben erst einige Eigenschaften der klassischen Feldgleichungen, dann Kommutatorrelation, Polarisation, Automorphismen der Feldalgebra und schließlich die KMS-Zustände zu den Zeittranslationen.

Die Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe, die schon für das Verständnis der klassischen Theorie relevant ist, ist in [SU01] ausgeführt. Die Quantenfeldtheorie des freien elektromagnetischen Feldes wird in [Fre01] beschrieben.

### 3.1 Maxwell-Gleichungen

Die elektrischen und magnetischen Felder transformieren sich als Vektoren unter der Drehgruppe des euklidischen Raums. Unter der Lorentz-Gruppe werden E-Felder und B-Felder vermischt. Eine der relativistischen Symmetrie angemessene Beschreibung erhält man, wenn man die beiden Felder zu einem antisymmetrischen Tensor zusammenfaßt:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die Maxwellgleichungen nehmen dann folgende Form an:

$$\begin{aligned} \partial_\rho F_{\sigma\tau} + \partial_\sigma F_{\tau\rho} + \partial_\tau F_{\rho\sigma} &= 0 \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} &= 4\pi j^\mu \end{aligned}$$

Da wir in dieser Arbeit nur das freie elektromagnetische Feld betrachten, ist im Folgenden  $j^\mu = 0$ . Aus beiden Maxwellgleichungen zusammen folgt, daß jede Komponente des Feldstärketensors der Wellengleichung genügt:

$$\square F_{\mu\nu} = 0$$

Mit dem Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = \begin{cases} 1 & \text{gerade Permutationen der Indizes aus } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{ungerade Permutationen der Indizes aus } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

kann man den dualen Feldstärketensor definieren:

$$(\star F)^{ik} \doteq \frac{1}{2} \epsilon^{mnik} F_{mn}$$

Diese Operation des Dualisierens entspricht dem Hodge-Operator aus der Theorie der alternierenden Differentialformen. Die homogene Maxwellgleichung läßt sich dann auch schreiben als

$$\partial_i (\star F)^{ik} = 0.$$

Für verschwindenden Strom erkennt man die Dualität der Maxwellgleichungen, die eine Symmetrie zwischen magnetischen und elektrischen Feldern herstellt.

Die klassischen Maxwellgleichung lassen sich durch Einführung eines Vektorpotentials lösen. Der Feldstärketensor läßt sich darstellen als

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i.$$

Die homogene Maxwellgleichung wird damit automatisch erfüllt. Das Potential wird durch den Feldstärketensor nur bis auf Eichtransformationen festgelegt. Man kann das Potential so wählen, daß es die Lorenz-Bedingung erfüllt:

$$\partial_i A^i = 0$$

Die inhomogene Maxwellgleichung nehmen dann folgende Form an:

$$\partial_k F^{ik} = -\square A^i = 0$$

## 3.2 Kommutator

Der Kommutator für das freie elektromagnetische Feld ist:

$$\begin{aligned} [F_{\mu\nu}(x), F_{\sigma\tau}(y)] &= -(2\pi)^{-3} \int dp^4 (g_{\mu\sigma} p_\nu p_\tau - g_{\nu\sigma} p_\mu p_\tau - g_{\mu\tau} p_\nu p_\sigma + g_{\nu\tau} p_\mu p_\sigma) \\ &\quad \times \delta(p^2) \epsilon(p_0) e^{-i(x-y)p} \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, daß dieser Kommutator bis auf einen konstanten Vorfaktor die einzige mögliche Wahl ist. Es gilt der Satz:

**Satz 3.2.1.** *Bis auf konstante Faktoren ist dieser Kommutator die einzige Wahl, die mit den Maxwellgleichungen und den Wightman-Axiomen übereinstimmt.*

**Beweis-Skizze:** Die Vakuum-Zweipunktfunktion wird schon durch die Wightman-Axiome und die Maxwellgleichungen bis auf einen konstanten Faktor festgelegt. Die Kommutatorfunktion ist deren antisymmetrischer Anteil. Daß der Kommutator für eine freie masselose Theorie eine  $c$ -Zahl ist, folgt aus einer Erweiterung eines Theorems von Jost und Schroer durch Pohlmeyer [Poh69]. Siehe auch [Fre01].  $\square$

Der Kommutator verschwindet nicht nur für raumartig getrennte Observable, wie von der Lokalität gefordert, sondern auch für zeitartig getrennte. Dieses *Huygens-Prinzip* ist typisch für masselose Theorien in geraden Dimensionen.

Der Tensor

$$P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) \doteq (g_{\mu\sigma}p_\nu p_\tau - g_{\nu\sigma}p_\mu p_\tau - g_{\mu\tau}p_\nu p_\sigma + p_{\nu\tau}p_\mu p_\sigma)$$

wird im Laufe der Arbeit öfter vorkommen. Wir schreiben auch  $P_{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)$ , wenn wir den entsprechenden aus Ableitungen gebildeten Tensor meinen. Diese Tensoren sind antisymmetrisch jeweils in  $\mu\nu$  und  $\sigma\tau$  und symmetrisch unter Vertauschen der beiden Paare:

$$P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) = P_{[\mu\nu][\sigma\tau]}(p) = P_{\sigma\tau\mu\nu}(p)$$

### 3.3 Polarisation

Auf dem Minkowski-Raum gilt [SU01]:

$$\star^2 = -1$$

Jede Lösung der Maxwellgleichungen läßt sich deshalb (im Komplexen) in einen selbstdualen und einen antiselbstdualen Teil zerlegen:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + i(\star F)_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - i(\star F)_{\mu\nu})$$

Diese Zerlegung entspricht einer Zerlegung in einen Anteil mit positiver bzw. negativer Helizität. Die beiden Anteile transformieren sich unter der Wirkung der Poincarégruppe unter sich. Die Darstellung der Poincarégruppe durch ein antisymmetrisches Tensorfeld, das die Maxwellgleichungen erfüllt, ist also reduzibel.

Betrachtet man die kleine (Wigner-)Gruppe eines lichtartigen Impulses, dann ist diese isomorph zur Bewegungsgruppe der euklidischen Ebene  $E_2$ . Die Drehungen der Ebene rotieren dabei die Polarisationsrichtung linear polarisierter Wellen. Die Translationen werden trivial dargestellt.

Für alle lichtartigen Impulse  $p$  sei eine Helizitätsbasis  $e(p; \lambda)$  ( $\lambda \in \{+, -\}$ ) als Eigenzustände der Rotationen der kleinen Gruppe zu  $p$  in Lorenz-Eichung fixiert:

$$e^0(p; \lambda) = 0 \quad p_\mu e^\mu(p; \lambda) = 0 \quad e^2(p; \lambda) = 1 \quad \overline{e_\mu(p; \lambda)} e^\mu(p; \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (3.3.1)$$

Sei zum Beispiel  $p = (1, 0, 0, 1)$  dann, könnte man wählen:

$$e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0)$$

Für beliebige andere lichtartige Vektoren ließe sich dann eine entsprechend Lorentz-transformierte Basis wählen. Die Lorentztransformation ist aber nicht eindeutig und läßt sich aus kohomologischen Gründen auch nicht stetig wählen.

Wir definieren das Bild der beiden Helizitätseigenzustände unter der äußeren Ableitung im Impulsraum:

$$e_{\mu\nu}(p, \lambda) \doteq p_{[\mu}e_{\nu]}(p, \lambda)$$

Nützlich ist auch die Definition:

$$e_{\mu\nu}^R(p, \lambda) \doteq p_{[\mu}^R e_{\nu]}(p, \lambda)$$

Dabei ist  $p^R = (p_0, -\vec{p})$ .

Wir sammeln einige Eigenschaften dieser Tensoren in dem folgenden Lemma:

**Lemma 3.3.2.** Für  $p \in \partial V^+$ ;  $\lambda, \lambda' \in \{+, -\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \overline{e_{\mu\nu}^R(p, \lambda)} e^{\mu\nu}(p, \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'} |\vec{p}|^2 \\ P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) &= -\frac{1}{2}(e^{\mu\nu}(p, +)\overline{e^{\sigma\tau}(p, +)} + e^{\mu\nu}(p, -)\overline{e^{\sigma\tau}(p, -)}) \\ -2P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) \overline{e_{\mu\nu}^R(p, \lambda)} e_{\sigma\tau}^R(p, \lambda') &= |\vec{p}|^4 \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

**Beweis:** Die erste Gleichung folgt direkt aus der Definition der Tensoren und der Orthogonalität der Helizitätsbasis. Für die zweite Gleichung beobachtet man, daß für jeden lichtartigen Vektor  $p$  mit  $p_0 = 1$  gilt:

$$-2g^{\mu\sigma} = e^{\mu}(p; +)\overline{e^{\sigma}(p; +)} + e^{\mu}(p; -)\overline{e^{\sigma}(p; -)} + (p^R)^{\mu}p^{\sigma} + p^{\mu}(p^R)^{\sigma}$$

Die letzten beiden Terme entsprechen dabei einer Eichtransformation und fallen unter Antisymmetrisierung der beiden Indizes mit  $p$  weg.

Die dritte Gleichung ergibt sich schließlich als Konsequenz der beiden anderen:

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) \overline{e_{\mu\nu}^R(p, \lambda)} e_{\sigma\tau}^R(p, \lambda') &= -\frac{1}{2}(e^{\mu\nu}(p, +)\overline{e^{\sigma\tau}(p, +)} + e^{\mu\nu}(p, -)\overline{e^{\sigma\tau}(p, -)}) \\ &\quad \times \overline{e_{\mu\nu}^R(p, \lambda)} e_{\sigma\tau}^R(p, \lambda') \\ &= -\frac{1}{2}\delta_{\lambda\lambda'} |\vec{p}|^4 \end{aligned}$$

□

Betrachtet man die Wirkung des Kommutators im Impulsraum, dann erkennt man, daß er für zwei Felder bzgl. obiger Basis orthogonaler Helizität verschwindet.



Ein  $c$ -Zahl-Kommutator gibt der Vakuumdarstellung die Struktur eines Fockraums und erlaubt damit eine Teilchen-Interpretation des quantisierten elektromagnetischen Feldes als Photonen. Das Feld läßt sich im Fockraum als Summe von Erzeugern und Vernichtern ausdrücken ( $\underline{p} \doteq (|\vec{p}|, \vec{p})$ ):

$$F_{\mu\nu}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \sum_{\lambda \in \{+, -\}} -i 2e_{\mu\nu}(\underline{p}, \lambda) a_\lambda(\vec{p}) e^{-i\underline{p}x} + c.c.$$

### 3.4 Automorphismen der Feldalgebra

Entsprechend dem Tensorcharakter des Maxwell-Tensors und der Konstruktion der Algebra ist die Wirkung der Poincarégruppe für das elektromagnetische Feld gegeben durch:

$$\alpha_{\Lambda, a}(F_{\mu\nu}(x)) = F_{\sigma\tau}(\Lambda x + a) \Lambda^\sigma_\mu \Lambda^\tau_\nu$$

In die Maxwellgleichungen geht nur die kausale Struktur der Raumzeit ein. Die Transformationen der Raumzeit, die die kausale Struktur invariant lassen, bilden die konforme Gruppe. Da die Elemente dieser Gruppe aber nicht alle auf dem ganzen Minkowskiraum operieren, ist sie nicht in der Automorphismengruppe der ganzen Algebra enthalten. Von der konformen Gruppe bleiben auf dem ganzen Minkowskiraum neben der Poincarégruppe nur die Untergruppe der Dilatationen:

$$\delta_\lambda(F_{\mu\nu}(x)) = \lambda^2 F_{\mu\nu}(\lambda x)$$

Um zu zeigen, daß dies ein Automorphismus ist, rechnet man nach, daß Involution, Feldgleichungen und Kommutator erhalten bleiben.

Die Dualitätsrotationen sind eine weitere Abelsche Untergruppe der Automorphismengruppe:

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(F_{\mu\nu}(x)) &= \frac{e^{i\theta}}{2} (F_{\mu\nu}(x) + i(\star F)_{\mu\nu}(x)) + \frac{e^{-i\theta}}{2} (F_{\mu\nu}(x) - i(\star F)_{\mu\nu}(x)) \\ &= \cos \theta F_{\mu\nu}(x) - \sin \theta (\star F)_{\mu\nu}(x) \quad \theta \in U(1) \end{aligned}$$

Der Kommutator bleibt auch unter diesen Automorphismen erhalten. Denn die Ausdrücke  $(\mathbb{1} \pm i\star)$  sind Projektoren auf die Helizitätseigenzustände.

Diese Automorphismengruppe enthält als Spezialfall für  $\theta = \pi/2$  die Untergruppe  $\mathbb{Z}_2$ :

$$\alpha_{\pi/2}(F_{\mu\nu}(x)) = \gamma(F_{\mu\nu}(x)) = -F_{\mu\nu}(x)$$

Für alle bosonischen freien Theorien hat man wegen der  $c$ -Zahl-Eigenschaft des Kommutators noch Automorphismen der Form

$$\alpha_C(F_{\mu\nu}(x)) = F_{\mu\nu}(x) + C_{\mu\nu}(x) \cdot \mathbb{1}.$$

Hier ist  $C$  eine reelle Lösung der Maxwellgleichung. Diese Menge von Automorphismen bildet ebenfalls eine Abelsche Untergruppe der Automorphismengruppe. Durch Anwenden eines dieser Automorphismen läßt sich die Einpunktfunktion eines beliebigen Zustands auf Null eichen.

### 3.5 Thermodynamische Gleichgewichtszustände

Zustände im globalen thermodynamischen Gleichgewicht lassen sich durch die Kubo-Martin-Schwinger-Bedingung charakterisieren [HHW67]. Für Systeme in endlichem Volumen läßt sie sich aus dem Gibbs-Ensemble herleiten. Im Gegensatz zu diesem läßt sie sich aber direkt im thermodynamischen Limes formulieren. Für unbeschränkte Systeme läßt sie sich direkt aus einer physikalisch motivierten Charakterisierung von thermodynamischen Gleichgewichtszuständen herleiten. So implizieren Stabilitäts- oder Passivitätsforderungen unter recht allgemeinen Voraussetzungen die KMS-Bedingung [BR96].

#### 3.5.1 KMS-Bedingung

**Definition 3.5.1.** *Ein Zustand  $\omega_\beta$  erfüllt die KMS-Bedingung zur inversen Temperatur  $\beta$  im Lorentz-System mit positiven Zeitnormalenvektor  $e$ , wenn für jedes Paar von Operatoren  $A, B \in \mathcal{A}$  eine in dem Streifen  $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im}z \leq \beta\}$  analytische Funktion  $h$  existiert, die an den Rändern des Streifens stetig ist, so daß*

$$h(t) = \omega_\beta(A\alpha_{te}(B)) \quad h(t + i\beta) = \omega_\beta(\alpha_{te}(B)A) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

*gilt.*

Die KMS-Bedingung hat eine fouriertransformierte Variante: Für je zwei Operatoren  $A, B$  seien die beiden Funktionen

$$F_{A,B}(t) \doteq \omega_\beta(B\alpha_{te}(A)) \quad \text{und} \quad G_{A,B}(t) \doteq \omega_\beta(\alpha_{te}(A)B)$$

definiert. Mit der Fouriertransformation

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}\{F(t)\} \doteq \int F(t)e^{-i\omega t} dt$$

im Sinne von temperierten Distributionen, gilt dann folgender Satz ([Haa96]):

**Satz 3.5.2.** *Ein Zustand  $\omega_\beta$  ist KMS-Zustand zur inversen Temperatur  $\beta$  genau dann, wenn gilt:*

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}\{G_{A,B}(t)\} = e^{-\beta\omega} \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega}\{F_{A,B}(t)\}$$

Für endliche Temperaturen ist die Lorentz-Symmetrie in den KMS-Zuständen gebrochen [Oji86]: KMS-Zustände zeichnen ein Ruhesystem aus. Wir fassen deshalb die inverse Temperatur mit dem Normalenvektor in Zeitrichtung des Inertialsystems zu einem Vektor  $\beta \in V^+$  zusammen.

### 3.5.2 KMS-Zustände

**Satz 3.5.3.** *Die extremalen Punkte der Menge der KMS-Zustände des elektromagnetischen Feldes zur inversen Temperatur  $\beta$  sind die quasifreien Zustände mit einer Zweipunktfunktion der Form:*

$$\begin{aligned} \omega_{\beta,C}(F_{\mu\nu}(x)F_{\sigma\tau}(y)) &= -(2\pi)^{-3} \int d^4p P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) \delta(p^2) \epsilon(p_0) e^{-i(x-y)p} \frac{1}{1 - e^{-\beta p}} \\ &\quad + C_{\mu\nu}(x)C_{\sigma\tau}(y) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Die Einpunktfunktion ist  $\omega_{\beta,C}(F_{\mu\nu}(x)) = C_{\mu\nu}(x)$ .  $C$  muß eine reelle schwache Lösung der Maxwellgleichungen sein und darf nicht von der Zeit abhängen.

**Beweis:** Die fouriertransformierte KMS-Bedingung läßt sich umschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ \omega_{\beta}([\alpha_t(A), B]) \} &= \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ G_{A,B}(t) - F_{A,B}(t) \} \\ &= (1 - e^{-\beta\omega}) \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ G_{A,B}(t) \} \\ &= (1 - e^{-\beta\omega}) \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ \omega_{\beta}(AB) \} \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Angewandt (im Sinne von Distributionen) auf  $A = F_{\mu\nu}(x)$  und  $B = F_{\sigma\tau}(y)$  ergibt das eine lineare Gleichung für die Zweipunktfunktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ [F_{\mu\nu}(x + te_0), F_{\sigma\tau}(y)] \} &= \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ G_{F_{\mu\nu}(x)F_{\sigma\tau}(y)}(t) - F_{F_{\mu\nu}(x)F_{\sigma\tau}(y)}(t) \} \\ &= (1 - e^{-\beta\omega}) \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ G_{F_{\mu\nu}(x)F_{\sigma\tau}(y)} \} \\ &= (1 - e^{-\beta\omega}) \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ \omega_{\beta}(F_{\mu\nu}(x + te_0)F_{\sigma\tau}(y)) \} \end{aligned}$$

Dabei ist  $e_0$  der Zeitnormalenvektor in Richtung von  $\beta$ . Die inhomogene Lösung erhält man durch Division durch  $(1 - e^{-\beta\omega})$ . Da keine Ableitung des Faktors  $1 - e^{-\beta\omega}$  bei 0 verschwindet, gilt für die homogenen Lösungen im Raum der temperierten Distributionen:

$$(1 - e^{-\beta\omega})C(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C(\omega) = c\delta(\omega) \quad c \in \mathbb{C}$$

Die Form der Zweipunktfunktion ist damit bis auf den konstanten Term in der behaupteten Weise festgelegt.

Wie im Anhang C erklärt, bilden die KMS-Zustände zur inversen Temperatur  $\beta$  eine konvexe Menge, deren extremalen Zustände quasifrei sind. Die extremalen Punkte der Menge der KMS-Zustände haben die Cluster-Eigenschaft:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\alpha_t(A)B) = \omega(A)\omega(B)$$

Da der Kommutator für  $t \rightarrow \infty$  verschwindet, ist die zeitlich konstante Distribution gerade das Produkt der (in KMS-Zuständen konstanten) Einpunktfunktion.

Die extremalen KMS-Zustände transformieren sich transitiv unter den Automorphismen der Form

$$\alpha(F^{\mu\nu}(x)) = F^{\mu\nu}(x) + C^{\mu\nu}(x) \cdot \mathbf{1},$$

wenn  $C$  eine konstante Lösung der Maxwellgleichungen bezüglich des durch den Temperaturvektor ausgezeichneten Ruhesystems ist (die Automorphismen kommutieren dann mit den Zeittranslationen). Da Automorphismen positive Elemente aufeinander abbilden, folgt die Positivität auch für KMS-Zustände, deren Einpunktfunktion nicht verschwindet.

Zu zeigen ist noch, daß diese Zweipunktfunktion tatsächlich einen quasifreien Zustand definiert. Fraglich ist nur die Positivität. Wir beschränken uns erstmal nur auf eichinvariante Zustände. Mit der Fouriertransformation

$$\hat{f}(p) \doteq \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x f(x) e^{-ixp}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \omega_\beta(F(f)^* F(f)) &= \int d^4y \int d^4x \overline{f^{\mu\nu}(x)} f^{\sigma\tau}(y) \omega_\beta(F_{\mu\nu}(x) F_{\sigma\tau}(y)) \\ &= -(2\pi) \int d^4p \delta(p^2) \epsilon(p_0) g_{\mu\sigma} p_\nu \overline{\hat{f}^{[\mu\nu]}(-p)} p_\tau \hat{f}^{[\sigma\tau]}(-p) \frac{1}{1 - e^{-\beta p}} \end{aligned}$$

Positivität folgt nun aus der Antisymmetrie. Sei (wegen Kovarianz o.B.d.A.)  $p = (1, 0, 0, 1)$ , dann gilt wegen  $p_\mu p_\nu \hat{f}^{[\mu\nu]} = 0$ :

$$-g_{\mu\sigma} p_\nu \overline{\hat{f}^{[\mu\nu]}(-p)} p_\tau \hat{f}^{[\sigma\tau]}(-p) = |p_\nu \hat{f}^{[1\nu]}(-p)|^2 + |p_\nu \hat{f}^{[2\nu]}(-p)|^2 \geq 0$$

□

### 3.6 Vakuumzustand

Die fouriertransformierte KMS-Bedingung unterdrückt für verschwindende Temperatur die negativen Frequenzen. Die Vakuumzweipunktfunktion ist der positive Frequenzanteil der Kommutatorfunktion, was mit der Gültigkeit der Spektrumsbedingung im Vakuumsektor konsistent ist. Den Vakuumzustand erhält man im Limes kleiner Temperaturen  $\beta \rightarrow \infty$ :

$$\omega_\infty(F_{\mu\nu}(x) F_{\sigma\tau}(y)) \doteq -(2\pi)^{-3} \int d^4p P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) \delta(p^2) \Theta(p_0) e^{-i(x-y)p}$$

Für den Vakuumzustand ist die volle Symmetrie unter der Poincaré-Gruppe wiederhergestellt. Die GNS-Darstellung zum Vakuumzustand erfüllt die Wightmanaxiome.

