INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
GEORG AUGUST UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Produkt von Superauswahlsektoren des chiralen Energie-Impuls-Tensors mit $c = 1$

Diplomarbeit

vorgelegt von

Hilmar R. Tuneke
aus Soest

22. März 2000

Bunsenstraße 9
D-37073 Göttingen, Germany

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

1.1 Aufbau der Arbeit 6

2 Theoretischer Rahmen und Hilfsmittel **7**

2.1 Konforme Quantenfeldtheorie 7

2.1.1 Der kanonische Energie-Impuls-Tensor 8

2.1.2 Die Virasoro-Algebra 10

2.1.3 Innere Symmetrien 12

2.1.4 Weitere Energie-Impuls-Tensoren 16

2.2 Algebraische Quantenfeldtheorie 18

2.3 DHR-Theorie der Superauswahlsektoren 20

2.4 Das Produkt von Zuständen 22

2.4.1 Definition der positiven Abbildungen 22

2.4.2 GNS-Konstruktion und das Produkt von Zuständen 25

2.4.3 Fusionsregeln 27

2.4.4 Konjugation 29

2.5 Produkt von Zuständen am Beispiel SO(2) 30

3 Das Modell der SU(2) **33**

3.1 Sektoren der Algebren 35

3.2 Zustände auf $\mathcal{A}$ 36

3.3 Spezielle Eichtransformationen 43

3.4 Sektoren der Zustände 45

3.5 Fusionsregeln 45

3.6 Die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ 51

3.7 Beispiele 58

3.7.1 Das Programm 58

3.7.2 $q_1 = 0$ 60

3.7.3 $q_1 = \frac{1}{2}$ 61

3.7.4 $q_1 = 1$ 61

3.7.5 $q_1 = \frac{3}{2}$ 61

3.7.6 $q_1 = 2$ 61

3.8 Asymptotische Lokalisiertheit 63

4 Abschliessende Bemerkungen **67**

Kapitel 1

Einleitung

In der Quantentheorie werden die an einem physikalischen System messbaren Größen, die Observablen, durch selbstadjungierte Operatoren beschrieben. Diese erzeugen eine Algebra, die sogenannte Observablenalgebra.

Ein Theorem von v. Neumann besagt, dass es für die Observablenalgebra eines quantenmechanischen Systems, also eines Systems mit endlich vielen Freiheitsgraden, im Wesentlichen nur eine Darstellung gibt. In dieser Darstellung können alle verschiedenen Zustände eines zu untersuchenden physikalischen Systems beschrieben werden.

Dieses Theorem gilt jedoch nicht mehr in der Quantenfeldtheorie, der Quantentheorie unendlich vieler Freiheitsgrade, die man zum Beispiel in einer speziell-relativistischen Quantentheorie, mit der Elementarteilchen beschrieben werden, notwendig vorliegen hat. In der Quantenfeldtheorie gibt es deshalb im Allgemeinen sehr viele inäquivalente Darstellungen einer Observablenalgebra, die sogenannten Superauswahlsektoren. Physikalisch wird diese rein mathematische Erkenntnis dadurch gedeutet, dass die Superauswahlsektoren verallgemeinerte Ladungen sind: Da die Gesamtladung des Zustandes eines physikalischen Systems erhalten ist, können zwei Zustände mit unterschiedlicher Gesamtladung nicht ineinander überführt werden, das heißt die beiden Zustände müssen in inäquivalenten Darstellungen der zu diesem System gehörenden Observablenalgebra beschrieben werden. Die Systeme liegen in unterschiedlichen Superauswahlsektoren.

Es gibt eine konzeptionelle Definition des Produktes von Superauswahlsektoren, das dem Kompositionsgesetz für verallgemeinerte Ladungen entspricht. Diese Definition ist jedoch sehr abstrakt, weshalb im Allgemeinen die Fusionsregeln, die angeben, wie das Produkt von Superauswahlsektoren durch eine Summe ausgedrückt werden kann, praktisch schwer zu berechnen sind.

Wir berechnen im Folgenden die Fusionsregeln für ein spezielles Modell mit einer SU(2)-Symmetrie. Hierbei benutzen wir einerseits spezifische Eigenschaften der Lie-Gruppe SU(2). Andererseits liefert diese Symmetrie eine Verbindung zur

Konformen Quantenfeldtheorie, die in unseren Rechnungen eine überaus wichtige Rolle spielt.

1.1 Aufbau der Arbeit

Im Kapitel 2 stellen wir kurz den Rahmen dieser Arbeit vor. Wir führen die von uns verwendete Notation ein, definieren die im weiteren benutzten Begriffe und zitieren die benötigten Sätze.

Wir beginnen mit einem Abschnitt über die Konforme Quantenfeldtheorie mit einem Unterabschnitt über die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra. Diese Algebra stellt eine konkrete Realisierung der Theorie der Superauswahlsektoren in der Konformen Quantenfeldtheorie dar. Der folgende Abschnitt „Algebraische Quantenfeldtheorie“ ermöglicht die anschliessende Einführung in die DHR-Theorie der Superauswahlsektoren. Um die Probleme, die sich bei der konkreten Rechnung mit den abstrakten Definitionen aus der Theorie der Superauswahlsektoren ergeben, umgehen zu können, benutzen wir das Produkt von Zuständen nach Fredenhagen. Dieses führen wir in Abschnitt 2.4 ein, und wir geben ein Beispiel für seine Anwendung am Ende des zweiten Kapitels.

Das nächste Kapitel beginnen wir mit einer Spezialisierung der vorgestellten Konzepte und Erkenntnisse auf unseren Fall der SU(2)-Symmetrie. Im Abschnitt 3.2 erläutern wir zunächst das im Zusammenhang mit der abstrakten Definition des Produktes von Superauswahlsektoren in unserem konkreten Modell auftretende Problem, um dieses dann schliesslich unter Benutzung des Produktes von Zuständen zu umgehen und das Produkt zweier Superauswahlsektoren nach unten durch eine kontinuierliche direkte Summe abzuschätzen. Um diese zu berechnen, wählen wir spezielle Symmetrietransformationen aus, die jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeuten. Wir identifizieren die dazugehörenden Superauswahlsektoren in Abschnitt 3.4 und können damit die in der kontinuierlichen direkten Summe auftretenden Darstellungen in eine endliche direkte Summme von Darstellungen zerlegen, die erstaunlicherweise nicht von der Integrationsvariable abhängen und deren Superauswahlsektoren wir in Abschnitt 3.6 bestimmen können. Schließlich geben wir einige Beispiele für die von uns berechneten Fusionsregeln an. Abschliessend untersuchen wir die Auswirkungen des Fehlens einer technischen Voraussetzung für die von uns gewählten speziellen Symmetrietransformationen auf unser Ergebnis.

Kapitel 2

Theoretischer Rahmen und Hilfsmittel

In diesem Kapitel führen wir kurz in den theoretischen Rahmen dieser Diplomarbeit ein und stellen verwendete Hilfsmittel vor.

2.1 Konforme Quantenfeldtheorie

In masselosen $1+1$-dimensionalen Quantenfeldtheorien gibt es Wightman-Felder [SW78] Ψ, die in eine Summe $\Psi(x^0, x^1) = \psi_+(x^0 + x^1) + \psi_-(x^0 - x^1)$ zerlegt werden können, wobei die Felder ψ_+ und ψ_- (anti-)vertauschen: $[\psi_+, \psi_-]_\pm = 0$ und nur von jeweils einer Lichtkegelkoordinaten $x^0 + x^1$ oder $x^0 - x^1$ abhängen. Die Felder $\psi_\pm$ leben nur auf dem Lichtstrahl und heißen chirale Felder. Falls sich alle Felder einer Theorie derart zerlegen lassen, entkoppelt eine solche Theorie also in zwei chirale Theorien. Beispiele hierfür sind das masselose freie Dirac-Feld und sein erhaltener Strom.

Ein Feld ϕ heißt skaleninvariant mit Skalendimension d, wenn seine n-Punkt-Funktionen $W^{(n)}$ die Bedingung

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_{>0} : W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \lambda^{nd} W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

erfüllen. Insbesondere werden dann durch

$$\begin{aligned} U(\lambda)\Omega_0 &:= \Omega_0 \quad \text{und} \\ U(\lambda)\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\Omega_0 &:= \lambda^{nd}\phi(\lambda x_1)\dots\phi(\lambda x_n)\Omega_0 \end{aligned}$$

unitäre Operatoren $U(\lambda)$ auf der Vakuumdarstellung zum Vakuumvektor Ω_0 definiert, die die Skalentransformationen implementieren:

$$U(\lambda)\phi(x)U(\lambda)^* = \lambda^d \phi(\lambda x) \ .$$

Anhand der Zweipunktfunktion des chiralen Fermi-Feldes

$$W^{(2)}(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\searrow 0}(ix-iy+\epsilon)^{-1}$$

kann man nachrechnen, dass dieses skaleninvariant ist mit Skalendimension $\frac{1}{2}$.

2.1.1 Der kanonische Energie-Impuls-Tensor

Es gilt das

Theorem 2.1 (Lüscher-Mack [LM76, Mac87]). *Es sei $T^{\mu\nu}$ ein symmetrisches, erhaltenes Tensorfeld einer skaleninvarianten Quantenfeldtheorie in 1+1 Dimensionen, sodass $\int_{\boldsymbol{R}} T^{\mu 0}dx^1$ die Translationen erzeugen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *$T^{\mu\nu}$ hat die Skalendimension 2.*

2. *$T^{\mu\nu}$ ist spurfrei.*

3. *Die Felder $T_\pm(x^0 \pm x^1) := T^{00}(x^0,x^1) \mp T^{01}(x^0,x^1)$ vertauschen miteinander und sind chirale, skaleninvariante Felder der Skalendimension 2.*

4. *Die Felder $T_\pm$ erfüllen die Vertauschungsrelationen*

$$i[T_\pm(x),T_\pm(y)] = T'_\pm(y)\delta(x-y) - 2T_\pm(y)\delta'(x-y) + \frac{c}{24\pi}\delta'''(x-y)$$

mit einer Konstanten $c \geq 0$.

Ein solcher Operator $T^{\mu\nu}$ und auch seine chiralen Anteile $T_\pm$ heißen Energie-Impuls-Tensor mit zentraler Ladung c. Im Folgenden sei T stets ein chiraler Anteil des Tensorfeldes $T^{\mu\nu}$, also entweder $T = T_+$ oder $T = T_-$.

Satz 2.2 ([MS72]). *Die Operatoren $P := \int_{\boldsymbol{R}} T(x)dx$, $D := \int_{\boldsymbol{R}} xT(x)dx$ und $K := \int_{\boldsymbol{R}} x^2T(x)dx$ vernichten den Vakuumvektor und erzeugen eine unitäre Darstellung U der Möbius-Gruppe $SL(2,\boldsymbol{R})/\boldsymbol{Z}_2$, sodass für ein Gruppenelement $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\boldsymbol{R})$ gilt:*

$$\begin{aligned} U(g)\Omega_0 &= \Omega_0 \\ U(g)T(x)U(g)^* &= (cx+d)^{-4}\; T\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right), \end{aligned}$$

wobei g und $-g$ miteinander identifiziert werden.

Diese Transformationen sind für gewisse Elemente der Möbius-Gruppe singulär, und sie können in der ursprünglichen Theorie im Minkowski-Raum zeitartige Punkte in raumartige Punkte überführen. Dieses Problem kann man lösen, indem man den Minkowski-Raum kompaktifiziert: Ein Punkt $x = x^0 \pm x^1$ wird mittels einer Cayley-Transformation auf den Punkt $z = \frac{1+ix}{1-ix}$ des Einheitskreises abgebildet. Der Einheitskreis wird überlagert, sodass schließlich die Überlagerungsgruppe der Möbius-Gruppe dargestellt wird und die chiralen Felder dann auf dem überlagerten Einheitskreis definiert sind. Lokale chirale Felder sind jedoch periodisch, und ihr Definitionsbereich kann wieder auf den Einheitskreis eingeschränkt werden.

Die Forderung der konformen Kovarianz an die Zweipunktfunktionen eines lokalen Feldes schränkt die möglichen Skalendimensionen dieses Feldes auf die natürlichen Zahlen ein. Der Testfunktionenraum für lokale chirale Felder mit Skalendimension d kann ebenfalls erweitert werden, und zwar auf die glatten Funktionen auf dem Einheitskreis, welche denjenigen glatten Funktionen auf den reellen Zahlen entsprechen, die im Unendlichen höchstens wie x^{d-1} anwachsen und für die $x^{1-d}f(x)$ bei $x \to +\infty$ denselben endlichen Grenzwert annimmt wie bei $x \to -\infty$. Denn einer solchen zulässigen Testfunktion f auf den reellen Zahlen entspricht die glatte Funktion

$$\tilde{f} : \mathrm{S}^1 \to \mathbf{C},\ z \mapsto \left(-\frac{i}{2}(1 - ix(z))^2\right)^{1-d} f(x(z))$$

mit $x(z) := i\frac{1-z}{1+z}$, die damit eine zulässige Testfunktion auf dem Einheitskreis ist. Die Funktionen dieses erweiterten Testfunktionenraumes heißen zulässige Testfunktionen.

Die obige Beziehung zwischen den Testfunktionen auf der reellen Achse f und denen auf dem Einheitskreis $\tilde{f}$ rührt von der chiralen Kompaktifizierung eines Feldes ϕ mit Skalendimension d mittels $\tilde{\phi}(z) := \left(\frac{dx}{dz}\right)^d \phi(x(z))$, $x = i\frac{1-z}{1+z}$, her. Denn hieraus folgt für die Testfunktionen:

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \int\limits_{\mathbf{R}} \phi(x) f(x) dx \\ &= \int\limits_{\mathrm{S}^1} \tilde{\phi}(z) \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-d} f(x(z)) dz \\ &= \tilde{\phi}(\tilde{f})\ .\end{aligned}$$

Zum Beispiel erfüllt der Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} := \frac{i}{2} {:}\overline{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \Psi{:} \tag{2.1}$$

des komplexen Fermi-Feldes Ψ die Voraussetzungen des obigen Theorems 2.1. In diesem Fall ist die freie Konstante $c = 1$. Auch die chiralen Anteile des Feldes Ψ

transformieren sich wie oben angegeben bei Adjunktion mit $U(g)$. Die n-Punkt-Funktionen des Feldes Ψ sind kovariant unter der Möbius-Gruppe.

2.1.2 Die Virasoro-Algebra

Definition 2.3. *Für $d \in \boldsymbol{R}_{>0}$ und $n \in \boldsymbol{R}$ definieren wir die Funktionen*

$$f_n^{(d)} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C},\ x \mapsto (1+ix)^{d-1+n}(1-ix)^{d-1-n}\ .$$

Hierbei ist die Exponentiation einer komplexen Zahl mit Hilfe des Logarithmus wohldefiniert, da wir wegen $1 \pm ix \notin \boldsymbol{R}_{\leq 0}$ als Definitionsbereich des Logarithmus die Menge $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}_{\leq 0}$ wählen können.

Die Funktionen $f_n^{(d)}$ sind zulässige Testfunktionen für chirale Felder mit Skalendimension d. Da der Energie-Impuls-Tensor T die Skalendimension 2 hat, können wir für ganze Zahlen $n \in \mathbf{Z}$ die Operatoren

$$L_n := \frac{1}{2} T(f_n^{(2)})$$

definieren. Man kann folgende Identitäten nachrechnen:

Satz 2.4 ([LM76, Mac87]).

1. $L_n^* = L_{-n}$
2. $L_0 = \frac{1}{2}(P+K)$
3. $L_{\pm 1} = \frac{1}{2}(P-K) \pm iD$
4. $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m,-n}$

Neben den Operatoren P, D und K erzeugen also auch die Operatoren L_0 und $L_{\pm 1}$ die Möbius-Gruppe. Die Algebra, die von den Operatoren L_n erzeugt wird, heißt Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung c.

Wir interessieren uns aus physikalischen Gründen nur für Darstellungen positiver Energie. In diesen sind die Operatoren P und — wegen der Identitäten

$$\begin{aligned} U\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\ P\, U\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} &= K \text{ und} \\ L_0 &= \frac{1}{2}(P+K) \end{aligned}$$

— auch K und L_0 positiv dargestellt. Die unitären, irreduziblen Darstellungen der Virasoro-Algebra, in denen der Operator L_0 positiv ist, sind vollständig klassifiziert ([FQS86] und Referenzen dort). Sie werden für gegebene zentrale Ladung c durch eine reelle, nicht-negative Zahl $h \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ indiziert, an die für $0 < c < 1$

weitere Einschränkungen gemacht werden müssen. Die Darstellungsräume werden aus den Verma-Moduln

$$V_h := \bigoplus_{k \in \mathbf{N}_0} V_h^{(k)}$$

durch Herausteilen der Nullvektoren konstruiert, wobei die Räume $V_h^{(k)}$ die Eigenräume des Operators L_0 zum Eigenwert $k + h$ sind:

$$V_h^{(k)} := \mathrm{Span}\left\{ L_{-n_1} \dots L_{-n_r} |h\rangle : n_1 \geq \dots \geq n_r > 0, \sum n_i = k \right\} .$$

Der Vektor $|h\rangle$ ist also der Grundzustandsvektor zum Eigenwert h bezüglich L_0. Die Skalarprodukte dieser Basisvektoren sind durch die Vertauschungsrelationen der Operatoren L_n und die Identität $L_n^* = L_{-n}$ eindeutig fixiert und definieren, mit den oben erwähnten Einschränkungen an die Werte für h im Fall $c < 1$, einen Prä-Hilbertraum, der für $c > 1$ ein echter Hilbertraum ist. Im Falle $c = 1$ enthalten die Verma-Moduln V_h nur für $h \in (\frac{1}{2}N_0)^2$ Nullvektoren.

Für eine Darstellung π_h der Virasoro-Algebra gibt der Charakter $\chi_h(t) := \mathrm{Sp}_{\pi_h}(t^{L_0})$ Auskunft über das Spektrum des Operators L_0 und die Entartung der Eigenwerte: Da das Spektrum des Operators L_0 diskret ist, kann der Charakter $\chi_h(t)$ als formale Potenzreihe mit Summanden der Form $i_n t^n$ geschrieben werden. Die Menge aller in dieser Reihe auftretenden Exponenten n ist das Spektrum, und der Koeffizient i_n gibt die Entartung des Eigenwertes n an.

Die Charaktere divergieren für $t \nearrow 1$, da der Operator L_0 unbeschränkt ist. Es gibt jedoch Darstellungen π_h, für die die asymptotische Dimension

$$d_{\mathrm{as}}(\pi_h) := \lim_{t \nearrow 1} \frac{\chi_h(t)}{\chi_0(t)}$$

endlich ist. Bei zentraler Ladung $c = 1$ gilt für die Charaktere [Kac79]:

$$\chi_h(t) = \begin{cases} t^h(1 - t^{2s+1})p(t) & \text{falls } h = s^2 \text{ und } s \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0 \\ t^h p(t) & \text{sonst ,} \end{cases} \tag{2.2}$$

wobei $p(t) := \prod_{n=1}^{\infty}(1 - t^n)^{-1}$ die kombinatorische Zustandssumme ist. Die Ursache für den zusätzlichen Faktor bei $h \in (\frac{1}{2}\mathbf{N}_0)^2$ sind die oben erwähnten linearen Abhängigkeiten zwischen den Elementen der Eigenräume $V_h^{(k)}$, die nur bei diesen speziellen Werten von h auftreten.

Aus Formel (2.2) folgt sofort für die statistische Dimension einer Darstellung π_h der Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c = 1$:

$$d_{\mathrm{as}}(\pi_h) = \begin{cases} 2s + 1 & \text{falls } h = s^2 \text{ und } s \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0 \\ \infty & \text{sonst .} \end{cases}$$

2.1.3 Innere Symmetrien

Die Algebra $\mathcal{F}$ sei die von den N chiralen, komplexen, freien Fermi-Feldern $\psi_1, \dots, \psi_N$ erzeugte CAR-Feldalgebra mit den Antivertauschungsrelationen

$$\forall i, j \in \mathbf{N}_{\leq N} : [\psi_i(x), \psi_j^*(y)]_+ = \delta_{i,j}\, \delta(x-y) \; .$$

Eine lokale Eichtransformation $\gamma : \mathbf{R} \to \mathrm{SU(N)}$ induziert einen Automorphismus α_γ auf der CAR-Feldalgebra

$$\alpha_\gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ \psi_i \mapsto \sum_{j=1}^{N} \psi_j \gamma_{ji},\ i \in \mathbf{N}_{\leq N}$$

durch Fortsetzung zu einem Algebrenhomomorphismus. Auf dem mit einer zulässigen Testfunktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^N$ — wobei die Funktion g eine zulässige Testfunktion ist, wenn ihre Einträge zulässige Testfunktionen sind — verschmierten Fermi-Feld $\psi(g)$ wirkt der Automorphismus also wie

$$\alpha_\gamma(\psi(g)) = \psi(\gamma g) \; . \tag{2.3}$$

Für eine globale Eichtransformation $k \in \mathrm{SU(N)}$ definieren wir:

$$\gamma_k : x \mapsto k \text{ und } \alpha_k := \alpha_{\gamma_k} \; .$$

Für zwei Eichtransformationen γ und δ können wir nachrechnen, dass die Hintereinanderausführung von Automorphismen der punktweisen Matrixmultiplikation der Eichtransformationen entspricht:

$$\alpha_\gamma \circ \alpha_\delta = \alpha_{\gamma\delta} \; .$$

Diese SU(N)-Symmetrie wird von den Strömen

$$j^a := \sum_{i,j=1}^{N} :\psi_i T^a_{ij} \psi_j^*: \tag{2.4}$$

erzeugt, wobei T^a, $a = 1, \dots, N^2-1$ Erzeuger der Lie-Algebra su(N) sind. Die Felder sind entsprechend der Vorschrift

$$:\psi\psi^*:(x) := \lim_{y \to x} \left(\psi(x)\psi^*(y) - \frac{1}{2\pi}\Delta(x-y) \right)$$

normalgeordnet, wobei $(x,y) \mapsto \frac{1}{2\pi}\Delta(x-y)$ die Zweipunktfunktion des Feldes ψ ist und durch $\Delta(z) := \lim_{\epsilon \searrow 0}(iz+\epsilon)^{-1}$ gegeben ist. Die Theorie mit N komplexen Fermionen, das heißt der Vakuumzustand dieser Theorie und damit alle ihre n-Punkt-Funktionen, ist invariant unter der globalen Symmetrie α_k, die von den Operatoren $Q^a := \int_{\mathbf{R}} j^a$ erzeugt wird.

Die Ströme sind chirale, skaleninvariante Felder mit Skalendimension 1, und ihre Vertauschungsrelationen mit den Fermi-Feldern lauten:

$$[j^a(x), \psi_j(y)] = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(y) T^a_{ij} \delta(x-y) \tag{2.5}$$

beziehungsweise für den ausgeschmierten Strom $j(f) := \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbf{R}} :\psi_i f_{ij} \psi_j^*:$ und das ausgeschmierte Fermi-Feld $\psi(g) := \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbf{R}} \psi_i(g_i)$ mit zulässigen Testfunktionen $f : \mathbf{R} \to \mathrm{su(N)}$ und $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^N$:

$$[j(f), \psi(g)] = \psi(fg) \; .$$

Dies ist die infinitesimale Form der Wirkung der Automorphismen α_γ auf die Fermi-Felder (2.3). In diesem Sinne ist die obige Aussage, die Ströme j^a erzeugen die SU(N)-Symmetrie, zu verstehen. Insbesondere erzeugen also die Operatoren $Q^a = j(T^a)$ die globale SU(N)-Symmetrie.

Aus den Vertauschungsrelationen (2.5) folgen die Vertauschungsrelationen der Ströme untereinander:

$$[j^a(x), j^b(y)] = i f^{ab}{}_c j^c(y) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} g^{ab} \delta'(x-y) \; , \tag{2.6}$$

wobei $f^{ab}{}_c$ die Strukturkonstanten $i f^{ab}{}_c T^c := [T^a, T^b]$ und $g^{ab} := \mathrm{Sp}(T^a T^b)$ die Cartan-Metrik sind.

Der Zusammenhang zwischen Strömen und Energie-Impuls-Tensor wird hergestellt durch das

Theorem 2.5 (Sugawara, Segal; [FST89]). *Die Operatoren j^a seien Ströme mit den Vertauschungsrelationen (2.6). Dann ist das Feld*

$$T := \frac{\pi}{N+1} g_{ab} :j^a j^b:$$

ein chiraler Energie-Impuls-Tensor mit zentraler Ladung $c = N-1$, der mit den Strömen die Vertauschungsrelationen

$$i[T(x), j^a(y)] = \partial_y \left(j^a(y) \delta(x-y) \right)$$

hat. Dieser Energie-Impuls-Tensor heißt Sugawara-Energie-Impuls-Tensor. Die Normalordnung der Ströme ist durch

$$:j^a j^b:(x) := \lim_{y \to x} \left(j^a(x) j^b(y) - \frac{i}{2\pi} \Delta(x-y) f^{ab}{}_c j^c(x) - \frac{1}{(2\pi)^2} \Delta^2(x-y) g^{ab} \right)$$

definiert.

