

Zur Thermodynamik gekrümmter Raumzeiten

-

Lokale Temperatur in ESU_4 und adS_4

Zur Thermodynamik gekrümmter Raumzeiten

-

Lokale Temperatur in ESU_4 und adS_4

Diplomarbeit

vorgelegt von

Alexander Stottmeister

geboren in

Braunschweig

angefertigt am

Institut für

Theoretische Physik

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

Oktober 2009

Vorwort

Die Theorie der Quantenfelder auf gekrümmten Raumzeiten ist ein erster Schritt zum Verständnis der Verbindung zwischen der Theorie des Mikrokosmos, der Quantentheorie, und der Allgemeinen Relativitätstheorie, welche die großräumigen Strukturen unserer Welt beschreibt. Ein Verständnis dieser Verbindung ist erforderlich in den extremen Bereichen unseres Universums, in denen sehr starke Gravitationsfelder aufgrund Materieballungen hoher Dichte auftreten (Neutronensterne, schwarze Löcher, Frühzeit des Universums,...).

Hier ist einerseits eine quantentheoretische Beschreibung der Materie und ihrer Wechselwirkungen notwendig (man denke etwa an den Übergang des Quark-Gluon-Plasmas zur hadronischen Materie im frühen Universum), andererseits muß das Gravitationsfeld, welches über den Energie-Impuls-Tensor an die Materiefelder gekoppelt ist, in die Beschreibung eingebunden werden.

In einer vollständigen Theorie ist daher - neben den Materiefelder - auch das Gravitationsfeld zu quantisieren. Häufig läßt sich jedoch die Rückkopplung der Quanteneffekte der betrachteten Materiefelder auf das Gravitationsfeld vernachlässigen. In einer solchen Situation kann das Gravitationsfeld als nicht trivialer, klassischer Hintergrund in die quantentheoretische Beschreibung der Materiefelder integriert werden.

Diese Approximation führt zur Theorie der Quantenfelder auf gekrümmten Raumzeiten, die Gegenstand dieser Arbeit ist.

Große Schwierigkeiten bei der Formulierung von Quantenfeldtheorien auf generischen gekrümmten Raumzeit entstehen durch das Fehlen von Symmetrien. Im Gegensatz zum Minkowskiraum stehen daher Konzepte, wie etwa das Vakuum, nicht zur Verfügung.

Ein weiteres Konzept, welches im Allgemeinen seine Bedeutung verliert, ist der Begriff des globalen (thermischen) Gleichgewichtes eines physikalischen Systems, denn dafür wird ein "Zeittranslations"-Begriff benötigt, d.h. eine Dynamik bezüglich derer das System als "im Gleichgewicht" angesehen werden kann. Nur wenn eine solche Dynamik vorhanden ist, erlaubt die sogenannte *KMS-Bedingung*¹ die Bestimmung von globalen, d.h. über der ganzen Raumzeit definierten, Gleichgewichtszuständen.

Die Abwesenheit von Symmetrien in der generischen Situation zeigt die Notwendigkeit eines "lokalisierten" Gleichgewichtsbegriffes. Ein Vorschlag in diese Richtung wurde von D. Buchholz und J. Schlemmer in [BS07] im Rahmen der Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten gemacht, basierend auf Ideen von D. Buchholz, I. Ojima und H. Roos (s. [BOR02], [Buc03]). Grob gesagt, besteht das lokale Gleichgewichtskonzept in der Auswahl geeigneter KMS-Zustände im Minkowskiraum, zur Beschreibung von Gleichgewichtssituationen gewünschten Typs (Referenzzustände), und bestimmter Observablen, die empfindlich gegenüber den intensiven Parametern dieser Zustände sind, sowie einem anschließenden Vergleich der Erwartungswerte dieser Observablen in Zuständen über einer gewählten Raumzeit mit den Erwartungswerten in den Referenzzuständen (s. Teil II, Abschnitt 3).

Das Ziel dieser Arbeit ist ein Vergleich dieses neuen Konzeptes mit dem durch die KMS-Bedingung gegebenen anhand eines einfachen Modells, dem masselosen, konform kovarianten Klein-Gordon-Feld, in Situationen, in denen beide Ansätze Anwendung finden (stationäre Raumzeiten, s. Teil II, Abschnitt 4). Als Modell-Raumzeiten werden das *statische Einstein-Universum* (ESU_4) und die *Anti-de Sitter-Raumzeit* (adS_4) betrachtet, die zwar nicht als realistische Kandidaten für die Beschreibung unseres Universums anzusehen sind, aber trotz relativer Einfachheit allgemeinere Eigenschaften als der Minkowskiraum besitzen, wie etwa nicht verschwindende Krümmung, eine geringere Anzahl von Symmetrien (ESU_4) oder auch pathologische kausale Eigenschaften (adS_4). Somit ist eine Betrachtung dieser Raumzeiten zur Analyse des lokalen Gleichgewichtskonzeptes nach [BS07] gerechtfertigt.

Letztere besteht in der Anwendung des, in [BS07] eingeführten, lokalen Temperaturbegriffes auf zuvor bestimmte Kandidaten für KMS-Zustände über ESU_4 und adS_4 . Dabei stellt sich heraus, daß in diesem Modell eine im Allgemeinen positionabhängige Temperaturverteilung (je nach

¹s. Teil II, Abschnitt 3.

Dynamik des Beobachters) die Folge ist. Dies wurde bereits in [BS07] für geodätische Beobachter auf der *de Sitter-Raumzeit* festgestellt, und unterstreicht die zuvor betonte Notwendigkeit eines lokalen Gleichgewichtsbegriffes. Weiterhin zeigen sich Abweichungen in der Form der Temperaturverläufe, die möglicherweise eine notwendige Erweiterung der Menge der betrachteten Referenzzustände andeuten (s. Teil II, Abschnitt 5).

Als Nebenprodukt dieser Analyse ergeben sich Aussagen über die Bedeutung der Renomierungsfreiheit des Wick-Quadrates (s. [HW01]) in diesem Modell und die in [BS07] vorgeschlagene Möglichkeit zur Fixierung ebendieser.

Der Aufbau der Arbeit gestaltet sich wie folgt:

In Teil I finden sich grundlegende Erläuterungen und Konzepte zur Konstruktion der Quantentheorie einer klassischen, linearen Feldtheorie auf einer gekrümmten Raumzeit. Abschnitt 1 erinnert dazu an das Konzept der “Wellengleichung” in Termen von normal hyperbolischen Differentialoperatoren. Desweiteren werden Eindeutigkeit, Existenz und Konstruktion spezieller Fundamentallösungen (avancierter/retardierter Propagator) diskutiert. Insbesondere wird die *Hadamard’sche Konstruktion* mit Blick auf Unterabschnitt 2.2.2 (*Hadamard-Zustände*) analysiert. In Unterabschnitt 1.3 werden spezielle normal hyperbolische Differentialoperatoren, die *Huygens’schen* Differentialoperatoren, welche eine scharfe Signalausbreitung beschreiben, besprochen. Die Formulierung und Konstruktion einer Quantenfeldtheorie, in dem hier verwendeten Sinne, ist Gegenstand von Abschnitt 2, mit besonderer Betrachtung des konform gekoppelten Klein-Gordon-Feldes in Unterabschnitt 2.2.2, für dessen avancierten/retardierten Propagator eine Invarianzaussage bewiesen wird (Lemma 2.7, S. 24)

Teil II besteht in der Erklärung der KMS-Bedingung und des lokalen Gleichgewichtskonzeptes nach [BS07] (Abschnitt 3), sowie in deren Vergleich und der Analyse für das *statische Einstein-Universum* und die *Anti-de Sitter-Raumzeit* (Abschnitte 4 und 5). Zur Konstruktion der Quantenfeldtheorien über diesen Raumzeiten wird eine Aussage über das Verhalten des avancierten/retardierten Propagators unter konformen Diffeomorphismen bewiesen (Lemma 4.2, S. 40).

Technische Details und Aussagen zu den verwendeten mathematischen Werkzeugen finden sich in den Appendizes (Teil III).

Konventionen und Notation

“One, two, three, five, four, ...”
 “No, Daddy, it’s one, two, three, four, five.”
 “Well, if I want to say one, two, three, five, four, why can’t I?”
 “That’s not how it goes.”

Eine *Raumzeit* \mathcal{M} ist, soweit nicht anders erwähnt, eine glatte, zusammenhängende, Lorentz’sche, orientierte und zeit-orientierte Mannigfaltigkeit².

Die Signatur der Metrik g einer Raumzeit \mathcal{M} ist $(-, +, \dots, +)$ (vgl. [HE73], [BGP07], [Wal84], [DB60], [O’N83]). Die induzierte Metrik $g|_{\mathcal{S}}$ auf raumartigen Hyperflächen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ ist somit positiv definit (“geometrische Wahl”). Es ist zu beachten, daß in der zitierten Literatur ebenso die Signatur $(+, -, \dots, -)$ anzutreffen ist, z.B. [Fri75]. Der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ ist von dieser Wahl nicht betroffen, abgeleitete Größen jedoch schon. Weitere Schwierigkeiten sind durch verschiedene Konventionen in der Definition des Krümmungstensors R bedingt.

Da es dies bezüglich zu Verwirrungen, insbesondere zwischen den Quellen [Fri75], [BGP07] und [Wal84], kommen kann, soll deren Notation in Hinblick auf einige wichtige Größen hier verglichen werden. Die Konventionen innerhalb der Arbeit stimmen mit [BGP07] überein.

Ist Q eine mathematische Größe, so bezeichnet Q^F , Q^{BGP} bzw. Q^W die, der jeweiligen Quelle zugeordnete, Größe.

Es gilt für den

Krümmungstensor

$$R^F{}^i{}_{jkl} = -R^{BGP}{}^i{}_{jkl} = R^W{}_{klj}{}^i$$

$$R^F{}_{ij} = -R^{BGP}{}_{ij} = -R^W{}_{ij} \text{ mit } R_{ij} := R^k{}_{ikj} \text{ bzw. } R_{ij} := R_{ikj}{}^k$$

$$S^F = S^{BGP} = S^W \text{ mit } S := g^{ij} R_{ij}$$

Laplace-d’Alembert-Operator

$$\square^F := g^{ij} \nabla_i \nabla_j$$

$$\square^{BGP} := -g^{ij} \nabla_i \nabla_j$$

$$\square^W := g^{ij} \nabla_i \nabla_j$$

konform gekoppelter Laplace-d’Alembert-Operator³

$$\Upsilon^F := \square^F + \frac{1}{6} S^F$$

$$\Upsilon^{BGP} := \square^{BGP} + \frac{1}{6} S^{BGP}$$

$$\Upsilon^W := \square^W - \frac{1}{6} S^W$$

Andererseits bewirkt die Operation $g \mapsto -g$ eine Umkehr der Signatur, d.h.: $\square_g = -\square_{-g}$ und $S_g = -S_{-g}$.

Letzteres impliziert:

$$\Upsilon^F = \Upsilon^{BGP} = -\Upsilon^W$$

²Zur Erklärung der Begriffe siehe Appendix A und B.

³siehe auch *Yamabe-Operator*

Für die (skalierte) Fouriertransformation $\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}$ und die (skalierte) inverse Fouriertransformation $\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*$ über \mathbb{R} bzw. S^1 (Kreis) gilt die Konvention:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\mathfrak{K}}(k) &= \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}[f](k) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ik \frac{t}{\mathfrak{K}}} dt, & \hat{f}_{\mathfrak{K}}(k) &= \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}[f](k) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ik \frac{t}{\mathfrak{K}}} dt \\ f(t) &= \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\hat{f}_{\mathfrak{K}}](k) = \frac{1}{2\pi\mathfrak{K}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{\mathfrak{K}}(k) e^{ik \frac{t}{\mathfrak{K}}} dk, & f(t) &= \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\hat{f}_{\mathfrak{K}}](k) = \frac{1}{2\pi\mathfrak{K}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{\mathfrak{K}}(k) e^{ik \frac{t}{\mathfrak{K}}} \end{aligned}$$

Ist \mathcal{M} eine Raumzeit mit konstanter Skalarkrümmung S , so wird durch letztere eine natürliche Längenskala in \mathcal{M} induziert, welche genutzt werden kann, um den Parameter \mathfrak{K} zu definieren und ω resp. k in der Fouriertransformation dimensionslos zu machen. Die gewöhnliche (inverse) Fouriertransformation $\mathfrak{F}^{(*)}$ ergibt sich für $\mathfrak{K} = 1$.

Die Einheiten sind in der gesamten Arbeit so gewählt, daß $c = G = \hbar = k_B = 1$ gilt.

Liste häufig verwendeter Symbole

\mathfrak{A}	Observablen-Algebra
\mathbb{C}	der Körper der komplexen Zahlen
$ds_{\mathcal{M}}^2$	alternative Notation für die Metrik der Raumzeit \mathcal{M}
$\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$	kompakt getragene (glatte) Schnitte des Vektorbündels $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$
$\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$	kompakt getragene (glatte) Schnitte des trivialen Bündels $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$
$\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$	kompakt getragene (glatte) Schnitte des trivialen Bündels $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$
$\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$	Distributionen über $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ mit Werten in einem Vektorraum V
$\Delta^{\mathcal{M}}$	kausaler Propagator über \mathcal{M}
Δ^{∇}	Bochner-Laplace-Operator des Zusammenhangs ∇
\mathcal{E}	(\mathbb{K} -)Vektorbündel über einer Raumzeit \mathcal{M}
\mathcal{E}^*	duales Bündel zu \mathcal{E}
$\text{End}(\mathcal{E})$	Endomorphismen Bündel zu \mathcal{E}
\mathcal{F}	lokal kovariante Quantenfeldtheorie
Φ	lokal kovariantes Quantenfeld
$:\Phi^n:$, $n \geq 0$	(lokal kovariante) Wick-Monome von Φ
ϕ_t , $t \in \mathbb{R}$	1-Parameter-Gruppe von Isometrien mit zeitartigen Orbits
g	(Raumzeit-)Metrik
g^*	duale Metrik zu g
$g_{\mathcal{E}}$	Fasermetrik eines Vektorbündels \mathcal{E}
$G_{\pm}^{\mathcal{M}}$	avancierter/retardierter Propagator über \mathcal{M}
$\Gamma(p, q)$	geodätisches Abstandsquadrat zwischen den Punkte p, q
$\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$	(glatte) Schnitte des Vektorbündels $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$
H_n	Hadamard-Parametrix der Ordnung n
$I_{\pm}(\mathcal{S}, \mathcal{M})$	chronologische Zukunft/Vergangenheit der Menge \mathcal{S} in \mathcal{M}
$J_{\pm}(\mathcal{S}, \mathcal{M})$	kausale Zukunft/Vergangenheit der Menge \mathcal{S} in \mathcal{M}
Λ	kosmologische Konstante
\mathcal{M}	(allgemeine) Raumzeit
\mathbb{M}	Minkowskiraum der Dimension 4
∇	Zusammenhang über einem Vektorbündel
P	linearer Differentialoperator
\mathcal{R}	thermische Referenzzustände
\mathbb{R}	der Körper der reellen Zahlen
\mathbb{R}_{ν}^n	die Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^n mit der Standard-Metrik g_{ν} mit Index ν
R	Krümmungstensor
Ric	Ricci-Tensor

S	Skalarkrümmung
S^n	die n -dimensionale Sphäre
σ_P	Hauptsymbol des linearen Differentialoperators P
\mathcal{T}	lokale thermische Observablen
$T\mathcal{M}$	Tangentialbündel von \mathcal{M}
$T^*\mathcal{M}$	Kotangentialbündel von \mathcal{M}
$V^k, k \geq 0$	Hadamard-Koeffizienten
$\mathcal{W}(\mathcal{M})$	Weyl-Algebra über \mathcal{M}
$\mathcal{W}(V)$	Weyl-Algebra eines symplektischen Vektorraumes V
$W(s)$	Weyl-Operator zu einem Schnitt $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$
ω	Zustand über der Observablen-Algebra \mathfrak{A}
ω_2	2-Punkt-Funktion des Zustandes ω
Υ	konform gekoppelter Laplace-d'Alembert-Operator oder masseloser, konform invarianter Klein-Gordon-Operator
\mathbb{Z}	der Ring der ganzen Zahlen
\square	Laplace-d'Alembert-Operator

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Konventionen und Notation	vii
Liste häufig verwendeter Symbole	viii
Inhaltsverzeichnis	xi
I Grundlagen	1
1 Wellengleichungen auf gekrümmten Raumzeiten	2
1.1 Normal-hyperbolische Differentialoperatoren	2
1.2 Die Fundamentallösung	4
1.2.1 Riesz-Distributionen	4
1.2.2 Lokale Theorie: Die Hadamard'sche Konstruktion	6
1.2.3 Globale Theorie	10
1.3 Differentialoperatoren vom Huygens'schen Typ	13
1.3.1 Konforme Kovarianz Huygens'scher Differentialoperatoren	14
2 Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten	15
2.1 Der Algebraische Zugang	15
2.2 Das Prinzip der lokal kovarianten Quantenfeldtheorie	16
2.2.1 Die Quantenfeldtheorie eines normal-hyperbolischen, formal selbst-adjungierten Differentialoperators	18
2.2.2 Hadamard-Zustände und Wick-Monome des Klein-Gordon-Feldes	24
II Zur Thermodynamik gekrümmter Raumzeiten	29
3 Thermodynamisches Vorspiel	30
3.1 KMS-Zustände	30
3.2 Lokales Gleichgewicht	31
3.2.1 Thermische Referenzzustände	32
3.2.2 Lokale thermische Observablen	33
4 Konsistenz des Modells	35
4.1 Stationäre Raumzeiten	35
4.2 Explizite Konstruktionen am Modell des Wick-Quadrates	35
4.2.1 Der Minkowski-Raum (\mathbb{M})	36
4.2.2 Das statische Einstein-Universum (ESU_4)	39
4.2.3 Die Anti-de Sitter-Raumzeit (adS_4)	49
5 Diskussion	61
III Appendizes	71
A Differentialgeometrie	72
A.1 Mannigfaltigkeiten	72
A.1.1 Vektoren, Kovektoren und Abbildungen	74
A.1.2 Tensoren und Tensorfelder	80
A.1.3 Untermannigfaltigkeiten	84
A.1.4 Vektorfelder und Integralkurven	85

A.1.5	Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten	87
A.2	Lie-Gruppen	90
A.3	Faserbündel	95
A.3.1	Vektorbündel	98
A.3.2	Lineare Differentialoperatoren	102
A.4	Distributionen auf Mannigfaltigkeiten	103
B	Semi-Riemann'sche Geometrie	107
B.1	Grundlagen	107
B.1.1	Der Levi-Civita Zusammenhang	109
B.1.2	Geodäten und die Exponentialabbildung	111
B.2	(Hyper-)Quadriken	115
B.3	Konforme Abbildungen	119
B.4	Zeit-Orientierbarkeit und Kausalität	120
C	Elemente der Kategorien-Theorie	123
C.1	Kategorien und Metakategorien	123
C.2	Funktoren	125
C.3	Natürliche Transformationen	126
D	C^*-Algebren	127
D.1	Grundlagen	127
D.2	Zustände	130
D.3	Darstellungen	131
	Index	133
	Literatur	137
	Danksagungen	141

Teil I
Grundlagen

1 Wellengleichungen auf gekrümmten Raumzeiten

Viele physikalische Felder können im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie, sofern ihr jeweiliger Einfluß auf die betrachtete Raumzeit \mathcal{M} und ihre Wechselwirkung untereinander vernachlässigt werden kann, durch Lösungen von (in-)homogenen linearen Differentialgleichungen auf Vektorbündeln über \mathcal{M} beschrieben werden (z.B. das Klein-Gordon- (Pion), das Proca- (massive Spin-1-Teilchen) und das Maxwell-Feld (in der Lorentz-Eichung) oder auch (hypothetische) Gravitationswellen (linearisierte Einstein-Gleichungen)).

Der Ausbreitungsgeschwindigkeit physikalischer Phänomene ist durch die Lichtgeschwindigkeit eine natürliche Grenze gesetzt, s.d. diese Felder Differentialgleichungen unterworfen sind, die Lösungen eines solchen Fortpflanzungscharakters zulassen.

Die Theorie der normal-hyperbolischen Differentialoperatoren⁴ liefert einen gemeinsamen Rahmen für diese Situation (s. [BK96] und [BGP07], Abschnitt 1.5).

Im Folgenden ist \mathcal{E} immer ein Vektorbündel über einer Raumzeit (\mathcal{M}, g) ⁵.

1.1 Normal-hyperbolische Differentialoperatoren

Definition 1.1:

Ist $P : \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ ein linearer Differentialoperator, so heißt P normal hyperbolisch, falls das Hauptsymbol die Relation

$$\sigma_P(\omega) = -g^*(\omega, \omega) \text{id}_{\mathcal{E}_p}; \quad p \in \mathcal{M}, \quad \omega \in T_p^*(\mathcal{M})$$

erfüllt, d.h. in einem trivialisierenden Koordinatensystem $(\mathcal{U}, \chi, \psi)$ für P ergibt sich⁶:

$$(Ps)(p) = \sum_{i,j} (\psi|_{\mathcal{E}_p})^{-1} \left(-g_{|p}^{ij} \partial_{i|p}^x \partial_{j|p}^x (\pi_2 \circ \psi \circ s) \right) + \text{niedrigere Ordnungen in } \{\partial_{k|p}^x\}_{k=1,\dots,n} \quad (1.1)$$

für alle $s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$.

Wichtige Beispiele für normal hyperbolische Differentialoperatoren sind die Folgenden.

Beispiel 1.2:

- (1) Ist $\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, so sind die glatten Schnitte dieses Bündels gerade die glatten Funktionen auf \mathcal{M} . Der Laplace-d'Alembert-Operator \square von \mathcal{M} ist ein normal hyperbolischer Differentialoperator auf diesem Bündel, denn⁷

$$\sigma_{\square}(\omega)f(p) = -\sigma_{\text{div}}(\omega) \circ \sigma_{\text{grad}}(\omega)f(p) = -\omega(f(p)) \cdot (*^g)^{-1}(\omega) = -g^*(\omega, \omega) \cdot f(p)$$

für alle $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $p \in \mathcal{M}$, $\omega \in T_p^*(\mathcal{M})$.

Es folgt, daß auch der konform gekoppelte Laplace-d'Alembert-Operator $\Upsilon = \square + \frac{n-2}{4(n-1)}S$ normal hyperbolisch ist. S ist die Skalarkrümmung von \mathcal{M} .

- (2) Ist ∇ ein Zusammenhang auf \mathcal{E} und $\nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}}$ der, durch den Levi-Civita Zusammenhang auf $T\mathcal{M}$ und ∇ induzierte, Zusammenhang auf $T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}$, so ist der Bochner-Laplace-Operator

$$\Delta^\nabla := \text{tr}_g \otimes \text{id}_{\mathcal{E}} \circ \nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}} \circ \nabla$$

⁴Vektorbündel und linearen Differentialoperatoren werden in Appendix A, Unterabschnitte A.3.1 und A.3.2 erklärt.

⁵Begriffe aus der Semi-Riemann'schen Geometrie sind in Appendix B erklärt.

⁶Die Funktionen $\{g^{ij}\}$ sind die Koeffizienten der dualen Metrik g^* bezüglich des assoziierten Kobasenfeldes $\{dx_{\chi}^k\}$.

⁷ $*^g$ ist der metrik-induzierte Isomorphismus zwischen $T\mathcal{M}$ und $T^*\mathcal{M}$; vgl. Appendix A, Bemerkung A.111

normal hyperbolisch, denn es gilt:

$$\sigma_{\Delta^\nabla}(\omega)s(p) = -\operatorname{tr}_g \otimes \operatorname{id}_{\mathcal{E}} \circ \sigma_{\nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}}}(\omega) \circ \sigma_\nabla(\omega)s(p) = -\operatorname{tr}_g \otimes \operatorname{id}_{\mathcal{E}}(\omega \otimes \omega \otimes s(p))$$

für alle $s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$, $p \in \mathcal{M}$, $\omega \in T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes 2}$.

Das zweite Beispiel ist von besonderem Interesse, denn die folgende Proposition besagt, daß jeder normal hyperbolische Differentialoperator zu einem bestimmten Bochner-Laplace-Operator assoziiert werden kann.

Proposition 1.3 (Weitzenböck-Formel):

Ist P ein normal hyperbolischer Differentialoperator über \mathcal{E} , so existieren ein eindeutiger Zusammenhang ∇^P auf \mathcal{E} und ein eindeutiges Endomorphismenfeld $M^P \in \Gamma(\mathcal{M}, \operatorname{End}(\mathcal{E}))$ mit

$$P = \Delta^P + M^P, \quad (1.2)$$

wobei Δ^P der zu ∇^P assoziierte Bochner-Laplace-Operator ist. ∇^P heißt P -verträglicher Zusammenhang. Gleichung (1.2) wird als Weitzenböck-Formel für P bezeichnet.

Der Beweis ist analog zu [BK96], Proposition 3.1 (S.322).

Beweis:

Für alle $f \in C^\infty$ und $s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ und einen Zusammenhang ∇ auf \mathcal{E} gilt:

$$\begin{aligned} \Delta^\nabla(f s) &= -\operatorname{tr}_g \otimes \operatorname{id}_{\mathcal{E}}(\nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}}(df \otimes s + f \nabla s)) \\ &= -\operatorname{tr}_g \otimes \operatorname{id}_{\mathcal{E}}((\nabla^{T^*\mathcal{M}} df) \otimes s + 2df \otimes \nabla s + f \nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}} \nabla s) \\ &= (\square_g f) - 2\nabla_{\operatorname{grad}_g} f s + f \Delta^\nabla s. \end{aligned}$$

Nimmt man an, daß ∇ der gesuchte Zusammenhang ist, folgt wegen $P - \Delta^\nabla \in \Gamma(\mathcal{M}, \operatorname{End}(\mathcal{E}))$ und der obigen Rechnung:

$$(P - \Delta^\nabla)(f s) = f(P - \Delta^\nabla)(s) \Rightarrow \nabla_{\operatorname{grad}_g} f s = \frac{1}{2}((\square_g f)s - P(f s) + f P(s)).$$

Zeigt man also, daß

$$\nabla_v s := \frac{1}{2}((\square_g f_v)s - P(f_v s) + f_v P(s))(p), \quad p \in \mathcal{M}, \quad v \in T_p(\mathcal{M})$$

mit einer Funktion $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, s.d. $(\operatorname{grad}_g f_v)(p) = v$,⁹ einen Zusammenhang auf \mathcal{E} definiert, so ist die Aussage bewiesen.

Die Wohldefiniertheit, Linearität und C^∞ -Linearität von ∇ ist aus der Definition ersichtlich. Die Leibniz-Regel für ∇ folgt in einem trivialisierenden Koordinatensystem \mathcal{U} für P mit Gleichung (1.1), denn auf \mathcal{U} sieht man, daß

$$\frac{1}{2}((\square_g f)(hs) - P(fhs) + fP(hs)) = \frac{1}{2}h((\square_g f)(s) - P(fs) + fP(s)) + (\operatorname{grad}_g f)(h)$$

gilt. □

Dieses Resultat ist für die spätere Konstruktion einer asymptotischen Fundamentallösung eines normal hyperbolischen Differentialoperators wichtig.

Bemerkung 1.4:

Ein triviales Beispiel für die Weitzenböck-Formel ist der konform gekoppelte Laplace-d'Alembert-Operator Υ von \mathcal{M} mit $\nabla^\Upsilon = d$ und $M^\Upsilon = \frac{n-2}{4(n-1)}S$.

⁸ tr_g bezeichnet die, durch $\omega \otimes \omega' \mapsto g_p^*(\omega, \omega')$ induzierte, metrische Spur auf $(T^*\mathcal{M})^{\otimes 2}$.

⁹Eine solche Funktion existiert immer, z.B lässt sich ausnutzen, daß auf einer Koordinatenumgebung \mathcal{U} $\operatorname{grad}_g x^i = \partial_i$ gilt, die $\{\partial_i\}$ $T\mathcal{M}|_{\mathcal{U}}$ parallelisieren und Theorem A.96 für $T\mathcal{M}$ anwendbar ist.

1.2 Die Fundamentallösung

Das Konzept der Fundamentallösung ist entscheidend für die Lösungs-Theorie partieller Differentialgleichungen

$$P\tilde{s} = s.$$

Auch aus physikalischer Sicht ist die Frage nach Fundamentallösungen gerechtfertigt, da sie als Feldkonfigurationen einer Punktquelle verstanden werden können (Definition 1.5, s.u.) und für lineare, partielle Differentialgleichungen ein Superpositions-Prinzip gilt.

Definition 1.5:

Ist P ein linearer Differentialoperator über \mathcal{E} und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$, so heißt eine Distribution¹⁰ $\mathfrak{D}_p \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_p)$ Fundamentallösung für P an $p \in \mathcal{M}$, falls

$$P\mathfrak{D}_p = \delta_p, \text{ d.h. } \mathfrak{D}_p(P^*s) = s(p) \quad \forall s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*),$$

gilt.

Ist der lineare Differentialoperator P in obiger Gleichung normal hyperbolisch, so werden wir im Folgenden von einer *Wellengleichung* sprechen¹¹.

Wie im Falle des Minkowskiraumes \mathbb{R}_1^n gibt es auch für allgemeine Raumzeiten \mathcal{M} keine eindeutige Fundamentallösung für normal hyperbolische Differentialoperatoren, denn es existieren in der Regel Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Allerdings lassen sich nicht alle aus dem flachen Fall bekannten Fundamentallösungen, wie z.B. der *Feynman-Propagator* G_F , in invarianter Weise auf die allgemeinere Situation übertragen, da zur Konstruktion eine Unterteilung der Lösungen bezüglich positiver und negativer Frequenzen mittels Fourieranalyse ausgenutzt wird (s. [Ful89], Kapitel 4).

Für Raumzeiten geeigneten Typs ist es möglich den *avancierten* G_+ und *retardierten Propagator* G_- in eindeutiger Weise zu definieren (s. Unterabschnitt 1.2.3 “Globale Theorie”). Die Eindeutigkeit wird durch Bedingungen an den Träger realisiert^{12,13}:

$$\text{supp } G_{\pm|p} \subseteq J_{\pm}(p, \mathcal{M}) \text{ und } \text{supp } G_{\pm|p} \text{ ist vergangenheits/zukunfts-kompakt in } \mathcal{M}.$$

Im Weiteren werfen wir einen genaueren Blick auf die Struktur dieser speziellen Fundamentallösungen.

1.2.1 Riesz-Distributionen

Dieser Abschnitt widmet sich den Riesz-Distributionen¹⁴, die, wie in [Gün88] und [BGP07] gezeigt, zur Konstruktion des avancierten bzw. retardierten Propagator in einem asymptotischen Sinn verwendet werden können.

Definition 1.6:

Für den (n -dimensionalen) Minkowskiraum¹⁵ \mathbb{R}_1^n mit Standard-Orientierung und Standard-Zeitorientierung, und $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ definiert die Vorschrift

$$R_{\pm}(\alpha)(x) := \begin{cases} C(\alpha, n)(-q_1(x))^{\frac{\alpha-n}{2}} & , \text{ falls } x \in J_{\pm}(0) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

¹⁰s. Appendix A, Unterabschnitt A.4

¹¹Beachte die Analogie eines normal hyperbolischen Differentialoperators zum “Wellenoperator” \square im Minkowskiraum.

¹²s. auch Definition 1.13 und Theorem 1.14.

¹³Die Notation $J_{\pm}(p, \mathcal{M})$ ist in Appendix B, Abschnitt B.4 erklärt.

¹⁴Benannt nach Marcel Riesz.

¹⁵s. Appendix B, Abschnitt B.2 für die Definition.

eine stetige Funktion auf \mathbb{R}_1^n . q_1 bezeichnet die zur Standard-Metrik assoziierte quadratische Form; $C(\alpha, n) := \frac{2^{1-\alpha} \pi^{\frac{2-n}{2}}}{(\frac{\alpha}{2}-1)! (\frac{\alpha-n}{2})!}$ ist ein Normierungsfaktor mit der Gammafunktion $z \mapsto (z-1)!$. Die avancierte bzw. retardierte Riesz-Distribution, ebenfalls $R_{\pm}(\alpha)$, bei α ergibt sich durch

$$R_{\pm}(\alpha)(f) := \int_{J_{\pm}(0)} C(\alpha, n) (-q_1(x))^{\frac{\alpha-n}{2}} f(x) d^n u(x)$$

für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{C}) (= C_0^\infty(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{C}))$. $d^n u$ bezeichnet die Standard-Volumenform auf \mathbb{R}_1^n .

Bemerkung 1.7:

Die Distributionen $R_{\pm}(\alpha)$ sind holomorph in $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \Re(\alpha) > n\}$, d.h. $R_{\pm}(\cdot)(f)$ ist eine holomorphe Funktion auf $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \Re(\alpha) > n\}$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_1^n)$.

Zusammen mit der Identität $\square R_{\pm}(\alpha + 2) = R_{\pm}(\alpha)$ erlaubt diese Tatsache eine eindeutige, holomorphe Fortsetzung auf \mathbb{C} .

Die folgende Proposition gibt einen Überblick über die Eigenschaften der Riesz-Distributionen (vgl. [BGP07], S.11ff).

Proposition 1.8:

Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

- (1) $-q_1 \cdot R_{\pm}(\alpha) = \alpha(\alpha - n + 2)R_{\pm}(\alpha + 2)$,
- (2) $(-\text{grad } q_1) \cdot R_{\pm}(\alpha) = 2\alpha \text{ grad } R_{\pm}(\alpha + 2)$,
- (3) $\square R_{\pm}(\alpha + 2) = R_{\pm}(\alpha)$,
- (4) $\text{supp } R_{\pm}(\alpha) = J_{\pm}(0)$ und $\text{sing supp } R_{\pm}(\alpha) \subseteq \partial J_{\pm}(0)$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (\{-2k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{n - 2(k+1) \mid k \in \mathbb{N}_0\})$,
- (5) $\text{supp } R_{\pm}(\alpha) = \text{sing supp } R_{\pm}(\alpha) \subseteq \partial J_{\pm}(0)$ für $\alpha \in \{-2k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{n - 2(k+1) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$,
- (6) $\text{supp } R_{\pm}(\alpha) = \text{sing supp } R_{\pm}(\alpha) = \partial J_{\pm}(0)$ für $\alpha \in \{n - 2(k+1) \mid k \in \{0, \dots, [\frac{n-3}{2}]\}\}$,
- (7) $\mathbb{R}_{\pm}(0) = \delta_0$,
- (8) $\text{ord}_{\mathbb{R}_1^n}(R_{\pm}(\alpha)) \leq n + 1$ für $\Re(\alpha) > 0$,
- (9) $R_{\pm}(\alpha)(f) \in \mathbb{R}$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$,
- (10) $\phi^*(R_{\pm}(\alpha)) = R_{\pm}(\alpha)$ für alle eigentlichen, orthochronen Lorentz-Transformationen¹⁶ des \mathbb{R}_1^n .

Die (lokale) Übertragung der Riesz-Distributionen auf allgemeine Raumzeiten erfolgt mittels der Exponentialabbildung.

Definition 1.9:

Ist \mathcal{M} eine Raumzeit und $(\mathcal{U}, \psi := \varphi \circ \exp_p^{-1})$ ein Orthonormal-Koordinatensystem um $p \in \mathcal{M}$, so heißt der Pullback¹⁷ der avancierten bzw. retardierten Riesz-Distribution

$$R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) = \psi^* R_{\pm}(\alpha)|_{\mathcal{U}}, \quad \mathcal{W} = \psi(\mathcal{U})$$

die avancierte bzw. retardierte Riesz-Distribution auf \mathcal{U} bei p und $\alpha \in \mathbb{C}$.

¹⁶D.h. ϕ ist eine orientierungserhaltende, zeit-orientierungserhaltende, lineare Isometrie des \mathbb{R}_1^n .

¹⁷s. Lemma A.122.

Proposition 1.8 überträgt sich wie folgt:

Proposition 1.10:

Ist Γ das geodätische Abstandskvadrat¹⁸ auf \mathcal{U} , so gilt für alle $\alpha \in \mathbb{C}$:

- (1) $\{R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p)\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ ist eine holomorphe Familie von Distributionen über $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$,
- (2) $R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p)(q) := \begin{cases} C(\alpha, n)(-\Gamma_p(q))^{\frac{\alpha-n}{2}} & , \text{ falls } q \in J_{\pm}(p, \mathcal{U}) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$ für $\Re(\alpha) > n$,
- (3) $-\Gamma_p \cdot R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) = \alpha(\alpha - n + 2)R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha + 2, p)$,
- (4) $(-\text{grad}_g \Gamma_p) \cdot R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) = 2\alpha \text{grad}_g R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha + 2, p)$,
- (5) $\square_g R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha + 2, p) = \left(\frac{-\square_g \Gamma_p - 2n}{2\alpha} + 1\right)R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p)$ für $\alpha \neq 0$,
- (6) $\text{supp } R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) = J_{\pm}(p, \mathcal{U})$ und $\text{sing supp } R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) \subseteq \partial J_{\pm}(p, \mathcal{U})$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (\{-2k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{n - 2(k+1) \mid k \in \mathbb{N}_0\})$,
- (7) $\text{supp } R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) = \text{sing supp } R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) \subseteq \partial J_{\pm}(p, \mathcal{U})$ für $\alpha \in \{-2k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{n - 2(k+1) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$,
- (8) $\text{supp } R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) = \text{sing supp } R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p) = \partial J_{\pm}(p, \mathcal{U})$ für $\alpha \in \{n - 2(k+1) \mid k \in \{0, \dots, [\frac{n-3}{2}]\}\}$,
- (9) $R_{\pm}^{\mathcal{U}}(0, p) = \delta_p$,
- (10) $\text{ord}_{\mathcal{U}}(R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p)) \leq n + 1$ für $\Re(\alpha) > 0$,
- (11) $R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p)(f) \in \mathbb{R}$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$,
- (12) $R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, (\cdot)) (f)$ ist glatt für alle $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$, falls \mathcal{U} geodätisch konvex ist,
- (13) $\phi^*(R_{\pm}^{\mathcal{U}}(\alpha, p)) = R_{\pm}^{\phi^{-1}(\mathcal{U})}(\alpha, \phi^{-1}(p))$ für alle orientierungserhaltenden, zeit-orientierungserhaltenden Isometrien $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$.

1.2.2 Lokale Theorie: Die Hadamard'sche Konstruktion

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Konstruktion des retardierten/avancierten Propagators eines normal hyperbolischen Differentialoperators P unter Verwendung des vorherigen Abschnittes. Dazu erweist sich der folgende (formale) Ansatz als nützlich (s. [BGP07], S.38f):

$$G_{\pm}^{\mathcal{U}}(p) := \sum_{k=0}^{\infty} V^k(p) R_{\pm}^{\mathcal{U}}(2(k+1), p) \in \mathcal{D}^*(\mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_p^*), \quad (1.3)$$

mit $V^k(p) \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{E}_p^*$ und

$$(V^k(p) R_{\pm}^{\mathcal{U}}(2(k+1), p))(s) := R_{\pm}^{\mathcal{U}}(2(k+1), p) \left((V^k(p), s)_{(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)} \right)$$

für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{E}^*)$ ¹⁹. $(\cdot)_{(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)}$ bezeichnet die natürliche Paarung zwischen \mathcal{E} und \mathcal{E}^* .

Dies führt durch termweise Berechnung von

$$PG_{\pm}^{\mathcal{U}}(p) = \delta_p$$

¹⁸S. Appendix B, Unterabschnitt B.1.2.

¹⁹Die Auswertung $R_{\pm}^{\mathcal{U}}(2(k+1), p)((V^k(p), s)_{(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)})$ kann komponentenweise in \mathcal{E}_p^* verstanden werden.

und anschließenden Koeffizientenvergleich auf die sogenannten *Transportgleichungen*:

$$-\nabla_{\text{grad}_g \Gamma_p} V^k(p) - \left(-\frac{1}{2} \square_g \Gamma_p - n + 2k\right) V^k(p) = 2k P V^{k-1}(p), \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (1.4)$$

mit Anfangsbedingung $V_p^0(p) = \text{id}_{\mathcal{E}_p}$ ²⁰.

Die $V^k(p)$, $k \geq 0$ heißen *Hadamard-Koeffizienten für P bei p* . ∇ ist dabei der P -verträgliche Zusammenhang auf \mathcal{E} (s. Proposition 1.3.).

Theorem B.25 zeigt, daß

$$(\text{grad}_g \Gamma_p)|_{\gamma_q(t)} = 2 \exp_{p,*,t \exp_p^{-1}(q)}(t \exp_p^{-1}(q))|_{t \exp_p^{-1}(q)} = 2t \frac{d}{dt} \exp_p(t \exp_p^{-1}(q)) = 2t \gamma'_q(t) \quad (1.5)$$

mit $\gamma_q(t) := \exp_p(t \exp_p^{-1}(q))$ gilt, d.h. die charakteristischen Kurven der Transportgleichungen sind die Geodäten durch p , wodurch die Eindeutigkeit der Hadamard-Koeffizienten gezeigt werden kann. Die (rekursive) Integration der Gleichungen (1.4) entlang der Geodäten durch p liefert die Existenz letzterer. Um dies einzusehen benötigen wir etwas Vorarbeit.

Dazu betrachten wir in lokalen, orientierungserhaltenden²¹ Koordinaten ψ auf \mathcal{U} die relative Jacobi-Determinante²² $J_{\exp_p^{-1}} \in C^\infty(\mathcal{U})$ bezüglich der assoziierten Volumenform dV_g von \mathcal{M} und der induzierten Volumenform $dV_g(p)$ auf $T_p(\mathcal{M})$ ²³:

$$\begin{array}{ccc} (T_p(\mathcal{M}), dV_g(p)) \supseteq \mathcal{V} & \xrightarrow{\exp_p} & (\mathcal{U}, dV_g) \\ \downarrow \psi_{*,p} & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{R}^n, |g_\psi((\psi(p)))| d^n u(\psi(p))) \supseteq \mathcal{W} & \xrightarrow{\psi \circ \exp_p \circ (\psi_{*,p})^{-1}} & \psi(\mathcal{U}) \subseteq (\mathbb{R}^n, |g_\psi|^{\frac{1}{2}} d^n u) \end{array} \quad (1.6)$$

D.h. es ergibt sich

$$\begin{aligned} (J_{\exp_p^{-1}}^\psi)^{-1}(q) &= \frac{|g_\psi(\psi(q))|^{\frac{1}{2}}}{|g_\psi(\psi(p))|^{\frac{1}{2}}} (\det((\psi_{*,p})_{*,\exp_p^{-1}(q)} \circ (\exp_p^{-1})_{*,q} \circ (\psi^{-1})_{*,\psi(q)}))^{-1} \\ &= \frac{|g_\psi(\psi(q))|^{\frac{1}{2}}}{|g_\psi(\psi(p))|^{\frac{1}{2}}} (\det(\psi_{*,p} \circ (\exp_p^{-1})_{*,q} \circ (\psi^{-1})_{*,\psi(q)}))^{-1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Mit [BGP07], Lemma 1.3.19 (S.28) und Definition 1.3.2 (S.20) folgt:

$$-\frac{1}{2} \square_g \Gamma_p - n = g(\text{grad}_g \Gamma_p, \text{grad}_g \ln((J_{\exp_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}})). \quad (1.8)$$

²⁰ P wirkt auf die \mathcal{E} -Komponente von $V^k(p)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

²¹Dies ist bezüglich der Standard-Orientierung auf \mathbb{R}^n gemeint.

²²s. Definition A.67.

²³s. Definition B.7.

Definiert man für $q \in \mathcal{U} \setminus (\partial J_+(q, \mathcal{U}) \cup J_-(q, \mathcal{U}))$ ²⁴ $r_p := \sqrt{|\Gamma_p|}$, so gilt

$$\begin{aligned} g(\text{grad}_g \ln(r_p^k), \text{grad}_g \Gamma_p) &= kg(\text{grad}_g \ln(r_p), \text{grad}_g \Gamma_p) \\ &= kr_p^{-1}g(\text{grad}_g r_p, \text{grad}_g \Gamma_p) \\ &= \pm \frac{k}{2}r_p^{-2}g(\text{grad}_g \Gamma_p, \text{grad}_g \Gamma_p) \\ &\stackrel{\text{Th. B.25}}{=} \pm 2kr_p^{-2}\Gamma_p = 2k \end{aligned}$$

auf $\mathcal{U} \setminus (\partial J_+(q, \mathcal{U}) \cup \partial J_-(q, \mathcal{U}))$.

Dies erlaubt die Umformulierung der Transportgleichungen zu:

$$\begin{aligned} -\nabla_{\text{grad}_g \Gamma_p} V^k(p) - g(\text{grad}_g \Gamma_p, \text{grad}_g \ln((J_{\text{exp}_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}} r_p^k)) V^k(p) &= 2kPV^{k-1}(p) \\ \Leftrightarrow -\nabla_{\text{grad}_g \Gamma_p} ((J_{\text{exp}_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}} r_p^k V^k(p)) &= 2k(J_{\text{exp}_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}} r_p^k PV^{k-1}(p) \end{aligned}$$

Für $k = 0$ bedeutet das:

$$-2t\nabla_{\gamma'_q(t)}((J_{\text{exp}_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}} V^0(p)) = 0.$$

Daher folgt mit $V_p^0(p) = \text{id}_{\mathcal{E}_p}$, $(J_{\text{exp}_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}}(p) = 1$ und der Stetigkeit von $V^0(p)$

$$V^0(p)(q) = (J_{\text{exp}_p^{-1}})^{\frac{1}{2}}(q) \mathcal{P}_p^q \quad (1.9)$$

für alle $q \in \mathcal{U}$. $\mathcal{P}_p^q : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_q$ ist der Paralleltransport bezüglich des P -verträglichen Zusammenhangs ∇ entlang der eindeutigen Geodäten zwischen p und $q \in \mathcal{U}$.

Eine sehr nützliche Darstellung von $(J_{\text{exp}_p^{-1}})^{\frac{1}{2}}(q)$ in lokalen Koordinaten (\mathcal{U}, ψ) , $(\psi(p) = y)$ ergibt sich mit Gleichung 1.7 und Theorem B.25, Eigenschaft (9) (\mathcal{U} sei dazu geodätisch konvex)²⁵:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_x}{\partial u^i}(y) &= -2g_{ij}(y)\eta^j \\ \Rightarrow \left| \det \left(\frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial u_x^k \partial u_y^i} \right) \right| &= 16|g(y)| \left| \det \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial u_x^k} \right) \right| \end{aligned}$$

mit $x = \psi \circ \exp_{\psi^{-1}(y)} \circ (\psi^{-1})_{*,y}(\eta)$; $x \in \psi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\eta \in \psi_{*,p}(T_p(\mathcal{M})) \subseteq \mathbb{R}^n$, d.h.

$$\begin{aligned} (J_{\text{exp}_{\psi^{-1}(y)}^{-1}}^{\psi})^{\frac{1}{2}}(\psi^{-1}(x)) &= \frac{|g_{\psi}(y)|^{\frac{1}{4}}}{|g_{\psi}(x)|^{\frac{1}{4}}} \left| \det(\psi_{*,\psi^{-1}(y)} \circ (\exp_{\psi^{-1}(y)}^{-1})_{*,\psi^{-1}(x)} \circ (\psi^{-1})_{*,x}) \right|^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\left| \det \left(\frac{\partial \Gamma_{\psi}(x, y)}{\partial u_x^k \partial u_y^i} \right) \right|^{\frac{1}{2}}}{4|g_{\psi}(x)g_{\psi}(y)|^{\frac{1}{4}}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Für $k > 0$ wird $\zeta_q(s) := \gamma_q(e^{2s})$ gesetzt, wodurch Gleichung (1.5) zu

$$(\text{grad}_g \Gamma_p)|_{\zeta_q(s)} = \zeta'_q(s)$$

²⁴Hier wird bildlich gesprochen der Lichtkegel aus \mathcal{U} entfernt, d.h. $\partial J_+(q, \mathcal{U}) \cup \partial J_-(q, \mathcal{U})$ ist das Bild der lichtartigen Vektoren in $\mathcal{V} \subseteq T_p(\mathcal{M})$ unter exp_p .

²⁵vgl. [Fri75], S.135

wird und die Transportgleichungen die Gestalt

$$-(\nabla_{\zeta_q(s)}((J_{\exp_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}}r_p^k V^k(p)))(\zeta_q(s)) = 2k((J_{\exp_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}}r_p^k P V^{k-1}(p))(\zeta_q(s))$$

annehmen. Letztere lassen sich in dieser Form rekursiv und eindeutig integrieren. Dabei dient $V^{k-1}(p)$ zur Fixierung der Anfangsbedingung für $V^k(p)$.

$$((J_{\exp_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}}r_p^k V^k(p))(\zeta_q(s)) = -2k \mathcal{P}_p^{\zeta_q(s)} \int_{-\infty}^s ((J_{\exp_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}}r_p^k)(\zeta_q(\tau)) \mathcal{P}_{\zeta_q(\tau)}^p (P V^{k-1}(p))(\zeta_q(\tau)) d\tau$$

Theorem B.25, Eigenschaft (4) liefert die Identität

$$r_p(\zeta_q(s))^k = |\Gamma_p(\zeta_q(s))|^{\frac{k}{2}} = |g|_p(e^{2s} \exp_p^{-1}(q), e^{2s} \exp_p^{-1}(q))^{\frac{k}{2}} = e^{2ks} |\Gamma_p(q)|^{\frac{k}{2}},$$

d.h. für $q \in \mathcal{U} \setminus (\partial J_+(q, \mathcal{U}) \cup J_-(q, \mathcal{U}))$ ist die Division durch $|\Gamma_p(q)|^{\frac{k}{2}}$ zulässig.

$$((J_{\exp_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}}V^k(p))(\zeta_q(s)) = -2k \mathcal{P}_p^{\zeta_q(s)} \int_{-\infty}^s e^{2k(\tau-s)} ((J_{\exp_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}})(\zeta_q(\tau)) \mathcal{P}_{\zeta_q(\tau)}^p (P V^{k-1}(p))(\zeta_q(\tau)) d\tau$$

Durch Reparametrisierung $\tau = \frac{1}{2} \ln(t)$ erhalten wir bei $s = 0$:

$$V^k(p)(q) = -k (J_{\exp_p^{-1}})^{\frac{1}{2}}(q) \mathcal{P}_p^q \int_0^1 t^{k-1} ((J_{\exp_p^{-1}})^{-\frac{1}{2}})(\gamma_q(t)) \mathcal{P}_{\gamma_q(t)}^p (P V^{k-1}(p))(\gamma_q(t)) dt. \quad (1.11)$$

Die Rechnung zeigt, wie angestrebt, einerseits die Eindeutigkeit der Hadamard-Koeffizienten, da diese als Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen entlang der Geodäten durch p formuliert werden, und andererseits deren Existenz, da die Gleichungen (1.9) und (1.11) zur Definition eben dieser verwendet werden können.

Wird die Umgebung \mathcal{U} von p geodätisch konvex gewählt, so zeigen die Gleichungen (1.9) und (1.11), daß die Hadamard-Koeffizienten $V^k(p)$ auch glatt in p sind.

Zusammenfassend ergibt sich²⁶:

Proposition 1.11:

Ist P ein normal hyperbolischer Differentialoperator über \mathcal{E} mit P -verträglichem Zusammenhang ∇ und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ eine normale Umgebung von $p \in \mathcal{M}$, so existieren durch (1.9) und (1.11) eindeutig bestimmte Hadamard-Koeffizienten $\{V^k(p)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ für P bei p .

Ist \mathcal{U} geodätisch konvex, so sind die Hadamard-Koeffizienten glatt in p , d.h.

$$V^k \in \Gamma(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Bedeutung des Ansatzes (1.3) wird durch ein Theorem von Paul Günther (s. [Gün88], Kapitel 3.3) verdeutlicht. Allerdings benötigen wir zu dessen Verständnis zwei Definitionen.

Definition 1.12:

Eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ heißt kausale Umgebung, falls

- (1) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ für eine geodätisch konvexe Umgebung \mathcal{U}' ,
- (2) für $p, q \in \mathcal{U}$ ist $J_+(p, \mathcal{U}') \cap J_-(q, \mathcal{U}')$ eine kompakte Teilmenge von \mathcal{U}

gilt.

Theorem 4.4.1 in [Fri75] (S.147) besagt, daß jeder Punkt in \mathcal{M} eine kausale Umgebung besitzt.

²⁶Im Vergleich mit [BK96], Proposition 3.2 ist $U_k = \frac{1}{2^k k!} V^k$ zu beachten.

Definition 1.13:

Ein Teilmenge \mathcal{S} einer Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ heißt zukunfts/vergangenheits-kompakt in \mathcal{U} , falls $\mathcal{S} \cap J_{\pm}(p, \mathcal{U})$ für alle $p \in \mathcal{U}$ kompakt ist in \mathcal{U} .

Theorem 1.14:

Ist P ein normal hyperbolischer Differentialoperator über \mathcal{E} und \mathcal{U} eine kausale Umgebung von $p \in \mathcal{M}$, so existieren eindeutige Fundamentallösungen $G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_p^*)$ für P an p auf \mathcal{U} mit den Eigenschaften:

- (1) $\text{supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} \subseteq J_{\pm}(p, \mathcal{U})$,
- (2) $\text{sing supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} \subseteq \partial J_{\pm}(p, \mathcal{U})$,
- (3) $\text{supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}$ ist vergangenheits/zukunfts-kompakt in \mathcal{U} .

$G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}$ heißt avancierter/retardierter Propagator auf \mathcal{U} für P an p , und ist von der Form

- (1) Für $n = 2$ oder n ungerade:

$$G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} = T(p, \cdot) R_{\pm}^{\mathcal{U}}(2, p)$$

- (2) Für n gerade:

$$G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} = \sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} c_{(2,k)} \frac{1}{2^k k!} V^k(p, \cdot) R_{\pm}^{\mathcal{U}}(2(k+1), p) + c_{(2, \frac{n-2}{2})} T(p, \cdot) R_{\pm}^{\mathcal{U}}(n, p)$$

Dabei ist die Zahl $c_{(a,k)}$ durch

$$c_{(a,0)} = 1, \quad c_{(a,k)} = a(a+2)\dots(a+2k-2); \quad a \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}$$

definiert und $T \in \Gamma(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*)$ ein glatter Schnitt mit dem folgenden asymptotischen Verhalten bei $C := \{(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \Gamma(p, q) = 0\}$

- (1) Für $n = 2$ oder n ungerade:

$$T(p, q) \underset{(p,q) \rightarrow C}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{c_{(4-n,k)} 2^k k!} V^k(p, q) \Gamma(p, q)^k$$

- (2) Für n gerade:

$$T(p, q) \underset{(p,q) \rightarrow C}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{c_{(2,k)} 2^{\frac{n-2}{2}+k} (\frac{n-2}{2} + k)!} V^{\frac{n-2}{2}+k}(p, q) \Gamma(p, q)^k$$

Das letzte Resultat besagt, daß die Hadamard-Koeffizienten die Struktur der Singularitäten des avancierten/retardierte Propagators kodieren, daher werden sie sich in Abschnitt 2, Unterabschnitt 2.2.2 für die Definition der Hadamard-Zustände des Klein-Gordon-Feldes und dessen Renormierung als nützlich erweisen.

1.2.3 Globale Theorie

Für die in Abschnitt 2 folgende Konstruktion einer Quantenfeldtheorie für einen normal hyperbolischen Differentialoperator P ist es nötig den avancierten/retardierte Propagator auf ganz \mathcal{M} zu kennen, daher benötigen wir einige Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit selbiger auf geeigneten Raumzeiten.