Die Zustände, die durch Automorphismen der Form

$$\alpha(F^{\mu\nu}(x)) = F^{\mu\nu}(x) + C^{\mu\nu}(x) \cdot \mathbf{1}$$

aus dem Vakuum hervorgehen, sind gerade die *kohärenten Zustände*:

$$\omega_C = \omega_\infty \circ \alpha_C$$

# Kapitel 4

## Lokales Gleichgewicht

Um Zustände zu bestimmen, die lokal im thermodynamischen Gleichgewicht sind, wählt man sich eine Menge lokaler Observablen (thermische Observablen) und eine Menge von translationsinvarianten Vergleichszuständen, die global im thermodynamischen Gleichgewicht sind. In diesen Vergleichszuständen haben dann die thermischen Observablen eine wohldefinierte thermodynamische Interpretation.

Man untersucht nun gegebene andere Zustände, indem man sie lokal auf dem Raum der lokalen thermischen Observablen mit den Referenzzuständen vergleicht. Stimmen sie auf diesem Raum mit einem Referenzzustand überein, kann man die makroskopische Interpretation der thermischen Observablen von den Vergleichszuständen auf diese Zustände übertragen.

### 4.1 Thermale Observable

Wegen der Translationsinvarianz der thermischen Gleichgewichtszustände lassen sich diese Zustände auf punktiert lokalisierte Observable ausdehnen ( $f$  eine positive normierte Testfunktion):

$$\omega_\beta(\phi(x)) \doteq \omega_\beta(\phi(f))$$

Die so definierten Punktfelder bilden einen linearen Raum  $\mathcal{Q}_x$  von quadratischen Formen (linearen Funktionalen über den Zuständen). Wie in [BOR01] dargelegt, sind alle Zustände mit lokal endlicher Energie im Definitionsbereich dieser Formen.

Als Menge thermaler Observabler wird ein Unterraum  $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{Q}_x$  ausgewählt. Ein Zustand heißt dann  $\mathcal{S}_x$ -thermal, wenn er auf den Vergleichsobservablen mit einem thermischen Referenzzustand  $\omega_\rho$  übereinstimmt:

$$\omega|_{\mathcal{S}_x} = \omega_\rho|_{\mathcal{S}_x}$$

Der Raum  $\mathcal{S}_x$  darf nicht zu groß sein, weil sonst zuwenige Zustände eine lokale thermische Interpretation haben (im Extremfall nur die globalen Gleichgewichtszustände). Er sollte aber groß genug sein, um interessante thermodynamische Eigenschaften wie Energiedichte, Phasenraumdicke etc. bestimmen zu können.

Durch eine Auswahl einer Hierarchie durch Inklusion geordneter Räume lokaler Observablen lassen sich Zustände unterscheiden, die in verschiedenem Ausmaß lokal thermisch sind. So können Zustände hinsichtlich bestimmter Eigenschaften thermalisiert sein, bezüglich anderer Eigenschaften aber nicht.

Geeignet als thermische Observable sind die *balancierten Ableitungen*. Sei  $\zeta$  ein raumartiger Vektor. Die balancierten Ableitungen werden für jeden Multiindex  $\underline{\rho}$  definiert als:

$$\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\underline{\rho}}(x) \doteq \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} \left( F^{\mu\nu}(x + \zeta) F^{\sigma\tau}(x - \zeta) - \omega_{\infty}(F^{\mu\nu}(x + \zeta) F^{\sigma\tau}(x - \zeta)) \cdot \mathbb{1} \right) \quad (4.1.1)$$

Zusammen mit der  $\mathbb{1}$  und den Feldern  $F^{\mu\nu}(x)$  bilden sie die Menge  $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{Q}_x$  der thermischen Observablen.

Wir definieren noch einen Unterraum  $\mathcal{R}_x \subset \mathcal{S}_x$  dieser Observablen, deren Elemente nicht sensibel für die Polarisation sind. Dazu betrachtet man die Menge der Observablen:

$$\theta^{\mu\gamma\sigma}{}_{\gamma}{}^{\underline{\rho}}(x)$$

Daß dies tatsächlich ein Unterraum ist, sieht man nach Kontraktion der Indizes mit einem beliebigen Tensor:

$$\mathcal{S}_x = \left\{ c_{\mu\nu\sigma\tau\underline{\rho}} \theta^{\mu\nu\sigma\tau,\underline{\rho}}(x) \mid c_{\mu\nu\sigma\tau\underline{\rho}} \in \mathbb{C}^{4^{(4+|\underline{\rho}|)}} \right\}$$

bzw.

$$\mathcal{R}_x = \left\{ c_{\mu\sigma\underline{\rho}} g_{\nu\tau} \theta^{\mu\nu\sigma\tau,\underline{\rho}}(x) \mid c_{\mu\sigma\underline{\rho}} \in \mathbb{C}^{4^{(2+|\underline{\rho}|)}} \right\}$$

Ein  $\mathcal{S}_x$ -thermaler Zustand ist also notwendigerweise auch  $\mathcal{R}_x$ -thermal, aber eine  $\mathcal{R}_x$ -thermaler Zustand ist nicht unbedingt  $\mathcal{S}_x$ -thermal.

Später werden wir noch zwei weitere etwas verkleinerte Räume an thermalen Observablen betrachten. Diese entstehen aus  $\mathcal{S}_x$  und  $\mathcal{R}_x$  durch Entfernen der balancierten Ableitungen mit einem Multiindex ungerader Ordnung:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_x &= \mathcal{S}_x \setminus \{ \theta^{\mu\nu\sigma\tau,\underline{\rho}}(x) \mid |\underline{\rho}| \text{ ungerade} \} \\ \mathcal{R}'_x &= \mathcal{R}_x \setminus \{ g_{\nu\tau} \theta^{\mu\nu\sigma\tau,\underline{\rho}}(x) \mid |\underline{\rho}| \text{ ungerade} \} \end{aligned}$$

## 4.2 Referenzzustände

Als Referenzzustände dienen die KMS-Zustände  $\omega_\beta$  und deren Mischungen mit kompakten Temperaturträger  $B \subset V^+$ :

$$\omega_B(A) = \int_B d\rho(\beta) \omega_\beta(A)$$

Dabei ist  $\rho(\beta)$  ein normalisiertes Maß mit Träger  $B$ .

Außerdem lassen wir noch ein räumlich und zeitlich konstante Einpunktfunktion zu:

$$\omega_{B,C}(A) \doteq (\omega_B \circ \alpha_C)(A)$$

Dabei ist  $C^{\mu\nu}(x) = C^{\mu\nu}$  ein konstantes antisymmetrisches Tensorfeld. Die Ein- und die Zweipunktfunktion sehen dann so aus:

$$\begin{aligned} \omega_{B,C}(F^{\mu\nu}(x)) &= C^{\mu\nu} \\ \omega_{B,C}(F^{\mu\nu}(x)F^{\sigma\tau}(x)) &= \int d\rho(\beta) \omega_\beta(F^{\mu\nu}(x)F^{\sigma\tau}(y)) + C^{\mu\nu}C^{\sigma\tau} \end{aligned}$$

Diese Menge an Zuständen bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}$ .

Die Referenzzustände sind alle Gemische von KMS-Zuständen. Allerdings wurden KMS-Zustände mit einer nicht-konstanten Einpunkt-Funktion ausgeschlossen. Der Grund dafür ist, daß man diese Referenzzustände an einem Punkt mit einem gegebenen Zustand vergleichen möchte. An einem nichttrivialen raumzeitlichen Verhalten der Referenzzustände ist man deshalb garnicht interessiert. Später werden wir Zustände betrachten, die in einem Gebiet auf den Vergleichsobservablen mit einem Referenzzustand übereinstimmen. Dieser Referenzzustand wird aber von Punkt zu Punkt variieren dürfen, so daß die Einschränkung auf Referenzzustände mit konstanter Einpunktfunktion natürlich nicht bedeutet, daß Zustände mit lokaler thermaler Interpretation eine konstante Einpunktfunktion haben müssen.

## 4.3 Thermale Funktionen

Um die makroskopische Interpretation der thermischen Observablen zu bestimmen, muß man ihren Erwartungswert in den thermischen Referenzzuständen kennen.

Man definiert die *thermalen Funktionen* dieser Observablen als ihren Erwartungswert in einem KMS-Zustand  $\omega_\beta$ :

$$\Theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho} : \beta \mapsto \omega_\beta(\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho}(x)) = \omega_\beta(\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho}(0))$$

**Anmerkung:** Im Falle des masselosen skalaren Feldes ist das Feldprodukt  $\phi(x + \zeta)\phi(x - \zeta)$  wegen der Lokalität eine gerade Funktion von  $\zeta$ . Die balancierten Ableitungen verschwinden dort für Ableitungen ungerader Ordnung deshalb schon als Observable. Hier ist das wegen der Abhängigkeit von den Indizes nur im Spezialfall gleicher Indizes der Fall. Es verschwinden aber die thermalen Funktionen für Ableitungen ungerader Ordnung, wie im Beweis des nächsten Satzes gezeigt.

**Satz 4.3.1.** *Die thermalen Funktionen der balancierten Ableitungen verschwinden für ungerades  $|\rho|$ . Für gerades  $|\rho|$  sind sie gegeben durch:*

$$\Theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho}(\beta) = \frac{(2i)^{r+2}}{(2\pi)^2} \zeta(r+4) \partial_\beta^\rho \frac{P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial_\beta)}{4} \frac{1}{\beta^2} \quad \text{mit } r = |\underline{\rho}| \quad (4.3.2)$$

Hier ist  $\zeta$  die Riemannsche Zetafunktion. Diese läßt sich auf geraden natürlichen Zahlen durch die (ganzzahligen) Bernoulli-Zahlen ausdrücken ([Sch00] S.548):

$$\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k} B_k}{2(2k)!}$$

**Beweis:** Für ungerade  $r = |\rho|$  verschwinden die thermischen Funktionen wegen der Symmetrie der thermischen Zustände unter Vertauschen von  $\mu\nu$  und  $\sigma\tau$ . Sei also  $r$  gerade.

$$\begin{aligned} & \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\rho (\omega_\beta - \omega_\infty) (F^{\mu\nu}(x + \zeta) F^{\sigma\tau}(x - \zeta)) \\ &= -(2\pi)^{-3} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\rho \int d^4 p \delta(p^2) P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) e^{-i2\zeta p} \\ & \quad \times \left( \frac{\epsilon(p_0)}{1 - e^{-\beta p}} - \Theta(p_0) \right) \end{aligned}$$

Der Tensor  $P^{\mu\nu\sigma\tau}(p)$  läßt sich mit der Ersetzungsregel  $4P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) = -P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial_\zeta)$  behandeln. Nach dem Ausführen des Energieintegrals folgt mit  $\underline{p} = (|\vec{p}|, \vec{p})$ :

$$\begin{aligned} \dots &= (2\pi)^{-3} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\rho \int \frac{d^3 \vec{p}}{|\vec{p}|} \frac{P(\partial_\zeta)}{4} \cos(2\zeta \underline{p}) \frac{e^{-\beta \underline{p}}}{1 - e^{-\beta \underline{p}}} \\ &= (2\pi)^{-3} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\rho \int \frac{d^3 \vec{p}}{|\vec{p}|} \frac{P(\partial_\zeta)}{4} \cos(2\zeta \underline{p}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta \underline{p}} \end{aligned}$$

Die geraden Ableitungen nach  $\zeta$  lassen sich unter der unendlichen Summe mit folgender Regel ersetzen (dabei benützt man Konvergenz der Reihe in der Norm):

$$\partial_\zeta^\mu \longrightarrow \left( \frac{2i}{n} \right)^m \partial_\beta^\mu$$

Dann folgt (majorisierte Konvergenz):

$$\begin{aligned} \dots &= (2\pi)^{-3} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int \frac{d^3 \vec{p}}{|\vec{p}|} \partial_\beta^\rho \frac{P(\partial_\beta^{\mu\nu\sigma\tau})}{4} \cos(2\zeta \underline{p}) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2i}{n} \right)^{r+2} e^{-n\beta \underline{p}} \\ &= (2\pi)^{-3} \partial_\beta^\rho \frac{P(\partial_\beta^{\mu\nu\sigma\tau})}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2i}{n} \right)^{r+2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{|\vec{p}|} e^{-n\beta \underline{p}} \end{aligned}$$



Wertet man das Integral

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{|\vec{p}|} e^{-n\beta p} = \frac{4\pi}{n^2\beta^2}$$

aus, folgt weiter:

$$\begin{aligned} \dots &= (2\pi)^{-3} \partial_\beta^\rho \frac{P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial_\beta)}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2i}{n}\right)^{r+2} \frac{4\pi}{n^2\beta^2} \\ &= 2 \frac{(2i)^{r+2}}{(2\pi)^2} \zeta(r+4) \partial_\beta^\rho \frac{P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial_\beta)}{4} \frac{1}{\beta^2} \\ &= \frac{(4i\pi)^{r+2} B_{r/2+2}}{(r+4)!} \partial_\beta^\rho \frac{P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial_\beta)}{4} \frac{1}{\beta^2} \end{aligned}$$

□

Diese Funktionen sind alle Lösungen der Wellengleichung, sogar Lösungen der Maxwellgleichungen bezüglich  $\mu\nu$  bzw.  $\sigma\tau$ .

Für die Referenzzustände  $\mathcal{C}$  bedeutet dies:

$$\begin{aligned} &\lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\rho (\omega_\rho \circ \alpha_{\mathcal{C}} - \omega_\infty) (F^{\mu\nu}(x+\zeta) F^{\sigma\tau}(x-\zeta)) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \partial_\zeta^\rho (\omega_\rho - \omega_\infty) (F^{\mu\nu}(x+\zeta) F^{\sigma\tau}(x-\zeta)) + \partial_\zeta^\rho C^{\mu\nu}(x+\zeta) C^{\sigma\tau}(x-\zeta) \right) \\ &= \int d\rho(\beta) \Theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(\beta) + \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\rho C^{\mu\nu}(x+\zeta) C^{\sigma\tau}(x-\zeta) \end{aligned}$$

Da  $C$  als konstant vorausgesetzt wurde, gilt für  $|\underline{\rho}| > 0$ :

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\rho C^{\mu\nu}(x+\zeta) C^{\sigma\tau}(x-\zeta) = 0$$

Aus den Feldern selber, die ebenfalls in  $\mathcal{S}_x$  enthalten sind, läßt sich  $C$  zurückgewinnen. Zusammenfassend gilt:

$$\begin{aligned} \omega_{\rho, \mathcal{C}}(\theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(x)) &= \begin{cases} \int d\rho(\beta) \Theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(\beta) & |\underline{\rho}| \text{ gerade} \\ 0 & |\underline{\rho}| \text{ ungerade} \end{cases} \\ \omega_{\rho, \mathcal{C}}(\theta^{\mu\nu\sigma\tau}(x)) &= \int d\rho(\beta) \Theta^{\mu\nu\sigma\tau}(\beta) + C^{\mu\nu} C^{\sigma\tau} \\ \omega_{\rho, \mathcal{C}}(F^{\mu\nu}(x)) &= C^{\mu\nu} \end{aligned}$$

## 4.4 Zulässige thermale Observable

Für alle Makroobservablen  $\phi(x) \in \mathcal{Q}_x$  sind die thermischen Funktionen

$$\beta \mapsto \omega_\beta(\phi(x))$$

in diesem Modell alle stetig.<sup>1</sup>

Die Familie von Seminormen

$$p_B(\Theta) = \sup_{\beta \in B} |\Theta(\beta)| \quad B \subset V^+ \text{ kompakt} \quad (4.4.1)$$

definiert eine Topologie auf dem Raum der stetigen Funktionen auf  $V^+$ . Die thermalen Funktionen werden damit zu einem topologischen Raum.

Alle thermalen Funktionen der Observablen  $\mathcal{S}_x$  sind wegen  $\square(1/\beta^2) = 0$  Lösungen der Wellengleichung. Sie liegen deshalb nicht dicht im Raum der thermalen Funktionen aller Makroobservablen. Die thermalen Observablen in dem Abschluß des von ihnen erzeugten Unterraums heißen *zulässige thermale Observable*.

**Satz 4.4.2.** *Für jede glatte Lösung der Wellengleichung  $\Xi$  auf  $V^+$  gibt es für jedes kompakte  $B \subset V^+$  und für jedes  $\epsilon > 0$  Konstanten  $c_\mu$  und  $c'_\mu$ , so daß:*

$$\sup_{\beta \in B} |\Xi - \sum c_\mu \Theta^\mu| < \epsilon \quad \text{und} \quad \sup_{\beta \in B} |\partial^\nu \Xi - \sum c'_\mu \Theta^{\nu\mu}| < \epsilon$$

.

**Beweis:** Wir folgen dem Beweis in [Buc03]. Jedes kompakte Gebiet aus  $V^+$  läßt sich in einen Doppelkegel einbeschreiben:

$$B = \{(\kappa, 0) + \overline{V^+}\} \cap \{(\kappa^{-1}, 0) + \overline{V^+}\} \quad \text{mit} \quad 0 < \kappa < 1$$

Auf diesem Gebiet läßt sich eine Involution der Lösungen der Wellengleichung definieren:

$$I : f(\beta) \mapsto I(f)(\beta) = \frac{1}{\beta^2} f\left(\frac{\beta}{\beta^2}\right)$$

Da sie eine Verkettung mit auf  $B$  glatten Funktionen darstellt, ist die Involution stetig bezüglich der nach 4.4.1 definierten Topologie. Es reicht also, die Behauptung für Ausdrücke zu zeigen, die durch Involution aus mit geeigneten Termen kontrahierten thermischen Funktionen hervorgehen.

Sei  $l$  ein lichtartiger Vektor und  $l_{\mu\sigma\rho}$  das entsprechende Tensorprodukt von  $l$  mit sich selbst. Wir bilden folgende Ausdrücke:

$$l_{\mu\sigma\rho} \Theta^{\mu\gamma\sigma} \gamma^{\rho}(\beta) = c_{r+2} l_{\mu\sigma\rho} \partial^{\mu\sigma\rho} \frac{1}{\beta^2} = c_{r+2} \frac{(l\beta)^{r+2}}{(\beta^2)^{r+3}}$$

Dabei ist  $c_r \neq 0$  für gerade  $r$  und  $c_r = 0$  für ungerade  $r$ . Das Anwenden der Involution ergibt:

$$\beta \mapsto I(l_{\mu\sigma\rho} \Theta^{\mu\gamma\sigma} \gamma^{\rho}) = c_{r+2} (l\beta)^{r+2}$$

<sup>1</sup>Das hat mit der Abwesenheit von Phasenübergängen in diesem Modell zu tun [Buc03].

Für den ersten Teil reicht es also zu zeigen, daß man mit Monomen  $(l\beta)^{2n+2}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  alle glatten Lösungen der Wellengleichung auf  $B$  gleichmäßig approximieren kann.

Analog für die zweite Hälfte der Behauptung:

$$l_{\mu\sigma\rho}\Theta^{\nu\mu\gamma\sigma}\gamma^{\rho}(\beta) = c_{r+3}l_{\mu\sigma\rho}\partial^{\nu\mu\sigma\rho}\frac{1}{\beta^2} = c_{r+3}\partial^{\nu}\frac{(l\beta)^{r+2}}{(\beta^2)^{r+3}}$$

Anwenden der Involution liefert:

$$\beta \mapsto I\left(\frac{(l\beta)^{r+2}}{(\beta^2)^{r+3}}\right) = (l\beta)^{r+2}$$

Hier muß man also noch zeigen, daß man mit Monomen  $(l\beta)^{2n+3}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  alle glatten Lösungen der Wellengleichung gleichmäßig auf  $B$  approximieren kann und daß gleichmäßige Konvergenz auch für die partiellen Ableitungen gilt.

Aus [BOR01] entnimmt man die Aussage, daß sich jede glatte Lösung der Wellengleichung durch Linearkombinationen der Funktionen  $e^{\pm il\beta}$  auf Doppelkegeln gleichmäßig approximieren läßt und gleichmäßige Konvergenz auch für alle partiellen Ableitungen gilt.

Die Funktionen der Form

$$h_k^{\pm}(z) = \frac{1}{z^{k/2}}e^{\pm i\sqrt{z}}$$

sind analytisch in einem Gebiet, das den positiven Teil der reellen Achse enthält. Sie lassen sich dort also durch gleichmäßig konvergente Reihen von Polynomen approximieren. Deren partiellen Ableitungen konvergieren ebenfalls gleichmäßig. Damit lassen sich die Funktionen

$$e^{\pm iz} = z^2h_2^{\pm}(z^2) = z^3h_3^{\pm}(z^2)$$

durch die oben angeführten Polynome approximieren. Da  $\beta \mapsto l\beta$  auf  $B$  beschränkt ist, folgt damit die Behauptung.  $\square$

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, lassen sich über die thermalen Funktionen wichtige Größen wie der Energie-Impuls-Tensor direkt bestimmen. Mit dem eben bewiesenen Satz lassen sich aber auch Größen, die nicht im Raum der Vergleichsobservablen enthalten sind, indirekt bestimmen, solange ihre Temperaturabhängigkeit eine glatte Lösung der Wellengleichung ist. Dies trifft z.B. schon für das Temperaturquadrat zu:

$$T^2(\beta) = \frac{1}{\beta^2}$$

Diese Funktion ist nicht im Raum der thermalen Funktionen, aber stellt eine glatte Lösung der Wellengleichung dar. Das Temperaturquadrat ist also eine zulässige Makroobservable. Auch für solche zulässigen Makroobservablen werden wir weitere Beispiele kennenlernen.

## 4.5 Energie-Impuls-Tensor

Die Maxwellgleichungen lassen sich nach dem Lagrange-Formalismus aus einem Wirkungsfunktional herleiten. Für Theorien dieser Art liefert das Noether-Theorem für Symmetrien der Lagrangedichte erhaltene Ströme.