Insbesondere ist also die Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c = N - 1$ eine Unteralgebra der SU(N)-Stromalgebra.

Die Funktionen $f_n^{(1)}$ sind zulässige Testfunktionen für die Ströme, also werden durch $j_n^a := j^a(f_n^{(1)})$ Operatoren definiert. Diese erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [j_m^a, j_n^b] &= i f^{ab}{}_c j_{m+n}^c + g^{ab} m \delta_{m,-n} \text{ und} && (2.7)\\ [L_m, j_n^a] &= -n j_{m+n}^a \,, && (2.8) \end{aligned}$$

wobei die Operatoren L_n die Virasoro-Algebra zu dem Energie-Impuls-Tensor aus Theorem 2.5 erzeugen. Insbesondere sind die j_n^a für negative beziehungsweise positive n Auf- beziehungsweise Absteigeoperatoren zu L_0.

Die Operatoren $Q^a := j_0^a$ erzeugen die globale SU(N)-Symmetrie. Da die Operatoren Q^a und L_0 vertauschen, transformieren sich die Zustände niedrigster Energie, das heißt die Grundzustände, in einer Darstellung der Lie-Gruppe SU(N). Es lassen sich also die irreduziblen Darstellungen der Algebra $\mathcal{B}$, die von den beschränkten Funktionen der Ströme j_n^a erzeugt wird, analog zu den Verma-Moduln aus den Moduln über den Grundzuständen $|\Lambda, h\rangle$ konstruieren, wobei Λ die irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe SU(N) indiziert.

Lemma 2.6. *Im Fall $N = 2$ existieren genau zwei irreduzible Hilbertraum-Darstellungen der Stromalgebra (2.7), und zwar die zu den Grundzuständen $\Omega_0 := |\underline{0}, 0\rangle$ und $\Omega_{\frac{1}{2}} := \left|\underline{1/2}, 1/4\right\rangle$, wobei $\underline{0}$ beziehungsweise $\underline{1/2}$ die irreduziblen Darstellung der Lie-Gruppe SU(2) mit Isospin 0 beziehungsweise $1/2$ bezeichnen.*

Beweis. Gemäß Formel (4.42) in [FST89] sind nur die irreduziblen Darstellungen $\Lambda = \underline{0}$ und $\Lambda = \underline{1/2}$ erlaubt. Der Isospin J dieser Darstellungen wiederum bestimmt den Wert von h, denn es gilt die Formel $h = \frac{J(J+1)}{3}$ ([FST89], (4.43) und [FST89], (B.15b)): Bei verschwindendem Isospin ist nur $h = 0$ erlaubt, bei Isospin $1/2$ nur $h = 1/4$. ■

In dieser Arbeit werden wir uns hauptsächlich in der Darstellung zu dem Grundzustand Ω_0 bewegen und charakterisieren sie deshalb in folgendem Lemma näher.

Lemma 2.7. *Die Darstellung zum Grundzustand Ω_0 ist die Vakuumdarstellung der Stromalgebra.*

Beweis. Der Vektor Ω_0 ist ein Grundzustand und wird deshalb von dem Absteigeoperator L_1 vernichtet. Außerdem gehört er zu der Darstellung mit $h = 0$, das heißt, er wird ebenfalls von dem Operator L_0 vernichtet. Aus den Vertauschungsrelationen folgt:

$$\begin{aligned} ||L_{-1}\Omega_0||^2 &= (\Omega_0, [L_1, L_{-1}]\Omega_0) \\ &= (\Omega_0, 2L_0\Omega_0) \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

Also wird der Vektor Ω_0 von den Erzeugern der Möbius-Gruppe L_0 und $L_{\pm 1}$ vernichtet und ist somit invariant unter der Möbius-Gruppe. Da diese Eigenschaften den Vakuumvektor eindeutig definieren, ist Ω_0 der Vakuumvektor. Damit handelt es sich bei dieser Darstellung um die Vakuum-Darstellung der Stromalgebra $\mathcal{B}$. ■

Die Operatoren in der Cartan-Unteralgebra kommutieren untereinander und mit dem konformen Hamilton-Operator L_0. Da sie einschließlich L_0 rein diskretes Spektrum haben und da die Eigenräume des Operators L_0 endlich entartet sind, lassen sie sich also auf dem Vakuum-Hilbertraum simultan diagonalisieren. Die Eigenwerte bezüglich der Cartan-Unteralgebra heißen (Cartan-)Ladung, die Eigenwerte bezüglich L_0 heißen (konforme) Energie des entsprechenden Vektors.

Satz 2.8. *Vektoren mit unterschiedlicher Ladung oder unterschiedlicher Energie stehen senkrecht aufeinander.*

Beweis. Die Aussage folgt aus der Hermitizität der Operatoren Q^a und L_0, da für einen hermiteschen Operator A mit Eigenvektoren ψ und ϕ gilt: $\lambda_\psi \langle \psi, \phi \rangle = \langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle = \lambda_\phi \langle \psi, \phi \rangle$. ■

Lemma 2.9. *Im Fall $N = 2$ verschwinden Vektoren der Vakuumdarstellung der Stromalgebra, für die das Quadrat ihrer Ladung größer ist als ihre Energie.*

Beweis. Für $N = 2$ lässt sich der Charakter χ_0 der Vakuumdarstellung der Stromalgebra mit den Vertauschungsrelationen (2.7) zu

$$\begin{aligned}
\chi_0(t, q) &= \mathrm{Sp}(t^{L_0} q^{Q^3}) \\
&= p(t) \sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}(1 - t^{2n+1}) \sum_{m=-n}^{n} q^m \\
&= p(t) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (q^{-n} + q^n) t^{n^2} \right)
\end{aligned}$$

berechnen [Kac74]. Ein Vektor dieser Vakuumdarstellung habe Ladung Q und Energie E. Da die Menge der Exponenten des Argumentes q, die in dem Charakter χ_0 auftreten, das Spektrum des Operators Q^3 in der Vakuumdarstellung ist, gibt es einen Exponenten $n_Q \in \mathbf{N}_0$, sodass $Q^2 = n_Q^2$. Da die kombinatorische Zustandssumme $p(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - t^i)^{-1}$ den Exponenten n^2 von t in der Summe nur erhöht, folgt die Behauptung: $E \geq n_Q^2 = Q^2$. ■

2.1.4 Weitere Energie-Impuls-Tensoren

Bisher haben wir zu einem Fermi-Feld bereits den kanonischen Energie-Impuls-Tensor aus Formel (2.1) und den Sugawara-Energie-Impuls-Tensor aus Theorem 2.5 kennengelernt. In einer Theorie mit N komplexen chiralen Fermi-Feldern gibt es jedoch weitere Energie-Impuls-Tensoren. Ihren Zusammenhang erläutern wir in diesem Unterabschnitt.

Satz 2.10. *Zu jedem komplexen Fermi-Feld ψ_i gibt es einen Energie-Impuls-Tensor*

$$T_i \;:=\; \frac{i}{2} :\psi_i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_i^*: \; .$$

Dieser hat die zentrale Ladung $c = 1$. Die Energie-Impuls-Tensoren zu unterschiedlichen Fermi-Feldern kommutieren miteinander.

Beweis. Aus der Bewegungsgleichung eines Fermions folgt, dass die Voraussetzungen des Theorems 2.1 von Lüscher und Mack erfüllt sind. Die zentrale Ladung muss man ausrechnen. Die Energie-Impuls-Tensoren zu unterschiedlichen Fermi-Feldern kommutieren miteinander, da die unterschiedlichen Fermi-Felder miteinander anti-kommutieren. ■

Satz 2.11. *Zu jedem Fermi-Feld ψ_i gibt es einen Strom $j_i := :\psi_i\psi_i^*:$, dessen Wick-Quadrat den Energie-Impuls-Tensor aus Satz 2.10 zu diesem Fermi-Feld ergibt:*

$$T_i \;=\; \pi :j_i j_i: \; .$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass der Strom j_i ein freies Bose-Feld ist, denn seine Vertauschungsrelationen lauten $[j_i(x), j_i(y)] = \frac{i}{2\pi}\delta'(x-y)$. Wir können also seine Wick-Produkte durch die bosonische Normalordnung definieren:

$$:j_i j_i:(x) := \lim_{y\to x}\left(j(x)j(y) - \frac{1}{(2\pi)^2}\Delta(x-y)^2 \right) \; .$$

Nun kann man die Identität $[T_i, \psi_i] = \pi[:j_i j_i:, \psi_i]$ nachrechnen. Da die Fockraum-Darstellung der Fermi-Felder irreduzibel ist, ist der Operator $T_i - \pi :j_i j_i:$ ein Vielfaches der Identität. Die Zweipunktfunktion dieses Operators verschwindet, und es folgt die Behauptung. ■

Satz 2.12. *Der totale Energie-Impuls-Tensor $T_{tot} := \sum_{i=1}^{N} T_i$ lässt sich in eine Summe zweier miteinander kommutierender Energie-Impuls-Tensoren zerlegen:*

$$T_{tot} = T_U + T_{Cartan}$$

mit den Definitionen $T_U := \frac{\pi}{2} :j^0 j^0:$ und $T_{Cartan} := \pi :j^3 j^3:$ für den Fall $N = 2$.

Beweis. Den Beweis geben wir hier nur für $N = 2$ an. Für den allgemeinen Fall verweisen wir auf [FST89]. Mit $T^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ folgt aus der Definition (2.4) und aus Satz 2.11:

$$\begin{aligned} j_1 + j_2 &= :\psi_1\psi_1^*: + :\psi_2\psi_2^*: \\ &= j^0 \\ j_1 - j_2 &= :\psi_1\psi_1^*: - :\psi_2\psi_2^*: \\ &= \sqrt{2} j^3 \ . \end{aligned}$$

Dieses setzen wir nun in die Definition des totalen Energie-Impuls-Tensors T_{tot} ein:

$$\begin{aligned} T_{\text{tot}} &= \pi :j_1 j_1: + \pi :j_2 j_2: \\ &= \frac{\pi}{2} :(j_1 + j_2)(j_1 + j_2): + \frac{\pi}{2} :(j_1 - j_2)(j_1 - j_2): \\ &= \frac{\pi}{2} :j^0 j^0: + \pi :j^3 j^3: \\ &= T_{\text{U}} + T_{\text{Cartan}} \ . \end{aligned}$$

Hier bemerken wir, dass mit den Strömen j_i auch die Ströme j^a freie Felder sind und wir deshalb ihr Wick-Produkt wie oben definieren können. T_{Cartan} ist wegen Theorem 2.13 ein Energie-Impuls-Tensor; die Vertauschungsrelationen von T_{U} muss man nachrechnen. ■

Theorem 2.13. *Der Sugawara-Energie-Impuls-Tensor $T = \frac{\pi}{N+1} g_{ab} :j^a j^b:$ aus Theorem 2.5 ist identisch mit dem Energie-Impuls-Tensor T_{Cartan} aus Satz 2.12. Im Fall $N = 2$ lässt er sich schreiben als*

$$T = \pi :j^a j^a:$$

für $a = 1, 2, 3$.

Beweis. Wieder nur für $N = 2$. Die Energie-Impuls-Tensoren T_{tot} und T_{U} sind SU(2)-invariant. Damit ist auch deren Differenz $T_{\text{Cartan}} = T_{\text{tot}} - T_{\text{U}}$ SU(2)-invariant. Da sich die Ströme j^a für $a = 1, 2, 3$ durch eine SU(2)-Transformation ineinander drehen lassen, folgt:

$$T_{\text{Cartan}} = \pi :j^a j^a: \ .$$

Dieses setzen wir in die Formel für den Sugawara-Energie-Impuls-Tensor T aus Theorem 2.5 ein und erhalten die Behauptung. ■

2.2 Algebraische Quantenfeldtheorie

Die algebraische Quantenfeldtheorie [HK64, Haa96] untersucht Quantenfeldtheorien, indem sie die Theorien alleine durch ihre Observablen und damit durch (prinzipiell) experimentell zugängliche Objekte als gegeben annimmt. Die Observablen sind (wie schon in der Quantenmechanik) Elemente einer Operator-Algebra, wobei die in einem beschränkten Raum-Zeit-Gebiet O lokalisierten Observablen die C*-Algebra $\mathcal{A}(O)$ erzeugen. Durch die Zuordnung

$$O \mapsto \mathcal{A}(O)$$

erhalten wir also ein Netz von C*-Algebren, dessen C*-induktiver Limes $\mathcal{A}$ als quasilokale Algebra bezeichnet wird:

$$\mathcal{A} := \overline{\bigcup_O \mathcal{A}(O)}^{||\cdot||} .$$

Das Netz soll folgende Axiome erfüllen:

1. Isotonie. Ist ein Gebiet O_1 in dem Gebiet O_2 enthalten, so gilt das auch für die entsprechenden lokalen Algebren:

$$O_1 \subset O_2 \Rightarrow \mathcal{A}(O_1) \subset \mathcal{A}(O_2) .$$

2. Lokalität. Falls die Gebiete O_1 und O_2 raumartig getrennt sind, vertauschen die Elemente der lokalen Algebren:

$$O_1 \subset O_2^{\perp} \Rightarrow [\mathcal{A}(O_1), \mathcal{A}(O_2)] = 0 .$$

3. Kovarianz. Es existiert eine Darstellung der Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ durch Automorphismen α_g, die geometrisch wirken:

$$\forall g \in \mathcal{P} : \alpha_g(\mathcal{A}(O)) = \mathcal{A}(gO) .$$

   Für eine kovariante Darstellung π der Algebra $\mathcal{A}(O)$ gibt es eine unitäre Darstellung U_π der Poincaré-Gruppe, durch die obige Automorphismen implementiert sind:

$$\forall g \in \mathcal{P}\ \forall A \in \mathcal{A}(O) : U_\pi(g)\pi(A)U_\pi(g)^* = \pi(\alpha_g(A)) .$$

4. Spektrumsbedingung. Wird die Darstellung U_π auf die Translationen eingeschränkt, so ist sie stark stetig, und das Spektrum ihrer Erzeuger P^μ liegt im Vorwärtslichtkegel.

5. Vakuum. Es gibt eine treue und irreduzible Darstellung $\pi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, genannt Vakuumdarstellung, mit zyklischem, irreduziblem und translationsinvariantem Vakuumvektor $\Omega_0 \in \mathcal{H}_0$.

Da wir uns im Rahmen dieser Arbeit mit konformen Quantenfeldtheorien beschäftigen, ersetzen wir in dem Axiom 3 (Kovarianz) die Poincaré-Gruppe durch die Möbius-Gruppe. Weiterhin wird bei chiralen konformen Quantenfeldtheorien, die auf dem Lichtstrahl oder dem Einheitskreis leben, die Bedingung der raumartigen Trennung zweier Intervalle O_1 und O_2 einfach durch die Forderung eines leeren Schnittes $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ausgedrückt, und das raumartige Komplement eines Gebietes ist das Komplement in den reellen Zahlen $\mathbf{R}$ beziehungsweise auf dem Einheitskreis S^1.

Außerdem setzen wir voraus, dass die Vakuumdarstellung die Haag-Dualität erfüllt [Haa59]:

$$\forall \text{ Intervalle } O : \pi_0(\mathcal{A}(O^\perp))' = \pi_0(\mathcal{A}(O)) \; .$$

Diese Forderung bedeutet für uns keine Einschränkung, da sie für chirale konforme Quantenfeldtheorien auf dem Einheitskreis immer [BGL93] und auf dem Lichtstrahl für den hier behandelten Fall der zentralen Ladung $c = 1$ [BSM90] erfüllt ist.

Die heuristische Idee, die zu obigen Axiomen geführt hat, besteht zwar darin, dass die Observablen die beschränkten Funktionen der mit Testfunktionen f ausgeschmierten Wightman-Felder $\psi(f)$ sind, aber es gibt auch algebraische Quantenfeldtheorien, die sich nicht aus Feldern erzeugen lassen, und nicht alle Wightman-Theorien lassen sich durch algebraische Quantenfeldtheorien beschreiben. In dieser Arbeit jedoch haben wir hinreichend reguläre Felder (Ströme zu Fermi-Feldern), die ein Netz $\mathcal{B}$ erzeugen, das den obigen Axiomen genügt mit einer Vakuumdarstellung $\pi_{0,\mathcal{B}}$ und einem Vakuumvektor $\Omega_{0,\mathcal{B}}$ [BSM90, DF77]. Weiter gibt es eine kompakte globale Eichgruppe G und eine treue, stark stetige, unitäre Darstellung $U : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{0,\mathcal{B}})$, die für beliebige $k \in G$ einen Automorphismus α_k auf $\mathcal{B}$ induziert: $\pi_{0,\mathcal{B}} \circ \alpha_k := \mathrm{Ad}_{U(k)} \circ \pi_{0,\mathcal{B}}$. Die Observablenalgebra $\mathcal{A}$ wird nun durch die Fixpunkte von $\mathcal{B}$ unter diesen Automorphismen erzeugt:

$$\mathcal{A} := \mathcal{B}^G := \{A \in \mathcal{B} \, \forall k \in G : \alpha_k(A) = A\} \; .$$

Die Vakuumdarstellung $\pi_{0,\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$ ist die GNS-Darstellung zum Vakuum $\omega_{0,\mathcal{A}} := \omega_{0,\mathcal{B}}|\mathcal{A}$. Sie ist irreduzibel, da das Vakuum rein ist, und genügt ebenfalls obigen Axiomen.

In dem vorliegenden Fall ist $G = \mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathbf{Z}_2$, da wegen der Identität $\alpha_k = \alpha_{-k}$ für $k \in \mathrm{SU}(2)$ nur dieser Quotient in der Vakuumdarstellung treu dargestellt werden kann.

Theorem 2.14 ([DHR69], Kapitel 3). *Mit $\hat{G}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen der stetigen, unitären, irreduziblen Darstellungen von G bezeichnet. Die*

Darstellungen in der Klasse $[\sigma] \in \hat{G}$ *haben die Dimension* $n_{[\sigma]}$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \pi_{0,\mathcal{B}}|\mathcal{A} &= \bigoplus_{[\sigma]\in\hat{G}} id_{n_{[\sigma]}} \otimes \pi^{[\sigma]} \\ U &= \bigoplus_{[\sigma]\in\hat{G}} \sigma \otimes id_{\mathcal{H}^{[\sigma]}} \ , \end{aligned}$$

wobei $id_{n_{[\sigma]}}$ *die Identitäten auf den* $n_{[\sigma]}$*-dimensionalen Vektorräumen und* $\pi^{[\sigma]}$ *irreduzible, unitäre Darstellungen positiver Energie der Algebra* $\mathcal{A}$ *auf den Hilberträumen* $\mathcal{H}^{[\sigma]}$ *sind.*

2.3 DHR-Theorie der Superauswahlsektoren

Da nicht alle Darstellungen der Observablenalgebra $\mathcal{A}$ physikalisch interessant sind, werden weitere Kriterien benutzt, um die physikalisch interessanten Darstellungen auszuwählen, so zum Beispiel das DHR-Kriterium [DHR71]:

$$\forall O : \pi|\mathcal{A}(O^\perp) \cong \pi_0|\mathcal{A}(O^\perp) \ .$$

Um diese Bedingung näher zu untersuchen, ist folgender Begriff hilfreich:

Definition 2.15. *Seien* π_1 *und* π_2 *zwei Darstellungen der quasilokalen Algebra* $\mathcal{A}$ *auf den Hilberträumen* $\mathcal{H}_1$ *beziehungsweise* $\mathcal{H}_2$, *und sei* O *ein Raum-Zeit-Gebiet. Ein unitärer Operator* $U_O : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *heißt in* O *lokalisierter partieller Verketter, falls er folgende Bedingung erfüllt:*

$$\forall A \in \mathcal{A}(O^\perp) : U_O \pi_1(A) = \pi_2(A) U_O \ .$$

Das DHR-Kriterium ist also äquivalent dazu, dass es zu jedem Raum-Zeit-Gebiet einen dort lokalisierten partiellen Verketter zwischen der betrachteten Darstellung und der Vakuumdarstellung gibt.

Für eine DHR-Darstellung π definieren wir für beliebige Gebiete O mit Hilfe eines in O lokalisierten partiellen Verketters U_O sogenannte DHR-Endomorphismen $\varrho_O : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ wie folgt ([DHR71] (1.7)):

$$\forall A \in \mathcal{A} : \pi_0 \circ \varrho_O(A) := U_O \pi(A) U_O^* \ .$$

Ein DHR-Endomorphismus ϱ_O ist in O lokalisiert, das heißt auf dem kausalen Komplement von O wirkt er wie die Identität: $\varrho_O|\mathcal{A}(O^\perp) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(O^\perp)}$. DHR-Endomorphismen, die von unitär äquivalenten DHR-Darstellungen induziert werden, heißen äquivalent.

Umgekehrt induziert ein beliebiger lokalisierter Endomorphismus ϱ die DHR-Darstellung $\pi_0 \circ \varrho$. Für äquivalente DHR-Endomorphismen ϱ_{O_1} und ϱ_{O_2} sind die induzierten DHR-Darstellungen $\pi_0 \circ \varrho_{O_1}$ und $\pi_0 \circ \varrho_{O_2}$ unitär äquivalent. Es gibt also eine 1:1-Beziehung zwischen den Äquivalenzklassen der Darstellungen $[\pi]$ und denen der Endomorphismen $[\varrho]$.

Es gibt auch eine 1:1-Beziehung zwischen Paaren von Darstellungen und zyklischen Vektoren einerseits und Zuständen andererseits: Die GNS-Konstrunktion liefert zu einem Zustand ω eine Darstellung π_ω und einen Vektor Ω_ω, die die Gleichung $\omega = (\Omega_\omega, \pi_\omega \Omega_\omega)$ erfüllen. Umgekehrt erhalten wir zu einer Darstellung π und einem Vektor Ω sofort einen Zustand $\omega_\pi := (\Omega, \pi\Omega)$. Zustände werden als äquivalent definiert, wenn die entsprechenden Darstellungen äquivalent sind. Die Äquivalenzklassen $[\pi]$ (oder stellvertretend die Darstellungsräume $\mathcal{H}_\pi$), $[\varrho]$ und $[\omega]$ werden als (Superauswahl-) Sektoren bezeichnet.

Im Folgenden sei π_i stets eine von ϱ_i induzierte irreduzible Darstellung, das heißt $\forall i : [\pi_i] = [\pi_0 \circ \varrho_i]$. Auf der Menge der Sektoren ist durch die direkte Summe von Darstellungen in natürlicher Weise eine Addition definiert: $[\pi_1] \oplus [\pi_2] := [\pi_1 \oplus \pi_2]$. Für zwei Sektoren $[\pi_1]$ und $[\pi_2]$ können wir ein Produkt definieren ([DHR74], Lemma 2.1):

$$[\pi_1] \times [\pi_2] \quad := \quad [\pi_0 \circ \varrho_1 \circ \varrho_2] \, .$$

Auf den Äquivalenzklassen der DHR-Darstellungen ist durch den Statistik-Operator ([DHR71], Kapitel 4) eine Abbildung d_{st}, die statistische Dimension, mit Werten in dem Intervall $[1, \infty]$ definiert. Sie ist additiv ([DHR71], (6.5)) und multiplikativ ([DHR71], Lemma 6.7):

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{st}}([\pi_1] \oplus [\pi_2]) &= d_{\mathrm{st}}([\pi_1]) + d_{\mathrm{st}}([\pi_2]) \\ d_{\mathrm{st}}([\pi_1] \times [\pi_2]) &= d_{\mathrm{st}}([\pi_1]) d_{\mathrm{st}}([\pi_2]) \, . \end{aligned}$$

Die Zerlegung eines Produktes zweier Darstellungen in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen (für Darstellungen mit endlicher statistischer Dimension)

$$[\pi_i] \times [\pi_j] = \bigoplus_k N_{ij}^k [\pi_k] \, , \quad N_{ij}^k \in \mathbf{N}$$

oder äquivalent für die entsprechenden DHR-Endomorphismen

$$\varrho_i \circ \varrho_j \cong \bigoplus_k N_{ij}^k \varrho_k$$

wird als Fusionsregel bezeichnet.

Theorem 2.16 ([DR90], Theorem 3.14). *Die Bezeichnungen seien wie in Theorem 2.14. Dann erfüllen die Sektoren $[\pi^{(\sigma)}]$ dieselben Fusionsregeln wie die entsprechenden Darstellungen σ der Eichgruppe G.*

Für einen irreduziblen Sektor $[\pi]$ endlicher statistischer Dimension definieren wir den ebenfalls irreduziblen konjugierten Sektor $[\bar{\pi}]$ durch die Bedingung ([DHR74], Theorem 3.1)

$$[\bar{\pi}] \times [\pi] \succ [\pi_0] \, .$$

Man kann zeigen, dass $[\bar{\pi}]$ durch diese Bedingung eindeutig bestimmt ist und das folgende Theorem erfüllt.