Ein solche Klasse von Raumzeiten wird durch die folgende Definition ausgewählt.

Definition 1.15:

Eine Raumzeit \mathcal{M} heißt global hyperbolisch, falls

- (1) Für alle $p, q \in \mathcal{M}$ ist $J_+(p, \mathcal{M}) \cap J_-(q, \mathcal{M})$ kompakt,
- (2) Für alle $p \in \mathcal{M}$ und alle (offenen) Umgebungen \mathcal{U} von p existiert eine Umgebung $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ von p , s.d. jedes nicht raumartige Kurvensegment $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma(a), \gamma(b) \in \mathcal{U}'$ bereits ganz in \mathcal{U} liegt; $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$.

gilt²⁷.

Zu einem besseren Verständnis global hyperbolischer Raumzeiten verhilft Theorem 1.1 in [BS05].

Theorem 1.16:

Ist \mathcal{M} eine global hyperbolische Raumzeit, so ist \mathcal{M} isometrisch zu einem kartesischen Produkt $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ mit Metrik $-\beta\pi_1^*(du^2) + \pi_2^*(g_{u \circ \pi_1})$. Dabei ist S eine glatte Mannigfaltigkeit, $\beta \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{S})$ eine positive, glatte Funktion, $\{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine glatte Familie positiv definiter Metriken auf \mathcal{S} und u die natürliche Koordinatenfunktion auf \mathbb{R} . Die Hyperflächen $\{\{t\} \times \mathcal{S}\}_{t \in \mathbb{R}}$ sind Cauchy-Flächen für \mathcal{M} , d.h. jede nicht fortsetzbare zeitartige Kurve (s. A.13) in \mathcal{M} schneidet diese Flächen in genau einem Punkt²⁸.

Die Existenz einer Cauchy-Fläche \mathcal{S} für eine Raumzeit \mathcal{M} ist so zu verstehen, daß alle Ereignisse in \mathcal{M} durch \mathcal{S} bestimmt sind.

Im weiteren Verlauf benötigen wir ein Resultat, daß die Konstruktion (einfacher) global hyperbolischer Raumzeiten ermöglicht (vgl. [O'N83], Lemma 33 (S.418)).

Lemma 1.17:

Ist (S, g) eine zusammenhängende, geodätisch vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeit, so ist das kartesische Produkt $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ (für ein Intervall $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$) mit der Metrik $-\pi_1^*(du^2) + (\pi_1^*(f))^2 \pi_2^*(g)$ eine global hyperbolische Raumzeit. Dabei ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine nirgends verschwindende Funktion.

Beispiel 1.18:

Typische Beispiele für global hyperbolische Raumzeiten sind der Minkowskiraum, die *de Sitter-Raumzeit* (Inflations-Modelle), innere und äußere *Schwarzschild-Raumzeit* (sphärisch-symmetrische, gravitierende Körper) und die *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Raumzeiten* (Kosmologische Modelle).

Kehren wir zur Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit des avancierten/retardierten Propagators zurück. Diese wird durch das nachstehende Theorem geklärt (s. [BGP07], Theorem 3.3.1. (S.87)).

Theorem 1.19:

Ist \mathcal{M} eine global hyperbolische Raumzeit und P ein normal hyperbolischer Differentialoperator über \mathcal{E} , so existiert für alle $p \in \mathcal{M}$ eine eindeutige Fundamentallösung $G_{\pm|p} \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_p^*)$ für P an p auf \mathcal{M} , mit:

- (1) $\text{supp } G_{\pm|p}$ ist vergangenheits/zukunfts-kompakt in \mathcal{M} .

Es gilt weiter:

- (2) $\text{supp } G_{\pm|p} \subseteq J_{\pm}(p, \mathcal{M})$,

²⁷Eigenschaft (2) wird in der Regel als *starke Kausalitätsbedingung* bezeichnet; sie besagt, daß es in \mathcal{M} keine geschlossenen bzw. fast geschlossenen kausalen, d.h. nicht raumartigen, Kurven gibt.

²⁸Die Existenz einer Cauchy-Fläche in einer Raumzeit ist sogar äquivalent zu deren globaler Hyperbolizität (vgl. [O'N83], Korollar 39 (S.422)).

(3) für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ ist die Abbildung $p \mapsto G_{\pm|p}(s)$ ein glatter Schnitt von \mathcal{E}^* und erfüllt die Differentialgleichung

$$P^*(G_{\pm|(\cdot)}(s)) = s,$$

(4) $\text{supp } G_{\pm|(\cdot)}(s) \subseteq J_{\mp}(\text{supp}(s), \mathcal{M})$ für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$.

$G_{\pm|p}$ heißt avancierter/retardierter Propagator für P an p auf \mathcal{M} .

Eine Distribution die eng mit dem avancierten und retardierten Propagator verbunden ist, ist der *kausale Propagator* für P

$$\Delta_p := G_{+|p} - G_{-|p}, \quad p \in \mathcal{M} \quad (1.12)$$

Der kausale Propagator kann zu Lösung von Wellengleichungen des Typs

$$P^* \tilde{s} = s, \quad \tilde{s}, s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*) \quad (1.13)$$

wie folgt eingesetzt werden²⁹:

Ist $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ vorgegeben, so ist die allgemeine Lösung \tilde{s} von der Form

$$\tilde{s} = s_+ + s_a = s_- + s_e$$

mit $s_{\pm} := G_{\pm|(\cdot)}(s)$ und Lösungen s_a und s_e der homogenen Differentialgleichung

$$P^* s_{a/e} = 0.$$

Wegen der Trägereigenschaften von s_{\pm} (s. Theorem 1.19, Eigenschaft (4)) lässt diese Situation folgende intuitive Deutung zu:

Die Lösung \tilde{s} ist in der kausalen Vergangenheit von $\text{supp}(s)$ durch die eingehende, homogene (“freie”) Lösung s_e gegeben und erfährt in $\text{supp}(s)$ eine Störung durch den “Quellterm” s , wodurch eine Deformation in eine auslaufende, homogene (“freie”) Lösung s_a in der kausalen Zukunft von $\text{supp}(s)$ bewirkt wird.

Die Differenz von auslaufender und eingehender Lösung wird durch den kausalen Propagator bestimmt:

$$s_e - s_a = \Delta_{(\cdot)}(s).$$

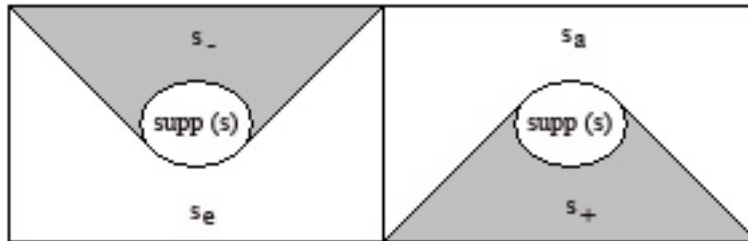


Abbildung 1.1 – Die linke Seite zeigt die Situation für $\tilde{s} = s_- + s_e$, die rechte Seite für $\tilde{s} = s_+ + s_a$. Die grauschattierte Region deutet den Träger von s_{\mp} außerhalb von $\text{supp}(s)$ an. Lichtartige Kurven sind in einem Winkel von 45° zur Senkrechte dargestellt.

²⁹Ist \mathcal{M} eine Raumzeit ohne Rand, so ist nach [BGP07], Lemma 3.2.1. (S.73) P genau dann normal hyperbolisch, wenn P^* normal hyperbolisch ist, $P^* = \Delta^P + (M^P)^*$ in der Notation von Theorem 1.3, d.h. es kann alternativ die Differentialgleichung $P\tilde{s} = s$ in $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ betrachtet werden.

Der kausale Propagator definiert eine Abbildung

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*) \xrightarrow{\Delta} \Gamma_{sc}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*),$$

dabei ist $\Gamma_{sc}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ der $C^\infty(\mathcal{M})$ -Untermodule der Schnitte $s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ mit “raumartig kompakten” (“spacelike compact”) Träger, d.h. für alle $s \in \Gamma_{sc}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ existiert ein Kompaktum $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ mit $\text{supp}(s) \subseteq J_+(\mathcal{K}, \mathcal{M}) \cup J_-(\mathcal{K}, \mathcal{M})$. Bild ($\text{img } \Delta$) und Kern ($\text{ker } \Delta$) dieser Abbildung werden durch den Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*) \xrightarrow{P^*} \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*) \xrightarrow{\Delta} \Gamma_{sc}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*) \xrightarrow{P^*} \Gamma_{sc}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$$

beschrieben. Der Komplex ist exakt an der ersten Stelle, und exakt überall, falls \mathcal{M} global hyperbolisch ist (s. [BGP07], Theorem 3.4.7. (S.90f)).

1.3 Differentialoperatoren vom Huygens’schen Typ

Abschließend wenden wir uns einer speziellen Klasse normal hyperbolischer Differentialoperatoren zu, den Differentialoperatoren vom Huygens’schen Typ (s. [BK96], Abschnitt 4 (S.327ff)). Diese besitzen die Eigenschaft, daß sie eine *scharfe* Wellenausbreitung beschreiben, d.h.³⁰ der Träger ihrer avancierten und retardierten Propagatoren $G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}$ an einem Punkt $p \in \mathcal{M}$ ist auf den *Lichtkegel* $C(p, \mathcal{U}) = C_+(p, \mathcal{U}) \cup C_-(p, \mathcal{U}) := \partial J_+(p, \mathcal{U}) \cup \partial J_-(p, \mathcal{U})$ beschränkt. Für einen Beobachter in \mathcal{M} bedeutet dies, daß er nur für einen begrenzten Zeitraum Signale einer raumzeitlich lokalisierten Quelle empfängt; eine Eigenschaft die für die Ausbreitung von Licht, oder allgemein elektromagnetischer Phänomene, und Schall charakteristisch ist.

Definition 1.20:

Ist P ein normal hyperbolischer Differentialoperator über \mathcal{E} und \mathcal{U} eine kausale Umgebung eines Punktes $p \in \mathcal{M}$, so heißt P Huygens’sch an p , falls avancierter und retardierter Propagator $G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}$

$$\text{supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} \subseteq C_{\pm}(p, \mathcal{U})$$

erfüllen.

P heißt Huygens’sch (auf \mathcal{M}), falls eine Überdeckung \mathcal{C} von \mathcal{M} mit kausalen Umgebungen existiert, s.d. für alle $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ und $p \in \mathcal{U}$ P Huygens’sch an p ist.

Eine direkte Konsequenz aus Theorem 1.14 und Proposition 1.10 ist (vgl. [BK96], Theorem 4.2 (S.327))

Theorem 1.21:

- (1) *Ist $\dim \mathcal{M} = 2$ oder ungerade, so ist P nie Huygens’sch.*
- (2) *Ist $\dim \mathcal{M} \geq 4$ und gerade, so ist P genau dann Huygens’sch, wenn eine Überdeckung \mathcal{C} von \mathcal{M} mit kausalen Umgebungen existiert, s.d. in der Notation von Theorem 1.14*

$$T(p, q) = 0$$

für alle $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$, $p \in \mathcal{U}$, $q \in J_+(p, \mathcal{U}) \cup J_-(p, \mathcal{U})$ gilt.

Ebenfalls aus Theorem 1.14 ergibt sich ein Kriterium über die Hadamard-Koeffizienten von P (vgl. [BK96], Theorem 4.3 (S.327)).

³⁰in der Notation von Theorem 1.14.

Theorem 1.22:

Ist $\dim \mathcal{M} = n \geq 4$ und gerade, so ist P genau dann Huygens'sch, wenn eine Überdeckung \mathcal{C} von \mathcal{M} mit kausalen Umgebungen existiert, s.d.

$$V^{\frac{n-2}{2}}(p, q) = 0$$

oder alternativ

$$P(V^{\frac{n-4}{2}}(p))(q) = 0$$

für alle $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$, $p \in \mathcal{U}$, $q \in C(p, \mathcal{U})$ gilt.

1.3.1 Konforme Kovarianz Huygens'scher Differentialoperatoren

Eine Eigenschaft der Huygens'schen Differentialoperatoren, die später wichtig sein wird (s. Teil II, Abschnitt 4), ist ihr Verhalten³¹ in Bezug auf konformen Transformationen³² der Raumzeit \mathcal{M} .

Proposition 1.23:

Ist (\mathcal{M}^n, g) eine Raumzeit und P ein normal hyperbolischer Differentialoperator über \mathcal{E} , so definiert die Vorschrift

$$P_\Omega(s) := \Omega^{-1-\frac{n}{2}} P(\Omega^{\frac{n}{2}-1} s),$$

mit einer nirgends verschwindenden Funktion $\Omega \in C^\infty(\mathcal{M})$, einen normal hyperbolischen Differentialoperator über \mathcal{E} auf der Raumzeit $(\mathcal{M}, \Omega^2 \cdot g)$. Ferner gilt in Bezug auf Proposition 1.3:

$$\nabla^{P_\Omega} = \nabla^P \quad \text{und} \quad M^{P_\Omega} = \Omega^{-2} M^P + \Omega^{-1-\frac{n}{2}} \square_g(\Omega^{\frac{n}{2}-1}).$$

Ist $\dim \mathcal{M} \geq 4$ und gerade, so ergibt sich für eine kausale Umgebung³³ $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ in der Notation von Theorem 1.14:

$$T_\Omega(p, q) = \Omega(p)^{1-\frac{n}{2}} \Omega(q)^{1-\frac{n}{2}} T(p, q)$$

für alle $p \in \mathcal{U}$, $q \in J_+(p, \mathcal{U}) \cup J_-(p, \mathcal{U})$.

Letzteres impliziert, daß P genau dann Huygens'sch ist, wenn P_Ω Huygens'sch ist.

Beispiel 1.24:

- (1) Für den Minkowskiraum $\mathcal{M} = \mathbb{R}_1^n$ zeigt Proposition 1.8, daß der "Wellenoperator" \square für $n \geq 4$ und gerade Huygens'sch ist.
- (2) Ist (\mathcal{M}, g) eine konform flache Raumzeit, d.h. \mathcal{M} ist lokal konform diffeomorph zu \mathbb{R}_1^n , mit $\dim \mathcal{M} \geq 4$ und gerade, so ist der konform gekoppelte Laplace-d'Alembert-Operator Υ_g Huygens'sch nach Proposition 1.23 und Bemerkung B.38.

³¹s. [BK96], Abschnitt 5 (S.329) für eine allgemeinere Behandlung.

³²s. Appendix B, Abschnitt B.3.

³³Genauer ist hier eine kausale Umgebung bezüglich g und $\Omega^2 \cdot g$ gemeint. Die Existenz einer solchen Umgebung wird wie folgt gezeigt: Ist \mathcal{U}'' geodätisch konvex für g , so existiert eine geodätisch konvexe Umgebung $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}''$ für $\Omega^2 \cdot g$, wählt man nun eine kausale Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ für $\Omega^2 \cdot g$, so ist diese auch kausal für g , da alle Kausalitätskonzepte bezüglich g und $\Omega^2 \cdot g$ übereinstimmen.

2 Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten

I presume that to the uninitiated the formulae will appear cold and cheerless.

BENJAMIN PIERCE

Zur Formulierung von Quantenfeldtheorien auf allgemeinen Raumzeiten erweist sich der algebraische Ansatz, ursprünglich von R. Haag und D. Kastler für Quantenfeldtheorien auf dem Minkowskiraum entworfen (s. [HK64]), als natürlich. Eine Verallgemeinerung der in [HK64] vorgeschlagenen Haag-Kastler Axiome auf global hyperbolische Raumzeiten wurde von J. Dimock in [Dim80] gegeben.

Wir wollen im Folgenden einen Schritt weiter gehen und den Zugang der *lokal kovarianten Quantenfeldtheorie* von R. Brunetti, K. Fredenhagen und R. Verch (s. [BFV03]) verwenden, der in gewissem Sinne die Hintergrundunabhängigkeit, d.h. das Prinzip der allgemeinen Kovarianz, einer Quantenfeldtheorie im Einklang mit der Allgemeinen Relativitätstheorie vorsieht.

Die Hintergrundunabhängigkeit der Quantenfeldtheorie hebt die Tatsache hervor, daß in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Physik der Raumzeit lokal in der Metrik kodiert ist³⁴, d.h. in denen durch diese gegebenen Relationen zwischen Raumzeitpunkten, und nicht in der mengentheoretischen Struktur der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit. Folglich sollte eine Quantenfeldtheorie im Einklang mit der Allgemeinen Relativitätstheorie eine Verträglichkeits-Bedingung in Bezug auf Isometrien zwischen Raumzeiten erfüllen.

Es ist zu beachten, daß die Wechselwirkung zwischen Quantenfeldern und Raumzeit nicht berücksichtigt werden, sondern die Raumzeit als (klassischer) Hintergrund für die Quantenfeldtheorie verstanden wird. Gerechtfertigt wird diese Näherung durch relative Schwäche der Gravitation gegenüber den anderen Wechselwirkungen. Ferner sind in dieser Situation nicht triviale Phänomene wie der Hawking- und der Unruh-Effekt (s. [Haw75], [Unr76] und [Wal94]) sowie die Teilchen-Erzeugung in expandierenden Raumzeiten (s. [Ful89]) bekannt.

Die Begriffe aus der Kategorientheorie, die zum Verständnis dieses Zugangs nötig sind, werden in Appendix C erklärt³⁵, die Begriffe aus der Theorie der C^* -Algebren in Appendix D.

2.1 Der Algebraische Zugang

Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie stellt in gewisser Weise eine Abkehr von den Quantenfeldern Φ , die den klassischen Feldern (z.B. dem elektromagnetischen Feld) entsprechen, als zentrale, “reale” Objekte dar (s. dazu auch den folgenden Abschnitt 2.2). Stattdessen wird die Aufmerksamkeit auf die (direkt) zugänglichen Messgrößen (Observablen), durch welche sich die Felder uns erschließen, gerichtet. Diese Vorstellung ist konzeptuell dem Heisenberg-Bild der Quantenmechanik ähnlich.

Aufgrund der räumlich und zeitlich begrenzten Durchführbarkeit von Experimenten sowie der Anwendung (statistischer) Auswertungsmethoden (z.B. Mittelwertbildung, Varianz, Korrelationen zwischen Messreihen,...), werden die Observablen durch ein “Netz von Algebren” (für Details s. [Haa96]) modelliert

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{O}),$$

wobei jedes \mathcal{O} für eine geeignete Region der Raumzeit \mathcal{M} , die wir als (klassisches) Modell der “Umwelt” der Quantenfelder verstehen, steht. Die Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ wird zur Modellierung der in \mathcal{O} lokalisierten Messungen verwendet, dabei wird eine involutive Abbildung $*$ zur Auswahl der Observablen (“reelle”, “selbstadjungierte” Elemente der Algebra) benötigt, d.h. die Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ sollten $*$ -Algebren sein.

Die Zuweisung von Erwartungswerten für eine Observable geschieht durch “Erwartungswertfunk-

³⁴Global können topologische Eigenschaften der unterliegenden Mannigfaltigkeit entscheidend sein.

³⁵Weitere Einzelheiten können in [Mac71] gefunden werden.

tionale" ω (Zustände, s. Appendix D) über der Algebra $\mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ ³⁶, die das Messarrangement beschreiben. Außerdem dienen die Zustände dem Zweck der Implementation einer gewünschten Dynamik, die dem zu beschreibenden System zugrunde liegt.

Der Umstand, daß es in der "Quantenwelt" keine Zustände ohne jegliche Korrelationen gibt, wird in die Nicht-Kommutativität der Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ kodiert. Die Verträglichkeit mit der kausalen Struktur von \mathcal{M} wird durch weitere algebraische Relationen innerhalb der und zwischen den $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ erzielt. Symmetrien ϕ der Raumzeit \mathcal{M} drücken sich in Algebren-Automorphismen $\alpha_\phi(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(\phi(\mathcal{O}))$ aus.

Der übliche "Hilbertraum-Formalismus" kann (teilweise) durch Auswahl eines Zustandes ω und die GNS-Konstruktion (s. Appendix D) zurückgewonnen werden.

2.2 Das Prinzip der lokal kovarianten Quantenfeldtheorie

First quantization is a mystery, but second quantization is a functor.

EDWARD NELSON

Eine *lokal kovariante Quantenfeldtheorie* im zuvor beschriebenen Sinne wird als Funktor \mathcal{F} zwischen einer Kategorie \mathfrak{R}_3 geeigneter Raumzeiten (mit Zusatzstrukturen) und einer Kategorie \mathfrak{Alg} von involutiven, topologischen Algebren (zur Formulierung der Observablen-Struktur) realisiert, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{N} \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ \mathcal{F}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\phi)} & \mathcal{F}(\mathcal{N}) \end{array} \quad (2.1)$$

kommutiert für alle $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}$ und $\phi \in \text{hom}_{\mathfrak{R}_3}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ³⁷. Außerdem respektiert \mathcal{F} die Komposition und die Eins in \mathfrak{R}_3 :

$$\mathcal{F}(\phi \circ \kappa) = \mathcal{F}(\phi) \circ \mathcal{F}(\kappa) \text{ und } \mathcal{F}(\text{id}_{\mathcal{M}}) = \text{id}_{\mathcal{F}(\mathcal{M})}$$

für alle $\phi, \kappa \in \mathcal{A}_{\mathfrak{R}_3}$ mit $\text{cod}(\kappa) = \text{dom}(\phi)$ und alle $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}$.

Die Kategorien \mathfrak{R}_3 und \mathfrak{Alg} werden jenach Situation genauer spezifiziert (s. Unterabschnitt 2.2.1).

Die Worte "lokal" und "kovariant" sind so zu verstehen, daß die Struktur der Observablen-Algebra bis auf (Iso-)Morphismen in \mathfrak{Alg} durch die lokale metrische Struktur der Raumzeiten in \mathfrak{R}_3 bestimmt ist.

Um die kausale Struktur, die durch eine Raumzeit vorgegeben wird, auf die Struktur der zugehörigen Observablen zu übertragen, können weitere Bedingungen an \mathcal{F} gestellt werden, z.B.

(1) \mathcal{F} heißt *kausal*, falls

$$[\mathcal{F}(\phi)(\mathcal{F}(\mathcal{M})), \mathcal{F}(\kappa)(\mathcal{F}(\mathcal{N}))]_{\mathcal{F}(\mathcal{P})} = \{0\}$$

gilt, wenn für $\phi \in \text{hom}_{\mathfrak{R}_3}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ und $\kappa \in \text{hom}_{\mathfrak{R}_3}(\mathcal{N}, \mathcal{P})$ die Mengen $\phi(\mathcal{M})$ und $\kappa(\mathcal{N})$ nicht durch kausale Kurven in \mathcal{P} verbunden werden können³⁸.

³⁶Werden die Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ durch C^* -Algebren modelliert, so wird hier der C^* -induktive Limes betrachtet.

³⁷Die Homomorphismen in \mathfrak{R}_3 können auf der Ebenen der Raumzeiten, d.h. ohne Zusatzstrukturen, als orientierungserhaltende, zeit-orientierungserhaltende isometrische Einbettungen mit offenem, kausal-verträglichem Bild verstanden werden. Die Eigenschaft, daß das Bild offen sein soll, impliziert, daß es nur Morphismen zwischen Raumzeiten der gleichen Dimension gibt.

³⁸ $[\cdot]_{\mathcal{F}(\mathcal{P})}$ bezeichnet den Kommutator in $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

- (2) Sind die Raumzeiten in \mathfrak{R}_3 global hyperbolisch, so genügt \mathcal{F} dem *Zeit-Schnitt-Axiom*, falls für $\phi \in \text{hom}_{\mathfrak{R}_3}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ gilt:

$$\mathcal{F}(\phi)(\mathcal{F}(\mathcal{M})) = \mathcal{F}(\mathcal{N}),$$

wenn $\phi(\mathcal{M})$ und \mathcal{N} eine gemeinsame Cauchy-Fläche besitzen.

Die Kausalität (1) einer lokal kovarianten Quantenfeldtheorie \mathcal{F} ist so zu verstehen, daß Observablen in kausal getrennten Bereichen der zugrundeliegenden Raumzeit sich nicht gegenseitig beeinflussen. Dies wird auch als “Einstein-Kausalität” bezeichnet³⁹.

Das Zeit-Schnitt-Axiom (2) ist ein Ausdruck der Idee, daß die Observablen einer Raumzeit einer deterministischen Dynamik genügen, d.h. es ist ausreichend die Regeln dieser Dynamik und die Bedingungen innerhalb einer Raumzeit zu einem festen “Zeitpunkt”⁴⁰ zu kennen, um kausale Zukunft und Vergangenheit zu bestimmen.

Wählt man eine geeignete Klasse von Teilmengen einer gegebenen Raumzeit \mathcal{M} , s.d. diese Teilmengen mit der eingeschränkten Metrik (und den passend eingeschränkten Zusatzstrukturen) in \mathfrak{R}_3 enthalten sind⁴¹, so erlaubt eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie von \mathcal{M} die Konstruktion einer Quantenfeldtheorie im Sinne des algebraischen Zuganges (Abschnitt 2.1, s.o.), wie in [BFV03] (S.10-12), oder auch in [BGP07] (S.130ff) erläutert wird.

Die Quantenfelder Φ , die beispielsweise im Wightman-Zugang⁴² als operatorwertige Distributionen $\Phi(f) = \int_{\mathcal{M}} \Phi(p)f(p)dV_{g_{\mathcal{M}}}$ über einem Raum geeigneter “Testfunktionen” $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ auf einer Raumzeit \mathcal{M} verstanden werden⁴³, werden in diesem Kontext ebenfalls durch eine lokal kovariante Konstruktion im obigen Sinne realisiert.

Dazu wird in funktorieller Weise jedem Objekt in \mathfrak{R}_3 ein topologischer (Vektor-)Raum von “Testfunktionen”, z.B. Schnitte mit kompaktem Träger in einem Vektorbündel über einer Raumzeit, zugewiesen⁴⁴.

Bezeichnen wir diesen Funktor zwischen \mathfrak{R}_3 und der Kategorie der “Testfunktionen”-Räume \mathfrak{T} mit \mathcal{D} , so ist ein *lokal kovariantes Quantenfeld* Φ eine natürliche Transformation⁴⁵ zwischen dem Funktor \mathcal{D} und der lokal kovarianten Quantenfeldtheorie \mathcal{F} . Als kommutatives Diagramm heißt das:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{M}}} & \mathcal{F}(\mathcal{M}) \\ \mathcal{D}(\phi) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\phi) \\ \mathcal{D}(\mathcal{N}) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{N}}} & \mathcal{F}(\mathcal{N}) \end{array} \quad (2.2)$$

für alle $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}$ und $\phi \in \text{hom}_{\mathfrak{R}_3}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Demnach ist ein lokal kovariantes Quantenfeld als eine Familie $\{\Phi_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}}$ von algebren-wertigen Distributionen mit der Kovarianzbedingung

$$\mathcal{F}(\phi) \circ \Phi_{\mathcal{M}} = \Phi_{\mathcal{N}} \circ \mathcal{D}(\phi)$$

³⁹Man denke dabei an die “Unschärfe-Relation” für Observablen O_1, O_2 : $\Delta_{\omega} O_1 \cdot \Delta_{\omega} O_2 \geq \frac{1}{2} |\omega([O_1, O_2])|$ bezüglich eines Zustandes ω über der Observablen-Algebra.

⁴⁰Hier mag man sich eine “Fläche der Gleichzeitigkeit” bezüglich einer geeigneten “Zeit”-Funktion vorstellen, diese “Zeit” ist nicht zwingend als die von uns wahrgenommene zu verstehen.

⁴¹z.B. die Menge der offenen, kausal-verträglichen, global hyperbolischen, relativ kompakten Umgebungen in \mathcal{M} , sowie \emptyset und \mathcal{M} selbst.

⁴²s. [SW64].

⁴³Dies wird häufig als “Verschmieren” des Quantenfeldes im Bereich des Trägers der “Testfunktion” bezeichnet und trägt dem singulären Charakter ersterer Rechnung.

⁴⁴Auf die Wirkung dieses Funktors auf den Morphismen soll an dieser Stellen nicht näher eingegangen werden, aber man mag sich eine Art “Pushforward”-Konstruktion für die Morphismen in \mathfrak{R}_3 vorstellen.

⁴⁵genauer: In der Kategorie der topologischen Räume \mathfrak{Top} .

zu verstehen.

In Analogie zum Konzept der lokal kovarianten Quantenfeldtheorie \mathcal{F} können zusätzliche Bedingungen, z.B. in Hinsicht auf die kausalen Strukturen der Objekte in \mathfrak{R}_3 , an das lokal kovariante Quantenfeld Φ gestellt werden. So wird Φ als *kausal* bezeichnet, falls

$$[\Phi_{\mathcal{M}}(f), \Phi_{\mathcal{M}}(g)]_{\mathcal{F}(\mathcal{M})} = 0$$

für alle $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ mit kausal getrenntem Träger gilt.

Wir stellen außerdem fest, daß ein lokal kovariantes Quantenfeld Φ eine *a priori* Identifikation der Messgrößen $\Phi_{\mathcal{M}}$ auf verschiedenen Raumzeiten ermöglicht. Dies rechtfertigt den Vergleich von Messwerten $\omega_{\mathcal{M}}(\Phi_{\mathcal{M}}(f))$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ für unterschiedliche \mathcal{M} . In Kapitel II ist diese Überlegung von entscheidender Bedeutung.

Die Konstruktion einer lokal kovarianten Quantenfeldtheorie im obigen Sinne soll im Folgenden, ausgehend von einer linearen (freien, klassischen) Feldtheorie, angegeben werden. Wir halten uns dabei an die Vorgaben in [BGP07], Abschnitt 4.

2.2.1 Die Quantenfeldtheorie eines normal-hyperbolischen, formal selbst-adjungierten Differentialoperators

Betrachten wir mit Blick auf Abschnitt 1 die Spezifizierung der Kategorie \mathfrak{R}_3 , als die Kategorie mit folgenden Objekten und Morphismen:

Die Objekte $\mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}$ sind Raumzeiten \mathcal{M} , zusammen mit einem (reellen)⁴⁶ Vektorbündel $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ mit Fasermetrik $g_{\mathcal{E}}$ ⁴⁷, einem *formal selbstadjungierten* (bezüglich $g_{\mathcal{E}}$), normal hyperbolischen Differentialoperator P über \mathcal{E} , sowie einem avancierten und retardierten Propagator $G_{\pm|p} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}_p)$ für P^* und alle $p \in \mathcal{M}$ ⁴⁸.

*Formale Selbstadjungiertheit*⁴⁹ ist folgendermaßen zu verstehen:

Für alle $s, s' \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ gilt

$$\int_{\mathcal{M}} g_{\mathcal{E}}(Ps, s')dV_g = \int_{\mathcal{M}} g_{\mathcal{E}}(s, Ps')dV_g.$$

Ferner sollen der avancierte und retardierte Propagator G_{\pm} die Relation

$$\int_{\mathcal{M}} g_{\mathcal{E}}(G_{\pm|(\cdot)}(s), s')dV_g = \int_{\mathcal{M}} g_{\mathcal{E}}(s, G_{\mp|(\cdot)}(s'))dV_g \quad (2.3)$$

für alle $s, s' \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ erfüllen⁵⁰.

Die Morphismen zwischen zwei Objekten $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})$ und $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', P', G'_{\pm})$ in \mathfrak{R}_3 sind, falls die Raumzeit \mathcal{M} global hyperbolisch ist, Vektorbündel-Homomorphismen $(\check{\phi}, \phi)$, s.d. $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ eine orientierungserhaltende, zeit-orientierungserhaltende, isometrische Einbettung mit offenem, kausal-verträglichem Bild ($\text{img } \phi \subseteq \mathcal{M}'$) und $\check{\phi} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ eine faserweise Isometrie ist.

Außerdem soll $(\check{\phi}, \phi)$ mit P und P' vertäglich sein, d.h.

$$\check{\phi} \circ P(s) \circ \phi^{-1} = P'(\check{\phi} \circ s \circ \phi^{-1})$$

⁴⁶Im Falle eines komplexen Vektorbündels verwerfen wir die komplexe Struktur.

⁴⁷ $g_{\mathcal{E}}$ muss nicht notwendig positiv definit sein.

⁴⁸Beachte dazu auch die Fußnote zu Gleichung (1.13).

⁴⁹Diese Eigenschaft besitzen der Laplace-d'Alembert-Operator \square_g und der konform gekoppelte Laplace-d'Alembert-Operator Υ_g , bzw. allgemein der konform gekoppelte Klein-Gordon-Operator $\square_g + m^2 + \lambda S_g$.

⁵⁰Diese Identität wird auf global hyperbolischen Raumzeiten \mathcal{M} durch die Tatsache gesichert, daß $\text{supp } G_{\pm|(\cdot)}(s) \cap \text{supp } G_{\mp|(\cdot)}(s') \subseteq J_{\mp}(\text{supp}(s), \mathcal{M}) \cap J_{\pm}(\text{supp}(s'), \mathcal{M})$ kompakt ist, und somit die partielle Integration, die für den Beweis der formalen Selbstadjungiert normalerweise benötigt wird, wohldefiniert ist.

für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ oder als kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{P} & \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \\ \downarrow \iota_\phi & & \downarrow \iota_\phi \\ \mathcal{D}(\mathcal{M}', \mathcal{E}') & \xrightarrow{P'} & \mathcal{D}(\mathcal{M}', \mathcal{E}') \end{array} \quad (2.4)$$

mit $\iota_\phi(s) := (\check{\phi} \circ s \circ \phi^{-1})_{\text{ext}_0}$ für $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$. Dabei bezeichnet $(\cdot)_{\text{ext}_0}$ die Fortsetzung durch Null auf $\mathcal{M}' \setminus \phi(\mathcal{M})$.

Ist \mathcal{M} nicht global hyperbolisch, so gibt es nur die Identität $(\text{id}_{\mathcal{E}}, \text{id}_{\mathcal{M}})$ als Morphismus mit $\text{dom}(\check{\phi}, \phi) = (\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})$.

Die Verträglichkeit des avancierten und retardierten Propagators

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\iota_\phi} & \mathcal{D}(\mathcal{M}', \mathcal{E}') \\ \downarrow G_{\pm} & & \downarrow G'_{\pm} \\ \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) & \xleftarrow{j_\phi} & \Gamma(\mathcal{M}', \mathcal{E}') \end{array} \quad (2.5)$$

mit $j_\phi(s) := \check{\phi}^{-1} \circ s \circ \phi$ für $s \in \Gamma(\mathcal{M}', \mathcal{E}')^{51}$, wird durch Theorem 1.19 und ein einfaches Lemma (vgl. [BGP07], Proposition 3.5.1. (S.92)) gesichert.

Lemma 2.1:

Ist $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})$ ein Objekt in \mathfrak{R}_3 und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ eine kausal-verträgliche, offene Teilmenge, so definiert die Vorschrift

$$G_{\pm|(\cdot)}^{\mathcal{U}}(s) := G_{\pm|(\cdot)}(\iota_*(s))|_{\mathcal{U}}, \quad s \in \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$$

mit der Fortsetzung durch Null $\iota_* : \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$, avancierte und retardierte Propagatoren $G_{\pm}^{\mathcal{U}} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{U}, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}_p)$ für die Einschränkung von P^* auf \mathcal{U} mit den Eigenschaften (2), (3) und (4) aus Theorem 1.19.

Beweis:

Für $s \in \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ gilt, da \mathcal{U} offen ist:

$$P|_{\mathcal{U}} G_{\pm|(\cdot)}^{\mathcal{U}}(s) = P|_{\mathcal{U}} G_{\pm|(\cdot)}(\iota_*(s))|_{\mathcal{U}} = (P G_{\pm|(\cdot)}(\iota_*(s)))|_{\mathcal{U}} = \iota_*(s)|_{\mathcal{U}} = s$$

und

$$G_{\pm|(\cdot)}^{\mathcal{U}}(P|_{\mathcal{U}} s) = G_{\pm|(\cdot)}(\iota_*(P|_{\mathcal{U}} s))|_{\mathcal{U}} = G_{\pm|(\cdot)}(P \iota_*(s))|_{\mathcal{U}} = \iota_*(s)|_{\mathcal{U}} = s.$$

Da \mathcal{U} kausal-verträglich ist, gilt für den Träger von $G_{\pm|(\cdot)}^{\mathcal{U}}(s)$ mit $s \in \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} \text{supp } G_{\pm|(\cdot)}^{\mathcal{U}}(s) &= \text{supp } G_{\pm|(\cdot)}(\iota_*(s))|_{\mathcal{U}} = \text{supp } G_{\pm|(\cdot)}(\iota_*(s)) \cap \mathcal{U} \\ &\subseteq J_{\mp}(\text{supp } \iota_*(s), \mathcal{M}) \cap \mathcal{U} = J_{\mp}(\text{supp } s, \mathcal{U}). \end{aligned}$$

⁵¹ j_ϕ ist das Inverse zu ι_ϕ auf $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ und $\mathcal{D}(\mathcal{M}', \mathcal{E}')$.

Außerdem erhalten wir für den Träger von $G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}$, $p \in \mathcal{U}$:⁵²

$$\text{supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} = \text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U},$$

denn für $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ finden wir:

$$\begin{aligned} \text{supp}(s) \subseteq \mathcal{U} \setminus (\text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U}) &\Rightarrow \text{supp}(\iota_*(s)) \subseteq \mathcal{U} \setminus (\text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U}) \\ &= (\mathcal{M} \setminus \text{supp } G_{\pm|p}) \cap \mathcal{U} \\ &\Rightarrow G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}(s) = 0 \\ &\Rightarrow \text{supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} \subseteq \text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{supp}(s) \subseteq \mathcal{U} \setminus \text{supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} &\Rightarrow G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}(s) = 0 \\ &\Rightarrow G_{\pm|p}(\iota_*(s)) = 0 \\ &\Rightarrow \text{supp}(\iota_*(s)) \subseteq (\mathcal{M} \setminus \text{supp } G_{\pm|p}) \cap \mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus (\text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{M} \\ &\Rightarrow \text{supp}(s) \subseteq \mathcal{U} \setminus (\text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U}) \\ &\Rightarrow \text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U} \subseteq \text{supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}. \end{aligned}$$

Die kausale Verträglichkeit von \mathcal{U} liefert:

$$\text{supp } G_{\pm|p}^{\mathcal{U}} = \text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U} \subseteq J_{\pm}(p, \mathcal{M}) \cap \mathcal{U} = J_{\pm}(p, \mathcal{U}). \quad \square$$

Bemerkung 2.2:

Ist \mathcal{U} global hyperbolisch, so folgt aus der Kompaktheit der Mengen $J_+(p, \mathcal{U}) \cap J_-(q, \mathcal{U})$ in \mathcal{U} für alle $p, q \in \mathcal{U}$ auch Eigenschaft (1) aus Theorem 1.19 für $G_{\pm|p}^{\mathcal{U}}$.

Wir nutzen den kausalen Propagator $\Delta := G_+ - G_-$ um jedem Objekt $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})$ in \mathfrak{R}_3 eine bilineare, anti-symmetrische Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \times \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) &\xrightarrow{\omega} \mathbb{R} \\ \omega(s, s') &:= \int_{\mathcal{M}} g_{\mathcal{E}}(\Delta(s), s') dV_g \end{aligned}$$

zuzuordnen.

Der Quotient

$$V_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})} := \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) / \ker \Delta$$

wird mit der Reduktion $\omega's$ ⁵³ zu einem (reellen) *symplektischen Vektorraum*, d.h. ω ist eine anti-symmetrische, nicht-ausgeartete, \mathbb{R} -wertige Bilinearform auf $V_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}$. Ist \mathcal{M} global hyperbolisch, so gilt $\ker \Delta = P(\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}))$ (s. S.12).

Mit Blick auf die Bemerkung vor Beginn dieses Unterabschnittes stellen wir fest, daß der Vektorraum $V_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}$ eine (im global hyperbolischen Fall vollständige) Beschreibung der Lösungen der Differentialgleichung

$$Ps = 0, \quad s \in \Gamma_{sc}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \quad (2.6)$$

⁵²Diese Gleichung ist in der Unterraum-Topologie von \mathcal{U} zu verstehen. In dieser Topologie ist $\text{supp } G_{\pm|p} \cap \mathcal{U}$ abgeschlossen.

⁵³Die Reduktion wird ebenfalls mit ω bezeichnet.

liefert, d.h. die zu konstruierende Quantenfeldtheorie kann als Quantisierung der (klassischen) Feldtheorie zu (2.6) angesehen werden.

Das nächste Lemma (vgl. [BGP07], Lemma 4.3.8. (S.129)) zeigt, daß wir zusammen mit dieser Konstruktion einen Funktor \mathcal{S} von der Kategorie \mathfrak{R}_3 in die Kategorie $\mathfrak{S}\eta$ der symplektischen Vektorräume, mit linearen, symplektischen⁵⁴ Abbildungen als Morphismen, erhalten.

Lemma 2.3:

Sind $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})$ und $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', P', G'_{\pm})$ in $\mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}$ und ist $(\check{\phi}, \phi) \in \mathcal{A}_{\mathfrak{R}_3}$ ein Morphismus zwischen diesen, so induziert die Abbildung

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\iota_{\phi}} \mathcal{D}(\mathcal{M}', \mathcal{E}') \quad (2.7)$$

aus Diagramm (2.4) eine lineare, symplektische Abbildung

$$V_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})} \xrightarrow{\phi_*} V_{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', P', G'_{\pm})} \quad (2.8)$$

$$[s] \mapsto \phi_*([s]) := [\iota_{\phi}(s)]$$

Beweis:

Ist \mathcal{M} nicht global hyperbolisch, so ist $(\check{\phi}, \phi) = (\text{id}_{\mathcal{E}}, \text{id}_{\mathcal{M}})$ und die Aussage ist trivial.

Ist \mathcal{M} global hyperbolisch, so gilt:

- (1) Ist $s \in \ker \Delta$, so existiert $\tilde{s} \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ mit $Ps' = s$. Es folgt:

$$\Delta'(\iota_{\phi}(s)) = \Delta'(\iota_{\phi}(P\tilde{s})) = \Delta'(P'(\iota_{\phi}(\tilde{s}))) = 0,$$

d.h. $\iota_{\phi}(\ker \Delta) \subseteq \ker \Delta'$ und die induzierte Abbildung ϕ_* ist wohldefiniert.

- (2) Für alle $s, \tilde{s} \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ gilt:

$$\begin{aligned} \omega'(\iota_{\phi}(s), \iota_{\phi}(\tilde{s})) &= \int_{\mathcal{M}'} g_{\mathcal{E}'}(\Delta'(\iota_{\phi}(s)), \iota_{\phi}(\tilde{s})) dV_{g'} \\ &= \int_{\mathcal{M}} g_{\mathcal{E}}(J_{\phi}(\Delta'(\iota_{\phi}(s))), \tilde{s}) dV_g \\ &= \int_{\mathcal{M}} g_{\mathcal{E}}(\Delta(s), \tilde{s}) dV_g \\ &= \omega(s, \tilde{s}), \end{aligned}$$

da ϕ eine Isometrie zwischen \mathcal{M} und \mathcal{M}' ist, dV_g und $dV_{g'}$ die metrik-induzierten, invarianten⁵⁵ Volumenelemente sind und $\check{\phi}$ eine faserweise Isometrie zwischen \mathcal{E} und \mathcal{E}' ist.

Die Linearität folgt trivialerweise aus der Definition von ι_{ϕ} und der Verträglichkeit mit der Vektorraum-Struktur des Quotienten. \square

Die bereits zuvor angesprochene Quantisierung der (klassischen) Feldtheorie besteht darin jedem der symplektischen Vektorräume $V_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm}) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}$ in funktorieller Weise eine topologische $*$ -Algebra, hier sogar eine C^* -Algebra, zuzuweisen.

Dazu definieren wir die Kategorie \mathfrak{Alg} , deren Objekte C^* -Algebren mit Eins und deren Morphismen injektive $*$ -Homomorphismen, die die Eins erhalten, sind, und bedienen uns der Aussagen in [BR97], Abschnitt 5.2. (insbesondere Theorem 5.2.8., S.19) und [BGP07] (S.115ff).

⁵⁴Eine lineare Abbildung zwischen zwei symplektischen Vektorräumen $M : (V, \omega) \rightarrow (V', \omega')$ heißt *symplektisch*, falls $\omega'(M(v), M(w)) = \omega(v, w)$ für alle $v, w \in V$ gilt. Daß ω nicht-ausgeartet ist, impliziert daß M injektiv ist.

⁵⁵Invariant unter Isometrien (s. Appendix B, Definition B.7).

Theorem 2.4:

Ist (V, ω) ein (reeller) symplektischer Vektorraum, so existiert eine C^* -Algebra $\mathscr{W}(V, \omega)$, erzeugt von nicht-verschwindenden Elementen $W(v)$, $v \in V$ mit den Eigenschaften:

- (1) $W(v)^* = W(-v)$,
- (2) $W(v)W(w) = e^{-\frac{i}{2}\omega(v,w)}W(v+w)$

für alle $v, w \in V$.

Ist $\tilde{\mathscr{W}}(V, \omega)$ eine weitere C^* -Algebra mit diesen Eigenschaften, so existiert ein eindeutig bestimmter $*$ -Isomorphismus $\alpha : \mathscr{W}(V, \omega) \rightarrow \tilde{\mathscr{W}}(V, \omega)$ mit $\alpha(W(v)) = \tilde{W}(v)$ für alle $v \in V$.

D.h. die C^* -Algebra $\mathscr{W}(V, \omega)$ ist, bis auf Isomorphie in $\mathfrak{C}\mathfrak{s}$, eindeutig bestimmt. Weitere (abgeleitete) Eigenschaften sind

- (3) $W(0) = \mathbf{1}$,
- (4) $W(v)$ ist unitär für alle $v \in V$,
- (5) $\|W(v) - W(w)\| = 2$ für alle $v, w \in V$ mit $v \neq w$,
- (6) die Menge $\{W(v)\}_{v \in V}$ ist linear unabhängig,
- (7) für jede lineare, symplektische Abbildung $M : (V, \omega) \rightarrow (V', \omega')$ existiert ein eindeutig bestimmter, injektiver $*$ -Homomorphismus $\alpha_M : \mathscr{W}(V, \omega) \rightarrow \mathscr{W}(V', \omega')$ mit $\alpha_M(W(v)) = W(M(v))$ für alle $v \in V$,
- (8) $\mathscr{W}(V, \omega)$ ist nicht separabel, falls $V \neq \{0\}$,
- (9) $\mathscr{W}(V, \omega)$ ist einfach, d.h. $\{0\}$ und $\mathscr{W}(V, \omega)$ sind die einzigen zweiseitigen Ideale in $\mathscr{W}(V, \omega)$,
- (10) ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $\mathscr{W}(U, \omega) \subseteq \mathscr{W}(V, \omega)$ die entsprechende C^* -Unteralgebra, so gilt

$$\mathscr{W}(U, \omega) = \mathscr{W}(V, \omega) \Leftrightarrow U = V.$$

Bemerkung 2.5:

Die C^* -Algebra $\mathscr{W}(V, \omega)$ wird als *Weyl-Algebra* von (V, ω) bezeichnet; die Elemente $W(v)$, $v \in V$ als *Weyl-Operatoren*. Dies liegt darin begründet, daß die $W(v)$ die *kanonischen Vertauschungsrelationen* in exponentieller Form, Eigenschaft (2), erfüllen.

Ist die Abbildung M in Eigenschaft (7) ein Automorphismus, so bezeichnet man den assoziierten $*$ -Automorphismus als *Bogoliubov-Transformation*.

Die Existenz von $\mathscr{W}(V, \omega)$ kann durch die Realisierung als beschränkte Operatoren auf $\ell_{\mathbb{C}}^2(V)$ ⁵⁶ mittels

$$(W(v)a)_w := e^{\frac{i}{2}\omega(v,w)}a_{v+w}, \quad \{a_v\}_{v \in V} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(V)$$

gezeigt werden.

Theorem 2.4 liefert somit einen Funktor \mathscr{W} von $\mathfrak{S}\eta$ nach \mathfrak{Alg} .

Die angestrebte lokal kovariante Quantenfeldtheorie \mathcal{F} erhalten wir durch die Komposition der Funktoren \mathcal{S} und \mathscr{W} .

$$\mathfrak{R}_3 \xrightarrow{\mathcal{F} := \mathscr{W} \circ \mathcal{S}} \mathfrak{Alg} \quad (2.9)$$

⁵⁶ $\ell_{\mathbb{C}}^2(V)$ bezeichnet die quadrat-summierbaren, über V indizierten, komplex-wertigen Folgen; diese bilden in natürlicher Weise einen Hilbertraum.

Betrachten wir ein Objekt $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})$ in \mathfrak{R}_3 und schreiben (heuristisch)

$$W(s) := W(\Delta(s))$$

für $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ ⁵⁷, so finden wir in $\mathcal{W}(V_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}, \omega)$ die Identitäten

- (1) $W(Ps) = W(\Delta(Ps)) = W(0) = \mathbb{1}$ für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$,
- (2) $W(s)W(\tilde{s}) = e^{-\frac{i}{2}\omega(s, \tilde{s})}W(s + \tilde{s}) = W(s + \tilde{s}) = W(\tilde{s} + s) = \dots = W(\tilde{s})W(s)$ für alle $s, \tilde{s} \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ mit kausal getrennten Trägern; letzteres impliziert $\omega(s, \tilde{s}) = 0$,

d.h. die Weyl-Operatoren erfüllen (in einem schwachen Sinne) die Differentialgleichung (2.6) und die lokal kovariante Quantenfeldtheorie \mathcal{F} ist kausal⁵⁸.

Schränken wir \mathcal{F} auf die (volle) Unterkategorie $\mathfrak{R}_{3gh} \subseteq \mathfrak{R}_3$, der Objekte mit global hyperbolischen Raumzeiten, ein, so erfüllt \mathcal{F} auch das Zeit-Schnitt-Axiom (vgl. [BGP07] und [BFV03]), denn $V_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}$ ist durch die Angabe geeigneter Anfangswerte auf einer Chauchy-Fläche bestimmt.

Wir bemerken noch, daß die Weyl-Algebren keineswegs alle physikalisch relevanten Observablen enthalten, z.B. ist nicht zu erwarten, daß der (an einem Punkt lokalisierte) Energie-Impuls-Tensor⁵⁹ der Quantenfeldtheorie in der Weyl-Algebra enthalten ist. Dieser wird (heuristisch) durch Produkte des Quantenfeldes an einem Punkt gebildet. Daher ist es in der Regel nötig die Observablen-Algebra in geeigneter Weise zu erweitern (vgl. auch den folgenden Abschnitt 2.2.2).

Bemerkung 2.6:

Alternativ zur Konstruktion der Weyl-Algebra kann eine (abstrakte) *-Algebra mit Eins definiert werden. Diese wird erzeugt von Elementen $\Phi(s)$, $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ mit den Relationen

- (1) $\Phi(\lambda s + \tilde{s}) = \lambda\Phi(s) + \Phi(\tilde{s})$ für $s, \tilde{s} \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
- (2) $\Phi(s)^* = \Phi(\tilde{s})$,
- (3) $\Phi(Ps) = 0$,
- (4) $[\Phi(s), \Phi(\tilde{s})] = -i\omega(s, \tilde{s})\mathbb{1}$.

Die $\Phi(s)$ werden dabei heuristisch als “verschmierte” Quantenfelder $\int_{\mathcal{M}} \Phi(p)s(p)dV_g$ interpretiert. Eigenschaft (4) wird, daher häufig als

$$[\Phi(p), \Phi(q)] = i\Delta|_p(q) \tag{2.10}$$

geschrieben. Eine lineare Fortsetzung auf “komplex-wertige” Schnitte $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ ist möglich ($\Phi(s)^* = \Phi(\tilde{s})$). Die Relation zu den Weyl-Operatoren ist (ebenfalls heuristisch) durch $W(s) = e^{i \int_{\mathcal{M}} \Phi(p)s(p)dV_g}$ gegeben.

Dieser Einschub verdeutlicht wie wir ein zu \mathcal{F} assoziiertes lokal kovariantes Quantenfeld Φ gewinnen könnten.

Angenommen wir hätten eine Familie von Zuständen $\{\omega_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}\}_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm}) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}}$ über den entsprechenden Weyl-Algebren $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})$, s.d. die Generatoren

$$\Phi_{\omega_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}}(s) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi_{\omega_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}}(W(ts))$$

⁵⁷Identifiziere $[s] \in V_{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_{\pm})}$ mit $\Delta(s)$

⁵⁸Die Verträglichkeit der avancierten/retardierten Propagatoren und der Differentialoperatoren ist dazu entscheidend.

⁵⁹Der Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensor wird beispielsweise in der semi-klassischen Behandlung der Einstein’schen Feldgleichungen benötigt (s. [Wal94]).

der 1-Parameter-Gruppen $\{\pi_\omega(W(ts))\}_{t \in \mathbb{R}}$, $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ in den zugehörigen GNS-Darstellungen (s. Appendix D, Bemerkung D.21) einem gemeinsamen, dichten Definitionsbereich $\mathfrak{U}_{\omega(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathfrak{P}, G_\pm)} \subseteq \mathfrak{H}_{\omega(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_\pm)}$ besitzen und auf diesem (essentiell) selbst-adjungiert sind. Würde außerdem die Zuordnung der, von den $\Phi_{\omega(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_\pm)}$, $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ erzeugten, $*$ -Algebren zu den Objekten $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_\pm)$ in \mathfrak{R}_3 einen geeigneten Funktor \mathcal{F}_{ext} , mit der Verträglichkeits-Bedingung

$$\mathcal{F}_{\text{ext}}((\check{\phi}, \phi)) \circ \Phi_{\omega(\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_\pm)}(s) = \Phi_{\omega(\mathcal{M}', \mathcal{E}', P', G'_\pm)}(i_\phi s)$$

für $(\check{\phi}, \phi) \in \text{hom}_{\mathfrak{R}_3}((\mathcal{M}, \mathcal{E}, P, G_\pm), (\mathcal{M}', \mathcal{E}', P', G'_\pm))$ und $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$, induzieren, so ließe sich Φ als eine natürliche Transformation zwischen dem “Testschnitt”-Funktorkomplex \mathcal{D} und \mathcal{F}_{ext} auffassen (vgl. [BFV03] (S.15)).

2.2.2 Hadamard-Zustände und Wick-Monome des Klein-Gordon-Feldes

Zum Abschluß von Teil I betrachten wir eine spezielle Klasse von Zuständen, die *Hadamard-Zustände*, über der Weyl-Algebra des konform gekoppelten Klein-Gordon-Feldes⁶⁰.

Dazu schränken wir die Objekte in \mathfrak{R}_3 auf Raumzeiten \mathcal{M} der Dimension 4 mit dem trivialen Bündel $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{61}$ und dem konform gekoppelten Klein-Gordon-Operator $P_g := \square_g + m^2 + \lambda S_g$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$ (“Masse”) ein.

Als Morphismen betrachten wir daher nur die Paare $(\pm \text{id}_{\mathcal{M} \times \mathbb{R}}, \phi)$, ϕ wie oben⁶². Für die Objekte in \mathfrak{R}_3 verwenden wir abkürzend die Raumzeit \mathcal{M} .