Die Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld ist:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen bei Variation nach dem Potential ergeben dann die inhomogene Maxwellgleichung.

Die Lagrangedichte hängt nicht explizit vom Ort ab. Das Noether-Theorem liefert deshalb die Divergenzfreiheit des kanonischen Stress-Tensors ([Jac99] S.606):

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}_{EM} \\ &= -g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\beta A^\lambda + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Dieser Tensor ist aber weder symmetrisch noch spurfrei und wegen des expliziten Auftretens des Vektorpotentials auch nicht eichinvariant. Durch Addition eines geeigneten divergenzfreien Tensors läßt sich ein symmetrischer, spurfreier und eichinvarianter Energie-Impuls-Tensor konstruieren:

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma} F^\gamma{}_\beta - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} \quad (4.5.1)$$

Der klassische Energie-Impuls-Tensor ist ein bilinearer Ausdruck von Feldern am Punkt. Damit er im Rahmen der Quantenfeldtheorie als Observable am Punkt (als quadratische Form) interpretiert werden kann, muß er durch Subtraktion der Vakuumerwartungswerte renormalisiert werden (ausgedrückt durch die übliche Doppelpunktnotation):

$$:T^{\mu\nu}:(x) = - :F^{\mu\gamma} F^\nu{}_\gamma:(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} :F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}:(x)$$

Mit den thermalen Funktionen 4.3.2 für die balancierten Ableitungen erhält man die thermale Funktion des Energie-Impuls-Tensors:

$$\begin{aligned} \beta \mapsto \omega_\beta(:T^{\mu\nu}:(0)) &= -\omega_\beta(:F^{\mu\gamma} F^\nu{}_\gamma:(0)) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \omega_\beta(:F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}:(0)) \\ &= \frac{\zeta(4)}{\pi^2} \partial^{\mu\nu} \frac{1}{\beta^2} \\ &= \frac{\zeta(4)}{\pi^2} \left( \frac{8\beta^\mu \beta^\nu}{\beta^6} - \frac{2g^{\mu\nu}}{\beta^4} \right) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$:T^{\mu\nu}:(x) \in \mathcal{R}'_x \subset \mathcal{R}_x$$

In einem  $\mathcal{R}'_x$ -thermalen Zustand läßt sich also der Energie-Impuls-Tensor durch Messung der Observablen  $\mathcal{R}'_x$  bestimmen. Es gibt also im Fall des elektromagnetischen Feldes im Gegensatz zum masselosen neutralen Skalarfeld keinen nicht-thermalen Anteil.

Betrachtet man den Energie-Impuls-Tensor im Ruhesystem des Wärmebads, ergibt sich für die Energiedichte  $T^{00}$  das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* ([Sch00] S.198):

$$T^{00} = \frac{\pi^2}{15} \frac{1}{(\beta^2)^2}$$

## 4.6 Entropie

Aus dem Energie-Impuls-Tensor läßt sich die Entropiestromdichte bestimmen. Für die allgemeine Form des thermischen Energie-Impuls-Tensors eines einfachen relativistischen Fluids gilt:

$$\Theta^{\mu\nu}(\beta) = Q(\beta^2) \frac{\beta^\mu \beta^\nu}{\beta^2} - P(\beta^2) g^{\mu\nu}$$

Im Falle des elektromagnetischen Feldes transformiert sich dieser Tensor unter Dilatationen wie

$$\delta_\lambda(\theta^{\mu\nu}(x)) = \lambda^4 \theta^{\mu\nu}(\lambda x).$$

Die KMS-Zustände transformieren sich wie

$$\omega_\beta \circ \delta_\lambda = \omega_{\lambda^{-1}\beta}.$$

Damit hat die thermale Funktion die folgende Form (mit Konstanten  $Q$  und  $P$ ):

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{Q}{\beta^6} \beta^\mu \beta^\nu - \frac{P}{\beta^4} g^{\mu\nu}$$

Aus allgemeinen Betrachtungen [Dix78] zur Thermodynamik relativistischer Systeme erhält man für die Entropiestromdichte

$$S^\mu(\beta) = \frac{Q(\beta^2)}{\beta^4} \beta^\mu.$$

Ein Vergleich mit den thermalen Funktionen des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes liefert die Konstante  $Q$  und damit schließlich

$$S^\mu(\beta) = \frac{8\zeta(4)}{\pi^2} \frac{\beta^\mu}{\beta^4} = -\frac{4\zeta(4)}{\pi^2} \partial^\mu \frac{1}{\beta^2}.$$

Diese ist nicht enthalten im Raum der thermalen Observablen, wie man durch Vergleich mit der Form der thermalen Funktionen 4.3.2 feststellt. Es gilt aber:

$$\square S^\mu = -\frac{4\zeta(4)}{\pi^2} \partial^\mu \square \frac{1}{\beta^2} = 0$$

Damit ist die Entropiestromdichte als glatte Lösung der Wellengleichung im Raum aller zulässigen Makroobservablen enthalten. Sie läßt sich also approximativ durch Messungen der thermalen Observablen bestimmen.

## 4.7 Phasenraumdichte

Die Phasenraumdichte mißt die Anzahl der Photonen zu gegebenem Impuls und zur gegebenen Polarisation. Diese Größe läßt sich in den KMS-Zuständen als zentrale Folge definieren.

### 4.7.1 Quanten-Stokes-Parameter

Um die Polarisation von Licht beschreiben zu können, brauchen wir geeignete Observable. Eine Feldmode hat zwei bosonische Freiheitsgrade, die links- bzw rechts-zirkulär-polarisiertem Licht entsprechen. Korrelationen zwischen diesen beiden Freiheitsgraden entsprechen dann einer linearen Polarisierung.

Um die Polarisation zu beschreiben, definieren wir ein quantenmechanisches Analogon zu den klassischen Stokes-Parametern (vgl. [JR76]).

Formal kann man das Feld in Erzeuger und Vernichter für die entsprechenden Feldmoden zerlegen:

$$F_{\mu\nu}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \sum_{\lambda \in \{+, -\}} -i e_{\mu\nu}(p, \lambda) a_\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} + c.c.$$

Im Gegensatz zu einem Feld in einem Kasten mit endlichen Volumen lassen sich die Ausdrücke  $a_\lambda(\vec{p})$  nicht als Elemente der Feldalgebra interpretieren.

Motiviert durch diese Zerlegung definieren wir trotzdem erstmal zu jeder Feldmode eine  $\star$ -Algebra. Diese wird von den Elementen  $a, a^*, b, b^*$  erzeugt, die folgenden Relationen gehorchen:

$$[a, a^*] = \mathbb{1} \quad [b, b^*] = \mathbb{1} \quad [a, b] = [a^*, b] = [a, b^*] = [a^*, b^*] = 0$$

Die Zustände über dieser Algebra lassen sich nun als Zustände einer einzigen Feldmode verstehen.

Im nächsten Schritt konstruieren wir Observable, die die Anzahl der Teilchen in Abhängigkeit von der Polarisation messen. Mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

konstruiert man die Stokes-Parameter wie folgt:

$$S_k \doteq (a^*, b^*) \sigma_k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$S_0 = a^*a + b^*b \quad S_1 = a^*b + b^*a \quad S_2 = -i(a^*b - b^*a) \quad S_3 = a^*a - b^*b$$

$S_0$  beschreibt dabei die Gesamtzahl an Photonen,  $S_1$  und  $S_2$  lineare Polarisation und  $S_3$  zirkuläre Polarisation. Für natürliches (unpolarisiertes) Licht gilt:

$$\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle = \langle S_3 \rangle = 0$$

Die Kommutator-Relationen der Stokes-Parameter erfüllen die Relationen einer Drehimpulsalgebra:

$$[S_0, S_i] = 0 \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad \text{und} \quad [S_i, S_j] = i2\epsilon_{ijk}S_k$$

Außerdem gilt:

$$S_0(S_0 + 2) = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

### 4.7.2 Polarisations-Makroobservable

Im thermodynamischen Limes hat man die Erzeuger und Vernichter nicht mehr zur Verfügung. Man muß die Stokes-Parameter als Limes einer Folge definieren:

$$S_{p,k} \doteq \frac{4}{|\vec{p}|^3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( F^{\mu\nu}(f_{\mu\nu}^{(n;+)})^* \quad F^{\mu\nu}(f_{\mu\nu}^{(n;-)})^* \right) \sigma_k \begin{pmatrix} F^{\mu\nu}(f_{\mu\nu}^{(n;+)}) \\ F^{\mu\nu}(f_{\mu\nu}^{(n;-)}) \end{pmatrix}$$

Dabei sind  $f^{(n)}$  Testfunktionen der Form

$$f_{\mu\nu}^{(n;\lambda)}(x) = n^{-3/2-\alpha} e_{\mu\nu}^R(q; \lambda) g(x_0 n^{-\alpha}) h(\vec{x} n^{-1}) e^{-ixq}$$

mit  $0 < \alpha < 1$ .  $g$  und  $h$  sind reelle positive Testfunktionen, normiert bezüglich  $L_1$  bzw.  $L_2$ -Norm.

**Satz 4.7.1.** *Für die Erwartungswerte in KMS-Zuständen gilt:*

$$4 \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta \left( F^{\mu\nu}(f_{\mu\nu}^{(n;\lambda)})^* F^{\mu\nu}(f_{\mu\nu}^{(n;\lambda')}) \right) = (2\pi) \frac{|\vec{p}|^3}{e^{\beta p} - 1} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Für die thermale Funktion von  $|p|^3 S_{p,0}$  ergibt sich das *Plancksche Strahlungsgesetz*:

$$|\vec{p}|^3 S_{p,0}(\beta) = (2\pi)^{-3} \frac{2|\vec{p}|^3}{e^{\beta p} - 1}$$

Die thermalen Funktionen der restlichen Stokes-Parameter verschwinden:

$$S_{p,1}(\beta) = S_{p,2}(\beta) = S_{p,3}(\beta) = 0$$

Thermische Zustände beschreiben deshalb unpolarisiertes Licht.

**Beweis:** Um den Beweis etwas übersichtlicher zu gestalten, führen wir eine Abkürzung ein:

$$Q(p) \doteq \overline{e_{\mu\nu}^R(q, \lambda)} P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) e_{\sigma\tau}^R(q, \lambda)$$

Die Fouriertransformierte der Testfunktion berechnet sich zu:

$$\hat{f}_{\mu\nu} = n^{3/2} e_{\mu\nu}^R(q, \lambda) \hat{g}(n^\alpha(p_0 + |\vec{q}|)) \hat{h}(n(\vec{p} + \vec{q}))$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \omega_\beta \left( F^{\mu\nu}(f_{\mu\nu}^{(n;\lambda)})^* F^{\mu\nu}(f_{\mu\nu}^{(n;\lambda')}) \right) &= -(2\pi)n^3 \int d^4p \delta(p^2) \epsilon(p_0) \frac{Q(p)}{1 - e^{-\beta p}} |\hat{g}(-n^\alpha(p_0 + |\vec{q}|))|^2 |\hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q}))|^2 \\ &= -(2\pi)n^3 \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \frac{Q(\underline{p})}{1 - e^{-\beta p}} |\hat{g}(-n^\alpha(|\vec{p}| + |\vec{q}|))|^2 |\hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q}))|^2}_{A_n} \\ &\quad - \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \frac{Q(\underline{p})}{1 - e^{\beta p}} |\hat{g}(-n^\alpha(-|\vec{p}| + |\vec{q}|))|^2 |\hat{h}(-n(-\vec{p} + \vec{q}))|^2}_{B_n} \end{aligned}$$

Im ersten Schritt zeigen wir, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$$

gilt. Da  $|\hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q}))|^2$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine  $\delta$ -Distribution konvergiert und

$$\frac{Q(\underline{p})}{2|\vec{p}|(1 - e^{-\beta p})}$$

stetig ist, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \frac{Q(\underline{p})}{1 - e^{-\beta p}} |\hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q}))|^2}_{H_n} = \frac{Q(q)}{2|\vec{q}|} \frac{1}{1 - e^{\beta q}}$$



$\hat{g}$  ist als Fouriertransformierte einer Testfunktion eine Schwartzfunktion. Deshalb gilt für  $\vec{q} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sup_{\vec{p} \in \mathbb{R}^3} |\hat{g}(-n^\alpha(|\vec{p}| + |\vec{q}|))|^2}_{G_n} = 0$$

Aus der Abschätzung

$$|A_n| \leq G_n |H_n|$$

des Integrals folgt also, daß es verschwindet.

Wir betrachten nun den zweiten Teil. Mit der Substitution  $u \doteq n(-p + q)$  gilt:

$$B_n = (2\pi) \int d^3\vec{u} \frac{Q(q - \frac{u}{n})}{2|\vec{q} - \frac{\vec{u}}{n}|} \frac{1}{1 - e^{\beta(q - \frac{u}{n})}} |\hat{g}(-n^{\alpha-1}u_0)|^2 |\hat{h}(-\vec{u})|^2$$

Um Limes und Integral vertauschen zu können, muß man eine Majorante definieren. Da  $Q(p) < |\vec{p}|^2$  und

$$\frac{x}{e^x - 1}$$

für positive  $x$  beschränkt ist, gilt mit einer geeigneten Konstanten  $C \in \mathbb{R}_+$ :

$$\left| \frac{Q(q - \frac{u}{n})}{2|\vec{q} - \frac{\vec{u}}{n}|(1 - e^{\beta(q - \frac{u}{n})})} \right| \leq \frac{|\vec{q} - \frac{\vec{u}}{n}|}{2(e^{\beta(q - \frac{u}{n})} - 1)} \leq C$$

$\hat{g}$  ist beschränkt und  $\hat{h}$  eine Schwartzfunktion. Eine integrierbare Majorante ist also gegeben durch:

$$\left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{g}(x)|^2 \right) |\hat{h}(-\vec{u})|^2 C$$

Es gilt dann  $\alpha < 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n &= (2\pi) \frac{Q(q)}{2|\vec{q}|} \frac{1}{1 - e^{\beta q}} |\hat{g}(0)|^2 \underbrace{\int d^3\vec{u} |\hat{h}(-\vec{u})|^2}_{=1} \\ &= (2\pi) \frac{Q(q)}{2|\vec{q}|} \frac{1}{1 - e^{\beta q}} \end{aligned}$$

Dabei wurde die Normierung von  $\hat{g}(0) = 1$ , Normierung von  $h$  in der  $L_2$ -Norm und das Theorem von Parseval benutzt. Um die Formel für die Stokes-Parameter zu erhalten, wendet man noch die Orthogonalitätsrelation für die Helizität 3.3.3 an:

$$Q(q) = \overline{e_{\mu\nu}^R(p, \lambda)} P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) e_{\sigma\tau}^R(p, \lambda') = -\frac{1}{2} |p|^4 \delta_{\lambda\lambda'} \quad (4.7.2)$$

□

Die thermale Funktion zu  $S_0$  ist eine glatte Lösung der Wellengleichung. Sie läßt sich deshalb lokal approximativ durch Messungen der thermalen Observablen  $\mathcal{S}_x$  bestimmen.

### Interpretation als zentrale Folge

Der Kommutator von Elementen der Folge mit festen Elementen der Algebra verschwindet asymptotisch.

**Lemma 4.7.3.** *Für ein beliebiges  $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^{4 \times 4}$  gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta(F(k)F(f^{n;\lambda})) = 0$$

**Beweis:** Wir beginnen wieder mit einer Definition:

$$Q(p) \doteq \hat{k}_{\mu\nu}(p) P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) e_{\sigma\tau}^R(\lambda, p)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \omega_\beta(F(k)F(f^{n;\lambda})) \\ &= -(2\pi)n^{3/2} \int d^4p \delta(p^2) \epsilon(p_0) \frac{Q(-p)}{1 - e^{-\beta p}} \hat{g}(-n^\alpha(p_0 + |\vec{q}|)) \hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q})) \\ &= -(2\pi)n^{3/2} \int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \frac{Q(-\underline{p})}{1 - e^{-\beta \underline{p}}} \hat{g}(-n^\alpha(|\vec{p}| + |\vec{q}|)) \hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q})) \\ &\quad - (2\pi)n^{3/2} \int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \frac{Q(-\underline{p})}{1 - e^{\beta \underline{p}}} \hat{g}(-n^\alpha(|\vec{p}| + |\vec{q}|)) \hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q})) \end{aligned}$$

Der Term

$$n^3 \hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q}))$$

konvergiert gegen ein Vielfaches der Delta-Distribution. Die Ausdrücke

$$\frac{Q(-\underline{p})}{1 - e^{\pm\beta \underline{p}}}$$

sind stetig und beschränkt. Damit konvergiert die Folge:

$$A_n \doteq n^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \left| \frac{\hat{k}_{\mu\nu}(\underline{p}) P^{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}) e_{\sigma\tau}^R(\lambda, \underline{p})}{1 - e^{\pm\beta \underline{p}}} \right| |\hat{h}(-n(\vec{p} + \vec{q}))|$$

Das ganze Integral läßt sich deshalb durch eine Nullfolge abschätzen:

$$|\omega_\beta(F(k)F(f^{n;\lambda}))| \leq n^{-3/2} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |\hat{g}(x)| \right) A_n$$

□

**Lemma 4.7.4.** *Für einen beliebigen Tensor  $C^{\mu\nu}$  gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int d^4x C^{\mu\nu} f_{\mu\nu}^{n;\lambda}(x) = 0$$

**Beweis:** Wir betrachten die Integrale:

$$\int d^4x n^{-3/2-\alpha} C^{\mu\nu} e_{\mu\nu}^R(q; \lambda) g(x_0 n^{-\alpha}) h(\vec{x} n^{-1}) e^{-ixq}$$

Der Integrand ist beschränkt. Der Limes verschwindet deshalb.  $\square$

**Satz 4.7.5.** Für beliebige Elemente  $A, B$  der Feldalgebra gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\rho(\beta), C}(AF(f^{(\lambda; n)})^* F(f^{(\lambda; n)})B) \\ = \omega_{\rho(\beta), C}(AB) \omega_{\rho(\beta), C}(F(f^{(\lambda; n)})^* F(f^{(\lambda; n)})) \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

**Beweis:** Die Zustände  $\omega_{\beta, C}$  sind quasifrei. Die  $n$ -Punktfunktionen lassen sich deshalb als Summe von Produkten der Ein- und Zweipunktfunktion schreiben. Es gilt also für alle  $A_i = F(f_i)$ :

$$\omega_{\beta, C}(A_1 \cdots A_n) = \sum \prod \omega(B)$$

Wobei entweder  $B = A_i A_j$  oder  $B = A_i$  gilt. In dem entsprechenden Ausdruck zu dem Term

$$\omega_{\beta, C}(A_1 \cdots A_n F(f^{(\lambda; n)})^* F(f^{(\lambda; n)}) B_1 \cdots B_n)$$

verschwinden nach dem Lemma 4.7.3 alle Zweipunktfunktionen im Limes  $n \rightarrow \infty$ , in denen  $F(f^{(n; \lambda)})$  bzw.  $F(f^{(n; \lambda)})^*$  mit einem  $A_i$  oder  $B_i$  zusammen auftaucht. Außerdem verschwinden alle Terme, in denen diese Terme einzeln vorkommen. Es bleiben also nur die Summanden übrig, in denen das Paar

$$\omega_{\beta, C}(F(f^{(\lambda; n)})^* F(f^{(\lambda; n)}))$$

einmal vorkommt. Dieses läßt sich aus der Summe herausziehen und man erhält:

$$\begin{aligned} \omega_{\beta, C}(A_1 \cdots A_n F(f^{(\lambda; n)})^* F(f^{(\lambda; n)}) B_1 \cdots B_n) \\ = \omega_{\beta, C}(A_1 \cdots A_n B_1 \cdots B_n) \omega_{\beta, C}(F(f^{(\lambda; n)})^* F(f^{(\lambda; n)})) \end{aligned}$$

Durch Integration über  $\beta$  erhält man für die Zustände  $\omega_{\rho(\beta), C}$  durch majorisierte Konvergenz (mit der Stetigkeit der Zustände bezüglich der Temperatur und einem kompakten Temperaturträger):

$$\begin{aligned} \omega_{\rho(\beta), C}(AS_{p, k}B) &= \int d\rho(\beta) \omega_{\beta, C}(AB) \omega_{\beta, C}(S_{p, k}) \\ &= \int d\rho(\beta) \omega_{\beta, C}(AB) S_{p, k}(\beta, C) \end{aligned}$$

$\square$

Weil die Kommutatoren der Folgenglieder  $F(f^{(\lambda; n)})^* F(f^{(\lambda; n)})$  mit den Darstellern der festen Elemente der Algebra im Limes verschwinden, spricht man von einer zentralen Folge. In der GNS-Darstellung  $(\pi, \mathcal{H}, \Omega)$  zum Zustand  $\omega_{\rho(\beta), C}$  werden durch

$$\omega_{\rho(\beta), C}(A^* S_i B)$$

die Matrixelemente eines beschränkten Operators auf einer dichten Teilmenge  $\mathcal{D}$  definiert, der mit allen Darstellern der Algebra kommutiert. Dieser läßt sich deshalb auf den ganzen Hilbertraum fortsetzen und kommutiert dann immer noch mit allen Elementen der Algebra.

# Kapitel 5

## Transportgleichungen

Aus der mikroskopischen Dynamik lassen sich Evolutionsgleichungen für die ortsabhängigen Erwartungswerte der Makroobservablen in  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Nichtgleichgewichtszuständen ableiten. Dies führt auch zu Transportgleichungen für die Phasenraumdichte.

Umgekehrt läßt sich aus einer vorgegebenen Phasenraumdichte, die den entsprechenden Transportgleichungen genügt, ein Funktional über der Algebra rekonstruieren. Dies erfüllt schon per Konstruktion bis auf die Positivität alle Eigenschaften eines Zustands, was die Konsistenz der Transportgleichungen für die Phasenraumdichte belegt. Sowenig wie die Positivität ist die lokale Thermalität dieses Funktionals automatisch gegeben. Solche Funktionale stellen aber einen Ansatz zur Konstruktion von thermischen Nichtgleichgewichtszuständen dar.