Theorem 2.17 (Dimension der konjugierten Darstellung).

$$d_{st}([\bar{\pi}]) = d_{st}([\pi]) \ .$$

Für den Beweis verweisen wir auf [DHR74], Theorem 3.1 b).

2.4 Das Produkt von Zuständen

Das Produkt von Zuständen wurde von Fredenhagen in [Fre92] eingeführt. Beispiele für seine Verwendung finden sich auch in [Fre94].

Die DHR-Endomorphismen können in der Regel nur abstrakt definiert werden, weshalb sie den großen Nachteil haben, dass man sie nur schwer explizit angeben kann. Dieses Problem versuchen wir mit dem folgenden Konzept zu umgehen. Die Idee ist, eine gegebene DHR-Darstellung π durch einen Zustand ω und DHR-Endomorphismen ϱ durch positive lineare Abbildungen $\chi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit $\omega = \omega_0 \circ \chi$ zu ersetzen. Wir hoffen, ähnliche Strukturen wie bei den DHR-Endomorphismen zu finden, das heißt zum Beispiel eine Multiplikation

$$\omega_i \times \omega_j = \omega_0 \circ \chi_i \circ \chi_j = \bigoplus_k N_{ij}^k \omega_0 \circ \chi_k \ ,$$

die die gleichen Fusionsregeln wie die entsprechenden DHR-Endomorphismen erfüllt, mit der GNS-Konstruktion verträglich ist ($\pi_{\omega_1} \times \pi_{\omega_2} = \pi_{\omega_1 \times \omega_2}$) und die Definition von konjugierten positiven Abbildungen erlaubt. Diese Strukturen werden wir in den folgenden Unterabschnitten einführen. Allerdings erreicht man im Allgemeinen nur die Ungleichung $\pi_{\omega_1} \times \pi_{\omega_2} \succ \pi_{\omega_1 \times \omega_2}$, siehe Theorem 2.26.

2.4.1 Definition der positiven Abbildungen

In diesem Abschnitt werden positive, lineare, normierbare Funktionale als Zustände bezeichnet, auch wenn sie nicht normiert sind. Für einen Zustand ω sei π_ω die mittels GNS-Konstruktion zu ω gehörende Darstellung. Die Menge der DHR-Zustände sei $\mathcal{S} := \{\omega \in \mathcal{A}_+^* : \pi_\omega \text{ ist eine DHR-Darstellung}\}$. Mit Hilfe von

$$\mathcal{S}(O) := \{\omega \in \mathcal{S} : \exists \lambda > 0 \, \forall A \in \mathcal{A}(O^\perp) : A \geq 0 \implies \omega(A) \leq \lambda \omega_0(A)\}$$

lässt sich die Menge der vom Vakuum im raumartig Unendlichen dominierten Zustände $\mathcal{S}_0 := \bigcup_O \mathcal{S}(O)$ definieren. Diese Menge ist eine normdichte Untermenge von $\mathcal{S}$ ([DHR71], Anhang A).

Für die Definition der zu einem Zustand assoziierten positiven Abbildungen benötigen wir das

Lemma 2.18 (zweite Charakterisierung von $\mathcal{S}_0$).

$$\mathcal{S}_0 = \{\omega \in \mathcal{S} : \exists O\ \exists S_\omega : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\omega\ \forall A \in \mathcal{A}(O^\perp) : \\ S_\omega \pi_0(A) = \pi_\omega(A) S_\omega \ \textit{und}\ \ \omega = (S_\omega \Omega_0, \pi_\omega S_\omega \Omega_0)\}$$

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{S}$ ein Zustand mit einem Lokalisierungsgebiet O und mit in O lokalisiertem partiellem Verketter $S_\omega : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\omega$, sodass $\omega = (S_\omega\Omega_0, \pi_\omega S_\omega \Omega_0)$. Dann erhalten wir für eine Observable $A \in \mathcal{A}(O^\perp)$ durch Adjungieren der partiellen Verkettungseigenschaft die Identität: $S_\omega^* S_\omega \pi_0(A) = \pi_0(A) S_\omega^* S_\omega$. Also liegt $S_\omega^* S_\omega$ in der Kommutanten von $\pi_0(\mathcal{A}(O^\perp))$ und wegen Haag-Dualität in $\pi_0(\mathcal{A}(O))$. Sei $A \in \mathcal{A}(O^\perp)$ positiv. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega(A) &= (S_\omega\Omega_0, \pi_\omega(A) S_\omega \Omega_0) \\ &= (\Omega_0, S_\omega^* S_\omega \pi_0(A)\Omega_0) \\ &\leq ||S_\omega^* S_\omega||\ \omega_0(A)\ . \end{aligned}$$

Da der Operator $S_\omega^* S_\omega$ Darsteller einer in O lokalisierten Observable ist, ist seine Norm endlich, also liegt der Zustand ω in $\mathcal{S}(O)$ und damit in $\mathcal{S}_0$.

Sei nun umgekehrt $\omega \in \mathcal{S}_0$, also $\omega \in \mathcal{S}(O)$. Sei π_ω die GNS-Darstellung zu ω mit zyklischem und separierendem Vektor $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$. Definiere nun einen in O lokalisierten partiellen Verketter $S_\omega : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\omega$ durch

$$\forall A \in \mathcal{A}(O^\perp) : S_\omega \pi_0(A)\Omega_0 = \pi_\omega(A)\Omega_\omega\ .$$

S_ω wird damit dicht definiert, da Ω_0 separierend ist für $\pi_0(\mathcal{A}(O)) = \pi_0(\mathcal{A}(O^\perp))'$ und damit zyklisch für $\pi_0(\mathcal{A}(O^\perp))$. S_ω ist aber auch beschränkt:

$$\begin{aligned} ||S_\omega \pi_0(A)\Omega_0||^2 &= ||\pi_\omega(A)\Omega_\omega||^2 \\ &= (\pi_\omega(A)\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) \\ &= \omega(A^*A) \\ &\leq \lambda\omega_0(A^*A) \\ &= \lambda||\pi_0(A)\Omega_0||^2\ . \end{aligned}$$

Also ist die Definition von S_ω eindeutig erweiterbar auf ganz $\mathcal{H}_0$, und mit $\Omega_\omega = S_\omega\Omega_0$ folgt die partielle Verkettungseigenschaft für S_ω. ■

Definition 2.19. *Für einen Zustand $\omega \in \mathcal{S}_0$ definiere eine positive Abbildung*

$$\chi_\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ A \mapsto \pi_0^{-1}(S_\omega^* \pi_\omega(A) S_\omega)\ ,$$

wobei S_ω der partielle Verketter aus Lemma 2.18 ist.

Lemma 2.20.

1. *χ_ω ist wohldefiniert.*

2. *χ_ω ist positiv.*

Beweis. 1. Das Gebiet O sei Lokalisierungsgebiet von ω und S_ω. Es seien $P \supset O$, $A \in \mathcal{A}(P)$ und $B \in \mathcal{A}(P^\perp)$. Dann kommutiert $\pi_0(\chi_\omega(A)) = S_\omega^* \pi_\omega(A) S_\omega$ mit $\pi_0(B)$:

$$\begin{aligned}
[\pi_0(\chi_\omega(A)), \pi_0(B)] &= S_\omega^* S_\omega \pi_0(A)\pi_0(B) - \pi_0(B) S_\omega^* \pi_\omega(A) S_\omega \\
&= S_\omega^* S_\omega [\pi_0(A), \pi_0(B)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

und liegt also wegen Haag-Dualität in $\pi_0(\mathcal{A}(P))$. Da π_0 treu ist, können wir sein Inverses bilden und haben somit die Inklusion $\chi_\omega(\mathcal{A}(P)) \subset \mathcal{A}(P)$.

2.

$$\begin{aligned}
\pi_0(\chi_\omega(A^*A)) &= S_\omega^* \pi_\omega(A)^* \pi_\omega(A) S_\omega \\
&= (\pi_\omega(A) S_\omega)^* (\pi_\omega(A) S_\omega) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

■

Theorem 2.21 (Eindeutigkeit der positiven Abbildung). *Die positive, lineare Abbildung $\chi_\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist durch die beiden Bedingungen*

1. *$\omega_0 \circ \chi_\omega = \omega$ und*

2. *$\forall A \in \mathcal{A}(O)\ \forall B, C \in \mathcal{A}(O^\perp) : \chi_\omega(BAC) = B\chi_\omega(A)C$*

eindeutig bestimmt.

Beweis. Sofort aus der Definition folgt mit den Eigenschaften von S_ω, dass χ_ω die beiden Bedingungen erfüllt:

1. $\omega_0 \circ \chi_\omega(A) = (\Omega_0, S_\omega^* \pi_\omega(A) S_\omega \Omega_0) = \omega(A)$

2. $\chi_\omega(BAC) = \pi_0^{-1}(S_\omega^* \pi_\omega(B)\pi_\omega(A)\pi_\omega(C) S_\omega) = B\chi_\omega(A)C$

Sei nun ξ eine Abbildung, die die beiden Bedingungen für einen gegebenen Zustand ω erfüllt. Da Ω_0 separierend für $\pi_0(\mathcal{A}(O)) = \pi_0(\mathcal{A}(O^\perp))'$ und damit zyklisch für $\pi_0(\mathcal{A}(O^\perp))$ ist, ist $\pi_0(\mathcal{A}(O^\perp))\Omega_0 \subset \mathcal{H}_0$ eine dichte Teilmenge. Auf dieser sind die Matrixelemente von $\pi_0(\xi(A))$ mit $A \in \mathcal{A}(O)$ unabhängig von ξ, denn für $B, C \in \mathcal{A}(O^\perp)$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\pi_0(B)^*\Omega_0, \pi_0(\xi(A))\pi_0(C)\Omega_0) &\overset{2.}{=} (\Omega_0, \pi_0(\xi(BAC))\Omega_0) \\
&\overset{1.}{=} \omega(BAC)\ .
\end{aligned}$$

Diese Matrixelemente bestimmen ξ aber eindeutig, also folgt $\xi = \chi_\omega$. ■

Definition 2.22 (Produkt von Zuständen). *Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}_0$. Dann wird durch*

$$\omega_1 \times \omega_2 \;\; := \;\; \omega_1 \circ \chi_{\omega_2}$$

das Produkt der beiden Zustände definiert.

Lemma 2.23. *Für zwei Zustände $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}(O)$ liegt auch ihr Produkt wieder in $\mathcal{S}(O)$: $\omega_1 \times \omega_2 \in \mathcal{S}(O)$.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{A}(O^\perp)$. Wegen Haag-Dualität folgt aus

$$A\, \chi_1 \circ \chi_2(1) \stackrel{2.}{=} \chi_1 \circ \chi_2(A) \stackrel{2.}{=} \chi_1 \circ \chi_2(1) A\;,$$

dass $\chi_1 \circ \chi_2(1)$ in $\mathcal{A}(O)$ liegt.

Das Produkt der Zustände kann für positives A wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \omega_1 \times \omega_2(A) &= \omega_0(\chi_1 \circ \chi_2(A)) \\ &\stackrel{2.}{=} \omega_0(\chi_1 \circ \chi_2(1) A) \\ &\leq ||\chi_1 \circ \chi_2(1)||\, \omega_0(A) \end{aligned}$$

Die Norm des Operators $\chi_1 \circ \chi_2(1)$ ist aber endlich, da er in einer lokalen Algebra liegt. Also folgt die Behauptung: $\omega_1 \times \omega_2 \in \mathcal{S}(O)$. ■

Bemerkung 2.24 ([Fre92], (23)). *Das Produkt von Zuständen ist verträglich mit der Komposition positiver Abbildungen, das heißt:*

$$\chi_{\omega_1 \times \omega_2} \;\; = \;\; \chi_{\omega_1} \circ \chi_{\omega_2}\;.$$

2.4.2 GNS-Konstruktion und das Produkt von Zuständen

In diesem Unterabschnitt soll die Verträglichkeit des Produktes von Zuständen mit der GNS-Konstruktion untersucht werden. Gegeben sind also zwei Zustände ω_1 und ω_2. Macht es einen Unterschied, ob wir zuerst die GNS-Darstellungen π_{ω_1} und π_{ω_2} und dann deren DHR-Produkt $\pi_{\omega_1} \times \pi_{\omega_2}$, oder zuerst das Produkt der Zustände $\omega_1 \times \omega_2$ und dann die GNS-Darstellung für diesen Produktzustand bilden? Die Antwort wird sein: Ja, aber nur ein bisschen.

Lemma 2.25. *Seien $\omega \in \mathcal{S}_0$ ein Zustand und O ein beschränktes Raum-Zeit-Gebiet. Dann gibt es einen in O lokalisierten DHR-Endomorphsimus ϱ und eine in O lokalisierte Observable $S \in \mathcal{A}(O)$, sodass folgende Aussagen gelten:*

1. *$\pi_\omega \cong \pi_0 \circ \varrho$,*

2. $\chi_\omega = S^* \varrho S$,

3. $\pi_0(S)\Omega_0$ *ist zyklisch für* $\pi_0 \circ \varrho(\mathcal{A})$.

4. *Durch die Bedingungen 1. bis 3. sind die Observable* $S \in \mathcal{A}(O)$ *bis auf Linksmultiplikation mit einer unitären Observable* $U \in \varrho(\mathcal{A})'$ *und der DHR-Endomorphsimus* ϱ *bis auf Verkettung von links mit* Ad_U *eindeutig definiert.*

Beweis. S_ω sei der zu ω definierte partielle Verketter aus Lemma 2.18 mit Lokalisierungsgebiet O. Der DHR-Endomorphismus ϱ sei in O lokalisiert und erfülle die Bedingung $\pi_\omega \cong \pi_0 \circ \varrho$. Sei $V : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\omega$ unitär mit $V^* \pi_\omega V = \pi_0 \circ \varrho$. Definiere $S := \pi_0^{-1}(V^* S_\omega)$. Dann gilt für $A \in \mathcal{A}(O^\perp)$:

$$\begin{aligned} \pi_0(S)\pi_0(A) &= V^* S_\omega \pi_0(A) \\ &= \pi_0(\varrho(A)) V^* S_\omega \\ &= \pi_0(A)\pi_0(S) \end{aligned}$$

Also liegt $\pi_0(S)$ wegen Haag-Dualität in $\pi_0(\mathcal{A}(O))$ und damit ist S ein in O lokasisierter Operator, das heißt S ist wohldefiniert.

1. Siehe Abschnitt 2.3.

2. Sei $A \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \chi_\omega(A) &= \pi_0^{-1}(S_\omega^* \pi_\omega(A) S_\omega) \\ &= \pi_0^{-1}(S_\omega^* V \pi_0(\varrho(A)) V^* S_\omega) \\ &= S^* \varrho(A) S. \end{aligned}$$

3. Der Vektor $\Psi := V^* \Omega_\omega \in \mathcal{H}_0$ ist zyklisch für $\pi_0 \circ \varrho(\mathcal{A})$, denn Ω_ω ist zyklisch für $\pi_\omega(\mathcal{A})$ und damit auch für $V^* \pi_\omega(\mathcal{A}) = \pi_0(\varrho(\mathcal{A})) V^*$. Andererseits gilt: $\pi_0(S)\Omega_0 = V^* S_\omega \Omega_0 = V^* \Omega_\omega = \Psi$.

4. Mit einem unitären $U \in \varrho(\mathcal{A})'$ gelten die Bedingungen 1. bis 3. ebenso für $T := US$, wenn wir außerdem ϱ durch $\sigma := U \varrho U^*$ ersetzen.

Wähle T und σ so, dass sie die Bedingungen 1. bis 3. erfüllen. Dann sind $\pi_0 \circ \varrho$ und $\pi_0 \circ \sigma$ unitär äquivalent. $W : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ implementiere diese Äquivalenz: $W \pi_0 \circ \varrho W^* = \pi_0 \circ \sigma$. Das Gebiet P enthalte die Lokalisierungsgebiete von ϱ und σ. Für eine Observable $A \in \mathcal{A}(P^\perp)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} W \pi_0(A) &= W \pi_0(\varrho(A)) \\ &= \pi_0(\sigma(A)) W \\ &= \pi_0(A) W \ . \end{aligned}$$

Also ist W wegen Haag-Dualität ein in P lokalisierter Operator, $W \in \pi_0(\varrho(\mathcal{A}))'$, und $U := \pi_0^{-1}(W)$ ist eine lokale Observable mit $\sigma = U \varrho U^*$.

Aus der zweiten Bedingung folgt: $S^*\varrho S = T^*\sigma T = T^*U\varrho U^*T$. Für die Matrixelemente gilt also:

$$\begin{aligned}(\pi_0(U^*T)\Omega_0, \pi_0 \circ \varrho\, \pi_0(U^*T)\Omega_0) &= (\pi_0(S)\Omega_0, \pi_0 \circ \varrho\, \pi_0(S)\Omega_0) \\ \Rightarrow \pi_0(U^*T)\Omega_0 &= \pi_0(S)\Omega_0 \ .\end{aligned}$$

Da π_0 treu und Ω_0 separierend für $\pi_0(\mathcal{A})$ sind, folgt die Behauptung: $T = US$. ■

Theorem 2.26. *Für zwei Zustände ω_1 und ω_2 aus $\mathcal{S}_0$ enthält das Produkt der GNS-Darstellungen der Zustände die GNS-Darstellung ihres Produktes:*

$$\pi_{\omega_1} \times \pi_{\omega_2} \succ \pi_{\omega_1 \times \omega_2} \ .$$

Beweis. χ_{ω_i} seien die zu ω_i assoziierten positiven Abbildungen mit lokalen Observablen S_i aus Lemma 2.25: $\chi_{\omega_i} = S_i^* \varrho_i S_i$. Für das Produkt der Zustände folgt dann:

$$\begin{aligned}\omega_1 \times \omega_2 &= \omega_0(\chi_1(S_2^*\varrho_2 S_2)) \\ &= \omega_0(S_1^*\varrho_1(S_2^*\varrho_2 S_2)S_1) \\ &= \omega_0(S_1^*\varrho_1(S_2)^*\ \varrho_1 \circ \varrho_2\ \varrho_1(S_2)S_1) \\ &= (\pi_0(\varrho_1(S_2)S_1)\Omega_0, \pi_0 \circ \varrho_1 \circ \varrho_2\ \pi_0(\varrho_1(S_2)S_1)\Omega_0) \ .\end{aligned}$$

Dieses ist offensichtlich ein Zustand in der Darstellung $\pi_0 \circ \varrho_1 \circ \varrho_2 \cong \pi_{\omega_1} \times \pi_{\omega_2}$. ■

Die Darstellung $\pi_{\omega_1 \times \omega_2}$ ist im Allgemeinen nur eine Unterdarstellung des Produktes $\pi_{\omega_1} \times \pi_{\omega_2}$, da der Vektor $\pi_0(\varrho_1(S_2)S_1)\Omega_0$ im Allgemeinen nicht zyklisch ist für die Algebra $\pi_0 \circ \varrho_1 \circ \varrho_2(\mathcal{A})$.

2.4.3 Fusionsregeln

In der DHR-Theorie können Produkte von Sektoren mit den Fusionsregeln in Summen zerlegt werden:

$$[\pi_i] \times [\pi_j] = \bigoplus_k N_{ij}^k [\pi_k] \quad \Leftrightarrow \quad \varrho_i \circ \varrho_j \cong \bigoplus_k N_{ij}^k \varrho_k \ .$$

Gibt es eine solche Zerlegung auch für das Produkt von Zuständen?

Theorem 2.27 (Fusionsregel für das Produkt von Zuständen). *Es seien ω_i Zustände mit DHR-Darstellungen π_i, die die Fusionsregeln $[\pi_i] \times [\pi_j] = \bigoplus_k N_{ij}^k [\pi_k]$ erfüllen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zustände ω_{ij}^k, die eine Summe von höchstens N_{ij}^k reinen Zuständen sind, sodass*

$$\omega_i \times \omega_j = \sum_{k: N_{ij}^k \geq 1} \omega_{ij}^k \ .$$

Beweis. E_k seien Projektoren auf den irreduziblen Darstellungsraum von $\pi_k \prec \pi_i \times \pi_j$, sodass

$$\sum_k E_k = \mathrm{id}\ .$$

Dann gibt es für alle i, j, k und $n = 1, \dots, N_{ij}^k$ Isometrien $T_{ij}^{k,n}$, sodass

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_{ij}^k} T_{ij}^{k,n^*} T_{ij}^{k,n} &= E_k\ , \\ T_{ij}^{k,n} \varrho_i \circ \varrho_j &= \varrho_k T_{ij}^{k,n} \text{ und} \\ T_{ij}^{k,n^*} T_{ij}^{k',n'} &= \delta_{kk'} \delta_{nn'}\ . \end{aligned}$$

Die Verknüpfung zweier DHR-Endomorphismen lässt sich also in eine Summe zerlegen:

$$\varrho_i \circ \varrho_j = \sum_k \sum_{n=1}^{N_{ij}^k} T_{ij}^{k,n^*} \varrho_k T_{ij}^{k,n}\ .$$

Nach Lemma 2.25 gibt es nun für jedes i ein S_i, sodass für die Zustände ω_i die Identität $\omega_i = \omega_0(S_i^* \varrho_i S_i)$ gilt. Dann ist

$$\omega_{ij}^k := \sum_{n=1}^{N_{ij}^k} \omega_0(S_i^* \varrho_i(S_j)^* T_{ij}^{k,n^*} \varrho_k\, T_{ij}^{k,n} \varrho_i(S_j) S_i)$$

ein Zustand im Sektor $[\pi_k]$, der aus einer Summe von höchstens N_{ij}^k reinen Zuständen besteht. Weiter folgt:

$$\begin{aligned} \omega_i \times \omega_j &= \omega_0(S_i^* \varrho_i(S_j)^*\, \varrho_i \circ \varrho_j\, \varrho_i(S_j) S_i) \\ &= \sum_k \sum_{n=1}^{N_{ij}^k} \omega_0(S_i^* \varrho_i(S_j)^* T_{ij}^{k,n^*} \varrho_k\, T_{ij}^{k,n} \varrho_i(S_j) S_i) \\ &= \sum_k \omega_{ij}^k \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der ω_{ij}^k folgt aus der Eindeutigkeit der N_{ij}^k. Außerdem sind die E_k und S_i bis auf Unitarität eindeutig bestimmt. Die Wahlfreiheit bei den $T_{ij}^{k,n}$ wird durch die Summation über n bei der Definition der Zustände ω_{ij}^k wieder aufgehoben. ■

2.4.4 Konjugation

In der DHR-Theorie wird der zu dem irreduziblen Sektor $[\pi]$ mit endlicher statistischer Dimension konjugierte Sektor $[\bar{\pi}]$ durch die Bedingung

$$[\bar{\pi}] \times [\pi] \quad \succ \quad [\pi_0]$$

eindeutig definiert.

Definition 2.28 (konjugierter Zustand). *Es sei ω ein irreduzibler Zustand. Wir wählen wieder eine Observable $S \in \mathcal{A}(O)$ nach Lemma 2.25, sodass $\omega = \omega_0(S\varrho S^*)$. Es sei ϱ ein in O lokalisierter DHR-Endomorphismus mit Konjugiertem $\bar{\varrho}$, der dann ebenfalls in O lokalisiert ist. Es gibt Isometrien, die folgende Sektoren verketten:*

$$R : id \to \bar{\varrho}\varrho \text{ und } \bar{R} : id \to \varrho\bar{\varrho} \, .$$

Außerdem können sie so gewählt werden, dass sie die Bedingung

$$R^* \bar{\varrho}(\bar{R}) d(\varrho) = 1 = \bar{R}^* \varrho(R) d(\varrho) \, .$$

erfüllen. Der zu ω konjugierte Zustand wird dann durch

$$\bar{\omega} := d_{st}([\omega])\omega_0(\bar{\varrho}(S^*)R \, \bar{\varrho} \, R^* \bar{\varrho}(S))$$

eindeutig definiert.