Die Tatsache, daß P_g nur von der Metrik g und der (Mannigfaltigkeits-)Struktur von \mathcal{M} abhängt, sichert die Verträglichkeit (Diagramm (2.4))

$$P_{g'}(s \circ \phi^{-1}) = (P_g(s)) \circ \phi^{-1} \quad (2.11)$$

für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M})(:= \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M} \times \mathbb{R}))$ und $\phi \in \text{hom}_{\mathfrak{R}_3}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ (s. [Hel62], Proposition 2.1 (S.387) für einen Beweis; s. auch Appendix B, Definition B.14.).

Bevor wir uns den Hadamard-Zuständen zuwenden, bemerken wir, daß Gleichung (2.11) eine nützliche Eigenschaft für den avancierten und retardierten Propagator auf einer global hyperbolischen Raumzeit impliziert.

Lemma 2.7:

Ist \mathcal{M} eine global hyperbolische Raumzeit und P_g der konform gekoppelte Klein-Gordon-Operator, so ist der eindeutig bestimmte avancierte/retardierte Propagator G_\pm invariant unter orientierungserhaltenden, zeit-orientierungserhaltenden Isometrien $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, d.h.

$$\phi^* G_{\pm|\phi(\cdot)}(s) = G_{\pm|(\cdot)}(s)$$

für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Beweis:

Für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ gilt:

$$(1) \quad P_g^\phi(s) := (P_g(s \circ \phi)) \circ \phi^{-1} = P_g(s),$$

⁶⁰Die folgenden Definitionen sollten sich allerdings in geeigneter Weise auf den allgemeineren Fall eines normal hyperbolischen Differentialoperators über Raumzeiten der Dimension n übertragen lassen.

⁶¹Die Fasermetric ist das Produkt in \mathbb{R}

⁶²Das Paar $(-\text{id}_{\mathcal{M} \times \mathbb{R}}, \phi)$ entspricht einem Orientierungswechsel in den Fasern von $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$; im Folgenden wird auf diese Möglichkeit verzichtet.

$$\begin{aligned}
(2) \quad \phi^* G_{\pm|\phi(\cdot)}(P_g s) &= G_{\pm|\phi(\cdot)} \underbrace{(J_{\phi^{-1}} \cdot ((P_g s) \circ \phi^{-1}))}_{=1} \\
&= G_{\pm|\phi(\cdot)}(P_g^\phi(s \circ \phi^{-1})) \\
&= G_{\pm|\phi(\cdot)}(P_g(s \circ \phi^{-1})) \\
&= s \circ \phi^{-1} \circ \phi = s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad P_g(\phi^* G_{\pm|\phi(\cdot)}(s)) &= (P_g G_{\pm|\phi(\cdot)}(s \circ \phi^{-1})) \circ \phi^{-1} \circ \phi \\
&= (P_g^\phi G_{\pm|(\cdot)}(s \circ \phi^{-1})) \circ \phi \\
&= (P_g G_{\pm|(\cdot)}(s \circ \phi^{-1})) \circ \phi \\
&= s \circ \phi^{-1} \circ \phi = s,
\end{aligned}$$

(4) $\text{supp } \phi^* G_{\pm|\phi(p)} = \text{supp } G_{\pm|p} \subseteq J_{\pm}(p, \mathcal{M})$ für alle $p \in \mathcal{M}$, da ϕ eine zeit-orientierungserhaltende Isometrie ist. Genauer:

- (a) $q \in J_{\pm}(p, \mathcal{M}) \Leftrightarrow \phi(q) \in J_{\pm}(\phi(p), \mathcal{M})$,
- (b) $\text{supp } s \subseteq \mathcal{M} \setminus J_{\pm}(p, \mathcal{M}) \Leftrightarrow \text{supp } s \circ \phi^{-1} \subseteq \mathcal{M} \setminus J_{\pm}(\phi(p), \mathcal{M})$,
- (c) $\text{supp } G_{\pm|\phi(p)} \subseteq J_{\pm}(\phi(p), \mathcal{M})$,

(5) $\text{supp } \phi^* G_{\pm|\phi(\cdot)}(s) \subseteq J_{\mp}(\text{supp } s, \mathcal{M})$.

Mit Theorem 1.19 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.8:

Die globale Hyperbolizität von \mathcal{M} ist entscheidend für den Beweis. Für nicht global hyperbolische Raumzeiten ist $\phi^* G_{\pm|\phi(\cdot)}$ ein(!) avancierter/retardierter Propagator, die Eindeutigkeit entfällt.

Ein Zustand ω über der Weyl-Algebra heißt *quasifrei*, falls die *2-Punkt-Funktion*

$$\omega_2(s, \tilde{s}) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \omega(W(ts)W(u\tilde{s})) \quad (2.12)$$

für alle $s, \tilde{s} \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ existiert und der Zustand durch diese in folgender Weise definiert ist^{63,64}:

$$\omega(W(s)) = e^{-\frac{1}{2}\omega_2(s,s)}, \quad s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}). \quad (2.13)$$

Kommen wir nun zur Definition der Hadamard-Zustände (s. [KW91], S.82ff; [Mor03], Abschnitt 3; [DB60], Abschnitt 2).

Definition 2.9:

Ein *quasifreier Zustand* ω über der Weyl-Algebra heißt *lokaler Hadamard-Zustand über einer kausalen Umgebung* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}^m$, falls sich

$$\omega_2 - H_n$$

⁶³Beachte, daß die $\{W(s)\}_{s \in \mathcal{D}(\mathcal{M})}$ die Weyl-Algebra linear erzeugen. Die Quasifreiheit von ω ist so zu verstehen, daß alle “abgeschnittenen” (“truncated”) n -Punkt-Funktionen bis auf die “abgeschnittene” 2-Punkt-Funktion verschwinden (s. [BR97], S.39 für eine genaue Erklärung der Terminologie). Teilweise wird das Verschwinden der 1-Punkt-Funktion nicht in die Definition von “quasifrei” integriert. Es wird dann die “Eichinvarianz” des Zustandes verlangt, d.h. ω ist invariant unter $W(s) \mapsto W(-s)$. Diese Invarianz ist durch die Invarianz der Differentialgleichung $Ps = 0$ unter $s \mapsto -s$ motiviert (“innere Symmetrie”).

⁶⁴ ω ist somit ein *analytischer Zustand*, d.h. $t \mapsto \omega(W(ts))$ ist eine analytische Funktion. Analytische Zustände sind vollständig durch die *n-Punkt-Funktionen* ($n \geq 1$) $\omega_n(s_1, \dots, s_n) := \left. \frac{d}{dt_1} \right|_{t_1=0} \dots \left. \frac{d}{dt_n} \right|_{t_n=0} \omega(W(s_1, \dots, s_n))$ bestimmt (s. [BR97], S.38).

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu einer Funktion der Klasse C^n auf $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ fortsetzen lässt; $\omega_2 - H_n \in C^n(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$. Dabei ist $H_n \in \mathcal{D}^*(\mathcal{U} \times \mathcal{U})(:= \mathcal{D}^*(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, (\mathcal{U} \times \mathbb{R})^{\otimes 2}, \mathbb{C}))$ folgendermaßen definiert⁶⁵:

$$H_n(s, \tilde{s}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} \left(\frac{V^0(p, q)}{\Gamma_\varepsilon(p, q)} + V^{(n)}(p, q) \log \left(\frac{\Gamma_\varepsilon(p, q)}{\lambda^2} \right) \right) s(p) \tilde{s}(q) dV_g(p) dV_g(q)$$

mit

$$V^{(n)}(p, q) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1} k! (k+1)!} V^{k+1}(p, q) \Gamma(p, q)^k$$

und

$$\Gamma_\varepsilon(p, q) := \Gamma(p, q) - 2i\varepsilon(t(q) - t(p)) + \varepsilon^2.$$

Die V^k , $k \geq 0$ sind die Hadamard-Koeffizienten für den konform gekoppelten Klein-Gordon-Operator P_g auf $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ (s. Unterabschnitt 1.2.2). Γ ist das geodätische Abstandsquadrat auf \mathcal{U} (s. Appendix B, Proposition B.23) und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein (beliebiger) Skalierungsparameter. $t: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine glatte Funktion mit zeitartigem, zunkunfts-gerichtetem Gradienten; eine solche Funktion existiert, da \mathcal{U} global hyperbolisch ist (s. [BS05]). Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Funktion t , wie in [KW91] bewiesen wird.

ω heißt globaler Hadamard-Zustand, falls es eine Überdeckung \mathcal{C} von \mathcal{M} durch kausale Umgebungen gibt, s.d. ω bezüglich jedes $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ ein lokaler Hadamard-Zustand ist.

Die Distribution H_n wird als Hadamard-Parametrix (der Ordnung n) bezeichnet. Die Definition macht ersichtlich, daß H_n nur von der lokalen Geometrie von (\mathcal{M}, g) und den Parametern in P_g abhängt.

Diese Definition hält sich an die “minimale” Vorschrift nach [Mor03], d.h. die Unbestimmtheit in der Definition der Hadamard-Parametrix ist auf die willkürliche Wahl der Längenskala λ reduziert. Im Vergleich dazu wird beispielsweise in [Wal94] die Hadamard-Parametrix um eine glatte Funktion $W = W(\Gamma)$ ergänzt. Letztere lässt sich als formale Entwicklung in Γ bis auf die nullte Ordnung W^0 in ähnlicher Weise wie die V^k , $k \geq 0$ bestimmen (s. Unterabschnitt 1.2.2), d.h. die Hadamard-Parametrix (mit W) wird als formale Fundamentallösung aufgefasst (vgl. Gleichung (1.3)). Eine (eindeutige) Bestimmung von W^0 aus der (lokalen) Geometrie und P_g ist nicht möglich.

Die Hadamard-Bedingung besagt, daß die 2-Punkt-Funktion eines Hadamard-Zustandes eine zum Vakuum-Zustand des Minkowskiraumes analoge Singularitäten-Struktur bei kurzen Abständen aufweist (s. [Wal94], [Kay06], sowie Theorem 1.14⁶⁶). Physikalisch gesprochen zeigen die “Ultraviolett-Divergenzen” dieser Zustände ein Verhalten, das als “vakuum-ähnlich” bezeichnet werden kann. Die Hadamard-Zustände werden aus diesem Grund als die Klasse der physikalisch sinnvollen Zustände über der Weyl-Algebra einer Raumzeit angesehen. Bestärkt wird dies durch den Umstand, daß Hadamard-Zustände die Definition eines renormierten Energie-Impuls-Tensors der Quantenfeldtheorie zulassen (s. [Mor03], [Wal94]).

Auch in Hinsicht auf die Renormierung weiterer physikalischer Größen verschafft die Hadamard-Bedingung Abhilfe, indem sie eine Klasse möglicher Referenzzustände bereitstellt⁶⁷. Allerdings führt dies auf das Problem, daß es in der Regel eine Vielzahl verschiedener Hadamard-Zustände gibt, weshalb die Renormierung einer Größe mittels eines gewählten Hadamard-Zustandes eine unerwünschte Beliebigkeit bekommt.

⁶⁵Für den komplexen Logarithmus wird der übliche Hauptwert verwendet.

⁶⁶Die Hadamard-Parametrix wird mittels der asymptotischen Entwicklung des avancierten/retardierte Propagators konstruiert.

⁶⁷Beachte, daß im Allgemeinen kein ausgezeichneter Zustand wie das Minkowski-Vakuum für eine Raumzeit definiert werden kann, weil die Isometrie-Gruppe generisch trivial ist.

Letztere kann durch die Forderung der *lokalen Kovarianz* weiter eingeschränkt werden (s. [Wal94], [HW01]), d.h. ist ϕ ein Morphismus in \mathfrak{R}_3 zwischen Raumzeiten \mathcal{M} und \mathcal{N} , und sind $Q_{\mathcal{M}}(p)$ und $Q_{\mathcal{N}}(q)$ renormierte Größe (in einer geeignet erweiterten Observablen-Algebra) an Punkten $p \in \mathcal{M}$ und $q \in \mathcal{N}$, so sollten diese bis auf Isomorphie in \mathfrak{Alg} über einstimmen.

$$\mathcal{F}_{\text{ext}}(\phi)(Q_{\mathcal{M}}(p)) = Q_{\mathcal{N}}(\phi(p)),$$

dabei sollte $\mathcal{F}_{\text{ext}}(\phi)$ durch den $*$ -Automorphismus $\mathcal{F}(\phi)$ der zugehörigen Weyl-Algebren $\mathcal{W}(\mathcal{M})(:=\mathcal{W}(V_{\mathcal{M}}, \omega_{\mathcal{M}}))$ und $\mathcal{W}(\mathcal{N})$ induziert sein.

Als ein Beispiel für die Renormierung in Sinne der lokalen Kovarianz betrachten wir die Wick-Monome, insbesondere das Wick-Quadrat, der lokal kovarianten Quantenfeldtheorie des konform gekoppelten Klein-Gordon-Feldes mit Bezug auf eine Familie von Hadamard-Zuständen $\{\omega_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M} \in \mathfrak{R}_3}$ über den Weyl-Algebren $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ (vgl. [BFK96], [BFV03]).

Da die Hadamard-Zustände $\omega_{\mathcal{M}}$ analytisch sind, sind die Generatoren $\Phi_{\omega_{\mathcal{M}}}(s)$, $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ der unitären 1-Parameter-Gruppen $\{\pi_{\omega_{\mathcal{M}}}(W(ts))\}_{t \in \mathbb{R}}$ in der zugehörigen GNS-Darstellung wohldefiniert⁶⁸, und liefern Operator-wertige Distributionen

$$s \mapsto (\eta, \Phi_{\omega_{\mathcal{M}}}(s)\xi), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{H}_{\omega_{\mathcal{M}}}$$

in $\mathfrak{H}_{\omega_{\mathcal{M}}}$, welche die Eigenschaften aus Bemerkung 2.6 besitzen.

Das *Wick-Quadrat* $:\Phi^2 :_{\omega_{\mathcal{M}}}(p)$ an $p \in \mathcal{M}$ in der GNS-Darstellung von $\omega_{\mathcal{M}}$ erhalten wir durch die Operator-wertige Distribution

$$:\Phi^2 :_{\omega_{\mathcal{M}}}(s) := (\Phi_{\omega_{\mathcal{M}}} \Phi_{\omega_{\mathcal{M}}} - H_n \mathbf{1}_{\omega_{\mathcal{M}}})(f\delta)$$

auf einer kausalen Umgebung \mathcal{U} von p . δ ist die Einschränkung auf die Diagonale $f \mapsto \int_{\mathcal{M}} f(p)f(p)dV_g(p)$. Daß die Komposition mit $\Phi_{\omega_{\mathcal{M}}} \Phi_{\omega_{\mathcal{M}}} - H_n \mathbf{1}_{\omega_{\mathcal{M}}}$ wohldefiniert ist, wird in [Mor03] bewiesen. Da $\omega_{\mathcal{M}}$ ein Hadamard-Zustand ist, lässt sich die Formel

$$\omega_{\mathcal{M}}(:\Phi^2 :_{\omega_{\mathcal{M}}}(p)) = (\omega_{\mathcal{M}|_2} - H_n)(p, p) \quad (2.14)$$

sinnvoll interpretieren. Dazu sei bemerkt, daß die Einschränkung der verwendeten Fortsetzung von $(\omega_{\mathcal{M}|_2} - H_n)$ auf die Diagonale in $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ eindeutig ist (s. [HW01], Abschnitt 5.2) und die Konstruktion nicht von dem gewählten $n \geq 0$ abhängt.

Eine globale Formel für $:\Phi^2 :_{\omega_{\mathcal{M}}}$ ergibt sich durch eine geodätisch konvexe Überdeckung⁶⁹ von \mathcal{M} und eine Zerlegung der Eins, die einer kausalen Verfeinerung dieser Überdeckung untergeordnet ist, sowie aus der Tatsache, daß die Hadamard-Koeffizienten auf geodätisch konvexen Umgebungen eindeutig bestimmt sind.

Die höheren *Wick-Monome* $:\Phi^n :_{\omega_{\mathcal{M}}}$ ergeben sich durch Rekursion und $:\Phi :_{\omega_{\mathcal{M}}} := \Phi_{\omega_{\mathcal{M}}}$ (s. [Mor03]). Desweiteren können Ableitungen der Wick-Monome definiert werden, dabei ist darauf zu achten, daß der Parameter n größer als die Ableitungsordnung gewählt wird (s. [Mor03], Abschnitt 3). Da wir später jedoch nur das Wick-Quadrat benötigen, soll darauf nicht genauer eingegangen werden.

Betrachten wir nun die $*$ -Algebra $\mathcal{A}_{\omega_{\mathcal{M}}}$, die von den $\Phi_{\omega_{\mathcal{M}}}$ erzeugt wird (s. Bemerkung 2.6). Dann können wir die Wick-Monome verwenden um eine erweiterte $*$ -Algebra $\mathcal{A}_{\omega_{\mathcal{M}}}^{\text{ext}}$ zu definieren, die $\mathcal{A}_{\omega_{\mathcal{M}}}$ als $*$ -Unteralgebra enthält.

Diese Algebra $\mathcal{A}_{\omega_{\mathcal{M}}}^{\text{ext}}$ kann abstrakt durch eine vom gewählten Hadamard-Zustand unabhängige Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}^{\text{ext}}$ realisiert werden, zusammen mit einem (kanonischen) $*$ -Isomorphismus

$$\alpha_{\omega_{\mathcal{M}}} : \mathcal{A}_{\omega_{\mathcal{M}}}^{\text{ext}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{M}}^{\text{ext}}$$

⁶⁸Die $\Phi_{\omega_{\mathcal{M}}}(s)$ sind dicht definiert mit gemeinsamem Definitionsbereich $\{W(s)\Omega_{\omega_{\mathcal{M}}}\}_{s \in \mathcal{D}(\mathcal{M})}$

⁶⁹s. Appendix B, Lemma B.27.

mit $\alpha_{\omega|\omega'} := \alpha_{\omega} \circ \alpha_{\omega'}^{-1}$, $\alpha_{\omega|\omega'}(\Phi_{\omega'}^{\omega}) = \Phi_{\omega}$ und $\alpha_{\omega|\omega'} \circ \alpha_{\omega'|\omega''} = \alpha_{\omega|\omega''}$. Ähnliches gilt für die Algebra $\mathcal{A}_{\omega, \mathcal{M}} := \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$.

Insbesondere führt dies dazu, daß zu jedem Morphismus ϕ in \mathfrak{R}_3 zwischen Raumzeiten \mathcal{M} und \mathcal{N} ein injektiver, die Eins erhaltender, *-Homomorphismus

$$\alpha_{\phi} : \mathcal{A}_{\mathcal{M}}^{\text{ext}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^{\text{ext}},$$

assoziiert werden kann, denn ein Hadamard-Zustand $\omega_{\mathcal{N}}$ über \mathcal{N} induziert durch $\phi^* \omega_{\mathcal{N}|_2}$ einen Hadamard-Zustand $\phi^* \omega_{\mathcal{N}}$ über \mathcal{M} (s. [Pin09], Lemma 2.4 (S.8)). Die bereits erwähnte Eindeutigkeit der Hadamard-Koeffizienten sichert die lokale Kovarianz der Wick-Monome

$$\tilde{\alpha}_{\phi} \circ : \Phi^n :_{\omega, \mathcal{M}} = : \Phi^n :_{\omega, \mathcal{N}} \circ \iota_{\phi}$$

mit $\tilde{\alpha}_{\phi} = \alpha_{\omega, \mathcal{N}}^{-1} \circ \alpha_{\phi} \circ \alpha_{\omega, \mathcal{M}}$. Daher schreiben wir im Folgenden die Wick-Monome kurz als $: \Phi^n :_{\mathcal{M}}$. Auf der abstrakten Ebene ist α_{ϕ} im Prinzip die natürliche Einbettung.

Die Willkürlichkeit der so konstruierten Wick-Monome kann durch zusätzliche Forderungen⁷⁰, genaueres in [HW01], auf polynomielle Ausdrücke in der Metrik, dem Krümmungstensor und dessen Ableitungen, sowie der “Masse” m und Wick-Monomen niedrigerer Ordnung reduziert werden.

Abschließend sei bemerkt, daß es eine nützliche Umformulierung (s. [Rad96]) der Hadamard-Bedingung in Termen der Mikrolokalen Analysis (s. [Hör83]) gibt, die sich zu einer Bedingung an allgemeinere Quantenfeldtheorien fortsetzen lässt, die Stichworte sind hier: “Wellenfronten-Mengen-Spektrums-Bedingung” (“wave front set spectral condition” (WFSSC); s. [Rad96]) oder “Mikrolokale-Spektrums-Bedingung” (“microlocal spectrum condition” (μ SC); s. [BFK96]).

Die Umformulierung der Hadamard-Bedingung besagt im Wesentlichen, daß sich die Singularitäten der 2-Punkt-Distribution $\omega_2(p, q)$ entlang lichtartige Geodäten zwischen p, q ausbreiten⁷¹.

⁷⁰Diese Forderungen beziehen sich zum Teil auf die Vorstellung, daß die Wick-Monome heuristisch die Potenzen des Quantenfeldes Φ seien sollten.

⁷¹ $\omega_2(p, q)$ soll hier die Abhängigkeit von zwei Argumenten andeuten.

Teil II

Zur Thermodynamik gekrümmter Raumzeiten

3 Thermodynamisches Vorspiel

Die Formulierung von thermischen Gleichgewichtssituationen im algebraischen Zugang zur Quantenfeldtheorie geschieht mittels der sogenannten *KMS-Bedingung*⁷² (s. Unterabschnitt 3.1). Zur Formulierung dieser Bedingung wird eine 1-Parameter-Gruppe von “Zeittranslations”-Automorphismen $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ (der Observablen-Algebra \mathfrak{A}) benötigt, welche die Dynamik des betrachteten Systems relativ zum Beobachter widerspiegelt, und bezüglich derer das System als “im thermischen Gleichgewicht” angesehen wird.

In Bezug auf die, der Quantenfeldtheorie zugrunde liegende, Raumzeit würden wir folglich einen direkten Zusammenhang der Automorphismen mit *zeitartigen Isometrien*, d.h. Isometrien, deren Trajektorien in der Raumzeit zeitartige Kurven sind, ersterer erwarten⁷³.

Dies wirft für allgemeine Raumzeiten ein schwerwiegendes Problem auf, da die Gruppe der Isometrien generisch trivial ist.

Ein Ausweg aus dieser Situation wurde, basierend auf den Ideen von D. Buchholz, I. Ojima und H. Roos (s. [BOR02], [Buc03]), von D. Buchholz und J. Schlemmer (s. [BS07]) für lokal kovariante Quantenfeldtheorien (resp. lokal kovariante Quantenfelder) vorgeschlagen und auf das masselose ($m = 0$), konform kovariante ($\lambda = \frac{1}{6}$) Klein-Gordon-Feld auf der *de Sitter-Raumzeit* angewandt. Ein essentieller Unterschied zur Charakterisierung mittels der KMS-Bedingung liegt darin, daß dort ein lokales Kriterium ohne Bezug auf eine bestimmte Dynamik verwendet wird. Genauer gesagt werden die Gleichgewichts-Eigenschaften eines Zustandes an jedem Punkt der zugehörigen Raumzeit separat analysiert und mit Gleichgewichtssituationen im Minkowskiraum verglichen.

Die Notwendigkeit eines solchen lokalen Gleichgewichts-Konzeptes wird durch die Ergebnisse in [BS07] betont. Insbesondere wird gezeigt, daß für bestimmte geodätische Beobachter die Zuweisung eines globalen Temperaturbegriffs nicht möglich ist, was als Konsequenz des Unruh-Effektes, resultierend aus der Krümmung der Raumzeit, angesehen werden kann.

Die folgenden Unterabschnitte 3.1 und 3.2 dienen der Erklärung der in [BS07] und Abschnitt 4 verwendeten Ideen.

3.1 KMS-Zustände

Definition 3.1:

Ein Zustand ω über einer (Observablen-)Algebra \mathfrak{A} heißt KMS-Zustand bzw. erfüllt die KMS-Bedingung zur inversen Temperatur $\beta := \frac{1}{T} > 0$ und Dynamik $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, falls für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ eine Funktion $F_{A,B}$ existiert, die analytisch im Inneren von $\mathfrak{D}_\beta := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im(z) \leq \beta\}$ und stetig auf dem Abschluß $\overline{\mathfrak{D}_\beta}$ ist, s.d.

$$(1) F_{A,B}(t) = \omega(B\alpha_t(A)) \text{ und}$$

$$(2) F_{A,B}(t + i\beta) = \omega(\alpha_t(A)B) =: G_{A,B}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dabei ist $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \text{Aut}(\mathfrak{A})$ eine 1-Parameter-Gruppe.

Ist diese Bedingung für $\beta = +\infty$ erfüllt, d.h. $F_{A,B}$ ist analytisch im Inneren von $\mathfrak{D}_{+\infty}$, stetig auf $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ und es gilt (1), so heißt ω Grundzustand.

Die Verwendung von KMS-Zuständen zur Beschreibung von thermischen Gleichgewichtssituationen ist einerseits durch ihre Stabilität gegen kleine Störungen und ihre Passivität (s. [BR97], Abschnitt 5.4), d.h. in den von ihnen beschriebenen Systemen kann in zyklischen Prozessen keine Arbeit geleistet werden, gerechtfertigt. Andererseits charakterisiert sie im Falle endlichen (System-)Volumens V ($\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H})$) für einen geeigneten Hilbertraum \mathfrak{H}) gerade die *Gibbs-Zustände*

⁷²“KMS” für Kubo-Martin-Schwinger.

⁷³Inbesondere für lokal kovariante Quantenfeldtheorien ist dies unter Berücksichtigung ihrer funktoriellen Natur zutreffend.

$$\omega(A) = \frac{\mathrm{tr}_{\mathfrak{H}}(e^{-\beta H} A)}{\mathrm{tr}_{\mathfrak{H}}(e^{-\beta H})} \text{ mit } \alpha_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$

(s. [BR97], Beispiel 5.3.31 (S.119)). Ferner bleibt die KMS-Eigenschaft der Gibbs-Zustände unter recht allgemeinen Bedingungen im thermodynamische Limes ($V \rightarrow \infty$) erhalten (s. [Haa96], Theorem 1.4.2 (S.210f))⁷⁴.

Vorgeschlagen wurde die KMS-Bedingung von R. Haag, N.M. Hugenholtz und M. Winnink in [HHW67].

Bemerkung 3.2:

Ist \mathfrak{A} eine normierte Algebra und ω ein KMS-Zustand⁷⁵, so folgt mit den Abschätzungen

$$\omega(B\alpha_t(A)) \leq \|\omega\| \|A\| \|B\| \geq \omega(\alpha_t(A)B)$$

und einem Theorem der komplexen Analysis (Phragmen-Lindelöf; s. [BR97], Proposition 5.3.5. (S.80)), sowie dem Satz von Liouville die α_t -Invarianz von ω , d.h.

$$\omega(\alpha_t(A)) = \omega(A)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathfrak{A}$.

Im Falle einer C^* -Algebra, z.B. der Weyl-Algebra, impliziert dies zusammen mit der Stetigkeit der Funktionen $F_{A,B}|_{\mathbb{R}}, G_{A,B}$, daß $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine Implementierung als stark-stetige Gruppe unitärer Operatoren in der GNS-Darstellung von ω besitzt (s. Appendix D, Korollar D.23).

Eine praktikable Umformulierung der KMS-Bedingung, falls $F_{A,B}|_{\mathbb{R}}$ und $G_{A,B}$ beschränkt sind, lautet (s. [HHW67]):

Proposition 3.3:

ω ist genau dann ein KMS-Zustand zur inversen Temperatur β und Dynamik $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, falls die Fouriertransformationen der Funktionen $F_{A,B}|_{\mathbb{R}}$ und $G_{A,B}$, aufgefasst als temperierte Distributionen, die Relation

$$\hat{F}_{A,B}|_{\mathbb{R}} = e^{\beta(\cdot)} \hat{G}_{A,B}$$

erfüllen.

3.2 Lokales Gleichgewicht

Die Idee in [BS07] zur Formulierung eines lokales Gleichgewichtskonzeptes nutzt die Vorschläge aus [BOR02] für ein lokales Gleichgewichtskonzept im Minkowskiraum $\mathbb{M}(\!:= \mathbb{R}_1^4)$ in Verbindung mit der Tatsache, daß ein lokal kovariantes Quantenfeld Φ die Identifikation der Quantenfelder $\Phi_{\mathcal{M}}$ über verschiedenen Raumzeiten $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{M}_3}$ ermöglicht.

Explizit bedeutet das, daß erstens ein Menge von Gleichgewichts/KMS-Zuständen, die *thermischen Referenzzustände* \mathcal{R} , über dem Minkowskiraum und zweitens eine geeignete Menge von “lokalisierten” Observablen, die *lokalen thermischen Observablen* \mathcal{T} , gebildet aus lokal kovarianten Quantenfeldern, ausgewählt werden. Ein Zustand $\omega_{\mathcal{M}}$ ist dann im *lokalen Gleichgewicht* bezüglich \mathcal{R} und \mathcal{T} an $p \in \mathcal{M}$, falls es einen Punkt $x_p \in \mathbb{M}$ gibt, s.d.

$$\omega_{\mathcal{M}}(\Phi_{\mathcal{M}}(p)) = \omega_{B(p)}(\Phi_{\mathbb{M}}(x_p)) \tag{3.1}$$

für einen Referenzzustand $\omega_{B(p)} \in \mathcal{R}$ und alle $\Phi \in \mathcal{T}$ gilt. Die p -Abhängigkeit von $\omega_{B(p)}$ und x_p trägt Situationen Rechnung, in denen die thermischen Eigenschaften von $\omega_{\mathcal{M}}$ über \mathcal{M}

⁷⁴Für den klassischen Fall (\mathfrak{A} kommutativ) ist die KMS-Bedingung ungeeignet; s. [BR97], Proposition 5.3.28. (S.113).

⁷⁵für eine normierte Algebra \mathfrak{A} verlangen wir $\|\omega\| = 1$ (s. Appendix D).

veränderlich sind. Diese Bedingung ist so zu verstehen, daß ein Beobachter, der seine Messgeräte $\Phi \in \mathcal{T}$ zur Bestimmung thermischer Eigenschaften eines Systems (Thermometer,...) in einem Gebiet näherungsweise flacher Raumzeit (\mathbb{M}) mittels der durch \mathcal{R} beschriebenen Referenzsysteme kalibriert hat, auch in einem Gebiet gekrümmter Raumzeit (\mathcal{M}) seine Meßgeräte zur Bestimmung der thermischen Eigenschaften seines dortigen Systems ($\omega_{\mathcal{M}}$) verwenden können sollte.

Die Vorstellung, daß die Messungen an einem Punkt der Raumzeit stattfinden, angedeutet durch $\Phi_{\mathcal{M}}(p)$, ist eine Idealisierung des Umstandes, daß prinzipiell beliebig kleine Regionen der Raumzeit für die Messungen verwendet werden können. Die statistische Interpretation der Quantentheorie rechtfertigt dies, da die Fluktuationen zwar mit zunehmender Lokalisierung ansteigen, jedoch ausreichend häufige Messungen⁷⁶ die gewünschte Information liefern.

Im Gegensatz zur KMS-Eigenschaft, welche als eine Bedingung an die Zeitmittel der Observablen verstanden werden kann (Stationarität der Erwartungswerte, Stabilität,...), wird für das lokale Gleichgewicht eine Bedingung an die Scharmittel der lokalen thermischen Observablen gestellt. Das lokale Gleichgewicht charakterisiert demnach solche Zustände deren Erwartungswerte für die thermischen Observablen eine Situation widerspiegeln, die mit dem Gleichgewichtsverständnis im Minkowskiraum verträglich ist. Ein direkter Bezug auf die Dynamik der Zustände wird nicht benötigt.

Einige Feinheiten bei der Auswahl der Mengen \mathcal{R} und \mathcal{T} werden in den folgenden beiden Unterabschnitten erläutert (vgl. [BOR02] und [Buc03]).

3.2.1 Thermische Referenzzustände

Als thermische Referenzzuständen (scharfer Temperatur) verwenden wir alle KMS-Zustände $\omega_{\beta,e}$ zu inversen Temperaturen $\beta > 0$, deren Dynamiken $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ durch Zeittranslationen $x \mapsto x + te$, für ein $e \in \mathbb{M}$ mit $q_1(e) = -1$, $e \in I_+(0, \mathbb{M})$ ⁷⁷, gegeben sind. D.h. das Paar (β, e) dient dem Beobachter zur Fixierung des lokalen Ruhesystems und dessen Temperatur. Eine kompaktere Notation erhalten wir durch die Kombination von β und e in einen Temperaturvektor βe , kurz $\beta \in I_+(0, \mathbb{M})$. Generell sind die Zustände ω_{β} zu Temperaturvektoren β nicht eindeutig (z.B. Phasenkoexistenz), sondern es werden weitere intensive Observablen (chemisches Potential, Druck,...) zur Fixierung benötigt⁷⁸. Um die weiteren Überlegungen zu vereinfachen, nehmen wir die Eindeutigkeit der Zustände ω_{β} an⁷⁹. Dies bedeutet, daß die Zustände ω_{β} dem Transformationsverhalten

$$\omega_{\beta} \circ \mathcal{F}(\Lambda, a)^{-1} = \omega_{\Lambda\beta} \quad (3.2)$$

für eine (eigentliche, orthochrone) Poincaré-Transformation (Λ, a) genügen⁸⁰, also translationsinvariant⁸¹ und isotrop⁸² im Ruhesystem sind, sowie eine invariante Temperatur $|q_1(\beta)|$ besitzen (Zur Erinnerung: \mathcal{F} ist die lokal kovariante Quantenfeldtheorie).

Im Allgemeinen bewirkt eine Poincaré-Transformation allerdings einen Wechsel des Ruhesystems ($e \mapsto \Lambda e$, $e = (|q_1(\beta)|)^{-\frac{1}{2}}\beta$)⁸³.

Um auch allgemeinere Situationen behandeln zu können, in denen die thermischen Eigenschaften nur unzureichend bekannt oder statistisch veränderlich sind, lassen wir Konvex-Kombinationen

⁷⁶Es wird davon ausgegangen, daß eine physikalische Situation für eine Messung in genügend großer Menge präpariert werden kann (*Ensemble*).

⁷⁷ q_1 ist die quadratische Form der Standard-Metrik auf \mathbb{M} .

⁷⁸Da die Menge der $(\beta, \{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ -KMS-Zustände in vielen Fällen einen Simplex bildet, d.h. Konvex-Zerlegungen bezüglich der Extrempunkte sind eindeutig, läßt sie sich in diesen Fällen durch zentrale (klassische) Observablen parametrisieren.

⁷⁹Diese Bedingung schließt Phasenübergänge aus.

⁸⁰Allgemeiner gilt, daß $\omega_{\beta} \circ \mathcal{F}(\Lambda, a)^{-1}$ ein KMS-Zustand mit Temperaturvektor $\Lambda\beta$ ist.

⁸¹Invarianz unter der Untergruppe der Raum-Zeit-Translationen $\{(\mathbb{1}_{\mathbb{M}}, a)\}_{a \in \mathbb{M}}$.

⁸²Invarianz unter der Isotropiegruppe $I \cong SO_3(\mathbb{R})$ der Punkte in \mathbb{M} . Jedes Element $e \in I_+(0, \mathbb{M})$ definiert ein Ruhesystem nur bis auf eine Wirkung mit Elementen aus I .

⁸³*Spontane Symmetriebrechung* in Gleichgewichtssituationen.

der ω_β zu, d.h. ein *thermischer Referenzzustand* ω_B ist von der Form

$$\omega_B = \int \omega_\beta d\mu(\beta) \quad (3.3)$$

für eine Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf \mathbb{M} mit Träger $B \subseteq I_+(0, \mathbb{M})$ ⁸⁴. Dazu sei bemerkt, daß μ ohne die Eindeutigkeitsbedingung an die KMS-Zustände ω_β auch im Spektrum anderer intensiver Observablen, welche die Menge \mathcal{R} parametrisieren, getragen würde.

3.2.2 Lokale thermische Observablen

Die Auswahl der lokalen thermischen Observablen \mathcal{T} ist dadurch bestimmt, daß sie empfindlich für die (makroskopischen) thermischen Eigenschaften der Referenzzustände \mathcal{R} über \mathbb{M} sein müssen und in lokal kovarianter Weise zu konstruieren sind, um eine Identifizierung zwischen verschiedenen Raumzeiten zuzulassen.

Außerdem sollten die Elemente in \mathcal{T} bestenfalls eine Unterscheidung zwischen beliebigen Zuständen scharfer Temperatur in \mathcal{R} ermöglichen. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Zustände ω_β eindeutig sind, sollten die lokalen thermischen Observablen folglich die Bestimmung des Ruhesystems und dessen Temperatur für einen Beobachter ermöglichen (“Kalibrierung genügend vieler Meßgeräte”).

Ferner müssen die Elemente in \mathcal{T} eine “Lokalisierung” in Vektorräume⁸⁵ \mathcal{T}_p , $p \in \mathcal{M}$ zulassen. Dabei sollten die an einem Punkt $x \in \mathbb{M}$ “lokalisierten” Observablen \mathcal{T}_x die selbe Information bereitstellen, wie die intensiven thermischen Größen der Zustände in \mathcal{R} . Im Folgenden fassen wir diese Größen als Funktionen $\beta \mapsto \Theta(\beta)$ auf (*thermische Funktionen*).

Der Erwartungswert einer thermischen Funktion Θ im Referenzzustand ω_B ist

$$\omega_B(\Theta) = \int \Theta(\beta) d\mu(\beta), \quad (3.4)$$

d.h. wir verstehen die thermischen Funktionen als (zentrale) Grenzwerte von Elementen der Observablen-Algebra $\mathcal{F}(\mathbb{M})$, für die eine eindeutige Fortsetzung der Referenzzustände \mathcal{R} möglich ist (s. [Buc03], S.5).

Die “Lokalisierungs”-Eigenschaft lässt vermuten, daß die Elemente der Observablen-Algebren $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ ($\mathcal{M} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{M}_3}$) für die Konstruktion der Menge \mathcal{T} ungeeignet sind. Viel mehr sollten, wie schon erwähnt, lokal kovariante Quantenfelder Φ verwendet werden, für die eine sinnvolle Interpretation des Ausdrucks $\omega_{\mathcal{M}}(\Phi_{\mathcal{M}}(p))$, $p \in \mathcal{M}$ möglich ist; z.B. die Wick-Monome $:\Phi^n:$ im Falle des Klein-Gordon-Feldes (s. Unterabschnitt 2.2.2).

Hier ist zu betonen, daß nicht alle physikalisch relevanten Observablen in der Menge \mathcal{T} realisiert werden können, da die thermischen Referenzzustände unter unseren Annahmen nicht sensitiv gegenüber raum-zeitlichen Variationen der lokalisierten Quantenfelder sind. Als Beispiel sei der Energie-Impuls-Tensor genannt, für den lediglich eine Realisierung des “thermischen Anteils” möglich ist.

Die thermischen Funktionen, die zu den Elementen $\Phi \in \mathcal{T}$ gehören werden durch die Referenzzustände scharfer Temperatur ω_β mittels der Identität

$$\Phi(\beta) := \omega_\beta(\Phi_{\mathbb{M}}(x)), \quad x \in \mathbb{M} \quad (3.5)$$

identifiziert. Aufgrund der Eindeutigkeitsbedingung an die Zustände in \mathcal{R} , und der daraus folgenden Invarianz unter Raum-Zeit-Translationen in \mathbb{M} , kann die Identifikation der Funktionen $\beta \mapsto \Phi(\beta)$ als von $x \in \mathbb{M}$ unabhängig angesehen werden.

⁸⁴Hier muß streng genommen die Integrierbarkeit der Funktionen $\beta \mapsto \omega_\beta(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ bezüglich μ angenommen werden. Dies wird für eine große Klasse von Maßen durch die Forderung der Stetigkeit dieser Funktionen erreicht, was abgesehen von Phasenübergangs-Punkten unproblematisch ist.

⁸⁵Dies ist eine Minimalannahme über die Struktur der lokalen thermischen Observablen, um die Bildung komplizierter thermischer Größen eines physikalischen Systems aus elementaren Größen zu ermöglichen.

Kombinieren wir die Gleichungen (3.1) und (3.5), so erhalten wir eine Beziehung zwischen den thermischen Funktionen, die der Charakterisierung makroskopischer, thermischer Größen dienen, und den “lokalisierten” Quantenfeldern, welche die mikroskopische Theorie kodieren.

$$\omega_{\mathcal{M}}(\Phi_{\mathcal{M}}(p)) = \int \Phi(\beta) d\mu_p(\beta) \quad (3.6)$$

Ist die Menge der thermischen Observablen \mathcal{T} ausreichend groß, so erlaubt diese Gleichung die eindeutige Bestimmung des lokalen Wahrscheinlichkeitsmaßes μ_p .

4 Konsistenz des Modells

I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case.

ARTHUR CAYLEY

In diesem Abschnitt wenden wir uns der Analyse der in Abschnitt 3 vorgestellten Ideen zu. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Frage, inwiefern das Konzept des lokalen Gleichgewichts als eine Verallgemeinerung des Gleichgewichtskonzeptes, das durch die KMS-Zustände gegeben ist, darstellt. Dazu betrachten wir die *stationären Raumzeiten* in \mathfrak{R}_3 .

4.1 Stationäre Raumzeiten

Definition 4.1:

Eine Raumzeit $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{R}_3}$ heißt stationär, falls es eine 1-Parameter-Gruppe von zeitartigen Isometrien $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \text{Diff}^\infty(\mathcal{M})$ gibt.

Ist \mathcal{F} die, in Unterabschnitt 2.2.1 beschriebene, lokal kovariante Quantenfeldtheorie, so erhalten wir für eine stationäre Raumzeit \mathcal{M} eine 1-Parameter-Gruppe von “Zeittranslations”-Automorphismen $\{\mathcal{F}(\phi_t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ der Observablen-Algebra $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, d.h. es ist möglich von KMS-Zuständen ω_β mit inverser Temperatur β und Dynamik $\{\mathcal{F}(\phi_t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ zu sprechen.

Da die KMS-Bedingung, wie in Abschnitt 3.1 erläutert, als geeignete Charakterisierung thermischer Gleichgewichtssituationen angesehen wird, stellt sich die Frage, ob die KMS-Zustände ω_β einer lokal kovarianten Quantenfeldtheorie über einer stationären Raumzeit \mathcal{M} ⁸⁶ eine Interpretation im Sinne des *lokalen Gleichgewichts* zulassen. Anders gesagt, ob der Gleichgewichtsbegriff, der durch die “Zeittranslationen” in \mathcal{M} bestimmt ist, im Sinne einer Gleichgewichtssituation im Minkowskiraum \mathbb{M} verstanden werden kann. Bestenfalls sollten sich die thermischen Funktionen von ω_β durch Gleichung (3.6) bestimmen lassen.

Ein anderer Aspekt ist die in [BS07] aufgeworfene Frage, ob die Analyse lokal thermischer Eigenschaften eines Zustandes genutzt werden kann, um die verbleibenden Uneindeutigkeiten in der Renormierung lokal kovarianter Quantenfelder (s. Unterabschnitt 2.2.2, Wick-Monome) weiter einzuschränken.

4.2 Explizite Konstruktionen am Modell des Wick-Quadrates

Immer mit den einfachsten Beispielen anfangen.

DAVID HILBERT

Zur Untersuchung der genannten Fragen verwenden wir die lokal kovariante Quantenfeldtheorie \mathcal{F} des konform kovarianten, masselosen Klein-Gordon-Feldes ($m = 0$, $\lambda = \frac{1}{6}$, $\dim(\mathcal{M}) = 4$; Unterabschnitt 2.2.2) mit dem Wick-Quadrat $:\Phi^2:$ als lokale thermische Observable. Dieses Modell sollte, trotz seiner Einfachheit oder gerade deswegen, geeignet sein eine konzeptuelle Analyse im obigen Sinne zu ermöglichen. Als stationäre Raumzeiten verwenden wir das *statische Einstein-Universum* (ESU₄) und die *Anti-de Sitter-Raumzeit* adS₄. Die Uneindeutigkeit des Wick-Quadrates ist in dieser Situation durch ein Vielfaches der Skalarkrümmung $c \cdot S$, $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

Das Vorgehen in den folgenden Unterabschnitten (4.2.1)-(4.2.3) ist bestimmt durch die Schritte:

- (1) Auswahl der thermischen Referenzzustände und die Bestimmung der thermischen Funktion des Wick-Quadrates.
- (2) Motivation der betrachteten stationären Raumzeiten und Erläuterungen derer Struktur.

⁸⁶Sofern die 1-Parameter-Gruppe von zeitartigen Isometrien Morphismen in der betrachteten Kategorie \mathfrak{R}_3 induziert.

- (3) Bestimmung des kausalen Propagators und der Hadamard-Parametrix H_0 über letzteren. Diese Objekte sind die relevanten Größen, um die lokal kovariante Quantenfeldtheorie und das Wick-Quadrat zu konstruieren.
- (4) Angabe von Kandidaten für (quasifreie) KMS-Zustände über ESU_4 und adS_4 durch eine passende 2-Punkt-Funktion (vgl. Gleichung (2.13)).
- (5) Berechnung des Erwartungswertes des Wick-Quadrates mittels dieser 2-Punkt-Funktion.

Zu Punkt (3) bemerken wir, daß die Wahl des konform kovarianten, masselosen Klein-Gordon-Feldes die Hadamard-Parametrix auf den V^0 -Term reduziert, weil der entsprechende Klein-Gordon-Operator⁸⁷ Υ Huygens'sch ist (s. Beispiel 1.24).

4.2.1 Der Minkowski-Raum (\mathbb{M})

Die Weyl-Algebra $\mathscr{W}(\mathbb{M})$ über dem Minkowskiraum ist durch den avancierten und retardierten Propagator (s. [Fri75], S.128)

$$G_{\pm|x}(y) = \frac{1}{2\pi} \theta(\pm q_1(y-x, e)) \delta_0(q_1(y-x)), \quad (4.1)$$

bestimmt. Dabei ist $e \in I_+(0, \mathbb{M})$ mit $q_1(e) = -1$ beliebig und θ die Heaviside-Funktion. Im Weiteren betrachten wir Zustände ω über selbiger, die durch Angabe der n -Punkt-Funktionen ($n \geq 1$)

$$\omega_n(s_1, \dots, s_n) := \left. \frac{d}{dt_1} \right|_{t_1=0} \dots \left. \frac{d}{dt_n} \right|_{t_n=0} \omega(W(s_1, \dots, s_n)), \quad s_1, \dots, s_n \in \mathscr{D}(\mathbb{M}) \quad (4.2)$$

bestimmt sind⁸⁸. Um die algebraische Struktur der n -Punkt-Funktionen zu betonen, führen wir die Notation

$$\omega(\Phi(s_1) \dots \Phi(s_n)) := \omega_n(s_1, \dots, s_n) \quad (4.3)$$

ein und erinnern an Bemerkung 2.6.

Die KMS-Bedingung drückt sich für einen solchen Zustand ω unter Verwendung von Definition 3.1 und Gleichung (4.2) wie folgt aus: Ist $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine 1-Parameter-Gruppe von zeitartigen Isometrien und $\{\mathscr{F}(\phi_t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ die zugehörige 1-Parameter-Gruppe von Automorphismen der Weyl-Algebra, dann ist ω ein KMS-Zustand zur inversen Temperatur $\beta > 0$ und Dynamik $\{\mathscr{F}(\phi_t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, falls für alle $s_1, \dots, s_n, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m \in \mathscr{D}(\mathbb{M})$ ($n, m \geq 0$) Funktionen $F_{n,m}$, wie in Definition 3.1, existieren, s.d.

- (1) $F_{n,m}(t) = \omega_{n+m}(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m, \iota_{\phi_t}(s_1), \dots, \iota_{\phi_t}(s_n))$ und
- (2) $F_{n,m}(t + i\beta) = \omega_{n+m}(\iota_{\phi_t}(s_1), \dots, \iota_{\phi_t}(s_n), \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m) =: G_{n,m}(t)$

gilt.

Zusammen mit der Kommutator-Relation für die abstrakten Felder (Gleichung 2.10) und der KMS-Bedingung für die Fouriertransformierten von $F_{n,m}|_{\mathbb{R}}$ und $G_{n,m}$ erhalten wir die fundamentale Gleichung

$$\begin{aligned} (e^{-\beta(\cdot)} - 1) \mathfrak{F}[\omega(\Phi(s_1) \dots \Phi(s_n) \Phi(\iota_{\phi(\cdot)}(s_{n+1})))] \\ = \sum_{k=1}^n -i \mathfrak{F}[\Delta(\iota_{\phi(\cdot)}(s_{n+1}), s_k)] \omega(\Phi(s_1) \dots \check{\Phi}(s_k) \dots \Phi(s_n)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

⁸⁷Entspricht dem konform gekoppelten Laplace-d'Alembert-Operator.

⁸⁸Dies ist z.B. für einen analytischen Zustand der Fall (s. Fußnote 25)

dabei ist Δ die, aus dem kausalen Propagator konstruierte, (prä-)symplektische Form, $(\check{\cdot})$ die Auslassung des entsprechenden Faktors und \mathfrak{F} die Fouriertransformation bezüglich $t \in \mathbb{R}$.

Wir sehen, daß die KMS-Bedingung zusammen mit der Tatsache, daß der Kommutator der abstrakten Felder proportional zur Identität ist, eine Reduktion der n -Punkt-Funktionen auf eine Kombination von $(n - 2)$ -Punkt-Funktionen erlaubt⁸⁹, sofern die Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{1 - e^{-\beta x}} \quad (4.5)$$

ein Multiplikator für die Distributionen $\mathfrak{F}[\Delta(\iota_{\phi_t(\cdot)}(s), \tilde{s})]$, $s, \tilde{s} \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ ist, was im Folgenden angenommen wird. Außerdem muß bei der Auflösung von Gleichung (4.4) nach $\mathfrak{F}[\omega(\Phi(s_1)\dots\Phi(s_n)\Phi(\iota_{\phi_t(\cdot)}(s_{n+1})))]$ streng genommen ein möglicher Beitrag der Form

$$c_{s_1, \dots, s_{n+1}} \cdot \delta_0 \quad (4.6)$$

aufgrund des ‘‘Boltzmann-Faktors’’⁹⁰ (4.5) berücksichtigt werden. Dieser Beitrag kann als Manifestation der *Bose-Einstein-Statistik* der lokal kovarianten Quantenfeldtheorie \mathcal{F} angesehen werden und spielt bei der Analyse der *Bose-Einstein-Kondensation* eine Rolle (‘‘Impuls-0-Beitrag’’). Zunächst beschränken wir unsere Betrachtungen auf Zustände, für die diese Beiträge verschwinden. Zusammen mit der, im Anschluß erläuterten (und geforderten), *Eichinvarianz* des Zustandes läßt sich dies durch die Eigenschaft erreichen, daß ω ein extremaler, ϕ_t -invarianter Zustand ist. D.h. ω läßt sich nicht in eine (nicht triviale) Konvexkombination anderer ϕ_t -invarianter Zustände zerlegen. Dies ist äquivalent dazu, daß ω ‘‘schwach-clusternd’’ (s. [Haa96], S. 242) ist. Die ϕ_t -Invarianz der KMS-Zustände über der Weyl-Algebra folgt aus Bemerkung 3.2. Auf die Beiträge (4.6) und die damit verbundene Erweiterung der Menge der Referenzzustände werden wir später zurückkommen.

Verlangen wir, als weitere Vereinfachung, die Invarianz des Zustandes ω unter dem Automorphismus $\alpha : \mathcal{W}(\mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{W}(\mathcal{M})$, induziert durch die Abbildung $s \mapsto -s$, $s \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, so impliziert dies das Verschwinden der 1-Punkt-Funktion $\omega(\Phi(s))$ für alle $s \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$.

Der Automorphismus α entspricht einer Reflektion in den Fasern des Bündels $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ und spiegelt die innere Symmetrie des (reellen) Klein-Gordon-Feldes wider. Die α -Invarianz wird daher als *Eichinvarianz*⁹¹ bezeichnet; sie hängt mit dem chemischen Potential zusammen (s. [BR97], Abschnitt 5.4.3. (S.197ff)).

Aus Gleichung (4.4) folgern wir, daß ω ein quasifreier Zustand mit 2-Punkt-Funktion

$$\omega_2(s, \tilde{s}) = \frac{-i}{2\pi} \int dk \frac{1}{1 - e^{-\beta k}} \int dt e^{-ikt} \Delta(s, \iota_{\phi_t}(\tilde{s})) \quad (4.7)$$

oder heuristisch mit Integralkern

$$\omega_2(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int dk \frac{1}{1 - e^{-\beta k}} \int dt e^{-ikt} \Delta|_x(\phi_t(y)) \quad (4.8)$$

ist.

Wählen wir für ϕ_t , $t \in \mathbb{R}$ die Zeittranslationen $x \mapsto x + te$ (vgl. Unterabschnitt 3.2.1) so ist bekannt⁹², daß die 2-Punkt-Funktionen (4.7) geeignet sind, quasifreie KMS-Zustände⁹³ zu inversen Temperaturen $\beta > 0$ und diesen Dynamiken über der Weyl-Algebra $\mathcal{W}(\mathbb{M})$ zu definieren.

⁸⁹Für alle anderen $(n + m)$ -Punkt-Funktionen mit m zeitverschobenen Argumenten ergeben sich zu (4.4) analoge Gleichungen. Lediglich die Kombinatorik wird komplizierter.

⁹⁰Dieser hat eine Nullstelle 1. Ordnung bei 0.

⁹¹In der allgemeineren Situation von Unterabschnitt 2.2.1 werden die inneren Symmetrien durch Vektorbündel-Isomorphismen $(\check{\phi}, \phi)$ mit $\phi = \text{id}_{\mathcal{M}}$ beschrieben. \mathcal{M} ist die Basis des betrachteten Vektorbündels \mathcal{E} . Weil $\check{\phi}$ faserweise eine Isometrie ist, entsprechen die inneren Symmetrien in jeder Faser dem Stabilisator der Fasermetric $g_{\mathcal{E}}$ (‘‘Eichgruppe’’).

⁹²z.B. in [Hüb05] bewiesen.

⁹³Entscheidend ist die Positivitäts-Bedingung.

Diese Zustände werden wir als thermische Referenzzustände scharfer Temperatur, d.h. zur Erzeugung von \mathcal{R} , verwenden und wie in Unterabschnitt 3.2.1 durch ω_β mit Temperaturvektor $\beta \in I_+(0, \mathbb{M})$ bezeichnen.

Eine einfache Beobachtung ist, daß die Zustände ω_β translationsinvariant und isotrop im Ruhesystem sind (vgl. Gleichung (3.2)), da die Raum-Zeit-Translationen und die Isotropiegruppe des Ruhesystems mit allen ϕ_t , $t \in \mathbb{R}$ kommutieren und Lemma 2.7 anwendbar ist.

Um das Wick-Quadrat $:\Phi^2:$ als lokale thermische Observable nutzen zu können, müssen wir zeigen, daß die Zustände ω_β Hadamard-Zustände sind (vgl. Gleichung (2.14)). Dies folgt aus einem Resultat von H. Sahlmann und R. Verch (s. [SV00]), das besagt, daß passive Zustände, also insbesondere KMS-Zustände, einer (lineare) Quantenfeldtheorie im Sinne von Abschnitt 2.2 über einer global hyperbolischen, stationären Raumzeit die ‘‘Mikrolokale-Spektrums-Bedingung’’ (s. Unterabschnitt 2.2.2) erfüllen.