### 5.1 Lifts der Zustände auf die Makroobservablen

Die Punktfelder lassen sich translatieren, so daß man an jedem Punkt Vergleichsobservable hat:

$$\mathcal{S}_x \doteq \alpha_x(\mathcal{S}_0)$$

**Definition 5.1.1.** *Ein Zustand, der an jedem Punkt  $x \in \mathcal{O}$  in einem Gebiet  $\mathcal{O}$  mit einem Referenzzustand  $\omega_{\rho_x, C_x} \in \mathcal{C}$  übereinstimmt*

$$\omega|_{\mathcal{S}_x} = \omega_{\rho_x, C_x}|_{\mathcal{S}_x} \quad \forall x \in \mathcal{O}$$

*heißt  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal. Analog seien  $\mathcal{S}'_{\mathcal{O}}$ ,  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$  und  $\mathcal{R}'_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustände definiert.*

Man kann dann den Zustand an jedem Ort zu den thermischen Funktionen und dann zu allen zulässigen Makroobservablen liften:

$$\omega(\Phi)(x) \doteq \omega_{\rho_x, C_x}(\Phi) \tag{5.1.2}$$

Das heißt konkret für die einzelnen Observablen in  $\mathcal{S}_x$ :

$$\omega(F^{\mu\nu})(x) = \omega_{\rho_x, C_x}(F^{\mu\nu}) = C_x^{\mu\nu}$$

und für  $|\underline{\rho}| > 0$ :

$$\begin{aligned} \omega(\theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}})(x) &= \omega_{\rho_x, C_x}(\theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(x)) \\ &= \int d\rho_x(\beta) \Theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(\beta) \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned} \omega(\theta^{\mu\nu\sigma\tau})(x) &= \omega_{\rho_x, C_x}(\theta^{\mu\nu\sigma\tau}(x)) \\ &= \int d\rho_x(\beta) \Theta^{\mu\nu\sigma\tau}(\beta) + C_x^{\mu\nu} C_x^{\sigma\tau} \end{aligned}$$

### Bedingungen an $C^{\mu\nu}(x)$

Wendet man auf einen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand mit verschwindender Einpunktfunktion den Automorphismus  $\alpha_C$  mit einer Lösung  $C$  der Maxwellgleichung an, dann ist der neue Zustand unter Umständen nicht mehr  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal.

Betrachtet man die Wirkung des Automorphismus auf den balancierten Ableitungen, erhält man:

$$\begin{aligned} (\omega \circ \alpha_C)(\theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}})(x) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} (\omega_{\rho_x} \circ \alpha_C - \omega_{\infty})(F^{\mu\nu}(x + \zeta) F^{\sigma\tau}(x - \zeta)) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} (\omega_{\rho_x} - \omega_{\infty})(F^{\mu\nu}(x + \zeta) F^{\sigma\tau}(x - \zeta)) \\ &\quad + \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} C^{\mu\nu}(x + \zeta) C^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= \int d\rho_x(\beta) \Theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(\beta) + \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} C^{\mu\nu}(x + \zeta) C^{\sigma\tau}(x - \zeta) \end{aligned}$$

Für nichtkonstante  $C$  treten also zusätzliche Terme auf, die eventuell verhindern, daß der neue Zustand auf  $\mathcal{S}_x$  mit einem Referenzzustand übereinstimmt. Eine notwendige Bedingung liefert der nächste Satz:

**Satz 5.1.3.** *Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2 \doteq \omega_1 \circ \alpha_C$  beides  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustände, dann gilt:*

$$\partial_{\alpha} C_{\mu\nu}(x) = l_{\alpha} \quad \text{mit} \quad x \in \mathcal{O}, l^2 = 0$$

Zu zeigen ist, daß es keine zwei Maße  $\rho_1$  und  $\rho_2$  und keine Lösung der Maxwellgleichungen  $C^{\mu\nu}(x)$  gibt, so daß für alle  $\underline{\rho}$  mit  $|\underline{\rho}| > 0$  gilt:

$$\int d(\rho_1(\beta) - \rho_2(\beta)) \Theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(\beta) = - \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} C^{\mu\nu}(x + \zeta) C^{\sigma\tau}(x - \zeta)$$

Es gilt:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \square_{\zeta} C^{\mu\nu}(x + \zeta) C^{\sigma\tau}(x - \zeta) = -2 (\partial_{\alpha} C^{\mu\nu}(x)) \partial^{\alpha} C^{\sigma\tau}(x)$$

Und da alle thermalen Funktionen Lösungen der Wellengleichung sind, gilt:

$$\partial_{\alpha} C^{\mu\nu}(x) \partial^{\alpha} C^{\sigma\tau}(x) = 0$$

Betrachtet man Ausdrücke mit gleichen Indizes (keine Summation)

$$(\partial_{\alpha} C^{\mu\nu}(x)) \partial^{\alpha} C^{\mu\nu}(x) = 0$$

folgt, daß der Vektor

$$l_{\alpha} \doteq \partial_{\alpha} C^{\mu\nu}(x)$$

lichtartig ist. □

Da dieser Satz nur etwas über die Relation zweier  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustände aussagt, kann man in dieser Form keine Aussage über die Einpunktfunktion eines Zustand machen.

### Stetigkeitsvoraussetzungen an die Zustände

Um im Folgenden Evolutionsgleichungen nicht nur für die Lifts auf den Vergleichsobservablen treffen zu können, sondern für alle zulässigen Makroobservablen, stellt man an die Zustände noch zwei technische Forderungen.

Einmal fordert man die (schwache) lokale Integrierbarkeit der Lifts:

$$\int d^4x f(x) \omega(\Phi)(x)$$

Damit definieren die Lifts eine Distribution (und sind damit auch differenzierbar im Sinne von Distributionen).

Dazu fordert man, daß für alle kompakten Gebiete  $\mathcal{O}$  ein kompaktes  $B \subset V_+$  existiert, so daß der Temperaturträger aller Referenzzustände  $\omega_{\rho_x}$  in  $B$  liegt für alle  $x \in \mathcal{O}$ . Mit einer Testfunktion  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$  kann man dann das folgende Integral abschätzen zu:

$$\begin{aligned} \left| \int d^4x f(x) \omega(\Phi)(x) \right| &\leq \int d^4x |f(x)| \cdot \sup_x \left| \int d\rho_x(\beta) \Phi(\beta) \right| \\ &\leq \|f\|_1 \cdot \sup_{\beta \in B} |\Phi(\beta)| \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Damit hat man eine Stetigkeitseigenschaft, die man braucht, wenn man die Evolutionsgleichungen auf alle zulässigen Makroobservablen ausdehnen will.

## 5.2 Evolutionsgleichungen

Durch die Abbildung

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{A}, f \mapsto \alpha_\zeta(F^{\mu\nu}(f))\alpha_{-\zeta}(F^{\sigma\tau}(f))$$

wird für jedes  $\zeta \in \mathbb{R}^4$  eine Distribution mit Werten in der Feldalgebra definiert, die wir im Folgenden mit

$$F^{\mu\nu}(x - \zeta)F^{\sigma\tau}(x + \zeta)$$

bezeichnen werden. Die Ableitungen nach  $z$  sind ebenfalls Distributionen

$$f \mapsto \partial_\zeta(\alpha_\zeta(F^{\mu\nu}(f))\alpha_{-\zeta}(F^{\sigma\tau}(f)))$$

und es gilt die übliche Rechenregel für das Differenzieren von Produkten.

Für die thermalen Observablen lassen sich Differenzialgleichungen ableiten. Es gilt im Sinne von Distributionen:

$$\begin{aligned} & \partial_{x\alpha}\partial_\zeta^\alpha F^{\mu\nu}(x + \zeta)F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= \partial_{x\alpha} [(\partial_\zeta^\alpha F^{\mu\nu}(x + \zeta))F^{\sigma\tau}(x - \zeta) + F^{\mu\nu}(x + \zeta)\partial_\zeta^\alpha F^{\sigma\tau}(x - \zeta)] \\ &= (\partial_\zeta^\alpha F^{\mu\nu}(x + \zeta))\partial_{x\alpha}F^{\sigma\tau}(x - \zeta) + (\partial_{x\alpha}F^{\mu\nu}(x + \zeta))\partial_\zeta^\alpha F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Benützt man, daß jede Komponente des Feldstärketensors der Wellengleichung genügt, erhält man:

$$\begin{aligned} & \square_x F^{\mu\nu}(x + \zeta)F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= \partial_{x\alpha} [(\partial_x^\alpha F^{\mu\nu}(x + \zeta))F^{\sigma\tau}(x - \zeta) + F^{\mu\nu}(x + \zeta)\partial_x^\alpha F^{\sigma\tau}(x - \zeta)] \\ &= (\square_x F^{\mu\nu}(x + \zeta))F^{\sigma\tau}(x - \zeta) + 2(\partial_x^\alpha F^{\mu\nu}(x + \zeta))\partial_{x\alpha}F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ & \quad + F^{\mu\nu}(x + \zeta)\square_x F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= -2(\partial_\zeta^\alpha F^{\mu\nu}(x + \zeta))\partial_{\zeta\alpha}F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= -\square_\zeta F^{\mu\nu}(x + \zeta)F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \end{aligned}$$

Direkt aus den Maxwellgleichungen folgt:

$$\begin{aligned} & \partial_{x\mu}F^{\mu\nu}(x + \zeta)F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= (\partial_{x\mu}F^{\mu\nu}(x + \zeta))F^{\sigma\tau}(x - \zeta) + F^{\mu\nu}(x + \zeta)\partial_{x\mu}F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= 0 - F^{\mu\nu}(x + \zeta)\partial_{\zeta\mu}F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \\ &= -\partial_{\zeta\mu}F^{\mu\nu}(x + \zeta)F^{\sigma\tau}(x - \zeta) \end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\partial_{x\mu}(\star F)^{\mu\nu}(x + \zeta)F^{\sigma\tau}(x - \zeta) = -\partial_{\zeta\mu}(\star F)^{\mu\nu}(x + \zeta)F^{\sigma\tau}(x - \zeta)$$

Mit der Definition 4.1.1 der balancierten Ableitungen lassen sich diese Relationen in Differenzialgleichungen für diese Observablen übersetzen:



**Lemma 5.2.1.** *Für die balancierten Ableitungen gilt (im Sinne von Distributionen):*

$$\begin{aligned}\square\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho}(x) &= -\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\alpha\rho}(x) \\ \partial_\alpha\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\alpha\rho}(x) &= 0\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\partial_\mu\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho}(x) &= -\theta_\mu^{\nu\sigma\tau,\mu\rho}(x) \\ \partial_\alpha\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho}(x) &= -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\alpha\rho}(x)\end{aligned}$$

### 5.3 Evolutionsgleichungen für die Lifts

Die aus den Feldgleichungen gewonnenen Differenzialgleichungen in Lemma 5.2.1 verknüpfen thermale Observable. Aus ihnen lassen sich Differenzialgleichungen für die räumlich-variablen Erwartungswerte in  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Nichtgleichgewichtszuständen gewinnen.

Im Folgenden sei  $\partial^\alpha\Xi$  die Makroobservable mit der thermalen Funktion  $\beta \mapsto \partial^\alpha\Xi(\beta)$ . Außerdem bezeichnen wir mit  $P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\partial^\rho\Xi$  die Makroobservable mit thermaler Funktion:

$$\beta \mapsto P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\partial^\rho\Xi(\beta)$$

**Satz 5.3.1.** *Für die Lifts 5.1.2 auf die zulässigen Makroobservablen in einem  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustand  $\omega$  gilt für  $x \in \mathcal{O}$ :*

$$\partial_\alpha\omega(\partial^\alpha\Xi)(x) = 0 \quad (5.3.2)$$

$$\square\omega(\Xi)(x) = 0 \quad (5.3.3)$$

$$\partial_\mu\omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) = 0 \quad (5.3.4)$$

$$\partial_\alpha\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) = 0 \quad (5.3.5)$$

**Beweis:** Um diese Gleichungen zu beweisen, zeigt man sie erst für Linearkombinationen von thermalen Observablen. Für die erste Gleichung bedeutet das:

$$\begin{aligned}\partial_{x\alpha}\omega\left(\sum c_{\mu\nu\sigma\tau\rho}\Theta^{\mu\nu\sigma\tau,\alpha\rho}\right)(x) &= \partial_{x\alpha}\omega\left(\sum c_{\mu\nu\sigma\tau\rho}\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\alpha\rho}(x)\right) \\ &= \omega\left(\sum c_{\mu\nu\sigma\tau\rho}\partial_{x\alpha}\theta^{\mu\nu\sigma\tau,\alpha\rho}(x)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt aus der Stetigkeit der Zustände 5.1.4 und dem Satz 4.4.2 über die Approximation zulässiger Makroobservablen:

$$\partial_\alpha\omega(\partial^\alpha\Xi)(x) = 0$$

Um die zweite Gleichung zu beweisen, berechnet man:

$$\begin{aligned}\square_x \omega \left( \sum c_{\mu\nu\sigma\tau\rho} \Theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho} \right) (x) &= \square_x \omega \left( \sum c_{\mu\nu\sigma\tau\rho} \theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho}(x) \right) \\ &= \omega \left( \sum c_{\mu\nu\sigma\tau\rho} \square_x \theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho}(x) \right) \\ &= -\omega \left( \sum c_{\mu\nu\sigma\tau\rho} \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \alpha\rho}(x) \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die explizite Form der thermalen Funktionen benützt:

$$\Theta^{\mu\nu\sigma\tau, \alpha\rho}(\beta) = \frac{(2i)^{|\rho|+4}}{(2\pi)^2} \zeta(|\rho| + 6) \square \partial^\rho \frac{P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)}{4} \frac{1}{\beta^2} = 0$$

Die Behauptung gilt nun wieder wegen der Stetigkeit der Zustände und nach dem Satz 4.4.2.

Um die beiden letzten Gleichungen zu beweisen, geht man von

$$\partial_{x\mu} \omega \left( \sum c_{\nu\sigma\tau,\rho} \Theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho} \right) (x) = -\omega \left( \sum c_{\nu\sigma\tau,\rho} \theta_\mu^{\nu\sigma\tau,\rho}(x) \right) = 0$$

bzw.

$$\partial_{x\alpha} \omega \left( \sum c_{\beta\sigma\tau,\rho} \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \Theta^{\mu\nu\sigma\tau,\rho} \right) (x) = -\omega \left( \sum c_{\sigma\tau,\rho} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \theta^{\mu\nu\sigma\tau,\alpha\rho}(x) \right) = 0$$

aus. Die rechte Seite verschwindet dabei jeweils, weil die thermalen Funktionen für ungerades  $|\underline{\mu\rho}|$  bzw.  $|\alpha\rho|$  verschwinden. Wieder über die Stetigkeitseigenschaft folgen die behaupteten Aussagen für beliebige zulässige Makroobservable.  $\square$

Dieses Ergebnis läßt sich noch umformulieren. Schreibt man die Antisymmetrisierung für die erste Maxwellgleichung aus, erhält man

$$0 = \partial_\mu \omega (P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) = \frac{1}{2} \left( \partial^{[\sigma} \omega (\partial^{\tau]} \partial^\nu \Xi)(x) - \underbrace{\partial_\mu \omega (\partial^\mu g^{\nu[\sigma} \partial^{\tau]} \Xi)(x)}_{=0} \right).$$

Dabei sind  $g^{\nu[\sigma} \partial^{\tau]} \Xi$  und  $\partial^\nu \Xi$  ebenfalls zulässige Makroobservable. Aus dem eben bewiesenen Satz folgt deshalb:

$$\partial_{[\sigma} \omega (\partial_{\tau]} \partial_\nu \Xi)(x) = 0$$

Da die zulässigen Makroobservablen  $\partial^\nu \Xi$  dicht im Raum aller zulässigen Makroobservablen liegen, gilt:

$$\partial_{[\mu} \omega (\partial_{\nu]} \Xi)(x) = 0$$

Umgekehrt folgt aus dieser Aussage und der ersten Gleichung aus dem Satz auch schon die Gültigkeit beider Maxwellgleichungen. Die Gültigkeit der ersten ist nach dem eben Gesagten evident.

Die zweite Maxwellgleichung

$$\partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \omega(P_{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) = 0$$

ist ebenfalls erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \omega(P_{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) &= \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (\omega(g_{\mu\sigma} \partial_\nu \partial_\tau \Xi)(x) - \omega(g_{\mu\tau} \partial_\nu \partial_\sigma \Xi)(x) \\ &\quad - \omega(g_{\nu\sigma} \partial_\mu \partial_\tau \Xi)(x) + \omega(g_{\nu\tau} \partial_\mu \partial_\sigma \Xi)(x)) \\ &= 2\partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (\omega(g_{\mu\sigma} \partial_\nu \partial_\tau \Xi)(x) - \omega(g_{\mu\tau} \partial_\nu \partial_\sigma \Xi)(x)) \\ &= 2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (g_{\mu\sigma} \partial_\alpha \omega(\partial_\nu \partial_\tau \Xi)(x) - g_{\mu\tau} \partial_\alpha \omega(\partial_\nu \partial_\sigma \Xi)(x)) \\ &= 2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (g_{\mu\sigma} \partial_{[\alpha} \omega(\partial_{\nu]} \partial_\tau \Xi)(x) - g_{\mu\tau} \partial_{[\alpha} \omega(\partial_{\nu]} \partial_\sigma \Xi)(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Man kann den letzten Satz also auch so formulieren:

**Satz 5.3.6.** *Sei  $\omega$  ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand und  $\Xi$  eine zulässige Makroobservable. Dann gilt für  $x \in \mathcal{O}$ :*

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \omega(\partial^\alpha \Xi)(x) &= 0 \\ \square \omega(\Xi)(x) &= 0 \\ \partial_{[\mu} \omega(\partial_{\nu]} \Xi)(x) &= 0 \end{aligned}$$

*Insbesondere ist der Tensor  $\partial_\mu \omega(\partial_\nu \Xi)(x)$  symmetrisch, spurfrei und erhalten.*

### Evolutionsgleichungen für $\mathcal{S}'_x$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, inwieweit sich die Evolutionsgleichungen noch herleiten lassen, wenn man aus der Menge der thermalen Observablen die mit ungeraden Ableitungen herausnimmt. Wir betrachten also statt  $\mathcal{S}_x$  den Raum

$$\mathcal{S}'_x \doteq \mathcal{S}_x \setminus \{\theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x) \quad \text{mit } |\rho| \text{ ungerade}\}$$

Da die thermalen Funktionen dieser Observablen verschwinden, bleibt die Menge aller zulässigen Makroobservablen gleich.

Wir lassen im Folgenden also nur thermale Observable mit einem Multiindex gerader Ordnung zu. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \square \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x) &= -\theta^{\mu\nu\sigma\tau, \alpha} \alpha^\rho(x) \\ \partial_\alpha \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \alpha \rho}(x) &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \square \omega(\Xi)(x) &= 0 \\ \partial_\alpha \omega(\partial^\alpha \Xi)(x) &= 0 \end{aligned}$$

gelten dann unverändert weiter. Die Relationen

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x) = -\theta_\mu^{\nu\sigma\tau, \mu\rho}(x) \quad (5.3.7)$$

$$\partial_\alpha \epsilon^\alpha_{\beta\mu\nu} \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x) = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \alpha\rho}(x) \quad (5.3.8)$$

lassen sich aber im Raum  $\mathcal{S}'_x$  nicht mehr formulieren.

Stattdessen untersuchen wir, ob die doppelt angewandten Relationen neue Informationen liefern. Wendet man 5.3.7 und 5.3.8 jeweils auf das erste bzw. zweite Indexpaar an, erhält man durch die verschiedenen Kombinationen:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\sigma \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x) &= \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \mu\sigma\rho}(x) \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\sigma \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x) &= \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \alpha\sigma\rho}(x) \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\gamma\delta\sigma\tau} \partial^\alpha \partial^\gamma \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x) &= \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\gamma\delta\sigma\tau} \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \alpha\gamma\rho}(x) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich jetzt auch im verkleinerten Raum der thermalen Vergleichsobservablen formulieren. Es gilt deshalb der Satz:

**Satz 5.3.9.** *Für den Lift auf eine zulässige Makroobservablen in einem  $\mathcal{S}'_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand gilt ( $x \in \mathcal{O}$ ):*

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\sigma \omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) &= 0 \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\sigma \omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) &= 0 \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\gamma\delta\sigma\tau} \partial^\alpha \partial^\gamma \omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) &= 0 \end{aligned}$$

**Beweis:** Die Aussagen folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der thermalen Funktionen, der Stetigkeit der Zustände 5.1.4 und dem Satz 4.4.2 über die Approximation zulässiger Makroobservablen.  $\square$

Die letzte Gleichung

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\gamma\delta\sigma\tau} \partial^\alpha \partial^\gamma \omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) = 0$$

liefert möglicherweise neue Informationen über  $\mathcal{S}'_x$ -thermale Zustände. Für die ersten beiden Relationen gilt dies nicht. Denn:

**Satz 5.3.10.** *Aus den beiden Gleichungen*

$$\begin{aligned} \square \omega(\Xi)(x) &= 0 \\ \partial_\alpha \omega(\partial^\alpha \Xi)(x) &= 0 \end{aligned}$$

folgt:

$$\partial_\mu \partial_\sigma \omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) = 0 \quad (5.3.11)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\sigma \omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) = 0 \quad (5.3.12)$$

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\sigma \partial_\mu \omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) \\
&= 2\partial_\sigma \left( \partial^{[\sigma} \omega(\partial^{\tau]} \partial^\nu \Xi)(x) - \underbrace{\partial_\mu \omega(\partial^\mu g^{\nu[\sigma} \partial^{\tau]} \Xi)(x)}_{=0} \right) \\
&= 2\partial_\sigma \partial^{[\sigma} \omega(\partial^{\tau]} \partial^\nu \Xi)(x) \\
&= \underbrace{\square \omega(\partial^\tau \partial^\nu \Xi)(x)}_{=0} - \underbrace{\partial^\tau \partial_\sigma \omega(\partial^\sigma \partial^\nu \Xi)(x)}_{=0}
\end{aligned}$$

damit gilt Gleichung 5.3.11. Für Gleichung 5.3.12 berechnet man:

$$\begin{aligned}
\partial^\sigma \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \omega(P_{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi)(x) &= 2\partial^\sigma \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (\omega(g_{\mu\sigma} \partial_\nu \partial_\tau \Xi)(x) - \omega(g_{\mu\tau} \partial_\nu \partial_\sigma \Xi)(x)) \\
&= 2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left( \partial_\mu \partial_\alpha \omega(\partial_\nu \partial_\tau \Xi)(x) - \underbrace{g_{\mu\tau} \partial_\alpha \partial^\sigma \omega(\partial_\nu \partial_\sigma \Xi)(x)}_{=0} \right) \\
&= 2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_{[\mu} \partial_{\alpha]} \omega(\partial_\nu \partial_\tau \Xi)(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und damit gilt die Behauptung.  $\square$

### Evolutionsgleichungen für $\mathcal{R}_x$ und $\mathcal{R}'_x$

Die Gleichungen  $\square \omega(\Xi)(x) = 0$  und  $\partial_\mu \omega(\partial^\mu \Xi)(x) = 0$  bleiben von dieser Einschränkung wieder unberührt.