Theorem 2.29 (Eigenschaften des konjugierten Zustandes). *Für den zu ω konjugierten Zustand $\bar{\omega}$ gelten folgende Aussagen:*

1. $\bar{\bar{\omega}} = \omega$
2. $\omega \times \bar{\omega} \geq d_{st}([\omega])^{-1}\omega_0(\chi_\omega(1) \, . \, \chi_\omega(1)^*)$
3. $\bar{\omega} \times \omega \geq d_{st}([\bar{\omega}])^{-1}\omega_0(\chi_{\bar{\omega}}(1) \, . \, \chi_{\bar{\omega}}(1)^*)$

Beweis. Siehe Seiten 204 f. in [Fre92]. ■

Vermutung 2.30 (Vermutung von Fredenhagen [Fre92]). *Die Ungleichungen aus Theorem 2.29 bestimmen $\bar{\omega}$ und $d([\omega])$ vollständig:*

Definiere

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\omega := \{\omega' \in \mathcal{S}_0 \, \exists \lambda > 0 \quad : \quad & \omega \times \omega' \geq \lambda\omega_0(\chi_\omega(1) \, . \, \chi_\omega(1)^*) \text{ und} \\ & \omega' \times \omega \geq \lambda\omega_0(\chi_{\omega'}(1) \, . \, \chi_{\omega'}(1)^*)\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_\omega(\omega') := sup\{\lambda \in \boldsymbol{R} \quad : \quad & \omega \times \omega' \geq \lambda\omega_0(\chi_\omega(1) \, . \, \chi_\omega(1)^*) \text{ und} \\ & \omega' \times \omega \geq \lambda\omega_0(\chi_{\omega'}(1) \, . \, \chi_{\omega'}(1)^*)\} \, . \end{aligned}$$

Dann gelten:

1. $d_{st}([\omega])^{-1} = \sup_{\omega' \in \mathcal{S}_\omega} \lambda_\omega(\omega')$ *und*

2. $\omega' \in \mathcal{S}_\omega : \lambda_\omega(\omega') = d_{st}([\omega])^{-1} \Rightarrow \omega' = \bar{\omega}$.

Bemerkung 2.31. *Die Aussagen in diesem Abschnitt wurden zwar nur für die Zustände in $\mathcal{S}_0$ bewiesen, sie können jedoch auf $\mathcal{S}$ erweitert werden, indem man Folgen von Zuständen aus $\mathcal{S}_0$ betrachtet.*

2.5 Produkt von Zuständen am Beispiel SO(2)

In diesem Abschnitt stellen wir ein Modell vor, um den Gebrauch des Produktes von Zuständen zu illustrieren und um es später mit unserem zu vergleichen. Dieses Modell wurde erstmals von Fredenhagen berechnet [Fre94].

Gegeben seien zwei chirale Ströme j_1 und j_2. Die beschränkten Funktionen des Stromes $j(f) := \int j_1 f_1 + \int j_2 f_2$ mit Paaren von Testfunktionen $f = (f_1, f_2)$ erzeugen die Stromalgebra $\mathcal{B}$. Auf dieser wirkt die Gruppe SO(2) durch Drehung des Paares von Testfunktionen: Das Gruppenelement $R_\varphi \in \mathrm{SO}(2)$ induziert den Automorphismus $\alpha_\varphi : j(f) \mapsto j(R_\varphi f)$.

Für Funktionenpaare F, deren Ableitungen Testfunktionen sind, können wir DHR-Endomorphismen ρ_F definieren:

$$\rho_F : \mathcal{B} \to \mathcal{B},\ j(f) \mapsto (j + F')(f) = j(f) + F'(f) \ .$$

Eigentlich sind die unbeschränkten Operatoren $j(f)$ keine Elemente der Algebra $\mathcal{B}$, da diese von den beschränkten Weyl-Operatoren der Form $\exp(ij(f))$ erzeugt wird. Hier und im Folgenden werden wir aber immer mit den unbeschränkten Operatoren rechnen, da dieses die Berechnungen vereinfacht. Die Ergebnisse lassen sich jedoch sofort von den unbeschränkten Operatoren auf die Weyl-Operatoren übertragen.

Die Sektoren der Algebra $\mathcal{B}$ werden durch die Ladung $\vec{q}_F := (q_{F,1}, q_{F,2}) := (\int F_1', \int F_2')$ indiziert, das heißt für Testfunktionen F und G mit gleicher Ladung $\vec{q}_F = \vec{q}_G$ folgt, dass die Sektoren gleich sind: $[\rho_F] = [\rho_G]$. An dem Ausdruck für $\rho_F \circ \rho_g$ können wir die Fusionsregeln ablesen: $[\vec{q}_F] \times [\vec{q}_G] = [\vec{q}_F + \vec{q}_G]$.

Die Observablenalgebra $\mathcal{A}$ ist die Fixpunktalgebra der Ströme unter der Symmetriegruppe SO(2): $\mathcal{A} := \mathcal{B}^{\mathrm{SO}(2)}$. Typische Observable sind beschränkte Funktionen des Operators $T(f) := \mu(j(f)) := \int_0^{2\pi} j(R_\varphi f) \frac{d\varphi}{2\pi}$. Schränken wir einen DHR-Zustand $\omega_F = \omega_0 \circ \rho_F$ der Stromalgebra $\mathcal{B}$ auf die Observablen ein, so ist nicht mehr klar, wie der DHR-Endomorphismus zu $\omega_F|\mathcal{A}$ aussieht, da ρ_F aus den Observablen herausführt: $\rho_F(\mathcal{A}) \not\subset \mathcal{A}$. Die gemäß Theorem 2.21 zu $\omega_F|\mathcal{A}$ gehörende positive Abbildung χ_F kann jedoch durch Mittelung über die Gruppe SO(2) berechnet werden:

$$\chi_F = \mu \circ \rho_F : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ j(f) \mapsto j(f) + J(F, f) \ .$$

Hierbei ist das Funktional J mit Hilfe der modifizierten Besselfunktion J_0 definiert durch

$$J(F,f) := \ln J_0 \left(2\sqrt{\left(\int F_1 f_1 + \int F_2 f_2\right)^2 + \left(\int F_1 f_2 - \int F_2 f_1\right)^2} \right) .$$

Für die Sektoren der Observablen spielt der Betrag der Ladung die entscheidende Rolle: $q_F := \sqrt{q_{F,1}^2 + q_{F,2}^2}$. Falls die Ladung verschwindet, lässt sich der Zustand $\omega_F|\mathcal{A}$ gemäß Theorem 2.14 entsprechend den Darstellungen der Lie-Gruppe SO(2) zerlegen: $\omega_F(\mathcal{A}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \omega_{F,n}$. Für nicht verschwindende Ladung indiziert q_F die Sektoren. Mit

$$\omega_F \times \omega_G = \omega_0 \circ \chi_F \circ \chi_g = \int_0^{2\pi} \omega_{F+R_\varphi G} \, \frac{d\varphi}{2\pi}$$

und Theorem 2.26 folgt für die Fusionsregeln:

$$[\omega_F] \times [\omega_G] \succ [\omega_F \times \omega_G] = \int_0^{\pi}\!\!\!\!\!\!\bigoplus \left[\sqrt{q_F^2 + q_G^2 + 2 q_F q_G cos\varphi} \right] \frac{d\varphi}{\pi} .$$

Zur kontinuierlichen direkten Summe tragen alle Sektoren mit Ladung im Intervall $[|q_F - q_G|, q_F + q_G]$ bei. Für die statistische Dimension folgt aus den Fusionsregeln:

$$d_{\mathrm{st}}([q_F]) d_{\mathrm{st}}([q_G]) \geq \sum_{q\in[|q_F - q_G|, q_F + q_G]} d_{\mathrm{st}}([q]) = \infty .$$

Also haben die Sektoren mit nicht verschwindender Ladung unendliche statistische Dimension.

Kapitel 3

Das Modell der SU(2)

Die Algebra $\mathcal{F}$ sei die von zwei komplexen chiralen Fermi-Feldern ψ_1 und ψ_2 mit den Antivertauschungsrelationen

$$[\psi_i(x), \psi_j^*(y)]_+ \quad = \quad \delta_{i,j}\, \delta(x-y)$$

erzeugte CAR-Feldalgebra. Eine lokale Eichtransformation $\gamma : \mathbf{R} \to \mathrm{SU}(2)$ induziert einen *-Algebrenautomorphismus

$$\alpha_\gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ \psi_i \mapsto \sum_{j=1}^{2} \psi_j \gamma_{ji},\ i = 1,2$$

durch Fortsetzung auf die gesamte CAR-Feldalgebra. Entsprechend definieren wir für eine globale Eichtransformation $k \in \mathrm{SU}(2)$:

$$\gamma_k : x \mapsto k \text{ und } \alpha_k := \alpha_{\gamma_k}\ .$$

Lemma 3.1. *Für zwei Eichtransformationen γ und δ ist die Induktion von Automorphismen mit der punktweisen Matrixmultiplikation der Eichtransformationen verträglich: $\alpha_\gamma \circ \alpha_\delta = \alpha_{\gamma\delta}$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
\alpha_\gamma\left(\sum_{j=1}^{2} \psi_j \delta_{ji}\right) &= \sum_{j=1}^{2} \alpha_\gamma(\psi_j)\delta_{ji} \\
&= \sum_{j,k=1}^{2} \psi_k \gamma_{kj} \delta_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^{2} \psi_k (\gamma\delta)_{ki} \\
&= \alpha_{k\delta}(\psi_i)
\end{aligned}$$

■

Für zulässige Testfunktionen $f : \mathbf{R} \to \mathrm{su}(2)$ definieren wir den ausgeschmierten Strom

$$j(f) := \int_{\mathbf{R}} \sum_{i,j=1}^{2} :\psi_i f_{ij} \psi_j^*:$$

mit der Normalordnung

$$:\psi_i \psi_j^*:(x) := \lim_{y \to x} \psi_i(x) \psi_j^*(y) - \frac{1}{2\pi} \Delta(x-y) \delta_{i,j} \ ,$$

wobei die Abkürzung $\Delta(z) := \lim_{\epsilon \searrow 0} (iz + \epsilon)^{-1}$ verwendet wurde. Die beschränkten Funktionen des Stromes erzeugen die Stromalgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

Bemerkung 3.2. *Der Automorphismus $\alpha_\gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ist ein DHR-Endomorphismus [DHR71], falls der Träger der lokalen Eichtransformation γ beschränkt ist, das heißt falls es ein Gebiet O gibt, $\overline{O} \neq \overline{\boldsymbol{R}}$ beziehungsweise $\overline{O} \neq S^1$, sodass gilt: $\gamma | O^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Bemerkung 3.3. *Der Automorphismus $\alpha_\gamma | \mathcal{B} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ist ein DHR-Endomorphismus, falls der Träger der lokalen Eichtransformation γ modulo $\boldsymbol{Z}_2$ beschränkt ist, das heißt falls es ein Gebiet O gibt, $\overline{O} \neq \overline{\boldsymbol{R}}$ beziehungsweise $\overline{O} \neq S^1$, sodass gilt: $\gamma | O^\perp = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Man sagt: Der Automorphismus α_γ ist in O lokalisiert.

Da es öfter notwendig sein wird, in einer speziellen Basis zu rechnen, wählen wir als Basis der Lie-Algebra su(2) beziehungsweise ihrer Komplexifikation:

$$T^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \ T^2 = \frac{1}{\sqrt{2}i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \ T^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \ T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \ T^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

In beiden Fällen hat die Cartan-Metrik $g^{ab} := \mathrm{Sp}(T^a T^b)$ nur die Einträge 1 oder 0. Die Cartan-Unteralgebra $\mathcal{C}$ der Stromalgebra $\mathcal{B}$ wird von dem Strom $j^3 := j(T^3)$ erzeugt. Hier müssen wir jedoch den Erzeuger der Cartan-Unteralgebra anders als in Unterabschnitt 2.1.3 normieren: $Q^3 := \frac{1}{\sqrt{2}} j_0^3$.

Die Observablenalgebra $\mathcal{A}$ ist die Algebra der Fixpunkte der Stromalgebra $\mathcal{B}$ unter der globalen Eichgruppe SO(3):

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\mathrm{SO}(3)} := \{ A \in \mathcal{B} \, \forall k \in \mathrm{SU}(2) : \alpha_k(A) = A \} \ .$$

Wegen der Identität $\alpha_k|\mathcal{B} = \alpha_{-k}|\mathcal{B}$ ist auf der Stromalgebra $\mathcal{B}$ nur die Gruppe $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathbf{Z}_2$ treu dargestellt.

In [Reh94] hat Rehren gezeigt, dass diese Observablenalgebra die Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c = 1$ ist. Sie wird also von dem Sugawara-Energie-Impuls-Tensor aus Theorem 2.5, der zu der Stromalgebra $\mathcal{B}$ gehört, erzeugt.

3.1 Sektoren der Algebren

Wir haben nun eine Reihe von Algebren eingeführt, deren Sektorstruktur wir im Folgenden kurz erläutern. Die CAR-Feldalgebra $\mathcal{F}$ besitzt als einzige irreduzible Darstellung mit positiver Energie die bekannte Fockraum-Darstellung mit dem Vakuum als Grundzustand.

Wie wir bereits in Lemma 2.6 erfahren haben, existieren für die Stromalgebra $\mathcal{B}$ genau zwei Sektoren: einer mit Isospin 0 zum Grundzustand Ω_0 und einer mit Isospin $\frac{1}{2}$ zum Grundzustand $\Omega_{\frac{1}{2}}$. Der Sektor mit Isospin $\frac{1}{2}$ ist zum Beispiel zum Grundzustand $\left(\psi_1(f_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})})\Omega_0, \psi_2(f_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})})\Omega_0\right)$ in dem Fockraum der CAR-Feldalgebra enthalten.

Die Cartan-Unteralgebra $\mathcal{C}$ lässt sich als Fixpunktalgebra der Stromalgebra $\mathcal{B}$ schreiben: $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{\mathrm{U}(1)}$, wobei die Gruppe U(1) mittels $e^{i\varphi} \mapsto \alpha_{\exp(i\varphi T^3/\sqrt{2})}$ auf den Strömen treu dargestellt ist. Gemäß Theorem 2.14 zerfällt die Strom-Vakuumdarstellung bei Einschränkung auf die Cartan-Unteralgebra in Sektoren der Cartan-Unteralgebra, die mit einer Zahl $q \in \mathbf{Z} \cong \widehat{\mathrm{U}(1)}$ indiziert werden können und gemäß Theorem 2.16 die Fusionsregeln der U(1) erfüllen: $[q_1] \times [q_2] = [q_1 + q_2]$. Die Cartan-Unteralgebra $\mathcal{C}$ besitzt jedoch ein ganzes Kontinuum von Sektoren, in denen der bezüglich $\mathcal{C}$ zentrale Operator Q^3 einen beliebigen reellen Wert annehmen kann. In Kapitel 3.3 werden wir sehen, wie wir diese Sektoren mittels Automorphismen aus dem Vakuum erzeugen können.

Die Sektorstruktur der Virasoro-Algebra haben wir bereits im Unterabschnitt 2.1.2 dargelegt. Wir werden nun versuchen, diese Sektoren in den beiden Sektoren der Stromalgebra wiederzufinden. Die Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c = 1$ ist eine Fixpunktalgebra der Stromalgebra, und wir können den Zusammenhang zwischen dem Strom-Vakuumsektor und Sektoren der Virasoro-Algebra mit Hilfe der DHR-Theorie untersuchen: Gemäß Theorem 2.14 zerfällt der Strom-Vakuumsektor analog zu den Darstellungen der Gruppe SO(3) in Sektoren der Virasoro-Algebra, die sich mit dem Isospin $J \in \mathbf{N}_0 \cong \widehat{\mathrm{SO}(3)}$ indizieren lassen:

$$\pi_{0,\mathcal{B}}|\mathcal{A} \;=\; \bigoplus_{J\in\mathbf{N}_0} (2J+1)\pi_J \;.$$

Die Vektoren $\psi_{J,m} := j_0^{+m}\psi_J$ mit $\psi_J := j_{-1}^{-\,J} j^0_{-J(J-1)}\Omega_0$ und $m = 0, \ldots, 2J$ bilden ein Multiplett von Grundzuständen der Sektoren $[\pi_J]$. Wegen Lemma 2.9 sind dieses Grundzustände der Virasoro-Algebra. Sie haben die Energie J^2 und liegen damit im Sektor $[h = J^2] = [\pi_J]$. Also folgen mit Theorem 2.16 für die Sektoren der Virasoro-Algebra zur Grundzustandsenergie $h \in \mathbf{N}_0^2$ die Fusionsregeln:

$$[J_1^2] \times [J_2^2] = \bigoplus_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} [J^2] \,, \tag{3.1}$$

wobei $J_1, J_2 \in \mathbf{N}_0$. Eine Analyse des Charakters der Strom-Vakuumdarstellung

$$\chi_0(t,q) \quad = \quad p(t) \sum_{n \in \mathbf{N}_0} t^{n^2}(1-t^{2n+1}) \sum_{m=-n}^{n} q^m \tag{3.2}$$

ähnlich dem Beweis des Lemmas 2.9 zeigt, dass für einen gegebenen Vektor mit Ladung Q der zugehörige Grundzustand die Energie Q^2 hat. Somit sind in der Strom-Vakuumdarstellung ausschließlich die Sektoren $[h]$ der Virasoro-Algebra mit einer Grundzustandsenergie $h \in \mathbf{N}_0^2$ enthalten.

In dem Sektor der Strom-Algebra zu dem Grundzustand $\Omega_{\frac{1}{2}}$ finden wir weitere Sektoren der Virasoro-Algebra: Die Vektoren $\psi_{J,m} := {j_0^+}^m \psi_J$ mit $\psi_J := {j_{-1}^-}^J j^0_{-J^2} \Omega_{\frac{1}{2}}$ und $m = 0, \dots, 2J$ sind wieder wegen Lemma 2.9 Grundzustände der Virasoro-Algebra mit Energie $(J+\frac{1}{2})^2$. Sie liegen also in dem Sektor $[h = (J+\frac{1}{2})^2]$ der Virasoro-Algebra. Da der Vektor $\Omega_{\frac{1}{2}}$ kein Vakuum-Vektor ist, können wir in diesem Fall nicht die DHR-Theorie zu Hilfe nehmen, um die Fusionsregeln dieser Sektoren zu bestimmen. An dem Charakter dieser Darstellung der Stromalgebra

$$\chi_{\frac{1}{2}}(t,q) \quad = \quad p(t) \sum_{n \in \mathbf{N}_0 + \frac{1}{2}} t^{n^2}(1-t^{2n+1}) \sum_{m=-n}^{n} q^m$$

sehen wir wieder, dass in dieser Darstellung ausschliesslich die Sektoren $[(J+\frac{1}{2})^2]$ enthalten sind. Folglich sind genau die Sektoren der Virasoro-Algebra in den beiden Sektoren der Strom-Algebra enthalten, die eine endliche asymptotische Dimension haben (siehe Unterabschnitt 2.1.2).

Das Ziel dieser Arbeit wird es sein, Fusionsregeln für das Produkt $[h_1] \times [h_2]$ über den obigen Fall $h_1, h_2 \in \mathbf{N}_0^2$ hinaus zu berechnen. Wir werden hier bis zu dem Fall $h_1 \in (\frac{1}{2}\mathbf{N}_0)^2, h_2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ vordringen, es jedoch nicht bis zum allgemeinen Fall $h_1, h_2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ schaffen. Hierzu werden wir im nächsten Kapitel Zustände untersuchen, die zu gegebenen Sektoren der Virasoro-Algebra gehören und mittels positiver Abbildungen aus dem Vakuum erzeugt werden.

3.2 Zustände auf $\mathcal{A}$

Für eine Eichtransformation γ mit kompaktem Träger ist nach Bemerkung 3.3 der Automorphismus $\alpha_\gamma|\mathcal{B}$ ein DHR-Endomorphismus auf der Stromalgebra $\mathcal{B}$. Sei ω_0 der Vakuumzustand. Der zu dem DHR-Endomorphismus $\alpha_\gamma|\mathcal{B}$ assoziierte

Zustand $\xi_\gamma := \omega_0 \circ \alpha_\gamma|\mathcal{B}$ auf der Algebra $\mathcal{B}$ induziert durch Einschränkung den Zustand $\xi_\gamma|\mathcal{A}$ auf der Algebra $\mathcal{A}$. Der zu dem Zustand $\xi_\gamma|\mathcal{A}$ gehörende DHR-Endomorphismus auf den Observablen ist jedoch nicht die Einschränkung $\alpha_\gamma|\mathcal{A}$, da das Bild $\alpha_\gamma(\mathcal{A})$ im Allgemeinen keine Teilmenge der Observablen ist.

Zunächst beschreiben wir die Wirkung des Endomorphismus $\alpha_\gamma|\mathcal{B}$ durch den

Satz 3.4. *Sei $\gamma : \boldsymbol{R} \to SU(2)$ eine lokale Eichtransformation. Für zulässige Testfunktionen $f : \boldsymbol{R} \to su(2)$ gilt dann:*

$$\alpha_\gamma(j(f)) \quad = \quad j(\gamma f \gamma^{-1}) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\boldsymbol{R}} Sp(f\gamma^{-1}\gamma') \; .$$

Beweis. Wir berechnen zunächst die Wirkung des Endomorphismus auf einem normalgeordneten Produkt zweier Fermi-Felder. Wir benutzen die Definition der Normalordnung der Fermi-Felder. Dann wird der Grenzwert durch Hinzufügen eines Terms proportional zu $\Delta(x-y)\delta_{\alpha,\beta}$ auf den Feldern ausgeführt:

$$\begin{aligned}
\alpha_\gamma(:\psi_i\psi_j^*:)(x) &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \lim_{y\to x} \left[\psi_\alpha(x)\gamma_{\alpha i}(x)\psi_\beta^*(y)\overline{\gamma_{\beta j}(y)} - \frac{1}{2\pi}\Delta(x-y)\delta_{i,j}\right] \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Big(\gamma_{\alpha i}(x)\overline{\gamma_{\beta j}(x)} :\psi_\alpha\psi_\beta^*: (x) + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \lim_{y\to x} \left[\Delta(x-y)(\gamma_{\alpha i}(x)\overline{\gamma_{\beta j}(y)}\delta_{\alpha,\beta} - \delta_{i,j})\right]\Big) \; .
\end{aligned}$$

Wenn wir nun $\overline{\gamma_{\beta j}(y)}$ an der Stelle $y = x$ Taylor-entwickeln und berücksichtigen, dass in der Gruppe SU(2) das Komplex-Konjugieren identisch ist mit dem Transponieren und Invertieren, fallen die Summanden, die nur von x und nicht von y abhängen, wegen der Zyklizität der Spur weg, und es bleibt der zu $y - x$ proportionale Teil:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \lim_{y\to x} \left[\Delta(x-y)(\gamma_{\alpha i}(x)\overline{\gamma_{\beta j}(y)}\delta_{\alpha,\beta} - \delta_{i,j})\right] &= i(\partial\gamma^{-1}\gamma)_{ji}(x) \\
&= -i(\gamma^{-1}\gamma')_{ji}(x) \; .
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt mit der Produktregel der Differentiation aus der Identität $\gamma^{-1}\gamma = \mathrm{id}$. Dieses setzen wir nun in die Definition des Stromes ein:

$$\begin{aligned}
\alpha_\gamma(j(f)) &= \int_{\mathbf{R}} \sum_{i,j=1}^{2} f_{ij}(x)\alpha_\gamma(:\psi_i\psi_j^*:)(x)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} \sum_{i,j}^{2} f_{ij}(x)\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \gamma_{\alpha i}(x)\gamma_{j\beta}^{-1}(x)\ :\psi_\alpha\psi_\beta^*:\ (x) + \frac{1}{2\pi i}(\gamma^{-1}\gamma')_{ji}(x)\right) dx \\
&= j(\gamma f\gamma^{-1}) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{Sp}(\gamma^{-1}\gamma' f)\ .
\end{aligned}$$

■

Mit diesem Satz können wir nun die Wirkung des Endomorphismus α_γ auf den Observablen untersuchen. Hier gilt der

Satz 3.5. *Für zulässige Testfunktionen $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ wird die Wirkung des Endomorphismus α_γ auf dem Sugawara-Energie-Impuls-Tensor T zur Stromalgebra $\mathcal{B}$ durch*

$$\alpha_\gamma(T(g)) = T(g) - ij(g\gamma'\gamma^{-1}) - \frac{1}{4\pi}\int_{\boldsymbol{R}} g Sp(\gamma'\gamma^{-1}\gamma'\gamma^{-1})$$

beschrieben.