Wir werden diesen Umstand direkt anhand der Berechnung der thermischen Funktion des Wick-Quadrates in den Zuständen ω_β einsehen. Dazu bemerken wir, daß die Hadamard-Parametrix (s. Definition 2.9) durch den Integralkern

$$H_0(x, y) = \frac{1}{4\pi^2(q_1(y-x) + 2i\varepsilon(q_1(y, e) - q_1(x, e)) + \varepsilon^2)} \quad (4.9)$$

gegeben ist ($e \in I_+(0, \mathbb{M})$ wie in 4.1), denn für den Minkowskiraum ist $V^0 = 1$ (s. Gleichung 1.10).

Zur Berechnung von $\omega_{\beta|2} - H_0$ führen wir zunächst eine orthonormale Basis in \mathbb{M} ein; mit zeitartigem Basisvektor $e = (|q_1(\beta)|)^{-\frac{1}{2}}\beta$; und verwenden Kugelkoordinaten⁹⁴ ($-\infty < t < \infty, 0 < r < \infty, 0 < \vartheta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$) in den (raumartigen) Hyperflächen orthogonal zu e . Außerdem genügt aufgrund der Translationsinvarianz der ω_β die Berechnung an $0 \in \mathbb{M}$:

$$G_{\pm|0}(t, r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\theta(\pm t)\delta_0(r^2 - t^2), \quad H_0(0, (t, r, \vartheta, \varphi)) = \frac{1}{4\pi^2(r^2 - (t + i\varepsilon)^2)}. \quad (4.10)$$

Dazu verwenden wir die bekannte Formel

$$\delta_0(g(x)) = \sum_{i \in I} \frac{\delta_0(x - x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (4.11)$$

wobei g eine differenzierbare Funktion (auf \mathbb{R}) mit einfachen, diskret-verteilten Nullstellen $\{x_i\}_{i \in I}$ und g' die Ableitung ist.

Somit berechnen wir für $\omega_\beta(:\Phi^2:_{\mathbb{M}})$ (vgl. [BS07], Gleichung (9)):

$$\begin{aligned} & \lim_{(t, r, \vartheta, \varphi) \rightarrow 0} \{\omega_\beta(0, (t, r, \vartheta, \varphi)) - H_0(0, (t, r, \vartheta, \varphi))\} \\ &= \lim_{(t, r, \vartheta, \varphi) \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \int e^{ikt} \frac{\sin(kr)}{r} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta k}} - \theta(k) \right) dk \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k}{e^{\beta k} - 1} dk = \frac{1}{12\beta^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

D.h. die thermischen Referenzzustände scharfer Temperatur sind Hadamard-Zustände und die thermische Funktion des Wick-Quadrates $:\Phi^2:$ ist

$$\beta \mapsto : \Phi^2 : (\beta) = \frac{1}{12\beta^2}. \quad (4.13)$$

Wir stellen fest, daß das Wick-Quadrat als lokale thermische Observable nach Gleichung (3.6) zur Bestimmung der lokalen (mittleren, bezüglich μ_p in Gleichung (3.6)) Temperatur eines Zustandes

⁹⁴Diese Koordinaten überdecken zwar nicht den ganzen Minkowskiraum (Koordinaten-Singularitäten bei $r = 0$ und $\vartheta \in \{0, \pi\}$), sind aber für die weitere Analyse ausreichend.

verwendet werden kann. Die Identifizierung des lokalen Ruhesystems ist jedoch, wie auch die Fixierung des lokalen Wahrscheinlichkeitsmaßes μ_p , durch Φ^2 allein nicht möglich. Verwenden wir zusätzlich lokal kovariante Verallgemeinerungen der “balancierten Ableitungen” (s. [Buc03] und [Mor03]) des Wick-Quadrates, können wir auch das lokale Ruhesystem ermitteln. Wir wollen aber hier nur das Wick-Quadrat verwenden, d.h. die Menge der lokalen thermischen Observablen ist $\mathcal{T} = \{\lambda : \Phi^2 : | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4.2.2 Das statische Einstein-Universum (ESU₄)

Das *statische Einstein-Universum* ESU₄ ist eine exakte Lösung der *Einstein’schen Feldgleichungen*

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T \quad (4.14)$$

mit der *kosmologischen Konstanten* Λ und dem Energie-Impuls-Tensor T der Materie und Felder. Es wurde ursprünglich von A. Einstein mit der Einführung der kosmologischen Konstanten als statische Lösung der, aus Gleichung (4.14) hervorgehenden, *Friedmann-Gleichungen* (s. [HE73], S.134ff)

$$\begin{aligned} 3a(t)^{-1} \frac{d^2 a}{dt^2}(t) &= -4\pi(\rho(t) + 3P(t)) + \Lambda, \\ 3a(t)^{-2} \left\{ \left(\frac{da}{dt}(t) \right)^2 + K \right\} &= 8\pi\rho(t) + \Lambda \end{aligned} \quad (4.15)$$

vorgeschlagen, wurde aber aufgrund der Beobachtung der kosmologischen Rotverschiebung und der Tatsache, daß es instabil gegen kleine Störungen der definierenden Parameter ist, als Modell unseres Universums verworfen. Dennoch ist die Verwendung in unserem Modell nicht abwegig, da ESU₄ eine allgemeinere Situation (Krümmung, geringere Anzahl an Symmetrien,...) als der Minkowskiraum beschreibt, aber uns vertraute kausale Konzepte bestehen bleiben.

Die Friedmann-Gleichungen modellieren die Dynamik einer räumlich homogenen, isotropen Raumzeit, deren Energie-Impuls-Tensor die Form für eine perfekte Flüssigkeit annimmt

$$T = (\rho + P)(U^{*g})^{\otimes 2} + Pg; \quad (4.16)$$

ρ und P sind Dichte und Druck der Flüssigkeit als Funktion der Koordinate t , welche die Flußlinien, d.h. die Integralkurven des Vektorfeldes U , parametrisiert, K ist die Schnittkrümmung der (räumlichen) Metrik $d\sigma^2$, a der (räumliche) Radius der Raumzeit. Die Metrik⁹⁵ wird durch

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = dr'^2 + f(r')^2(d\vartheta^2 + \sin(\vartheta)^2 d\varphi^2) \quad (4.17)$$

mit

$$f(r') = \begin{cases} \mathfrak{K} \sin\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) & , \text{ falls } K > 0 \\ r' & , \text{ falls } K = 0 \\ \mathfrak{K} \sinh\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) & , \text{ falls } K < 0 \end{cases}$$

modelliert. (r', ϑ, φ) sind sphärische Koordinaten in den (raumartigen) Hyperflächen orthogonal zu U , $\mathfrak{K} > 0$ ist ein Längenparameter, welcher der Skalierung der (räumlichen) Ausdehnung der Raumzeit dient und invers an die Krümmung $K = \frac{1}{\mathfrak{K}^2}$ gekoppelt ist. Allerdings werden wir im Folgenden K und \mathfrak{K} separat behandeln, was sich in Abschnitt 5 als nützlich erweist.

ESU₄ erhalten wir aus (4.15) für $\Lambda > 0$, $K > 0$, $a = \left(\frac{K}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\rho = \frac{K}{4\pi}S^{-2}$, $P = 0$; zur Vereinfachung

⁹⁵Für die Metrik g verwenden wir alternativ die gängige Notation ds^2 .

chung der weiteren Diskussion wählen wir $t' := a^{-1}t$ als neue “Zeit”-Koordinate:

$$\begin{aligned} \text{ESU}_4 &= \mathbb{R} \times S^3 & (4.18) \\ ds_{\text{ESU}_4}^2 &= \frac{K}{\Lambda} \left(-dt'^2 + dr'^2 + \mathfrak{K}^2 \sin\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right)^2 (d\vartheta^2 + \sin(\vartheta)^2 d\phi^2) \right). \end{aligned}$$

Für $\Lambda = K$ ist ESU_4 durch den “Zylinder”

$$\{(t, x, y, z, w) \in \mathbb{R}_1^5 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \mathfrak{K}^2\} \subseteq \mathbb{R}_1^5 \quad (4.19)$$

mit der induzierten Metrik gegeben, ist $\Lambda \neq K$ so ist ESU_4 eine konforme Transformation dieser Raumzeit mit konformem Faktor $\frac{K}{\Lambda}$. ESU_4 ist die einzige Lösung (s. [SKM⁺03], S.117) der Friedmann-Gleichungen (für eine perfekte Flüssigkeit) mit einer 7-dimensionalen Isometrie-gruppe. Die orientierungserhaltende, zeit-orientierungserhaltende Komponente⁹⁶ ist isomorph zu $\mathbb{R} \times \text{SO}(4)$, die Isotropiegruppe zu $\text{SO}(3)$.

Für die nach Abschnitt 4.2 angestrebte Analyse benötigen wir Kandidaten für Hadamard’sche KMS-Zustände über der Weyl-Algebra von ESU_4 . Diese finden wir durch Gleichung (4.8) bzw. (4.7), welche sich auch für ESU_4 sinnvoll interpretieren lassen. Als Zeittranslationen $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ verwenden wir die Translationen $s \mapsto s + t$ im ersten Faktor \mathbb{R} von ESU_4 (Darstellung (4.19)). Dies entspricht der Dynamik geodätische Beobachter, die sich entlang der Kurven ($r' = \text{const.}, \vartheta = \text{const.}, \varphi = \text{const.}$) bewegen.

Die Konstruktion des avancierten/retardierten Propagator des masselosen, konform kovarianten Klein-Gordon-Operators Υ und der zugehörigen Hadamard-Parametrix können wir durch die Beobachtung bewerkstelligen, daß der Minkowskiraum \mathbb{M} konform diffeomorph zu einer kausal-verträglichen⁹⁷ Teilmenge von ESU_4 und Υ konform kovariant und Huygens’sch ist. Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung von Lemma 2.7.

Lemma 4.2:

Ist \mathcal{M}^n eine Raumzeit⁹⁸, $\tilde{\mathcal{M}}$ mit $\tilde{g} := \Omega^2 \cdot g$ eine konforme Transformation und P_g ein konform kovarianter⁹⁹, normal hyperbolischer Differentialoperator über einem Vektorbündel \mathcal{E} über \mathcal{M} mit avanciertem/retardiertem Propagator $G_{\pm|p} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_p)$ für P_g^* , so ist ein avancierter/retardierter Propagator $\tilde{G}_{\pm|p}$ für $P_{\tilde{g}}^*$ über $\tilde{\mathcal{E}} := \iota^* \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ durch

$$\tilde{G}_{\pm|p} := \Omega^{1-\frac{n}{2}}(\iota(p)) \iota^*(\Omega^{1-\frac{n}{2}} G_{\pm|\iota(p)}), \quad p \in \tilde{\mathcal{M}} \quad (4.20)$$

gegeben. $\iota: \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ ist der, durch die Identität $\text{id}_{\mathcal{M}}$ induzierte, konforme Diffeomorphismus.

Beweis:

Die konforme Kovarianz von P_g bedeutet

$$P_{\tilde{g}}(s) = (\Omega^{-1-\frac{n}{2}} P_g(\Omega^{-1+\frac{n}{2}}(s \circ \iota^{-1}))) \circ \iota, \quad s \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{E}})$$

Die Volumenänderung die ι verursacht, misst die (relative) Jacobi-Determinante

$$\iota^* dV_g = J_\iota dV_{\tilde{g}}, \quad J_\iota = \iota^*(\Omega^{-n}).$$

Die Trägereigenschaften von $\tilde{G}_{\pm|p}$, $p \in \tilde{\mathcal{M}}$ sind identisch mit denen von $G_{\pm|p}$, $p \in \mathcal{M}$, da die kausalen Strukturen von \mathcal{M} und $\tilde{\mathcal{M}}$ übereinstimmen und Ω eine nirgends verschwindende, glatte Funktion ist. Es müssen nur die definierenden Differentialidentitäten überprüft werden.

⁹⁶Entspricht der eigentlichen, orthochronen Poincaré-Gruppe.

⁹⁷Diese Teilmenge ist sogar kausal konvex, d.h. alle kausalen Kurven in ESU_4 zwischen zwei Punkten dieser Menge liegen bereits in der Menge selbst.

⁹⁸Für dieses Lemma ist die Dimension von \mathcal{M} nicht notwendigerweise 4.

⁹⁹vgl. Proposition 1.23; P ist konform kovariant, falls $P_\Omega = P$ gilt.

Für $s \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{E}})$ gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad P_{\tilde{g}} \tilde{G}_{\pm|(\cdot)}(s) &= (\Omega^{-1-\frac{n}{2}} P_g (\Omega^{-1+\frac{n}{2}} \tilde{G}_{\pm|\iota^{-1}(\cdot)}(s))) \circ \iota \\ &= (\Omega^{-1-\frac{n}{2}} P_g G_{\pm|(\cdot)}(\Omega^{1-\frac{n}{2}} \cdot J_{\iota^{-1}} \cdot (s \circ \iota^{-1}))) \circ \iota \\ &= (s \circ \iota^{-1}) \circ \iota = s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \tilde{G}_{\pm|(\cdot)}(P_{\tilde{g}}(s)) &= (\Omega^{1-\frac{n}{2}} \circ \iota) \iota^* (\Omega^{1-\frac{n}{2}} G_{\pm|\iota(\cdot)})(P_{\tilde{g}}(s)) \\ &= (\Omega^{1-\frac{n}{2}} \circ \iota) G_{\pm|\iota(\cdot)}(\Omega^{1-\frac{n}{2}} \cdot J_{\iota^{-1}} \cdot (P_{\tilde{g}}(s)) \circ \iota^{-1}) \\ &= (\Omega^{1-\frac{n}{2}} \circ \iota) G_{\pm|\iota(\cdot)}(P_g(\Omega^{-1+\frac{n}{2}}(s \circ \iota^{-1}))) \\ &= (s \circ \iota^{-1}) \circ \iota = s. \end{aligned} \quad \square$$

Die konforme, kausal konvexe Einbettung des Minkowskiraumes in ESU_4 erhalten wir, indem wir neue Koordinaten $(t', r', \vartheta, \varphi)$ für M einführen (s. S38 und [HE73], S.121).

$$t = \frac{\mathfrak{K}}{2} \left\{ \tan \left(\frac{1}{2} \frac{t' + r'}{\mathfrak{K}} \right) + \tan \left(\frac{1}{2} \frac{t' - r'}{\mathfrak{K}} \right) \right\} = \frac{\mathfrak{K}}{2} \sin \left(\frac{t'}{\mathfrak{K}} \right) \sec \left(\frac{1}{2} \frac{t' + r'}{\mathfrak{K}} \right) \sec \left(\frac{1}{2} \frac{t' - r'}{\mathfrak{K}} \right) \quad (4.21)$$

$$r = \frac{\mathfrak{K}}{2} \left\{ \tan \left(\frac{1}{2} \frac{t' + r'}{\mathfrak{K}} \right) - \tan \left(\frac{1}{2} \frac{t' - r'}{\mathfrak{K}} \right) \right\} = \frac{\mathfrak{K}}{2} \sin \left(\frac{r'}{\mathfrak{K}} \right) \sec \left(\frac{1}{2} \frac{t' + r'}{\mathfrak{K}} \right) \sec \left(\frac{1}{2} \frac{t' - r'}{\mathfrak{K}} \right) \quad (4.22)$$

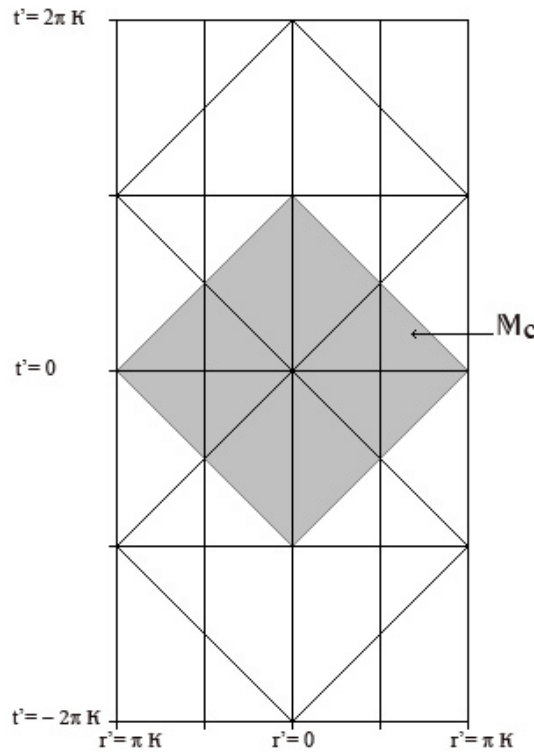


Abbildung 4.2 – Ein Teil des statische Einstein-Universums als Penrose-Diagramm, aufgeschnitten entlang $r' = \pi\mathfrak{K}$. 2 Dimensionen (ϑ, φ) sind unterdrückt, jeder Punkt ist eine Hälfte einer S^2 mit Flächeninhalt $4\pi\mathfrak{K}^2 \sin \left(\frac{r'}{\mathfrak{K}} \right)^2$. Die grau-schattierte Region ist das konforme Bild des Minkowskiraumes. Lichtartige Kurven sind 45° -Linien zur Senkrechten.

In diesen Koordinaten ist \mathbb{M} eine konforme Transformation ($ds_{\mathbb{M}}^2 = \Omega^2 \cdot ds_{\text{ESU}_4}^2$) der ‘‘diamantförmigen’’ Region (s. Abbildung 4.2)

$$\mathbb{M}_c := \{(t', r', \vartheta, \varphi) \mid -\pi\mathfrak{K} < t' \pm r' < \pi\mathfrak{K}, 0 < r' < \pi\mathfrak{K}, 0 < \vartheta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \subseteq \text{ESU}_4 \quad (4.23)$$

mit der Metrik

$$ds_{\mathbb{M}}^2 = \frac{1}{4} \sec\left(\frac{1}{2} \frac{t' + r'}{\mathfrak{K}}\right)^2 \sec\left(\frac{1}{2} \frac{t' - r'}{\mathfrak{K}}\right)^2 \{-dt'^2 + dr'^2 + \mathfrak{K}^2 \sin\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right)^2 (d\vartheta^2 + \sin(\vartheta)^2 d\varphi^2)\}. \quad (4.24)$$

Der konforme Faktor Ω lässt sich aus Gleichung (4.24) ablesen:

$$\Omega(t', r', \vartheta, \varphi) = \left(\frac{K}{\Lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \sec\left(\frac{1}{2} \frac{t' + r'}{\mathfrak{K}}\right) \sec\left(\frac{1}{2} \frac{t' - r'}{\mathfrak{K}}\right). \quad (4.25)$$

Verwenden wir Lemma 4.2 und Gleichung (4.10), so können wir den avancierte/retardierten Propagator $G_{\pm|0}^{\mathbb{M}_c}$ an $(t' = 0, r' = 0, \vartheta = 0, \varphi = 0)^{100}$ für Υ auf der Teilmenge $\mathbb{M}_c \subseteq \text{ESU}_4$ (4.23) berechnen. Wegen der globalen Hyperbolizität von ESU_4 (Lemma 1.17 und (4.18)), Theorem 1.19 und der kausalen Verträglichkeit von \mathbb{M}_c stimmt dieser mit der Einschränkung des avancierten/retardierten Propagators $G_{\pm|0}^{\text{ESU}_4}$ auf ESU_4 überein.

$$\begin{aligned} G_{\pm|0}^{\mathbb{M}_c}(t', r', \vartheta, \varphi) &= \Omega(0)\Omega(t', r', \vartheta, \varphi) \frac{1}{2\pi} \theta\left(\pm \frac{\mathfrak{K}}{2} \sin\left(\frac{t'}{\mathfrak{K}}\right) \sec\left(\frac{1}{2} \frac{t' + r'}{\mathfrak{K}}\right) \sec\left(\frac{1}{2} \frac{t' - r'}{\mathfrak{K}}\right)\right) \\ &\quad \cdot \delta_0\left(\frac{\mathfrak{K}^2}{4} \sec\left(\frac{1}{2} \frac{t' + r'}{\mathfrak{K}}\right)^2 \sec\left(\frac{1}{2} \frac{t' - r'}{\mathfrak{K}}\right)^2 \left(\cos\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right)^2 - \cos\left(\frac{t'}{\mathfrak{K}}\right)^2\right)\right) \\ &\stackrel{\text{Gl. (4.11)}}{=} \frac{1}{4\pi\mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \theta\left(\pm \sin\left(\frac{t'}{\mathfrak{K}}\right)\right) \delta_0\left(\cos\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) - \cos\left(\frac{t'}{\mathfrak{K}}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aus Abbildung 4.2 erkennen wir, daß wir ‘‘diamantförmige’’ Regionen D_i , $i \in I$, wie \mathbb{M}_c , verwenden können um ESU_4 zu überdecken¹⁰¹. Da die Einschränkung des avancierten/retardierten Propagators $G_{\pm|0}^{\text{ESU}_4}$ auf jeder dieser Umgebungen in obiger Weise konstruiert werden kann, können wir eine solche Überdeckung verwenden, um einen globalen Ausdruck für $G_{\pm|0}^{\text{ESU}_4}$ zu erhalten. Dabei ist zu beachten, daß wir auf allen Regionen D_i , $i \in I$, außer \mathbb{M}_c , den Pullback des kausalen(!) Propagators $\Delta_{|0}^{\mathbb{M}}$ für die Fortsetzung verwenden müssen, damit keine zusätzlichen δ -Quellterme entstehen¹⁰².

Führen wir dies durch, erhalten wir¹⁰³:

$$G_{\pm|0}^{\text{ESU}_4}(t', r', \vartheta, \varphi) = \frac{\pm 1}{4\pi\mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \theta\left(\pm \frac{t'}{\mathfrak{K}}\right) \text{sgn}\left(\sin\left(\frac{t'}{\mathfrak{K}}\right)\right) \delta_0\left(\cos\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) - \cos\left(\frac{t'}{\mathfrak{K}}\right)\right) \quad (4.27)$$

Der Träger von $G_{\pm|0}^{\text{ESU}_4}$ ist in Abbildung 4.2 durch den oberen/unteren ‘‘Diamanten’’ mit Apex bei $t' = 0, r' = 0$ angedeutet.

Aufgrund der Transitivität der Isometriegruppe $R \times \text{SO}(4)$ und Lemma 2.7 können wir den avancierten/retardierten Propagator $G_{\pm|p}^{\text{ESU}_4}$ für jeden Punkt $p \in \text{ESU}_4$ berechnen.

¹⁰⁰Streng genommen sind die gewählten Koordinaten an diesem Punkt nicht zulässig, da die Metrik dort singulär ist. Dies ist aber an dieser Stelle irrelevant.

¹⁰¹Dies kann beispielsweise folgendermaßen geschehen: Man nutzt die transitive Isometriegruppe von ESU_4 um $(0, 0, 0, 0)$ auf einen beliebigen Punkt $(r', t', \vartheta, \varphi)$ abzubilden, und betrachtet das Bild von \mathbb{M}_c unter dieser Abbildung.

¹⁰²Beachte: Der kausale Propagator löst die homogene Differentialgleichung.

¹⁰³In [AIS78] wird der kausale Propagator Δ angegeben.

Dazu verwenden wir die Darstellung von ESU_4 durch Gleichung (4.19) mit

$$\begin{aligned} t &= t', \quad x = \mathfrak{K} \cos\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right), \quad y = \mathfrak{K} \sin\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \cos \vartheta \\ z &= \mathfrak{K} \sin\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \sin \vartheta \cos(\varphi), \quad w = \mathfrak{K} \sin\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \sin \vartheta \sin(\varphi) \\ &-\infty < t' < \infty, \quad 0 < r' < \pi \mathfrak{K}, \quad 0 < \vartheta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (4.28)$$

Für den avancierten/retardierten Propagator erhalten wir

$$\begin{aligned} G_{\pm|p}^{\text{ESU}_4}(q) &= G_{\pm|0}^{\text{ESU}_4}(\phi_p(q)) \\ &= \frac{\pm 1}{4\pi \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \theta\left(\pm \frac{t(\phi_p(q))}{\mathfrak{K}}\right) \text{sgn}\left(\sin\left(\frac{t(\phi_p(q))}{\mathfrak{K}}\right)\right) \delta_0\left(\frac{x(\phi_p(q))}{\mathfrak{K}} - \cos\left(\frac{t(\phi_p(q))}{\mathfrak{K}}\right)\right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

wobei ϕ_p eine Isometrie mit $\phi_p(p) \doteq 0^{104}$ ist; $p, q \in \text{ESU}_4$.

Eine mögliche Wahl für ϕ_p ist (in dieser Darstellung)

$$\phi_p = \phi_{-t'_p} \times \left(R_{-r'_p} \circ R_{-\vartheta_p} \circ R_{-\varphi_p}\right) \quad (4.30)$$

mit der Zeittranslation $\phi_t, t \in \mathbb{R}$ und den Rotationen

$$\begin{aligned} R_{-r'_p} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) & \sin\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) & \cos\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_{-\vartheta_p} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\vartheta_p) & \sin(\vartheta_p) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\vartheta_p) & \cos(\vartheta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_{-\varphi_p} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi_p) & \sin(\varphi_p) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi_p) & \cos(\varphi_p) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

s.d. Gleichung (4.29) zu

$$\begin{aligned} G_{\pm|p}^{\text{ESU}_4}(q) &= \frac{\pm 1}{4\pi \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \theta\left(\pm \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}\right) \text{sgn}\left(\sin\left(\frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right) \\ &\cdot \delta_0\left(\cos\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right) \cos\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) + \sin\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right) \sin\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right. \\ &\quad \left.(\cos(\vartheta_q) \cos(\vartheta_p) + \sin(\vartheta_q) \sin(\vartheta_p) \cos(\varphi_q - \varphi_p)) - \cos\left(\frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

wird. Interessanterweise induziert die räumliche ‘‘Periodizität’’ (S^3 ist geschlossen) eine Periodizität des kausalen Propagators $\Delta_{|p}^{\text{ESU}_4}$ in der ‘‘Zeit’’ t' (für den kausalen Propagator entfällt die Heaviside-Funktion θ). Dieser Umstand lässt sich auch in Abbildung 4.2 erkennen.

Die Identität (2.3) folgt bereits aus der globalen Hyperbolizität von ESU_4 (s. Fußnote zu (2.3),

¹⁰⁴Der Punkt 0 in den Koordinaten $(t', r', \vartheta, \varphi)$ entspricht in der Darstellung (4.19) dem Punkt $(0, \mathfrak{K}, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}_1^5$.

S.18), kann aber ebenso aus der Eigenschaft $G_{\pm|p}^{\text{ESU}_4}(q) = G_{\mp|q}^{\text{ESU}_4}(p)$ abgeleitet werden. Die Hadamard-Parametrix für den masselosen, konform kovarianten Klein-Gordon-Operator Υ auf ESU_4 lässt sich mit Gleichung (1.10) und Proposition B.34 (für S_0^3) berechnen. Dazu ist zu beachten, daß die Geodäten in einem kartesischen Produkt Semi-Riemann'scher Mannigfaltigkeiten durch Geodäten in den jeweiligen Faktoren gegeben sind¹⁰⁵, d.h. das geodätische Abstandsquadrat zerlegt sich additiv über dem kartesischen Produkt.

$$H_0(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Lambda}{K} \frac{V^0(p, q)}{\mathfrak{K}^2 \arccos\left(\frac{q_0(v_p, v_q)}{\mathfrak{K}^2}\right)^2 - ((t'_q - t'_p) + i\varepsilon)^2} \quad (4.32)$$

$$\text{mit } \Gamma_{\text{ESU}_4}(p, q) = -(t(q) - t(p))^2 + \mathfrak{K}^2 \arccos\left(\frac{q_0(v_p, v_q)}{\mathfrak{K}^2}\right)^2$$

mit $q_0(v_p, v_q) = x(p)x(q) + y(p)y(q) + z(p)z(q) + w(p)w(q)$. Der Ausdruck für Γ_{ESU_4} zeigt, daß der Lichtkegel $\Gamma_{\text{ESU}_4}(p, q) = 0$ an $p \doteq 0$ durch $\cos\left(\frac{t(q)}{\mathfrak{K}}\right) = \frac{x(q)}{\mathfrak{K}}$ bestimmt ist. Ein Vergleich mit (4.27) unterstreicht, warum das betrachtete Klein-Gordon-Feld als "masselos" bezeichnet werden sollte. Die genaue Form von V^0 ist für Punkte p, q mit $\vartheta_p = \vartheta_q$, $\varphi_p = \varphi_q$ ¹⁰⁶:

$$V^0(p, q) = \frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \cdot \text{csc}\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right). \quad (4.33)$$

Um die Berechnung der 2-Punkt-Funktionen (4.8) zu vereinfachen, bietet es sich an die skalierte Fouriertransformation $\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}$ zu verwenden, d.h. (4.8) wird zu¹⁰⁷:

$$\omega_2(p, q) = \frac{i}{2\pi\mathfrak{K}} \int dk \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}k}} \int dt e^{-ik\frac{t}{\mathfrak{K}}} \Delta_{|p}^{\text{ESU}_4}(\phi_t(q)). \quad (4.34)$$

Da wir letztlich an dem Grenzwert

$$\lim_{q \rightarrow p} (\omega_2 - H_0)(p, q) = \omega(: \Phi^2 :_{\text{ESU}_4}(p)) \quad (4.35)$$

interessiert sind, setzen wir im Folgenden $\vartheta_p = \vartheta_q$, $\varphi_p = \varphi_q$. Dieses Vorgehen ist unproblematisch wegen Lemma 2.7, und weil die Zeittranslationen ϕ_t , $t \in \mathbb{R}$ mit den Abbildungen ϕ_p , $p \in \text{ESU}_4$ (s. (4.30)) kommutieren. Wir stellen fest, daß (4.34) zeigt, daß ω_2 invariant unter $\mathbb{R} \times \text{SO}(4)$ ist. Prinzipiell könnten wir aus diesem Grund auch $p \doteq 0$ und $t_q = 0$, $\vartheta_q = 0$, $\varphi_q = 0$ setzen, allerdings würde dies die nachfolgende Rechnung nicht vereinfachen. Wesentlich ist, daß wir $r'_p \neq r'_q$ annehmen.

Wir sehen anhand dieser Überlegung, daß der Wert von ω auf dem Wick-Quadrat $: \Phi^2 :_{\text{ESU}_4}$ nicht von p abhängt.

Als weiteres Hilfsmittel benötigen wir die *Poisson'sche Summenformel* (s. [Hör83], Abschnitt 7.2 (S.177ff))

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i l k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_0(k - l) \quad (4.36)$$

¹⁰⁵Dies ist eine direkte Folgerung aus Definition B.4 und Definition B.16.

¹⁰⁶Zur Berechnung von Gleichung (4.12) für die 2-Punkt-Funktionen (4.8) auf ESU_4 genügt es, Punkte dieser Form zu betrachten, da die Zeittranslationen $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ mit den Abbildungen ϕ_p (Gleichung (4.30)) kommutieren. Der allgemeine Ausdruck für V^0 ist sehr unhandlich und wird daher nicht angegeben.

¹⁰⁷Verwenden wir $\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}$ in Definition 3.3 so erfüllen die Fouriertransformierten von $F_{A,B}|_{\mathbb{R}}$ und $G_{A,B}$ die Relation $\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}[F_{A,B}|_{\mathbb{R}}] = e^{\frac{\beta}{\mathfrak{K}}(\cdot)} \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}[G_{A,B}]$.

Jetzt können wir (4.34) berechnen.

$$\begin{aligned}
\omega_2(p, q) &= \frac{i}{8\pi^2 \mathfrak{K}^3} \frac{\Lambda}{K} \int \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}k}} \int e^{-ik \frac{t}{\mathfrak{K}}} \operatorname{sgn} \left(\pm \frac{(t'_q - t'_p) + t}{\mathfrak{K}} \right) \\
&\quad \cdot \delta_0 \left(\cos \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right) - \cos \left(\frac{(t'_q - t'_p) + t}{\mathfrak{K}} \right) \right) dt dk \quad (4.37) \\
\stackrel{\text{Gl. (4.11)}}{=} &\frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \int \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}k}} \frac{\sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{\sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} e^{ik \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i l k} dk \\
\stackrel{\text{Gl. (4.36)}}{=} &\frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \int \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}k}} \frac{\sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{\sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} e^{ik \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_0(k - l) dk \\
\stackrel{0 < k_0 < 1}{=} &\frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \int_{k_0}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}k}} \frac{\sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{\sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} e^{ik \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_0(k - l) dk \\
&+ \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \int_{-\infty}^{k_0} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}k}} \frac{\sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{\sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} e^{ik \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_0(k - l) dk
\end{aligned}$$

Der zweite Term in der letzten Zeile von Gleichung (4.37) lässt sich direkt bestimmen¹⁰⁸, den ersten Term fassen wir als inverse (skalierte) Fouriertransformation der Distribution

$$\mathfrak{D}(k) := \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}k}} \sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right) \sum_{l \in \mathbb{N}} \delta_0(k - l) & k \geq k_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.38)$$

auf. Um $\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\mathfrak{D}]$ in eine geeignetere Form zu bringen, verwenden wir die Identität (s. z.B [Fri75], Abschnitt 2.5 (S.43ff))

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon \cdot \mathfrak{D}] = \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon] * \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\mathfrak{D}] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0 * \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\mathfrak{D}] = \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\mathfrak{D}]. \quad (4.39)$$

Dabei ist der Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ in der Topologie der *temperierten Distributionen* $\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ zu verstehen, d.h. in der Schwach-* -Topologie bezüglich der *schnell fallenden Funktionen* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. * ist die Faltung und $\{\delta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ ein Netz von schnellen fallenden Funktionen, s.d. $\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon]$ gegen die Distribution δ_0 konvergiert.

Eine passende Wahl für δ_ε ist

$$\delta_\varepsilon(k) := \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}|k|} & k \notin (-k_0, k_0) \\ \text{glatte Fortsetzung von } e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}|k|}, \text{ mit Werten in } (e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}|k_0|}, 1) & k \in (-k_0, k_0) \end{cases}. \quad (4.40)$$

Eine solche Familie von Funktionen kann unter Verwendung einer ‘‘Hut’’-Funktion im Intervall $(-k_0, k_0)$ konstruiert werden. Es gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon = 1.$$

¹⁰⁸Beachte: Der Beitrag für $l = 0$ ist wohldefiniert, da $\lim_{l \rightarrow 0} \sin \left(\frac{l(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}l}}$ für $r'_p \neq r'_q$ existiert.

Für die inverse (skalierte) Fouriertransformation finden wir:

$$\begin{aligned}
2\pi\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon](t) &= \int_{-\infty}^{-k_0} e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}|k|} e^{it\frac{k}{\mathfrak{K}}} dk + \int_{-k_0}^{k_0} \delta_\varepsilon(k) e^{it\frac{k}{\mathfrak{K}}} dk + \int_{k_0}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}|k|} e^{it\frac{k}{\mathfrak{K}}} dk \\
&= \frac{\mathfrak{K}}{\varepsilon + it} e^{-k_0 \frac{\varepsilon + it}{\mathfrak{K}}} + \int_{-k_0}^{k_0} \delta_\varepsilon(k) e^{it\frac{k}{\mathfrak{K}}} dk + \frac{\mathfrak{K}}{\varepsilon - it} e^{-k_0 \frac{\varepsilon - it}{\mathfrak{K}}} \\
&= \frac{\mathfrak{K}}{\varepsilon^2 + t^2} \left(2\varepsilon \cos\left(k_0 \frac{t}{\mathfrak{K}}\right) e^{-k_0 \frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}} - 2t \sin\left(\frac{t}{\mathfrak{K}}\right) e^{-k_0 \frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}} \right) + \int_{-k_0}^{k_0} \delta_\varepsilon(k) e^{it\frac{k}{\mathfrak{K}}} dk.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Wenden wir den Satz über die dominierte Konvergenz auf das verbleibende Integral an, können wir den Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon](t)$ analysieren:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon](t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\varepsilon^2 + t^2} \varepsilon \cos\left(k_0 \frac{t}{\mathfrak{K}}\right) e^{-k_0 \frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}} - \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{t}{\mathfrak{K}}\right) \left(\frac{t}{\varepsilon^2 + t^2} e^{-k_0 \frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}} - \frac{1}{t} \right)}_{=0} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\varepsilon^2 + t^2} \varepsilon \cos\left(k_0 \frac{t}{\mathfrak{K}}\right) e^{-k_0 \frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon](t)$ verhält sich nach (4.42) wie das bekannte δ_0 -Netz $\{\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2}\}_{\varepsilon > 0}$, denn $m(t) := \cos\left(k_0 \frac{(\cdot)}{\mathfrak{K}}\right)$ ist ein Multiplikator in $\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ mit $m(0) = 1$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-k_0 \frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}} = 1$.

Für den ersten Term in (4.37) erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon \cdot \mathfrak{D}](t'_q - t'_p) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \int_{k_0}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}k}} \frac{\sin\left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}}\right)}{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}k} e^{ik\frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \delta_0(k - l) dk \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}l}} \sin\left(\frac{l(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}}\right) e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}l} e^{il\frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \\
&\stackrel{\text{geom. Rh.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}nl} e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}l} e^{il\frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}l} - e^{-i\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}l} \right) \\
&\stackrel{\text{abs. Konv.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l \in \mathbb{N}} e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}}nl} e^{-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}l} e^{il\frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}l} - e^{-i\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}l} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{8\pi^2 i \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \\
&\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\mathfrak{K}}(\beta n + \varepsilon + (t'_q - t'_p) - i(r'_q - r'_p))}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\mathfrak{K}}(\beta n + \varepsilon + (t'_q - t'_p) + i(r'_q - r'_p))}} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)}{\cosh\left(\frac{\beta n + \varepsilon + (t'_q - t'_p)}{\mathfrak{K}}\right) - \cos\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \\
&\stackrel{\text{glm. Konv.}}{=} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \\
&\quad \cdot \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)}{\cosh\left(\frac{\varepsilon + (t'_q - t'_p)}{\mathfrak{K}}\right) - \cos\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)}{\cosh\left(\frac{\beta n + (t'_q - t'_p)}{\mathfrak{K}}\right) - \cos\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} \right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Die letzte Zeile zeigt uns, daß sich auf diese Weise der divergente Anteil des Netzes $\{\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}^*[\delta_\varepsilon \cdot \mathfrak{D}]\}_{\varepsilon > 0}$ in einem separaten Term (1. Term) isolieren lässt, d.h. zur Bestimmung von (4.35) ist lediglich der Grenzwert (vgl. Gleichungen (4.32) und (4.33)); $t'_p = t'_q$)

$$\lim_{r'_q \rightarrow r'_p} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Lambda}{K} \csc\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right) \left(\frac{1}{2\mathfrak{K}^2} \frac{\sin\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)}{\cosh\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}\right) - \cos\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} - \frac{\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}}{(r'_q - r'_p)^2 + \varepsilon^2} \right) \quad (4.44)$$

zu ermitteln. Dazu verwenden wir die bekannten Reihendarstellungen des Kosinus Hyperbolicus, des Kosinus und des Sinus, und finden den Wert:

$$-\frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{12} \quad (4.45)$$

d.h. für (4.35) ergibt sich mit (4.37), 2. Term, letzte Zeile und (4.43), 2. Term, letzte Zeile¹⁰⁹:

$$\omega(\cdot; \Phi^2 : \text{ESU}_4(p)) = \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n}{e^{\frac{\beta}{\mathfrak{K}} n} - 1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\beta}{\mathfrak{K}} n\right) - 1} - \frac{1}{12} \right) + c \cdot \underbrace{S_{\text{ESU}_4}}_{=6 \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\mathfrak{K}^2}} \quad (4.46)$$

Diese Gleichung sagt uns, daß die 2-Punkt-Funktionen (4.34), abgesehen von der Positivitätsbedingung, geeignet sind, Hadamard'sche KMS-Zustände auf der Weyl-Algebra des masselosen, konform kovarianten Klein-Gordon-Feldes auf ESU_4 zu definieren. Die Positivität des durch ω_2 definierten Funktionals wollen wir an dieser Stelle nicht weiter untersuchen, verweisen aber auf ein Resultat (erwähnt in [Kay06], S.6), das besagt, daß die KMS-Zustände für unseren Fall¹¹⁰, bei gegebener Dynamik, quasifrei, Hadamard'sch und eindeutig für $\beta > 0$ sind.

D.h. bis auf einen vernachlässigten Beitrag $\frac{1}{2\pi\mathfrak{K}} c(p, q)$ (4.6) haben wir die 2-Punkt-Funktion der KMS-Zustände zu der, durch $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ gegebenen, Dynamik eindeutig bestimmt. Desweiteren muss $c(p, q)$ hinreichend regulär sein, da wir sonst nach obiger Analyse keinen Hadamard-Zustand erhalten, und Bemerkung 3.2 impliziert, daß $c(p, q)$ entlang der Trajektorien der Zeittranslationen konstant ist. Verlangen wir weitere Invarianzeigenschaften, wie z.B. die Invarianz unter der gesamten orientierungserhaltenden, zeit-orientierungserhaltenden Isometriegruppe $\mathbb{R} \times \text{SO}(4)$, so reduzieren sich die Freiheitsgrade weiter.

Eine Interpretation und Diskussion von (4.46) im Sinne des lokalen Gleichgewichts schließen wir in Abschnitt 5 an. Wir werden dort auch noch einmal auf die mögliche Modifikation von (4.46) durch einen Beitrag $\frac{1}{2\pi\mathfrak{K}} c(p, p)$ zu sprechen kommen.

Ein weiterer Freiheitsgrad, der in der Formel für die 2-Punkt-Funktion (4.34) auftaucht, ist die 1-Parameter-Gruppe $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Es stellt sich daher die Frage, inwiefern unter Verwendung anderer 1-Parameter-Gruppe weitere KMS-Zustände definiert werden können.

Eine erste Feststellung in dieser Richtung ist, daß eine 1-Parameter-Gruppe durch einen (stetigen) Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \text{I}(\text{ESU}_4) \quad (4.47)$$

gegeben ist, wobei $\text{I}(\text{ESU}_4)$ die Isometriegruppe von ESU_4 ist. Nach Proposition A.83 ist ϕ von der Form¹¹¹

$$\phi_t = \exp(tX) \quad (4.48)$$

¹⁰⁹In den verbleibende Ausdrücken kann der Grenzwert $q \rightarrow p$ mit der Summation vertauscht werden, da die Summen gleichmäßig konvergieren ($\beta, \mathfrak{K} > 0$).

¹¹⁰D.h. raumartige Schnitte sind kompakt und das Potential $\frac{1}{6}S$ in $\Upsilon = \square + \frac{1}{6}S$ ist überall positiv.

¹¹¹ \exp ist die Exponentialabbildung von $\text{I}(\text{ESU}_4)$.

für ein Element X der Lie-Algebra $\text{Lie}(\text{I}(\text{ESU}_4)) =: \mathfrak{i}(\text{ESU}_4)$. Da die Zusammenhangskomponente der Eins in $\text{I}(\text{ESU}_4)$ durch $\mathbb{R} \times \text{SO}(4)$ gegeben ist, finden wir für die Lie-Algebra (s. [O'N83], Abschnitt 9 (S. 233))

$$\mathfrak{i}(\text{ESU}_4) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(4) \text{ mit } \mathfrak{so}(4) \cong \{L \in \text{M}_4(\mathbb{R}) \mid L = -L^t\}. \quad (4.49)$$

Die Standard-Basis für $\mathfrak{so}(4)$ in der Darstellung (4.19) bezeichnen wir mit $\{X_i\}_{i=1,\dots,6}$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ X_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weil wir für unsere Analyse eine 1-Parameter-Gruppe zeitartiger(!) Isometrien benötigen, ist das Element $X \in \mathfrak{i}(\text{ESU}_4)$ in (4.48), bis auf lineare Reparametrisierung, von der Form $H + \frac{\lambda}{\mathfrak{K}}L$, $0 \neq H \in \mathbb{R}$, $L \in \mathfrak{so}(4)$ für einen zu bestimmenden Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Dies ist bedingt durch den Umstand, daß die Elemente $L \in \mathfrak{so}(4)$ Rotationen der S^3 in (4.18) induzieren, d.h. $\exp(tL)$ ist eine 1-Parameter-Gruppe raumartiger(!) Isometrien.

Im Folgenden werden wir die 2-Punkt-Funktion (4.34) am Beispiel $H = 1$, $L = X_6$ (Rotation in der (z, w) -Ebene) näher betrachten, wodurch wir einen qualitativen Eindruck bekommen, weshalb in dieser Situation eine Berechnung analog zu (4.37) schwierig ist.

Dazu führen wir, an die Struktur der Rotationen angepasste, Koordinaten, die *Hopf-Koordinaten*, in (4.19) ein:

$$\begin{aligned} t &= t', \quad x = \mathfrak{K} \cos\left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}}\right) \cos(\xi_1), \quad y = \mathfrak{K} \cos\left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}}\right) \sin(\xi_1) \\ z &= \mathfrak{K} \sin\left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}}\right) \cos(\xi_2), \quad w = \mathfrak{K} \sin\left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}}\right) \sin(\xi_2) \\ 0 &< \eta < \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}, \quad 0 \leq \xi_1, \xi_2 < 2\pi \end{aligned} \quad (4.50)$$

Diese Koordinaten blättern die S^3 in 2-Tori entlang η , die für $\eta = 0, \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}$ in Kreise entarten. Die durch X_1 und X_6 induzierten Rotationen wirken in diesen Koordinaten als Rotationen in den 2-Tori entlang ξ_1 bzw. ξ_2 . Die Metrik hat in Hopf-Koordinaten die Form:

$$ds_{\text{ESU}_4}^2 = \frac{K}{\Lambda} \left(dt'^2 + d\eta^2 + \mathfrak{K}^2 \left(\cos\left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}}\right)^2 d\xi_1^2 + \sin\left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}}\right)^2 d\xi_2^2 \right) \right). \quad (4.51)$$

Benutzen wir (4.29) und, daß der Punkt $(0, \mathfrak{K}, 0, 0, 0)$ in diesen Koordinaten durch $(t' = 0, \eta = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0)$ gegeben ist, erhalten wir für den avancierten/retardierten Propagator

$$\begin{aligned} G_{\pm|p}^{\text{ESU}_4}(q) &= G_{\pm|0}^{\text{ESU}_4}(\phi_p(q)) \\ &= \frac{\pm 1}{4\pi\mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \theta \left(\pm \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}} \right) \text{sgn} \left(\sin \left(\frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}} \right) \right) \\ &\quad \cdot \delta_0 \left(\cos\left(\frac{\eta_q}{\mathfrak{K}}\right) \cos\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) \cos(\xi_{1,q} - \xi_{1,p}) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\eta_q}{\mathfrak{K}}\right) \sin\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) \cos(\xi_{2,q} - \xi_{2,p}) - \cos\left(\frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

mit $\phi_p(p) \doteq 0$. Eine mögliche Wahl für ϕ_p ist:

$$\phi_p = \exp(-t'_p H) \exp\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}} X_2\right) \exp(\xi_{1,p} X_1) \exp(\xi_{2,p} X_6). \quad (4.53)$$

Ist $p \in \text{ESU}_4$ ein beliebiger Punkt, so ist die Wirkung von ϕ_t in Hopf-Koordinaten:

$$\begin{aligned} p_\lambda(t) = \exp\left(t\left(H + \frac{\lambda}{\mathfrak{K}} X_6\right)\right)p &= \begin{pmatrix} t'_p + t \\ \mathfrak{K} \cos\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) \cos(\xi_{1,p}) \\ \mathfrak{K} \cos\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) \sin(\xi_{1,p}) \\ \mathfrak{K} \sin\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) \cos\left(\xi_{2,p} - \frac{\lambda}{\mathfrak{K}} t\right) \\ \mathfrak{K} \sin\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) \sin\left(\xi_{2,p} - \frac{\lambda}{\mathfrak{K}} t\right) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow g_{\text{ESU}_4}(p'_\lambda(t), p'_\lambda(t)) &= \frac{K}{\Lambda} g_1(p'_\lambda(t), p'_\lambda(t)) = \frac{K}{\Lambda} (-1 + \sin\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right)^2 \lambda^2), \end{aligned} \quad (4.54)$$

d.h. die Trajektorien von ϕ_t , $t \in \mathbb{R}$ sind genau dann überall zeitartig, wenn $0 \leq \lambda^2 < 1$ gilt. Andererseits sehen wir, daß die Rotationsgeschwindigkeit nicht homogen über die S^3 verteilt ist und ihr Maximum für $\eta_p \rightarrow \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}$ erreicht, d.h. es ist zu erwarten, daß der Wert für $\omega(\cdot : \Phi^2 : (p))$ in diesem Fall von p abhängt. $\eta_p \rightarrow \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}$ entspricht dem Großkreis in S^3 , der durch die Rotationen $\exp(t\frac{\lambda}{\mathfrak{K}}X_6)$, $t \in \mathbb{R}$ definiert wird. Eine solche Positionsabhängigkeit ist für generische stationäre Raumzeiten aufgrund fehlender weiterer Symmetrien und des Umstandes, daß die “Zeittranslationen” nicht notwendigerweise mit anderen Symmetrien kommutieren, zu erwarten. Für die *de Sitter-Raumzeit* wurde dies in [BS07] festgestellt. Wie zuvor können wir uns bei der Berechnung von ω_2 auf Punkte p, q mit $\xi_{1,p} = \xi_{1,q}$, $\xi_{2,p} = \xi_{2,q}$ beschränken, da $\exp(\xi_{1,p}X_1)$ und $\exp(\xi_{2,p}X_6)$ mit $\phi_t = \exp(t(H + \frac{\lambda}{\mathfrak{K}}X_6))$, $t \in \mathbb{R}$ kommutieren. Somit reduziert sich der erste Schritt der Berechnung von ω_2 (vgl. (4.37) und (4.11)) auf die Bestimmung der Nullstellen von

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos\left(\frac{\eta_q}{\mathfrak{K}}\right) \cos\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) + \sin\left(\frac{\eta_q}{\mathfrak{K}}\right) \sin\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) \cos\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{K}} t\right) - \cos\left(\frac{(t'_q - t'_p) + t}{\mathfrak{K}}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\eta_q - \eta_p}{\mathfrak{K}}\right) - \cos\left(\frac{(t'_q - t'_p) + t}{\mathfrak{K}}\right) - 2 \sin\left(\frac{\lambda}{2\mathfrak{K}} t\right) \sin\left(\frac{\eta_q}{\mathfrak{K}}\right) \sin\left(\frac{\eta_p}{\mathfrak{K}}\right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Für $\lambda = 0$ reduziert sich f auf den Fall (4.37) und ϕ_t wird zur Zeittranslation $\exp(tH)$. Ist $\lambda \neq 0$ so besteht das Problem darin, daß die Periodizität der Nullstellen empfindlich von dem gewählten Wert für λ abhängt (2π -periodisch für $\lambda = 0$) bzw. für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine solche nicht vorliegt, wodurch eine analytische Parametrisierung der Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid f = 0\}$ schwierig ist.

Bildlich gesprochen beschreibt der Parameter λ die Frequenz der Schnitte der Trajektorie $\phi_p(q_\lambda(t))$, $t \in \mathbb{R}$ mit dem Lichtkegel an $(0, \mathfrak{K}, 0, 0, 0)$.

Dieses Problem taucht für alle 1-Parameter-Gruppen $\{\exp(t(H + \frac{\lambda}{\mathfrak{K}}X_i))\}_{t \in \mathbb{R}}$, $i = 1, \dots, 6$ auf¹¹², daher erwarten wir, daß diese Situation generisch für 1-Parameter-Gruppen der Form

$$\left\{ \exp\left(t\left(H + \frac{\lambda}{\mathfrak{K}}L\right)\right) \right\}_{t \in \mathbb{R}}, \quad 0 \neq L \in \mathfrak{so}(4)$$

ist.

4.2.3 Die Anti-de Sitter-Raumzeit (adS_4)

Die Anti-de Sitter-Raumzeit adS_4 ist ein Raum konstanter, negativer Krümmung (s. Definition B.15), d.h. der Krümmungstensor ist durch

$$R_{|p}(v, w)u := K(g_{|p}(u, v)w - g_{|p}(u, w)v) \quad \forall v, w, u \in T_p(\text{adS}_4), \quad \text{mit } K < 0 \quad (4.56)$$

¹¹²Um dies zu sehen, müssen lediglich die Koordinaten (4.50) an die jeweilige Rotation angepasst werden.

gegeben. Kontrahieren wir Gleichung (4.56), finden wir für den Ricci-Tensor

$$\text{Ric} = 3Kg. \quad (4.57)$$

Eine weitere Kontraktion ergibt für die Skalarkrümmung den Wert

$$S = 12K, \quad (4.58)$$

d.h. der Krümmungstensor erfüllt die Einstein'schen Feldgleichungen (4.14) für $T = 0$ mit $\Lambda = \frac{1}{4}S$ bzw. für eine perfekte Flüssigkeit mit Dichte $\rho = \frac{1}{32\pi}S$ und Druck $P = -\frac{1}{32\pi}S$ sowie $\Lambda = 0$.¹¹³

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = -\frac{1}{4}Sg \quad (4.59)$$

Ein Modell für adS_4 ist die Quadrik $H_1^4(\mathfrak{K})$ (s. Appendix B, Abschnitt B.2)

$$\text{adS}_4 = \{(u, v, x, y, z) \in \mathbb{R}_2^5 \mid -u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\mathfrak{K}^2\}, \quad (4.60)$$

die diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}^3$ ist (s. [O'N83], Lemma 25 (S.110)). Die Realisierung als Quadrik zeigt, daß adS_4 ein *maximal symmetrischer* Raum ist, d.h. die Dimension der Isometriegruppe ist 10, die maximal mögliche in 4 Dimensionen¹¹⁴, denn (4.60) ist invariant unter der Wirkung der Isometriegruppe $O(2, 3)$ von (\mathbb{R}_2^5, g_2) .

Die Schnittkrümmung lässt sich durch den Parameter $\mathfrak{K} > 0$ ausdrücken (s. Proposition B.33):

$$K_{\text{adS}_4} = -\frac{1}{\mathfrak{K}^2} \quad (4.61)$$

Aus physikalischer Sicht ist adS_4 ein eher pathologisches Modell einer Raumzeit, weil es geschlossene, zeitartige Kurven¹¹⁵ enthält und somit nicht global hyperbolisch ist¹¹⁶. Letzteres wird auch durch den Übergang¹¹⁷ zur *universellen Überlagerung* $\text{CadS}_4 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, die keine geschlossenen zeitartigen Kurven besitzt, nicht behoben, wie wir anhand der folgenden Parametrisierung (s. [HE73], S.131) von (4.60) sehen werden.

$$\begin{aligned} u &= \mathfrak{K} \cos\left(\frac{t'}{\mathfrak{K}}\right) \sec\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right), & v &= \mathfrak{K} \sin\left(\frac{t'}{\mathfrak{K}}\right) \sec\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \\ x &= \mathfrak{K} \tan\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \cos(\vartheta), & y &= \mathfrak{K} \tan\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \sin(\vartheta) \cos(\varphi), & z &= \mathfrak{K} \tan\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\pi\mathfrak{K} &\leq t' < \pi\mathfrak{K}, & 0 < r' < \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}, & & 0 < \vartheta < \pi, & & 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Metrik ist in diesen Koordinaten:

$$ds_{\text{adS}_4}^2 = \sec^2\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \left(-dt'^2 + dr'^2 + \mathfrak{K}^2 \sin^2\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) (d\vartheta^2 + \sin(\vartheta)^2 d\varphi^2) \right). \quad (4.63)$$

Die Koordinaten $(t', r', \vartheta, \varphi)$ überdecken adS_4 , abgesehen von Koordinatensingularitäten bei $r' = 0$ und $\vartheta = 0, \pi$. Der Übergang zu CadS_4 wird in diesen Koordinaten durch die Ausweitung des Parameterbereichs für t' auf $(-\infty, \infty)$ bewerkstelligt. Als direkte Konsequenz dieser Koor-

¹¹³Diese letztere Wahl ist wenig sinnvoll, da entweder Dichte oder Druck der Flüssigkeit negativ sind (vgl. [HE73], S. 124)

¹¹⁴Im Allgemeinen ist $\dim(I(\mathcal{M})) = \frac{\dim(\mathcal{M})(\dim(\mathcal{M})+1)}{2}$ (s. [O'N83], Lemma 28 (S.253)).