Die Observablen  $\mathcal{R}_x$  entstehen durch Kontraktion eines Indexpaares:

$$g_{\nu\tau} \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x)$$

Damit läßt sich hier nur die inhomogene Maxwellgleichung anwenden:

$$g_{\nu\tau} \partial_\mu \theta^{\mu\nu\sigma\tau, \rho}(x) = -g_{\nu\tau} \theta^{\nu\sigma\tau, \mu\rho}(X)$$

Nach dieser Summation über die Polarisationsfreiheitsgrade liefert diese Gleichung nun aber nicht mehr genug Informationen, um die Relation

$$\partial_{[\mu} \omega(\partial_{\nu]} \Xi)(x) = 0$$

herzuleiten. Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
g_{\nu\tau} \partial_\mu \omega(P^{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)\Xi) &= 2g_{\nu\tau} \left( \partial^{[\sigma} \omega(\partial^{\tau]} \partial^\nu \Xi)(x) - \underbrace{\partial_\mu \omega(\partial^\mu g^{\nu[\sigma} \partial^{\tau]} \Xi)(x)}_{=0} \right) \\
&= \partial^\sigma \omega(\square \Xi)(x) - \partial_\sigma \omega(\partial^\sigma \partial^\nu \Xi)(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da die inhomogene Maxwellgleichung schon in  $\mathcal{R}_x$  keine neuen Informationen liefert, gilt damit auch unmittelbar, daß auch die doppelt angewendete inhomogene Maxwellgleichung im Raum  $\mathcal{R}'_x$  keine neuen Relationen liefert.

## 5.4 Phasenraumdichte

Aus den Evolutionsgleichungen für die Lifts der Zustände auf die Makroobservablen in lokalen thermischen Zuständen lassen sich Transportgleichungen für die totale Phasenraumdichte bestimmen. Dazu werden die Evolutionsgleichungen für die thermale Funktion der Phasenraumdichte spezialisiert. Die totale Phasenraumdichte zu einem lichtartigen Impuls  $p$  hat die thermale Funktion:

$$N_p(\beta) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{e^{\beta p} - 1}$$

### 5.4.1 Transportgleichungen

Für den Lift der totalen Phasenraumdichte schreiben wir:

$$N(x, p) \doteq \omega(N_p)(x)$$

Es gilt dann der

**Satz 5.4.1.** *In einem  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand  $\omega$  gilt für den Lift der totale Phasenraumdichte ( $x \in \mathcal{O}$ ):*

$$\begin{aligned} p_\mu \partial_x^\mu N(x, p) &= 0 \\ \square_x N(x, p) &= 0 \\ \partial_{[\mu} p_{\nu]} N(x, p) &= 0 \\ \partial^\mu P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) N(x, p) &= 0 \\ \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) N(x, p) &= 0 \end{aligned}$$

**Beweis:** Man betrachtet die Funktion

$$L_p(\beta) = (2\pi)^{-3} \ln(1 - e^{-\beta p}).$$

Das ist eine glatte Lösung der Wellengleichung und damit ebenfalls eine zulässige Makroobservable. Es gilt nun:

$$\partial_\beta^\mu L_p = (2\pi)^{-3} \frac{p^\mu}{e^{\beta p} - 1} = p^\mu N_p(\beta)$$

Wendet man die Gleichung 5.3.2 aus Satz 5.3.1 an, folgt daraus:

$$(p_\mu \partial^\mu) \omega(N_p)(x) = \partial_\mu \omega(p^\mu N_p)(x) = \partial_\mu \omega(\partial^\mu L_p)(x) = 0$$

Das ist die erste behauptete Aussage.

Die totale Phasenraumdichte ist eine zulässige Makroobservable, die zweite Aussage folgt deshalb sofort aus dem Satz 5.3.1.

Für die dritte Aussage benützt man Satz 5.3.6:

$$(p_{[\mu}\partial_{\nu]}\omega(N_p))(x) = -\partial_{[\nu}\omega(p_{\mu]}N_p)(x) = -\partial_{[\nu}\omega(\partial_{\mu]}L_p)(x) = 0$$

Für die letzten beiden geht man von der zulässigen Makroobservablen

$$X_p(\beta) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n\beta p}$$

aus. Es gilt dann:

$$\partial^\mu P_{\mu\nu\sigma\tau}(p)\omega(N_p)(x) = \partial^\mu\omega(P_{\mu\nu\sigma\tau}(p)N_p) = \partial^\mu\omega(P_{\mu\nu\sigma\tau}(\partial)X_p) = 0$$

Die letzte Gleichung zeigt man analog dazu.  $\square$

**Anmerkung:** Tatsächlich folgt aus der Gültigkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} p_\mu \partial_x^\mu N(x, p) &= 0 \\ \square_x N(x, p) &= 0 \\ \partial_{[\mu} p_{\nu]} N(x, p) &= 0 \end{aligned}$$

auch die der beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial^\mu P_{\mu\nu\sigma\tau}(p)N(x, p) &= 0 \\ \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p)N(x, p) &= 0 \end{aligned}$$

Dazu überträgt man einfach die analoge Aussage für die Evolutionsgleichungen.

## 5.4.2 Rekonstruktion von Funktionalen

Im letzten Abschnitt haben wir Transportgleichungen für die Phasenraumdichte in thermalen Zuständen hergeleitet. Umgekehrt kann man aus einer Phasenraumdichte, die diesen Gleichungen genügt, ein Funktional rekonstruieren.

**Satz 5.4.2.** *Sei mit  $N(x, p) : \mathcal{O} \times \partial V^+ \mapsto \mathbb{R}$  eine in beiden Variablen schwach-integrable reelle Funktion gegeben, die im Sinne von Distributionen den Gleichungen*

$$\begin{aligned} \partial^\mu P_{\mu\nu\sigma\tau}(p)N(x, p) &= 0 \\ \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p)N(x, p) &= 0 \end{aligned}$$

genügt, dann wird durch

$$(\omega - \omega_\infty)(F_{\mu\nu}(x)F_{\sigma\tau}(y)) \tag{5.4.3}$$

$$= -(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} \cos(\underline{p}(x-y)) N\left(\frac{x+y}{2}, \underline{p}\right) P_{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}) \tag{5.4.4}$$

ein lineares quasifreies Funktional auf der Algebra  $\mathcal{A}(\mathcal{O})$  definiert.

**Beweis:**  $\omega$  definiert ein reelles Funktional auf der freien Tensoralgebra über dem Testfunktionenraum. Dieses muß auf den von den Feldgleichungen und der Kommutatorrelation erzeugten Idealen verschwinden. Wir müssen also die Maxwellgleichungen und die Kommutatorrelation nachweisen.

Die Kommutatorfunktion ist gerade der antisymmetrische Teil der Vakuumzweipunktfunction. Die Differenz von 5.4.3 zur Vakuumzweipunktfunction ist aber symmetrisch, deshalb gilt:

$$\omega([F_{\mu\nu}(x), F_{\sigma\tau}(y)]) = \omega_\infty([F_{\mu\nu}(x), F_{\sigma\tau}(y)])$$

Die Maxwellgleichungen gelten in beiden Argumenten wegen

$$\begin{aligned} & \partial^\mu P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) N\left(\frac{x+y}{2}, p\right) \cos(p(x-y)) \\ &= P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) (\partial^\mu N\left(\frac{x+y}{2}, p\right)) \cos(p(x-y)) \\ &\quad - P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) N\left(\frac{x+y}{2}, p\right) p^\mu \sin(p(x-y)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei verschwindet der erste Term nach Satz 5.4.1. Und da  $p$  lichtartig ist, gilt:

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) p^\mu &= (g_{\mu[\sigma} p_{\tau]} p_\nu - g_{\nu[\sigma} p_{\tau]} p_\mu) p^\mu \\ &= p_{[\sigma} p_{\tau]} p_\nu - g_{\nu[\sigma} p_{\tau]} p_\mu p^\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit verschwindet auch der zweite Term.

Genauso argumentiert man für:

$$\begin{aligned} & \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) N\left(\frac{x+y}{2}, p\right) \cos(p(x-y)) \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) (\partial_\alpha N\left(\frac{x+y}{2}, p\right)) \cos(p(x-y)) \\ &\quad - \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) N\left(\frac{x+y}{2}, p\right) p_\alpha \sin(p(x-y)) \end{aligned}$$

Daß der zweite Term hier verschwindet, ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) p_\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (g_{\mu\sigma} p_\nu p_\tau - g_{\nu\sigma} p_\mu p_\tau - g_{\mu\tau} p_\nu p_\sigma + g_{\nu\tau} p_\mu p_\sigma) p_\alpha \\ &= 2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (g_{\mu\sigma} p_\nu p_\tau - g_{\mu\tau} p_\nu p_\sigma) p_\alpha \\ &= \epsilon^{\beta\mu\alpha\nu} (g_{\mu\sigma} p_\tau - g_{\mu\tau} p_\sigma) p_\nu p_\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

□



## 5.5 Singularitäten

Auf Basis der in dem letzten Kapitel hergeleiteten Evolutionsgleichungen für die Lifts der Zustände auf die zulässigen thermalen Observable, kann man zeigen, daß Zustände, die in einem zusammenhängendem Gebiet  $\mathcal{O}$   $\mathcal{R}'_{\mathcal{O}}$ -thermal sind, das einen Lichtkegel enthält, entweder mit einem Referenzzustand übereinstimmen (also eine triviale Ortsabhängigkeit der thermalen Größen haben) oder aber, daß das Gebiet  $\mathcal{O}$  in einem simplizialen zeitartigen Kegel enthalten sein muß. Für den Beweis folgen wir [Buc03].

Für den Beweis ist es sinnvoll, regularisierte Zustände zu betrachten: Sei  $f$  eine nicht-negative normierte Testfunktion mit einem (kleinen) kompakten Träger, der den Ursprung enthält. Der regularisierte Zustand wird durch Verschmieren mit  $f$  definiert:

$$\omega_f(A) \doteq \int d^4x f(x)(\omega \circ \alpha_x)(A)$$

Ist der ursprüngliche Zustand  $\mathcal{R}'_{\mathcal{O}}$ -thermal, dann ist der regularisierte Zustand wegen der Konvexität der Menge der Referenzzustände in einem etwas kleineren Gebiet  $\mathcal{O} + \text{supp } f \subset \mathcal{O}_\omega$   $\mathcal{R}'_{\mathcal{O}}$ -thermal. Aus der angenommenen Stetigkeitseigenschaft der Zustände und dem Satz 4.4.2 erhält man dann auf kompakten Teilmengen von  $\mathcal{O}$  für geeignete Konstanten  $c^\mu$  und kompaktes  $B \subset V_+$  die gleichmäßigen Schranken:

$$|\partial^\mu \omega_f(\Xi)(x)| \leq c^\mu |\Xi|_B \quad (5.5.1)$$

Wir betrachten Unterräume der Makroobservablen mit glatten thermalen Funktionen der Form  $\beta \mapsto \Gamma(\beta p)$  für einen festen lichtartigen Vektor  $p$ . Diese zulässigen Makroobservablen bilden eine Abelsche  $\star$ -Algebra mit Eins, die wir mit  $\Gamma_p$  bezeichnen. An einem Punkt  $x \in \mathcal{O}$  definiert  $A \mapsto \omega_f(A)(x)$  einen Zustand über  $\Gamma(p)$ .

In  $\Gamma_p$  liegen Makroobservable, deren thermale Funktionen Monome bzw. die Exponentialfunktion sind:

$$\begin{aligned} E_p &\doteq e^{-i\beta p} \\ M_e^n &\doteq (e\beta)^n \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Einige Eigenschaften dieser Makroobservablen liefert das folgende Lemma.

**Lemma 5.5.2.** *Sei  $x \in \mathcal{O}$  und  $\omega$  ein regularisierter  $\mathcal{R}'_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand. Dann gilt:*

1.  $p\partial\omega(E_p)(x) = 0$ ,  $\square\omega(E_p)(x) = 0$
2.  $|\omega(E_p)(x)| \leq 1$
3.  $p \mapsto \omega(E_p)(x)$  läßt sich zu einer ganzanalytischen Funktion auf ganz  $\mathbb{C}^4$  erweitern, die glatt in  $x$  ist.
4.  $0 \leq \omega(M_p^{n+1})(x) \leq (\omega(M_p^n)(x))^{n/(n+1)} (\omega(M_p^{2n+1})(x))^{1/(n+1)} \quad n \in \mathbb{N}_0$

**Beweis:** Punkt 1 folgt aus Satz 5.3.6. Für  $x \in \mathcal{O}$  ist  $\omega(\cdot)(x)$  ein Zustand über  $\Gamma_p$ . Es gilt deshalb:

$$|\omega(E_p)(x)|^2 \leq |\omega(E_p^* E_p)(x)| = 1$$

Das ist Punkt 2. Für Punkt 3 betrachtet man:

$$E_k(\beta) \doteq (\cos(\beta_0 |\vec{k}|) + ik_0 |\vec{k}|^{-1} \sin(\beta_0 |\vec{k}|)) e^{-i\vec{k}\vec{\beta}}$$

Dieser Ausdruck läßt sich in eine Potenzreihe in  $k$  entwickeln und definiert damit eine analytische Funktion für  $k \in \mathbb{C}^4$ . Sie ist außerdem lokal gleichmäßig beschränkt in  $\beta \in B$  für kompakte  $B \subset V^+$ . Der Zustand  $\omega$  wurde nach Voraussetzung reguliert. Aus den Stetigkeitseigenschaften 5.5.1 folgt damit, daß  $k \mapsto \omega(E_k)(x)$  die gesuchte Erweiterung ist.

Für positive reelle Zahlen  $p$  und  $q$  mit  $p + q = pq$  und positiven reellen Funktionen  $f$  und  $g$  auf einem Maßraum  $X$  gilt die Höldersche Ungleichung:

$$\int_X fg \leq \left( \int_X f^p \right)^{1/p} \left( \int_X g^q \right)^{1/q}$$

Da die Operatoren  $M_p^n$  positive thermale Funktionen haben, folgt daraus die Behauptung.  $\square$

Mit diesen Eigenschaften können wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

**Satz 5.5.3.** *Sei  $\mathcal{O}$  eine konvexes Gebiet, das einen Lichtkegel enthält. Sei  $\omega$  ein  $\mathcal{R}'_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand. Es gilt dann eine der Alternativen:*

- *Die Lifts  $\omega(\cdot)(x)$  der Zustände auf die Makroobservablen hängen nicht von  $x$  ab.*
- *Mindestens ein Lift hängt nichtrivial von  $x$  ab und  $\mathcal{O}$  ist in einem zeitartigen simplizialen Kegel enthalten.*

**Beweis:** Man geht wieder zu regulierten Zuständen über. Diese sind immer noch  $\mathcal{R}'_{\mathcal{O}}$ -thermal in einem Gebiet, das konvex ist und einen Lichtkegel enthält.

Wir führen Lichtkegel-Koordinaten ein:

$$x_{\pm} = x_0 \pm \vec{e} \cdot \vec{x} \quad e \doteq \frac{p}{|p|}$$

Diese beiden Koordinaten parametrisieren die Ebene, die von  $\vec{p}$  und der Zeitachse aufgespannt wird.  $x_+$  läuft dabei in Richtung von  $p$ ,  $x_-$  steht senkrecht dazu (bezüglich des Standardskalarprodukts). Koordinaten in der Ebene senkrecht dazu:

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - (\vec{e} \cdot \vec{x}) \vec{e}$$

Aus der Gleichung

$$p\partial\bar{E}_p(x) = 0$$

für die Lifts  $\bar{E}_p(x) \doteq \omega_f(E_p)(x)$  folgt, daß  $\bar{E}_p$  nicht von  $x_+$  abhängen kann. Aus  $\square\bar{E}_p(x) = 0$  folgt dann weiter, daß die Laplace-Gleichung  $\Delta_\perp\bar{E}_p(x) = 0$  in den Koordinaten  $x_\perp$  erfüllt ist.

Für jedes  $x_- \in \{y_- | y \in \mathcal{O}\}$  und jedes  $x_\perp \in \mathbb{R}^2$  gibt es ein  $x \in \mathcal{O}$  mit diesen Komponenten. Für ein  $y \in \mathcal{O}$  liegt der Punkt  $x$  mit den Komponenten  $x_- = y_-$ ,  $x_+ = y_+ + t$ ,  $x_\perp$  für genügend große  $t$  in einem Lichtkegel  $z + V^+ \subset \mathcal{O}$  mit  $z \in \mathcal{O}$  und  $(y-z)$  positiv lichtartig. Für festes  $x_- \in \{y_- | y \in \mathcal{O}\}$  gilt die Gleichung  $\Delta_\perp\bar{E}_p(x) = 0$  sogar für alle  $x_\perp \in \mathbb{R}^2$ . Da  $\bar{E}_p(x)$  glatt und beschränkt ist, folgt aus der Ungleichung von Harnack, daß  $\bar{E}_p(x)$  eine konstante Lösung der Laplace-Gleichung sein muß. Insgesamt kann  $\bar{E}_p(x)$  nur von  $x_-$  abhängen.

Wegen der in dem vorherigen Lemma gezeigten Analytizitätseigenschaften kann man  $\bar{E}_p$  für festes  $x$  in eine Potenzreihe in  $p$  entwickeln.

$$\bar{E}_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |p|^{|m|} c_{\underline{m}}(x) e^{\underline{m}}$$

Dabei ist  $m = |\underline{m}|$ . Die Koeffizienten  $c_{\underline{m}}$  sind alle glatt in  $x$  und können nur von  $x_-$  in nichttriviale Weise abhängen. Durch  $k$ -faches Differenzieren und Anwenden der Kettenregel erhält man:

$$(y\partial_x)^k c_{\underline{m}}(x) e^{\underline{m}} = (ye)^k \partial_0^k c_{\underline{m}}(x) e^{\underline{m}} \quad \text{für } x \in \mathcal{O}, y \in \mathbb{R}^4$$

Entwickelt man die Komponenten von  $\vec{e}$  in Kugelflächenfunktionen, dann sieht man, daß diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn

$$\partial_0^k c_{\underline{m}}(x) e^{\underline{m}} = 0 \quad \text{für } k > m.$$

Die Terme  $c_{\underline{m}}(x) e^{\underline{m}}$  sind also Polynome in  $ex$  mit einem Grad kleiner gleich  $|\underline{m}|$ , deren Koeffizienten Polynome in den Komponenten von  $\vec{e}$  sind.

Wegen

$$\bar{E}_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|p|^{m;m}}{m!} \omega(M_p^m)(x)$$

folgt auch, daß die Erwartungswerte

$$\omega(M_p^m)(x) = (-i)^m m! c_{\underline{m}} e^{\underline{m}} \quad x \in \mathcal{O}$$

Polynome in  $ex$  vom Grad kleiner gleich  $m$  sind. Diese sind nach dem Lemma nicht negativ. Unter diesen Polynomen ist eines mit Grad eins oder aber alle sind konstant. Seien nämlich die  $x \mapsto \omega_f(M_e^m)(x)$  konstant für alle  $m = 0 \dots m-1$ . Dann folgt aus der Abschätzung 4 aus dem Lemma und weil  $\omega(M_p^{2m-1})(x)$  höchstens den Grad

$2m - 1$  hat, daß  $\omega(M_p^m)(x)$  für große  $x \in V^+ \subset \mathcal{O}$  nicht schneller als  $|x|^{(2m-1)/m}$  wachsen kann. Es ist deshalb vom Grad 1 oder konstant.

Angenommen, ein Lift hängt nichttrivial von  $x$  ab, dann gilt das auch für ein  $M_p^m$ , da diese dicht in allen zulässigen Makroobservablen liegen. D.h. es gilt

$$\omega_f(M_e^m)(x) = P_f(\vec{e})(ex) + Q_f(\vec{e}) \quad x \in \mathcal{O}$$

für Polynome  $P_f \neq 0$  und  $Q_f$ . Nun gilt wegen  $\omega_f(M_e^m)(x) \geq 0$  für  $x \in \mathcal{O}$ :

$$P_f(\vec{e})(ex) + Q_f(\vec{e}) \geq 0 \quad x \in \mathcal{O}$$

Da  $V^+ \subset \mathcal{O}$  gilt  $P_f(\vec{e}) > 0$  für fast alle  $\vec{e}$  und  $Q_f(\vec{e}) \geq 0$ . Das heißt aber:

$$\mathcal{O} \subset \bigcap_{\vec{e}} \{x \mid ex \geq -Q_f(\vec{e})/P_f(\vec{e})\}$$

Damit muß aber  $\mathcal{O}$  in einem zeitartigen simplizialen Kegel enthalten sein.