Beweis. Ganz analog zum ersten Teil des Beweises des Satzes 3.4 folgt hier für die Wirkung auf dem normalgeordneten Produkt zweier Ströme aus der Definition der Normalordnung mit Hilfe der Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
\alpha_\gamma(:j^a j^b:) &= R^a{}_c R^b{}_d\ :j^a j^b: \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\left(iS^a R^b{}_e + iS^b R^a{}_e + f^{cd}{}_e R^a{}_c R'^b{}_d\right) j^e \qquad (3.3)\\
&\quad -\frac{1}{8\pi^2}\left(R''^b{}_c R^{ac} + 2S^a S^b\right)\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Abkürzungen $R^{ab} := \mathrm{Sp}(\gamma T^a \gamma^{-1} T^b)$ und $S^a := \mathrm{Sp}(\gamma^{-1}\gamma' T^a)$ mit einer Basis T^a der Lie-Algebra su(2) benutzt haben. Die Metrik ist die Cartan-Metrik $g^{ab} := \mathrm{Sp}(T^a T^b)$, und die Strukturkonstanten sind durch $if^{ab}{}_c := \mathrm{Sp}([T^a T^b]T_c)$ definiert. Aus den für $A, B, X, Y \in \mathrm{su}(2)$ gruppentheoretisch herleitbaren Identitäten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}([X,A][Y,B]) &= -2\left(\mathrm{Sp}(XY)\mathrm{Sp}(AB) - \mathrm{Sp}(XB)\mathrm{Sp}(YA)\right) \\
\mathrm{Sp}(\gamma'\gamma^{-1}T^a) &= S_b R^{ba} \\
f^{bd}{}_c R^a{}_b R'^c{}_d &= -i\mathrm{Sp}([\gamma^{-1}T_c\gamma, T^a][\gamma^{-1}\gamma', T^b]) \\
&= 2i(g^{ab}R^d{}_c S_d - S^a R^b{}_c) \\
i(R^a{}_c S^b - R^b{}_c S^a) &= \frac{1}{2} f^{ab}{}_d R'^d{}_c
\end{aligned}$$

folgt für den zweiten Summanden in der Formel (3.3)

$$\begin{aligned} iS^a R^b{}_e + iS^b R^a{}_e + f^{cd}{}_e R^a{}_c R'^b{}_d &= -iS^a R^b{}_e + iS^b R^a{}_e + 2ig^{ab} S_c R^c{}_e \\ &= \frac{1}{2} f^{ab}{}_c R'^c{}_e + 2ig^{ab} S_c R^c{}_e \ . \end{aligned}$$

Um den dritten Summanden in der Formel (3.3) weiter vereinfachen zu können, benötigen wir zusätzlich die Identitäten

$$\begin{aligned} R^{ac} R^b{}_c &= g^{ab} \\ R^{ac} R'^b{}_c &= i f^{ab}{}_c S^c \\ R'^{ac} R'^b{}_c &= \mathrm{Sp}([\gamma^{-1}\gamma', T^a][\gamma^{-1}\gamma', T^b]) \\ R^a{}_c R^b{}_d f^{cd}{}_e &= f^{ab}{}_c R^c{}_e \ , \end{aligned}$$

aus denen die Gleichung

$$R''^b{}_c R^{ac} + 2S^a S^b = -i f^{ab}{}_c S'^c + 2g^{ab} S^c S_c \ .$$

für den dritten Summanden folgt. Damit ergibt sich die Wirkung des Endomorphismus:

$$\begin{aligned} \alpha_\gamma(:j^a j^b:) = {} & R^a{}_c R^b{}_d :j^a j^b: \\ & + \frac{1}{2\pi i} \left(2g^{ab} R^c{}_d S_c - \frac{1}{2} i f^{ab}{}_c R'^c{}_d \right) j^d \\ & - \frac{1}{8\pi^2} \left(2g^{ab} S^c S_c - i f^{ab}{}_c S'^c \right) \ . \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir mit dem Theorem 2.5 die Behauptung. ■

Aus Satz 3.5 folgt, dass das Bild der Observablen unter dem Endomorphismus α_γ im Allgemeinen keine Teilmenge der Observablen ist und somit der DHR-Endomorphismus zu dem Zustand $\xi_\gamma|\mathcal{A}$ ersteinmal nicht explizit zugänglich ist. Relativ leicht lässt sich jedoch die gemäß Definition 2.19 zu dem Zustand $\xi_\gamma|\mathcal{A}$ gehörende positive Abbildung finden: Die Mittelung über die globale Eichgruppe SU(2) definiert eine positive, lineare Abbildung

$$\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{A}, B \mapsto \int_{\mathrm{SU}(2)} \alpha_k(B) dk \ ,$$

wobei dk das Haar-Maß ist.

Lemma 3.6 (Eigenschaften von μ).

1. *μ ist wohldefiniert.*

2. *μ ist positiv.*

3. *μ ist linear.*

4. *μ ist beschränkt.*

5. *$\mu|\mathcal{A} = id_{\mathcal{A}}$.*

Beweis.

1. μ ist wohldefiniert: Sei $A \in \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_k \circ \mu(A) &= \alpha_k \left(\int_{\mathrm{SU}(2)} \alpha_l(A) dl \right) \\
&= \int_{\mathrm{SU}(2)} \alpha_k \circ \alpha_l(A) dl \\
&= \int_{\mathrm{SU}(2)} \alpha_{kl}(A) dl \\
&= \int_{\mathrm{SU}(2)} \alpha_l(A) dl \\
&= \mu(A)
\end{aligned}$$

   Also bildet μ in die Fixpunkte der Stromalgebra $\mathcal{B}$ unter der globalen Eichsymmetrie SU(2), und damit in die Observablen $\mathcal{A}$ ab.

2. μ ist positiv: Dieses folgt sofort aus der Definition des Bochner-Integrals [Boc33] und der Positivität des Haar-Maßes.

3. μ ist linear, da das Bochner-Integral und α_k linear sind.

4. μ ist beschränkt: Sei $A \in \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
||\mu(A)|| &= || \int_{\mathrm{SU}(2)} \alpha_k(A) dk|| \\
&\leq \int_{\mathrm{SU}(2)} ||\alpha_k(A)|| dk \\
&\leq ||A|| \int_{\mathrm{SU}(2)} dk \\
&= ||A|| \, ,
\end{aligned}$$

   da α_k ein Algebrenautomorphismus ist. Also folgt: $||\mu|| = 1$.

5. $\mu|\mathcal{A} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$: Für eine Observable $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \int\limits_{SU(2)} \alpha_k(A)dk \\
&= \int\limits_{SU(2)} Adk \\
&= A \int\limits_{SU(2)} dk \\
&= A\,.
\end{aligned}$$

■

Definition 3.7. *Für eine lokale Eichtransformation $\gamma : \boldsymbol{R} \to SU(2)$ definieren wir nun die Abbildung $\chi_\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $A \mapsto \mu \circ \alpha_\gamma(A)$.*

Lemma 3.8 (Eigenschaften der Abbildung χ_γ).

1. *Die Abbildung χ_γ ist positiv und linear.*

2. *Der Automorphismus α_γ sei in dem Gebiet O lokalisiert (vergleiche Bemerkungen 3.2 und 3.3). Dann gilt für die Observablen $A \in \mathcal{A}(O)$ und B, $C \in \mathcal{A}(O^\perp)$:*

$$\chi_\gamma(BAC) = B\chi_\gamma(A)C\,.$$

Beweis.

1. Die Abbildungen μ und α_γ sind positiv und linear.

2. Seien α_γ in O lokalisiert und $A \in \mathcal{A}(O)$ und B, $C \in \mathcal{A}(O^\perp)$.

$$\begin{aligned}
\chi_\gamma(BAC) &= \int\limits_{SU(2)} \alpha_k(\alpha_\gamma(BAC))dk \\
&= \int\limits_{SU(2)} \alpha_k(B\alpha_\gamma(A)C)dk \\
&= \int\limits_{SU(2)} \alpha_k(B)\alpha_k(\alpha_\gamma(A))\alpha_k(C)dk \\
&= B \int\limits_{SU(2)} \alpha_k(\alpha_\gamma(A))dkC \\
&= B\chi_\gamma(A)C\,.
\end{aligned}$$

■

Definiere den Zustand ω_γ auf $\mathcal{A}$ durch:

$$\begin{aligned} \omega_\gamma &:= \omega_0 \circ \chi_\gamma \\ &= \omega_0 \circ \mu \circ \alpha_\gamma | \mathcal{A} \\ &= \omega_0 \circ \alpha_\gamma | \mathcal{A} \\ &= \xi_\gamma | \mathcal{A} \, . \end{aligned}$$

Hier ist entscheidend, dass das Vakuum invariant unter den globalen Eichtransformationen α_k und damit auch unter der Abbildung μ ist.

Hiermit können wir nun die Fusionsregeln berechnen:

Satz 3.9. *Es seien γ und δ zwei lokale Eichtransformationen mit kompaktem Träger im Sinne von Bemerkung 3.3. Die Fusionsregeln der von ihnen erzeugten Sektoren lassen sich wie folgt abschätzen:*

$$[\omega_\gamma] \times [\omega_\delta] \succ \int\!\!\!\!\!\!\bigoplus_{SU(2)} [\omega_{\gamma k \delta}] \, dk \, ,$$

wobei äquivalente Sektoren zu der kontinuierlichen direkten Summe nur einfach beitragen.

Beweis. Die Abbildungen χ_γ und χ_δ seien die mit Definition 3.7 den lokalen Eichtransformationen zugeordneten Abbildungen. Diese erfüllen wegen Lemma 3.8 die Bedingungen in Theorem 2.21 und sind somit die eindeutig zu den Zuständen ω_γ beziehungsweise ω_δ assoziierten positiven Abbildungen. Für die Verkettung dieser beiden Abbildungen können wir nun folgende Identität nachrechnen:

$$\begin{aligned} \chi_\gamma \circ \chi_\delta &= \mu \circ \alpha_\gamma \circ \mu \circ \alpha_\delta \\ &= \mu \circ \alpha_\gamma \left(\int_{\mathrm{SU}(2)} \alpha_k \circ \alpha_\delta \, dk \right) \\ &= \int_{\mathrm{SU}(2)} \mu \circ \alpha_{\gamma k \delta} \, dk \\ &= \int_{\mathrm{SU}(2)} \chi_{\gamma k \delta} \, dk \, . \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Theorem 2.26 und der Definition des Produktes von Zuständen die Behauptung. ∎

3.3 Spezielle Eichtransformationen

Bevor wir den Satz 3.9 anwenden können, benötigen wir weitere Informationen über die Wirkung der Endomorphismen α_γ auf den Erzeugenden der Observablenalgebra. Um die entsprechenden Rechnungen zu vereinfachen, beschränken wir uns im Folgenden auf den Spezialfall der lokalen Eichtransformationen

$$\gamma_q = \begin{pmatrix} e^{iq\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-iq\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

mit der reellen Funktion $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto -i \log \frac{x-i}{x+i}$. Diese liefern, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, alle Sektoren der Cartan-Unteralgebra und der Virasoro-Algebra. Anhand der Bemerkungen 3.2 und 3.3 sehen wir, dass die Automorphismen α_{γ_q} nicht lokalisiert sind. Sie sind jedoch auf der Cartan-Unteralgebra und der Virasoro-Unteralgebra asymptotisch lokalisiert, das heißt $\lim_{x\to\pm\infty}(\alpha_{\gamma_q}(j^3) - j^3)(x) = 0$ und $\lim_{x\to\pm\infty}(\alpha_{\gamma_q}(T) - T)(x) = 0$, wie wir in Satz 3.10 und Satz 3.11 sehen werden. Wir wählen dennoch diese Eichtransformationen, da sie den Vorteil leichter Rechnungen haben.

Wir übertragen nun die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt für die Wirkung des Automorphismus α_γ auf den Spezialfall der oben angegebenen lokalen Eichtransformationen.

Satz 3.10. *Für die lokalen Eichtransformationen γ_q ist die Wirkung auf der Cartan-Unteralgebra gegeben durch*

$$\alpha_{\gamma_q}(j^3) \quad = \quad j^3 + \frac{q}{\sqrt{2}\pi}\lambda' \,.$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Satz 3.4, wenn wir berücksichtigen, dass γ, γ^{-1} und γ' mit T^3 kommutieren. ∎

Satz 3.11. *Für die lokalen Eichtransformationen γ_q ist die Wirkung auf den Observablen gegeben durch*

$$\alpha_{\gamma_q}(T) \quad = \quad T + \sqrt{2}q\lambda' j^3 + \frac{1}{2\pi}q^2\lambda'^2 \,.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} \gamma_q'\gamma_q^{-1} &= \sqrt{2}iq\lambda' T^3 \quad \text{und} \\ \mathrm{Sp}(\gamma_q'\gamma_q^{-1}\gamma_q'\gamma_q^{-1}) &= -2q^2\lambda'^2 \end{aligned}$$

mit Satz 3.5. ∎

Um die Wirkung des Automorphismus α_γ auf den unbeschränkten Operatoren zu berechnen, benötigen wir zunächst das

Lemma 3.12. *Für die Funktionen $f_n^{(d)}$ aus Definition 2.3 gelten*

1. *für $m \in \boldsymbol{N}_0$: $\lambda'^m f_n^{(d)} = 2^m f_n^{(d-m)}$ und*
2. *für $n \in \boldsymbol{Z}$: $\int\limits_{\boldsymbol{R}} f_n^{(0)} = \pi\delta_{n,0}$.*

Beweis.

1. Diese Behauptung folgt sofort aus $\lambda'(x) = \frac{2}{(1+ix)(1-ix)}$.
2. Sei zunächst $n \in \mathbf{N}$. Dann hat die Funktion $f_n^{(0)}(z) = \frac{(1-iz)^{n-1}}{(1+iz)^{n+1}}$ einen $(n+1)$-fachen Pol an der Stelle $z = -i$. Da der Grenzwert $\lim_{|z|\to\infty} f_n^{(0)}(z)$ verschwindet, folgt aus dem Residuensatz:
$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbf{R}} f_n^{(0)} &= -2\pi i \mathrm{Res}(f_n^{(0)}, -i) \\ &= -2\pi i \frac{1}{n!} \lim_{z\to -i} \frac{d^n}{dz^n}(1+iz)^{n-1} \\ &= 0\ .\end{aligned}$$
Wegen der Identität $f_n^{(0)}(x) = f_{-n}^{(0)}(-x)$ folgt die Behauptung auch für den Fall $-n \in \mathbf{N}$.
Sei nun $n = 0$.
$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbf{R}} f_0^{(0)} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+ix)(1-ix)} dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \pi\ .\end{aligned}$$
Hiermit haben wir die Behauptung für alle $n \in \mathbf{Z}$ gezeigt.

■

Satz 3.13. *Die Wirkung der lokalen Eichtransformationen γ_q auf den Erzeugenden der Cartan-Unteralgebra $j_n^3 := j^3(f_n^{(1)})$ ist gegeben durch*
$$\alpha_{\gamma_q}(j_n^3) = j_n^3 + \sqrt{2}q\ .$$

Beweis. Die Behauptung folgt mit dem Lemma 3.12 aus Satz 3.10. ■

Satz 3.14. *Für die Erzeugenden der Virasoro-Algebra $L_n := \frac{1}{2}T(f_n^{(2)})$ gilt:*
$$\alpha_{\gamma_q}(L_n) = L_n + \sqrt{2}q j_n^3 + q^2\delta_{n,0}\ .$$

Beweis. Die Behauptung folgt mit dem Lemma 3.12 aus Satz 3.11. ■

3.4 Sektoren der Zustände

Nun gilt es zu klären, in welchem Sektor der Zustand ω_{γ_q} liegt. Betrachten wir zunächst den Zustand ω_{γ_q} als Zustand auf der Cartan-Unteralgebra! Ihre Sektoren sind durch die Eigenwerte des in der Cartan-Unteralgebra zentralen Operators $Q^3 := \frac{1}{\sqrt{2}} j_0^3$ charakterisiert. Aus Satz 3.13 folgt: $\omega_{\gamma_q}(Q^3) = q$. Mit Satz 3.10 und Theorem 2.26 sehen wir, dass die zu den Zuständen ω_{γ_q} gehörenden Sektoren der Cartan-Unteralgebra die Fusionsregeln

$$[\omega_{\gamma_q}] \times [\omega_{\gamma_p}] \succ [\omega_0 \circ \alpha_{\gamma_q} \circ \alpha_{\gamma_p}] = [\omega_{\gamma_{q+p}}]$$

erfüllen. Dieses sind gerade die Fusionsregeln, die wir in Abschnitt 3.1 mit Hilfe der DHR-Theorie für $q \in \mathbf{Z}$ hergeleitet haben. Jetzt wissen wir allerdings, dass sie für beliebige $q \in \mathbf{R}$ gelten. Zu jedem Sektor der Cartan-Unteralgebra können wir also einen dazugehörigen Zustand ω_{γ_q} finden.

Wenden wir uns nun dem Zustand ω_{γ_q} als Zustand auf der Virasoro-Algebra zu! Bei gegebener zentraler Ladung c werden die Sektoren eindeutig durch den Eigenwert h des Grundzustandsvektors bezüglich des Operators L_0 charakterisiert (siehe Unterabschnitt 2.1.2). Das Vakuum Ω_0 ist invariant unter der konformen Gruppe und unter den globalen Eichtransformationen, deshalb vernichten die Operatoren L_0 und Q^3 das Vakuum. Also folgt aus Satz 3.14 für den Erwartungswert des Operators L_0: $\omega_{\gamma_q}(L_0) = q^2$. Da die Abbildung α_{γ_q} ein Algebrenhomomorphismus ist, gilt insbesondere $\alpha_{\gamma_q}(L_0^2) = \alpha_{\gamma_q}(L_0)^2$. Daraus folgt für die Varianz des Operators L_0 im Zustand ω_{γ_q}: $\omega_{\gamma_q}(L_0^2) - \omega_{\gamma_q}(L_0)^2 = 0$. Die Zahl q^2 ist also der Eigenwert des Operators L_0 in diesem Zustand.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Zustand ω_{γ_q} ein Grundzustand ist: Sei $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\omega_{\gamma_q}(L_n^* L_n) &= \omega_0(\alpha_{\gamma_q}(L_n)^* \alpha_{\gamma_q}(L_n)) \\
&= ||\alpha_{\gamma_q}(L_n)\Omega_0||^2 \\
&= ||L_n\Omega_0 + \sqrt{2} q j_n^3 \Omega_0||^2 \\
&= 0 \,,
\end{aligned}$$

denn L_n vernichtet das Vakuum, da es ein Grundzustand ist, und j_n^3 vernichtet das Vakuum, da j_n^3 wegen Formel (2.8) ein Absteigeoperator bezüglich des Operators L_0 ist. Also ist ω_{γ_q} der Grundzustand im Sektor zu $h = q^2$. Durch Wahl des Parameters $q \geq 0$ können wir alle Sektoren der Algebra $\mathcal{A}$ präparieren.

3.5 Fusionsregeln

In diesem Abschnitt versuchen wir, für zwei beliebige Sektoren $[h_1]$ und $[h_2]$ die Fusionsregeln zu berechnen. Zunächst wählen wir die lokalen Eichtransformationen γ_1 und γ_2 vom Typ (3.4) so, dass sie die richtigen Sektoren erzeugen:

$[\omega_{\gamma_i}] = [h_i]$. Die Parameter q_i der lokalen Eichtransformationen γ_i müssen also die Bedingung $q_i = \sqrt{h_i}$ erfüllen. Um dafür die kontinuierliche direkte Summe aus Satz 3.9 berechnen zu können, untersuchen wir den Zustand $\omega_{\gamma_1 k \gamma_2}$ näher. Für den entsprechenden Endomorphismus gilt der

Satz 3.15. *Es seien $\gamma_1,\ \gamma_2 : \boldsymbol{R} \to SU(2)$ zwei lokale Eichtransformationen vom Typ (3.4) mit Parametern q_1 beziehungsweise q_2. Weiter sei $k \in SU(2)$ mit der Parametrisierung*

$$k = \begin{pmatrix} k_1 & ik_2 \\ i\overline{k_2} & \overline{k_1} \end{pmatrix} ,$$

wobei $|k_1|^2 + |k_2|^2 = 1$ und $k_i \in \boldsymbol{C}$. Dann wirkt die Abbildung $\alpha_{\gamma_1 k \gamma_2}$ auf dem Energie-Impuls-Tensor T wie folgt:

$$\begin{aligned} & \alpha_{\gamma_1 k \gamma_2}(T) \\ = \; & T + \sqrt{2}\lambda' \left[\left(q_1 + q_2(|k_1|^2 - |k_2|^2) \right) j^3 + \sqrt{2} i q_2 \left(e^{-2iq_1\lambda} \overline{k_1 k_2} j^- - e^{2iq_1\lambda} k_1 k_2 j^+ \right) \right] \\ & + \frac{1}{2\pi} \lambda'^2 \left(q_1^2 + q_2^2 + 2 q_1 q_2 (|k_1|^2 - |k_2|^2) \right) . \end{aligned}$$

Um das sehen zu können, benötigen wir zunächst einige Hilfssätze.

Lemma 3.16. *Seien γ eine lokale Eichtransformation vom Typ (3.4) und $k \in SU(2)$. Dann gilt:*

$$Sp(\gamma k T^3 k^{-1} \gamma^{-1} T^a) = (|k_1|^2 - |k_2|^2) g^{3a} + \sqrt{2} i (e^{-2iq\lambda} \overline{k_1 k_2} g^{-a} - e^{2iq\lambda} k_1 k_2 g^{+a}) .$$

Beweis. Für die Kommutatoren kann man die Identitäten

$$\begin{aligned} \left[T^+, \gamma \right] &= -2i \sin(q\lambda) T^+ \\ \left[T^-, \gamma \right] &= 2i \sin(q\lambda) T^- \\ \left[T^3, \gamma \right] &= 0 \\ \gamma^{-1} T^{\pm} &= e^{\mp iq\lambda} T^{\pm} \end{aligned}$$

nachrechnen und erhält damit

$$\begin{aligned} & \mathrm{Sp}(\gamma k T^3 k^{-1} \gamma^{-1} T^a) \\ = \; & \mathrm{Sp}(k T^3 k^{-1} T^a) + \mathrm{Sp}(k T^3 k^{-1} \gamma^{-1} [T^a, \gamma]) \\ = \; & \mathrm{Sp}(k T^3 k^{-1} T^a) \\ & + 2i \sin(q\lambda) \left(-e^{-iq\lambda} g^a{}_+ \mathrm{Sp}(k T^3 k^{-1} T^+) + e^{iq\lambda} g^a{}_- \mathrm{Sp}(k T^3 k^{-1} T^-) \right) . \end{aligned}$$

Nun kann man für die Spuren die Identitäten

$$\begin{aligned} k T^3 k^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |k_1|^2 - |k_2|^2 & -2i k_1 k_2 \\ -2i \overline{k_1 k_2} & |k_2|^2 - |k_1|^2 \end{pmatrix} \\ \mathrm{Sp}(k T^3 k^{-1} T^+) &= \sqrt{2} i \overline{k_1 k_2} \\ \mathrm{Sp}(k T^3 k^{-1} T^-) &= -\sqrt{2} i k_1 k_2 \\ \mathrm{Sp}(k T^3 k^{-1} T^3) &= |k_1|^2 - |k_2|^2 \end{aligned}$$

nachrechnen, und es folgt die Behauptung. ■

Lemma 3.17. *Es seien γ_1, γ_2 und k wie im Satz 3.15. Die Matrizen T^a seien eine Basis der Lie-Algebra su(2). Dann gilt:*

$$\begin{aligned} & Sp((\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1}T^a) \\ = \; & \sqrt{2}i\lambda' \left[\left(q_1 + q_2(|k_1|^2 - |k_2|^2)\right) g^{3a} + \sqrt{2}iq_2 \left(e^{-2iq_1\lambda}\overline{k_1 k_2} g^{-a} - e^{2iq_1\lambda} k_1 k_2 g^{+a}\right)\right] \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1} &= \gamma_1'\gamma_1^{-1} + \gamma_1 k\gamma_2'\gamma_2^{-1}k^{-1}\gamma_1^{-1} \\ &= \sqrt{2}i\lambda'(q_1 T^3 + q_2\gamma_1 kT^3 k^{-1}\gamma_1^{-1}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dieses setzen wir in die Spur ein und erhalten mit Lemma 3.16 die Behauptung. ■

Lemma 3.18.

$$\begin{aligned} & Sp((\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1}(\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1}) \\ = \; & -2\lambda'^2 \left(q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 q_2(|k_1|^2 - |k_2|^2)\right) \end{aligned}$$

Beweis. Mit Formel (3.5) folgt:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Sp}((\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1}(\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1}) \\ = \; & -2\lambda'^2 \left(q_1^2 \mathrm{Sp}(T^3T^3) + 2q_1q_2\mathrm{Sp}(\gamma_1 kT^3k^{-1}\gamma_1^{-1}T^3) + q_2^2\mathrm{Sp}(\gamma_1 kT^3T^3k^{-1}\gamma_1^{-1})\right) . \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.16 folgt damit die Behauptung. ■

Beweis des Satzes 3.15. Aus Satz 3.5 folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma_1 k\gamma_2}(T) &= T - i\mathrm{Sp}((\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1}T^a)j_a \\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\mathrm{Sp}((\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1}(\gamma_1 k\gamma_2)'(\gamma_1 k\gamma_2)^{-1}) . \end{aligned}$$

Hier brauchen wir jetzt nur noch die Formeln aus Lemma 3.17 und Lemma 3.18 einzusetzen, und wir erhalten die Behauptung. ■

Folgerung 3.19. *Für beliebige $k \in SU(2)$ und $n \in \boldsymbol{Z}$ erhalten wir*

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma_1 k\gamma_2}(L_n) &= L_n + \sqrt{2}\left(q_1 + (|k_1|^2 - |k_2|^2)q_2\right) j_n^3 + \\ &\quad +2iq_2 e^{2\pi i q_1}\left(\overline{k_1 k_2} j^-_{n-2q_1} - k_1 k_2 j^+_{n+2q_1}\right) + \\ &\quad + \left(q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2(|k_1|^2 - |k_2|^2)\right)\delta_{n,0} . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Hier sind die Operatoren $j^{\pm}_{n+2q_1}$ für den Fall $2q_1 \notin \boldsymbol{Z}$ nur formal definiert, worauf wir weiter unten näher eingehen werden.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Lemma 3.12, wenn wir zusätzlich die Identität

$$e^{\pm 2iq_1\lambda} f_n^{(1)} = f_{n\pm 2q_1}^{(1)}$$

berücksichtigen. ■

Für den Spezialfall $kT^3k^{-1} = \pm T^3$, also für $k_1 = 0$ oder $k_2 = 0$, folgt aus Satz 3.15:

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma_1 k\gamma_2}(T) &= T + \sqrt{2}(q_1 \pm q_2)\lambda' j^3 + \frac{1}{2\pi}(q_1 \pm q_2)^2 \lambda'^2 \\ \alpha_{\gamma_1 k\gamma_2}(L_n) &= L_n + \sqrt{2}(q_1 \pm q_2) j_n^3 + (q_1 \pm q_2)^2 \delta_{n,0} \ . \end{aligned}$$

Dies sind gerade die Abbildungen aus Satz 3.14 für $q = q_1 \pm q_2$, das heißt in diesem Fall gilt: $\alpha_{\gamma_1 k\gamma_2} = \alpha_{\gamma_{q_1 \pm q_2}}$. Wegen Satz 3.9 kennen wir also bereits einen Teil der Fusionsregeln, und zwar wissen wir, dass die Sektoren $[(q_1 \pm q_2)^2]$ in dem Produkt $[q_1^2] \times [q_2^2]$ enthalten sind: $[q_1^2] \times [q_2^2] \succ [(q_1 + q_2)^2] \oplus [(q_1 - q_2)^2]$.