¹¹⁵z.B. $u = \mathfrak{K} \cos(t)$, $v = \mathfrak{K} \sin(t)$, $x = y = z = 0$.

¹¹⁶Diese Eigenschaft ist zentral für die eindeutige Konstruktion einer Quantenfeldtheorie des Klein-Gordon-Feldes nach Unterabschnitt 2.2.1.

¹¹⁷Bildlich gesprochen wird die S^1 in adS_4 abgerollt.

dinantenwahl erhalten wir konforme Einbettungen von adS_4 und CadS_4 in ESU_4 als Regionen

$$\text{adS}_4^c := \{-\pi\mathfrak{K} \leq t' < \pi\mathfrak{K}, 0 < r' < \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}, 0 < \vartheta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \subseteq \text{ESU}_4 \quad (4.64)$$

$$\text{CadS}_4^c := \{-\infty \leq t' < \infty, 0 < r' < \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}, 0 < \vartheta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \subseteq \text{ESU}_4$$

$$ds_{(\text{C})\text{adS}_4}^2 = \Omega^2 \cdot ds_{\text{ESU}_4}^2, \quad \Omega(t', r', \vartheta, \varphi) = \sec\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right) \left(\frac{K}{\Lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Zurückkommend auf die globale Hyperbolizität, erkennen wir aus Abbildung 4.3, daß zu jeder Hyperfläche, die keine lichtartige Kurven enthält, eine lichtartige Kurve gefunden werden kann, die diese Hyperfläche nicht schneidet. Folglich existiert keine Cauchy-Fläche in adS_4 , was nach Fußnote 28 zu Theorem 1.16 äquivalent dazu ist, daß adS_4 nicht(!) global hyperbolisch ist. Diese Eigenschaft ist direkt auf den Umstand zurückzuführen, daß die “Unendlichkeit”, $\{r' = \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}\}$ in Abbildung 4.3, für licht- und raumartige Kurven als zeitartige Hyperfläche verstanden werden kann, was auch für CadS_4 der Fall ist.

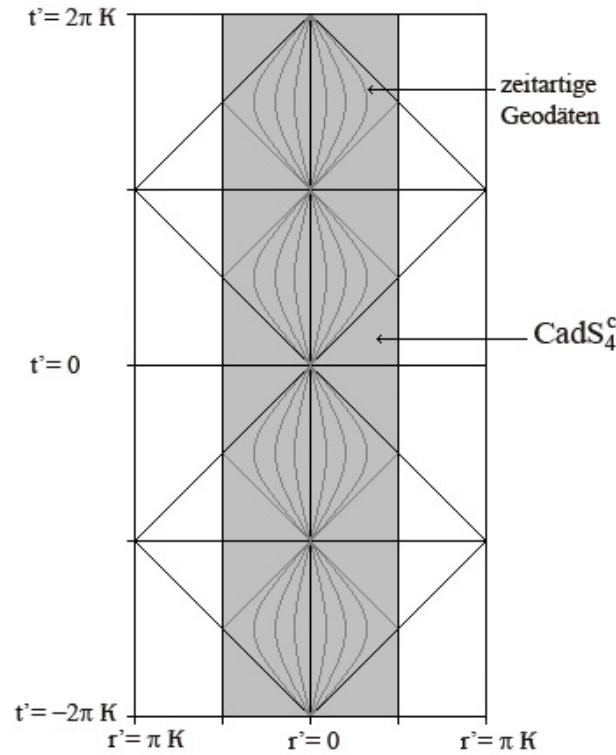


Abbildung 4.3 – Ein Teil des statische Einstein-Universums als Penrose-Diagramm, aufgeschnitten entlang $r' = \pi\mathfrak{K}$. 2 Dimensionen (ϑ, φ) sind unterdrückt, jeder Punkt ist eine Hälfte einer S^2 mit Flächeninhalt $4\pi\mathfrak{K}^2 \sin\left(\frac{r'}{\mathfrak{K}}\right)^2$. Die grau-schattierte Region ist das konforme Bild der Anti-de Sitter-Raumzeit. Lichtartige Kurven sind 45° -Linien zur Senkrechten.

Für die Konstruktion einer Fundamentallösung bedeutet die Nicht-Existenz einer Cauchy-Fläche, daß das Verhalten einer Lösung zu einer Differentialgleichung vom Typ (1.13, S.12) nicht vollständig durch Spezifikation von Anfangsdaten auf einer geeigneten Hyperfläche bestimmt ist, sondern zusätzliche Randbedingungen an der zeitartigen “Unendlichkeit”, $\{r' = \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}\}$, gestellt werden müssen, um den Ein- und Austritt von Informationen zu regulieren¹¹⁸.

¹¹⁸Man könnte hier an ein “Feld im Kasten” mit geeigneten Randbedingungen (transparent, reflektierend) denken.

Eine andere interessante Eigenschaft von $(C)\text{adS}_4$ ist, daß alle zeitartige Geodäten, die von einem Punkt p ausgehen, nach der Zeit $t' = \pi\mathfrak{K}$ in einem gemeinsamen Fokuspunkt q zusammenlaufen (s. Abbildung 4.3). Es gibt daher Regionen in $(C)\text{adS}_4$, die nur für einen beschleunigten Beobachter, nicht aber für einen geodätischen (“frei fallenden”) Beobachter erreichbar sind¹¹⁹.

Die Motivation $(C)\text{adS}_4$ im Modell des lokalen Gleichgewichtes zu untersuchen, begründet sich einerseits gerade durch die pathologischen Eigenschaften, welche helfen könnten einen Rahmen abzustecken, für den das Modell des lokalen Gleichgewichtes sinnvoll ist, andererseits ist $(C)\text{adS}_4$ ein sehr einfaches Modell mit negativer Krümmung, was insbesondere in Hinsicht auf den unbestimmten Term $c \cdot S$ relevant sein könnte.

Das Problem der Bestimmung des avancierten/retardierte Propagators für $(C)\text{adS}_4$ für Υ können wir durch Einschränkung des selbigen für ESU_4 vermöge (4.64), Lemma 4.2 und Lemma 2.1 lösen, da die Region adS_4^c bzw. CadS_4^c kausal-vertagliche Teilmengen¹²⁰ von ESU_4 sind.

$$\begin{aligned}
G_{\pm|p}^{(C)\text{adS}_4}(q) &= \Omega^{-1}(p)\Omega^{-1}(q)G_{\pm|p}^{\text{ESU}_4}(q) & (4.65) \\
&= \sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\sec\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right)\frac{\pm 1}{4\pi\mathfrak{K}^2}\theta\left(\pm\frac{t'_q-t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\text{sgn}\left(\sin\left(\frac{t'_q-t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right) \\
&\quad \cdot \delta_0\left(\cos\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right)\cos\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)+\sin\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right)\sin\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right. \\
&\quad \left.(\cos(\vartheta_q)\cos(\vartheta_p)+\sin(\vartheta_q)\sin(\vartheta_p)\cos(\varphi_q-\varphi_p))-\cos\left(\frac{t'_q-t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right) \\
&\stackrel{\text{Gl. 4.11}}{=} \frac{\pm 1}{4\pi\mathfrak{K}^2}\theta\left(\pm\frac{t'_q-t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\text{sgn}\left(\sin\left(\frac{t'_q-t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right) \\
&\quad \cdot \delta_0\left(1+\tan\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right)\tan\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right. \\
&\quad \left.(\cos(\vartheta_q)\cos(\vartheta_p)+\sin(\vartheta_q)\sin(\vartheta_p)\cos(\varphi_q-\varphi_p))\right. \\
&\quad \left.-\sec\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right)\sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\cos\left(\frac{t'_q-t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Da die t' -Koordinate für adS_4 $2\pi\mathfrak{K}$ -periodisch ist, ist diese Vorschrift für den avancierten/retardierte Propagator problematisch, denn die Heaviside-Funktion θ ist mit dieser Periodizität inkompatibel. Allerdings zeigt sich, daß der kausale Propagator, der für die Konstruktion der Quantenfeldtheorie nötig ist, diese Inkompatibilität nicht aufweist.

$$\begin{aligned}
\Delta_{\pm|p}^{(C)\text{adS}_4}(q) &= G_{+|p}^{(C)\text{adS}_4}(q) - G_{-|p}^{(C)\text{adS}_4}(q) & (4.66) \\
&= \frac{1}{4\pi\mathfrak{K}^2}\text{sgn}\left(\sin\left(\frac{t'_q-t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right)\delta_0\left(1+\tan\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right)\tan\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right. \\
&\quad \left.(\cos(\vartheta_q)\cos(\vartheta_p)+\sin(\vartheta_q)\sin(\vartheta_p)\cos(\varphi_q-\varphi_p))\right. \\
&\quad \left.-\sec\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right)\sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\cos\left(\frac{t'_q-t'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Die Identität (2.3) auf ESU_4 sichert zusammen mit Lemma 2.7, daß dieser kausale Propagator eine symplektische Form induziert¹²¹. Ein ähnliches Resultat für den kausalen Propagator findet sich in [AIS78]. Von den Autoren wird dort argumentiert, daß diese Wahl “transparenten” Randbedingungen bei $r' = \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}$ entspricht, was sich anhand von Abbildung 4.3 verstehen lässt:

¹¹⁹Bildlich gesprochen kehrt ein Gegenstand, der von einem Punkt weggeworfen wird, nach einer bestimmten Zeit an seinen Ausgangspunkt zurück. Außerdem kann der Gegenstand nicht an jeden beliebigen Ort geworfen werden.

¹²⁰Ein ausführlicher Beweis der kausalen Verträglichkeit findet sich in [BGP07], Beispiel 3.5.4. (S. 93), ist aber aufgrund der geodätischen Konvexität der S_+^3 in der Zerlegung $\text{adS}_4^c \cong S^1 \times S_+^3/\text{CadS}_4^c \cong \mathbb{R} \times S_+^3$ einsichtig; S_+^3 bezeichnet eine halbe S^3 , zerlegt entlang eines Großkreises.

¹²¹Beachte auch: $\Delta_{\pm|p}^{(C)\text{adS}_4}(q) = -\Delta_{\pm|q}^{(C)\text{adS}_4}(p)$.

Der Träger von $\Delta_{\pm|0}^{(\text{C})\text{adS}_4}$ ist durch die Einschränkung des oberen und unteren ‘‘Diamanten’’ (schwarz, mit Apex 0) in ESU_4 auf die grau-schattierte Region gegeben, d.h. ‘‘Information’’ tritt beispielsweise bei $t' = \frac{\pi}{2}\mathfrak{R}$ aus $(\text{C})\text{adS}_4$ aus und kehrt bei $t' = \frac{3}{2}\mathfrak{R}$ nach $(\text{C})\text{adS}_4$ zurück. In [AIS78] wird auch der Fall ‘‘reflektiver’’ Randbedingungen diskutiert, dessen avancierter/re-tardierter Propagator an p durch eine zweite Punktquelle¹²² am antipodalen Punkt $p_A(= (-u(p), -v(p), -x(p), -y(p), -z(p)) \doteq (t'_p + \pi\mathfrak{R}, r'_p, \pi - \vartheta_p, \varphi_p + \pi))$ konstruiert werden kann.

$$G_{\pm|p}^{(\text{C})\text{adS}_4, j}(q) = G_{\pm|p}^{(\text{C})\text{adS}_4}(q) - (-1)^j G_{\pm|p_A}^{(\text{C})\text{adS}_4}(q), \quad j = 1, 2 \quad (4.67)$$

Die Fälle $j = 1, 2$ entsprechen von-Neumann- bzw. Dirichlet-Randbedingungen. Der Träger der zugehörigen Propagatoren kann als die kleinen (grauen) ‘‘Diamanten’’ in Abbildung 4.3 verstanden werden¹²³. Für eine ausführliche Erklärung sei auf [AIS78] verwiesen.

Bevor wir uns der Berechnung der 2-Punkt-Funktionen nach (4.8) zu wenden, untersuchen wir die Invarianz-Eigenschaften des kausalen Propagators (4.66), denn Lemma 2.7 ist für $(\text{C})\text{adS}_4$ nicht anwendbar.

Betrachten wir einen Punkt $p = (t'_p, r'_p, \vartheta_p, \varphi_p)$, so definiert die Vorschrift

$$\phi_p := R_{-r'_p} \circ R_{-\vartheta_p} \circ R_{-\varphi_p} \circ R_{-t'_p} \quad (4.68)$$

mit den Rotationen

$$R_{-t'_p} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t'_p}{\mathfrak{R}}\right) & \sin\left(\frac{t'_p}{\mathfrak{R}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{t'_p}{\mathfrak{R}}\right) & \cos\left(\frac{t'_p}{\mathfrak{R}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{-r'_p} = \begin{pmatrix} \sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{R}}\right) & 0 & -\tan\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{R}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tan\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{R}}\right) & 0 & \sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{R}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{-\vartheta_p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\vartheta_p) & \sin(\vartheta_p) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\vartheta_p) & \cos(\vartheta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{-\varphi_p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi_p) & \sin(\varphi_p) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi_p) & \cos(\varphi_p) \end{pmatrix}$$

ein Element in $O_+^\uparrow(2, 3)$ ¹²⁴, s.d. $\phi_p(p) \doteq 0(= (\mathfrak{R}, 0, 0, 0, 0))$ gilt¹²⁵. Ein direkter Vergleich zeigt:

$$\Delta_{|p}^{(\text{C})\text{adS}_4}(q) = \Delta_{|0}^{(\text{C})\text{adS}_4}(\phi_p(q)) \quad (4.69)$$

für alle $p, q \in (\text{C})\text{adS}_4$ mit ϕ_p wie in (4.68). Dabei haben wir beachtet, daß sich der Propagator an $p \doteq 0$ (vgl. (4.62)) als

$$\Delta_{|0}^{\text{adS}_4}(q) = \frac{1}{4\pi\mathfrak{R}^2} \operatorname{sgn}\left(\frac{v(q)}{\mathfrak{R}}\right) \delta_0\left(1 - \frac{u(q)}{\mathfrak{R}}\right) \quad (4.70)$$

schreiben lässt und $\sec\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{R}}\right) > 0$ für alle $q \in \text{adS}_4$ gilt.

Wie im vorherigen Unterabschnitt 4.2.2 verwenden wir Gleichung (4.8) um Kandidaten für die 2-Punkt-Funktion quasifreier KMS-Zustände über der Weyl-Algebra des masselosen, konform invarianten Klein-Gordon-Feldes auf $(\text{C})\text{adS}_4$ zu erhalten. Zur Konstruktion der Weyl-Algebra

¹²² $\Upsilon_p G_{\pm|p_A} = \delta_{p_A}$

¹²³Mit $\Delta_{\pm|p_A}^{(\text{C})\text{adS}_4}(q) = \Delta_{\pm|p}^{(\text{C})\text{adS}_4}(q_A)$ folgt $\Delta_{\pm|p}^{(\text{C})\text{adS}_4, j}(q) = -\Delta_{\pm|q}^{(\text{C})\text{adS}_4, j}(p)$ ($j = 1, 2$).

¹²⁴Hier ist in Anlehnung an die Lorentz-Gruppe die orientierungserhaltende, zeit-orientierungserhaltende Komponente, d.h. die Zusammenhangskomponente der Identität, von $O(2, 3)$ gemeint.

¹²⁵Für CadS_4 verwenden wir die durch R_t induzierte Translation $s \mapsto s + t$ im ersten Faktor.

verwenden wir den kausalen Propagator (4.66) für die “transparenten” Randbedingungen. Eine Diskussion der “reflektiven” Randbedingungen kann aus dem “transparenten” Fall abgeleitet werden, da der kausale Propagator zu (4.67) durch Superposition entsteht.

Als Dynamik $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ verwenden wir die, durch R_t , $t \in \mathbb{R}$ (s. 4.68) gegebene, 1-Parameter-Gruppe. Die Trajektorien dieser Dynamik haben die Form ($p \in \text{adS}_4$):

$$p(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{K} \cos\left(\frac{t'_p+t}{\mathfrak{K}}\right) \sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) \\ \mathfrak{K} \sin\left(\frac{t'_p+t}{\mathfrak{K}}\right) \sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) \\ \tan\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) \cos(\vartheta_p) \\ \tan\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) \sin \vartheta_p \cos(\varphi_p) \\ \tan\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) \sin(\vartheta_p) \sin(\varphi_p) \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

$$g_{\text{adS}_4}(p'(t), p'(t)) = g_2(p'(t), p'(t)) = -\sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)^2,$$

$$\stackrel{\text{Bem. B.30}}{\Rightarrow} g_{\text{adS}_4}(\nabla_{p'(t)} p'(t), \nabla_{p'(t)} p'(t)) = \frac{1}{\mathfrak{K}^2} \sec\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)^2 \tan\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)^2.$$

Wir erkennen einerseits, daß die Isometrien, wie gewünscht zeitartig sind, und andererseits, daß ein Beobachter sich gemäß dieser Dynamik nur für $r'_p = 0$ geodätisch bewegt. Die Abweichung von der geodätischen Bewegung nimmt mit wachsendem r'_p zu.

Wir können (4.71) nutzen, um das Verhalten von Objekten zu beschreiben, die von einem frei fallenden Beobachter durch $r'_p = 0$ ($\vartheta_p = \text{konst.}, \varphi_p = \text{konst.}$) mit Anfangsgeschwindigkeit $p'(0)$ in fester, relativer Position ($r' = \text{konst.}, \vartheta = \text{konst.}, \varphi = \text{konst.}$) mitgeführt werden.

Um Gleichung (4.8) auf $(C)\text{adS}_4$ zu übertragen, benutzen wir wie für ESU_4 die skalierte Fouriertransformation mit Parameter \mathfrak{K} . Allerdings müssen wir für adS_4 die diskrete Fouriertransformation einsetzen, da die t' -Koordinate $2\pi\mathfrak{K}$ -periodisch ist. D.h. die Fourierbasis $\{e^{-ik\frac{t}{\mathfrak{K}}} \mid k \in \mathbb{R}\}$ wird durch $\{e^{-ik\frac{t}{\mathfrak{K}}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ersetzt. Beachten wir die $2\pi\mathfrak{K}$ -Periodizität in der Formulierung der KMS-Bedingung nach Proposition 3.3, so erhalten wir durch analoges Vorgehen zu [HHW67] die Bedingung¹²⁶

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}[F|_{[-\pi\mathfrak{K}, \pi\mathfrak{K}]}] (k) = e^{\beta\frac{k}{\mathfrak{K}}} \mathfrak{F}_{\mathfrak{K}}[G](k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.72)$$

Die Formeln für die 2-Punkt-Funktionen sind somit

$$\omega_2(p, q) = \frac{i}{2\pi\mathfrak{K}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\frac{k}{\mathfrak{K}}}} \int_{-\pi\mathfrak{K}}^{\pi\mathfrak{K}} dt e^{-i\frac{t}{\mathfrak{K}}k} \Delta_{|p}^{\text{adS}_4}(\phi_t(q)) \quad (4.73)$$

und

$$\omega_2(p, q) = \frac{i}{2\pi\mathfrak{K}} \int dk \frac{1}{1 - e^{-\beta\frac{k}{\mathfrak{K}}}} \int dt e^{-i\frac{t}{\mathfrak{K}}k} \Delta_{|p}^{\text{CadS}_4}(\phi_t(q)). \quad (4.74)$$

A priori würden wir an dieser Stelle erwarten, daß die beiden Ausdrücke nicht notwendig übereinstimmen, aber die $2\pi\mathfrak{K}$ -Periodizität in t' des kausalen Propagators (4.66) hat genau dies zur Folge. Daher beschränken wir uns auf die Berechnung für CadS_4 , die nach dem selben Muster wie für ESU_4 verläuft (s. 4.37). Die Invarianz des kausalen Propagators (4.69) und der Umstand, daß R_t mit R_ϑ und R_φ für alle t , ϑ und φ kommutiert, erlaubt es uns $\vartheta_p = \vartheta_q$ und $\varphi_p = \varphi_q$ anzunehmen¹²⁷. Andererseits kommutiert $R_{r'}$ nicht mit R_t , weshalb wir bereits vermuten können, daß der Wert von ω auf dem Wick-Quadrat $:\Phi^2 :_{(C)\text{adS}_4}$ durch r'_p von p

¹²⁶Die Indizes der Funktionen F, G sind hier unterdrückt.

¹²⁷Zur Erinnerung: Wir sind an dem Grenzwert $q \rightarrow p$ interessiert.

abhängt.

$$\begin{aligned}
\omega_2(p, q) &= \frac{i}{8\pi^2 \mathfrak{K}^3} \int \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}} k}} \int e^{-ik \frac{t}{\mathfrak{K}}} \operatorname{sgn} \left(\pm \frac{(t'_q - t'_p) + t}{\mathfrak{K}} \right) \\
&\quad \cdot \delta_0 \left(1 + \tan \left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}} \right) \tan \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) - \sec \left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}} \right) \sec \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \cos \left(\frac{(t'_q - t'_p) + t}{\mathfrak{K}} \right) \right) dt dk \\
&\stackrel{\text{Gl. (4.11)}}{=} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \int \frac{\cos \left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}} \right) \cos \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}} k} \sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} e^{ik \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i l k} dk \\
&\stackrel{\text{Gl. (4.36)}}{=} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \int \frac{\cos \left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}} \right) \cos \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}} k} \sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} e^{ik \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_0(k - l) dk \\
&\stackrel{0 < k_0 < 1}{=} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}} \right) \cos \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}} k} \sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} e^{ik \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_0(k - l) dk \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \int_{-\infty}^{k_0} \frac{\cos \left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}} \right) \cos \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \sin \left(\frac{k(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{1 - e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{K}} k} \sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} e^{ik \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_0(k - l) dk
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Vergleichen wir die letzte Zeilen in (4.75) mit der entsprechenden in (4.37), erkennen wir, daß der Integrand, wie zu erwarten war, durch die (inversen) konformen Faktoren $\cos \left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}} \right)$ und $\cos \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)$ modifiziert ist. Da diese Faktoren nicht von dem Integrationsparameter k abhängen, können wir den divergenten Anteil in ω_2 in der selben Weise wie zuvor (s. (4.38)-(4.43)) isolieren.

$$\begin{aligned}
\omega_2(p, q) &= \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\cos \left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}} \right) \cos \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)}{\sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} \\
&\quad \cdot \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)}{\cosh \left(\frac{\varepsilon + (t'_q - t'_p)}{\mathfrak{K}} \right) - \cos \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{\sin \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)}{\cosh \left(\frac{\beta n + (t'_q - t'_p)}{\mathfrak{K}} \right) - \cos \left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\sin \left(\frac{n(r'_q - r'_p)}{\mathfrak{K}} \right)}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} e^{in \frac{t'_q - t'_p}{\mathfrak{K}}} \right)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Der verbleibende Schritt besteht in der Bestimmung der Hadamard-Parametrix. Der relevante Hadamard-Koeffizient V^0 könnte erneut mittels Gleichung (1.10) und der Formel für das geodätische Abstandsquadrat nach Proposition B.34 bestimmt werden. Wir wollen uns an dieser Stelle einer anderen Technik bedienen, denn V^0 ist auf Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung eine Funktion des geodätischen Abstandsquadrates (s. [Fri75], S.162), d.h. $V^0 = V^0(\Gamma)$. Daher ist für die Bestimmung von $\omega(\cdot: \Phi^2 :_{(C)\text{adS}_4}(p))$ nur die Entwicklung von V^0 nach Γ bis zur ersten Ordnung

$$V^0(\Gamma(p, q)) = \underbrace{V^0(p, p)}_{=1} + \left. \frac{dV^0}{d\Gamma} \right|_{p=q} \Gamma + O(\Gamma^2) \tag{4.77}$$

relevant (vgl. Definition 2.9). Nach Theorem B.25 besteht eine einfache Möglichkeit, um diese Entwicklung zu erhalten, in der Verwendung eines Orthonormal-Koordinatensystems¹²⁸ (s. Definition B.24) um p , denn mit den Gleichungen 1.7 und 1.9 ist V^0 in solchen Koordinaten

¹²⁸Eine ähnliche Berechnung findet sich in [BGP07], Lemma 1.3.17. (S.27).

durch

$$V^0(p, \exp_p(tX)) = \left| g_{\exp_p^{-1}} \right|^{-\frac{1}{4}}(tX) \mathcal{P}_p^{\exp_p(tX)} \quad (4.78)$$

gegeben, wobei t das geodätische Abstandsquadrat parametrisiert:

$$t^2 \Gamma(p, q) = g_{|p}(\underbrace{t \exp_p^{-1}(q)}_{=: X_q}, \underbrace{t \exp_p^{-1}(q)}_{=: X_q}),$$

d.h. wir benötigen lediglich einen expliziten Ausdruck für $\left. \frac{d^2}{dt^2} \left| g_{\exp_p^{-1}} \right|^{-\frac{1}{4}}(tX) \right|_{t=0}$. Die Ableitung

des Paralleltransportes $\mathcal{P}_p^{\exp_p(tX)}$ ergibt die kovariante Ableitung in Richtung X . Dies ist allerdings für die weitere Betrachtung irrelevant, da wir mit dem trivialen Bündel arbeiten und der Paralleltransport für den Klein-Gordon-Operator die Identität ist.

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \left| g_{\exp_p^{-1}} \right|^{-\frac{1}{4}}(tX) \right|_{t=0} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} X^k X^l (\partial_k \partial_l g_{ij}) g^{ij}(0) \quad (4.79)$$

Somit reduziert Gleichung (4.79) das Problem auf die Berechnung der zweiten partiellen Ableitungen der Metrikkomponenten an p , $\{\partial_k \partial_l g_{ij}(0)\}$, in Orthonormal-Koordinaten. Die Basis-Vektorfelder zu diesen Koordinaten sind:

$$\partial_{i|\exp_p(tX)} = \exp_{p,*,tX}(X_{i|tX}) = \frac{1}{t} J_i^X(t) \Rightarrow g_{ij}(tX) = \frac{1}{t^2} g_{|\exp_p(tX)}(J_i^X(t), J_j^X(t)). \quad (4.80)$$

Die Vektorfelder $\{J_i^X\}$ sind die Jacobi-Felder (s. [O'N83], Kapitel 8 (S.215ff)) mit Anfangswerten $J_i^X(0) = 0$, $(\nabla_{\gamma_X'} J_i^X)|_p = X_i \forall i$ entlang der Geodäten $\gamma_X(t) = \exp_p(tX)$.

Die definierende Gleichung für Jacobi-Felder J entlang einer Geodäten γ

$$\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J + R(J, \gamma') \gamma' = 0 \quad (4.81)$$

können wir nutzen, um die (lokale) Taylorentwicklung¹²⁹

$$\mathcal{P}_{\exp_p(tX)}^p J|_{\exp_p(tX)} = \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!} (\overbrace{\nabla_{\gamma_X'} \dots \nabla_{\gamma_X'}}^{\text{n-mal}} J)|_p + O(t^{N+1}) \quad (4.82)$$

der Jacobi-Felder $\{J_i^X\}$ nach t in dritter Ordnung zu ermitteln. Dies genügt nach (4.80) und Korollar B.12 zur die Bestimmung der $\{\partial_k \partial_l g_{ij}(0)\}$, weil der Paralleltransport des Levi-Civita-Zusammenhangs eine Isometrie ist.

$$(\nabla_{\gamma_X'} \nabla_{\gamma_X'} J_i^X)|_p = R_{|p}(J_i^X(0), \gamma_X'(0)) \gamma_X'(0) \underbrace{=}_0 \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma_X'} \nabla_{\gamma_X'} \nabla_{\gamma_X'} J_i^X)|_p &\underbrace{=}_{\nabla_{\gamma_X'} \gamma_X' = 0} -(\nabla_{\gamma_X'} R)|_p(J_i^X(0), \gamma_X'(0)) \gamma_X'(0) - R_{|p}((\nabla_{\gamma_X'} J_i^X)|_p, \gamma_X'(0)) \gamma_X'(0) \\ &\underbrace{=}_{(\nabla_{\gamma_X'} J_i^X)|_p = X_i, J_i^X(0) = 0} -R_{|p}(X_i, X) X \end{aligned}$$

¹²⁹ \mathcal{P} bezeichnet an dieser Stelle den Paralleltransport des Levi-Civita-Zusammenhangs.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathcal{P}_{\exp_p(tX)}^p J_i^X(t) = tX_i - \frac{1}{6}t^3 R_{|p}(X_i, X)X + O(t^4) \quad (4.84) \\
&\Rightarrow g_{ij}(tX) = \delta_{ij} - \frac{1}{6}t^2(g_{|p}(X_i, R_{|p}(X_j, X)X) + g_{|p}(X_j, R_{|p}(X_i, X)X)) + O(t^3) \\
&\Rightarrow \partial_k \partial_l g_{ij}(0) = -\frac{1}{3} \sum_l \{g_{il}(0)R_{|j}^l(0) + g_{jl}(0)R_{|ik}^l(0)\} \\
&\Rightarrow \left. \frac{d^2}{dt^2} \left| g_{\exp_p^{-1}} \right|^{-\frac{1}{4}}(tX) \right|_{t=0} = \frac{1}{6} \sum_{k,l} R_{kl}(0)X^k X^l
\end{aligned}$$

Gleichung (4.77) wird somit in unserem Fall (trivialer Paralleltransport!) zu:

$$\begin{aligned}
V^0(\Gamma(p, q)) &= 1 + \frac{1}{12} \text{Ric}_{|p}(X_q, X_q) + O(X_q^4) \quad (4.85) \\
&\stackrel{\text{Gl. 4.57}}{=} 1 + \frac{1}{48} S \cdot g_{|p}(X_q, X_q) + O(X_q^4) \\
&= 1 + \frac{1}{48} S \cdot \Gamma(p, q) + O(\Gamma^2).
\end{aligned}$$

Mit Proposition B.34 erhalten wir die Entwicklung der Hadamard-Parametrix H_0 für raumartig(!)¹³⁰ getrennte Punkte p, q im Grenzwert $q \rightarrow p$:

$$H_0(p, q) \underset{q \rightarrow p}{\sim} \frac{1}{4\pi^2 \left(\mathfrak{K}^2 \text{arcosh} \left(-\frac{q_2(p, q)}{\mathfrak{K}^2} \right) - 2i\varepsilon(t(q) - t(p)) + \varepsilon^2 \right)} + \frac{1}{192\pi^2} \underbrace{S}_{=-\frac{12}{\mathfrak{K}^2}} \quad (4.86)$$

Bestimmen wir die Differenz der Hadamard-Parametrix (4.86) und des divergenten Anteils in (4.76), können wir $\omega(\cdot: \Phi^2 :_{(C)\text{adS}_4}(p))$ angeben. Dazu setzen wir wie für ESU_4 $t'_p = t'_q$ und verwenden die Reihendarstellungen von (Area-)Kosinus Hyperbolicus, Kosinus und Sinus. Der Grenzwert $q \rightarrow p$ kann für die verbleibenden Ausdrücke direkt genommen werden, weil die Reihen für alle Parameter ($\beta, \mathfrak{K} > 0$) gleichmäßig konvergieren.

$$\begin{aligned}
&\lim_{r'_q \rightarrow r'_p} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right) \cos\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)}{\cosh\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}\right) - \cos\left(\frac{r'_q - r'_p}{\mathfrak{K}}\right)} - \frac{1}{\text{arcosh}\left(\frac{1 - \sin\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right) \sin\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)}{\cos\left(\frac{r'_q}{\mathfrak{K}}\right) \cos\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{K}}\right)^2} \right) \\
&= -\frac{1}{48\pi^2 \mathfrak{K}^2} \quad (4.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(\cdot: \Phi^2 :_{(C)\text{adS}_4}(p)) &= \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2 \cosh\left(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}\right) - 1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{24\pi^2 \mathfrak{K}^2} + c \cdot \underbrace{S_{(C)\text{adS}_4}}_{=-\frac{12}{\mathfrak{K}^2}} \quad (4.88)
\end{aligned}$$

Für den entsprechenden Wert mit “reflektiven” Randbedingungen (s. 4.67) benötigen wir zusätzlich $\omega_2(p_A, p)$ ($p_A \doteq (t'_p + \pi\mathfrak{K}, r'_p, \pi - \vartheta_p, \varphi_p + \pi)$).

¹³⁰Ein analoges Resultat gilt für zeitartig getrennte Punkte.

Halten wir uns an das Vorgehen in (4.75) und (4.76) (bzw. (4.38)-(4.43)), finden wir:

$$\begin{aligned} \omega_2(p_A, p) &= \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \right) \\ &\cdot \left(- \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh \left(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}} \right) + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} + \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n \frac{1}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} \frac{\sin \left(2n \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)}{\sin \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} \right) - \frac{1}{16\pi^2 \mathfrak{K}^2} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Die Fälle $j = 1$ (von-Neumann-Randbedingungen) und $j = 2$ (Dirichlet-Randbedingungen) führen auf:

$$\begin{aligned} \omega^j(\cdot; \Phi^2 :_{(\text{C})\text{adS}_4} (p)) &= \omega(\cdot; \Phi^2 :_{(\text{C})\text{adS}_4} (p)) - (-1)^j \omega_2(p_A, p) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh \left(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}} \right) - 1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{24\pi^2 \mathfrak{K}^2} + (-1)^j \frac{1}{16\pi^2 \mathfrak{K}^2} + c \cdot \underbrace{S_{(\text{C})\text{adS}_4}}_{=-\frac{12}{\mathfrak{K}^2}} \\ &\quad + (-1)^j \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \right) \left(+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh \left(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}} \right) + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n \frac{1}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} \frac{\sin \left(2n \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)}{\sin \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} \right). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Wie auch für ESU_4 zeigen die Gleichungen (4.88) und (4.90), daß die 2-Punkt-Funktionen ω_2 und ω_2^j , $j = 1, 2$ (für $(\text{C})\text{adS}_4$) Hadamard'sch sind, d.h. abgesehen von der Positivitätsbedingung zur Definition entsprechender KMS-Zustände benutzt werden können. Das für ESU_4 zitierte Resultat (s. [Kay06], S.6) über Form, Existenz und Eindeutigkeit der KMS-Zustände ist für $(\text{C})\text{adS}_4$ nicht anwendbar¹³¹. Es verbleibt daher eine gewisse Unsicherheit, ob die berechneten 2-Punkt-Funktionen Zustände über der Weyl-Algebra definieren. Die Diskussion selbiger findet sich in Abschnitt 5.

Die Frage, ob die 2-Punkt-Funktionen (4.73) bzw. (4.74) für anderen Dynamiken, als die "Zeittranslation" $t' \mapsto t' + t$ (in Koordinaten $(t', r', \vartheta, \varphi)$), definiert werden können, wollen wir an dieser Stelle nicht weiter untersuchen. Wir bemerken aber, daß beispielsweise 1-Parameter-"Boost"-Gruppen wie

$$R_\eta = \begin{pmatrix} \cosh \left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}} \right) & 0 & \sinh \left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh \left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}} \right) & 0 & \cosh \left(\frac{\eta}{\mathfrak{K}} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta \in \mathbb{R}$$

untersucht werden könnten. Die Orbits $\{p(\eta) := R_\eta p\}_{\eta \in \mathbb{R}}$ sind zeitartig in "Keilen", gegeben durch die Zusammenhangskomponenten der Menge

$$\{p \in (\text{C})\text{adS}_4 \mid g_2(p'(\eta), p'(\eta)) = \cos \left(\frac{t'_p}{\mathfrak{K}} \right)^2 \cosh \left(\frac{r_p}{\mathfrak{K}} \right)^2 - \sinh \left(\frac{r_p}{\mathfrak{K}} \right)^2 \cos(\vartheta_p)^2 < 0\},$$

mit $r = \mathfrak{K} \ln \left(\tan \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}} + \frac{1}{2} \pi \right) \right) \right)$ ¹³².

¹³¹Raumartige Schnitte sind nicht kompakt in $(\text{C})\text{adS}_4$, das Potential $\frac{1}{6}S$ ist negativ.

¹³²Dies definiert "hyperbolische" Koordinaten: $u = \mathfrak{K} \cos \left(\frac{t}{\mathfrak{K}} \right) \cosh \left(\frac{r}{\mathfrak{K}} \right)$, $v = \mathfrak{K} \sin \left(\frac{t}{\mathfrak{K}} \right) \cosh \left(\frac{r}{\mathfrak{K}} \right)$, $x =$

Die Trajektorien der Punkte $(t'_p = \pi + 2\pi k, r_p, \vartheta_p = \pi + 2\pi k, \varphi_p)$, $k \in \mathbb{Z}$ sind zeitartige Geodäten und daher für die Beschreibung “frei fallender” Beobachter geeignet. KMS-Zustände zu dieser Dynamik sind nur für die Weyl-Algebren der “Keile” zu erwarten (s. [BS07], S.5 (zweite Hälfte) für ein vergleichbares Phänomen in der de Sitter-Raumzeit). Es ist zu erwarten, daß die “Keile” eine ähnliche lokale Struktur wie das *Rindler-Wedge* (s. [Wal94], Abschnitt 5) zeigen (“*bifurcate Killing horizon*”, s. [KW91]).

$x = \mathfrak{R} \sinh\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right) \cos(\vartheta)$, $y = \sinh\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right) \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$, $z = \sinh\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right) \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$ ($-\infty < r < \infty$) mit der Metrik $ds^2 = -\cosh\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^2 dt'^2 + dr^2 + \mathfrak{R}^2 \sinh\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^2 (d\vartheta^2 + \sin(\vartheta)^2 d\varphi^2)$

5 Diskussion

Zur Interpretation der Ergebnisse aus Abschnitt 4 im Sinne der lokalen Gleichgewichts-Hypothese nach Abschnitt 3 erinnern wir uns kurz daran, welches die dazu zentralen Objekte sind.

- (1) Die thermischen Referenzzustände \mathcal{R} (über \mathbb{M}) sind durch Gleichung (4.8) bestimmt.
- (2) Die lokalen thermischen Observablen \mathcal{T} sind die skalaren Vielfachen des Wick-Quadrates $:\Phi^2:$. Die zugehörige thermische Funktion im Minkowskiraum ist

$$\beta \mapsto : \Phi^2 : (\beta) = \frac{1}{12\beta^2}.$$

Dabei ist β der Temperaturvektor eines thermischen Referenzzustandes ω_β scharfer Temperatur.

- (3) Der Erwartungswert des Wick-Quadrates ist in den konstruierten KMS-Zuständen¹³³ durch

$$\omega(: \Phi^2 :_{\text{ESU}_4}(p)) = \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n}{e^{\frac{\beta}{\mathfrak{K}} n} - 1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}) - 1} - \frac{1}{12} \right) + c \cdot \underbrace{S_{\text{ESU}_4}}_{=6 \frac{\Lambda}{K} \frac{1}{\mathfrak{K}^2}} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \omega(: \Phi^2 :_{(\text{C})\text{adS}_4}(p)) &= \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}) - 1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{24\pi^2 \mathfrak{K}^2} + c \cdot \underbrace{S_{(\text{C})\text{adS}_4}}_{=-\frac{12}{\mathfrak{K}^2}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \omega^j(: \Phi^2 :_{(\text{C})\text{adS}_4}(p)) &= \omega(: \Phi^2 :_{(\text{C})\text{adS}_4}(p)) - (-1)^j \omega_2(p_A, p) \quad (5.3) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}) - 1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{24\pi^2 \mathfrak{K}^2} + (-1)^j \frac{1}{16\pi^2 \mathfrak{K}^2} + c \cdot \underbrace{S_{(\text{C})\text{adS}_4}}_{=-\frac{12}{\mathfrak{K}^2}} \\ &\quad + (-1)^j \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right) \right) \left(+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}) + \cos \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n \frac{1}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} \frac{\sin \left(2n \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)}{\sin \left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}} \right)} \right) \end{aligned}$$

gegeben ((4.46), (4.88) und (4.90)).

Die konstruierten Zustände werden nach Gleichung (3.6) als lokal im Gleichgewicht bezüglich \mathcal{R} und \mathcal{T} angesehen, falls es Wahrscheinlichkeitsmaße μ^{ESU_4} (unabhängig von $p \in \text{ESU}_4$), $\mu_{r'_p}^{(\text{C})\text{adS}_4}$

¹³³Wir bezeichnen der Einfachheit halber die berechneten Funktionale als Zustände, wenn auch die Positivitätsbedingung nicht bewiesen wurde.

und $\mu_{r'_p}^{(C)\text{adS}_4,j}$ ($j = 1, 2$) gibt, s.d.

$$\begin{aligned}\omega(\cdot: \Phi^2:_{\text{ESU}_4}(p)) &= \int \frac{1}{12\beta^2} d\mu^{\text{ESU}_4}(\beta), \\ \omega(\cdot: \Phi^2:_{(C)\text{adS}_4}(p)) &= \int \frac{1}{12\beta^2} d\mu_{r'_p}^{(C)\text{adS}_4}(\beta), \\ \omega^j(\cdot: \Phi^2:_{(C)\text{adS}_4}(p)) &= \int \frac{1}{12\beta^2} d\mu_{r'_p}^{(C)\text{adS}_4,j}(\beta)\end{aligned}\tag{5.4}$$

erfüllt ist. Diese Wahrscheinlichkeitsmaße sind, da wir nur das Wick-Quadrat als lokale thermische Observable verwenden, in keiner Weise eindeutig fixiert. Wir können lediglich anhand der Erwartungswerte des Wick-Quadrats festmachen, ob eine lokale Gleichgewichtssituation vorliegt, da diese Werte dazu zwingend positiv sein müssen. Wir erkennen sofort, daß diese Frage entscheiden durch die Wahl der freien Konstanten $c \in \mathbb{R}$ bestimmt ist.

Ist diese fixiert und der Erwartungswert des Wick-Quadrates in einem Zustand ω positiv, so können wir (durch Wahl des passenden Dirac-Maßes) (5.1), (5.2) bzw. (5.3) zur Bestimmung der (lokalen) Temperaturfunktion

$$T(p) = \sqrt{12\omega(\cdot: \Phi^2: (p))}\tag{5.5}$$

verwenden.

Eine genauere Betrachtung der Reihen

$$f\left(\frac{\beta}{\mathfrak{K}}\right) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n}{e^{\frac{\beta}{\mathfrak{K}}n} - 1}\tag{5.6}$$

und

$$g\left(\frac{\beta}{\mathfrak{K}}\right) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2 \cosh\left(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}\right) - 1}\tag{5.7}$$

zeigt, daß diese positive, monoton fallende Funktionen f, g in $\frac{\beta}{\mathfrak{K}}$ repräsentieren. Insbesondere ist die Konvergenz für alle Intervalle $[x_0, \infty)$, $x_0 > 0$ absolut und gleichmäßig¹³⁴, und wir erhalten:

$$\lim_{\frac{\beta}{\mathfrak{K}} \rightarrow \infty} g\left(\frac{\beta}{\mathfrak{K}}\right) = 0 = \lim_{\frac{\beta}{\mathfrak{K}} \rightarrow \infty} f\left(\frac{\beta}{\mathfrak{K}}\right).\tag{5.8}$$

Gleiches gilt für die Reihen

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n \frac{1}{e^{\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}} - 1} \sin\left(2n \frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\tag{5.9}$$

und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2 \cosh\left(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}\right) + \cos\left(2 \frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)}\tag{5.10}$$

wie eine direkte Abschätzung¹³⁵ gegen (5.6) und (5.7) sowie der Umstand, daß $0 < r'_p < \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}$ für $p \in (C)\text{adS}_4$ gilt, erkennen lassen. Wir sehen also, daß für festes \mathfrak{K} (entspricht fixierter

¹³⁴Dazu schätzen wir f bzw. g durch $f(x_0)$ bzw. $g(x_0)$ ab.

¹³⁵Beachte: \sin ist betraglich durch 1 beschränkt.

Skalar­krümmung S ; $r'_p = \text{konst.}$ für (C)adS₄) gilt:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega(\cdot: \Phi^2:_{\text{ESU}_4}(p)) = \left(6c - \frac{1}{48\pi^2}\right) \frac{1}{\mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \stackrel{K=\frac{1}{\mathfrak{K}^2}}{=} \left(6c - \frac{1}{48\pi^2}\right) \Lambda \quad (5.11)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega(\cdot: \Phi^2:_{(\text{C})\text{adS}_4}(p)) = \left(\frac{1}{24\pi^2} - 12c\right) \frac{1}{\mathfrak{K}^2} \quad (5.12)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega(\cdot: \Phi^2:_{(\text{C})\text{adS}_{4,j}}(p)) = \left(\frac{1}{24\pi^2} + (-1)^j \frac{1}{16\pi^2} - 12c\right) \frac{1}{\mathfrak{K}^2}. \quad (5.13)$$

Die Konsequenz ist, daß die Wahl der Konstante c bestimmt, ob eine kritische inverse Temperatur β_c für die jeweilige Raumzeit und die zugehörigen KMS-Zustände ω existiert, ab welcher der Erwartungswert des Wick-Quadrates negativ wird (mit zunehmendem β). Für die entsprechenden KMS-Zustände hätte dies zur Folge, daß eine lokale Gleichgewichtsinterpretation nach (5.4) nicht mehr möglich ist. Ein Beobachter in ESU₄ könnte beispielsweise keine Wahl für c treffen, s.d. sowohl er als auch ein (C)adS₄-Beobachter mit "reflektiven" Dirichlet-Randbedingungen ($j = 1$) und dieser Wahl für c in der Beurteilung aller ihrer KMS-Zustände zu Parametern β zu dem Schluß gelangen, daß ihre Situation lokal durch einen thermischen Referenzzustand beschrieben werden kann.

Für (C)adS₄ tritt dieses Problem gleichermaßen im Grenzwert $r'_p \rightarrow \frac{\pi}{2}\mathfrak{K}$ (\mathfrak{K}, β fest) auf, wie wir aus (5.2) und (5.3) erkennen.

Bevor wir uns weiter mit diesem Umstand beschäftigen, wollen wir noch eine asymptotische Analyse der Ausdrücke (5.1) und (5.2) für $\mathfrak{K} \rightarrow \infty$ (β fest; $r'_p = \text{konst.}$ für (C)adS₄) vornehmen. Dies ist insofern interessant, als daß die Metriken $ds_{\text{ESU}_4}^2$ (4.18) und $ds_{(\text{C})\text{adS}_4}^2$ (4.63) für $\mathfrak{K} \rightarrow \infty$ in die Minkowski-Metrik (mit konformem Faktor $(\frac{K}{\Lambda})^{\frac{1}{2}}$ für ESU₄) in Kugelkoordinaten übergehen. Wir würde daher erwarten, daß (5.1) und (5.2) sich asymptotisch wie $\frac{1}{12\beta^2} \frac{\Lambda}{K}$ bzw. $\frac{1}{12\beta^2}$ verhalten.

Die asymptotische Entwicklung der Reihe (5.6) erhalten wir durch

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n}{e^{\frac{\beta}{\mathfrak{K}}n} - 1} = \frac{\mathfrak{K}^2}{\beta^2} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{n^{\frac{\beta}{\mathfrak{K}}} \beta}{e^{\frac{\beta}{\mathfrak{K}}n} - 1} \xrightarrow{\mathfrak{K} \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{K}^2}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\mathfrak{K}^2}{\beta^2} \frac{\pi^2}{6}. \quad (5.14)$$

Für (5.7) verwenden wir die Reihendarstellung des Kosinus Hyperbolicus:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh\left(\beta \frac{n}{\mathfrak{K}}\right) - 1} &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{\beta n}{\mathfrak{K}}\right)^{2k}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathfrak{K}^2}{\beta^2} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{\beta n}{\mathfrak{K}}\right)^{2k-2}} \\ &\xrightarrow{\mathfrak{K} \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{K}^2}{\beta^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\mathfrak{K}^2}{\beta^2} \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Setzen wir dies in (5.1) und (5.2) ein, finden wir das vermutete Resultat¹³⁶:

$$\begin{aligned} \omega(\cdot: \Phi^2:_{\text{ESU}_4}(p)) &\xrightarrow{\mathfrak{K} \rightarrow \infty} \frac{1}{12\beta^2} \frac{\Lambda}{K} \\ \omega(\cdot: \Phi^2:_{(\text{C})\text{adS}_4}(p)) &\xrightarrow{\mathfrak{K} \rightarrow \infty} \frac{1}{12\beta^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Wir bemerken außerdem, daß (5.14) und (5.15) genauso für eine asymptotische Analyse $\beta \rightarrow 0$ (\mathfrak{K} fest; $r'_p \ll \mathfrak{K}$ für (C)adS₄) verwendet werden kann. D.h. der *Schwache-Krümmung-Limes* ($\mathfrak{K} \rightarrow \infty$) und der *Hohe-Temperatur-Limes* ($\beta \rightarrow 0$) bei $r'_p \ll \mathfrak{K}$ führen auf ein asymptoti-

¹³⁶Beachte: $\cos\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right) \approx 1$, für $r'_p \ll \mathfrak{K}$.

sches Verhalten der Temperaturfunktionen von (5.1) und (5.2), das dem der Referenzzustände scharfer Temperatur gleicht (für ESU_4 ist die Temperaturfunktion durch $(\frac{\Lambda}{K})^{\frac{1}{2}}$ skaliert). Daher ist für $\beta \ll \mathfrak{R}$, $1 \ll \mathfrak{R}$ (und $r'_p \ll \mathfrak{R}$ für adS_4) die Interpretation im Sinne des lokalen Gleichgewichtes möglich. Ein Beobachter, für den diese Bedingungen an β und \mathfrak{R} (und r'_p) erfüllt sind, würde mittels des Wick-Quadrates als lokale thermische Observable eine Gleichgewichtssituation¹³⁷ in ESU_4 bzw. (C) adS_4 nicht von einer Gleichgewichtssituation¹³⁸ im Minkowskiraum unterscheiden können. Sogar die Angabe einer scharfen Temperatur, bestimmt durch den Parameter β der konstruierten KMS-Zustände, wäre unter diesen Umständen möglich. Lediglich der Beobachter in ESU_4 würde eine Diskrepanz entsprechend der Skalierung $(\frac{\Lambda}{K})$ feststellen, d.h. einem Zustand ω mit Parameter β würde er einen thermischen Referenzzustand zur inversen Temperatur $(\frac{K}{\Lambda})^{\frac{1}{2}} \beta$ zuordnen. Diese Diskrepanz ist durch den zuvor erwähnten Umstand bedingt, daß die Metrik dieses Beobachters nur bis auf den konformen Faktor $\frac{K}{\Lambda}$ im Grenzwert $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$ mit der Minkowski-Metrik übereinstimmt. Sie ist umso größer je stärker $\frac{K}{\Lambda}$ von 1 abweicht. Insbesondere für großes \mathfrak{R} und somit schwache Krümmung $K(= \frac{1}{\mathfrak{R}^2})$ bedeutet letzteres, daß ein ESU_4 -Beobachter nur für entsprechend kleine Werte der kosmologischen Konstanten Λ ($\frac{K}{\Lambda} \approx 1$) den Parameter β als Temperatur (nach (5.5)) interpretieren würde.

Eine Reskalierung der t' -Koordinate der Form $t := (\frac{K}{\Lambda})^{\frac{1}{2}} t'$ und der "Zeittranslationen" $\phi_{(\frac{\Lambda}{K})^{\frac{1}{2}} t}$ (statt ϕ_t) in ESU_4 gleicht den Unterschied aus, da dies nach (4.34) auf die inverse Temperatur $(\frac{\Lambda}{K})^{\frac{1}{2}} \beta$ (statt β) führt. Die Koordinate t entspricht der "Zeit" in den *Friedmann-Gleichungen* (s. (4.15) und (4.18)). Der Umstand, daß es für ESU_4 zwei natürliche Zeitskalen gibt, läßt sich durch die Existenz der zwei Parameter $K = \frac{1}{\mathfrak{R}^2}$ (Krümmung) und Λ (kosmologische Konstante) verstehen. Beide induzieren ein intrinsisches Längenmaß und mit der Lichtgeschwindigkeit c ein assoziiertes Zeitmaß. Die Koordinate t' entspricht der " K "-Skala, die Koordinate t der " Λ "-Skala. Die vorangegangene Diskussion deutet an, daß in Bezug auf den Minkowskiraum die " Λ "-Skala geeigneter ist. Die Form der Temperaturfunktion des Beobachters ist von der Wahl der Skalierung unabhängig.

Zur Veranschaulichung: Für unser Universum ist $\mathfrak{R} \approx 5 \cdot 10^{60}$ (Größenordnung: 10^{26} m) und $\beta \approx 5 \cdot 10^{31}$ (Größenordnung: 1K; Mikrowellen-Hintergrund) in Einheiten mit $G = c = \hbar = k_B = 1$ (z.B. Plack-Einheiten; s. [Bar02]).

Zurückkommend auf die freie Konstante c , wollen wir die in [BS07] getroffenen Wahl diskutieren. Dort wurde c durch die Vorschrift fixiert, daß ein geodätischer Beobachter in der *de Sitter-Raumzeit* den Erwartungswert des Wick-Quadrates im Grundzustand ($\beta \rightarrow \infty$) als 0 deklariert. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Entwicklung der Hadamard-Parametrix (4.86) einen fehlerhaften numerischen Faktor $\frac{1}{768\pi^2}$ (statt $\frac{1}{192\pi^2}$) in [BS07] (s. S.5) aufweist, ergibt sich der Wert:

$$c = \frac{7}{768\pi^2}. \quad (5.17)$$

Hinsichtlich der asymptotischen Analyse stellt sich die Frage, ob eine Bestimmung der Konstante c im Grenzwert $\beta \rightarrow \infty$ sinnvoller wäre, d.h. am Beispiel ESU_4

$$c = \frac{1}{S_{\text{ESU}_4}} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{12\beta^2} - \omega(\cdot; \Phi^2; \text{ESU}_4)(\beta) \right). \quad (5.18)$$

¹³⁷Entsprechend der konstruierten KMS-Zustände und der verwendeten Dynamiken.

¹³⁸Entsprechend der thermischen Referenzzustände \mathcal{R} .

Mit der Wahl (5.17) für c erhalten wir für den Erwartungswert des Wick-Quadrates im Grenzwert $\beta \rightarrow \infty$ (s. (5.11)):

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega(\Phi^2 :_{\text{ESU}_4}(p)) = \frac{13}{96} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \frac{\Lambda}{K} \stackrel{K=\frac{1}{\mathfrak{K}^2}}{=} \frac{13}{96} \frac{\Lambda}{4\pi^2} \quad (5.19)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega(\Phi^2 :_{(\text{C})\text{adS}_4}(p)) = -\frac{13}{48} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2} \quad (5.20)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega(\Phi^2 :_{(\text{C})\text{adS}_{4,j}}(p)) = \frac{13 + (-1)^j 12}{48} \frac{1}{4\pi^2 \mathfrak{K}^2}. \quad (5.21)$$

D.h. ein ESU_4 -Beobachter würde die KMS-Zustände ω für alle Werte von β mit Referenzzuständen identifizieren können. Ein $(\text{C})\text{adS}_4$ -Beobachter (alle Randbedingungen) dagegen könnte dies nur bis zu einem kritischen Wert β_c . Dieser kritische Wert wäre, bedingt durch den Faktor $\left(1 + \cos\left(\frac{r'_p}{\mathfrak{K}}\right)\right)$, umso kleiner, je größer der ‐Abstand‐ r'_p von den Geodäten bei $r'_p = 0$ würde. Desweiteren könnten beide in Abhängigkeit der Krümmung (repräsentiert durch \mathfrak{K}) eine mit β zunehmende Abweichung im Verlauf ihrer Temperaturfunktion (5.5) von der durch die Referenzzustände vorgegebenen feststellen. Allerdings lässt die obige asymptotische Analyse erwarten, daß diese Abweichung für einen realistischen Bereich $5 \cdot 10^{31} \approx \beta \ll \mathfrak{K} \approx 5 \cdot 10^{60}$, ($r'_p \ll \mathfrak{K}$) vernachlässigbar ist.