Da  $f$  kompakten Träger hat, gilt dasselbe dann auch für den unregularisierten Zustand. Die selbe Aussage gilt genauso für beliebige verschobene Lichtkegel und beliebige Rückwärtslichtkegel.  $\square$

# Kapitel 6

## Beispiele lokaler Gleichgewichtszustände

### 6.1 Zustände scharfer Temperatur

Im letzten Kapitel haben wir Evolutionsgleichungen für die Makroobservablen hergeleitet und ein allgemeines Singularitätentheorem für thermale Nichtgleichgewichtszustände bewiesen. Beschränkt man sich auf Zustände, die in einem gewissen Gebiet eine scharfe Temperatur haben, dann läßt sich aus den Evolutionsgleichungen die ortsabhängige Temperaturverteilung eindeutig bestimmen. Es gilt der Satz:

**Satz 6.1.1.** *Sei  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$  ein konvexes Gebiet, das einen Lichtkegel enthält.  $\mathcal{R}'_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustände mit scharfer Temperatur haben dann eine Temperaturverteilung der Form:*

$$\beta(x) = \eta x + b \quad \text{mit } \eta \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^4$$

**Beweis:** Wir betrachten die Makroobservable  $p\beta$ . Hat der Zustand scharfe Temperatur, gilt:

$$\omega(p\beta)(x) = \omega_{\beta(x)}(p\beta) = p\beta(x)$$

Aus dem Beweis für das Singularitätentheorem folgert man, daß diese Funktion ein Polynom ersten Grades sein muß. Es gilt also:

$$\beta(x) = \eta x + b$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

An diesem Spezialfall sieht man auch unmittelbar, warum solche Zustände mit nicht-trivialer Temperaturverteilung nicht auf ganz  $\mathbb{R}^4$   $\mathcal{R}'_x$ -thermal sein können:  $\omega(p\beta)(x)$

muß in  $\mathcal{O}$  positiv sein, wechselt aber als Polynom ersten Grades bei  $x = -b/\eta$  sein Vorzeichen. Ein Beobachter, der in einem gewissen Gebiet eine solche Temperaturverteilung mißt, könnte daraus schließen, daß der Zustand bei  $x = -b/\eta$  eine Singularität stattgefunden hat. Dieser Schluß setzt allerdings voraus, daß der Zustand in einem entsprechenden Gebiet  $\mathcal{R}'_x$ -thermal war. Ist das Gebiet, indem der Beobachter Messungen vornehmen kann, in einem Doppelkegel enthalten, dann kann er Störungen in der Vergangenheit dieses Doppelkegels wegen Huygens-Prinzip nicht bemerken.

## 6.2 Hot-Bang-Zustand

Zustände mit scharfer Temperatur sind natürlich schon mit den KMS-Zuständen gegeben. Tatsächlich existieren auch  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustände mit scharfer Temperatur, deren Temperatur nicht konstant ist ( $\eta \neq 0$ ). Ein solcher Zustand muß (bis auf Translationen und Zeitspiegelung) eine totale Phasenraumdichte der Form

$$N(x, p) = \frac{1}{e^{\eta xp} - 1}$$

haben. Daß ein solcher Zustand existiert, zeigt der folgende Satz.

**Satz 6.2.1.** *Das für  $\eta > 0$  durch die Zweipunktfunktion*

$$\omega_{hb}(F_{\mu\nu}(x)F_{\sigma\tau}(y)) \doteq -(2\pi)^{-3} \int d^4p P_{\mu\nu\sigma\tau}(p)\delta(p^2)\epsilon(p_0)e^{-i(x-y)p} \frac{1}{1 - e^{-\eta\frac{x+y}{2}p}}$$

*bestimmte quasifreie Funktional definiert auf der Algebra  $\mathcal{A}(V^+)$  einen Zustand.*

**Beweis:** Das Funktional hat die Form

$$\begin{aligned} & (\omega_{hb} - \omega_{\infty})(F^{\mu\nu}(x)F^{\sigma\tau}(y)) \\ &= -(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\vec{p}}{|\vec{p}|} P^{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}) \cos(\underline{p}(x-y)) N\left(\frac{x+y}{2}, \underline{p}\right) \end{aligned}$$

mit

$$N(x, p) = \frac{1}{e^{\eta xp} - 1}.$$

Für die Phasenraumdichte gelten die Relationen

$$\begin{aligned} p_{\mu}\partial^{\mu}N(x, p) &= p_{\mu}\partial^{\mu}\frac{1}{e^{\eta xp} - 1} = p_{\mu}p^{\mu}\frac{-e^{\eta xp}\eta}{(e^{\eta xp} - 1)^2} = 0 \\ p_{[\mu}\partial_{\nu]}N(x, p) &= p_{[\mu}\partial_{\nu]}\frac{1}{e^{\eta xp} - 1} = p_{[\mu}p_{\nu]}\frac{-e^{\eta xp}\eta}{(e^{\eta xp} - 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\square_x N(x, p) = 0.$$

Existiert das Integral, ist damit nach Satz 5.4.2 ein reelles Funktional auf der Algebra definiert.

Zu zeigen ist also noch die Existenz des Integrals und die Positivität des Funktionals. Wir rechnen erstmal formal (für  $f, g \in \mathcal{D}(V^+) \times \mathbb{C}^{4x4}$ ):

$$\begin{aligned}
& (\omega_{hb} - \omega_\infty) (F(f)^* F(f)) \\
&= -(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} \int d^4 x \int d^4 y g_{\mu\sigma} \underline{p}_\nu \overline{f^{[\mu\nu]}(x)} \underline{p}_\tau f^{[\sigma\tau]}(y) e^{-i(x-y)\underline{p}} \frac{1}{e^{\eta(x+y)/2\underline{p}} - 1} \\
&= -(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} \int d^4 x \int d^4 y g_{\mu\sigma} \underline{p}_\nu \overline{f^{[\mu\nu]}(x)} \underline{p}_\tau f^{[\sigma\tau]}(y) e^{-i(x-y)\underline{p}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta(x+y)/2\underline{p}} \\
&= -(2\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} g_{\mu\sigma} \underline{p}_\nu \overline{\hat{f}^{[\mu\nu]}(-1 - in\eta)\underline{p}} \underline{p}_\tau \hat{f}^{[\sigma\tau]}(-1 - in\eta)\underline{p} \quad (6.2.2)
\end{aligned}$$

Die Fouriertransformierten von  $f$  bzw.  $g$  sind analytische Funktionen, da  $f$  und  $g$  als Testfunktionen kompakten Träger haben.

Da die Testfunktionen sogar kompakten Träger im Vorwärtslichtkegel haben, läßt sich das Wachstum ihrer Fouriertransformierten für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}z \geq 0$  abschätzen. Es gilt mit einer geeigneten Konstante  $C$ :

$$\hat{f}(z\underline{p}) \leq C e^{-\text{Im}z|\vec{p}|}$$

Daraus folgt die Existenz des Integrals

$$\left| \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} g_{\mu\sigma} \underline{p}_\nu \overline{\hat{f}^{[\mu\nu]}(-z\underline{p})} \underline{p}_\tau \hat{f}^{[\sigma\tau]}(-z\underline{p}) \right| < \infty$$

für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $\text{Im}z \geq 0$  und den genannten Trägereigenschaften der Testfunktionen. Um die Existenz der Reihe 6.2.2 zu zeigen, und die obige formale Rechnung zu rechtfertigen, geht man von der Gleichung

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} g_{\mu\sigma} \underline{p}_\nu \overline{\hat{f}^{[\mu\nu]}(-z\underline{p})} \underline{p}_\tau \hat{f}^{[\sigma\tau]}(-z\underline{p}) \\
&= |z|^{-2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} g_{\mu\sigma} \underline{p}_\nu \overline{\hat{f}^{[\mu\nu]}\left(-\frac{z}{|z|}\underline{p}\right)} \underline{p}_\tau \hat{f}^{[\sigma\tau]}\left(-\frac{z}{|z|}\underline{p}\right)
\end{aligned}$$

aus. Der Ausdruck 6.2.2 läßt sich deshalb gliedweise abschätzen durch:

$$\begin{aligned}
& \left| \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} g_{\mu\sigma} \underline{p}_\nu \overline{\hat{f}^{[\mu\nu]}(-1 - in\eta)\underline{p}} \underline{p}_\tau \hat{f}^{[\sigma\tau]}(-1 - in\eta)\underline{p} \right| \\
&\leq A \frac{1}{1 + n^2 \eta^2}
\end{aligned}$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 \eta^2}$$

wird durch die konvergente Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 \eta^2}$$

majorisiert. Damit ist die Existenz des Funktionals gezeigt.

Positivität sieht man wieder ein, indem man sich (wegen Kovarianz o.B.d.A.) einen lichtartigen Vektor  $p = (1, 0, 0, 1)$  wählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & -g_{\mu\sigma} p_\nu \overline{\hat{f}^{[\mu\nu]}(-(1-in)p)} p_\tau \hat{f}^{[\sigma\tau]}(-(1-in)p) \\ &= |p_\nu \hat{f}^{[1\nu]}(-(1-in)p)|^2 + |p_\nu \hat{f}^{[2\nu]}(-(1-in)p)|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

### 6.2.1 Thermale Eigenschaften

In diesem Abschnitt sollen kurz die thermalen Eigenschaften des Hot-Bang-Zustands diskutiert werden.

**Satz 6.2.3.** *Der Hot-Bang-Zustand ist im Inneren des Vorwärtslichtkegels  $\mathcal{S}_x$ -thermal.*

**Beweis:** Die Erwartungswerte der balancierten Ableitungen lassen sich durch die Erwartungswerte in einem ortsabhängigen KMS-Zustand ausdrücken:

$$\omega_{hb}|_{\mathcal{S}_x} = \omega_{\beta(x)}|_{\mathcal{S}_x} \quad \text{mit} \quad \beta(x) = \eta x$$

Denn:

$$\begin{aligned} \omega_{hb}(\partial^{\underline{\rho}}: F^{\mu\nu} F^{\sigma\tau}(x):) &= -(2\pi)^{-3} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} P^{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}) \cos(2\underline{p}\zeta) \frac{1}{e^{\eta x \underline{p}} - 1} \\ &= -(2\pi)^{-3} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} P^{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}) \cos(2\underline{p}\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta x \underline{p}} \end{aligned}$$

Der Integrand ist beschränkt und das Vertauschen der unendlichen Summe und Integral erlaubt. Analog zur Rechnung der Erwartungswerte in den KMS-Zuständen erhält man dann:

$$\begin{aligned} &= -(2\pi)^{-3} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} P^{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}) \cos(2\underline{p}\zeta) e^{-n\eta x \underline{p}} \\ &= \omega_{\beta=\eta x}(\partial^{\underline{\rho}}: F^{\mu\nu} F^{\sigma\tau}(x):) \end{aligned}$$

$\square$



Der Hot-Bang-Zustand stimmt also an jedem Ort  $x \in V^+$  auf den Observablen  $\mathcal{S}_x$  mit einem KMS-Zustand zur inversen Temperatur  $\beta = \eta x$  überein. Die Temperatur wird also am Rand des Vorwärtslichtkegel unendlich. Die totale Phasenraumdicke hat die folgende Form:

$$N_p(x, p) = \frac{1}{e^{\eta x p} - 1}$$

Nähert man sich dem Rand des Lichtkegels an einem Punkt  $e$ , wird die Phasenraumdicke für  $p$  parallel zu  $e$  unendlich. Der Zustand beschreibt also eine Explosion im Ursprung des Koordinatensystems. Einen Beobachter innerhalb des Vorwärtslichtkegels, der sich relativ zu dem durch den Zustand an einem Punkt definierten Ruhesystem nicht bewegt, würde eine isotrope Strahlung mit einem Planck-Spektrum wahrnehmen. Die Temperatur dieser Strahlung nimmt mit der Zeit wie  $1/t$  ab. Da der Hot-Bang-Zustand  $\mathcal{S}_O$ -thermal ist, verschwinden die Erwartungswerte der Stokes-Parameter  $S_1$  bis  $S_3$ . Die Strahlung ist deshalb unpolarisiert.

Da sich die Strahlung für große Zeiten immer mehr verteilt, sieht der Zustand aus wie das Vakuum ( $e \in V^+$ ):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{hb} \circ \alpha_{te} = \omega_\infty$$

### 6.3 Polarisierte Zustände

$\mathcal{S}_O$ -thermale Zustände sind unpolarisiert. In diesem Abschnitt sollen Zustände konstruiert werden, deren Stokes-Parameter vorgegeben sind. Diese sind dann nicht mehr unbedingt  $\mathcal{S}_O$ -thermal. Summiert man aber über die Polarisationsfreiheitsgrade, betrachtet also nur den verkleinerten Raum thermaler Observabler  $\mathcal{R}_O$ , dann haben diese Zustände dennoch eine thermale Interpretation.

**Satz 6.3.1.** *Seien die  $N_i : V^+ \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 0, \dots, 3$  reelle schwach-integrierte Funktionen, dann wird durch*

$$\begin{aligned} & (\omega_P - \omega_\infty)(F^{\mu\nu}(x)F^{\sigma\tau}(y)) = \\ & (2\pi)^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} e^{-i(x-y)\underline{p}} \sum_{i=0}^3 N_i(\underline{p}) P_i^{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}) + c.c. \end{aligned}$$

mit

$$P_i^{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}) \doteq (e^{\mu\nu}(p; +), e^{\mu\nu}(p; -)) \sigma_i \begin{pmatrix} \overline{e^{\sigma\tau}(p; +)} \\ e^{\sigma\tau}(p; -) \end{pmatrix}$$

ein Funktional auf der Feldalgebra definiert.

**Beweis:** Das Funktional ist reell. Die Maxwellgleichungen gelten dabei nach Konstruktion:

$$p^\mu e_{\mu\nu}(p; \pm) = 0 \quad \text{für } p \in V^+$$

und:

$$p_\mu e^{\mu\nu\sigma\tau} e_{\sigma\tau}(p; \pm) = p^\mu e_{\mu\nu}(p; \mp) = 0$$

Die entsprechenden Ableitungen verschwinden also. Die Differenz zum Vakuumzustand ist symmetrisch, denn es gilt:

$$\begin{aligned} P_i^{\sigma\tau\mu\nu}(p) &= \overline{P_i^{\sigma\tau\mu\nu}(p)} = P_i^{\mu\nu\sigma\tau}(p) \quad \text{für } i = 0, 1, 2 \\ P_3^{\sigma\tau\mu\nu}(p) &= -\overline{P_3^{\sigma\tau\mu\nu}(p)} = -P_3^{\mu\nu\sigma\tau}(p) \end{aligned}$$

Damit ist auch die Kommutatorrelation erfüllt.  $\square$

**Satz 6.3.2.** Für  $\bar{N}_{1,2,3}(p) = 0$  und  $\bar{N}_0(p) = \frac{1}{e^{\beta p} - 1}$  stimmt  $\omega_S$  mit dem KMS-Zustand zur inversen Temperatur  $\beta$  überein.

$$\omega_P = \omega_\beta$$

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} N_0(p) P_0^{\mu\nu\sigma\tau}(p) &= N_0(p) (e^{\mu\nu}(p; +), e^{\mu\nu}(p; -)) \sigma_0 \left( \frac{e^{\sigma\tau}(p; +)}{e^{\sigma\tau}(p; -)} \right) \\ &= \frac{1}{e^{\beta p} - 1} \left( e^{\mu\nu}(p; +) \overline{e^{\sigma\tau}(p; +)} + e^{\mu\nu}(p; -) \overline{e^{\sigma\tau}(p; -)} \right) \\ &= -2 \frac{1}{e^{\beta p} - 1} P_{\mu\nu\sigma\tau}(p) \end{aligned}$$

Der so definierte Zustand ist also genau der KMS-Zustand zur Temperatur  $\beta$ .  $\square$

### Stokes-Parameter

Im Folgenden nehmen wir an, daß diese Funktionale Zustände darstellen, in denen die Stokes-Parameter als zentrale Folge definiert sind. Wir skizzieren kurz, warum man in diesem Fall für die Stokes-Parameter das erwartete Ergebnis erhält.

$$\omega_P(S_i(q)) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \omega \left( F(f_{(n;+)})^*, F(f_{(n;-)})^* \right) \sigma_i \begin{pmatrix} F(f_{(n;+)}) \\ F(f_{(n;-)}) \end{pmatrix}$$

Im Vakuumzustand sind die Stokes-Parameter definiert und verschwinden alle. Es reicht also, die Differenz zum Vakuum zu betrachten. Das führt auf das Integral

$$(2\pi) \int \frac{d^3 \vec{p}}{2|\vec{p}|} \overline{\hat{f}_{(n;\lambda)}^{\mu\nu}(-\underline{p})} \hat{f}_{(n;\lambda')}^{\sigma\tau}(-\underline{p}) \sum_{i=0}^3 N_i(\underline{p}) P_i^{\mu\nu\sigma\tau}(\underline{p}).$$

Dabei sind  $f^{(n;\lambda)}$  wieder die Testfunktionen der Form (mit  $0 < \alpha < 1$ ):

$$f_{\mu\nu}^{(n;\lambda)}(x) = n^{-3/2-\alpha} e_{\mu\nu}^R(q; \lambda) g(x_0 n^{-\alpha}) h(\vec{x} n^{-1}) e^{-ixq}$$

Mit der Abkürzung

$$P_S^{\mu\nu\sigma\tau}(p) = \sum_{i=0}^3 N_i(p) P^{\mu\nu\sigma\tau}(p)$$

erhält man für das Integral:

$$\begin{aligned} \dots &= (2\pi)n^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{2|\vec{p}|} \overline{e_{\mu\nu}^R(q; \lambda)} e_{\sigma\tau}^R(q; \lambda') P_S^{\mu\nu\sigma\tau}(p) \\ &\quad \times |\hat{g}(-n^\alpha(-|\vec{p}| + |\vec{q}|))|^2 |\hat{h}(-n(-\vec{p} + \vec{q}))|^2 \end{aligned}$$

Existieren diese Integrale (z.B. wenn die Impulsabhängigkeit der Stokes-Parameter alle die Form  $\frac{1}{e^{\beta p} - 1}$  haben.), dann gilt:

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_P (F(f_{(n;+)})^*, F(f_{(n;-)})^*) = \frac{(2\pi)}{|\vec{q}|} \overline{e_{\mu\nu}^R(q; \lambda)} e_{\sigma\tau}^R(q; \lambda') P_S^{\mu\nu\sigma\tau}(q)$$

und mit:

$$\begin{aligned} \overline{e_{\mu\nu}^R(q; \lambda)} e_{\sigma\tau}^R(q; \lambda') P_S^{\mu\nu\sigma\tau}(q) &= |\vec{q}|^4 (N_0(q) (\delta_{\lambda+} \delta_{+\lambda'} + \delta_{\lambda-} \delta_{-\lambda'}) \\ &\quad + N_1(q) (\delta_{\lambda+} \delta_{-\lambda'} + \delta_{\lambda-} \delta_{+\lambda'}) \\ &\quad - i N_2(q) (\delta_{\lambda+} \delta_{-\lambda'} - \delta_{\lambda-} \delta_{+\lambda'}) \\ &\quad + N_3(q) (\delta_{\lambda+} \delta_{+\lambda'} - \delta_{\lambda-} \delta_{-\lambda'})) \end{aligned}$$

folgt schließlich:

$$\omega_P(S_i(q)) = (2\pi) |\vec{q}|^3 N_i(q)$$

### Thermale Eigenschaften

Zustände, die die Form der Funktionale  $\omega_P$  haben, sind im Allgemeinen nicht mehr  $\mathcal{S}_x$ -thermal, denn die thermalen Funktionen der Stokes-Parameter  $\mathcal{S}_i$  für  $i = 1, \dots, 3$  sind identisch 0. Eventuell definieren diese Funktionale Zustände, die auf der verkleinerten Observablenmenge  $\mathcal{R}_x$  thermal sind. Es gilt:

**Satz 6.3.3.** *Die Funktionale  $\omega_P$  sind auf den Observablen  $\mathcal{R}_x$  nicht von unpolarisierten Funktionalen der Form 5.4.2, die aus einer Gesamtphasenraumdichte rekonstruiert wurden, zu unterscheiden.*

**Beweis:** Aus der Relation

$$g_{\nu\tau} \overline{e^{\mu\nu}(p, \lambda)} e^{\sigma\tau}(p, \lambda') = -p_\mu p_\sigma \delta_{\lambda\lambda'}$$

folgt direkt über die Definition der  $P_i^{\mu\nu\sigma\tau}(p)$ :

$$\begin{aligned} g_{\nu\tau} P_i^{\mu\nu\sigma\tau}(p) &= 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \\ g_{\nu\tau} P_0^{\mu\nu\sigma\tau}(p) &= -N_0(p) p_\mu p_\sigma \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} g_{\nu\tau} P_S^{\mu\nu\sigma\tau}(p) &= \sum_i N_i(p) P_i^{\mu\nu\sigma\tau}(p) \\ &= 2N_0(p) p_\mu p_\sigma \\ &= -N_0(p) g_{\nu\tau} P^{\mu\nu\sigma\tau}(p) \end{aligned}$$

Damit haben die Funktionale nach Kontraktion der mittleren Indizes die selbe Form wie die Funktionale 5.4.2.  $\square$

## 6.4 Anisotrope Zustände

In diesem Abschnitt soll die Möglichkeit diskutiert werden,  $\mathcal{S}_0$ -thermale Zustände zu konstruieren, in denen ein Beobachter am Ursprung eine Strahlung feststellt, die abhängig von der Richtung variiert. Die Strahlung sollte dabei in jeder Richtung möglichst ein Planck-Spektrum haben. Solche Zustände sind deshalb interessant, weil mit ihnen möglicherweise die (sehr kleinen) Anisotropien des kosmischen Mikrowellenhintergrunds modelliert werden können.

Die frequenz- und richtungsabhängigen Intensitäten in einem  $\mathcal{S}_0$ -thermalen Zustand  $\omega$ , die ein Beobachter am Ursprung feststellt, sind:

$$p = (\nu, \nu\vec{e}) \mapsto \nu^3 \omega(N_p)(0) = \nu^3 \int d\rho(\beta) \omega_\beta(N_p)(0)$$

Zu finden ist also ein geeignetes Maß  $\rho(\beta)$ .