In der Folgerung 3.19 ist der Operator j_r^a allgemein für $r \in \mathbf{R}$ formal definiert durch

$$j_r^a := \int\limits_{\mathbf{R}} \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^r j^a(x)dx \ .$$

Für den Fall $r \notin \mathbf{Z}$ kann man jedoch nachrechnen, dass die Norm von Vektoren der Form $j_r^{\pm}\Omega_0$ divergiert. Dies ist dadurch begründet, dass der Integralkern $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^r$ keine zulässige Testfunktion mehr ist, denn die Grenzwerte für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ stimmen nicht überein. Die Operatoren j_r^a mit $r \notin \mathbf{Z}$ liegen also nicht in der Stromalgebra, und der Vektor Ω_0 liegt nicht in ihrem Definitionsbereich. Deshalb müssen wir uns im Folgenden auf den Fall $r \in \mathbf{Z}$, das heißt $2q_1 \in \mathbf{N}_0$ beschränken.

Mit Folgerung 3.19 können wir nun zwar den Zustand $\omega_{\gamma_1 k\gamma_2}$ für ein beliebiges Element der Virasoro-Algebra berechnen, man sieht der Formel (3.6) jedoch nicht an, in welche Sektoren uns der Zustand $\omega_{\gamma_1 k\gamma_2}$ führt. Um diese Frage beantworten zu können, bemerken wir, dass sich der Zustand $\omega_{\gamma_1 k\gamma_2}$ in eine konvexe Summe von Zuständen zerlegen lässt. Er ist also in der Regel ein Gemisch von reineren Zuständen, und wir werden später diskutieren, ob diese tatsächlich rein sind.

Satz 3.20 (Zerlegung des Zustandes $\boldsymbol{\omega_{\gamma_1 k\gamma_2}}$). *Der Zustand $\omega_{\gamma_1 k\gamma_2}$ der Virasoro-Algebra lässt sich in eine endliche Summe von Zuständen*

$$\xi_{q_1,q_2}^{(\nu)} := \frac{(2q_1 - \nu)!}{\nu!(2q_1)!} \left({j_{-2q_1}^{-}}^{\nu}\Omega_0, \alpha_{\gamma_1\gamma_2}{j_{-2q_1}^{-}}^{\nu}\Omega_0\right) \tag{3.7}$$

zerlegen:

$$\omega_{\gamma_1 k\gamma_2} = \sum_{\nu=0}^{2q_1} \binom{2q_1}{\nu} |k_1|^{2(2q_1-\nu)} |k_2|^{2\nu} \xi_{q_1,q_2}^{(\nu)} \ .$$

Bemerkenswert an dieser Zerlegung ist die Tatsache, dass nur die Gewichte von k abhängen, nicht aber die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir einige Hilfssätze:

Lemma 3.21 (Implementierung von Automorphismen). *Es seien $\Lambda \in su(2)$, $c \in \boldsymbol{C}$ und $e^{c\Lambda} \in SU(2)$. Dann ist der Automorphismus $\alpha_{e^{c\Lambda}}$ auf der Stromalgebra durch die Adjunktion mit dem Operator $e^{cj(\Lambda)}$ implementiert.*

Beweis. Sei $f : \mathbf{R} \to \mathrm{su}(2)$ eine beliebige zulässige Testfunktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_{e^{c\Lambda}}(j(f)) &= \alpha_{e^{c\Lambda}}\left(\sum_{i,j=1}^{2}\int :\psi_i f_{ij}\psi_j^*:\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\int :\sum_{\nu=1}^{2}\psi_\nu\,(e^{c\Lambda})_{\nu i}\;\; f_{ij}\;\; \sum_{\mu=1}^{2}\psi_\mu^*\overline{(e^{c\Lambda})_{\mu j}}: \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\int :\sum_{\nu=1}^{2}\psi_\nu\,(e^{c\Lambda})_{\nu i}\;\; f_{ij}\;\; \sum_{\mu=1}^{2}(e^{-c\Lambda})_{j\mu}\psi_\mu^*: \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\int :e^{cj(\Lambda)}\psi_i e^{-cj(\Lambda)}\;\; f_{ij}\;\; e^{cj(\Lambda)}\psi_j^* e^{-cj(\Lambda)}: \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\int e^{cj(\Lambda)}:\psi_i f_{ij}\psi_j^*: e^{-cj(\Lambda)} \\
&= \mathrm{Ad}_{e^{cj(\Lambda)}}(j(f))\ .
\end{aligned}$$

Hierbei wurden die exponentierten Vertauschungsrelationen (2.5) der Ströme mit den Feldern benutzt. ■

Lemma 3.22. *Für $n \in \boldsymbol{N}_0$ und $\nu \in \{0,\dots,n-1\}$ gilt:*

$$[j_n^+, {j_{-n}^-}^{\nu+1}]\Omega_0 = (\nu+1)(n-\nu){j_{-n}^-}^{\nu}\Omega_0\ .$$

Beweis. Vollständige Induktion. $\nu = 0$:

$$[j_n^+, j_{-n}^-]\Omega_0 = (\sqrt{2}j_0^3 + n)\Omega_0 = n\Omega_0\ .$$

$\nu - 1 \to \nu$:

$$\begin{aligned}
[j_n^+, {j_{-n}^-}^{\nu+1}]\Omega_0 &= j_{-n}^-\nu(n-\nu+1){j_{-n}^-}^{\nu-1}\Omega_0 + (\sqrt{2}j_0^3+n){j_{-n}^-}^{\nu}\Omega_0 \\
&= ((\nu+1)n + \nu(-\nu+1))\,{j_{-n}^-}^{\nu}\Omega_0 + \sqrt{2}[j_0^3, {j_{-n}^-}^{\nu}]\Omega_0 \\
&= (\nu+1)(n-\nu){j_{-n}^-}^{\nu}\Omega_0\ .
\end{aligned}$$

Die Induktion bricht bei $\nu = n-1$ ab, da für größere Werte von ν der Vektor ${j_{-n}^-}^{\nu+1}\Omega_0$ die Bedingung $E \geq Q^2$ aus Lemma 2.9 nicht mehr erfüllt und somit verschwindet. ■

Lemma 3.23. *Für $n \in \boldsymbol{N}_0$ und $\mu, \nu \in \{0, \ldots, n\}$ mit $\mu \leq \nu$ gilt:*

$$[j_n^{+\mu}, j_{-n}^{-\ \nu}]\Omega_0 = \frac{\nu!(n-\nu+\mu)!}{(\nu-\mu)!(n-\nu)!} j_{-n}^{-\ \nu-\mu}\Omega_0 \ .$$

Beweis. Vollständige Induktion nach μ. Für $\mu = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig. $\mu \to \mu+1$: Es gilt

$$\begin{aligned} [j_n^{+\mu+1}, j_{-n}^{-\ \nu}]\Omega_0 &= \frac{\nu!(n-\nu+\mu)!}{(\nu-\mu)!(n-\nu)!}[j_n^+, j_{-n}^{-\ \nu-\mu}]\Omega_0 \\ &= \frac{\nu!(n-\nu+\mu+1)!}{(\nu-\mu-1)!(n-\nu)!} j_{-n}^{-\ \nu-\mu-1}\Omega_0 \ , \end{aligned}$$

wobei die Induktionsvoraussetzung und Lemma 3.22 benutzt wurden. ■

Beweis des Satzes 3.20. Das Element $k \in \mathrm{SU}(2)$ lässt sich in ein Produkt

$$k = e^{a^- T^-} e^{bT^3} e^{a^+ T^+}$$

zerlegen, wobei

$$a^+ = ik_2/k_1 \ , \quad a^- = i\overline{k_2}/k_1 \quad \text{und} \quad e^{b/\sqrt{2}} = k_1$$

gewählt werden müssen. Aus Lemma 3.21 folgt dann mit $U_k := e^{a^- j_0^-} e^{b j_0^3} e^{a^+ j_0^+}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma_1 k \gamma_2} &= \alpha_{\gamma_1} \circ \mathrm{Ad}_{U_k} \circ \alpha_{\gamma_2} \\ &= \alpha_{\gamma_1}(U_k)\ \alpha_{\gamma_1\gamma_2} \alpha_{\gamma_1}(U_k^*) \ . \end{aligned}$$

Mit Satz 3.4 können wir die Wirkung des Automorphismus α_{γ_1} auf den Operatoren $j_0^\pm$ und j_0^3 berechnen:

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma_1}(j_0^\pm) &= (-1)^{2q_1} j_{\pm 2q_1}^\pm \\ \alpha_{\gamma_1}(j_0^3) &= j_0^3 + \sqrt{2} q_1 \ . \end{aligned}$$

Im Zustand $\omega_{\gamma_1 k \gamma_2}$ wirkt der Operator $\alpha_{\gamma_1}(U_k^*)$ auf den Vakuumvektor Ω_0:

$$\begin{aligned} & \alpha_{\gamma_1}(U_k^*)\Omega_0 \\ = \ & \exp\left(\overline{a^+}\alpha_{\gamma_1}(j_0^-)\right) \exp\left(\overline{b}\alpha_{\gamma_1}(j_0^3)\right) \exp\left(\overline{a^-}\alpha_{\gamma_1}(j_0^+)\right) \Omega_0 \\ = \ & \exp\left(\overline{a^+}(-1)^{2q_1} j_{-2q_1}^-\right) \exp\left(\sqrt{2}\,\overline{b} q_1\right) \exp\left(\overline{b} j_0^3\right) \exp\left(\overline{a^-}(-1)^{2q_1} j_{2q_1}^+\right) \Omega_0 \\ = \ & \exp\left(\sqrt{2}\,\overline{b} q_1\right) \exp\left(\overline{a^+}(-1)^{2q_1} j_{-2q_1}^-\right) \Omega_0 \\ = \ & \sum_{\nu=0}^{2q_1} \frac{1}{\nu!} (-i)^\nu (-1)^{2q_1\nu} \overline{k}_1^{\ 2q_1-\nu} \overline{k}_2^{\ \nu} j_{-2q_1}^{-\ \nu} \Omega_0 \ . \end{aligned}$$

Die Exponentialreihe bricht bei $\nu = 2q_1$ ab, da für größere Werte von ν die Bedingung $E \geq Q^2$ für den Vektor ${j^-_{-2q_1}}^\nu \Omega_0$ nicht mehr erfüllt ist und er somit nach Lemma 2.9 verschwinden muss. Für den Zustand $\omega_{\gamma_1 k \gamma_2}$ folgt:

$$\begin{aligned} & \omega_{\gamma_1 k \gamma_2} \\ = \; & (\alpha_1(U_k^*)\Omega_0, \alpha_{\gamma_1\gamma_2}\alpha_1(U_k^*)\Omega_0) \\ = \; & \sum_{\mu,\nu=0}^{2q_1} \frac{1}{\nu!\mu!}(-i)^\nu i^\mu (-1)^{2q_1(\nu+\mu)} \bar{k}_1^{\,2q_1-\nu} k_1^{2q_1-\mu} \bar{k}_2^{\,\nu} k_2^\mu ({j^-_{-2q_1}}^\mu \Omega_0, \alpha_{\gamma_1\gamma_2} {j^-_{-2q_1}}^\nu \Omega_0) \\ = \; & \sum_{\nu=0}^{2q_1} \frac{1}{\nu!\nu!} |k_1|^{2(2q_1-\nu)} |k_2|^{2\nu} ({j^-_{-2q_1}}^\nu \Omega_0, \alpha_{\gamma_1\gamma_2} {j^-_{-2q_1}}^\nu \Omega_0) \\ = \; & \sum_{\nu=0}^{2q_1} \binom{2q_1}{\nu} |k_1|^{2(2q_1-\nu)} |k_2|^{2\nu} \xi^{(\nu)}_{q_1,q_2} \,. \end{aligned}$$

In der Doppelsumme tragen nur die Diagonalelemente bei, da nach Lemma 2.8 unterschiedlich geladene Vektoren senkrecht aufeinander stehen und mit $X \in \mathcal{A}$ auch der Operator $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(X)$ die Cartan-Ladung eines Vektors nicht verändert.

An der Formel (3.7) sieht man sofort, dass die Funktionale $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ positiv und linear sind. Aus Lemma 3.23 folgt, dass sie normiert und damit Zustände sind.

■

Wir haben somit zwei Möglichkeiten, die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ auf einem gegebenen Operator zu berechnen: Auf der einen Seite können wir ihre Definition 3.7 benutzen. Da jedoch die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ nicht von k abhängen, haben wir auch die Möglichkeit, mit Hilfe der Folgerung 3.19 den Zustand $\omega_{\gamma_1 k \gamma_2} = \omega_0 \circ \alpha_{\gamma_1 k \gamma_2}$ auf einem gegebenen Operator zu berechnen und das Ergebnis nach Termen der Form $\binom{2q_1}{\nu}|k_1|^{2(2q_1-\nu)}|k_2|^{2\nu}$, eventuell unter Ausnutzung der Identität $|k_1|^2 + |k_2|^2 = 1$, zu ordnen. Der Koeffizient des Terms $\binom{2q_1}{\nu}|k_1|^{2(2q_1-\nu)}|k_2|^{2\nu}$ ist dann der Wert des gegebenen Operators auf dem Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$.

3.6 Die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$

Nun haben wir uns schon recht nahe an die endgültige Berechnung der Fusionsregeln herangetastet. Zunächst bestand die eigentliche Aufgabe darin, die kontinuierliche direkte Summe über die von den Zuständen $\omega_{\gamma_1 k \gamma_2}$ erzeugten Sektoren zu berechnen. Da wir diese Zustände in eine konvexe Summe anderer Zustände zerlegt haben, die nicht von dem Gruppenelement $k \in \mathrm{SU}(2)$ abhängen, reicht es jetzt aus, die direkte Summe dieser endlich vielen von den Zuständen $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ erzeugten Sektoren zu berechnen. Wir haben also die

Folgerung 3.24. *Die Fusionsregel aus Satz 3.9 vereinfacht sich mit Satz 3.20 zu*

$$[\omega_{\gamma_1}] \times [\omega_{\gamma_2}] \succ \bigoplus_{\nu=0}^{2q_1} [\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}] \,.$$

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ näher untersuchen um herauszufinden, zu welchen Sektoren sie gehören. Da die Sektoren der Virasoro-Algebra durch ihre Grundzustandsenergie indiziert werden, berechnen wir zunächst die Energie der Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$:

Lemma 3.25 (Energie der Zustände $\boldsymbol{\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}}$). *Die Energie der Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ beträgt $(q_1+q_2-\nu)^2 + \nu(2q_1-\nu)$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}(L_0) &= \frac{(2q_1-\nu)!}{\nu!(2q_1)!}\Big[\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, L_0 j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big) + \\
&\quad \sqrt{2}(q_1+q_2)\,\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, Q^3 j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big) + \\
&\quad (q_1+q_2)^2\,\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big)\Big] \\
&= 2q_1\nu - \sqrt{2}(q_1+q_2)\sqrt{2}\nu + (q_1+q_2)^2 \\
&= (q_1+q_2-\nu)^2 + \nu(2q_1-\nu)
\end{aligned}$$

■

Lemma 3.26. *Die Varianz der Energie L_0 im Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ verschwindet.*

Beweis. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}
\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}(L_0^2) &= \frac{(2q_1-\nu)!}{\nu!(2q_1)!}\Big[\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, L_0^2 j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big) + \\
&\quad 2(q_1+q_2)^2\,\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, (Q^3)^2 j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big) + \\
&\quad (q_1+q_2)^4\,\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big) + \\
&\quad \sqrt{2}(q_1+q_2)\,\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, L_0 Q^3 j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big) + \\
&\quad \sqrt{2}(q_1+q_2)\,\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, Q^3 L_0 j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big) + \\
&\quad 2(q_1+q_2)^2\,\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, L_0 j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big) + \\
&\quad 2\sqrt{2}(q_1+q_2)^3\,\big(j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0, Q^3 j^{-\ \nu}_{-2q_1}\Omega_0\big)\Big] \\
&= 4q_1^2\nu^2 + 2(q_1+q_2)^2 2\nu^2 + (q_1+q_2)^4 - \sqrt{2}(q_1+q_2)\sqrt{2}\nu 2q_1\nu \\
&\quad -\sqrt{2}(q_1+q_2)2q_1\nu\sqrt{2}\nu + 2(q_1+q_2)^2 2q_1\nu - 2\sqrt{2}(q_1+q_2)^3 2q_1\nu \\
&= \big((q_1+q_2-\nu)^2 + \nu(2q_1-\nu)\big)^2 \,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Lemma 3.25 die Behauptung. ■

Die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ sind also Eigenzustände des Operators L_0.

Nun kehren wir zurück zu der Frage, zu welchen Sektoren die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ gehören. Aus Lemma 3.25 kennen wir bereits ihre Energie; außerdem vermuten wir, dass sie rein sind und somit zu genau einem Sektor gehören. Da die Sektoren der Virasoro-Algebra aber durch ihre Grundzustandsenergie indiziert werden (siehe Unterabschnitt 2.1.2), versuchen wir im Folgenden herauszufinden, welche Anregungsenergie die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ haben, um auf ihre Grundzustandsenergie und damit auf den dazugehörigen Sektor schließen zu können:

Satz 3.27. *Die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ sind höchstens $\nu(2q_1-\nu)$-fach angeregt.*

Beweis. Es sei $X = L_{n_r}\dots L_{n_1}$ ein Element der Virasoro-Algebra, das die Anregung eines Vektors um den Wert $\Delta := \sum_{i=1}^r n_i \geq 0$ erniedrigt. Der Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ sei mindestens Δ-fach angeregt: $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}(X^*X) > 0$. Es ist also die Ungleichung $\Delta \leq \nu(2q_1-\nu)$ zu zeigen.

Der Operator

$$\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{n_i}) = L_{n_i} + \sqrt{2}(q_1+q_2)j^3_{n_i} + (q_1+q_2)^2\delta_{n_i,0}$$

erniedrigt die Anregung eines Vektors um den Wert n_i und lässt seine Cartan-Ladung unverändert. Der Operator $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(X)$ erniedrigt die Anregung eines Vektors um den Wert Δ und lässt seine Ladung ebenfalls unverändert. Der Vektor $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(X){j^-_{-2q_1}}^\nu$ hat also die Ladung $-\nu$ und die Anregung $2q_1\nu-\Delta$. Damit der Vektor nicht verschwindet, muss nach Lemma 2.9 die Ungleichung $\nu^2 \leq 2q_1\nu - \Delta$ und damit auch $\Delta \leq 2q_1\nu - \nu^2 = \nu(2q_1-\nu)$ erfüllt sein. ■

Bereits in Abschnitt 3.5 haben wir gesehen, dass die Sektoren $[(q_1+q_2)^2]$ und $[(q_1-q_2)^2]$ in den Fusionsregeln zu dem Produkt $[q_1^2]\times[q_2^2]$ auftauchen. Dieses wird bestätigt durch die

Folgerung 3.28. *Die Zustände $\xi^{(0)}_{q_1,q_2}$ und $\xi^{(2q_1)}_{q_1,q_2}$ sind Grundzustände und gehören zum Sektor $[(q_1+q_2)^2]$ beziehungsweise $[(q_1-q_2)^2]$.*

Wir wissen jetzt also, dass die Zustände $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ zu einem oder mehreren der Sektoren $[h]$ mit $h = (q_1+q_1-\nu)^2, (q_1+q_1-\nu)^2+1, \dots, (q_1+q_1-\nu)^2+\nu(2q_1-\nu)$ gehören. Im Folgenden werden wir sehen, dass der Sektor $[(q_1+q_1-\nu)^2]$ tatsächlich auftritt. Bevor wir das jedoch beweisen können, benötigen wir wieder einige Hilfssätze:

Lemma 3.29. *Sei $\nu \in \boldsymbol{N}_0$. Dann gilt: $||j^-_{-2\nu+1}j^-_{-2\nu+3}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0||^2 = 1$.*

Beweis. Vollständige Induktion nach ν: Der Fall $\nu = 0$ ist klar.
$\nu \to \nu+1$: Hier bemerken wir zunächst, dass der Vektor $j^-_{-2\nu+1}j^-_{-2\nu+3}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0$ die Energie ν^2 und die Ladung $-\nu$ trägt und somit von dem Operator $j^+_{2\nu+1}$

wegen Lemma 2.9 vernichtet wird. Wir können also im Folgenden das Produkt $j^+_{2\nu+1}j^-_{-2\nu-2}$ durch den Kommutator $[j^+_{2\nu+1}, j^-_{-2\nu-2}]$ ersetzen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& ||j^-_{-2\nu-1}j^-_{-2\nu+1}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0||^2 \\
= & \ (\Omega_0, j^+_1 j^+_3 \cdots j^+_{2\nu-1} j^+_{2\nu+1} j^-_{-2\nu-1} j^-_{-2\nu+1}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0) \\
= & \ (\Omega_0, j^+_1 j^+_3 \cdots j^+_{2\nu-1} [j^+_{2\nu+1}, j^-_{-2\nu-1}] j^-_{-2\nu+1}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0) \\
= & \ (\Omega_0, j^+_1 j^+_3 \cdots j^+_{2\nu-1} (\sqrt{2}Q^3 + 2\nu + 1) j^-_{-2\nu+1}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0) \\
= & \ (\Omega_0, j^+_1 j^+_3 \cdots j^+_{2\nu-1} (\sqrt{2}(-\sqrt{2}\nu) + 2\nu + 1) j^-_{-2\nu+1}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0) \\
= & \ (\Omega_0, j^+_1 j^+_3 \cdots j^+_{2\nu-1} j^-_{-2\nu+1}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0) \\
= & \ 1
\end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung. ■

Lemma 3.30. *Es seien $\nu \in \boldsymbol{N}_0$ und $n \in \boldsymbol{N}_{\leq\nu}$. Dann gilt:*

$$[\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2(q_1-n)+1}), {j^-_{-2q_1}}^{\nu-n+1}] \ = \ -2q_2(\nu-n+1){j^-_{-2q_1}}^{\nu-n} j^-_{-2n+1} \ .$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort mit Satz 3.14 aus den beiden Kommutatoren

$$\begin{aligned}
[L_n, {j^-_{-m}}^{\ell}] &= \ell m {j^-_{-m}}^{\ell-1} j^-_{n-m} \text{ und} \\
[j^3_n, {j^-_{-m}}^{\ell}] &= -\sqrt{2}\ell {j^-_{-m}}^{\ell-1} j^-_{n-m} \ .
\end{aligned}$$

■

Nun kommen wir zu dem eigentlichen Satz:

Satz 3.31. *Es seien $q_2 > 0$ und $\nu = 0, \ldots, 2q_1$. Dann gilt:*

$$[\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}] \succ [(q_1+q_2-\nu)^2] \ .$$

Beweis. Sei zunächst $0 \leq \nu \leq q_1$. Wir definieren den Operator

$$\boldsymbol{L}_{\nu(2q_1-\nu)} := L_{2(q_1-\nu)+1}L_{2(q_1-\nu-1)+1}\cdots L_{2q_1-3}L_{2q_1-1} \ .$$

Die Vektoren $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2(q_1-n)+1})j^-_{-2n+3}j^-_{-2n+5}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0$ mit $n \in \mathbf{N}_{\leq q_1}$ tragen formal die Energie $E = -2(q_1-n) - 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1) = n^2 - 2q_1$ und die Cartan-Ladung $Q = -n+1$, erfüllen also wegen $n \leq q_1$ die Bedingung $E \geq Q^2$ aus Lemma 2.9 nicht und verschwinden deshalb. Mit dieser Bemerkung führen wir nun folgende Berechnung durch:

$$
\begin{aligned}
& \xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}(\boldsymbol{L}^*_{\nu(2q_1-\nu)}\boldsymbol{L}_{\nu(2q_1-\nu)}) \\
= \; & \tfrac{(2q_1-\nu)!}{\nu!(2q_1)!}||\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(\boldsymbol{L}_{\nu(2q_1-\nu)}){j^-_{-2q_1}}^\nu\Omega_0||^2 \\
= \; & \tfrac{(2q_1-\nu)!}{\nu!(2q_1)!}||\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2(q_1-\nu)+1})\ldots\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2q_1-1}){j^-_{-2q_1}}^\nu\Omega_0||^2 \\
= \; & \tfrac{(2q_1-\nu)!}{\nu!(2q_1)!}||\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2(q_1-\nu)+1})\ldots\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2q_1-3})[\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2q_1-1}),{j^-_{-2q_1}}^\nu]\Omega_0||^2 \\
= \; & 4q_2^2\nu^2\tfrac{(2q_1-\nu)!}{\nu!(2q_1)!}||\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2(q_1-\nu)+1})\ldots\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2q_1-3}){j^-_{-2q_1}}^{\nu-1}j^-_{-1}\Omega_0||^2 \\
= \; & 4q_2^2\nu^2\tfrac{(2q_1-\nu)!}{\nu!(2q_1)!}||\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2(q_1-\nu)+1})\ldots[\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2q_1-3}),{j^-_{-2q_1}}^{\nu-1}]j^-_{-1}\Omega_0||^2 \;.
\end{aligned}
$$

Wegen obiger Bemerkung können wir die Produkte $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2(q_1-n)+1}){j^-_{-2q_1}}^{\nu-n+1}$ durch Kommutatoren $[\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_{2(q_1-n)+1}),{j^-_{-2q_1}}^{\nu-n+1}]$ ersetzen und damit Lemma 3.30 weitere $(\nu-1)$-mal anwenden. Wir erhalten also mit Lemma 3.29:

$$\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}(\boldsymbol{L}^*_{\nu(2q_1-\nu)}\boldsymbol{L}_{\nu(2q_1-\nu)}) = (2q_2)^{2\nu}\tfrac{\nu!(2q_1-\nu)!}{(2q_1)!} > 0$$

für den nicht-trivialen Fall $q_2 > 0$.