Die umseitigen Abbildungen (5.4-5.7) zeigen den Verlauf des Wick-Quadrates als Funktion von β relativ zu der thermischen (Referenz-)Funktion $\beta \mapsto \frac{1}{12\beta^2}$ bei $\mathfrak{K} \approx 5 \cdot 10^{60}$ (und $r'_p \approx 0$) für ESU_4 (in der ‐Zeit‐ t der *Friedmann-Gleichungen*, s.o.) und $(\text{C})\text{adS}_4$ (‐transparente‐ Randbedingungen).

Zusammenfassend lässt sich sagen, daß vom Standpunkt des lokalen Gleichgewichtes ein gewisser Unterschied zwischen den physikalischen Situationen, die durch KMS-Zustände auf verschiedenen (stationären) Raumzeiten modelliert werden, bestehen kann.

Insbesondere deuten die Ergebnisse an, daß es in dem betrachteten Modell (masseloses, konform kovariantes Klein-Gordon-Feld) nicht notwendigerweise möglich ist, KMS-Zustände (zu einer bestimmten inversen Temperatur β) auf gekrümmten Raumzeiten im Sinne der gewählten KMS-Zustände scharfer Temperatur im Minkowskiraum (eichinvariant, ‐schwach-clusternd‐, ...), welche die hier verwendeten thermischen Referenzzustände erzeugen, zu verstehen, nicht einmal in der idealisierten Messungen ‐am Punkt‐.

Es könnte daher sinnvoll sein, die ‐Impuls-0-Beiträge‐ $c(p, q)$ (vgl. Gleichung (4.6)) zur 2-Punkt-Funktion ((4.7) und (4.8)) sowohl in der Auswahl der thermischen Referenzzustände \mathcal{R} (Zustände mit *Bose-Einstein-Kondensat*), als auch in den betrachteten KMS-Zuständen über ESU_4 und $(\text{C})\text{adS}_4$ zu berücksichtigen. Dies würde einerseits die, durch die thermischen Referenzzustände beschreibbaren, physikalischen Situationen erweitern und andererseits Zustände mit modifizierten Temperaturverläufen über ESU_4 und $(\text{C})\text{adS}_4$ erlauben.

Ungeachtet dessen, scheinen die gefundenen Abweichungen auf realistischen Skalen minimal zu sein.

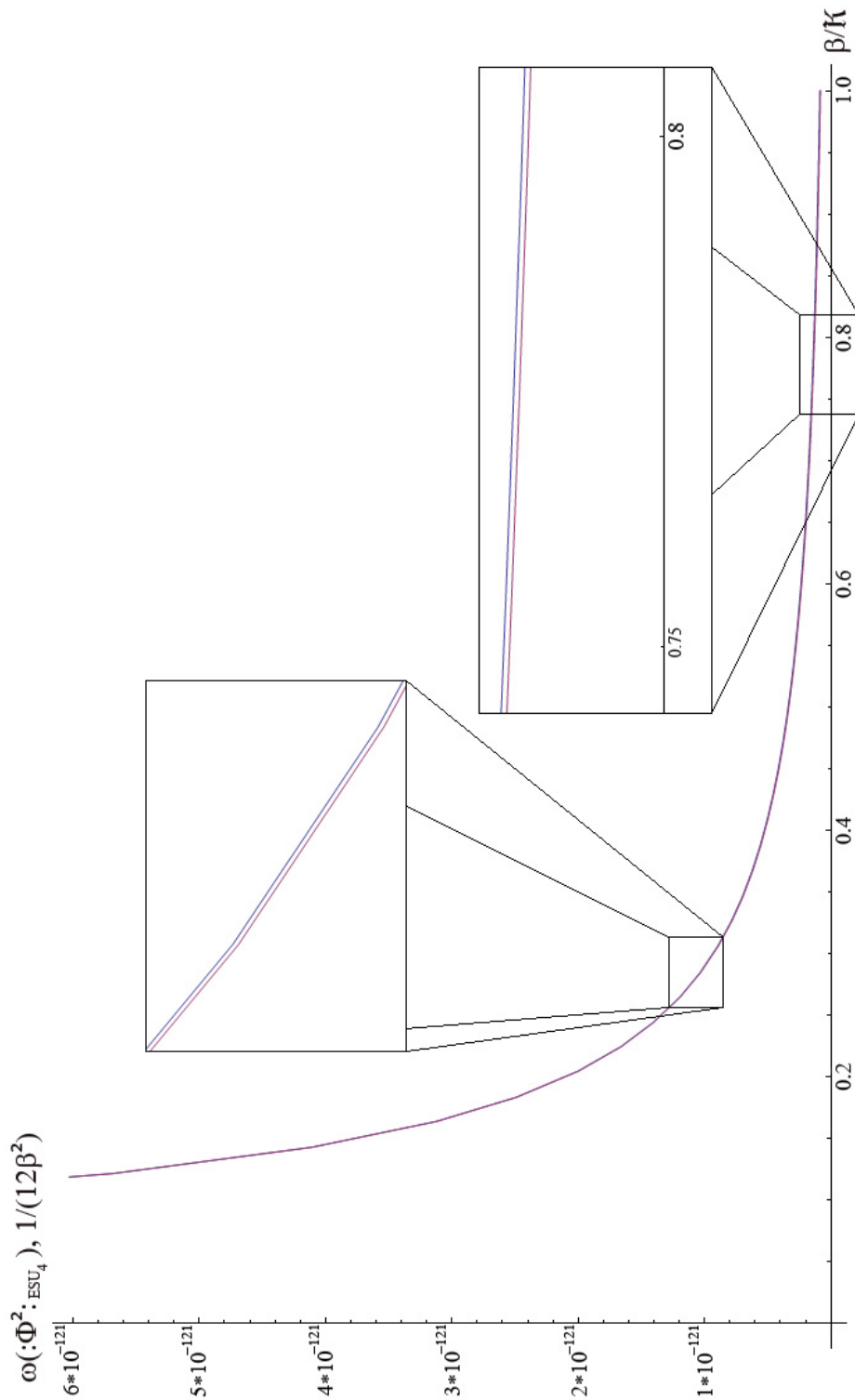


Abbildung 5.4 – Die Abbildung zeigt den Erwartungswert des Wick-Quadrates (blau) für ESU_4 (5.1) als Funktion von β mit $\mathfrak{K} \approx 5 \cdot 10^{60}$ sowie die Funktion $\beta \mapsto \frac{1}{12\beta^2}$ (lila) im Bereich $0.1 \leq \frac{\beta}{\mathfrak{K}} \leq 1$. Die vergrößerten Bereiche lassen auf dieser Skala einen kleinen Unterschied erkennen, der mit abnehmendem β geringer wird.

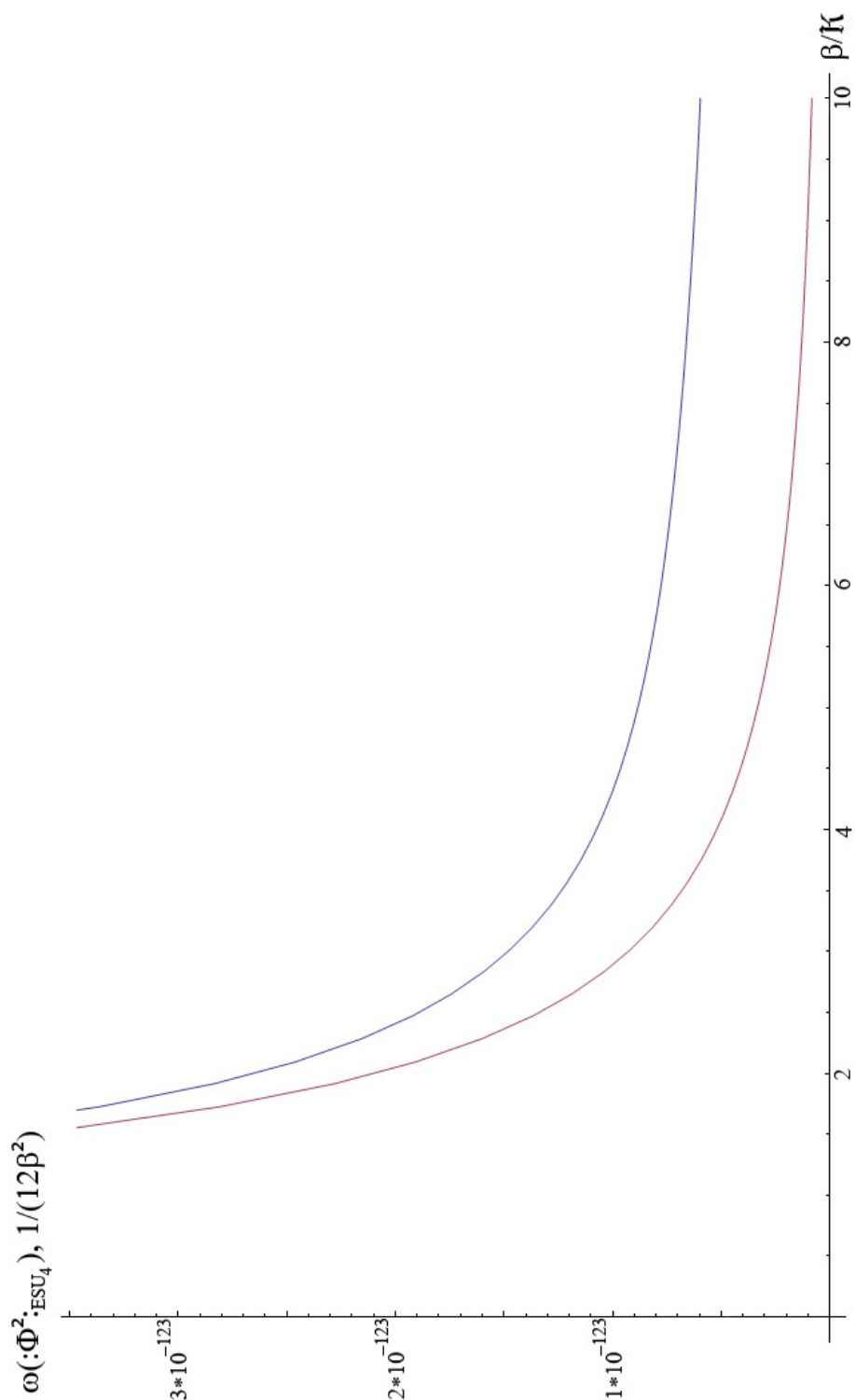


Abbildung 5.5 – Die Abbildung zeigt den Erwartungswert des Wick-Quadrates (blau) für ESU_4 (5.1) als Funktion von β mit $\mathfrak{R} \approx 5 \cdot 10^{60}$ sowie die Funktion $\beta \mapsto \frac{1}{12\beta^2}$ (lila) im Bereich $1 \leq \frac{\beta}{\mathfrak{R}} \leq 10$. Der Unterschied wird mit zunehmendem β größer, da der Erwartungswert des Wick-Quadrates gegen $\frac{13}{384\pi^2 \mathfrak{R}^2}$ tendiert.

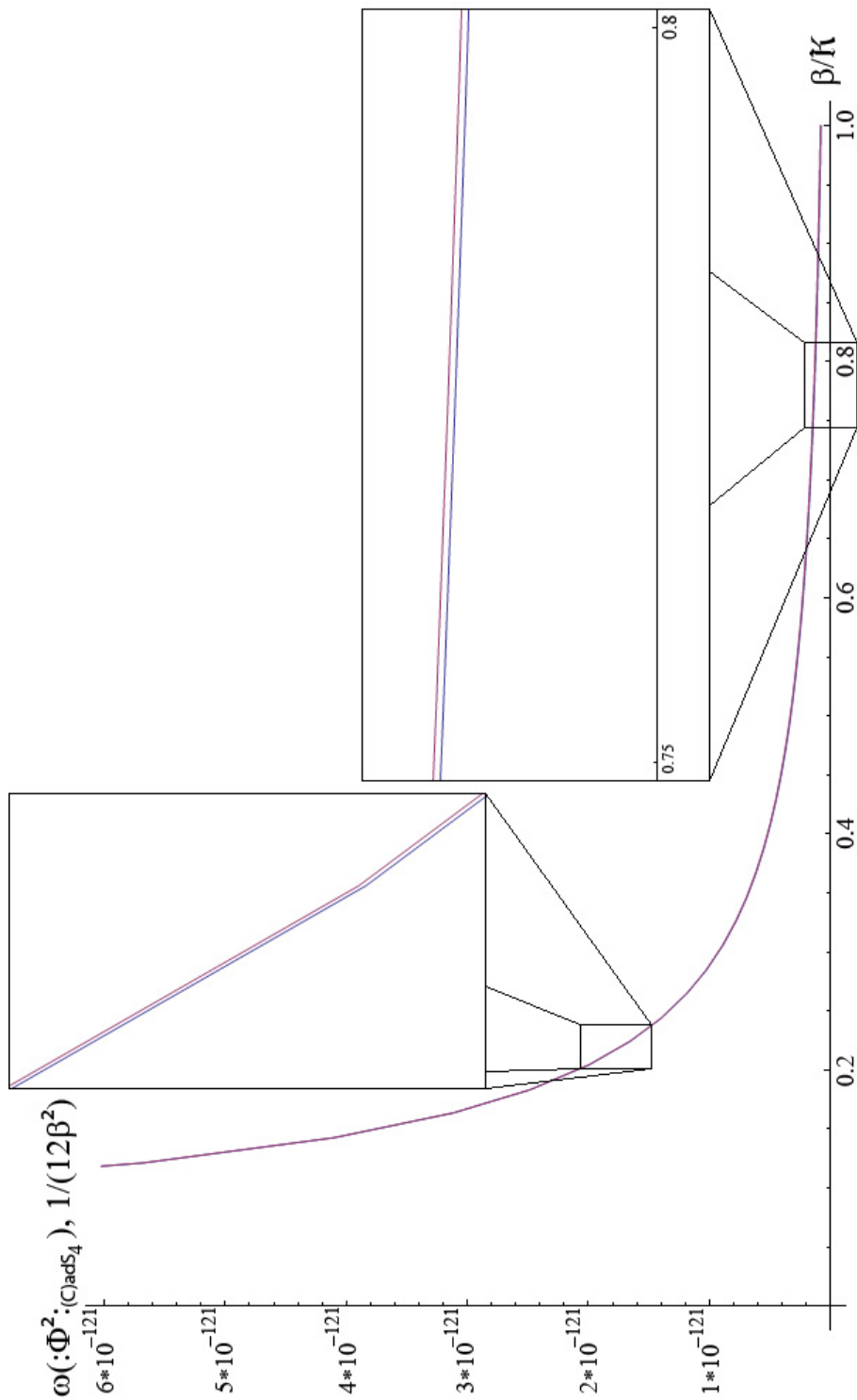


Abbildung 5.6 – Die Abbildung zeigt den Erwartungswert des Wick-Quadrates (blau) für $(C)adS_4$ (5.2) als Funktion von β mit $\mathfrak{R} \approx 5 \cdot 10^{60}$ sowie die Funktion $\beta \mapsto \frac{1}{12\beta^2}$ (lila) im Bereich $0.1 \leq \frac{\beta}{\mathfrak{R}} \leq 1$. Die vergrößerten Bereiche lassen auf dieser Skala einen kleinen Unterschied erkennen, der mit abnehmendem β geringer wird.

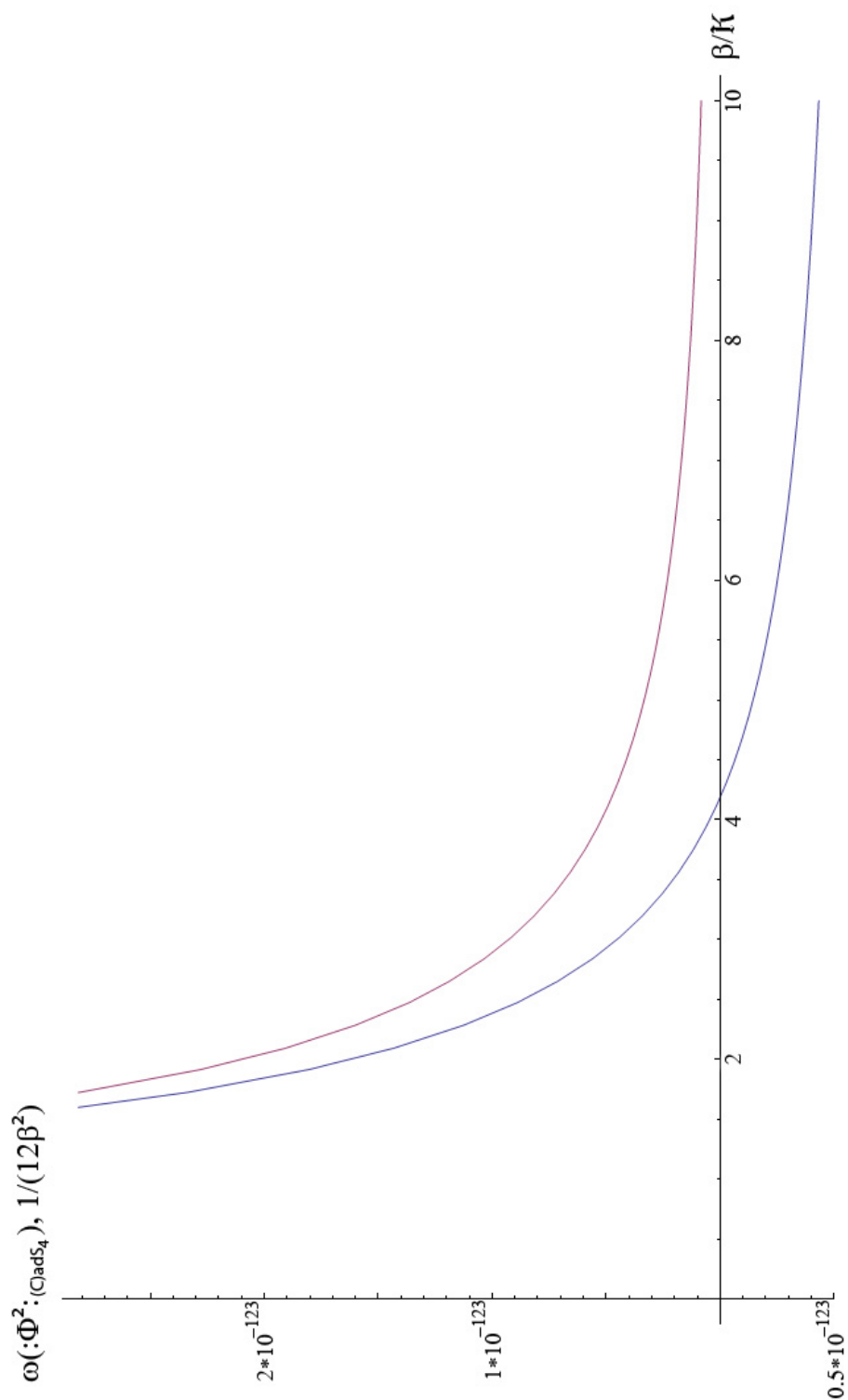


Abbildung 5.7 – Die Abbildung zeigt den Erwartungswert des Wick-Quadrates (blau) für (C)adS₄ (5.2) als Funktion von β mit $\mathfrak{R} \approx 5 \cdot 10^{60}$ sowie die Funktion $\beta \mapsto \frac{1}{12\beta^2}$ (lila) im Bereich $1 \leq \frac{\beta}{\mathfrak{R}} \leq 10$. Der Unterschied wird mit zunehmendem β größer, da der Erwartungswert des Wick-Quadrates gegen $-\frac{13}{192\pi^2\mathfrak{R}^2}$ tendiert.

Teil III
Appendizes

A Differentialgeometrie

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.

CARL FRIEDRICH GAUSS

In diesem Abschnitt finden sich einige grundlegende Definitionen und Aussagen zum Thema Differentialgeometrie¹³⁹. Der Leser sollte mit den Grundlagen topologischer Räume vertraut sein. Ist dies nicht der Fall, so finden sich Details im Buch von Glen E. Bredon [Bre93]. Ebenso ist sind Kenntnisse der elementaren Differentialgeometrie im \mathbb{R}^n hilfreich¹⁴⁰.

A.1 Mannigfaltigkeiten

Definition A.1:

Für eine Menge \mathcal{M} nennt man ein Paar (\mathcal{U}, ψ) ein n -dimensionales Koordinatensystem oder eine n -dimensionale Karte, falls $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ und ψ eine bijektive Abbildung

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\psi} \psi(\mathcal{U}) = \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

auf eine offene Teilmenge $\psi(\mathcal{U}) = \mathcal{W}$ des \mathbb{R}^n (in der Standard-Topologie) ist.

Bezeichnet man mit $u^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ die natürlichen Koordinatenfunktionen, so nennt man die Funktionen $x_{\psi}^i := u^i \circ \psi$

$$\mathcal{U} \xrightarrow{x_{\psi}^i} \mathbb{R} \quad (\text{A.2})$$

die zu ψ assoziierten Koordinatenfunktionen.

Sind $(\mathcal{U}_{\alpha}, \psi_{\alpha})$ und $(\mathcal{U}_{\beta}, \psi_{\beta})$ zwei Koordinatensysteme für \mathcal{M} mit $\mathcal{U}_{\beta\alpha} := \mathcal{U}_{\beta} \cap \mathcal{U}_{\alpha} \neq \emptyset$, so bezeichnet man die Abbildung $\psi_{\beta\alpha} := \psi_{\beta} \circ \psi_{\alpha}^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \psi_{\alpha}(\mathcal{U}_{\beta\alpha}) & \xrightarrow{\psi_{\beta\alpha}} & \psi_{\beta}(\mathcal{U}_{\beta\alpha}) \\ & \swarrow \psi_{\alpha} & \searrow \psi_{\beta} \\ & \mathcal{U}_{\beta\alpha} & \end{array} \quad (\text{A.3})$$

als Übergangsfunktion zwischen $(\mathcal{U}_{\alpha}, \psi_{\alpha})$ und $(\mathcal{U}_{\beta}, \psi_{\beta})$.

Definition A.2:

Ein n -dimensionaler Atlas¹⁴¹ $\mathcal{A}_r^n(\mathcal{M})$ der Klasse C^r ($r = 1, 2, \dots, \infty, \omega$) für eine Menge \mathcal{M} ist eine Familie von n -dimensionalen Koordinatensystemen $\{(\mathcal{U}_{\alpha}, \psi_{\alpha})\}_{\alpha \in A}$, s.d.

$$(1) \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_{\alpha} = \mathcal{M},$$

$$(2) \psi_{\alpha_1\alpha_2} \in C^r(\mathbb{R}^n) \quad \forall \mathcal{U}_{\alpha_1\alpha_2} \neq \emptyset.$$

Zwei solche Atlanten $\mathcal{A}_r^n(\mathcal{M})$ und $\mathcal{B}_r^n(\mathcal{M})$ heißen kompatibel oder verträglich, falls ihre Vereinigung $\mathcal{C}(\mathcal{M})$, gegeben durch die Familie $\{(\mathcal{U}_{\gamma}, \psi_{\gamma})\}_{\gamma \in C}$ mit $C := A \sqcup B$, wieder ein n -dimensionaler Atlas der Klasse C^r für \mathcal{M} ist.

¹³⁹siehe [O'N83](Abschnitte 1, 2, 5, 11 und Appendix B), [HE73](Abschnitt 2), [BGP07](Abschnitt 1), [Fri75](Abschnitt 1 und 2), [KN69](Abschnitt 1), [Bre93](Kapitel 2)

¹⁴⁰siehe [AF01](besonders Kapitel 3)

¹⁴¹kurz: Atlas

Der Atlas $\bar{\mathcal{A}}_r^n(\mathcal{M})$, bestehend aus allen mit einem Atlas $\mathcal{A}_r^n(\mathcal{M})$ kompatiblen Atlanten, heißt vollständiger Atlas zu $\mathcal{A}_r^n(\mathcal{M})$.

Es ergibt sich folgendes nützliche Resultat:

Proposition A.3:

Der vollständige Atlas $\bar{\mathcal{A}}_r^n(\mathcal{M})$ zu einem Atlas $\mathcal{A}_r^n(\mathcal{M})$ für eine Menge \mathcal{M} ist eindeutig bestimmt.

Bemerkung A.4:

Proposition A.3 erlaubt die Einführung einer Topologie auf \mathcal{M} durch die Forderung, daß die Abbildungen $\psi_{\bar{\alpha}}$ in $\bar{\mathcal{A}}_r^n(\mathcal{M})$ für alle $\bar{\alpha} \in \bar{A}$ Homöomorphismen sind. Man bezeichnet dann $\bar{\mathcal{A}}_r^n(\mathcal{M})$ als eine C^r -Struktur auf \mathcal{M} .

Definition A.5:

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit¹⁴² \mathcal{M} (auch \mathcal{M}_r^n) der Klasse C^r ist eine Menge \mathcal{M} mit einem vollständigen Atlas $\mathcal{A}_r^n(\mathcal{M})$, s.d. \mathcal{M} in der durch $\mathcal{A}_r^n(\mathcal{M})$ induzierten Topologie ein parakompakter Hausdorff-Raum ist¹⁴³.

Bemerkung A.6:

Sind \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n zwei Mannigfaltigkeiten der Klasse C^r bzw. C^s mit Atlanten $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ und $\mathcal{A}(\mathcal{N}) = \{(\mathcal{V}_\beta, \chi_\beta)\}_{\beta \in B}$, so wird

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(p, q) \mid p \in \mathcal{M}, q \in \mathcal{N}\}$$

mit den Produktkoordinatensystemen

$$\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta \xrightarrow{\psi_\alpha \times \chi_\beta} \psi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \times \chi_\beta(\mathcal{V}_\beta) \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \quad (\text{A.4})$$

$$(p, q) \longmapsto (\psi_\alpha(p), \chi_\beta(q))$$

in eindeutiger Weise zu einer $(m+n)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse $C^{\min(r,s)}$. $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ heißt das *kartesische Produkt* von \mathcal{M} und \mathcal{N} .

Definition A.7:

Sind \mathcal{M}_r^m und \mathcal{N}_s^n zwei Mannigfaltigkeiten, so ist eine Abbildung

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\phi} \mathcal{N} \quad (\text{A.5})$$

aus der Klasse C^p ($p = \min(r, s)$), falls die Abbildungen

$$\mathbb{R}^m \supseteq \psi(\mathcal{U}) \xrightarrow{\chi \circ \phi \circ \psi^{-1}} \chi(\mathcal{V}) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\text{A.6})$$

für alle Koordinatensysteme (\mathcal{U}, ψ) von \mathcal{M} und (\mathcal{V}, χ) von \mathcal{N} in $C^p(\psi(\mathcal{U}), \chi(\mathcal{V}))$ liegen. ϕ wird als Diffeomorphismus der Klasse C^p bezeichnet, falls ϕ^{-1} existiert und ebenfalls aus der Klasse C^p ist. \mathcal{M} und \mathcal{N} heißen dann diffeomorph.

Die Menge der Abbildungen der Klasse C^p zwischen \mathcal{M} und \mathcal{N} wird mit $C^p(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bezeichnet, die Menge der Diffeomorphismen der Klasse C^p mit $\text{Diff}^p(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Im Fall $\mathcal{N} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} wird die Abkürzung $C^p(\mathcal{M})$ bzw. $C_{\mathbb{C}}^p(\mathcal{M})$ verwendet.

Ferner bezeichnet man den Abschluß der Menge $\{p \in \mathcal{M} \mid f(p) \neq 0\}$ für ein $f \in C^p(\mathcal{M})$ ($C_{\mathbb{C}}^p(\mathcal{M})$) als den Träger $\text{supp } f$ von f .

¹⁴²kurz: Mannigfaltigkeit

¹⁴³Allgemeiner ist es möglich Mannigfaltigkeiten mit Rand zu definieren, siehe z.B. [HE73](Abschnitt 1)

Bemerkung A.8:

Die Eigenschaft der Parakompaktheit einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} hat die nützliche Konsequenz, daß zu jeder offenen Überdeckung $\{\mathcal{U}_\iota\}_{\iota \in I}$ von \mathcal{M} eine *untergeordnete Zerlegung der Eins* $\{f_\kappa \mid \kappa \in K\}$ der Klasse C^r existiert, d.h.:

- (1) $f_\kappa \in C^r(\mathcal{M}) \forall \kappa \in K$ ¹⁴⁴,
- (2) $0 \leq f_\kappa \leq 1 \forall \kappa \in K$,
- (3) $\{\text{supp } f_\kappa\}_{\kappa \in K}$ ¹⁴⁵ ist lokal endlich,
- (4) $\forall \kappa \in K \exists \iota \in I : \text{supp } f_\kappa \subseteq \mathcal{U}_\iota$
- (5) $\sum_{\kappa \in K} f_\kappa = 1$.

Bemerkung A.9:

Im Folgenden soll eine Mannigfaltigkeit immer von der Klasse C^∞ sein. Dies ist durch die Tatsache gerechtfertigt, daß ein vollständiger Atlas der Klasse C^r $r \geq 1$ immer auf einen Atlas der Klasse C^∞ reduziert werden kann (siehe [Küh99] für eine Erwähnung dieses Resultates).

Ein vollständiger Atlas der Klasse C^∞ wird auch als *glatte Struktur* bezeichnet, i.A. wird *glatt* als Synonym für “von der Klasse C^∞ ” verwendet.

A.1.1 Vektoren, Kovektoren und Abbildungen**Definition A.10:**

Ist \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit, so heißt eine Abbildung

$$C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{v} \mathbb{R} \quad (\text{A.7})$$

Tangentialvektor an $p \in \mathcal{M}$, falls

- (1) $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$, (ℝ-Linearität)
- (2) $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ (Leibniz-Regel)

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ gilt.

Die Menge der Tangentialvektoren an p ist durch die Operationen

$$(v + v')(f) := v(f) + v'(f), \quad (\lambda v)(f) := \lambda v(f)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ in natürlicher Weise ein Vektorraum, und wird als Tangentialraum $T_p(\mathcal{M})$ von \mathcal{M} an p bezeichnet.

Bemerkung A.11:

Ein Tangentialvektor $v \in T_p(\mathcal{M})$ ist ein *lokales* Objekt, d.h. für zwei Funktionen $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ mit $f|_{\mathcal{U}} = g|_{\mathcal{U}}$ und einer offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ von p gilt:

$$v(f) = v(g).$$

Ist insbesondere $f|_{\mathcal{U}} = \text{konst.}$, so folgt $v(f) = 0$.

Bemerkung A.12:

Sind \mathcal{M} und \mathcal{N} zwei Mannigfaltigkeiten, so folgt für das kartesische Produkt $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ die Identität

$$T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \{q\}) \oplus T_{(p,q)}(\{p\} \times \mathcal{N}) \cong T_p(\mathcal{M}) \oplus T_q(\mathcal{N}), \quad \forall (p, q) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}.$$

¹⁴⁴siehe Def. A.7 zur Erklärung von $C^r(\mathcal{M})$.

¹⁴⁵siehe Def. A.7 zur Erklärung von $\text{supp } f$.

Ein besonders wichtige Beschreibung von Tangentialvektoren erhält man durch Ableiten entlang von Kurven in \mathcal{M} .

Definition A.13:

Eine Kurve in einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist eine glatte Abbildung

$$\mathcal{I} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{M} \quad (\text{A.8})$$

für ein offenes Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Ist \mathcal{J} ein abgeschlossenes Intervall, so heißt γ Kurvenssegment, falls γ eine glatte Fortsetzung auf ein offenes Intervall $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{J}$ besitzt.

γ ist ein stückweise glattes Kurvenssegment, falls eine (endliche) Partition von \mathcal{I} in abgeschlossene Intervalle $\{\mathcal{I}_k\}_{k=1,\dots,n}$ existiert, s.d. $\gamma|_{\mathcal{I}_k}$ für alle $k = 1, \dots, n$ eine Kurvenssegment ist.

Für ein offenes Intervall \mathcal{I} heißt γ stückweise glatt, falls $\gamma|_{\mathcal{I}_k}$ für alle abgeschlossenen Intervalle $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{I}$ stückweise glatt ist.

Eine Kurve γ heißt fortsetzbar, falls es einen Punkt $p \in \mathcal{M}$ gibt, s.d. für alle Umgebungen \mathcal{U} von p ein $t_0 \in \mathcal{I}$ existiert mit $\gamma(t) \in \mathcal{U} \forall t \geq t_0$.¹⁴⁶ Ein solcher Punkt p heißt Endpunkt von γ . Der Tangential Vektor $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(\mathcal{M})$ an γ ist definiert durch

$$\gamma'(t)f := \frac{d(f \circ \gamma)}{du}(t) \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$$

Ist $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$, so heißt γ regulär.

Definition A.14:

Ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist eine Abbildung

$$\mathcal{M} \xrightarrow{V} \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M}) \quad (\text{A.9})$$

mit $V|_p \in T_p(\mathcal{M}) \forall p \in \mathcal{M}$. Durch

$$(Vf)(p) := V|_p(f) \quad p \in \mathcal{M}, \quad f \in C^\infty(\mathcal{M})$$

ist eine Wirkung auf $C^\infty(\mathcal{M})$ definiert.

V heißt glatt, falls $Vf \in C^\infty(\mathcal{M}) \forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Die Menge der glatten Vektorfelder auf \mathcal{M} wird mit $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ bezeichnet. Die Operationen

$$(fV)|_p := f(p)V|_p, \quad (V + V')|_p = V|_p + V'|_p$$

für alle $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ machen $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ zu einem Modul über $C^\infty(\mathcal{M})$.

Bemerkung A.15:

Eine wichtige Operation auf $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ wird durch den Kommutator

$$\mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} \mathcal{X}(\mathcal{M}) \quad (\text{A.10})$$

$$[V, V'](f) := V(V'f) - V'(Vf) \quad V, V' \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \quad f \in C^\infty(\mathcal{M})$$

erklärt.

Das Paar $(\mathcal{X}(\mathcal{M}), [\cdot, \cdot])$ ist eine Lie-Algebra¹⁴⁷.

Ein hilfreiches Resultat für Vektorfelder ist das Folgende:

¹⁴⁶Anders gesagt: γ hat eine stetige(!) Fortsetzung nach p .

¹⁴⁷siehe Unterabschnitt A.2

Proposition A.16:

Für ein Vektorfeld $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ und einen Punkt $p \in \mathcal{M}$ mit $V|_p \neq 0$ existiert ein angepasstes Koordinatensystem (\mathcal{U}, ψ) um p mit

$$V = \partial_1^\psi \text{ auf } \mathcal{U}$$

Definition A.17:

Für eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} und einen Punkt $p \in \mathcal{M}$ heißt eine lineare Abbildung

$$T_p(\mathcal{M}) \xrightarrow{\omega} \mathbb{R} \quad (\text{A.11})$$

Kotangentialvektor an p , d.h. $\omega \in (T_p(\mathcal{M}))^* =: T_p^*(\mathcal{M})$.
 $T_p^*(\mathcal{M})$ wird als Kotangentialraum bezeichnet.

Definition A.18:

Ein Kovektorfeld oder eine 1-Form auf \mathcal{M} ist eine Abbildung

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\Omega} \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*(\mathcal{M}) \quad (\text{A.12})$$

mit $\Omega|_p \in T_p^*(\mathcal{M}) \forall p \in \mathcal{M}$. Durch

$$(\Omega(V))|_p := \Omega|_p(V|_p) \quad p \in \mathcal{M}$$

ist eine Wirkung auf Vektorfelder V erklärt.

Ω heißt glatt, falls $\Omega(V) \in C^\infty(\mathcal{M}) \forall V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Die Menge der glatten Kovektorfelder wird mit $\mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ oder $\Omega^1(\mathcal{M})$ bezeichnet. Die Operationen

$$(f\Omega)|_p := f(p)\Omega|_p, \quad (\Omega + \Omega')|_p := \Omega|_p + \Omega'|_p$$

für alle $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ machen $\mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ zu einem Modul über $C^\infty(\mathcal{M})$.

Bemerkung A.19:

Eine Abbildung die eng mit Kovektorfeldern verknüpft ist, ist das Differential

$$C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \mathcal{X}^*(\mathcal{M}) \quad (\text{A.13})$$

definiert durch

$$df|_p(v_p) := v_p(f) \quad p \in \mathcal{M}, \quad v_p \in T_p(\mathcal{M})$$

Das Differential hat die Eigenschaften:

$$(1) \quad d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg \quad (\mathbb{R}\text{-Linearität})$$

$$(2) \quad d(fg) = gdf + fdg \quad (\text{Leibniz-Regel})$$

$$(3) \quad d(h(f)) = h'(f)df \quad (\text{Kettenregel})$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ und $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Eine wichtige Klasse von Vektor- und Kovektorfeldern enthält die folgende

Definition A.20:

Für ein Koordinatensystem (\mathcal{U}, ψ) (für \mathcal{M}^n) mit $p \in \mathcal{U}$ und $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ heißen

$$\partial_{i|p}^\psi f = \frac{\partial f}{\partial x_\psi^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial u^i}(\psi(p)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

die Koordinatenvektorfelder von ψ auf \mathcal{U} .

Die Koordinatenvektorfelder haben die wichtige Eigenschaft:

$$[\partial_i^\psi, \partial_j^\psi] = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Analog bezeichnet man die 1-Formen dx_ψ^i ($i = 1, \dots, n$) als die Koordinatenkovektorfelder oder Koordinaten-1-Formen von ψ auf \mathcal{U} .

Diese Objekten sind dual zueinander, d.h.

$$dx_\psi^i(\partial_j^\psi) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Das folgende Theorem betont die Bedeutung der Koordinatenvektor- und Koordinatenkovektorfelder.

Theorem A.21:

Ist \mathcal{M}^n eine Mannigfaltigkeit und (\mathcal{U}, ψ) ein Koordinatensystem um p in \mathcal{M} , so gilt¹⁴⁸:

$$(1) \quad \left\{ \partial_{i|p}^\psi \right\}_{i=1, \dots, n} \quad \text{ist eine Basis von } T_p(\mathcal{M})$$

$$(2) \quad \left\{ dx_{\psi|p}^i \right\}_{i=1, \dots, n} \quad \text{ist eine Basis von } T_p^*(\mathcal{M})$$

d.h.

$$v = \sum_{i=1}^n \underbrace{v(x_\psi^i)}_{=: \psi v^i} \partial_{i|p}^\psi \quad \forall v \in T_p(\mathcal{M}) \quad \text{und} \quad \omega = \sum_{i=1}^n \underbrace{\omega(\partial_{i|p}^\psi)}_{=: \psi \omega_i} dx_{\psi|p}^i \quad \forall \omega \in T_p^*(\mathcal{M})$$

Korollar A.22:

Die Koordinatenvektorfelder $\left\{ \partial_i^\psi \right\}_{i=1, \dots, n}$ und Koordinatenkovektorfelder $\left\{ dx_\psi^i \right\}_{i=1, \dots, n}$ bilden eine Basis von $\mathcal{X}(\mathcal{U})$ bzw. $\mathcal{X}^*(\mathcal{U})$, wobei $\mathcal{X}^{(*)}(\mathcal{U})$ die Menge, der auf \mathcal{U} eingeschränkten, Elemente von $\mathcal{X}^{(*)}(\mathcal{M})$ ist¹⁴⁹, d.h.

$$V = \sum_{i=1}^n \underbrace{(V x_\psi^i)}_{=: \psi V^i} \partial_i^\psi \quad \forall V \in \mathcal{X}(\mathcal{U}) \quad \text{und} \quad \Omega = \sum_{i=1}^n \underbrace{\Omega(\partial_i^\psi)}_{=: \psi \Omega_i} dx_\psi^i \quad \forall \Omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{U})$$

Um (glatte) Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} und \mathcal{N} zu untersuchen, erweisen sich die folgenden Definitionen als nützlich:

Definition A.23:

Ist $\phi : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine glatte Abbildung, so heißt für $p \in \mathcal{M}$ die Abbildung

$$T_p(\mathcal{M}) \xrightarrow{\phi_{*,p}} T_{\phi(p)}(\mathcal{N}) \tag{A.14}$$

definiert durch

$$\phi_{*,p}(v)(f) := v(f \circ \phi) \quad \forall v \in T_p(\mathcal{M}) \quad \text{und} \quad f \in C^\infty(\mathcal{N})$$

der Pushforward oder das Differential von ϕ .

Sind (\mathcal{U}, ψ) und (\mathcal{V}, χ) Koordinatensysteme um $p \in \mathcal{M}$ bzw. $\phi(p) \in \mathcal{N}$, folgt mit

¹⁴⁸Diese Aussage gilt nur für glatte Mannigfaltigkeiten. In allen anderen Fällen ist Einschränkung auf die von $\left\{ \partial_i^\psi \right\}_{i=1, \dots, n}$ und $\left\{ dx_\psi^i \right\}_{i=1, \dots, n}$ aufgespannten Unterräume von $T_p(\mathcal{M})$ bzw. $T_p^*(\mathcal{M})$ nötig.

¹⁴⁹Alternativ lässt sich \mathcal{U} als offene Untermannigfaltigkeit (s. Unterabschnitt A.1.3) von \mathcal{M} betrachten, für die $\mathcal{X}^{(*)}(\mathcal{U})$ analog zu $\mathcal{X}^{(*)}(\mathcal{M})$ definiert ist.

Theorem A.21:

$$\phi_{*,p}(\partial_{i|p}^\psi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_\chi^j \circ \phi)}{\partial x_\psi^i} \Big|_p \partial_{j|\phi(p)}^\chi \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Ist $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ eine weitere glatte Abbildung, so gilt:

$$(\tau \circ \phi)_{*,p} = \tau_{*,\phi(p)} \circ \phi_{*,p}$$

Der Pushforward von ϕ kann im Falle eines Diffeomorphismus auch für Vektorfelder V auf \mathcal{M} definiert werden:

$$\phi_*(V)f := V(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{N})$$

Bemerkung A.24:

Ist \mathcal{M}^n eine Mannigfaltigkeit mit einer glatten (oder C^k -) Struktur $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \{\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, so können die Differentiale

$$T_p(\mathcal{M}) \xrightarrow{\psi_{\alpha,*},p} T_{\psi_\alpha(p)}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathcal{U}_\alpha \quad (\text{A.15})$$

der Abbildungen ψ_α ($\alpha \in A$), durch die Forderung der Homöomorphie selbiger, genutzt werden, um eine Topologie auf den Tangentialräumen $T_p(\mathcal{M})$ einzuführen.

Im Folgenden wird, sofern nicht anders erwähnt, immer diese Topologie verwendet.

Definition A.25:

Eine glatte Abbildung $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ heißt

(1) Immersion, falls $\phi_{*,p}$ eine injektive Abbildung für alle $p \in \mathcal{M}$ ist.

(2) Submersion, falls $\phi_{*,p}$ eine surjektive Abbildung für alle $p \in \mathcal{M}$ ist.

Das duale Konzept zum Pushforward ist:

Definition A.26:

Ist $\phi : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine glatte Abbildung, so heißt für $p \in \mathcal{M}$ die Abbildung

$$T_{\phi(p)}^*(\mathcal{N}) \xrightarrow{\phi_p^*} T_p(\mathcal{M}) \quad (\text{A.16})$$

definiert durch

$$\phi_p^*(\omega)(v) := \omega(\phi_{*,p}(v)) \quad \forall v \in T_p(\mathcal{M}) \text{ und } \omega \in T_{\phi(p)}^*(\mathcal{N})$$

der Pullback von ϕ .

Sind (\mathcal{U}, ψ) und (\mathcal{V}, χ) Koordinatensysteme um $p \in \mathcal{M}$ bzw. $\phi(p) \in \mathcal{N}$, folgt mit Theorem A.21:

$$\phi_p^*(dy_\chi^i|_{\phi(p)}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y_\chi^i \circ \phi)}{\partial x_\psi^j} \Big|_p dx_\psi^j \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Ist $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ eine weitere glatte Abbildung, so gilt:

$$(\tau \circ \phi)_p^* = \phi_p^* \circ \tau_{\phi(p)}^*$$

Der Pullback von ϕ kann auch für Kovektorfelder Ω auf \mathcal{N} definiert werden:

$$\phi^*(\Omega)|_p(v) := \Omega|_{\phi(p)}(\phi_{*,p}(v)) \quad \forall p \in \mathcal{M}, v \in T_p(\mathcal{M})$$

Bemerkung A.27:

Die Matrix

$$\left(\frac{\partial(y_\chi^j \circ \phi)}{\partial x_\psi^i} \Big|_p \right)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$$

wird *Jacobi-Matrix* von ϕ an p relativ zu (\mathcal{U}, ψ) und (\mathcal{V}, χ) genannt.

Auch auf Mannigfaltigkeiten gilt der Satz über die inverse Funktion.

Theorem A.28:

Der Pushforward $\phi_{*,p} : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\phi(p)}(\mathcal{N})$ einer glatten Abbildung $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist genau dann ein Isomorphismus von Vektorräumen (an p), wenn eine offene Umgebung \mathcal{U} von p existiert, s.d. $\phi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U})$ ein Diffeomorphismus ist.

Eine Abbildung ϕ , die eine dieser äquivalenten Eigenschaften für alle $p \in \mathcal{M}$ erfüllt, heißt lokaler Diffeomorphismus.

Ein wichtiges Konzept, das mit Hilfe der Jacobi-Matrix definiert werden kann, ist die Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit.

Definition A.29:

Ein Mannigfaltigkeit \mathcal{M} heißt orientierbar, falls es einen Atlas $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ gibt, s.d. die Determinanten der Jacobi-Matrizen der Übergangsfunktionen positiv sind. Ein solcher Atlas wird orientierender Atlas genannt. Wird ein orientierender Atlas für \mathcal{M} verwendet, so wird \mathcal{M} als orientierte bezeichnet.

Alternativ kann Orientierbarkeit mittels der Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit definiert werden.

Definition A.30:

Sei \mathcal{M}^n eine Mannigfaltigkeit und $p \in \mathcal{M}$ ein Punkt.

Eine Orientierung des Tangentialraums $T_p(\mathcal{M})$ ist die Auswahl einer Äquivalenzklasse von Basen des selbigen bezüglich der Äquivalenzrelation

$$\{v_i\}_{i=1, \dots, n} \sim \{v'_i\}_{i=1, \dots, n} \Leftrightarrow \det M > 0, \quad v'_i = \sum_{j=1}^n M_i^j v_j \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Die Menge der Orientierungen $\left\{ \{v_i\}_{i=1, \dots, n} \mid \text{Die } v_i \text{ bilden eine Basis von } T_p(\mathcal{M}) \right\} / \sim$ von $T_p(\mathcal{M})$ wird mit $\text{Or}(T_p(\mathcal{M}))$ bezeichnet^{150,151}. Die zu einem Koordinatensystem (\mathcal{U}, ψ) assoziierte Orientierung wird durch die Abbildung

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\mathcal{O}_\psi} \bigcup_{p \in \mathcal{U}} \text{Or}(T_p(\mathcal{M})) \quad (\text{A.17})$$

$$p \longmapsto \mathcal{O}_\psi(p) := \left[\left\{ \partial_{i|p}^\psi \right\}_{i=1, \dots, n} \right]$$

definiert.

Eine Orientierung für \mathcal{M} wird durch eine Abbildung

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mathcal{O}} \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \text{Or}(T_p(\mathcal{M})) \quad (\text{A.18})$$

¹⁵⁰Es ist direkt ersichtlich, daß es nur zwei Orientierungen für einen Tangentialraum gibt.

¹⁵¹Äquivalenzklassen werden wie üblich durch $[\]$ gekennzeichnet.

mit der Eigenschaft

$$\exists \text{ Koordinatensystem } (\mathcal{U}, \psi) : \mathcal{O}|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}_\psi$$

gegeben.

\mathcal{M} heißt orientierbar, falls eine solche Abbildung existiert. \mathcal{M} heißt orientiert, falls eine Orientierung für \mathcal{M} gewählt wurde.

Die Standard-Orientierung auf \mathbb{R}^n ist durch die Äquivalenzklasse der Standard-Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ gegeben.

Bemerkung A.31:

Die Definition einer Orientierung für eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} zeigt, daß, falls \mathcal{O} eine Orientierung ist, auch $-\mathcal{O}$ eine Orientierung ist, und diese die einzigen Orientierungen sind, falls \mathcal{M} zusammenhängend ist.

Definition A.32:

Ein lokaler Diffeomorphismus $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ induziert eine Abbildung

$$\text{Or}(T_p(\mathcal{M})) \xrightarrow{[\phi]_p} \text{Or}(T_{\phi(p)}(\mathcal{N})) \quad (\text{A.19})$$

$$\left[\{v_i\}_{i=1, \dots, n} \right] \longmapsto [\phi]_p \left(\left[\{v_i\}_{i=1, \dots, n} \right] \right) := \left[\{\phi_{*,p}(v_i)\}_{i=1, \dots, n} \right]$$

Sind $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ Orientierung für \mathcal{M} bzw. \mathcal{N} , so heißt ϕ

- (1) orientierungserhaltend, falls $[\phi]_p(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(p)) = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(\phi(p)) \quad \forall p \in \mathcal{M}$,
- (2) orientierungsändernd, falls $[\phi]_p(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(p)) = -\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(\phi(p)) \quad \forall p \in \mathcal{M}$.

In Analogie zu Bemerkung A.31 sind dies die einzigen Möglichkeiten, falls \mathcal{M} zusammenhängend ist.

A.1.2 Tensoren und Tensorfelder

Eine wichtige Verallgemeinerung von Vektor- und Kovektorfeldern ist das Konzept der Tensorfelder. Der Leser sollte mit den Details des algebraischen Tensorproduktes vertraut sein. Ist dies nicht der Fall, so finden sich Details in [JS06] (Kapitel 7, Abschnitt 10) und [KN63] (Kapitel 1, Abschnitt 2).

Definition A.33:

Ist \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit und $p \in \mathcal{M}$, so heißt ein Element $\theta \in T_p(\mathcal{M})^{\otimes r} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s}$ Tensor vom Typ (r, s) an p ¹⁵².

Ein Tensor vom Typ $(r, 0)$ ($r \geq 1$) heißt kontravariant, ein Tensor vom Typ $(0, s)$ heißt kovariant.

Bemerkung A.34:

Tensoren verschiedener Typen können miteinander multipliziert werden:

$$T_p(\mathcal{M})^{\otimes r} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s} \times T_p(\mathcal{M})^{\otimes t} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes u} \xrightarrow{\otimes = \otimes|_p} T_p(\mathcal{M})^{\otimes r+t} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s+u} \quad (\text{A.20})$$

$$(\theta, \vartheta) \longmapsto \theta \otimes \vartheta$$

¹⁵²Alle Tensorprodukte, sofern nicht anders vermerkt, sind über \mathbb{R} . Insbesondere gilt $T_p^{(*)}(\mathcal{M})^{\otimes 0} := \mathbb{R}$

Bemerkung A.35:

Im Folgenden ist die natürliche Einbettung $T_p(\mathcal{M}) \hookrightarrow T_p^{**}(\mathcal{M})$, gegeben durch $v(\theta) := \theta(v)$ $\forall v \in T_p(\mathcal{M})$, $\theta \in T_p^*(\mathcal{M})$, von entscheidender Bedeutung.

Definition A.36:

Ein Tensorfeld vom Typ (r, s) auf \mathcal{M} ist eine Abbildung

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\Theta} \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M})^{\otimes r} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s} \quad (\text{A.21})$$

Durch

$$(\Theta(\Omega_1, \dots, \Omega_r, V_1, \dots, V_s))|_p := \Theta|_p(\Omega_{1|p}, \dots, \Omega_{r|p}, V_{1|p}, \dots, V_{s|p}) \quad p \in \mathcal{M}$$

ist eine Wirkung auf Vektorfelder V_1, \dots, V_s und Kovektorfelder $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ erklärt.

Θ heißt glatt, falls $\Theta(\Omega_1, \dots, \Omega_r, V_1, \dots, V_s) \in C^\infty(\mathcal{M}) \forall V_1, \dots, V_s \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, $\Omega_1, \dots, \Omega_r \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$. Die Menge der glatten Tensorfelder vom Typ (r, s) auf \mathcal{M} wird mit $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$ bezeichnet. Insbesondere gilt

- (1) $\mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}) = \mathcal{X}(\mathcal{M})$,
- (2) $\mathcal{T}_1^0(\mathcal{M}) = \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$
- (3) sowie $\mathcal{T}_0^0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$.

Die Operationen

$$(f\Theta)|_p := f(p)\Theta|_p, \quad (\Theta + \Theta')|_p := \Theta|_p + \Theta'|_p$$

für alle $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ machen $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$ zu einem Modul über $C^\infty(\mathcal{M})$.

Bemerkung A.37:

Das Produkt von Tensoren verschiedenen Typs (vgl. Bemerkung A.34) kann durch

$$(\Theta \otimes \Theta')|_p := \Theta|_p \otimes|_p \Theta'|_p, \quad \Theta \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M}), \Theta' \in \mathcal{T}_u^t(\mathcal{M})$$

auch für Tensorfelder verschiedenen Typs erklärt werden, d.h. es existiert eine Abbildung

$$\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_u^t(\mathcal{M}) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{T}_{s+u}^{r+t}(\mathcal{M}) \quad (\text{A.22})$$

In Analogie zu Korollar A.22 ergibt sich

Korollar A.38:

Ist \mathcal{M}^n eine Mannigfaltigkeit und (\mathcal{U}, ψ) ein Koordinatensystem um $p \in \mathcal{M}$, so bilden die Tensorfelder $\left\{ \partial_{i_1}^\psi \otimes \dots \otimes \partial_{i_r}^\psi \otimes dx_{j_1}^\psi \otimes \dots \otimes dx_{j_s}^\psi \right\}_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n}$ eine Basis für $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{U})$ ¹⁵³, d.h.

$$\Theta = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n} \underbrace{\Theta(dx_{i_1}^\psi, \dots, dx_{i_r}^\psi, \partial_{j_1}^\psi, \dots, \partial_{j_s}^\psi)}_{=: \psi \Theta_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}} \partial_{i_1}^\psi \otimes \dots \otimes \partial_{i_r}^\psi \otimes dx_{j_1}^\psi \otimes \dots \otimes dx_{j_s}^\psi \quad \forall \Theta \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{U})$$

Bemerkung A.39:

Die Komponenten eines Tensors θ vom Typ (r, s) an $p \in \mathcal{M}^n$ können bezüglich beliebiger dualer Basen $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ und $\{\omega^j\}_{j=1, \dots, n}$ von $T_p(\mathcal{M})$ bzw. $T_p^*(\mathcal{M})$ bestimmt werden.

$$\theta = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n} \theta(\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_r}, v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s}$$

¹⁵³ $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{U})$ ist analog zu $\mathcal{X}^{(*)}(\mathcal{U})$ für eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ definiert.