Einen Zusammenhang zu den Hot-Bang-Zuständen liefert dabei die folgende Beobachtung: Für jeden  $\mathcal{S}_x$ -thermalen Zustand  $\omega$  läßt sich ein Gemisch von translatierten Hot-Bang-Zuständen (zu einem fest Parameter  $\eta$ ) angeben, so daß  $\omega$  am Ort  $x$  auf den zulässigen Makroobservablen mit dem Gemisch übereinstimmt. Dazu transformiert man das Temperaturmaß eines Referenzzustandes über die Formel für die Temperaturverteilung  $\beta(x) = \eta(x - a)$  eines Hot-Bang-Zustands in ein Maß für die raumzeitliche Verschiebung dieser Zustände:

$$\omega(\Theta)(x) = \int d\rho(\beta) \omega_\beta(\Theta)(x) = \int d\rho(a) (\omega_{hb} \circ \alpha_a)(\Theta)(x)$$

Findet man also irgendeinen  $\mathcal{S}_x$ -thermalen Zustand mit den gewünschten Eigenschaften, dann findet man auch eine Überlagerung von Hot-Bang-Zuständen mit diesen Eigenschaften.

### 6.4.1 Das inverse Schwarzkörper-Problem

Wir betrachten erstmal das eindimensionale Problem der Rekonstruktion einer Temperaturverteilung aus dem Strahlungsspektrum. Dieses Problem führt auf folgende

Integraltransformation (hier ist  $\beta$  ein Skalar):

$$F(\nu) = \int_0^\infty d\beta \frac{f(\beta)}{e^{\beta\nu} - 1}$$

Diese Transformation wird auch als Planck-Transformation bezeichnet [PW34]. Die Gleichung ist eine Fredholm-Integralgleichung erster Art:

$$F(\nu) = \int d\beta k(\nu, \beta) f(\beta)$$

Mit dem Kern:

$$k(\nu, \beta) = \frac{1}{e^{\beta\nu} - 1}$$

Solche Gleichungen werden meist im Raum der  $L^2$ -Funktionen betrachtet. Eine Auflösung dieser Gleichung nach  $f$  bezeichnet man als inverses Problem. In diesem Fall existiert die Inverse und ist sogar eindeutig, hängt aber bezüglich der  $L^2$ -Norm nicht stetig von der Bildfunktion ab [SJ87]. Ein Problem, bei dem eine dieser drei Eigenschaften Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität (Unstetigkeit der Inversen) nicht erfüllt ist, heißt schlecht-gestellt [Gro93].

Um Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen, soll kurz eine analytische Lösung beschrieben werden. Diese Lösung findet sich in [PW34], entspricht aber auch im Wesentlichen einer Idee von [Buc]. Sie nützt dabei die Skaleninvarianz des Integrals aus und ist motiviert durch die Verwandtschaft der Planck-Transformation mit der Laplace-Transformation.

Wir gehen von der Gleichung

$$g(\nu) = \int_0^\infty d\beta f(\beta) \frac{\nu\beta}{e^{\nu\beta} - 1}$$

in  $L^2$  aus. Mit  $g$  ist auch  $g(e^\nu)e^{\nu/2}$  in  $L^2$ . Die Gleichung läßt sich umformen zu:

$$g(e^a)e^{a/2} = \int_{-\infty}^\infty db f(e^b)e^{b/2} \frac{e^{3(a+b)/2}}{e^{e^{a+b}} - 1}$$

Mit der Definition

$$F(u) \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_\epsilon^{\epsilon^{-1}} \Phi(x) x^{iu-1/2}$$

und durch Anwenden der Fouriertransformation auf diese Gleichung erhält man eine (nach Parseval in  $L^2$  äquivalente) Gleichung, die sich nun direkt durch Division invertieren läßt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^\infty da g(e^a)e^{a/2} e^{-iva} &= \int_{-\infty}^\infty db \frac{e^{b(3/2+iv)}}{e^{e^b} - 1} F(-v) \\ &= \Gamma(3/2 + iv) \zeta(3/2 + iv) F(-v) \end{aligned}$$

Dabei wurde die Identität

$$\int_0^\infty dx \frac{x^m}{e^x - 1} = \Gamma(m+1)\zeta(m+1)$$

benutzt.

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung der Lösung ergibt sich durch Anwenden der Mellin-Transformation

$$\mathcal{M}\{f\}(p) \doteq \int dx f(x)x^{p-1}$$

auf die Integralgleichung. Das resultierende Momenten-Problem ist dann natürlich ebenfalls ein schlecht-gestelltes Problem [SJ87].

Zu beachten ist allerdings, daß eine analytische Lösungen für die Anwendung auf experimentelle Daten nur bedingt geeignet sind. Für schlecht-gestellte Probleme ist eine exakte Invertierung meßfehlerbehafteter Funktionen oft nicht mehr möglich, oder die Inverse des Fehleranteils ergibt große unphysikalische Terme in der Lösung, die diese dann unbrauchbar machen. In der Praxis greift man deswegen meist auf numerische Methoden zurück, wobei gleichzeitig ein geeignetes Regularisierungsverfahren angewendet wird, daß dann gewisse Regularitätseigenschaften der Lösung garantiert [CB86].

#### 6.4.2 Das mehrdimensionale Problem

Wir machen noch ein paar Anmerkungen zum ursprünglichen mehrdimensionalen Problem. Hier geht es um die Rekonstruktion einer vierdimensionalen Temperaturverteilung. Dies ist ein integral-geometrisches Problem.

Ein Ansatzpunkt ist erstmal die Gesamtintensität mit der in jeder Richtung vorgegebenen Temperatur in Einklang zu bringen. Durch Integration der Intensität über alle Frequenzen erhält man

$$\int_0^\infty d\nu \int d\rho(\beta) \frac{\nu^3}{e^{\nu\beta e} - 1} = \Gamma(4)\zeta(4) \int d\rho(\beta) \frac{1}{(\beta e)^4}.$$

Ein erster Schritt ist also, (positive) Maße  $\rho(\beta)$  zu bestimmen, die der Bedingung

$$\int d\rho(\beta) \frac{1}{(\beta e)^4} = \frac{1}{T(\vec{e})^4}$$

genügen. Dabei ist  $T(\vec{e})$  die vorgegebene Temperaturverteilung. Aus der Forderung, daß das Spektrum in jeder Richtung nahe bei einer Planckverteilung liegen soll, ergeben sich dann weitere Bedingungen an das gesuchte Maß.

## Kapitel 7

# Kosmischer Mikrowellenhintergrund

Nachdem die zunehmende Rotverschiebung entfernter Galaxien (Hubble-Gesetz) auf eine Expansion des Universums hindeutete, wurde das kosmologische Modell eines heißen Urknalls entwickelt. Ein großer Erfolg dieses Modells war die Vorhersage des kosmischen Mikrowellenhintergrunds. Dieser stammt aus der Zeit, als das Universum ungefähr auf  $3000\text{ K}$  abgekühlt war, und die Anzahl der freien Elektronen so gering wurde, daß sich die Photonen nahezu wechselwirkungsfrei ausbreiten konnten. Aus dieser Zeit, die wegen ihrer kurzen Dauer als letzte Streuebene bezeichnet wird, liefert der kosmische Mikrowellenhintergrund deshalb eine Momentaufnahme.

Satelliten-Missionen der NASA wie COBE und WMAP bestätigen, daß das Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung sehr genau einer Planck-Verteilung mit einer Temperatur von  $T = 2,725(1)\text{ K}$  mit einer Dipolanisotropie mit Amplitude  $3,346(17)\text{ mK}$  entspricht. Zusätzlich wurden (erstmalig durch COBE) Anisotropien mit höherer Multipolordnung in der Größenordnung von  $10^{-5}\text{ K}$  entdeckt. Für einen Überblick über die experimentelle Lage sei auf [SS04] verwiesen.

Kosmologische Modelle mit kalter dunkler Materie und kosmologischer Konstante ( $\Lambda$ CDM-Modelle) sagen zusammen mit den experimentellen Daten des Mikrowellenhintergrunds ein Alter des Universums von  $13,7(2) \times 10^9$  Jahren [SLVK<sup>+</sup>03]. Viele andere Daten (die z.B. aus Theorien über die Entwicklung von Galaxien gewonnen werden) liefern ein Alter des Universums in ähnlichen Größenordnungen.

Wir wollen kurz die Vorhersagen dieser kosmologischen Modelle mit denen unseres einfachen Hot-Bang-Modells vergleichen.

Geht man von dem genannten Alter des Universums aus, läßt sich mit der aktuellen Temperatur der Hintergrundstrahlung der freie Parameter  $\eta$  in unseren Hot-Bang Zuständen bestimmen. In diesen Zuständen fällt die Temperatur der Hintergrundstrahlung für einen Beobachter, der sich relativ zum durch diese Strahlung ausge-

zeichneten Ruhesystem nicht bewegt, invers zu seiner Eigenzeit ab. Für  $\eta$  ergibt sich deshalb:

$$\eta = \frac{\beta_0}{t_0} = (2,725 \text{ K} \cdot 13,7 \times 10^9 \text{ Jahre})^{-1} = 2,7 \times 10^{-11} \text{ K}^{-1}/\text{Jahr}$$

Damit lassen sich einige einfache Vorhersagen machen. In 10 Jahren ist die Temperatur minimal abgefallen. Es ergibt sich:

$$1/(\eta \cdot (10 \text{ Jahre} + 13,7 \times 10^9 \text{ Jahre})) - 1/(\eta \cdot 13,7 \times 10^9 \text{ Jahre}) = -2 \times 10^{-9} \text{ K}$$

Eine direkte Messung der zeitlichen Änderungen der Temperatur der Hintergrundstrahlung ist momentan im Rahmen der Meßgenauigkeit sicherlich nicht möglich. Möglicherweise ergibt sich aber nach Weiterentwicklung der experimentellen Methoden eine Möglichkeit durch Differenzmessungen mit einem konstanten Referenzspektrum diese zeitliche Änderung in Langzeitexperimenten zu bestimmen.

Aus dem angenommenen Alter des Universums und der Temperatur der letzten Streuebene läßt sich deren Zeit im Hot-Bang-Modell bestimmen:

$$(\eta \cdot 3000 \text{ K})^{-1} = 1,24 \times 10^7 \text{ Jahre}$$

Die Standardmodelle sagen dagegen eine Zeit von  $3,8 \times 10^5$  Jahren voraus. Das spiegelt die Tatsache wieder, daß diese Modelle eine inflationäre Phase annehmen, in der sich das Universum stark ausgedehnt hat. In dieser Phase kühlt sich das Universum viel schneller ab als in unserem Hot-Bang-Modell. Der Zeitpunkt der Entkopplung der Photonen tritt in diesen Modellen dann entsprechend früher ein.

In [Bah04] wurde ein Zustand der Hot-Bang-Bauart für masselose Fermionen beschrieben, welcher dann mit Daten für den Neutrino-Hintergrund verglichen wurde (Neutrinos haben eine sehr kleine Masse). Dort wird die heutige Temperatur der Neutrinostrahlung mit  $1,95 \text{ K}$  und die Temperatur zur Zeit der Entkopplung mit  $1,158 \times 10^{10} \text{ K}$  angegeben. Damit ergibt sich für den Parameter  $\eta$  (entspricht bis auf einen Faktor 2 dem Parameter  $\lambda$  in [Bah04]) ein Wert von:

$$\eta = 3,7 \times 10^{-11} \text{ K}^1 \text{ Jahre}^{-1}$$

Die Entkopplungszeit ergibt sich dann zu <sup>1</sup>:

$$t_{\text{Entk.}} = 2,3 \text{ Jahre}$$

## 7.1 Dipol

Die auffallendste Anisotropie der Hintergrundstrahlung ist der Temperaturdipol mit  $3,346(17) \text{ mK}$ . Dieser wird als Dopplereffekt durch die Bewegung der Erde relativ

<sup>1</sup>Rechnet man mit einem Alter von  $15 \times 10^9$  Jahren, dann erhält man den Wert  $t_{\text{Entk.}} = 2,5$  Jahre. Die Diskrepanz zu dem in [Bah04] berechneten Wert von  $t_{\text{Entk.}} = 2650$  Jahren dürfte auf einen Rechenfehler zurückzuführen sein.



zum durch die Hintergrundstrahlung ausgezeichneten Ruhesystem interpretiert.

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{1}{\beta_0 - \beta_3} - \frac{1}{\beta_0 + \beta_3} \\ &= \frac{2\beta_3}{\beta^2}\end{aligned}$$

Mit  $\beta^2 = 1/(2,725K)^2$  ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}b_0 &= 0,36697 \\ b_3 &= 0,00045\end{aligned}$$

Und damit eine Geschwindigkeit

$$v = \frac{\beta_3}{c\beta_0} = 368 \text{ km.s}^{-1}.$$

## 7.2 Anisotropien höherer Ordnung

Neben dieser Dipolanisotropie findet man in der Hintergrundstrahlung Temperatur-Anisotropien in den Größenordnung von  $10^{-5}$  (Abb. 7.2). Man geht davon aus, daß sich die Fluktuationen physikalischer Größen zur Zeit der letzten Streuebene durch ein isotropes und homogenes Gauß-verteiltetes Zufallsfeld beschreiben lassen. Alle kosmologisch relevanten Daten sollten deshalb in der Zweipunktfunktion enthalten sein, welche die Korrelation der Temperatur zwischen zwei Punkten als Funktion des Zwischenwinkels beschreibt.

Entwickelt man die Temperaturverteilung nach Kugelflächenfunktionen

$$T(\theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

lassen sich unter den genannten Annahmen die Daten kompakt durch das Winkelleistungsspektrum beschreiben:

$$C_l \doteq \langle |a_{lm}|^2 \rangle$$

Die experimentellen Daten sind konsistent mit der Annahme, daß sie eine Realisierung eines solchen Gauß-Prozesses sind. Für niedrige Multipolordnungen stehen natürlich nur entsprechend wenige Daten zur Verfügung (z.B. für  $l = 1$  nur ein Meßwert), so daß hier eine große sogenannte kosmische Varianz herrscht. Ein typisches Winkelleistungsspektrum ist in Abbildung 7.2 dargestellt.

## 7.3 Robertson-Walker-Universum

Das Standard-Modell der Kosmologie beruht auf der Annahme einer homogenen und isotropen Verteilung der Materie auf großen räumlichen Skalen (kosmologische Prin-

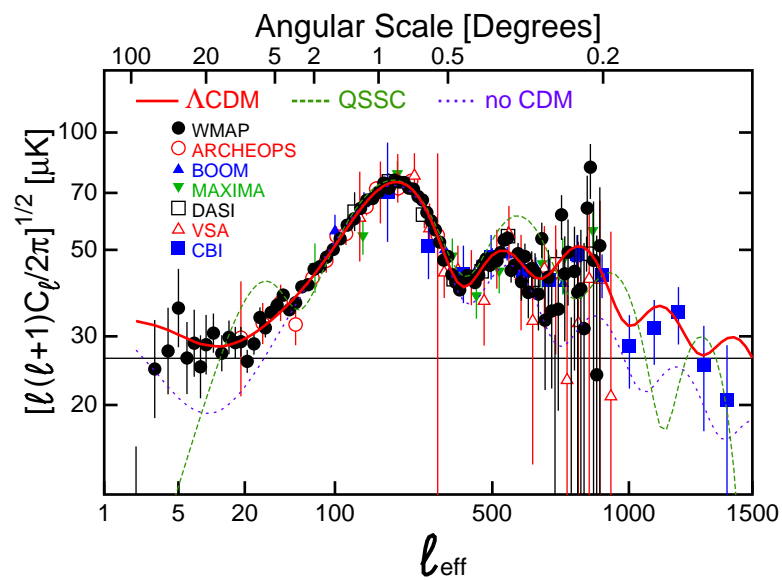


Abbildung 7.1: Winkelleistungsspektrum verschiedener Experimente und Vorhersagen theoretischer Modelle. Die Abbildung wurde aus [Wri03] entnommen.

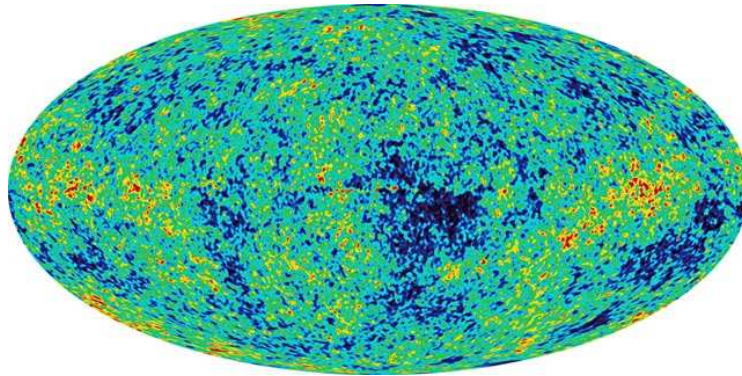


Abbildung 7.2: Anisotropien des kosmischen Mikrowellenhintergrunds. Das Bild wurde aus Daten der Wilkinson Microwave Anisotropy Probe der NASA gewonnen. <http://map.gsfc.nasa.gov/>

zip). Diese Annahme führt zusammen mit Annahmen über den Materie- und Strahlungsinhalt direkt zu speziellen Lösungen der Einstein-Gleichung. Die allgemeinste Metrik für einen homogenen und isotropen Raum ist die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik [HE]:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

Dabei beschreibt  $R(t)$  einen zeitabhängigen Skalierungsfaktor des Universums.  $K$  bestimmt, ob es sich um eine geschlossene (+1), offene (-1) oder räumlich flache (0) Geometrie handelt. Ein räumlich flaches Universum liegt genau dann vor, wenn die Dichte einen kritischen Wert annimmt  $\Omega \doteq \rho/\rho_c = 1$ .

Ein Robertson-Walker-Universum hat einen Grenzfall, der einem leeren  $\Omega = 0$  Universum entspricht, in dem der Raumanteil also negativ gekrümmt  $K = -1$  ist, und in der der Skalenfaktor linear mit der Zeit zunimmt. Die raumzeitliche Krümmung verschwindet in diesem Grenzfall. Durch einen Koordinatenwechsel lässt sich das Robertson-Walker-Metrik als Teil des Minkowskiraums darstellen und entspricht dann genau dem Inneren des Vorwärtslichtkegels. Bei der Expansion verändern sich Frequenz der elektromagnetischen Strahlung und damit die Temperatur einer Planckverteilung reziprok zum Skalenfaktor.

$$T \sim \frac{1}{R(t)}$$

Die Expansionsgeschwindigkeit lässt sich damit mit dem freien Parameter in  $\eta$  im Hot-Bang-Zustand identifizieren.

Allerdings ist das Universum nicht leer, experimentelle Daten deuten vielmehr auf ein Universum mit flachen Raum und einer Dichte nahe der kritischen Dichte  $\Omega \approx 1$  hin.



# Kapitel 8

## Zusammenfassung

Die Methoden von Buchholz, Ojima, Roos zur Charakterisierung von lokalen thermodynamischen Gleichgewichtszuständen wurden auf das freie elektromagnetische Feld angewendet.

Referenzzustände sind hier Gemische aus KMS-Zuständen mit kompakten Temperaturträgern. Im Unterschied zu dem masselosen neutralen Skalarfeld wurde auch eine nichtverschwindende Einpunktfunktion zugelassen.

Als thermale Observable wurden die balancierten Ableitungen und die Felder verwendet. Analog zum masselosen Boson bilden die zulässigen thermalen Observablen einen Unterraum, dessen Elemente gerade die glatten Lösungen der Wellengleichung sind. Dieser Unterraum enthält wichtige Makroobservablen wie den Energie-Impuls-Tensor, die totale Phasenraumdichte, etc.

Das elektromagnetische Feld hat pro Feldmode einen Freiheitsgrad, der der Polarisation entspricht. Wählt man als Menge der Vergleichs-Observablen alle balancierten Ableitungen, sind nur unpolarisierte Zustände thermal. Schränkt man die Vergleichs-Observablenmenge ein, indem über die Polarisation summiert wird, dann haben auch gewisse polarisierte Zustände eine lokale thermodynamische Interpretation.

Die Maxwellgleichungen führen zu Evolutionsgleichungen für die Makroobservablen und damit auch zu Transportgleichungen für die Phasenraumdichte. Für die zulässigen thermalen Observablen lassen sich in  $\mathcal{S}_O$ -thermalen Zuständen die Evolutionsgleichungen

$$\begin{aligned}\square\omega(\Xi)(x) &= 0 \\ \partial_\alpha\omega(\partial^\alpha\Xi)(x) &= 0 \\ \partial_{[\mu}\omega(\partial_{\nu]}\Xi)(x) &= 0\end{aligned}$$

etablieren. Die letzte Gleichung ist neu im Vergleich zum Modell des masselosen neutralen Skalarfeldes. Sie hängt damit zusammen, daß man in diesem Modell nicht

nur skalare Observablen hat. Verwendet man den Unterraum an lokalen thermalen Observablen, bei dem über die Polarisationsfreiheitsgrade summiert wurde, läßt sich diese Gleichung nicht mehr zeigen. Dasselbe gilt, wenn man die balancierten Ableitungen ungerader Ordnung wegläßt, deren thermalen Funktionen verschwinden.

Für Zustände mit scharfer Temperatur läßt sich zeigen, daß die Temperaturverteilung die Form  $\beta(x) = \eta x + c$  haben muß. Solche Zustände existieren auch und beschreiben für  $\eta \neq 0$  eine Hitzeexplosion. Das Gebiet, in dem diese Zustände  $\mathcal{S}_x$ -thermal sind, beschränkt sich dabei auf das Innere des Vorwärts- oder Rückwärtslichtkegels. Damit zeichnen diese Zustände eine Zeitrichtung aus.

Im letzten Kapitel wurden diese Hot-Bang-Zustände mit den experimentellen Daten über den kosmischen Mikrowellenhintergrund verglichen. Ein offen gebliebenes Problem dabei ist, wie gut sich durch Mischen von Hot-Bang-Zuständen die sehr kleinen Anisotropien der Hintergrund-Strahlung modellieren lassen.