Für den Fall $q_1 < \nu \leq 2q_1$ bemerken wir mit Satz 3.20, dass der Zustand $\omega_{\gamma_1 k\gamma_2}$ von k nur über die Betragsquadrate $|k_1|^2$ und $|k_2|^2$ abhängt. Der Zustand $\omega_{\gamma_1 k\gamma_2}$ kann also auch von dem Koeffizienten $2iq_2e^{2\pi iq_1}$ vor den Termen $\overline{k_1k_2}j^-_{n-2q_1}$ und $k_1k_2j^+_{n+2q_1}$ aus Folgerung 3.19 nur quadratisch abhängen. Damit ist der Zustand $\omega_{\gamma_1 k\gamma_2}$ invariant unter der Ersetzung $k_1\mapsto k_2$, $k_2\mapsto k_1$ und $q_2\mapsto -q_2$. Entsprechend haben wir wegen Satz 3.20 die Identität $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}=\xi^{(2q_1-\nu)}_{q_1,-q_2}$ und damit folgt aus dem ersten Teil dieses Beweises: $[\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}]=[\xi^{(2q_1-\nu)}_{q_1,-q_2}]\succ[(-q_1-q_2+\nu)^2]$. Also gilt die Behauptung für alle ν mit $0\leq\nu\leq 2q_1$. ■

Wenn wir dieses Ergebnis nun in Folgerung 3.24 einsetzen, erhalten wir schließlich (fast) die erwarteten Fusionsregeln:

Folgerung 3.32. *Es seien $[q_1^2]$ und $[q_2^2]$ zwei Sektoren der Virasoro-Algebra mit $2q_1\in\boldsymbol{N}_0$ und $q_2\in\boldsymbol{R}_{\geq 0}$. Ihre Fusionsregel kann wie folgt abgeschätzt werden:*

$$[q_1^2]\times[q_2^2] \;\succ\; \bigoplus_{\nu=0}^{2q_1}[(q_1+q_2-\nu)^2]\;.$$

Diese Fusionsregeln haben nicht ganz die von uns erwartete Form der SU(2)-Fusionsregeln (siehe Formel (3.1))

$$[q_1^2]\times[q_2^2] = \bigoplus_{q=|q_1-q_2|}^{q_1+q_2}[q^2]\;,$$

sondern enthalten im Fall $q_1 > q_2$ zusätzlich die Sektoren $[(q_1+q_2-\nu)^2]$ für $\nu = 2q_1-1, 2q_1-2,\ldots \geq q_1+q_2$. Diese Sektoren sind in den SU(2)-Fusionsregeln nicht enthalten, da der Betrag $|q_1 + q_2 - \nu| = \nu - q_1 - q_2$ kleiner ist als der Betrag $|q_1 - q_2|$. Diese Fälle können durch die Wahl $q_1 \leq q_2$ ausgeschlossen werden und sind dann mit der erwarteten SU(2)-Regel konsistent. Ihre Herkunft werden wir im Abschnitt 3.8 näher untersuchen.

Über Satz 3.31 hinaus wissen wir, dass der Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ im generischen Fall ein reiner Vektorzustand ist, denn wir haben den

Satz 3.33. *Für den zu dem Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ gehörenden Sektor $[\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}]$ gilt:*

$$[\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}] \begin{cases} \prec \bigoplus\limits_{s=|q_1+q_2-\nu|}^{\infty} [s^2] & \text{falls } q_1 + q_2 - \nu \in \frac{1}{2}\boldsymbol{Z} \\ = [(q_1 + q_2 - \nu)^2] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\mathcal{H}$ der Vektorraum der Vakuumdarstellung der SU(2)-Stromalgebra $\mathcal{B}$. Dann ist die Darstellung des Zustandes $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ auf dem zyklischen Unterraum $\mathcal{X} := \overline{\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(\mathcal{A})j^{-}_{-2q_1}{}^{\nu}\Omega_0} \subset \mathcal{H}$ realisiert. Da der Operator $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L)$ für ein beliebiges Element $L \in \mathcal{A}$ die Cartan-Ladung eines Vektors nicht verändert, liegt der Unterraum $\mathcal{X}$ sogar im Eigenraum $\mathcal{H}_{-\nu}$ des Operators $Q^3 := \frac{1}{\sqrt{2}} j^3_0$ zum Eigenwert $-\nu$. An dem Charakter der Vakuum-Darstellung der Stromalgebra $\mathcal{B}$ (siehe Formel (3.2)) können wir die Beiträge zu dem Eigenwert $m = -\nu$ ablesen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_{\mathcal{H}_{-\nu}}(t^{L_0} q^{Q^3}) &= p(t) q^{-\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} t^{n^2} (1 - t^{2n+1}) \\ &= p(t) t^{\nu^2} q^{-\nu} . \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formel berechnen wir nun den Charakter der Darstellung $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}$ der Virasoro-Algebra auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_{-\nu}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_{\mathcal{H}_{-\nu}}\left(t^{\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_0)}\right) &= \mathrm{Sp}_{\mathcal{H}_{-\nu}}\left(t^{L_0 + 2(q_1+q_2)Q^3 + (q_1+q_2)^2}\right) \\ &= t^{(q_1+q_2)^2} \mathrm{Sp}_{\mathcal{H}_{-\nu}}\left(t^{L_0} (t^{2(q_1+q_2)})^{Q^3}\right) \\ &= p(t) t^{(q_1+q_2-\nu)^2} . \end{aligned}$$

Im Fall $q_1 + q_2 - \nu \notin \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ ist dieses gerade der Charakter $\chi_{h=(q_1+q_2-\nu)^2}$ der Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c = 1$ aus Formel (2.2) zur irreduziblen Darstellung mit Grundzustandsenergie $h = (q_1 + q_2 - \nu)^2$. Der Automorphismus $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}$ ist also eine irreduzible Darstellung der Virasoro-Algebra auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_{-\nu}$. Da der Unterraum $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}_{-\nu}$ nicht trivial ist, muss er den Darstellungsraum ausschöpfen: $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{-\nu}$. Also haben wir für diesen Fall die Behauptung: $[\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}] = [(q_1 + q_2 - \nu)^2]$.

Für den anderen Fall $q_1+q_2-\nu \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ können wir weiterrechnen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}_{\mathcal{H}_{-\nu}}\left(t^{\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_0)}\right) &= p(t)t^{(q_1+q_2-\nu)^2} \\ &= p(t)\sum_{s=|q_1+q_2-\nu|}^{\infty} t^{s^2}(1-t^{2s+1}) \\ &= \sum_{s=|q_1+q_2-\nu|}^{\infty} \chi_{h=s^2}(t)\ .\end{aligned}$$

Der Automorphismus $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}$ ist also eine reduzible Darstellung der Virasoro-Algebra auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_{-\nu}$, und der Unterraum $\mathcal{X}$ kann ein echter Unterraum sein. Wir wissen jedoch, dass nur die Sektoren zur Grundzustandsenergie $h=s^2$ mit $s \in \mathbf{Z}_{\geq|q_1+q_2-\nu|}$ auftreten können. ■

Der Grundzustandsvektor der Darstellung $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}$ ist der Vektor

$$j^-_{-(2\nu-1)}j^-_{-(2\nu-3)}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0\ ,$$

da er Eigenvektor des Operators $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_0)$ zum Eigenwert $(q_1+q_2-\nu)^2$ ist und von Operatoren $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}(L_n)$ mit $n \in \mathbf{N}$ wegen Lemma 2.9 vernichtet wird. Der Vektor $j^-_{-(2\nu-1)}j^-_{-(2\nu-3)}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0$ entspricht also dem Vektor $|(q_1+q_2-\nu)^2)\rangle$ in der Verma-Modul-Darstellung aus Unterabschnitt 2.1.2.

Folgerung 3.34. *Der Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ ist für $q_1+q_2-\nu \notin \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}$ ein $\nu(2q_1-\nu)$-fach angeregter, reiner Vektorzustand.*

Beweis. Dieses folgt, da der Vektor $j^-_{-2q_1}{}^{\nu}\Omega_0$ ein Vektor in dem Darstellungsraum $\mathcal{H}_{-\nu}$ der irreduziblen Darstellung $\alpha_{\gamma_1\gamma_2}$ ist und wir die Energie des Zustandes $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ aus Lemma 3.25 kennen. ■

Den Vektor $|\boldsymbol{x}\rangle$, der zu dem Vektorzustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ gehört, können wir wie folgt berechnen: Der Vektor $|\boldsymbol{x}\rangle$ liegt in dem Unterraum $V^{(\nu(2q_1-\nu))}_{(q_1+q_2-\nu)^2}$ des Vermamoduls zur Grundzustandsenergie $(q_1+q_2-\nu)^2$. Dieser Unterraum ist ein $P(\nu(2q_1-\nu))$-dimensionaler Vektorraum, wobei $P(n)$ die Anzahl der ungeordneten Partitionen der Zahl n angibt. Die Vektoren $X_i\,|h\rangle$ seien eine Basis dieses Unterraumes, in der der Vektor $|\boldsymbol{x}\rangle$ durch die Koeffizienten $(x_i)_i$ dargestellt werde. Die Operatoren X_i erhöhen die Energie eines Vektors gerade um die Anregungsenergie $\nu(2q_1-\nu)$ des Zustandes $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$. Die Koeffizienten finden wir, indem wir das Gleichungssystem, das aus den $P(\nu(2q_1-\nu))$ Gleichungen

$$\left(j^-_{-(2\nu-1)}j^-_{-(2\nu-3)}\cdots j^-_{-3}j^-_{-1}\Omega_0, \alpha_{\gamma_1\gamma_2}(X_i^*)j^-_{-2q_1}{}^{\nu}\Omega_0\right) = \sum_{i=1}^{P(\nu(2q_1-\nu))} x_i\,\langle h|\,X_i^*X_i\,|h\rangle$$

besteht, lösen. Dann können wir den Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ durch $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2} = \frac{\langle \boldsymbol{x}|.|\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle}$ darstellen.

3.7 Beispiele

In diesem Abschnitt berechnen wir einige der Vektoren, die zu den Zuständen $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ gehören. Wir verwenden dabei jedoch nicht die Folgerungen aus Satz 3.33, sondern setzen den Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ allgemein mit einer Dichtematrix an. Die Ergebnisse bestätigen dann die Folgerung 3.34.

Die Dichtematrix $\varrho^{(\nu)}_{q_1,q_2}$, die zu dem Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ gehört, operiert auf dem direkten Produkt der Verma-Moduln V_h mit $h \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ (siehe Unterabschnitt 2.1.2). Da der Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ wegen Lemma 3.25 scharfe Energie hat, wirkt die Dichtematrix $\varrho^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ nur auf den Unterräumen $V^{(k)}_h$ der Verma-Moduln mit $k \in \mathbf{N}_0$ und Gesamtenergie $h + k = (q_1 + q_2 + \nu)^2 + \nu(2q_1 - \nu)$ nicht-trivial. Außerdem ist wegen der maximalen Anregung $\nu(2q_1 - \nu)$ des Zustandes $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ aus Satz 3.27 die Grundzustandsenergie h nach unten durch $(q_1 + q_2 - \nu)^2$ beschränkt. Die Dichtematrix $\varrho^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ wirkt somit höchstens auf den Unterräumen $V^{(0)}_{(q_1+q_2-\nu)^2+\nu(2q_1-\nu)}$, $V^{(1)}_{(q_1+q_2-\nu)^2+\nu(2q_1-\nu)-1}, \ldots, V^{(\nu(2q_1-\nu))}_{(q_1+q_2-\nu)^2}$ nicht-trivial und hat damit die Gestalt

$$\varrho^{(\nu)}_{q_1,q_2} = \begin{pmatrix} R^{(\nu(2q_1-\nu))} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R^{(1)} & \\ & & & R^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

wobei die Matrizen $R^{(i)}$ auf den Vektorräumen $V^{(i)}_{(q_1+q_2-\nu)^2+\nu(2q_1-\nu)-i}$ operieren.

3.7.1 Das Programm

Der Fall $q_2 = 0$ — der Sektor $[\omega_{\gamma_2}]$ ist der Vakuumsektor — ist trivial, da hier der Automorphismus α_{γ_2} die Identität ist, und die Fusionsregeln lauten: $[\omega_{\gamma_1}] \times [0] = [\omega_{\gamma_1}]$. Dieser Fall sei im Folgenden ausgeschlossen.

Um für gegebene Parameter q_1, q_2 und ν die Dichtematrix $\varrho^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ und damit den Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ bestimmen zu können, benötigen wir also ein System von $\sum_{i=0}^{\nu(2q_1-\nu)}(\dim R^{(i)})^2$ Gleichungen. Diese erhalten wir, indem wir für hinreichend viele geeignete Elemente X der Virasoro-Algebra die Gleichung

$$\frac{(2q_1-\nu)!}{\nu!(2q_1)!}(j^-_{-2q_1}{}^{\nu}\Omega_0, \alpha_{\gamma_1\gamma_2}(X) j^-_{-2q_1}{}^{\nu}\Omega_0) = \xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}(X) = \mathrm{Sp}(\varrho^{(\nu)}_{q_1,q_2} X) \tag{3.9}$$

berechnen. Mit diesem Gleichungssystem können wir dann die Einträge der Matrizen $R^{(i)}$ und damit auch die Dichtematrix $\varrho^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ bestimmen.

Anhand eines Beispieles für $q_1 = \frac{3}{2}$ und $\nu = 1$ erklären wir im Folgenden, wie wir diese Gleichungssysteme für verschiedene Werte von q_1 und ν mit Hilfe von Maple lösen können. Als Operatoren X, für die wir obige Gleichung berechnen, wählen wir id, $L_{-1}L_1$, $L^2_{-1}L^2_1$, $L_{-2}L^2_1$, $L^2_{-1}L_2$ und $L_{-2}L_2$.

```
with(linalg):
h := (3/2+q-1)^2:
```

Wir laden die benötigte Erweiterung „linalg“ und definieren den Parameter h als die Grundzustandsenergie in dem von uns für den Zustand $\xi^{(1)}_{\frac{3}{2},q}$ erwarteten Sektor.

```
x := vector( [
1,                    # id
8/3*q^2,              # L-1L1
4/3*q^2*(2*q+1)^2,    # L-1L-1L1L1
-4/3*q^2*(2*q+1),     # L-2L1L1
-4/3*q^2*(2*q+1),     # L-1L-1L2
4/3*q^2               # L-2L2
] ):
```

Dieses sind die Erwartungswerte der obigen Operatoren in dem Zustand $\xi^{(1)}_{\frac{3}{2},q}$, die wir mit der Definition dieses Zustandes aus Satz 3.20 berechnet haben.

Wir setzen die Dichtematrix $\varrho^{(1)}_{\frac{3}{2},q}$ als allgemeinste Dichtematrix der Form (3.8) an:

$$\begin{aligned}\varrho^{(1)}_{\frac{3}{2},q} \;=\; & r_1 L_{-1}^2 \left|h\right\rangle \left\langle h\right| L_1^2 \;+\; r_2 L_{-1}^2 \left|h\right\rangle \left\langle h\right| L_2 \;+ \\ & r_3 L_{-2} \left|h\right\rangle \left\langle h\right| L_1^2 \;+\; r_4 L_{-2} \left|h\right\rangle \left\langle h\right| L_2 \;+ \\ & r_5 L_{-1} \left|h+1\right\rangle \left\langle h+1\right| L_1 \;+ \\ & r_6 \left|h+2\right\rangle \left\langle h+2\right|\end{aligned}$$

und berechnen die Koeffizienten der Parameter r_i in dem Ausdruck $\mathrm{Sp}(\varrho^{(1)}_{\frac{3}{2},q} X)$ für die jeweiligen Operatoren X:

```
# id
A1 := [4*h*(2*h+1),6*h,6*h,4*h+1/2,2*(h+1),1]:
# L-1L1
A2 := [8*h*(2*h+1)^2,12*h*(2*h+1),12*h*(2*h+1),18*h,4*(h+1)^2,0]:
# L-1L-1L1L1
A3 := [16*h^2*(2*h+1)^2,4*h*(2*h+1)*h*6,4*h*(2*h+1)*6*h,36*h^2,0,0]:
# L-2L1L1
A4 := [4*h*(2*h+1)*6*h,4*h*(2*h+1)*(4*h+1/2),36*h^2,6*h*(4*h+1/2),0,0]:
# L-1L-1L2
A5 := [6*h*4*h*(2*h+1),36*h^2,4*h*(2*h+1)*(4*h+1/2),(4*h+1/2)*6*h,0,0]:
# L-2L2
A6 := [36*h^2,6*h*(4*h+1/2),6*h*(4*h+1/2),(4*h+1/2)^2,0,0]:
```

Wegen Formel (3.9) wissen wir, dass der Vektor $\boldsymbol{r}$ die Gleichungen $x_i = \langle A_i, \boldsymbol{r}\rangle$ für $i = 1, \ldots, 6$ erfüllen muss, und können ihn bestimmen, indem wir das Gleichungssystem $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$ lösen:

```
A := matrix([ A1, A2, A3, A4, A5, A6 ]):
r := linsolve(A,x);
```

Als Ergebnis liefert Maple den Vektor

$$\begin{aligned} r \;=\; & \left(\frac{1}{48}\,\frac{16\,q^2+24\,q+9}{q^2\,(1+12\,q^3+4\,q^4+6\,q+13\,q^2)},\right. \\ & \frac{-1}{48}\,\frac{8\,q^2+18\,q+9}{(2\,q^3+5\,q^2+4\,q+1)\,q^2}, \\ & \frac{-1}{48}\,\frac{8\,q^2+18\,q+9}{(2\,q^3+5\,q^2+4\,q+1)\,q^2}, \\ & \left.\frac{1}{48}\,\frac{4\,q^2+12\,q+9}{(q^2+2\,q+1)\,q^2},0,0\right)\;. \end{aligned}$$

Die Sektoren $[h+1]$ und $[h+2]$ kommen also nicht vor, und wir können die Dichtematrix $\varrho^{(1)}_{\frac{3}{2},q}$ als 2×2-Matrix in der Basis $L_{-1}^2\,|h\rangle$, $L_{-2}\,|h\rangle$ darstellen:

```
rho := matrix( 2,2, [
r[1]*A1[1] + r[3]*A1[3],
r[1]*A1[2] + r[3]*A1[4],
r[2]*A1[1] + r[4]*A1[3],
r[2]*A1[2] + r[4]*A1[4] ]):
```

Wir berechnen die Eigenvektoren dieser Matrix:

```
v := eigenvectors(rho);
```

Als Ergebnis liefert Maple die beiden Vektoren $\left(1,-\frac{4\,q^2+8\,q+3}{3+4\,q}\right)$ zum Eigenwert 1 und $(1,2\,q+1)$ zum Eigenwert 0. Der Zustand $\xi^{(1)}_{\frac{3}{2},q}$ ist also ein Vektorzustand zu dem Vektor $L_{-1}^2\,|h\rangle-\frac{4\,q^2+8\,q+3}{3+4\,q}L_{-2}\,|h\rangle$, der — genau wie wir erwartet haben — ein 2-fach angeregter Vektor mit Grundzustandsenergie $h=(3/2+q-1)^2$ ist.