Diese müssen nicht zwingend von Koordinatenvektor- und Koordinatenkovektorfeldern eines Koordinatensystems (\mathcal{U}, ψ) herrühren.

Analog müssen die Komponenten eines glatten Tensorfeldes $\Theta \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{U}')$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{M}$ nicht bezüglich der Koordinatenvektor- und Koordinatenkovektorfelder eines Koordinatensystems (\mathcal{U}, ψ) mit $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ bestimmt werden.

Es kann ein beliebiges Paar $(\{V_i\}, \{\Omega^j\})_{i,j=1,\dots,n}$ dualer Basen von $\mathcal{X}(\mathcal{U}')$ und $\mathcal{X}^*(\mathcal{U}')$ verwendet werden, d.h. die V_i und Ω^j sind für alle $i, j = 1, \dots, n$ (glatte) Vektor- bzw. Kovektorfelder auf \mathcal{U}' , s.d. $(\{V_{i|p}\}, \{\Omega_{|p}^j\})_{i,j=1,\dots,n}$ ein Paar dualer Basen für $T_p(\mathcal{M})$ und $T_p^*(\mathcal{M})$ ist.

$$\Theta = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n} \Theta(\Omega^{i_1}, \dots, \Omega^{i_r}, V_{j_1}, \dots, V_{j_s}) V_{i_1} \otimes \dots \otimes V_{i_r} \otimes \Omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \Omega^{j_s}$$

Es ist zu beachten, daß nun im Allgemeinen

$$[V_i, V_j] \neq 0 \quad \forall i \neq j$$

gilt.

Der Pushforward und der Pullback einer Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten können in natürlicher Weise auf Tensoren und Tensorfelder erweitert werden. Die Erweiterung werden ebenfalls als Pushforward bzw. Pullback bezeichnet.

Definition A.40:

Ist $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine glatte Abbildung, so heißt die für kontravariante Tensoren an $p \in \mathcal{M}$ definierte Abbildung

$$T_p(\mathcal{M})^{\otimes r} \xrightarrow{\phi_{*,p}} T_{\phi(p)}(\mathcal{N})^{\otimes r} \quad (\text{A.23})$$

$$\phi_{*,p}(\theta)(\omega_1, \dots, \omega_r) := \theta(\phi_p^*(\omega_1), \dots, \phi_p^*(\omega_r)) \quad \forall \omega_1, \dots, \omega_r \in T_{\phi(p)}^*(\mathcal{N}) \text{ und } \theta \in T_p(\mathcal{M})^{\otimes r}$$

der Pushforward von ϕ .

Ist $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ eine weitere glatte Abbildung, so gilt:

$$(\tau \circ \phi)_{*,p} = \tau_{*,\phi(p)} \circ \phi_{*,p}$$

Ist ϕ ein Diffeomorphismus so kann der Pushforward auch für kontravariante Tensorfelder Θ auf \mathcal{M} definiert werden:

$$\phi_*(\Theta)|_{\phi(p)}(\omega_1, \dots, \omega_r) := \Theta|_p(\phi_p^*(\omega_1), \dots, \phi_p^*(\omega_r)) \quad \forall p \in \mathcal{M}, \omega_1, \dots, \omega_r \in T_{\phi(p)}^*(\mathcal{N})$$

Definition A.41:

Ist $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine glatte Abbildung, so heißt die für kovariante Tensoren an $\phi(p) \in \mathcal{N}$ definierte Abbildung

$$T_{\phi(p)}^*(\mathcal{N})^{\otimes s} \xrightarrow{\phi_p^*} T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s} \quad (\text{A.24})$$

$$\phi_p^*(\theta)(v_1, \dots, v_s) := \theta(\phi_{*,p}(v_1), \dots, \phi_{*,p}(v_s)) \quad \forall v_1, \dots, v_s \in T_p(\mathcal{M}) \text{ und } \theta \in T_{\phi(p)}^*(\mathcal{N})^{\otimes s}$$

der Pullback von ϕ .

Ist $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ eine weitere glatte Abbildung, so gilt:

$$(\tau \circ \phi)_p^* = \phi_p^* \circ \tau_{\phi(p)}^*$$

Der Pullback von ϕ kann auch für kovariante Tensorfelder Θ auf \mathcal{N} definiert werden:

$$\phi^*(\Theta)|_p(v_1, \dots, v_s) := \Theta|_{\phi(p)}(\phi_{*,p}(v_1), \dots, \phi_{*,p}(v_s)) \quad \forall p \in \mathcal{M}, v_1, \dots, v_s \in T_p(\mathcal{M})$$

Weitere wichtige Operationen sind die Kontraktionen¹⁵⁴ und Derivationen von Tensoren und Tensorfeldern.

Definition A.42:

Ist \mathcal{M}^n eine Mannigfaltigkeit und θ ein Tensor vom Typ (r, s) an $p \in \mathcal{M}$, so heißen die (linearen) Abbildungen

$$T_p(\mathcal{M})^{\otimes r} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s} \xrightarrow{\mathcal{C}_{j|p}^i} T_p(\mathcal{M})^{\otimes r-1} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s-1}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (\text{A.25})$$

definiert durch

$$\mathcal{C}_{j|p}^i(\theta)(\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1}) := \sum_{k=1}^n \theta(\omega_1, \dots, \overbrace{\eta^k}^{\text{i-ter Eintrag}}, \dots, \omega_{r-1}, v_1, \dots, \underbrace{\xi_k}_{\text{j-ter Eintrag}}, \dots, v_{s-1})$$

für alle $v_1, \dots, v_{s-1} \in T_p(\mathcal{M})$ und $\omega_1, \dots, \omega_{r-1} \in T_p^*(\mathcal{M})$, wobei $\{\xi_i\}_{i=1, \dots, n}$ und $\{\eta^j\}_{j=1, \dots, n}$ duale Basen von $T_p(\mathcal{M})$ bzw. $T_p^*(\mathcal{M})$ sind, die Kontraktionen von θ über i, j an p .

Aufgrund des Transformationsverhaltens von Vektoren und Kovektoren unter einem Wechsel der dualen Basen ist diese Definition unabhängig von der Wahl selbiger.

Die Kontraktionen lassen sich zu $C^\infty(\mathcal{M})$ -linearen Abbildungen

$$\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathcal{C}_j^i} \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(\mathcal{M}), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (\text{A.26})$$

definiert durch

$$\mathcal{C}_j^i(\Theta)|_p(\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1}) := \sum_{k=1}^n \Theta|_p(\omega_1, \dots, \overbrace{\Omega_{|p}^k}^{\text{i-ter Eintrag}}, \dots, \omega_{r-1}, v_1, \dots, \underbrace{V_{k|p}}_{\text{j-ter Eintrag}}, \dots, v_{s-1})$$

für alle $v_1, \dots, v_{s-1} \in T_p(\mathcal{M})$ und $\omega_1, \dots, \omega_{r-1} \in T_p^*(\mathcal{M})$, wobei $\{V_i\}_{i=1, \dots, n}$ und $\{\Omega^j\}_{j=1, \dots, n}$ duale Basen von $\mathcal{X}(\mathcal{U})$ bzw. $\mathcal{X}^*(\mathcal{U})$ für eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ mit $p \in \mathcal{U}$ sind, fortsetzen. Diese Abbildungen heißen ebenfalls Kontraktionen von Θ über i, j . Ebenso ist die Wohldefiniertheit durch das Transformationsverhalten von Vektor- und Kovektorfeldern unter einem Wechsel der dualen Basen gesichert.

Definition A.43:

Für eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist eine Tensor-Derivation an $p \in \mathcal{M}$ eine Familie von linearen Abbildungen

$$T_p(\mathcal{M})^{\otimes r} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s} \xrightarrow{\mathcal{D}_{|p} = \mathcal{D}_{s|p}^r} T_p(\mathcal{M})^{\otimes r} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s}, \quad r, s \geq 0 \quad (\text{A.27})$$

mit den Eigenschaften

- (1) $(\mathcal{D}_{|p} \circ \otimes)(\cdot, \cdot) = \otimes(\mathcal{D}_{|p}(\cdot), \cdot) + \otimes(\cdot, \mathcal{D}_{|p}(\cdot))$, (Leibniz-Regel)
- (2) $\mathcal{D}_{|p} \circ \mathcal{C}_{j|p}^i = \mathcal{C}_{j|p}^i \circ \mathcal{D}_{|p}$.

¹⁵⁴auch: Verjüngung

Analog ist eine Tensorfeld-Derivation über \mathcal{M} eine Familie von linearen Abbildungen

$$\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathcal{D}=\mathcal{D}_s^r} \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M}), \quad r, s \geq 0 \quad (\text{A.28})$$

mit den Eigenschaften (1) und (2)¹⁵⁵.

Proposition A.44:

Ist \mathcal{D} eine Tensorfeld-Derivation über einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , so existiert für alle offenen Teilmengen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ eine eindeutige Tensorfeld-Derivation $\mathcal{D}_{|\mathcal{U}}$ über \mathcal{U} mit

$$\mathcal{D}_{|\mathcal{U}}(\Theta_{|\mathcal{U}}) = (\mathcal{D}\Theta)_{|\mathcal{U}}$$

für alle (glatten) Tensorfelder Θ über \mathcal{M} , d.h. Tensorfeld-Derivationen sind lokale Objekte. Ferner ist jede Tensorfeld-Derivation \mathcal{D} über \mathcal{M} fixiert durch die Angabe von \mathcal{D}_0^0 und \mathcal{D}_0^1 .

Bemerkung A.45:

Ist $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ ein Vektorfeld auf \mathcal{M} , so heißt die Tensorfeld-Derivation L_V , gegeben durch

- (1) $L_V(f) := Vf, \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}),$
- (2) $L_V(W) := [V, W], \quad \forall W \in \mathcal{X}(\mathcal{M}),$

die Lie-Ableitung bezüglich V .

Wesentliche Aussagen zur Klassifikation von Tensor- und Tensorfeld-Derivationen liefern die folgenden Theoreme.

Theorem A.46:

Für eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist die Lie-Algebra¹⁵⁶ $\text{Der}_{\mathcal{T}}(p)$ der Tensor-Derivationen¹⁵⁷ an $p \in \mathcal{M}$ isomorph zur Lie-Algebra $\text{End}(T_p(\mathcal{M}))_L$ der Endomorphismen¹⁵⁸ von $T_p(\mathcal{M})$. Der Isomorphismus wird induziert durch die Einschränkung

$$\mathcal{D}_{|p} \mapsto \mathcal{D}_{0|p}^1, \quad \mathcal{D}_{|p} \in \text{Der}_{\mathcal{T}}(p)$$

einer Derivation auf $T_p(\mathcal{M})$.

Theorem A.47:

Jede Tensorfeld-Derivation \mathcal{D} über einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} hat eine eindeutige Zerlegung

$$\mathcal{D} = L_V + M$$

für ein Vektorfeld $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ und ein Tensorfeld $M \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{M})$ vom Typ $(1, 1)$.

Dabei operiert M punktweise als Derivation durch den Isomorphismus in Theorem A.46¹⁵⁹.

A.1.3 Untermannigfaltigkeiten

Definition A.48:

Für eine glatte Abbildung

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\phi} \mathcal{N} \quad (\text{A.29})$$

¹⁵⁵verwende \mathcal{D} und \mathcal{C}_j^i

¹⁵⁶siehe Unterabschnitt A.2

¹⁵⁷Die Lie-Klammer ist durch $[\mathcal{D}_{|p}, \mathcal{D}'_{|p}] := \mathcal{D}_{|p} \circ \mathcal{D}'_{|p} - \mathcal{D}'_{|p} \circ \mathcal{D}_{|p}$ für Derivationen $\mathcal{D}_{|p}, \mathcal{D}'_{|p}$ an $p \in \mathcal{M}$ gegeben.

¹⁵⁸Die Lie-Klammer ist wie für $\text{Der}_{\mathcal{T}}(p)$ durch $[B_{|p}, B'_{|p}] := B_{|p} \circ B'_{|p} - B'_{|p} \circ B_{|p}$ für Endomorphismen $B_{|p}, B'_{|p} \in \text{End}(T_p(\mathcal{M}))_L$ gegeben.

¹⁵⁹Beachte: $T_p(\mathcal{M}) \otimes T_p^*(\mathcal{M}) \cong \text{End}(T_p(\mathcal{M}))$.

heißt das Paar (\mathcal{M}, ϕ) Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N} der Kodimension $\text{cod}_{\mathcal{N}} \mathcal{M} := \dim \mathcal{N} - \dim \mathcal{M}$, falls

(1) ϕ eine Immersion ist,

(2) ϕ injektiv ist.

(\mathcal{M}, ϕ) heißt eingebettete Untermannigfaltigkeit, falls zusätzlich

(3) $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \phi(\mathcal{M})$ ist ein Homöomorphismus, falls $\phi(\mathcal{M})$ mit der Unterraumtopologie von \mathcal{N} versehen wird.

gilt.

Eine Untermannigfaltigkeit (\mathcal{M}, ϕ) einer Mannigfaltigkeit \mathcal{N} mit Kodimension $\text{cod}_{\mathcal{N}} \mathcal{M} = 1$ heißt Hyperfläche.

Die Struktur von Untermannigfaltigkeiten wird durch das folgende Theorem verdeutlicht.

Theorem A.49:

Für eine Untermannigfaltigkeit (\mathcal{M}^m, ϕ) von \mathcal{N}^n existieren für jeden Punkt $p \in \mathcal{M}$ Koordinatensysteme (\mathcal{U}, ψ) um p und (\mathcal{V}, χ) um $\phi(p)$, s.d.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} \supseteq \mathcal{U} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{V} \subseteq \mathcal{N} \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \chi \\
 \mathbb{R}^m \supseteq \psi(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\iota} & \chi(\mathcal{V}) \subseteq \mathbb{R}^n
 \end{array} \tag{A.30}$$

$\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die, durch $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ gegebene, Inklusion.

Eine wichtige Klasse von Untermannigfaltigkeiten erhält man durch

Proposition A.50:

Ist $\phi : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine glatte Abbildung und $q \in \mathcal{N}$ ein regulärer Wert von ϕ , d.h. $\phi_{*,p}$ ist surjektiv für alle $p \in \phi^{-1}(\{q\})$, dann ist $\phi^{-1}(\{q\})$ eine eingebettete $(m - n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathcal{M} .

Erwähnenswert ist noch das folgende Resultat von Whitney, das besagt, daß für eine bestimmte Klasse von Mannigfaltigkeiten jede solche als Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n (für geeignetes n) aufgefasst werden kann¹⁶⁰.

Theorem A.51:

Jede (glatte) Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^n , die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, kann als eingebettete Untermannigfaltigkeit, und abgeschlossene Teilmenge, des \mathbb{R}^{2n} realisiert werden.

A.1.4 Vektorfelder und Integralkurven

Definition A.52:

Eine Kurve $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$ in einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} heißt Integralkurve eines Vektorfeldes $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, falls

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

gilt.

¹⁶⁰Es gibt ein ähnliches Resultat von Nash für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten.

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert:

Theorem A.53:

Für ein Vektorfeld $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ und einen Punkt $p \in \mathcal{M}$ existieren ein offenes Intervall $\mathcal{I} \ni 0$ und eine eindeutige Integralkurve $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma(0) = p$.

Korollar A.54:

Sind $\gamma, \zeta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$ Integralkurven von $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ mit $\gamma(t) = \zeta(t)$ für ein $t \in \mathcal{I}$, so gilt bereits $\gamma(t) = \zeta(t)$ für alle $t \in \mathcal{I}$.

Bemerkung A.55:

Die Menge $I_{V,p} := \{\gamma : \mathcal{I}_\gamma \rightarrow \mathcal{M} \mid \gamma(0) = p, \gamma \text{ ist Integralkurve von } V\}$ ¹⁶¹ hat ein eindeutiges maximales Element $\gamma_{V,p} : \mathcal{I}_p \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\mathcal{I}_p := \bigcup_{\gamma \in I_{V,p}} \mathcal{I}_\gamma$. $\gamma_{V,p}$ heißt *maximale* Integralkurve von V an p . V heißt *vollständig*, falls $\mathcal{I}_p = \mathbb{R}$ für alle $p \in \mathcal{M}$.

Das Konzept der maximalen Integralkurve führt zu

Proposition A.56:

Der Fluß eines Vektorfeldes $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ ist die Abbildung

$$\{(p, t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R} \mid t \in \mathcal{I}_p\} =: \mathcal{D} \xrightarrow{\psi^V} \mathcal{M} \quad (\text{A.31})$$

$$(p, t) \longmapsto \psi_t^V(p) := \gamma_{V,p}(t)$$

ψ^V ist glatt und hat die Eigenschaften:

$$(1) \psi_0^V = \text{id}_{\mathcal{M}},$$

$$(2) (\psi_s^V \circ \psi_t^V)(p) = \psi_{s+t}^V(p) \text{ für } s, t \in \mathcal{I}_p,$$

$$(3) \text{ Es existieren offene } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M} \text{ und } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}, \text{ s.d. } \mathcal{U} \xrightarrow{\psi_t^V} \psi_t^V(\mathcal{U}) \text{ für alle } t \in \mathcal{I} \text{ ein Diffeomorphismus mit } (\psi_t^V)^{-1} = \psi_{-t}^V \text{ ist.}$$

$\psi_{\mathcal{U} \times \mathcal{I}}^V$ wie in Eigenschaft (3) heißt lokaler Fluß von V .

Bemerkung A.57:

Für ein vollständiges Vektorfeld $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\psi^V} \text{Diff}^\infty(\mathcal{M}) \quad (\text{A.32})$$

ein Homomorphismus von Gruppen.

Man bezeichnet $\{\psi_t^V \mid t \in \mathbb{R}\}$ als eine 1-Parameter Gruppe von Diffeomorphismen.

Es besteht eine enge Verbindung zwischen dem (lokalen) Fluß eines Vektorfeldes V und dem Kommutator $[V, \cdot]$.

Proposition A.58:

Sind $V, W \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ und ψ^V der lokale Fluß von V bei $p \in \mathcal{M}$, so gilt:

$$[V, W]_{|p} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((\psi_{-t}^V)_{*, \psi_t^V(p)} \left(W_{|\psi_t^V(p)} \right) - W_{|p} \right)$$

$L_V(W)_{|p} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((\psi_{-t}^V)_{*, \psi_t^V(p)} \left(W_{|\psi_t^V(p)} \right) - W_{|p} \right)$ wird als Lie-Ableitung von W bezüglich V bezeichnet.

¹⁶¹ $I_{V,p}$ ist durch Inklusion bzgl. der Definitionsbereiche halbgeordnet.

Korollar A.59:

Sind $V, W \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ vollständige Vektorfelder und $\{\psi_t^V\}_{t \in \mathbb{R}}, \{\psi_t^W\}_{t \in \mathbb{R}}$ die assoziierten 1-Parameter Gruppen von Diffeomorphismen, so gilt

$$\psi_t^V \circ \psi_s^W = \psi_s^W \circ \psi_t^V \forall t, s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [V, W] = 0$$

A.1.5 Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten

Eine wichtige Klasse von Tensorfelder auf einer Mannigfaltigkeit bilden die sogenannten Differentialformen.

Definition A.60:

Ist \mathcal{M}^n eine Mannigfaltigkeit und $p \in \mathcal{M}$, so wird durch die Abbildung

$$T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s} \xrightarrow{P_A^s} P_A^s(T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s}) =: \Lambda^s T_p^*(\mathcal{M}), \quad (\text{A.33})$$

mit

$$P_A^s(\theta)(v_1, \dots, v_s) := \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \text{sgn}(\sigma) \theta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(s)})$$

für alle $\theta \in T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s}$ und $v_1, \dots, v_s \in T_p(\mathcal{M})$, das s -fache äußere Produkt von $T_p^*(\mathcal{M})$ definiert^{162,163}

Die direkte Summe

$$\Lambda T_p^*(\mathcal{M}) := \bigoplus_{s=0}^n \Lambda^s T_p^*(\mathcal{M})$$

wird mit der Abbildung

$$\Lambda^s T_p^*(\mathcal{M}) \times \Lambda^u T_p^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{s+u} T_p^*(\mathcal{M}) \quad (\text{A.34})$$

$$(\theta, \theta') \longmapsto \frac{(s+u)!}{s!u!} P_A^{s+u}(\theta \otimes \theta') =: \theta \wedge \theta'$$

als äußere Algebra von $T_p^*(\mathcal{M})$ bezeichnet. Die Abbildung $\wedge : \Lambda T_p^*(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda T_p^*(\mathcal{M})$ heißt ebenfalls äußeres Produkt. Es hat die Eigenschaften

- (1) $\theta_1 \wedge (\theta_2 + \theta_3) = \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \theta_3 \quad \forall \theta_1, \dots, \theta_3 \in \Lambda T_p^*(\mathcal{M})$ (Distributivität)
- (2) $\theta_1 \wedge (\theta_2 \wedge \theta_3) = (\theta_1 \wedge \theta_2) \wedge \theta_3 = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \quad \forall \theta_1, \dots, \theta_3 \in \Lambda T_p^*(\mathcal{M})$ (Assoziativität)
- (3) $\theta \wedge \theta' = (-1)^{su} \theta' \wedge \theta \quad \forall \theta \in \Lambda^s T_p^*(\mathcal{M}), \theta' \in \Lambda^u T_p^*(\mathcal{M})$ (graduierte Kommutativität)
- (4) $\lambda \wedge \theta = \lambda \theta = \theta \wedge \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \theta \in \Lambda T_p^*(\mathcal{M})$

Definition A.61:

Eine s - oder Differentialform auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^n ist eine Abbildung

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\varpi} \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \Lambda^s T_p^*(\mathcal{M}) \quad (\text{A.35})$$

mit $\varpi|_p \in \Lambda^s T_p^*(\mathcal{M}) \quad \forall p \in \mathcal{M}$.

Die s -Formen auf \mathcal{M} sind also gerade die antisymmetrischen Tensorfelder vom Typ $(0, s)$.

¹⁶²Beachte: $\Lambda^s T_p^*(\mathcal{M}) = 0$ für $s > n$.

¹⁶³Elemente aus $\Lambda^s T_p^*(\mathcal{M})$ sind antisymmetrisch bezüglich ihrer Argumente, d.h. $\theta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_s) = -\theta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_s) \quad \forall \theta \in \Lambda^s T_p^*(\mathcal{M}), v_1, \dots, v_s \in T_p(\mathcal{M})$ und $1 \leq i \neq j \leq s$.

Die Menge der glatten s -Formen auf \mathcal{M} wird mit $\Omega^s(\mathcal{M})$ bezeichnet¹⁶⁴. $\Omega^s(\mathcal{M})$ ist folglich ein $C^\infty(\mathcal{M})$ -Untermodul von $\mathcal{T}_s^0(\mathcal{M})$.

Die direkte Summe

$$\Omega(\mathcal{M}) := \bigoplus_{s=1}^n \Omega^s(\mathcal{M})$$

wird mit

$$(\varpi \wedge \varpi')|_p := \varpi|_p \wedge \varpi'|_p \quad \forall \varpi \in \Omega^s(\mathcal{M}), \quad \varpi' \in \Omega^u(\mathcal{M}) \quad (0 \leq s, u \leq n)$$

zu einer $C^\infty(\mathcal{M})$ -Algebra und wird als äußere Algebra von \mathcal{M} bezeichnet.

Für Differentialformen lässt sich Korollar A.38 folgendermaßen formulieren:

Korollar A.62:

Ist \mathcal{M}^n eine Mannigfaltigkeit, (\mathcal{U}, ψ) ein Koordinatensystem um $p \in \mathcal{M}$ und $\varpi \in \Omega^s(\mathcal{U})$ ¹⁶⁵, so gilt

$$\varpi = s! \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n} \psi \varpi_{j_1, \dots, j_s} dx_\psi^{j_1} \wedge \dots \wedge dx_\psi^{j_s},$$

d.h. die Menge $\left\{ dx_\psi^{j_1} \wedge \dots \wedge dx_\psi^{j_s} \right\}_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n}$ ist eine Basis von $\Omega^s(\mathcal{M})$ ¹⁶⁶.

Eine wichtige Beobachtung ist, daß das Differential d (vgl. Bemerkung A.19) auf die äußere Algebra $\Omega(\mathcal{M})$ eine Mannigfaltigkeit fortgesetzt werden kann.

Proposition A.63:

Ist \mathcal{M}^n einer Mannigfaltigkeit und $\Omega(\mathcal{M})$ deren äußere Algebra, so existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\Omega(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \Omega(\mathcal{M}) \tag{A.36}$$

mit den Eigenschaften

- (1) $d(\Omega^s(\mathcal{M})) \subseteq \Omega^{s+1}(\mathcal{M}) \quad \forall 1 \leq s \leq n$ ¹⁶⁷,
- (2) $df(V) = Vf \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), \quad V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$,
- (3) $d(\varpi \wedge \varpi') = d\varpi \wedge \varpi' + (-1)^s \varpi \wedge d\varpi'$
 $\forall \varpi \in \Omega^s(\mathcal{M}), \quad \varpi' \in \Omega^u(\mathcal{M}),$ (graduierte Leibniz-Regel)
- (4) $d^2 = d \circ d = 0$.

Diese Abbildung heißt äußeres Differential.

Ist (\mathcal{U}, ψ) ein Koordinatensystem und $\varpi \in \Omega^s(\mathcal{U})$, so gilt

$$d\varpi = s! \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n} d \psi \varpi_{j_1, \dots, j_s} \wedge dx_\psi^{j_1} \wedge \dots \wedge dx_\psi^{j_s}$$

¹⁶⁴Es gilt: $\Omega^0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$ und $\Omega^1(\mathcal{M})$.

¹⁶⁵vgl. $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{U})$.

¹⁶⁶Die Dimension von $\Omega^s(\mathcal{U})$ über $C^\infty(\mathcal{M})$ ist daher $\binom{n}{s}$. Dies kann, mittels eines Atlanten, zur Definition der Dimension von $\Omega^s(\mathcal{M})$ verwendet werden.

¹⁶⁷Beachte: $\Omega^s(\mathcal{M}) = 0 \quad \forall s > n$

Korollar A.64:

Ist $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine glatte Abbildung, so ist der Pullback ϕ^* ein Homomorphismus der Algebren $(\Omega(\mathcal{N}), d)$ und $(\Omega(\mathcal{M}), d)$ ¹⁶⁸, d.h.

$$(1) \phi^*(\varpi + \varpi') = \phi^*\varpi + \phi^*\varpi',$$

$$(2) \phi^*(\varpi \wedge \varpi') = \phi^*\varpi \wedge \phi^*\varpi',$$

$$(3) \phi^*(d\varpi) = d(\phi^*\varpi)$$

für alle $\varpi \in \Omega^s(\mathcal{M})$, $\varpi' \in \Omega^u(\mathcal{M})$.

Ferner impliziert dies

$$d \circ L_V = L_V \circ d$$

für alle $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ ¹⁶⁹.

Bemerkung A.65:

Für eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^n bilden die n -Formen eine ausgezeichnete Klasse von Differentialformen. Wegen Korollar A.62 gilt, daß $\Omega^n(\mathcal{M})$ lokal¹⁷⁰ ein eindimensionaler Modul über $C^\infty(\mathcal{M})$ ist, d.h. es gibt lokal bis auf Multiplikation mit einer Funktion $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ nur eine n -Form.

Ist $\varpi \in \Omega(\mathcal{M})$ so gilt:

$$\varpi(V_1, \dots, V_n) = \det(M)\varpi(W_1, \dots, W_n)$$

für alle $V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ mit $V_i = \sum_{k=1}^n M_{ik}W_k \forall i = 1, \dots, n$.

Aufgrund dieser Eigenschaft kann die Existenz einer *nirgends verschwindenden* n -Form auf \mathcal{M} verwendet werden um eine Orientierung von \mathcal{M} zu definieren, indem analog zu Definition A.30 eine Orientierung von $T_p(\mathcal{M})$ für $p \in \mathcal{M}$ durch

$$\{v_i\}_{i=1, \dots, n} \sim \{v'_i\}_{i=1, \dots, n} \Leftrightarrow \frac{\varpi|_p(v_1, \dots, v_n)}{\varpi|_p(v'_1, \dots, v'_n)} > 0$$

für Basen $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ und $\{v'_i\}_{i=1, \dots, n}$ von $T_p(\mathcal{M})$ definiert wird¹⁷¹. Es gilt sogar, daß die Existenz einer nirgends verschwindenden n -Form auf \mathcal{M} äquivalent zur Orientierbarkeit von \mathcal{M} ist. Eine nirgends verschwindende n -Form auf \mathcal{M} wird auch als *Volumenform* bezeichnet. Die Begründung liefert die folgende Definition.

Definition A.66:

Ist \mathcal{M}^n eine orientierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \{\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ein lokal endlicher, orientierender Atlas mit einer untergeordneten Zerlegung der Eins $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ und ϖ , mit $\varpi|_{\mathcal{U}_\alpha} = n! \cdot {}^\alpha\varpi_{1, \dots, n} dx^1_\alpha \wedge \dots \wedge dx^n_\alpha$, eine n -Form auf \mathcal{M} , so heißt für $g \in C_c^0(\mathcal{M})$ ¹⁷²

$$\int_{\mathcal{M}} g\varpi := n! \sum_{\alpha \in A} \int_{\psi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)} f_\alpha(\psi_\alpha^{-1}(u)) g(\psi_\alpha^{-1}(u)) {}^\alpha\varpi_{1, \dots, n}|_{\psi_\alpha^{-1}(u)} d^n u$$

das (orientierte) Integral^{173, 174} von g bezüglich ϖ . Die rechte Seite ist als Lebesgue-Integral im \mathbb{R}^n zu verstehen.

¹⁶⁸Korrektweise sollte man die Unterscheidung in $d_{\mathcal{M}}$ und $d_{\mathcal{N}}$ treffen, allerdings zeigt die Koordinatendarstellung, daß d nicht von den speziellen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit abhängt.

¹⁶⁹Dies kann als eine charakterisierende Eigenschaft von L_X verwendet werden.

¹⁷⁰Betrachte $\Omega^n(\mathcal{U})$ für eine geeignete Koordinatenumgebung.

¹⁷¹Die *kanonische* Orientierung des \mathbb{R}^n wird durch $d^n u = du^1 \wedge \dots \wedge du^n$ festgelegt.

¹⁷² $C_c^r(\mathcal{M})$ ($r = 0, \dots, \infty$) bezeichnet die Funktionen der Klasse C^r mit kompaktem Träger auf \mathcal{M} .

¹⁷³Ein Integral ohne Bezug auf die Orientierbarkeit von \mathcal{M} kann definiert werden, indem in der Definition ${}^\alpha\varpi_{1, \dots, n}$ durch $|{}^\alpha\varpi_{1, \dots, n}|$ ersetzt wird.

¹⁷⁴Die Ausdehnung dieses Integral-Begriffs auf eine größer Klasse von Funktionen ist möglich.

Diese Definition ist aufgrund des Transformationsverhaltens von Differentialformen unabhängig von den getroffenen Wahlen. Lediglich ein Wechsel zur entgegengesetzten Orientierung von \mathcal{M} , hier durch $-\mathcal{M}$ bezeichnet, impliziert:

$$\int_{-\mathcal{M}} g\varpi = - \int_{\mathcal{M}} g\varpi \quad \forall g \in C_c^0(\mathcal{M}).$$

Ist ϖ eine Volumenform und $A \subseteq \mathcal{M}$ eine Teilmenge mit charakteristischer Funktion $\chi_A \in C_c^0(\mathcal{M})$, so heißt das Integral

$$\int_A \varpi := \int_{\mathcal{M}} \chi_A \varpi$$

das Volumen von A bezüglich ϖ .

Definition A.67:

Sind $(\mathcal{M}, \varpi_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \varpi_{\mathcal{N}})$ zwei Mannigfaltigkeiten mit Volumenformen und ist $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine glatte Abbildung, so heißt die Funktion $J_{\phi} \in C^{\infty}(\mathcal{M})$, definiert durch

$$J_{\phi} \varpi_{\mathcal{M}} = \phi^*(\varpi_{\mathcal{N}}),$$

die (relative) Jacobi-Determinante von ϕ bezüglich $\varpi_{\mathcal{M}}$ und $\varpi_{\mathcal{N}}$. Ist ϕ ein lokaler Diffeomorphismus so gilt:

$$J_{\phi}(p) J_{\phi^{-1}}(\phi(p)) = 1$$

A.2 Lie-Gruppen

Eine Synthese des Mannigfaltigkeits- und Gruppen-Begriffs liefern die Lie-Gruppen.

Definition A.68:

Eine Lie-Gruppe \mathcal{G} ist eine Gruppe und eine (glatte) Mannigfaltigkeit, wobei die Abbildung

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \tag{A.37}$$

$$(g, h) \longmapsto gh^{-1}$$

glatt ist. Die Eins in \mathcal{G} wird mit e bezeichnet.

Ein glatter Gruppenhomomorphismus $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ zwischen Lie-Gruppen \mathcal{G}, \mathcal{H} heißt Lie-Gruppenhomomorphismus.

Bemerkung A.69:

Für eine Lie-Gruppe \mathcal{G} sind die Abbildungen

$$\mathcal{G} \xrightarrow{L_g} \mathcal{G}, \quad g \in \mathcal{G} \tag{A.38}$$

$$\mathcal{G} \xrightarrow{R_g} \mathcal{G}, \quad g \in \mathcal{G}$$

definiert durch

$$L_g(h) := gh \text{ und } R_g(h) := hg, \quad \forall h \in \mathcal{G}$$

Diffeomorphismen.

Es folgt, daß auch die Abbildung

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\text{Ad}_g := L_g \circ R_{g^{-1}}} \mathcal{G} \quad (\text{A.39})$$

ein Diffeomorphismus ist. Ferner gilt:

$$L_g \circ R_h = R_h \circ L_g \quad \forall g, h \in \mathcal{G}.$$

Definition A.70:

Eine Lie-Gruppe \mathcal{H} heißt Lie-Untergruppe einer Lie-Gruppe \mathcal{G} , falls \mathcal{H} eine Untergruppe und Untermannigfaltigkeit (bezüglich der Inklusion auf Gruppenebene $\iota: \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$) von \mathcal{G} ist.

Definition A.71:

Eine 1-Parameter Untergruppe einer Lie-Gruppe \mathcal{G} ist ein stetiger(!) Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}, \quad (\text{A.40})$$

wobei \mathbb{R} als Gruppe über $+$ aufzufassen ist.

Definition A.72:

Eine abgeschlossene Untergruppe \mathcal{H} einer Lie-Gruppe \mathcal{G} ist eine Untergruppe und abgeschlossene Teilmenge von \mathcal{G} .

Eine wichtige Aussage über abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen liefert

Theorem A.73:

Eine abgeschlossene Untergruppe \mathcal{H} einer Lie-Gruppe \mathcal{G} ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit (bezüglich der Inklusion auf Gruppenebene) von \mathcal{G} , d.h. \mathcal{H} ist insbesondere eine Lie-Untergruppe von \mathcal{G} . Ferner gilt:

Es existiert eine eindeutige glatte Struktur auf den Linksnebenklassen \mathcal{G}/\mathcal{H} von \mathcal{H} in \mathcal{G} , s.d.

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{G}/\mathcal{H} \quad (\text{A.41})$$

ein Faserbündel mit Fasertyp \mathcal{H} ist¹⁷⁵. Ferner ist die Abbildung

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H} \quad (\text{A.42})$$

$$(g, kH) \longmapsto gkH$$

glatt.

Eng verknüpft mit Lie-Gruppen ist das Konzept der Lie-Algebra.

Definition A.74:

Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} (über \mathbb{R}) ist ein Vektorraum (über \mathbb{R}) mit einer linearen Abbildung

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} \mathfrak{g} \quad (\text{A.43})$$

mit den Eigenschaften

$$(1) [X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad (\text{Anti-Symmetrie})$$

¹⁷⁵s. Unterabschnitt A.3

$$(2) \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

Ein Lie-Algebrenhomomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ zwischen Lie-Algebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ ist ein Homomorphismus von Vektorräumen, s.d.

$$\varphi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(X), \varphi(Y)]_{\mathfrak{h}}$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt.

Bemerkung A.75:

Für einen Lie-Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ ist das Differential $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebrenhomomorphismus.

Definition A.76:

Eine Lie-Unteralgebra \mathfrak{h} einer Lie-Algebra \mathfrak{g} ist ein unter $[\cdot, \cdot]$ abgeschlossener Untervektorraum von \mathfrak{g} , d.h.

$$[X, Y] \in \mathfrak{h} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{h}.$$

Definition A.77:

Ein Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe \mathcal{G} heiſst links- bzw. rechts-invariant, falls

$$L_{g,*}(X) = X \quad \text{bzw.} \quad R_{g,*}(X) = X \quad \forall g \in \mathcal{G}$$

gilt. Dies impliziert insbesondere $X \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$.

Die Menge der links-/rechts-invarianten Vektorfelder $\mathcal{X}^{\mathcal{G}} / {}^{\mathcal{G}}\mathcal{X}$ bildet einen Untervektorraum von $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ und ist abgeschlossen unter $[\cdot, \cdot]$, d.h.

$$[X, Y] \in \mathcal{X}^{\mathcal{G}} \quad \text{bzw.} \quad {}^{\mathcal{G}}\mathcal{X} \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}^{\mathcal{G}} \quad \text{bzw.} \quad {}^{\mathcal{G}}\mathcal{X},$$

denn es gilt¹⁷⁶:

$$L_{g,*} \circ [\cdot, \cdot] = [\cdot, \cdot] \circ L_{g,*}^{\otimes 2} \quad \text{bzw.} \quad R_{g,*} \circ [\cdot, \cdot] = [\cdot, \cdot] \circ R_{g,*}^{\otimes 2} \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

Die folgenden Aussagen gelten in passender Form auch für rechts-invariante Vektorfelder, allerdings soll hier nicht mit der Tradition, links-invariante Vektorfelder zur Definition der Lie-Algebra einer Lie-Gruppe zu verwenden, gebrochen werden.

Definition A.78:

Die Lie-Algebra \mathfrak{g} einer Lie-Gruppe \mathcal{G} ist $\mathcal{X}^{\mathcal{G}}$.

Ein nützliche Realisierung von $\mathcal{X}^{\mathcal{G}}$ liefert

Proposition A.79:

Für eine Lie-Gruppe \mathcal{G} ist die Abbildung

$$\mathfrak{g} = \mathcal{X}^{\mathcal{G}} \longrightarrow T_e(\mathcal{G}) \quad (\text{A.44})$$

$$X \longmapsto X|_e$$

ein (natürlicher) Isomorphismus von Vektorräumen. Die Umkehrung ist durch

$$X_g := L_{g,*}(X) \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad \text{für} \quad X \in T_e(\mathcal{G})$$

¹⁷⁶Diese Eigenschaft gilt für jeden Diffeomorphismus ϕ einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , d.h. ϕ_* ist ein Automorphismus der Lie-Algebra $\mathcal{X}(\mathcal{M})$

gegeben.

Dieser Isomorphismus induziert eine (natürliche) Lie-Algebren-Struktur auf $T_e(\mathcal{G})$:

$$[X, Y] := [L_{(\cdot), *, e}(X), L_{(\cdot), *, e}(Y)]|_e \quad \forall X, Y \in T_e(\mathcal{G}).$$

Eine Unterscheidung zwischen $\mathcal{X}^{\mathcal{G}}$ und $T_e(\mathcal{G})$ ist folglich unnötig.

Bemerkung A.80:

Ist $\iota : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ eine Lie-Untergruppe einer Lie-Gruppe \mathcal{G} und \mathfrak{h} bzw. \mathfrak{g} die zugehörige Lie-Algebra, so gibt es zu jedem $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ eine eindeutige Fortsetzung $X_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}$, gegeben durch

$$X_{\mathfrak{g}|_{\mathfrak{g}}} := L_{g, *, e_{\mathcal{G}}}(\tilde{X}_{\mathfrak{h}}) \quad \forall g \in \mathfrak{g}$$

mit $\tilde{X}_{\mathfrak{h}} := \iota_{*, e_{\mathcal{H}}}(X_{\mathfrak{h}|_{e_{\mathcal{H}}}})$. Da ι_* und $L_{g, *}$ $\forall g \in \mathcal{G}$ Lie-Algebrenhomomorphismen sind, kann \mathfrak{h} als Lie-Unteralgebra von \mathfrak{g} aufgefasst werden.

Eine wichtige Abbildung in der Theorie der Lie-Algebren wird durch die folgende Definition gegeben.

Definition A.81:

Für eine Lie-Gruppe \mathcal{G} mit Lie-Algebra \mathfrak{g} , heißt die Abbildung

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp} \mathcal{G}, \quad (\text{A.45})$$

definiert durch

$$\exp(X) := \gamma_{X, e}(1) \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

die Exponentialabbildung von \mathcal{G} . Dabei ist $\gamma_{X, e}$ die maximale Integralkurve von $X \in \mathfrak{g} (\cong \mathcal{X}^{\mathcal{G}})$ an $e \in \mathcal{G}$ (s. Bemerkung A.55).

Die Exponentialabbildung ist wohldefiniert dank

Theorem A.82:

Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ einer Lie-Gruppe \mathcal{G} hat die folgenden Eigenschaften

- (1) \exp ist wohldefiniert, denn die links-invarianten Vektorfelder $X \in \mathfrak{g} (\cong \mathcal{X}^{\mathcal{G}})$ sind vollständig.
- (2) \exp ist glatt.
- (3) $\exp(0) = e$,
- (4) $\exp((s+t)X) = \exp(tX)\exp(sX) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, t, s \in \mathbb{R}$,
- (5) $\exp_{*, 0}(X_0) = X|_e$, wobei $X_0 \in T_0(\mathfrak{g})$ der mit $X \in \mathfrak{g}$ kanonisch identifizierte Tangentialvektor an $0 \in \mathfrak{g}$ ist.

Eigenschaft (5) besagt, daß $\exp_{*, 0} T_0(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \cong T_e(\mathcal{G})$ die identische Abbildung ist¹⁷⁷.

Durch die Exponentialabbildung einer Lie-Gruppe \mathcal{G} können die 1-Parameter Untergruppen letzterer beschrieben werden.

Proposition A.83:

Alle 1-Parameter Untergruppen $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ einer Lie-Gruppe \mathcal{G} sind von der Form

$$\phi(t) = \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{A.46})$$

für ein $X \in \mathfrak{g}$. Insbesondere ist ϕ schon glatt.

¹⁷⁷Beachte Theorem A.28.

Theorem A.82, insbesondere Eigenschaft (5) der Exponentialabbildung, zusammen mit dem folgenden Lemma, besagt, daß nicht nur \mathfrak{g} durch eine beliebige Umgebung der Eins in \mathcal{G} bestimmt ist, sondern in gewissem Maße auch die Umkehrung gilt.

Lemma A.84:

Die Zusammenhangskomponente \mathcal{G}_0 der Eins einer Lie-Gruppe \mathcal{G} wird von einer beliebigen offenen Umgebung der Eins erzeugt. Folglich ist \mathcal{G}_0 durch eine beliebige Umgebung \mathfrak{U} der Null in \mathfrak{g} und die Kenntnis von $\exp|_{\mathfrak{U}}$ bestimmt.

Die Bedeutung von Lie-Gruppen und Lie-Algebren wird durch ihre Wirkung auf anderen Strukturen verdeutlicht.

Definition A.85:

Ein endlichdimensionaler Vektorraum V heißt zusammen mit einem glatten Lie-Gruppenhomomorphismus¹⁷⁸

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V) \quad (\text{A.47})$$

bzw. Lie-Algebrenhomomorphismus¹⁷⁹

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\varrho} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \quad (\text{A.48})$$

\mathcal{G} -Modul bzw. \mathfrak{g} -Modul.

Proposition A.86:

Ist \mathcal{G} eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} , so heißen die Abbildungen

$$\mathcal{G} \xrightarrow{Ad := \mathrm{Ad}(\cdot, \cdot)_*, e} \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \quad (\text{A.49})$$

und

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{ad := \mathrm{Ad}_{*, e}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

adjungierte Darstellung von \mathcal{G} bzw. \mathfrak{g} .

Es gilt

$$\mathrm{Ad}(\exp_{\mathcal{G}}(X)) = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}(X)) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

sowie

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

insbesondere drückt sich die Jacobi-Identität durch

$$\mathrm{ad}_{[X, Y]_{\mathfrak{g}}}(Z) = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

aus.

Definition A.87:

Eine Lie-Gruppe \mathcal{G} wirkt (glatt) auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} von rechts bzw. links, falls es eine

¹⁷⁸ $\mathrm{GL}(V)$ ist aufgefasst als offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{2 \dim(V)}$ eine Lie-Gruppe.

¹⁷⁹ $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ist die Lie-Algebra von $\mathrm{GL}(V)$.

Abbildung

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \text{Diff}^\infty(\mathcal{M}) \quad (\text{A.50})$$

gibt, mit den Eigenschaften

(1)

$$\mathcal{G} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \quad (\text{A.51})$$

$$(g, p) \longmapsto \rho_g(p)$$

ist glatt.

(2) Es gilt $\rho_{gh}(p) = \rho_h(\rho_g(p))$ bzw. $\rho_{gh}(p) = \rho_g(\rho_h(p))$ für alle $p \in \mathcal{M}$, $g, h \in \mathcal{G}$.

Die Abbildung ρ heißt Rechts- bzw. Links-Wirkung von \mathcal{G} auf \mathcal{M} . Man schreibt auch $\rho_g(p) = pg$ bzw. $\rho_g(p) = gp$ für $p \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{G}$.

ρ heißt

(1) effektiv¹⁸⁰, falls $\rho_g(p) = p \ \forall p \in \mathcal{M} \Rightarrow g = e$ gilt.

(2) frei, falls $\exists p \in \mathcal{M} : \rho_g(p) = p \Rightarrow g = e$ gilt.

(3) transitiv, falls $\forall p, q \in \mathcal{M} \ \exists g \in \mathcal{G} : \rho_g(p) = q$ gilt.

Proposition A.88:

Ist \mathcal{G} eine Lie-Gruppe die von rechts auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} wirkt und \mathfrak{g} die zugehörige Lie-Algebra, so definiert

$$X_{\mathcal{M}|p}f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \rho_{\exp(tX)}(p), \quad X \in \mathfrak{g}$$

einen Lie-Algebrenhomomorphismus

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\varrho} \mathcal{X}(\mathcal{M}). \quad (\text{A.52})$$

Ist die Wirkung ρ effektiv, so ist ϱ ein Lie-Algebrenisomorphismus. Ist die Wirkung ρ frei, so ist $\varrho(X)$ ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf \mathcal{M} für alle $X \neq 0$.

$X_{\mathcal{M}}$ heißt Fundamentalvektorfeld zu $X \in \mathfrak{g}$ an \mathcal{M} .

A.3 Faserbündel

Faserbündel stellen eine Verbindung zwischen der Theorie der Mannigfaltigkeiten und der Analysis der Abbildungen zwischen ihnen her.

Definition A.89:

Ein Faserbündel \mathcal{E} über einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit Fasertyp \mathcal{F} und Strukturgruppe \mathcal{G} ist eine Mannigfaltigkeit¹⁸¹, ebenfalls \mathcal{E} , mit

(1) einer glatten, surjektiven Submersion

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}, \quad (\text{A.53})$$

(Bündelprojektion)

¹⁸⁰vgl. "nicht-ausgeartet" für Darstellungen von C^* -Algebren; Definition D.19

¹⁸¹kurz: Faserbündel; geschrieben: $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, \mathcal{F}, \rho, \mathcal{G})$.

- (2) einer Mannigfaltigkeit \mathcal{F} mit einer (effektiven¹⁸²) Links-Wirkung ρ einer Lie-Gruppe \mathcal{G} ,
- (3) einem maximalen \mathcal{G} -Bündelatlant, d.h. einer maximalen¹⁸³ Familie offener Teilmengen $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{M}\}_{\alpha \in A}$ mit $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{M}$ und Diffeomorphismen $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{F} \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & & \mathcal{U}_\alpha \end{array} \quad (\text{A.54})$$

s.d. $\psi_{\beta\alpha} := \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ für $\mathcal{U}_{\beta\alpha} := \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$ durch

$$\mathcal{U}_{\beta\alpha} \times \mathcal{F} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{U}_{\beta\alpha}} \times \rho_{g_{\beta\alpha}}} \mathcal{U}_{\beta\alpha} \times \mathcal{F}, \quad (\text{A.55})$$

für eine glatte Abbildung $g_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_{\beta\alpha} \rightarrow \mathcal{G}$, gegeben ist. Man bezeichnet $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ als lokale Trivialisierungen von \mathcal{E} ¹⁸⁴. Die $g_{\beta\alpha}$ heißen Übergangsfunktionen des Faserbündels und erfüllen die Prä- ρ -Kozykel-Bedingung

$$g_{\alpha\gamma}(p)g_{\gamma\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p) \in \{g \in \mathcal{G} \mid \rho_g = \text{id}_{\mathcal{F}}\} \quad \forall p \in \mathcal{U}_{\gamma\beta\alpha} := \mathcal{U}_\gamma \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha.$$

Besitzt ein Faserbündel eine globale Trivialisierung, d.h. eine lokale Trivialisierung (\mathcal{U}, ψ) mit $\mathcal{U} = \mathcal{M}$, so wird es als trivial bezeichnet.

$\mathcal{E}_p := \pi^{-1}(\{p\}) \cong \mathcal{F}$ heißt Faser über $p \in \mathcal{M}$.

Ein Bündel-Homomorphismus zwischen zwei Faserbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' ist ein Paar (glatter) Abbildungen $(\phi, \tilde{\phi})$, s.d.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{E}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathcal{M}' \end{array} \quad (\text{A.56})$$

kommutiert, d.h.

$$\pi' \circ \phi = \tilde{\phi} \circ \pi.$$

Insbesondere ist ein Bündel-Homomorphismus also fasererhaltend, d.h. $\phi(\mathcal{E}_p) \subseteq \mathcal{E}'_{\tilde{\phi}(p)} \quad \forall p \in \mathcal{M}$.

Ein Bündel-Homomorphismus $(\phi, \tilde{\phi})$ heißt Bündel-Isomorphismus, falls beide $\tilde{\phi}$ und ϕ zusätzlich Diffeomorphismen sind.

Bemerkung A.90:

Die Fasern \mathcal{E}_p sind zu \mathcal{F} diffeomorphe, abgeschlossene, eingebettete Untermannigfaltigkeiten von \mathcal{E} für alle $p \in \mathcal{M}$.

¹⁸²Diese Bedingung kann auch fallen gelassen werden, ist aber in vielen Fällen erfüllt.

¹⁸³Dies ist, wie auch die Kompatibilität, in völliger Analogie zur Maximalitäts-/Kompatibilitäts-Eigenschaft für Atlanten von Mannigfaltigkeiten zu verstehen.

¹⁸⁴Die Abbildungen $\pi_1, \pi_2 : \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F}$ sind die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor.

Bemerkung A.91:

Ein Faserbündel kann durch Angabe einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit einer offenen Überdeckung $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, einer Mannigfaltigkeit \mathcal{F} mit einer Links-Wirkung ρ einer Lie-Gruppe \mathcal{G} und einer Familie von Abbildungen $\{g_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_{\beta\alpha} \rightarrow \mathcal{G} \mid \alpha, \beta \in A, \mathcal{U}_{\beta\alpha} \neq \emptyset\}$ mit der Prä- ρ -Kozykel-Bedingung konstruiert werden.

Ist die Wirkung ρ effektiv, so sind die Übergangsfunktionen eines Faserbündels eindeutig bestimmt und erfüllen die *Kozykel-Bedingung*

$$g_{\alpha\gamma}(p)g_{\gamma\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p) = e \quad \forall p \in \mathcal{U}_{\gamma\beta\alpha} := \mathcal{U}_\gamma \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha.$$

Methoden zur Konstruktion neuer Faserbündel aus gegebenen liefern die folgenden zwei Definitionen.

Definition A.92:

Ist $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, \mathcal{F}, \rho, \mathcal{G})$ ein Faserbündel, \mathcal{M}' eine Mannigfaltigkeit und $\tilde{\phi} : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ eine glatte Abbildung, so heißt $(\tilde{\phi}^*\mathcal{E}, \mathcal{M}', \pi', \mathcal{F}, \rho, \mathcal{G})$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\phi}^*\mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{E} \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{M}' & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathcal{M} \end{array} \tag{A.57}$$

mit

- (1) $\tilde{\phi}^*\mathcal{E} := \{(p', x) \in \mathcal{M}' \times \mathcal{E} \mid \tilde{\phi}(p') = \pi(x)\} \subseteq \mathcal{M}' \times \mathcal{E}$ in der Unterraumtopologie,
- (2) $\pi' : \tilde{\phi}^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}'$ definiert durch $\pi'(p', x) := \pi'_1(p', x) = p'$,
- (3) $\phi : \tilde{\phi}^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ definiert durch $\phi(p', x) := \pi'_2(p', x) = x$.

das durch $\tilde{\phi}$ und $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, \mathcal{F}, \rho, \mathcal{G})$ induzierte Faserbündel. Die lokalen Trivialisierungen für $\tilde{\phi}^*(\mathcal{E})$ ergeben sich aus denen für \mathcal{E} in folgender Weise:

Sind $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ lokale Trivialisierungen von \mathcal{E} , so definiert man für $\tilde{\phi}^*(\mathcal{E})$ $\{(\mathcal{U}'_\alpha, \psi'_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ mit $(\mathcal{U}'_\alpha := \tilde{\phi}^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \psi'_\alpha := \text{id}_{\mathcal{U}'_\alpha} \times (\pi_2 \circ \psi)) \forall \alpha \in A$ als lokale Trivialisierungen¹⁸⁵.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}'_\alpha \times \mathcal{F} & \xleftarrow{\psi'} & \pi'^{-1}(\mathcal{U}'_\alpha) & \xrightarrow{\phi} & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{F} \\ & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \\ & & \mathcal{U}'_\alpha & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathcal{U}_\alpha & & \end{array} \tag{A.58}$$

Für die Übergangsfunktionen des Bündels ergibt sich

$$\psi'_{\beta\alpha} = \text{id}_{\mathcal{U}'_{\beta\alpha}} \times \rho_{g'_{\beta\alpha}} \quad \text{mit} \quad g'_{\beta\alpha} := g_{\beta\alpha} \circ \tilde{\phi}$$

$\tilde{\phi}^*\mathcal{E}$ ist bis auf Bündel-Isomorphismen eindeutig bestimmt.

¹⁸⁵Die so definierten lokalen Trivialisierungen können in eindeutiger Weise zu einem maximalen Bündelatlas erweitert werden.

Definition A.93:

Ist $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, \mathcal{F}, \rho, \mathcal{G})$ ein Faserbündel, $\{g_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in A, \mathcal{U}_{\beta\alpha} \neq \emptyset\}$ eine assoziierte Familie von Übergangsfunktionen und \mathcal{F}' eine weitere Mannigfaltigkeit mit einer Links-Wirkung ρ' von \mathcal{G} , s.d. $\{g_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in A, \mathcal{U}_{\beta\alpha} \neq \emptyset\}$ auch die Prä- ρ' -Kozykel-Bedingung erfüllt, so heißt das dadurch konstruierbare Faserbündel mit Fasertyp \mathcal{F}' das durch ρ' zu \mathcal{E} assoziierte Faserbündel $(\mathcal{E} \times_{\rho'} \mathcal{F}', \mathcal{M}, \pi', \mathcal{F}', \rho', \mathcal{G})$.