Um einen direkten Vergleich mit aktuellen kosmologischen Modellen zu ermöglichen, wäre es interessant, die hier verwendeten Methoden auf gekrümmte Raumzeiten zu übertragen. Das Hauptproblem ist dabei, eine geeignete Menge von Referenzzuständen zu finden. Eine Möglichkeit dieses Problem zu überwinden ist das Prinzip lokaler Kovarianz [Fre04]. Damit wäre es eventuell möglich, Zustände von Quantenfeldern auf einer gekrümmten Raumzeit lokal mit Referenzzuständen auf dem Minkowskiraum zu vergleichen.

# Anhang A

## Konventionen

Die vierdimensionale Raumzeit wird beschrieben durch der  $\mathbb{R}^4$ , der mit der Minkowski-Metrik versehen wurde. Raumzeit-Indizes laufen von 0 bis 3 und werden mit griechischen Buchstaben notiert. Die nullte Komponente beschreibt dabei die Zeit. Wir benutzen die Einsteinsche-Summenkonvention:

$$a_\mu b^\mu \doteq \sum_{\mu,\nu=0,1,2,3} a_\mu b_\nu g^{\mu\nu}$$

Dabei ist  $g$  der metrische Tensor:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Die affine Invarianzgruppe der Metrik ist die Poincaré-Gruppe. Die lineare Untergruppe, die den Ursprung festhält, ist die Lorentzgruppe  $\Lambda$ :

$$(\Lambda a)_\mu (\Lambda b)^\mu = a_\mu b^\mu$$

In Matrixschreibweise:

$$(\Lambda a)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$$

Diese Transformationen bilden eine nicht-kompakte topologische Gruppe  $\mathcal{L}$ , die in vier Zusammenhangskomponenten zerfällt. Die Zusammenhangskomponente der Eins ist die eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ .

Die Poincarégruppe ist dann ein semidirektes Produkt aus den Translationen und der Lorentzgruppe. Ihre Elemente lassen sich schreiben als Paare  $(\Lambda, a)$  mit  $\Lambda \in \mathcal{L}$  und  $a \in \mathbb{R}^4$ . Die Wirkung eines solchen Paares auf einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^4$  ist dann definiert durch:

$$(\Lambda, a)x = \Lambda x + a$$

Grppengesetz und Inverses sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) &= (\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_2a_1 + a_2) \\ (\Lambda, a)^{-1} &= (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)\end{aligned}$$

Genauso wie die Lorentzgruppe zerfällt die Poincarégruppe in vier Zusammenhangskomponenten.

Als Fouriertransformation auf dem Minkowskiraum definieren wir:

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} dp e^{-ip_\mu x^\mu} f(x)$$

Als Rücktransformation erhält man dann:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} dx e^{+ip_\mu x^\mu} \hat{f}(p)$$

Eine Menge von Indizes fassen wir oft zu einem Multiindex zusammen:

$$\underline{\mu} \doteq \mu_1 \cdots \mu_n$$

Der Grad eines solchen Multiindex wird mit Betragsstrichen notiert:

$$|\underline{\mu}| \doteq n$$

Die Summation über Multiindizes entspricht in natürlicher Weise einer mehrfachen Summe über die Einzelindizes:

$$a_{\underline{\mu}} b^{\underline{\mu}} \doteq \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_n} a_{\mu_1 \cdots \mu_n} b^{\mu_1 \cdots \mu_n}$$



## Anhang B

# Weyl-Algebra

Die Feldalgebra des elektromagnetischen Feldes ist eine polynomiale  $\star$ -Algebra. Da Photonen Bosonen sind, die Algebra also den kanonischen Vertauschungsrelationen gehorcht, werden die Elemente dieser Algebra in einer Darstellung durch unbeschränkte Operatoren dargestellt wird.

Deswegen betrachtet man oft die Weyl-Algebra, die von den Elementen, die durch die Felder generierten unitären Gruppe erzeugt wird. Diese läßt sich als Algebra beschränkter Operatoren zu einer  $C^*$ -Algebra machen. In diesem mathematisch strengeren Rahmen hat man mehr mathematische Hilfsmittel zur Verfügung. So hat man z.B. nur auf normierten Algebren das Hahn-Banach-Theorem zur Verfügung, daß einen die Existenz der Fortsetzung eines Funktional garantiert. Der Übergang von einem Rahmen zu einem anderen ist nicht immer unproblematisch, ist aber im Rahmen dieser Arbeit nicht von Bedeutung. So werden analytische Zustände, auf der Weyl-Algebra gerade durch ihre  $n$ -Punktfunktionen auf den unbeschränkten Generatoren, den Feldern, charakterisiert. Unter diesen analytischen Zuständen sind insbesondere auch die quasifreien Zustände, die in der vorliegenden Arbeit als Bausteine dienen. Um einen Bezug herzustellen, soll der Zusammenhang zwischen Weyl-Algebra und den Feldern kurz skizziert werden. Für alle weiteren Fragen sei auf die Literatur verwiesen.

Sei  $\mathcal{H}$  ein komplexer Prä-Hilbertraum mit  $\dim \mathcal{H} = \infty$ . Zu den Elementen dieses Raumes definieren wir eine Familie von Operatoren  $W(f)$ , die die folgenden Relation erfüllen:

$$\begin{aligned}W(f)^\star &= W(-f) \\W(f)W(g) &= e^{-i\sigma(f,g)/2}W(f+g)\end{aligned}$$

Dabei ist  $\sigma(f, g)$  der Imaginärteil des Skalarprodukts. Dadurch wird eine  $\star$ -Algebra definiert, die sich eindeutig bis auf Isomorphie als eine Unter algebra der beschränkten Operatoren eines Hilbertraums darstellen läßt. Mit der Hilbertraumnorm wird diese Algebra dann zu einer  $C^*$ -Algebra, die als  $CCR(\mathcal{H}, \sigma)$ -Algebra bezeichnet wird.

Ein Zustand über der Algebra heißt regulär, falls  $\omega(W(\lambda f))$  für alle  $f$  stetig ist. Für diese Zustände sind in der GNS-Darstellung  $(\Omega_\omega, \pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$  die infinitesimalen Generatoren

$$W(\lambda f) = e^{i\lambda\phi(f)}$$

definiert.

Ein Zustand heißt analytisch, falls die Funktionen  $\lambda \mapsto \omega(W(\lambda f))$  analytisch in einer Umgebung des Ursprungs sind. Diese Zustände werden vollständig durch ihre Erwartungswerte auf den Felder  $\phi(f)$  bestimmt:

$$\omega(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n))$$

Eine spezielle Klasse dieser analytischen Vektoren sind die quasifreien Zustände, diese werden schon durch Ein- und Zweipunktfunktion vollständig beschrieben.

## Anhang C

# KMS-Zustände

Für eine gegebene Algebra liegt die Menge  $K_\beta$  der KMS-Zustände zu einer Automorphismen-Gruppe  $\alpha_t$  und einem Parameter  $\beta \in \mathbb{R}$  fest. Da Mischungen von KMS-Zuständen zu einem festen  $\beta$  wieder ein KMS-Zustand zu diesem  $\beta$  ist, ist die Menge konvex. Unter recht allgemeinen Bedingungen ist diese Menge ein Simplex, läßt sich also mittels makroskopischer Observablen in extremale Zustände zerlegen. Im Allgemeinen gilt folgender Satz [Haa96]:

**Satz C.0.1.** *Die primären KMS-Zustände sind gerade die extremalen Punkte von  $K_\beta$ . Die Zerlegung eines Zustands in extremale Punkte ist eindeutig.*

Das Auftreten mehrere KMS-Zustände zu einer festen Temperatur  $\beta$  hängt entweder mit der Existenz verschiedener Phasen zu diesem Parameterwert zusammen. In unserem Modell tritt dieser Effekt allerdings nicht auf. Die andere Möglichkeit ist spontane Symmetriebrechung. Gibt es einen Automorphismus  $\alpha_c$ , der mit den Zeittranslationen kommutiert, dann ist  $\omega_\beta \circ \alpha_c$  wieder ein KMS-Zustand zur selben Temperatur  $\beta$ . Gilt

$$\omega \circ \alpha \neq \omega$$

ist die entsprechende Symmetrie in dem Zustand gebrochen. Man hat also eine Vielzahl an KMS-Zuständen, und man ist interessiert daran, diese Zustände durch Zerlegung in extremale KMS-Zustände besser zu verstehen.

Wir interessieren uns jetzt für eine Zerlegung unsere KMS-Zustände in primäre Zustände, d.h. in Zustände, deren Zentrum in einer Darstellung trivial ist. Auf den in der Quantenfeldtheorie auftretenden quasilokalen Algebren lassen sich primäre Zustände durch eine Cluster-Eigenschaft klassifizieren. Es gilt:

**Satz C.0.2.** *Primäre Zustände haben die Cluster-Eigenschaft.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\omega(\alpha_x(A)B) - \omega(\alpha_x(A))\omega(B)| = 0$$

Mit diesem Wissen können wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

**Satz C.0.3.** *Die extremalen Punkte der Menge der KMS-Zustände des elektromagnetischen Feldes zu einer festen Temperatur sind quasifrei.*

**Beweis:** Allgemein gilt für c-Zahl-Kommutatoren:

$$\begin{aligned}\omega([A', B_1 \cdots B_n]) &= \sum_{i=1}^n \omega(B_1 \cdots B_{i-1} [A, B_i] B_{i+1} \cdots B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega([A', B_i]) \omega(B_1 \cdots B_{i-1} B_{i+1} \cdots B_n)\end{aligned}$$

Anwenden der fouriertransformierten KMS-Bedingung 3.5.5 mit  $A = A'$  und  $B = B_1 \cdots B_n$  auf die linke Seite liefert dann:

$$\begin{aligned}(1 - e^{-\beta\omega})\mathcal{F}\{\omega(A_t B_1 \cdots B_n)\} \\ = \sum_{i=1}^n (1 - e^{-\beta\omega})\mathcal{F}\{\omega(A_t B_i)\} \omega(B_1 \cdots B_{i-1} B_{i+1} \cdots B_n)\end{aligned}$$

Das heißt dann für die  $n + 1$ -Punktfunktion:

$$\omega(A_t B_1 \cdots B_n) = \sum_{i=1}^n \omega_T(A_t B_i) \omega(B_1 \cdots B_{i-1} B_{i+1} \cdots B_n) + C(\alpha_t(A) B_1 \cdots B_n)$$

dabei ist  $t \mapsto C(\alpha_t(A) B_1 \cdots B_n)$  konstant. Wir benützen jetzt die Cluster-Eigenschaft der extremalen Zustände. Es gilt dann:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\alpha_t(A) B_1 \cdots B_n) = \omega(A_t) \omega(B_1 \cdots B_n)$$

Daraus erhält man zusammen mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_T(A_t B_i) = 0$$

die folgende Gleichung:

$$C(AB_1 \cdots B_n) = \omega(A) \omega(B_1 \cdots B_n)$$

Insgesamt gilt also

$$\omega(A_1 B_1 \cdots B_n) = \sum_{i=1}^n \omega_T(A_t B_i) \omega(B_1 \cdots B_{i-1} B_{i+1} \cdots B_n) + \omega(A) \omega(B_1 \cdots B_n)$$

Ist nun die Behauptung schon für  $k \leq n$  bewiesen, dann erhält man für die  $n + 1$ -Funktion die Rekursionsbeziehung quasifreier Zustände. Für  $k = 1, 2$  haben wir sie schon im Kapitel 2 bewiesen. Durch Induktion folgt die Behauptung für alle  $n$ .  $\square$

Damit ist gezeigt, daß die extremalen Punkte der Menge der KMS-Zustände zu einer festen Temperatur quasifreie Zustände sind. Umgekehrt müssen wir noch zeigen, daß solche quasifreier Zustand auch die KMS-Bedingung erfüllt:

**Satz C.0.4.** *Ein durch Ein- und Zweipunktfunktion aus Satz 3.5.3 definierter quasifreier Zustand erfüllt die KMS-Bedingung.*

**Beweis:** Als quasifreier Zustand gilt die Zerlegung

$$\omega(\alpha_t(A_1 \cdots A_n)B_1 \cdots B_m) = \sum \prod \omega(X)$$

wobei  $X = A_i$ ,  $X = B_i$ ,  $X = \alpha_t(A_i)\alpha_t(A_j)$  mit  $i < j$ ,  $X = B_iB_j$  mit  $i < j$  oder  $X = \alpha(A_i)B_j$  mit  $i, j$  beliebig ist. Zu zeigen ist nun die fouriertransformierte KMS-Bedingung:

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ \omega(\alpha_t(A_1 \cdots A_n)B_1 \cdots B_m) \} = e^{-\beta\omega} \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ \omega(B_1 \cdots B_m \alpha_t(A_1 \cdots A_n)) \}$$

Aus der Fouriertransformation kann man alle Einpunktfunktionen, alle Paare mit  $\omega(B_iB_j)$  und wegen  $\omega = \omega \circ \alpha_t$  auch alle Paare mit  $\omega(\alpha_t(A_i)A_j)$  als Konstanten herausziehen. Es bleiben nur Paare mit  $\omega(\alpha_t(A_i)B_j)$  übrig und damit ist nur die Gleichheit von

$$\begin{aligned} & \sum \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ \omega(\alpha_t(A_i)B_j) \cdots \omega(\alpha_t(A_l)B_j) \} \\ & = e^{-\beta\omega} \sum \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ \omega(B_j \alpha_t(A_i)) \cdots \omega(B_j \alpha_t(A_l)) \} \end{aligned}$$

zu zeigen. Diese folgt jetzt aber aus der Gültigkeit der KMS-Bedingung für die Zweipunktfunktion, dem Faltungssatz und der Eigenschaft

$$\left( e^{-\beta\omega} \hat{f}(\omega) \right) \star \left( e^{-\beta\omega} \hat{g}(\omega) \right) \star = e^{-\beta\omega} (\hat{f} \star \hat{g})(\omega)$$

des Faltungsproduktes. □

Die wichtigsten Ergebnisse zur zentralen Zerlegung von KMS-Zuständen sind in [Haa96] zusammengefaßt. Die allgemeine Theorie zur Zerlegung von Zuständen ist in [BR86] dargestellt, die Anwendung auf KMS-Zustände idealer Quantengase findet sich in [BR96]. Zur Zerlegung von Zuständen im Rahmen von topologischen  $\star$ -Algebren unbeschränkter Operatoren siehe [Sch90] und [BY75].



# Anhang D

## Symbole

$p$	4er-Vektor
$\vec{p}$	3er-Vektor
$\underline{p} = ( \vec{p} , \vec{p})$	lichtartig erweiterter Vektor
$\underline{A}$	Algebra
$\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$	Algebra zu einem offenen Gebiet
$\mathcal{H}$	Hilbertraum
$\mathcal{D}$	dichter Unterraum, Definitionsbereich
$Op(\mathcal{D})$	Algebra unbeschränkter Operatoren (gemeinsamer Definitionsbereich)
$V^+$	das Innere des Vorwärtslichtkegels
$\underline{\mu}$	Multiindex
$\underline{\mu\nu}$	erweiterter Multiindex
$ \underline{\mu} $	Ordnung des Multiindex
$:A:$	Wick-Ordnung
$\beta$	inverser Temperaturvektor
$\omega$	Zustand
$\omega_\beta$	KMS-Zustand zu inversen Temperatur $\beta$
$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$	Antisymmetrisierung
$\epsilon(x)$	Vorzeichenfunktion
$\delta(x)$	Delta-Distribution
$\Theta(x)$	Stufenfunktion
$\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$	total antisymmetrischer Tensor
$\zeta(x)$	Riemannsches $\zeta$ -Funktion
$\bar{\partial}$	Balancierte Ableitung
$F^{\mu\nu}$	Feldstärketensor
$(\star F)^{\mu\nu}$	dualer Feldstärketensor
$\mathcal{S}_x$	Raum thermaler Observablen am Punkt $x$
$\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$	Raum thermaler Observablen im Gebiet $\mathcal{O}$
$\rho(\beta)$	Temperaturmaß
$\theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(x)$	balancierte Ableitungen
$\Theta^{\mu\nu\sigma\tau, \underline{\rho}}(\beta)$	thermale Funktionen der balancierten Ableitungen
$\Xi$	zulässige thermale Observable

$\mathcal{R}_x$	verkleinerter Raum thermaler Observablen
$\mathcal{C}$	Menge der Referenzzustände
$T^{\mu\nu}$	Energie-Impuls-Tensor
$S^\mu$	Entropiestromdichte
$N_p(x)$	totale Phasenraumdichte
$\Gamma_p$	Raum der thermalen Observablen zum Impuls $p$



# Literaturverzeichnis

- [Bah04]     BAHR, B.: *Lokale Gleichgewichtszustände masseloser Fermionen*. Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik, Universität Göttingen, 2004
- [BLOT90]   BOGOLUBOV, N.N. ; LOGUNOV, A.A. ; OKSAK, A.I. ; TODOROV, I.T.: *General Principles of Quantum Field Theory*. English edition. London : Kluwer Academic Publishers, 1990
- [BOR01]    BUCHHOLZ, D. ; OJIMA, I. ; ROOS, H.: Thermodynamic Properties of Non-equilibrium States in Quantum Field Theory. In: *Annals of Physics* (2001)
- [BR86]     BRATTELI, O. ; ROBINSON, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*. Second. Berlin : Springer, 1986
- [BR96]     BRATTELI, O. ; ROBINSON, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2*. Second. Berlin : Springer, 1996
- [Buc]       BUCHHOLZ, D.: *persönliche Mitteilung*
- [Buc03]    BUCHHOLZ, D.: On Hot Bangs and the Arrow of Time in Relativistic Quantum Field Theory. In: *Commun. Math. Phys.* (2003), S. 237:271–288
- [BW92]     BAUMGÄRTEL, H. ; WOLLENBERG, M.: *Causal Nets of Operator Algebras*. Berlin : Akademie Verlag, 1992
- [BY75]     BORCHERS, H.J. ; YNGVASON, J.: On the algebra of field operators. The weak commutant and integral decomposition of states. In: *Commun. Math. Phys.* 42 (1975), S. 231–25
- [CB86]     CRAIG, I.J.D. ; BROWN, J.C.: *Inverse Problems in Astronomy*. Bristol : Adam Hilger Ltd, 1986
- [Dix78]    DIXON, W.G.: *Special Relativity*. Cambridge : Cambridge University Press, 1978
- [Fre99]    FREDENHAGEN, K.: *Skript zur Vorlesung: Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit*. Universität Hamburg, Sommersemester 1999

- [Fre01] FREDENHAGEN, K.: *Skript zur Vorlesung: Quantenfeldtheorie*. Universität Hamburg, Wintersemester 2000/2001
- [Fre04] FREDENHAGEN, K.: Locally covariant quantum field theory. In: *arXiv: hep-ph/0403007* (2004)
- [Gro93] GROETSCH, C.W.: *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1993
- [Haa96] HAAG, R.: *Local Quantum Physics*. Second. Springer, 1996
- [HE] HAWKING ; ELLIS: *The Large Scale Structure Of The Universe*
- [HHW67] HAAG, R. ; HUGENHOLTZ, N.M. ; WINNINK, M.: On the equilibrium states in quantum statistical mechanics. In: *Commun. Math. Phys.* 5 (1967), S. 215
- [Jac99] JACKSON, John D.: *Classical Electrodynamics*. Third. John Wiley and Sons, Inc., 1999
- [JR76] JAUCH, J.M. ; ROHRlich, F.: *The Theory of Photons and Electrons*. Second. Springer, 1976
- [Oji86] OJIMA, I.: Lorentz invariance vs. temperature in QFT. In: *Lett. Math. Phys.* 11 (1986), S. 73–80
- [Poh69] POHLMAYER, K.: The Jost-Schroer theorem for zero-mass fields. In: *Commun. Math. Phys.* (1969), S. 12:204–211
- [PW34] PALEY, R.E.A.C. ; WIENER, N.: Fourier Transforms in the Complex Domain. In: *Am. Math. Soc. Colloquium Publications Vol. XIX* (1934)
- [Sch90] SCHMÜDGEN, Konrad: *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*. first. Berlin : Akademie Verlag, 1990
- [Sch00] SCHWABL, F.: *Statistische Mechanik*. Berlin : Springer, 2000
- [SJ87] SUN, X. ; JAGGARD, D.L.: The inverse black body radiation problem: a regularized solution. In: *Journal of Applied Physics* 62 (No.11) (1987), S. 4382–4386
- [SLVK<sup>+</sup>03] SPERGEL, D. N. ; L. VERDE, H. V. P. ; KOMATSU, E. ; NOLTA, M. R. ; BENNETT, C. L. ; HALPERN, M. ; HINSHAW, G. ; JAROSIK, N. ; A. KOGUT, M. L. ; MEYER, S. S. ; PAGE, L. ; TUCKER, G. S. ; WEILAND, J. L. ; WOLLACK, E. ; WRIGHT, E. L.: First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. In: *arXiv: astro-ph/0302209* (2003)
- [SS04] SCOTT, D. ; SMOOT, G.F.: Cosmic background radiation mini-review. In: *arXiv: astro-ph/0406567* (2004)
- [SU01] SEXL, R. U. ; URBANTKE, H. K.: *Relativity, Groups, Particles*. Wien : Springer, 2001

- 
- [SW64] STREATER, R.F. ; WIGHTMAN, A.S.: *PCT, Spin and Statistics, And All That*. New York : W.A. Benjamin, INC., 1964
- [Wri03] WRIGHT, E.L.: WMAP First Year Results. In: *arXiv: astro-ph/0306132* (2003)



# Danksagung

Bedanken möchte ich mich bei Professor Buchholz für die Themenstellung und die vielen Freitags-Diskussionen, bei Professor Rehren, der sich freundlicherweise dazu bereit erklärt hat, das Zweitgutachten zu erstellen, bei den Doktoranden und Diplomanden in der Arbeitsgruppe für die Kickerrunden und Diskussionen über Physik, Politik und Philosophie und bei allen anderen Mitgliedern des Instituts, die sich immer sehr hilfsbereit gezeigt haben.