Die Ergebnisse dieses Programms für andere Werte von q_1 und ν stellen wir im Folgenden vor:

3.7.2 $q_1 = 0$

Dieser Fall ist — genau wie $q_2=0$ — trivial, da hier der Automorphismus α_{γ_1} die Identität und der Sektor $[\omega_{\gamma_1}]$ der Vakuumsektor sind. Die Dichtematrix $\varrho^{(0)}_{0,q_2}$ ist eindimensional und operiert auf dem Vektorraum $V^{(0)}_{q_2^2}$. Der Zustand $\xi^{(0)}_{0,q_2}$ ist der Vektorzustand $\xi^{(0)}_{0,q_2}=\langle q_2^2|\,.\,|q_2^2\rangle$, und wir haben die „Zerlegung“ $\omega_{\gamma_1 k\gamma 2}=\xi^{(0)}_{0,q_2}$ und damit die Fusionsregeln:

$$[0]\times[q_2^2] \;\succ\; [q_2^2]\;.$$

3.7.3 $q_1 = \frac{1}{2}$

Auch dieser Fall ist trivial in dem Sinne, dass hier nach Folgerung 3.28 die beiden Zustände $\xi^{(0)}_{\frac{1}{2},q_2} = \big\langle (q_2+\frac{1}{2})^2 \big| \, . \, \big| (q_2+\frac{1}{2})^2 \big\rangle$ und $\xi^{(1)}_{\frac{1}{2},q_2} = \big\langle (q_2-\frac{1}{2})^2 \big| \, . \, \big| (q_2-\frac{1}{2})^2 \big\rangle$ Grundzustände sind. Die Zerlegung lautet also $\omega_{\gamma_1 k \gamma 2} = |k_1|^2 \xi^{(0)}_{\frac{1}{2},q_2} + |k_2|^2 \xi^{(1)}_{\frac{1}{2},q_2}$, und wir haben die Fusionsregeln:

$$[(\tfrac{1}{2})^2] \times [q_2^2] \quad \succ \quad [(q_2-\tfrac{1}{2})^2] \oplus [(q_2+\tfrac{1}{2})^2] \, .$$

3.7.4 $q_1 = 1$

Dieses ist der erste Fall, in dem nicht alle auftretenden Zustände Grundzustände sind. Das in Unterabschnitt 3.7.1 beschriebene Programm liefert das Ergebnis $\xi^{(1)}_{1,q_2} = \frac{1}{2q_2^2} \langle q_2^2 | L_1 \, . \, L_{-1} | q_2^2 \rangle$ und schließt somit den laut Lemma 3.25 und Satz 3.27 möglichen Grundzustand des Sektors $[q_2^2+1]$ aus. Die Fusionsregeln lauten:

$$[1] \times [q_2^2] \quad \succ \quad [(q_2-1)^2] \oplus [q_2^2] \oplus [(q_2+1)^2] \, .$$

3.7.5 $q_1 = \frac{3}{2}$

Diesen Fall haben wir bereits in Unterabschnitt 3.7.1 erläutert. Das Maple-Programm liefert für $\nu = 1$ beziehungsweise $\nu = 2$ das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \xi^{(1/2)}_{\frac{3}{2},q_2} \; = \; & \frac{1}{12\, q_2^2\, (2q_2 \pm 2)^2} \\ & \left[\frac{(4q_2 \pm 3)}{2q_2 \pm 1} \big\langle (q_2 \pm \tfrac{1}{2})^2 \big| L_1^2 \mp (2q_2 \pm 3) \big\langle (q_2 \pm \tfrac{1}{2})^2 \big| L_2 \right] . \\ & \left[\frac{(4q_2 \pm 3)}{2q_2 \pm 1} L_{-1}^2 \big| (q_2 \pm \tfrac{1}{2})^2 \big\rangle \mp (2q_2 \pm 3) L_{-2} \big| (q_2 \pm \tfrac{1}{2})^2 \big\rangle \right] \end{aligned}$$

und damit die Fusionsregeln

$$[(\tfrac{3}{2})^2] \times [q_2^2] \quad \succ \quad [(q_2-\tfrac{3}{2})^2] \oplus [(q_2-\tfrac{1}{2})^2] \oplus [(q_2+\tfrac{1}{2})^2] \oplus [(q_2+\tfrac{3}{2})^2] \, .$$

3.7.6 $q_1 = 2$

Hier sind die Dichtematrizen der Zustände $\xi^{(1)}_{2,q_2}$ und $\xi^{(3)}_{2,q_2}$ zunächst $(3 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times 1)$-Matrizen. Das Maple-Programm liefert auch hier wieder

Vektorzustände

$$\begin{aligned}
\xi^{(1/3)}_{2,q_2} &= \frac{1}{36\, q_2^2\, (2q_2 \pm 3)^2} \\
&\left[\frac{(4q_2 \pm 3)}{2q_2 \pm 1}\left(\frac{1}{2q_2 \pm 2}\left\langle (q_2 \pm 1)^2\right| L_1^3 \mp \left\langle (q_2 \pm 1)^2\right| L_2 L_1\right) \mp \right. \\
&\left. (2q_2 \pm 6)\left(\frac{1}{2q_2 \pm 2}\left\langle (q_2 \pm 1)^2\right| L_1 L_2 \mp \left\langle (q_2 \pm 1)^2\right| L_3\right)\right] . \\
&\left[\frac{(4q_2 \pm 3)}{2q_2 \pm 1}\left(\frac{1}{2q_2 \pm 2} L_{-1}^3 \left| (q_2 \pm 1)^2\right\rangle \mp L_{-1} L_{-2}\left| (q_2 \pm 1)^2\right\rangle\right) \mp \right. \\
&\left. (2q_2 \pm 6)\left(\frac{1}{2q_2 \pm 2} L_{-2} L_{-1}\left| (q_2 \pm 1)^2\right\rangle \mp L_{-3}\left| (q_2 \pm 1)^2\right\rangle\right)\right] .
\end{aligned}$$

Die Dichtematrix zum Zustand $\xi^{(2)}_{2,q_2}$ ist eine $(5\times 5)+(3\times 3)+(2\times 2)+(1\times 1)+(1\times 1)$-Matrix. Da die Rechnungen für das in Unterabschnitt 3.7.1 beschriebene Programm hier zu umfangreich geworden wären, haben wir diesen Vektor unter Ausnutzung der Folgerung 3.34 berechnet:

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{x}^{(2)}_{2,q_2}\right\rangle &= \frac{1}{16q^2(4q_2^2-1)^2(4q_2^2-9)}\left(-\frac{32q_2^4 - 74q_2^2 + 27}{12q_2^2(q_2^2-1)} L_{-1}^4\,|h\rangle\right. \\
&+\frac{44q_2^4 - 86q_2^2 + 27}{3q_2^2(q_2^2-1)} L_{-2} L_{-1}^2\,|h\rangle \\
&-4(2q_2^2-3) L_{-2}^2\,|h\rangle \\
&+\frac{64q_2^6 - 264q_2^4 + 212q_2^2 - 27}{6q_2^2(q_2^2-1)} L_{-3} L_{-1}\,|h\rangle \\
&\left.+\frac{16q_2^4 - 28q_2^2 + 27}{3(q_2^2-1)} L_{-4}\,|h\rangle\right) .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir hier die Fusionsregeln

$$[2^2]\times[q_2^2] \;\succ\; [(q_2-2)^2]\oplus[(q_2-1)^2]\oplus[q_2^2]\oplus[(q_2+1)^2]\oplus[(q_2+2)^2]\,.$$

Die Beispiele zeigen wieder, dass — wie schon im Anschluss an Folgerung 3.32 bemerkt — an den Stellen $2q_2 \in \mathbf{N}_0$ mit $q_2 < q_1$ Sektoren in unseren Fusionsregeln vorkommen, die nicht in den SU(2)-Fusionsregeln vorhanden sind. Außerdem sehen wir, dass die berechneten Vektoren an diesen Stellen nicht existieren, da dort die Koeffizienten singulär werden. Dieses war zu erwarten, da nach Satz 3.33 für diese Fälle der Zustand $\xi^{(\nu)}_{q_1,q_2}$ kein Vektorzustand sein muss. Die Besonderheit ist darin begründet, dass für Grundzustandsenergien $h \in (\frac{1}{2}\mathbf{N}_0)^2$ zusätzliche lineare Abhängigkeiten zwischen den Vektoren der Räume $V_h^{(k)}$ auftreten, die im generischen Fall $h \notin (\frac{1}{2}\mathbf{N}_0)^2$ nicht vorhanden sind. Somit ist unser Ansatz in diesen Fällen nicht gültig, da er von zu vielen Dimensionen der Vektorräume $V_h^{(k)}$ ausgeht.

3.8 Asymptotische Lokalisiertheit

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Auswirkungen der schon in Abschnitt 3.3 bemerkten fehlenden Lokalisierbarkeit des Automorphismus α_{γ_q}, wegen derer Lemma 2.25 nicht angewendet werden kann: Die Darstellung $\pi_{\omega_{\gamma_q}}$ enthält zwar genau den gewünschten Sektor, aber die positive Abbildung χ_{γ_q} enthält darüber hinaus weitere Sektoren.

Der Automorphismus α_{γ_q} ist ein Bogolyubov-Automorphismus, der für Parameter $q \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0$ auf der CAR-Feldalgebra $\mathcal{F}$ unitär implementiert ist ([PS86], Abschnitt 6.3.1):

$$\alpha_{\gamma_q} \quad = \quad \Psi_q \,.\, \Psi_q^* \,. \tag{3.10}$$

Wir zerlegen den Operator $\Psi_q \in \mathcal{F}$ mit Hilfe der harmonischen Analyse: Die Homomorphismen $U^{(s)} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^{2s+1})$ seien die irreduziblen Darstellungen der Gruppe SU(2) zum Isospin $s \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0$. Dann definieren wir die harmonischen Komponenten des Operators Ψ_q als

$$\psi_{m,n}^{(s)} \quad := \quad (2s+1) \int_{\mathrm{SU}(2)} \overline{U_{m,n}^{(s)}(k)}\alpha_k(\Psi_q)dk \,.$$

Damit haben wir den Operator nach den Darstellungen der Gruppe SU(2) zerlegt:

$$\Psi_q = \sum_{s \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0} \sum_{m=-s}^{s} \psi_{m,m}^{(s)} \,.$$

Die Spaltenvektoren $(\psi_{\mu,n}^{(s)}{}^*)_\mu$ transformieren sich für jedes $n \in \{-s, -s+1, \ldots, s-1, s\}$ wie ein SU(2)-Multiplett.

Aus Formel (3.10) und Satz 3.13 folgt, dass der Operator Ψ_q^* die Cartan-Ladung q trägt:

$$[Q^3, \Psi_q^*] = q\Psi_q^* \,.$$

Wenn wir die durch die Quantenzahlen s und m der Operatoren $\psi_{m,m}^{(s)}{}^*$ implizierten Kommutatorrelationen berücksichtigen, können wir aus obigem Kommutator auch deren Cartan-Ladung berechnen:

$$[Q^3, \psi_{m,m}^{(s)}{}^*] = q\psi_{m,m}^{(s)}{}^* \,.$$

Dieses bedeutet jedoch, dass die Operatoren ${\psi^{(s)}_{m,m}}^*$ entweder an der Stelle $\mu = q$ in dem Multiplett $({\psi^{(s)}_{\mu,m}}^*)_\mu$ stehen, oder verschwinden, da sie für $m \neq q$ keine Eigenvektoren des Operators Q^3 zum Eigenwert q sein können: ${\psi^{(s)}_{m,m}}^* = \delta_{m,q}\psi^{(s)*}_{q,q}$. Für die Darstellung des Operators Ψ_q folgt daraus:

$$\Psi_q \quad = \quad \sum_{s \in q + \mathbf{N}_0} \psi^{(s)}_{q,q} \; .$$

Da wir das SU(2)-Transformationsverhalten der harmonischen Komponenten $\psi^{(s)*}_{q,q}$ kennen:

$$\alpha_k(\psi^{(s)*}_{q,q}) \quad = \quad \sum_{m=-s}^{s} U^{(s)}_{q,m}(k){\psi^{(s)}_{m,q}}^* \; ,$$

können wir die Wirkung der positiven Abbildung χ_{γ_q} auf ein Virasoro-Algebra-Element $A \in \mathcal{A}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\chi_{\gamma_q}(A) \quad &:= \quad \mu \circ \alpha_{\gamma_q}(A) \\
&= \quad \int\limits_{\mathrm{SU}(2)} \alpha_k(\Psi_q) A \alpha_k(\Psi_q^*) dk \\
&= \quad \sum_{s \in q+\mathbf{N}_0} \frac{1}{2s+1} \sum_{m=-s}^{s} \psi^{(s)}_{m,q} A {\psi^{(s)}_{m,q}}^* \\
&= \quad \sum_{s \in q+\mathbf{N}_0} \chi^{(s)}_q(A) \; ,
\end{aligned}$$

wobei die positiven Abbildungen

$$\chi^{(s)}_q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \; A \mapsto \frac{1}{2s+1} \sum_{m=-s}^{s} \psi^{(s)}_{m,q} A {\psi^{(s)}_{m,q}}^*$$

wieder in die Virasoro-Algebra führen, da sie invariant unter den Transformationen der Gruppe SU(2) sind: $\alpha_k \circ \chi^{(s)}_q = \chi^{(s)}_q$. Wir untersuchen im Folgenden deren Sektorzugehörigkeit.

Der Fockraum-Charakter der CAR-Feldalgebra lässt sich in eine Summe zerlegen:

$$\begin{aligned}
\chi(t,r,z) \quad &= \quad \mathrm{Sp}(t^{L_0} r^{Q^3} z^{Q_{\mathrm{el}}}) \\
&= \quad \chi_0(t,r) \sum_{k \in \mathbf{Z}} z^{2k} t^{k^2} p(t) + \chi_{\frac{1}{2}}(t,r) \sum_{k \in \mathbf{Z}} z^{2k+1} t^{(k+\frac{1}{2})^1} p(t) \; ,
\end{aligned}$$

wobei der Operator Q_{el} die „elektrische“ U(1)-Ladung der $\mathrm{U}(2) \cong \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)$-invarianten Zwei-Fermionen-Theorie misst und die Charaktere χ_0 und $\chi_{\frac{1}{2}}$ zu den beiden Darstellungen der Stromalgebra $\mathcal{B}$ gehören. Der Fockraum zerfällt also in die direkte Summe

$$\mathcal{H} \;=\; \mathcal{H}_0 \otimes \left(\oplus_{k\in\mathbf{Z}}\mathcal{H}_{\mathrm{el}}^{(2k)}\right) \bigoplus \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \left(\oplus_{k\in\mathbf{Z}}\mathcal{H}_{\mathrm{el}}^{(2k+1)}\right) .$$

Da die Vektoren $\psi_{m,n}^{(s)\,*}\Omega_0$ keine „elektrische" U(1)-Ladung tragen und Grundzustände bezüglich des Energie-Impuls-Tensors zu dem „elektrischen" U(1)-Strom sind — dieses folgt aus der Invarianz der entsprechenden Operatoren unter den Transformationen α_{γ_q} —, können wir sie wegen der obigen Zerlegung des Fock-Raumes $\mathcal{H}$ als Vektoren in der Vakuumdarstellung der Stromalgebra $\mathcal{B}$ auffassen.

Wenn wir das Fock-Vakuum ω_0 auf die Virasoro-Algebra einschränken, so zerfällt die GNS-Darstellung der Einschränkung $\omega_0|\mathcal{A}$ gemäß Theorem 2.14 in die Darstellungen

$$[\omega_0|\mathcal{A}] \;=\; \bigoplus_{s\in\frac{1}{2}N_0} \mathbf{C}^{2s+1} \otimes [h = s^2] .$$

Da die positive Abbildung $\chi_q^{(s)}$ durch ein SU(2)-Multiplett in der Darstellung zum Isospin s implementiert wird, gehört sie nach Theorem 2.16 zum Sektor $[h = s^2]$, und a priori tragen zur positiven Abbildung χ_{γ_q} alle Sektoren mit $s \in q + \mathbf{N}_0$ bei.

Nun betrachten wir die Evaluation der positiven Abbildung $\chi_q^{(s)}$ im Vakuumzustand: $\omega_{\gamma_q} = \omega_0 \circ \chi_{\gamma_q}$. Da wir den Isospin s des Vektors $\psi_{m,n}^{(s)\,*}\Omega_0$ kennen, ist wegen der obigen Zerlegung des Vakuumzustandes ω_0 nach dem Isospin auch die Grundzustandsenergie $h = s^2$ dieses Vektors festgelegt. Wie wir im Abschnitt 3.4 gesehen haben, hat der Zustand ω_{γ_q} die Energie q^2 mit verschwindender Varianz. Da dieser Zustand durch die positive Abblidung χ_{γ_q} erzeugt werden kann: $\omega_\gamma = \omega_0 \circ \chi_{\gamma_q}$, wissen wir, dass die Vektoren $\psi_{m,q}^{(s)\,*}\Omega_0$ mit $m \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$ die Energie q^2 haben, wenn sie nicht verschwinden. Insbesondere gilt dieses für den Vektor $\psi_{s,q}^{(s)\,*}\Omega_0$ mit Cartan-Ladung s. Gemäß Lemma 2.9 verschwinden deshalb die Vektoren $\psi_{s,q}^{(s)\,*}\Omega_0$ mit Isospin $s > q$. Da wir aus diesen Vektoren jedoch mit Hilfe des Absteigeoperators die anderen Vektoren des Multipletts bekommen können, müssen auch diese verschwinden:

$$\forall s \in \tfrac{1}{2}\mathbf{N}_0, s > q \,\forall m : \psi_{m,q}^{(s)\,*}\Omega_0 \;=\; 0 .$$

Damit können wir den Zustand ω_{γ_q} schreiben als $\omega_{\gamma_q} = \omega_0 \circ \chi_q^{(q)}$. Die Sektoren zu Grundzustandsenergien $h = s^2$ mit $s \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_{>q}$, die in der positiven Abbildung χ_{γ_q} aufgrund der fehlenden Lokalisierbarkeit vorhanden sind, tragen also zum Zustand ω_{γ_q} nicht bei, was auch wegen der Ergebnisse im Abschnitt 3.4 nicht anders zu erwarten war.

Um zu verstehen, warum im Fall $q_1 > q_2$ in unseren Fusionsregeln unerwartete Sektoren auftauchen, untersuchen wir den Zustand $\omega_{\gamma_1} \circ \chi_{\gamma_2}$ näher:

$$\begin{aligned}
\omega_{\gamma_1} \circ \chi_{\gamma_2} &= \omega_0 \circ \chi_{q_1}^{(q_1)} \circ \chi_{\gamma_2} \\
&= \sum_{s \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_{\geq q_2}} \omega_0 \circ \chi_{q_1}^{(q_1)} \circ \chi_{q_2}^{(s)} \\
&= \sum_{s \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_{\geq q_2}} \sum_{s'=|q_1-s|}^{q_1+s} \omega_0 \circ \tilde{\chi}^{(s')} \ ,
\end{aligned}$$

wobei die positiven Abbildungen $\tilde{\chi}^{(s')}$ zu den Sektoren $[h = s'^2]$ gehören und die Fusion der positiven Abbildungen $\chi_{q_1}^{(q_1)} \circ \chi_{q_2}^{(s)}$ nach den bekannten SU(2)-Fusionsregeln erfolgt. Hieran sehen wir, dass die unerwarteten Sektoren nur von den positiven Abbildungen $\chi_{q_2}^{(s)}$ mit $s > q_2$ herrühren können, also von Sektoren, die zu dem Zustand ω_{γ_2} nicht beitragen. Außerdem können wir auch die Gültigkeit unserer Fusionsregeln für den Fall $q_1 \leq q_2$ trotz der fehlenden Lokalisierbarkeit verifizieren, da hier nur die Sektoren der positiven Abbildung $\chi_{q_2}^{(q_2)}$ beitragen.

Kapitel 4

Abschliessende Bemerkungen

Wir haben für zwei Sektoren $[q_1^2]$ und $[q_2^2]$ der Virasoro-Algebra mit $q_1 \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0$ und $q_2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ die Abschätzung

$$[q_1^2] \times [q_2^2] \quad \succ \quad \bigoplus_{\nu=0}^{2q_1} [(q_1 + q_2 - \nu)^2] \; .$$

für die Fusionsregeln berechnet. Die fehlende Gleichheit rührt nicht von unreinen Zuständen, sondern alleine von der bereits im Anschluss an Theorem 2.26 bemerkten Tatsache her, dass ein bestimmter Vektor im Allgemeinen nicht zyklisch ist. Diese Fusionsregeln entsprechen im Fall $q_1 \leq q_2 \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0$ den erwarteten Fusionsregeln der Gruppe SU(2). Die für den Fall $q_1 > q_2 \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0$ „überzähligen" Sektoren rühren von den nur asymptotisch lokalisierten Symmetrietransformationen her. Wir konnten zeigen, dass sich die Auswirkungen der fehlenden Lokalität auf diesen Fall beschränken.

Im Prinzip ist es möglich, die Sektorzugehörigkeit eines Zustandes der Virasoro-Algebra intrinsisch zu bestimmen. In den von uns konstruierten Zuständen wird die Kombinatorik jedoch so unübersichtlich, dass es sich als vorteilhafter erwiesen hat, auf ihre Realisierungen als Vektorzustände in einbettenden Hilberträumen zurückzugreifen.

Aufgrund des in Abschnitt 3.5 erläuterten technischen Problems mit den von uns gewählten speziellen Eichtransformationen für Parameter $q_1 \notin \frac{1}{2}N_0$ konnten wir den interessanten Fall, in dem sich die Grundzustandsenergien beider Superauswahlsektoren nicht als Quadrat einer halbzahligen Zahl schreiben lassen und somit beide Superauswahlsektoren unendliche asymptotische Dimension haben, leider nicht bearbeiten. Wir erwarten, dass auch in diesem Fall alle in der kontinuierlichen direkten Summe in Satz 3.9 auftauchenden Zuständen äquivalent sind, die einzelnen Zustände jedoch statt in endlich viele in unendlich viele reine Zustände zerfallen. Dann könnten wir analog dem Beispiel der Gruppe SO(2) in Abschitt 2.5 folgern, dass auch die statistische Dimension dieser Sektoren unendlich ist, und hätten damit ein weiteres Beispiel für die Hypothese der Gleichheit dieser beiden Größen gefunden.

Literaturverzeichnis

[BGL93] R. Brunetti, D. Guido und R. Longo. *Modular structure and duality in conformal quantum field theory.* Communications in Mathematical Physics **156**, Seiten 201–219, 1993.

[Boc33] S. Bochner. *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind.* Fundamenta Mathematica **20**, Seiten 262–276, 1933.

[BSM90] D. Buchholz und H. Schulz-Mirbach. *Haag duality in conformal quantum field theory.* Reviews in Mathematical Physics **2**, Seiten 105–125, 1990.

[DF77] W. Driessler und J. Fröhlich. *The reconstruction of local observable algebras from the Euclidean Greens functions of a relativistic quantum field theory.* Annales de l'Institut Henri Poincaré **27**, Seiten 221–236, 1977.

[DHR69] Sergio Doplicher, Rudolf Haag und John E. Roberts. *Fields, observables and gauge transformations I.* Communications in Mathematical Physics **13**, Seiten 1–23, 1969.

[DHR71] Sergio Doplicher, Rudolf Haag und John E. Roberts. *Local observables and particle statistics I.* Communications in Mathematical Physics **23**, Seiten 199–230, 1971.

[DHR74] Sergio Doplicher, Rudolf Haag und John E. Roberts. *Local observables and particle statistics II.* Communications in Mathematical Physics **35**, Seiten 49–85, 1974.

[DR90] Sergio Doplicher und John E. Roberts. *Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics.* Communications in Mathematical Physics **131**, Seiten 51–107, 1990.

[FQS86] D. Friedan, Z. Qiu und S. Shenker. *Details of the non-unitary proof for highest weight representations of the Virasoro algebra.* Communications in Mathematical Physics **107**, Seiten 535–542, 1986.

[Fre92] Klaus Fredenhagen. *Product of states.* In R. Gielerak et al. (Hrsg.), *Groups and related topics*, Seiten 199–209, Dordrecht, Boston, London, 1992. Kluwer Academic Publishers.

[Fre94] Klaus Fredenhagen. *Superselection sectors with infinite statistical dimension.* In Huzihiro Araki, Yasuyuki Kawahigashi und Hideki Kosaki (Hrsg.), *Subfactors, Proceedings of the Taniguchi Symposium on operator algebras*, Seiten 242–258, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1994. World Scientific.

[FST89] P. Furlan, G. M. Sotkov und I. T. Todorov. *Two-dimensional conformal quantum field theory.* Rivista del Nuovo Cimento **12**(6), Seiten 1–202, 1989.

[Haa59] Rudolf Haag. *Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs.* In *Lille Conférence 1957*, Éditions du CNRS, 1959.

[Haa96] Rudolf Haag. *Local quantum physics: fields, particles, algebras.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1996.

[HK64] Rudolf Haag und Daniel Kastler. *An algebraic approach to quantum field theory.* Journal of Mathematical Physics **5**(7), Seiten 848–861, 1964.

[Kac74] V. G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekind's η-function.* Functional Analysis and its Applications **8**, Seiten 68–70, 1974.

[Kac79] V. G. Kac. *Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras.* In W. Beiglböck, A. Böhm und E. Takasugi (Hrsg.), *Group Theoretical Methods in Physics*, Band 94 der *Lecture Notes in Physics*, Seiten 441–445, Berlin, Heidelberg, New York, 1979. Springer-Verlag.

[LM76] M. Lüscher und G. Mack. *The energy momentum tensor of critical quantum field theories in 1+1 dimensions.* Manuskript, 1976.

[Mac87] Gerhard Mack. *Introduction to conformal invariant quantum field theory in two and more dimensions.* In G. 't Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. K. Mitter und R. Stora (Hrsg.), *Nonperturbative Quantum Field Theory*, Band 185 der *NATO ASI Series*, Seiten 353–383, New York, 1987. Plenum Press.

[MS72] G. Mack und K. Symanzik. *Currents, stress tensor and generalized unitarity in conformal invariant quantum field theory.* Communications in Mathematical Physics **27**(4), Seiten 247–281, 1972.

[PS86] Andrew Pressley und Graeme Segal. *Loop groups.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, New York, 1986.

[Reh94] Karl-Henning Rehren. *A new view of the Virasoro algebra.* Letters in Mathematical Physics **30**, Seiten 125–130, 1994.

[SW78] R. F. Streater und A. S. Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that.* W. A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 2. Auflage, 1978.

Danksagung

Ich möchte mich bedanken bei

- meinen Eltern für die vorbehaltlose Unterstützung meines Physikstudiums,
- Herrn Dr. Karl-Henning Rehren für das interessante Thema und die lehrreiche und geduldige Betreuung,
- Herrn Prof. Dr. Hansjörg Roos für die Übernahme des Korreferats,
- Herrn Prof. Dr. Detlev Buchholz für Kaffee und Kuchen,
- meiner Arbeitsgruppe „Quantenfeldtheorie und Statistische Mechanik“ für die angenehme Arbeitsatmosphäre,
- Herrn Søren Köster für Diskussionen, Korrekturlesen und konkrete Verbesserungsvorschläge zu dieser Arbeit,
- der Georg-August-Universität zu Göttingen, insbesondere dem Institut für Theoretische Physik, für die Bereitstellung der für ein Physikstudium notwendigen Infrastruktur und
- dem gemeinsamen Prüfungsamt der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachbereiche der Georg-August-Universität zu Göttingen für die bei der Anmeldung zur Diplomhauptprüfung erworbene Fähigkeit, mit Bürokratie umzugehen.