Ein entscheidendes Konzept in der Theorie der Faserbündel ist das der Schnitte dieser.

Definition A.94:

Ist $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, \mathcal{F}, \rho, \mathcal{G})$ ein Faserbündel, so heißt eine (glatte) Abbildung

$$\mathcal{M} \xrightarrow{s} \mathcal{E} \quad (\text{A.59})$$

mit

$$\pi \circ s = \text{id}_{\mathcal{M}}$$

(globaler) Schnitt des Faserbündels. Die glatten (globalen) Schnitte von \mathcal{E} werden mit $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ bezeichnet.

Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ eine offene Teilmenge, so heißt eine (glatte) Abbildung

$$\mathcal{U} \xrightarrow{s} \mathcal{E} \quad (\text{A.60})$$

mit

$$\pi \circ s = \text{id}_{\mathcal{U}}$$

lokaler Schnitt des Faserbündels. Die glatten, lokalen Schnitte von \mathcal{E} über \mathcal{U} werden mit $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ bezeichnet. Ein lokaler Schnitt $s : A \rightarrow \mathcal{E}$ über einer abgeschlossenen Teilmenge $A \in \mathcal{M}$ heißt glatt, falls es eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \supseteq A$ und ein $s' \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ gibt, s.d. $s|_A = s'$ gilt.

Bemerkung A.95:

Die (lokalen) Schnitte $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ eines Faserbündels \mathcal{E} liefern durch

$$\tilde{\phi}^* s := \text{id}_{\mathcal{U}'} \times (s \circ \tilde{\phi})$$

Schnitte $\tilde{\phi}^* s \in \Gamma(\mathcal{U}', \tilde{\phi}^* \mathcal{E})$ des induzierten Faserbündels $(\tilde{\phi}^* \mathcal{E}, \tilde{\phi})$.

Die Existenz lokaler Schnitte in einem Faserbündel ist durch die lokale Trivialität letzterer gesichert. Die Existenz globaler Schnitte ist hingegen eine nicht triviale Frage, allerdings liefert das folgende Theorem eine Existenz-Aussagen für einen wichtigen Spezialfall.

Theorem A.96:

Für ein Faserbündel $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, \mathcal{F}, \rho, \mathcal{G})$ mit \mathcal{F}^n diffeomorph zu \mathbb{R}^n und einen (glatten) Schnitt $s : A \rightarrow \mathcal{E}$ über einer beliebigen, abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathcal{E}$ gibt es einen (glatten) Schnitt $s' : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $s'|_A = s$.

A.3.1 Vektorbündel

Eine wichtige Klasse von Faserbündeln bilden die Vektorbündel (vgl. zusätzlich [Nic07]).

Definition A.97:

Ein Faserbündel $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, \mathcal{F}, \rho, \mathcal{G})$ heißt $(\mathbb{K}-)$ Vektorbündel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), falls

- (1) der Fasertyp durch $\mathcal{F}^n = \mathbb{K}^n$ gegeben ist und für jede lokale Trivialisierung (\mathcal{U}, ψ) und jeden Punkt $p \in \mathcal{U}$ die Abbildung $\pi_2 \circ \psi|_{\mathcal{E}_p} : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathbb{K}^n$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

(2) die Strukturgruppe durch $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ gegeben ist.

Der Rang von \mathcal{E} ist:

$$\mathrm{rank}(\mathcal{E}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}) = n.$$

Die Schnitte $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ werden mittels der Operationen

$$(s + s')(p) := s(p) + s'(p) \text{ und } (fs)(p) := f(p)s(p) \quad \forall p \in \mathcal{M}, f \in C^\infty(\mathcal{M}), s, s' \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$$

zu einem $C^\infty(\mathcal{M})$ -Modul. Der Träger eines Schnittes s ist die Menge $\mathrm{supp}(s) := \overline{\{p \in \mathcal{M} \mid s(p) \neq 0\}}$.

Definition A.98:

Ein Bündel-Homomorphismus $(\phi, \tilde{\phi})$ zwischen zwei Vektorbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' heißt Vektorbündel-Homomorphismus, falls die Abbildungen

$$\mathcal{E}_p \xrightarrow{\phi|_{\mathcal{E}_p}} \mathcal{E}'_{\tilde{\phi}(p)} \quad (\text{A.61})$$

für alle $p \in \mathcal{M}$ linear sind.

Viele algebraische Operationen aus der Theorie der Vektorräume können durch faserweise Ausführung auf Vektorbündel übertragen werden. Die folgende Definition gibt die grundlegenden Beispiele an.

Definition A.99:

Sind \mathcal{E} und \mathcal{E}' Vektorbündel mit Übergangsfunktionen $\{g_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in A, \mathcal{U}_{\beta\alpha} \neq \emptyset\}$ bzw. $\{g_{\beta'\alpha'} \mid \alpha', \beta' \in A', \mathcal{U}'_{\beta'\alpha'} \neq \emptyset\}$, so lassen sich folgende Vektorbündel konstruieren:

- (1) $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ über $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ mit Faser $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')_{(p,p')} := \mathcal{E}_p \otimes \mathcal{E}'_{p'}$
und Übergangsfunktionen $g_{\beta\alpha} \otimes g_{\beta'\alpha'}$, (Tensorprodukt)
- (2) $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ über $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ mit Faser $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}')_{(p,p')} := \mathcal{E}_p \oplus \mathcal{E}'_{p'}$
und Übergangsfunktionen $g_{\beta\alpha} \oplus g_{\beta'\alpha'}$, (direkte Summe)
- (3) \mathcal{E}^* über \mathcal{M} mit Faser $\mathcal{E}_p^* := (\mathcal{E}_p)^*$ und Übergangsfunktionen $g_{\beta\alpha}^*$ (Dual).

($p \in \mathcal{M}, p' \in \mathcal{M}'$)

Ist $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ so wird in der Regel das durch

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\iota} \mathcal{M} \times \mathcal{M} \quad (\text{A.62})$$

$$p \longmapsto (p, p)$$

induzierte Vektorbündel betrachtet.

Bemerkung A.100:

Die Tensorbündel

$$T_s^r \mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M})^{\otimes r} \otimes T_p^*(\mathcal{M})^{\otimes s} \quad r, s \geq 0$$

können in natürlicher Weise als Vektorbündel über \mathcal{M}^n mit Fasertyp $\mathbb{R}^{n^{r \cdot s}}$ und Strukturgruppe $\mathrm{GL}_{n^{r \cdot s}}(\mathbb{R})$ aufgefasst werden. Die Spezialfälle $T\mathcal{M} := T_0^1 \mathcal{M}$ und $T^*\mathcal{M} := T_1^0 \mathcal{M}$ bezeichnet man als Tangential- und Kotangentialbündel.

Die Tensorfelder auf \mathcal{M} sind die Schnitte dieser Bündel.

Definition A.101:

Ein (lokales) Basenfeld in einem Vektorbündel \mathcal{E} vom Rang n über \mathcal{M} ist ein Vektorbündel-Isomorphismus

$$\mathcal{U} \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\phi} \pi^{-1}(\mathcal{U}) \quad (\text{A.63})$$

für eine offene Teilmenge \mathcal{U} , der die Identität auf \mathcal{U} induziert. $\mathcal{U} \times \mathbb{K}^n$ ist als triviales Bündel über \mathcal{U} zu verstehen.

Häufig werden auch die (lokalen) Schnitte

$$e_\alpha := \phi(\delta_\alpha) \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$

als (lokales) Basenfeld bezeichnet, wobei $\delta_\alpha(p) := v_\alpha(\forall p \in \mathcal{U}, \alpha)$ und $\{v_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, n}$ die kanonische Basis von \mathbb{K}^n ist.

Ein Basenfeld ist das Inverse einer Trivialisierung.

Eine entscheidende Zusatzstruktur für Vektorbündel¹⁸⁶ sind die Zusammenhänge.

Definition A.102:

Ist \mathcal{E} ein Vektorbündel über \mathcal{M} , so heißt eine lineare Abbildung

$$\Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M}) \otimes \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \quad (\text{A.64})$$

$$(V, s) \longmapsto \nabla_V s$$

mit den Eigenschaften

$$(1) \quad \nabla_{fV} s = f \nabla_V s \quad \text{für alle } f \in C^\infty(\mathcal{M}), V \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M}), s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}),$$

($C^\infty(\mathcal{M})$ -Linearität)

$$(2) \quad \nabla_V (fs) = (Vf)s + f \nabla_V s \quad \text{für alle } f \in C^\infty(\mathcal{M}), V \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M}), s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}),$$

(Leibniz-Regel)

Zusammenhang oder kovariante Ableitung auf \mathcal{E} .

∇ wird durch die Vorschrift $\nabla f = df$ auf $C^\infty(\mathcal{M})$ fortgesetzt.

Bemerkung A.103:

Die Werte $\nabla_V s(p)$, für einen Punkt $p \in \mathcal{M}$, eines Zusammenhangs auf \mathcal{E} hängen nur von $V|_p$ und den Werten $s|_{\gamma(t)}$ für eine Kurve $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = V|_p$ ab. Es ist also sinnvoll $\nabla_v s \in \mathcal{E}_p$ für $v \in T_p(\mathcal{M})$ zu schreiben.

Die Existenz von Zusammenhängen auf Vektorbündeln ist durch Theorem A.96 gesichert.

Die Differenz zwei Zusammenhänge ∇ und ∇' über eine Vektorbündel \mathcal{E} liefert einen Schnitt:

$$\nabla - \nabla' =: M_{\nabla, \nabla'} \in \Gamma(\mathcal{M}, T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E})$$

Definition A.104:

Ist \mathcal{E} ein Vektorbündel über \mathcal{M} , ∇ ein Zusammenhang auf \mathcal{E} und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ ein Kurvensegment, so ist durch die folgende Konstruktion ein Isomorphismus von Vektorräumen

$$\mathcal{E}_{\gamma(a)} \xrightarrow{P_\gamma} \mathcal{E}_{\gamma(b)} \quad (\text{A.65})$$

¹⁸⁶Oder auch für Faserbündel im Allgemeinen (vgl. [KN63]).

definiert.

$P_\gamma(\sigma) := s(b)$ für die eindeutige Lösung $s \in \Gamma([a, b], \mathcal{E})$ der gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung

$$\nabla_{\gamma'} s = 0$$

auf $[a, b]$ mit der Anfangsbedingung $s(a) = \sigma$ ¹⁸⁷.

Die Abbildung p_γ heißt Paralleltransport entlang γ .

Bemerkung A.105:

Sind ∇ und ∇' Zusammenhänge auf Vektorbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' , so lassen sich das Tensorprodukt $\nabla \otimes \nabla'$, die direkte Summe $\nabla \oplus \nabla'$ und das Dual ∇^* mit der Forderung, daß die Abbildungen

$$\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \times \Gamma(\mathcal{M}', \mathcal{E}') \xrightarrow{\otimes} \Gamma(\mathcal{M} \times \mathcal{M}', \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}') \quad (\text{A.66})$$

und

$$\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*) \times \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} C^\infty(\mathcal{M})$$

kovariant konstant sind, erklären¹⁸⁸. Es ergeben sich die Formeln

- (1) $(\nabla \otimes \nabla')_{(V, W)}(s \otimes s') = (\nabla_V s) \otimes s' + s \otimes (\nabla'_W s')$,
- (2) $(\nabla \oplus \nabla')_{(V, W)}(s, s') = (\nabla_V s) \oplus (\nabla'_W s')$,
- (3) $(\nabla_V^* s^*, s) = -(s^*, \nabla_V s) + V(s^*, s)$

für alle $V \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$, $W \in \Gamma(\mathcal{M}', T\mathcal{M}')$, $s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E})$, $s^* \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$, $s' \in \Gamma(\mathcal{M}', \mathcal{E}')$.

Dies erlaubt es höhere kovariante Ableitungen auf einem Vektorbündel \mathcal{E} mit Zusammenhang ∇ durch die Wahl eines weiteren Zusammenhangs $\nabla^{T^*\mathcal{M}}$ auf $T^*\mathcal{M}$ zu definieren:

$$\nabla^r : \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{M}, T^*\mathcal{M}^{\otimes r} \otimes \mathcal{E}) \text{ mit } \nabla^r s := (\nabla^{T^*\mathcal{M}})^{\otimes(r-1)} \otimes \nabla(\dots \nabla^{T^*\mathcal{M}} \otimes \nabla(\nabla s))$$

($r > 1$)

Definition A.106:

Ist \mathcal{E} ein Vektorbündel vom Rang n über \mathcal{M}^m mit einem Zusammenhang ∇ und (\mathcal{U}, ψ) ein Koordinatensystem für \mathcal{M} mit einem Basenfeld $\{e_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, n}$ über \mathcal{U} in \mathcal{E} , so ist die lokale Zusammenhangs-1-Form durch

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{i=1}^m \Gamma_{i\alpha}^\beta dx_\psi^i \otimes e_\beta = \nabla e_\alpha$$

definiert. Die Funktionen $\{\Gamma_{i\alpha}^\beta\}_{i=1, \dots, m; \alpha, \beta=1, \dots, n}$ auf \mathcal{U} heißen die Christoffel Symbole bezüglich (\mathcal{U}, ψ) und $\{e_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, n}$.

Definition A.107:

Ist ∇ ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel \mathcal{E} , so heißt der Schnitt

$$R \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^2 T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*), \quad R(V, W)s := \nabla_V(\nabla_W s) - \nabla_W(\nabla_V s) - \nabla_{[V, W]}s$$

¹⁸⁷Man nutzt hier aus, daß die Lösungen einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung auf dem ganzen Intervall definiert sind, für das die (glatten) Koeffizientenfunktionen gegeben sind.

¹⁸⁸vgl. Proposition A.44.

der Krümmungstensor von ∇ . Insbesondere hängt $(R(V, W)s)(p)$ nur von $V|_p$, $W|_p$ und $s(p)$ ab.

Eine weitere, häufig verwendete, Zusatzstruktur auf Vektorbündeln sind Fasermetriken.

Definition A.108:

Eine Fasermetrik auf einem Vektorbündel \mathcal{E} über \mathcal{M} ist ein Schnitt $g \in \Gamma(\mathcal{M}, (\mathcal{E}^*)^{\otimes 2})$, s.d. $g(p)$ für alle $p \in \mathcal{M}$ ein (hermitisches) Skalarprodukt auf \mathcal{E}_p induziert.

Bemerkung A.109:

Die Existenz einer Fasermetrik g auf einem Vektorbündel \mathcal{E} wird durch die Existenz lokaler Schnitte und einer Zerlegung der Eins gesichert. Wird die Eigenschaft, daß g positiv definite Skalarprodukte auf den Faser induziert, dahin abgeschwächt, daß $g(p)$ eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform über \mathcal{E}_p ist, so gilt diese Aussage nicht.

Betrachtet man das Zusammenspiel von Zusammenhängen und Fasermetriken, so erweist sich die folgende Definition als nützlich.

Definition A.110:

Ist \mathcal{E} ein Vektorbündel über \mathcal{M} mit einer Fasermetrik g und einem Zusammenhang ∇ , so heißt ∇ metrik-verträglich (bezüglich g), falls die Metrik kovariant konstant ist, d.h.

$$(\nabla^*)^{\otimes 2}g = 0.$$

Bemerkung A.111:

Ist \mathcal{E} ein Vektorbündel mit Fasermetrik g , so wird durch

$$v^{*g}(w) := g(p)(v, w) \quad \forall w \in \mathcal{E}_p; v \in \mathcal{E}_p, p \in \mathcal{M}$$

ein Vektorbündel-Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{*g} & \mathcal{E}^* \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi^* \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{M}}} & \mathcal{M} \end{array} \quad (\text{A.67})$$

induziert. Dieser Isomorphismus erlaubt es zur Fasermetrik g auf \mathcal{E} durch

$$g^*(p)(v^*, w^*) := g(p)((*g)^{-1}(v^*), (*g)^{-1}(w^*)) \quad \forall v^*, w^* \in \mathcal{E}_p^*; p \in \mathcal{M}$$

eine duale Fasermetrik g^* auf \mathcal{E}^* zu assoziieren.

Ferner werden durch das Tensorprodukt und die direkte Summe von Vektorbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' auch das *Tensorprodukt* $g \otimes g'$ und die direkte Summe $g \oplus g'$ zweier Fasermetriken induziert¹⁸⁹.

A.3.2 Lineare Differentialoperatoren

Definition A.112:

Ein linearer Differentialoperator zwischen Vektorbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' (beide über \mathcal{M}^d) vom Rang m bzw. n ist eine lineare Abbildung

$$\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \xrightarrow{P} \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}') \quad (\text{A.68})$$

mit der Eigenschaft:

¹⁸⁹Allgemeiner übertragen sich diese Operationen auf die Schnitte der Vektorbündel.

Für jeden Punkt $p \in \mathcal{M}$ existieren ein Koordinatensystem (\mathcal{U}, χ) und Abbildungen ψ und ψ' , für die (\mathcal{U}, ψ) und (\mathcal{U}, ψ') lokale Trivialisierungen von \mathcal{E} bzw. \mathcal{E}' sind, s.d.

$$(Ps)(p) = \sum_{|\alpha| \leq k} (\psi'_{|\mathcal{E}'_p})^{-1} \left(A^\alpha(p) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u^\alpha} \Big|_{\chi(p)} s_{\psi\chi} \right), \quad s_{\psi\chi} := \pi_2 \circ \psi_{|\mathcal{E}_p} \circ s \circ \chi^{-1}$$

mit $A^\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \forall \alpha$ für alle $s \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ gilt¹⁹⁰.

Ein solches Tupel $(\mathcal{U}, \chi, \psi, \psi')$ wird als trivialisierendes Koordinatensystem für P bezeichnet. Die höchste Zahl $k \in \mathbb{N}$, s.d. $A_\alpha \neq 0$ für ein α mit $|\alpha| = k$, heißt die Ordnung von P ; geschrieben $\text{ord}(P) = k$.

Definition A.113:

Ist P ein linearer Differentialoperator der Ordnung k zwischen Vektorbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' , und $(\mathcal{U}, \chi, \psi, \psi')$ ein trivialisierendes Koordinatensystem von P um $p \in \mathcal{M}^d$, so definiert die Vorschrift

$$\sigma_P(p)(\omega) := \sum_{|\alpha|=k} (\psi'_{|\mathcal{E}'_p})^{-1} \circ (\omega_\alpha A^\alpha(p)) \circ \psi_{|\mathcal{E}_p}, \quad \omega = \sum_{i=1}^d \omega_i dx_{\chi|p}^i \in T_p^*(\mathcal{M})$$

eine Abbildung

$$T^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sigma_P} \mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}^* \cong \text{hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}'). \quad (\text{A.69})$$

σ_P heißt das Hauptsymbol von P und ist unabhängig von den getroffene Wahlen.

Bemerkung A.114:

Sind P und P' zwei lineare Differentialoperatoren der Ordnung k bzw. k' zwischen Vektorbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' bzw. \mathcal{E}' und \mathcal{E}'' (alle über \mathcal{M}), so ist $P' \circ P$ ein linearer Differentialoperator zwischen \mathcal{E} und \mathcal{E}'' mit $\text{ord}(P' \circ P) \leq k + k'$.

Für die Hauptsymbole gilt die Gleichung

$$\sigma_{P' \circ P}(\omega) = \sigma_{P'}(\omega) \circ \sigma_P(\omega) \quad \forall \omega \in T^*\mathcal{M}.$$

Definition A.115:

Ist P ein linearer Differentialoperator zwischen Vektorbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' über \mathcal{M} und ist ϖ eine Volumenform auf \mathcal{M} , so existiert ein eindeutig bestimmter linearer Differentialoperator P^* zwischen \mathcal{E}'^* und \mathcal{E}^* , charakterisiert durch die Eigenschaft¹⁹¹

$$\int_{\mathcal{M}} (s'^*, Ps)\varpi = \int_{\mathcal{M}} (P^*s'^*, s)\varpi \quad \forall s \in \Gamma_0(\mathcal{M}, \mathcal{E}), \quad s'^* \in \Gamma_0(\mathcal{M}, \mathcal{E}'^*).$$

P^* heißt der (formal) adjungierte lineare Differentialoperator zu P . Es gilt $\text{ord}(P) = \text{ord}(P^*)$ und $(P^*)^* = P$ ¹⁹².

A.4 Distributionen auf Mannigfaltigkeiten

I turn away with fear and horror from this lamentable plague of functions which do not have derivatives.

CHARLES HERMITE

¹⁹⁰ α ist ein Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$; $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$; $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_d^{\alpha_d}}$

¹⁹¹ Γ_0 bezeichnet die glatten Schnitte mit kompaktem Träger.

¹⁹² Beachte den natürlichen Vektorbündel-Isomorphismus $(\mathcal{E}^*)^* = \mathcal{E}$

Dieser Abschnitt gibt eine kurze Einführung in die Theorie der Distribution in Vektorbündeln. Details zur klassischen Theorie im \mathbb{R}^n finden sich im Buch von F.G. Friedlander ([Fri75], Abschnitt 2).

Definition A.116:

Für ein Vektorbündel \mathcal{E} über \mathcal{M} wird der $C^\infty(\mathcal{M})$ -Modul $\Gamma_0(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ der glatten Schnitte mit kompaktem Träger als Raum der Testschnitte $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ bezeichnet.

Sind ∇ und $\nabla^{T^*\mathcal{M}}$ Zusammenhänge und g und $g^{T^*\mathcal{M}}$ Fasermetriken auf \mathcal{E} bzw. $T^*\mathcal{M}$, so definiert man die $C_{\mathcal{X}}^r$ -Halbnormen, für ein Kompaktum $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}$ und einen Index $r \in \mathbb{N}$, auf $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ durch

$$\|s\|_{C_{\mathcal{X}}^r} := \max_{i \in \{0, \dots, r\}} \sup_{p \in \mathcal{X}} \|(\nabla^i s)(p)\|_{(T^*\mathcal{M}^{\otimes r} \otimes \mathcal{E})_p}^{g, g^{T^*\mathcal{M}}}, s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}),$$

wobei $\|\cdot\|_{(T^*\mathcal{M}^{\otimes r} \otimes \mathcal{E})_p}^{g, g^{T^*\mathcal{M}}}$ die durch g und $g^{T^*\mathcal{M}}$ induzierte Norm auf den Fasern $(T^*\mathcal{M}^{\otimes r} \otimes \mathcal{E})_p$, $p \in \mathcal{M}$ ist.

Eine (lokal konvexe) Vektorraum-Topologie wird auf $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ durch die folgende Vorschrift eingeführt:

Eine Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ konvergiert gegen $0 \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$, falls

- (1) $\exists \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M} : \forall n : \text{supp}(s_n) \subseteq \mathcal{X}$,
- (2) $\forall r \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\|_{C_{\mathcal{X}}^r} = 0$.

Die Definition der $C_{\mathcal{X}}^r$ -Halbnormen ist unabhängig von den getroffenen Wahlen für ∇ , $\nabla^{T^*\mathcal{M}}$, g und $g^{T^*\mathcal{M}}$, da alle Normen auf den endlich-dimensionalen Vektorräumen $(T^*\mathcal{M}^{\otimes r} \otimes \mathcal{E})_p$ ($p \in \mathcal{M}$, $r \in \mathbb{N}$) äquivalent sind, die Menge \mathcal{X} kompakt ist und die Differenz zweier Zusammenhänge durch einen Endomorphismus in jeder Faser $(T^*\mathcal{M}^{\otimes r} \otimes \mathcal{E})_p$, der glatt von p abhängt, gegeben ist.

Definition A.117:

Eine Distribution in \mathcal{E} mit Werten in einem endlich-dimensionalen $(\mathbb{K}-)$ Vektorraum V ^{193,194} ist eine stetige, lineare Abbildung

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*) \xrightarrow{\mathfrak{D}} V. \tag{A.70}$$

Die Distributionen in \mathcal{E} mit Werten in \mathbb{K} bilden also den (topologischen) Dualraum $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ von $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$. Daher lassen sich die Distributionen in \mathcal{E} mit Werten in V als

$$\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V) := \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{K}} V \text{ verstehen}^{195}.$$

$\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ wird mit der schwach-* -Topologie zu einem topologischen Vektorraum.

Der Träger einer Distribution $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ ist definiert als

$$\text{supp}(\mathfrak{D}) := \{p \in \mathcal{M} \mid \forall \text{offenen } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M} : p \in \mathcal{U} \exists s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*), \text{supp}(s) \subseteq \mathcal{U} : \mathfrak{D}(s) \neq 0\}.$$

Korollar A.118:

Ein lineares Funktional \mathfrak{D} über $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ ist genau dann ein Element von $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$, wenn für alle Kompakta $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}$ gilt: Es existieren $0 \leq r \in \mathbb{N}$ und $0 < C \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\|\mathfrak{D}(s)\|_V \leq C \|s\|_{C_{\mathcal{X}}^r}$$

für alle $s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ mit $\text{supp}(s) \subseteq \mathcal{X}$. Die Zahl r wird Ordnung von \mathfrak{D} über \mathcal{X} genannt.

¹⁹³kurz: Distribution

¹⁹⁴Die Angabe einer Vektorraum-Topologie auf V ist unnötig, da endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräume normierbar und alle Normen auf diesen äquivalent sind.

¹⁹⁵Die Topologie auf $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{K}} V$ ist komponentenweise durch die von $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ gegeben.

Bemerkung A.119:

Lemma A.120 erlaubt die stetige Fortsetzung von Distributionen $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ mit kompaktem Träger auf $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ durch die Forderung, daß ein Kompaktum \mathcal{K} und $0 \leq r \in \mathbb{N}$, $0 < C \in \mathbb{R}$ existieren, s.d.

$$|\mathfrak{D}(s)|_V \leq C \|s\|_{C^r_{\mathcal{K}}}$$

für alle $s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ gilt. Der so konstruierte Unterraum von $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ wird mit $\Gamma^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ bezeichnet und ebenfalls mit der schwach-* -Topologie versehen.

Alternativ kann $\Gamma^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ als der Raum der stetigen, linearen Abbildungen

$$\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*) \xrightarrow{\mathfrak{D}} V, \quad (\text{A.71})$$

wobei $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)$ mit der durch die Familie $\{\|\cdot\|_{C^r_{\mathcal{K}}} \mid r \in \mathbb{N}, \mathcal{K} \sqsubseteq \mathcal{M}\}$ induzierten Vektorraum-Topologie versehen wird, verstanden werden.

Lemma A.120:

Ist \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit mit Volumenform ϖ , so existiert eine natürliche, lineare, stetige¹⁹⁶ Einbettung

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\iota} \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V) \quad (\text{A.72})$$

gegeben durch

$$\iota(s \otimes v)(s^*) := \left(\int_{\mathcal{M}} (s^*, s) \varpi \right) \cdot v \quad \forall s^* \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*); s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}), v \in V.$$

ι kann als lineare Abbildung¹⁹⁷ auf $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{K}} V$ ausgedehnt werden. Ferner erlaubt es ι den singulären Träger einer Distribution $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ zu definieren:

$$\begin{aligned} \text{sing supp}(\mathfrak{D}) &:= \{p \in \mathcal{M} \mid \nexists \text{ offenes } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M} : p \in \mathcal{U} : \exists s \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{K}} V : \\ &\quad \mathfrak{D}(s^*) = \iota(s)(s^*) \forall s^* \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*)\}. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden einige wichtige Operationen mit Distributionen erklärt.

Lemma A.121:

Die Distributionen $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ bilden eine $C^\infty(\mathcal{M})$ -Modul. Die Modulstruktur wird durch

$$(f\mathfrak{D})(s) := \mathfrak{D}(fs) \quad \forall s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*); f \in C^\infty(\mathcal{M}), \mathfrak{D} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$$

erklärt. Diese Operation ist stetig auf $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$.

Lemma A.122:

Ist $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ eine Distribution und $\phi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ ein Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten mit Volumenformen $\varpi_{\mathcal{N}}$ bzw. $\varpi_{\mathcal{M}}$, so wird durch

$$(\phi^*\mathfrak{D})(s) := \mathfrak{D}(J_{\phi^{-1}} \cdot (\phi^{-1})^*s) \quad \forall s \in \mathcal{D}(\mathcal{N}, (\phi^*\mathcal{E})^*)$$

eine Distribution $\phi^*\mathfrak{D} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{N}, \phi^*\mathcal{E}, V)$ definiert. $\phi^*\mathfrak{D}$ heißt der Pullback von \mathfrak{D} entlang ϕ . Der Pullback ist stetig in $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$, da ϕ eine eigentliche¹⁹⁸ Abbildung ist.

¹⁹⁶Die Topologie auf $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{K}} V$ ist, analog zu $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{K}} V$, komponenten Weise durch die von $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ gegeben.

¹⁹⁷An dieser Stelle wird auf die Frage nach der Stetigkeit von ι verzichtet.

¹⁹⁸Eine Abbildung heißt eigentlich, wenn die Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Lemma A.123:

Ist P ein linearer Differentialoperator zwischen Vektorbündeln \mathcal{E} und \mathcal{E}' , so hat P eine (kanonische) stetige, lineare Fortsetzung

$$\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V) \xrightarrow{P} \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}', V), \quad (\text{A.73})$$

definiert durch

$$(P\mathfrak{D})(s) := \mathfrak{D}(P^*s) \quad \forall s \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^*); \quad \mathfrak{D} \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V).$$

Proposition A.124:

Das Tensorprodukt zweier (elementarer) Distributionen $\mathfrak{D} \otimes v \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V)$ und $\mathfrak{D}' \otimes v' \in \mathcal{D}^*(\mathcal{M}', \mathcal{E}', V')$ wird durch

$$((\mathfrak{D} \otimes v) \otimes (\mathfrak{D}' \otimes v'))(s) := (\mathfrak{D}(\mathfrak{D}'(s)))(v \otimes v') = (\mathfrak{D}'(\mathfrak{D}(s)))(v \otimes v') \quad \forall s \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}', \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$$

erklärt¹⁹⁹.

Dies liefert eine stetige, bilineare Abbildung

$$\mathcal{D}^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}, V) \times \mathcal{D}^*(\mathcal{M}', \mathcal{E}', V') \xrightarrow{\otimes} \mathcal{D}^*(\mathcal{M} \times \mathcal{M}', \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}', V \otimes V'). \quad (\text{A.74})$$

Sind P und P' zwei lineare Differentialoperatoren auf \mathcal{E} bzw. \mathcal{E}' , so wird das Tensorprodukt von $P \otimes P'$ durch

$$(P \otimes P')(\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}') := (P\mathfrak{D}) \otimes (P'\mathfrak{D}')$$

definiert.

¹⁹⁹Die Wohldefiniertheit folgt aus Lemma 1.1.6 in [BGP07] und Theorem 2.4.2 in [Fri75].

B Semi-Riemann'sche Geometrie

Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale.

Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

HERMANN MINKOWSKI

Dieser Abschnitt liefert eine Einführung in die Theorie der Semi-Riemann'schen Geometrie. Außerdem finden sich hier einige grundlegende Aussagen, die in der vorliegende Arbeit verwendet werden.

Für Details und weitergehende Resultate sei auf das Buch von Barrett O'Neill [O'N83], besonders Kapitel 3 – 5, verwiesen. Notationen und Konzepte aus der Differentialgeometrie finden sich in Appendix A.

B.1 Grundlagen

Definition B.1:

Eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} heißt Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Metrik g , falls das Tangentialbündel $T\mathcal{M}$ mit einer, nicht notwendig definiten²⁰⁰, Fasermetrik g versehen ist.

\mathcal{M} heißt Riemann'sche Mannigfaltigkeit, falls $g|_p \forall p \in \mathcal{M}$ positiv definit ist.

\mathcal{M} heißt Lorentz'sche Mannigfaltigkeit, falls für den Index²⁰¹ $\text{ind}(g|_p)$ gilt:

$$\text{ind}(g(p)) = 1.$$

Bemerkung B.2:

Streng genommen, ist eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit ein Paar (\mathcal{M}, g) , bestehend aus einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} und einer Fasermetrik g auf $T\mathcal{M}$, allerdings soll dies im Folgenden durch \mathcal{M} abgekürzt werden, sofern keine Verwechslungsgefahr besteht.

Definition B.3:

Für zwei Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} und \mathcal{N} , sowie eine glatte Abbildung $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, heißt das Paar (\mathcal{M}, ϕ) (eingebettete) Semi-Riemann'sche Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N} , falls (\mathcal{M}, ϕ) eine (eingebettete) Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N} ist und

$$\phi^*(g_{\mathcal{N}}) = g_{\mathcal{M}}$$

gilt.

Definition B.4:

Sind \mathcal{M} und \mathcal{N} Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten, so wird das kartesische Produkt $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ durch

$$g_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}} := (\pi_1)^*(g_{\mathcal{M}}) + (\pi_2)^*(g_{\mathcal{N}})$$

in natürlicher Weise zu einer Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit.

Die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten sind die Isometrien.

²⁰⁰Die (In-)Definitheit bezieht sich natürlich auf die Bilinearformen $g|_p$, $p \in \mathcal{M}$

²⁰¹Der Index einer Bilinearform B auf einem Vektorraum V ist die größte (natürliche) Zahl k , s.d. ein Unterraum $W \subseteq V$ mit $\dim(W) = k$ existiert und $B|_W$ negativ definit ist.

Definition B.5:

Ist $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Diffeomorphismus zwischen Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} und \mathcal{N} , so heißt ϕ Isometrie, falls

$$\phi^*(g_{\mathcal{N}}) = g_{\mathcal{M}}$$

gilt. \mathcal{M} und \mathcal{N} heißen dann isometrisch.

Eine glatte Abbildung $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ zwischen Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} und \mathcal{N} heißt lokale Isometrie, falls

$$\phi_{*,p} : (T_p(\mathcal{M}), g_{\mathcal{M}|_p}) \rightarrow (T_{\phi(p)}(\mathcal{N}), g_{\mathcal{N}|_{\phi(p)}}), \quad \forall p \in \mathcal{M}$$

eine lineare Isometrie ist.

Eine isometrische Einbettung $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist eine glatte Abbildung, s.d. die Einschränkung $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \phi(\mathcal{M})$ eine Isometrie ist. $\phi(\mathcal{M})$ wird dabei mit der Unterraum-Topologie von \mathcal{N} versehen.

Die Tangentialvektoren an eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit zerfallen in drei Klassen.

Definition B.6:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $v \in T_p(\mathcal{M})$ ein Tangentialvektor, so unterscheidet man die Fälle²⁰²:

- (1) v heißt raumartig, falls $g_p(v, v) > 0$ gilt.
- (2) v heißt lichtartig, falls $g_p(v, v) = 0$ gilt.
- (3) v heißt zeitartig, falls $g_p(v, v) < 0$ gilt.

Analog nennt man eine Kurve bzw. ein Kurvensegment $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$

- (1) raumartig, falls $g_{|\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}$ gilt.
- (2) lichtartig, falls $g_{|\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}$ gilt.
- (3) zeitartig, falls $g_{|\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) < 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}$ gilt.

Ein(e) nicht raumartige Kurve/Kurvensegment wird auch als kausal bezeichnet.

Für orientierbare Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten erlaubt die Metrik g die Definition einer speziellen Volumenform.

Definition B.7:

Ist \mathcal{M} eine orientierbare Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein orientierender Atlas, so definiert die Vorschrift

$$(\psi_\alpha^{-1})^*(dV_g)_x := (|g_{\psi_\alpha}|(x))^{\frac{1}{2}} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^n, \quad \forall x \in \psi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha); \quad (\alpha \in A)$$

eine Volumenform dV_g auf \mathcal{M} . $|g_{\psi_\alpha}|(x)$ bezeichnet die Determinante der Matrix

$$\{\alpha g_{ij}(\psi_\alpha^{-1}(x)) := g_{|\psi_\alpha^{-1}(x)}(\partial_i^{\psi_\alpha}, \partial_j^{\psi_\alpha})\}_{i,j=1,\dots,n}.$$

Das Transformationsverhalten

$$|g_{\psi_\alpha}|(x) = \det \left(\left(\frac{d(u^k \circ \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})}{du^l} \Big|_x \right)_{k,l=1,\dots,n} \right)^2 |g_{\psi_\beta}|(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x)), \quad (\alpha, \beta \in A)$$

sichert die Wohldefiniertheit.

²⁰²auch: kausaler Charakter.

B.1.1 Der Levi-Civita Zusammenhang

Für Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten existiert ein ausgezeichneter Zusammenhang auf dem Tangentialbündel.

Theorem B.8:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit, so existiert ein eindeutiger Zusammenhang ∇ auf $T\mathcal{M}$ mit den Eigenschaften

- (1) $T(V, W) := \nabla_V W - \nabla_W V - [V, W] = 0,$ (torsionsfrei)
- (2) $(\nabla^*)^{\otimes 2} g = 0^{203}.$ (Metrik-Verträglichkeit)

für alle $V, W \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. ∇ heißt der Levi-Civita Zusammenhang von \mathcal{M} und wird durch

$$g(\nabla_V W, U) = \frac{1}{2}(Vg(W, U) + Wg(U, V) - Ug(V, W) - g(V, [W, U]) + g(W, [U, V]) + g(U, [V, W]))$$

(Koszul-Formel)

charakterisiert.

T heißt Torsionstensor von ∇ .

Sofern nicht anders erwähnt, ist für eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit ∇ immer der Levi-Civita Zusammenhang gemeint.

Weitere wichtige Differentialoperatoren werden durch die folgende Definition erklärt.

Definition B.9:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit, so werden durch die Metrik g die folgenden Differentialoperatoren induziert:

- (1) $\text{grad } f := (*g)^{-1}(\nabla f)$ für $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, (Gradient)
- (2) $\text{div } V := \mathcal{L}_V^1(\nabla V)$ für $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, (Divergenz)
- (3) $\square f := -\text{div grad } f$ für $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. (Laplace-d'Alembert-Operator)

Korollar B.10:

Die Christoffel Symbole des Levi-Civita Zusammenhangs einer Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^n sind, bezüglich eines lokalen Koordinatensystems (\mathcal{U}, ψ) und des assoziierten Basenfeldes $\{\partial_i^\psi\}_{i=1, \dots, n}$ in $T\mathcal{M}$, durch

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_i^\psi g_{jl} + \partial_j^\psi g_{il} - \partial_l^\psi g_{ij})$$

gegeben²⁰⁴.

Korollar B.11:

Ist $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine Isometrie, so gilt für die Levi-Civita Zusammenhänge $\nabla^{\mathcal{M}}$ und $\nabla^{\mathcal{N}}$:

$$\phi_*(\nabla_V^{\mathcal{M}} W) = \nabla_{\phi_*(V)}^{\mathcal{N}} \phi_*(W), \quad \forall V, W \in \mathcal{X}(\mathcal{M}).$$

Korollar B.12:

Der Paralleltransport im Tangentialbündel $T\mathcal{M}$ einer Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , gegeben durch den Levi-Civita Zusammenhang von \mathcal{M} , ist eine lineare Isometrie entlang jedes

²⁰³Zur Erklärung von $(\nabla^*)^{\otimes 2}$ siehe Bemerkung A.105 und Proposition A.44.

²⁰⁴Die Funktionen $\{g^{kl}\}_{k,l=1, \dots, n}$ sind die Komponenten der dualen Metrik g^* bezüglich des dualen Basenfeldes $\{dx_\psi^i\}_{i=1, \dots, n}$.

Kurvensegmentes $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$.

Ferner ist der Paralleltransport erhalten unter lokalen Isometrien, d.h. für ein Kurvensegment $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ gilt:

$$\phi_{*,\gamma(b)} \circ P_{\gamma}^{\mathcal{M}} = P_{\phi \circ \gamma}^{\mathcal{N}} \circ \phi_{*,\gamma(a)}$$

für alle lokalen Isometrien $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Eine entscheidende Größe in der Semi-Riemann'schen Geometrie ist der Krümmungstensor (s. Definition A.107) des Levi-Civita Zusammenhangs²⁰⁵.

Proposition B.13:

Ist \mathcal{M}^n eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $R \in \mathcal{T}_3^1(\mathcal{M})$ der Krümmungstensor des Levi-Civita Zusammenhangs ∇ auf \mathcal{M} , so gilt:

- (1) $R|_p(v, w) = -R|_p(w, v)$,
- (2) $g|_p(R|_p(v, w)u, o) = -g|_p(R|_p(v, w)o, u)$,
- (3) $R|_p(v, w)u + R|_p(w, u)v + R|_p(u, v)w = 0$,
- (4) $g|_p(R|_p(v, w)u, o) = g|_p(R|_p(u, o)v, w)$,
- (5) $(\nabla_v R)|_p(w, u) + (\nabla_w R)|_p(u, v) + (\nabla_u R)|_p(v, w) = 0$

für alle $v, w, u, o \in T\mathcal{M}$ ($\pi(v) = \pi(w) = \pi(u) = \pi(o) = p$)²⁰⁶.

In lokalen Koordinaten (\mathcal{U}, ψ) ist der Krümmungstensor durch

$$R_{kij}^l = \partial_i^\psi \Gamma_{jk}^l - \partial_j^\psi \Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m), \quad (i, j, k, l = 1, \dots, n)$$

mit $R(\partial_i^\psi, \partial_j^\psi)\partial_k^\psi =: \sum_{l=1}^n R_{kij}^l \partial_l^\psi$ ($i, j, k = 1, \dots, n$), gegeben.

Ferner ist der Krümmungstensor erhalten unter lokalen Isometrien $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, d.h.

$$\phi_{*,p}(R|_p^{\mathcal{M}}(v, w)u) = R|_{\phi(p)}^{\mathcal{N}}(\phi_{*,p}(v), \phi_{*,p}(w))\phi_{*,p}(u)$$

für alle $v, w, u \in T_p(\mathcal{M})$.

Weitere assoziierte Größen des Riemann'schen Krümmungstensors sind der Ricci-Tensor, die Skalarkrümmung und die Schnittkrümmung.

Definition B.14:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $R \in \mathcal{T}_3^1(\mathcal{M})$ der Riemann'sche Krümmungstensor.

- (1) Die Kontraktion²⁰⁷ $\text{Ric} := \mathcal{C}_3^1(R) \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{M})$ heißt Ricci-Tensor. In lokalen Koordinaten (\mathcal{U}, ψ) ist dieser durch die Formel

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ikj}^k \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

²⁰⁵Der Krümmungstensor des Levi-Civita Zusammenhangs wird auch als *Riemann'scher Krümmungstensor* bezeichnet.

²⁰⁶In Eigenschaft (5) wird der induzierte Zusammenhang auf $T\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M}$ ebenfalls mit ∇ bezeichnet.

²⁰⁷vgl. Definition A.42

gegeben. Relativ zu einem orthonormalen²⁰⁸ Basenfeld $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ in $T\mathcal{M}$ ergibt sich

$$\text{Ric}(V, W) = \sum_{i=1}^n g(e_i, e_i)g(R(V, e_i)e_i, W), \quad V, W \in \mathcal{X}(\mathcal{M}),$$

wodurch die Symmetrie $\text{Ric}(V, W) = \text{Ric}(W, V) \quad \forall V, W \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ erkennbar ist²⁰⁹. Gilt für \mathcal{M} $\text{Ric} = 0$, so heißt \mathcal{M} Ricci-flach.

(2) Die Skalarkrümmung ist die Funktion

$$S = \sum_{i=1}^n g(e_i, e_i)\text{Ric}(e_i, e_i) \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

In lokalen Koordinaten ergibt sich

$$S = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}R_{ij}.$$

Die Äquivarianz des Riemann'schen Krümmungstensors unter lokalen Isometrien $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ impliziert die Invarianz des Ricci-Tensors und der Skalarkrümmung

$$\phi^*(\text{Ric}_{\mathcal{N}}) = \text{Ric}_{\mathcal{M}}$$

$$\phi^*(S_{\mathcal{N}}) = S_{\mathcal{M}}$$

Definition B.15:

Die Schnittkrümmung einer Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} wird durch

$$K|_p(v, w) := \frac{g|_p(R(v, w)v, w)}{g|_p(R^S(v, w)v, w)}$$

für alle $v, w \in T_p(\mathcal{M})$ mit $g|_p(R^S(v, w)v, w) \neq 0$, definiert²¹⁰.

Die Schnittkrümmung ist, aufgrund der Äquivarianz der Krümmungstensors, erhalten unter lokalen Isometrien $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

$$K|_p^{\mathcal{M}}(v, w) = K|_{\phi(p)}^{\mathcal{N}}(\phi_{*,p}(v), \phi_{*,p}(w)) \quad \text{für } v, w \text{ wie oben.}$$

Ist K konstant, so wird \mathcal{M} als Raum konstanter Krümmung bezeichnet. Der Krümmungstensor ist dann durch

$$R|_p(v, w)u := K \cdot R^S(v, w)u = K(g|_p(u, v)w - g|_p(u, w)v) \quad \forall v, w, u \in T_p(\mathcal{M})$$

gegeben.

B.1.2 Geodäten und die Exponentialabbildung

Die Verallgemeinerung des Konzeptes der "geraden Linie" liefern die Geodäten.

Definition B.16:

Eine Geodäte in einer Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^n ist eine Kurve²¹¹

²⁰⁸ bzgl. der Metrik g , d.h. $g(e_i, e_j) = \pm\delta$.

²⁰⁹ vgl. Proposition B.13, Eigenschaft (4).

²¹⁰ R^S ist der Krümmungstensor der Einheitssphäre; $g|_p(R^S(v, w)v, w) = g|_p(v, v)g|_p(w, w) - (g|_p(v, w))^2$.

²¹¹ Die Definition für stückweise glatte Kurven(-segmente) erhält man durch Einschränkung auf die glatten Unterkurven (vgl. Definition A.13).

$\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$, die ihr Tangentialvektorfeld γ' paralleltransportiert, d.h.

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$$

In lokalen Koordinaten (\mathcal{U}, ψ) ergibt sich:

$$\frac{d^2(x_\psi^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \frac{d(x_\psi^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x_\psi^j \circ \gamma)}{dt} = 0, \quad (k = 1, \dots, n)$$

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert in Analogie zu Theorem A.53, Korollar A.54 und Bemerkung A.55:

- (1) Für alle $p \in \mathcal{M}$, $v \in T_p(\mathcal{M})$ existiert ein Intervall $\mathcal{I} \ni 0$ und eine eindeutige Geodäte $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.
- (2) Sind $\gamma, \zeta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$ zwei Geodäten mit $\gamma'(t) = \zeta'(t)$ für ein $t \in \mathcal{I}$, so gilt bereits $\gamma(t) = \zeta(t)$ für alle $t \in \mathcal{I}$.
- (3) Für alle $p \in \mathcal{M}$, $v \in T_p(\mathcal{M})$ existiert eine eindeutige, maximale Geodäte $\gamma_v : \mathcal{I}_v \ni 0 \rightarrow \mathcal{M}$, d.h. $\gamma_v(0) = p$, $\gamma'_v(0) = v$ und \mathcal{I}_v ist der größte Definitionsbereich für γ_v mit diesen Vorgaben.
 γ_v wird auch als nicht geodätisch fortsetzbar bezeichnet.

Ist jede maximale Geodäte in \mathcal{M} auf ganz \mathbb{R} definiert, so heißt \mathcal{M} geodätisch vollständig.

Bemerkung B.17:

Geodäten(-segmente) zwischen Punkten $p, q \in \mathcal{M}$ lassen sich als stationäre Punkte des Funktionals

$$\Gamma(p, q)[\gamma] := \int_0^1 g_{|\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt,$$

mit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, $\gamma(0) = q$, $\gamma(1) = p$, auffassen.

Bemerkung B.18:

Ist $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$ eine (nicht-konstante) Geodäte, so ist eine Reparametrisierung $\gamma \circ \varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{M}$, für einen Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$, nur dann eine Geodäte, falls φ *affin-linear* ist, d.h.

$$\varphi(t) = at + b \quad \forall t.$$

Ist φ nicht von dieser Form, so bezeichnet man $\gamma \circ \varphi$ als *Prä-Geodäte*.

Bemerkung B.19:

Der kausale Charakter einer Geodäten γ ist durch den kausale Charakter von γ' an einer beliebigen Stelle festgelegt, da γ' entlang γ paralleltransportiert wird und der Paralleltransport eine lineare Isometrie ist (vgl. Korollar B.12); $g_{|\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \text{konst.}$ (als Funktion von t). Ferner sind Geodäten in folgender Weise unter lokalen Isometrien $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ erhalten:

$$\phi \circ \gamma_v = \gamma_{\phi_* v} |_{\mathcal{I}_v}$$

Die Geodäten einer Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit erlauben die Einführung einer Abbildung, die in besonderer Weise an die Geometrie ersterer angepasst ist (vgl. [Fri75], S.12-19).

Theorem B.20:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit, so existiert eine Umgebung $\mathcal{V} \subseteq T\mathcal{M}$ des Null-Schnittes²¹², s.d. die Exponentialabbildung

$$\mathcal{V} \xrightarrow{\exp} \mathcal{M} \quad (\text{B.1})$$

$$\exp_p(v) := \gamma_v(1)$$

für alle $v \in \mathcal{V}$ ($\pi(v) = p$) wohldefiniert und glatt ist.
Es gilt die Identität

$$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$$

für alle $tv \in \mathcal{V}$, d.h. die Geraden durch den Ursprung $0 \in T_p(\mathcal{M})$ werden auf Geodäten durch $p \in \mathcal{M}$ abgebildet.

Das Differential

$$T_0(T_p(\mathcal{M})) \xrightarrow{\exp_{p,*,0}} T_p(\mathcal{M}) \quad (\text{B.2})$$

ist der kanonische Isomorphismus $v_0 \mapsto v$; $v_0 := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} tv$. Mit Theorem A.28 folgt, daß es für alle $p \in \mathcal{M}$ eine Umgebung von $0 \in T_p(\mathcal{M})$ $\mathcal{W} \subseteq T_p(\mathcal{M})$ und eine Umgebung von $p \in \mathcal{M}$ $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ gibt, s.d.

$$\mathcal{W} \xrightarrow{\exp} \mathcal{U} \quad (\text{B.3})$$

ein Diffeomorphismus ist.

Außerdem ist die Exponentialabbildung \exp_p erhalten unter lokalen Isometrien $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, d.h. (bei Einschränkung auf den passenden Definitionsbereich)

$$\phi \circ \exp_p = \exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,p}$$

Eine weitere wichtige Aussage über die Exponentialabbildung liefert das *Gauß Lemma*.

Lemma B.21 (Gauß Lemma):

Ist \mathcal{M} ein Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $p \in \mathcal{M}$ ein Punkt, so gilt

$$g|_{\exp_p(u)}(\exp_{p,*,u}(v_u), \exp_{p,*,u}(w_u)) = g_p(v, w)$$

für alle $v, w, u \in T_p(\mathcal{M})$, $u \propto v$ mit $v_u = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (u + tv)$, $w_u = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (u + tw)$, sofern $\exp_p(u)$ definiert ist.

Die Exponentialabbildung \exp_p ist demnach entlang der Geraden durch $0 \in T_p(\mathcal{M})$ längen- und winkeltreu.

Die Exponentialabbildung erlaubt die Definition zweier wichtiger Typen von Umgebungen in einer Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit.

Definition B.22:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit, so heißt eine Umgebung

(1) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ normal bezüglich $p \in \mathcal{U}$, falls es eine Umgebung \mathcal{W} gibt, die sternförmig um 0 ist, d.h. $v \in \mathcal{W} \Rightarrow tv \in \mathcal{W} \forall 0 \leq t \leq 1$, und $\exp_p : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ ein Diffeomorphismus ist.

(2) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ geodätisch konvex, falls \mathcal{U} normal bezüglich aller $p \in \mathcal{U}$ ist.

Ein wichtiges Resultat über normale Umgebungen liefert

²¹²Der Null-Schnitt ist die durch $s(p) := 0 \in \mathcal{E}_p$ für ein beliebiges Vektorbündel \mathcal{E} definierte Abbildung.

Proposition B.23:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und \mathcal{U} eine normale Umgebung um $p \in \mathcal{M}$, so existiert für jeden Punkt $q \in \mathcal{U}$ eine eindeutige Geodäte $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ und $\gamma'(0) = \exp_p^{-1}(q)$.

Die Funktion $\Gamma(q, p) := \Gamma(q, p)[\gamma]$ auf \mathcal{U} (vgl. Bemerkung B.17) wird als geodätisches Abstandsquadrat bezeichnet.

Normale Umgebungen können zur Definition spezieller Koordinatensysteme verwendet werden.

Definition B.24:

Ist \mathcal{M}^n eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit, \mathcal{U} eine normale Umgebung um $p \in \mathcal{M}$ und $\phi : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus von Vektorräumen, so definiert die Komposition $\phi \circ \exp_p^{-1}$ ein Koordinatensystem für \mathcal{M} . Das Paar $(\mathcal{U}, \phi \circ \exp_p^{-1})$ heißt Normal-Koordinatensystem (um p).

Ist ϕ sogar eine lineare Isometrie bezüglich g_p und g_ν^{213} , so heißt das Paar $(\mathcal{U}, \phi \circ \exp_p^{-1})$ Orthonormal-Koordinatensystem (um p).

Das folgende Theorem (vgl. [Fri75], Theorem 1.2.3 und [BK96], Abschnitt 3.3 und [O'N83], Proposition 33 (S.73)) erklärt die Nützlichkeit der Normal-Koordinatensysteme.

Theorem B.25:

Ist \mathcal{M}^n eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und \mathcal{U} eine normale Umgebung bezüglich $p \in \mathcal{M}$, so gilt:

- (1) $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ bzw. $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ bezüglich eines Normal-Koordinatensystems $(\mathcal{U}, \varphi \circ \exp_p^{-1})$ um p .
- (2) $g_{ij}(p) = \pm \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ bezüglich eines Orthonormal-Koordinatensystems $(\mathcal{U}, \varphi \circ \exp_p^{-1})$ um p , wobei das Vorzeichen \pm durch $g_p(\partial_i, \partial_i)$ ($i = 1, \dots, n$) bestimmt ist.

Das geodätische Abstandsquadrat Γ besitzt die folgenden Eigenschaften auf \mathcal{U} :

- (3) $\Gamma_p(\cdot) := \Gamma(\cdot, p)$ ist eine glatte Funktion auf \mathcal{U} ,
- (4) $\Gamma_p(q) \stackrel{B.23}{=} g_p(\exp_p^{-1}(q), \exp_p^{-1}(q))$,
- (5) $g^*(\nabla \Gamma_p, \nabla \Gamma_p) = 4\Gamma_p$,
- (6) $(\nabla(\cdot)\Gamma_p)|_q = 2g_q(\exp_{p,*,\exp_p^{-1}(q)}((\exp_p^{-1}(q))_{\exp_p^{-1}(q)}, \cdot))$
 $\stackrel{B.21}{=} 2g_p(\exp_p^{-1}(q), (\exp_p^{-1})_{*,q}(\cdot))$
 $\stackrel{B.23}{=} 2g_p(\gamma'(0), (\exp_p^{-1})_{*,q}(\cdot))$

$$\text{mit } (\exp_p^{-1}(q))_{\exp_p^{-1}(q)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp_p^{-1}(q) + t \exp_p^{-1}(q)).$$

Ist \mathcal{U} geodätisch konvex, so gilt:

- (7) Γ ist eine glatte Funktion auf $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$,
- (8) $\Gamma(q, p) = \Gamma(p, q)$ für alle $p, q \in \mathcal{U}$,
- (9) In lokalen Koordinaten (\mathcal{U}, ψ) um p ($\psi(p) = y$) ist die Exponentialabbildung an p durch

$$x = \psi \circ \exp_{\psi^{-1}(y)} \circ (\psi^{-1})_{*,y}(\eta); \quad x \in \psi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \eta \in \psi_{*,p}(T_p(\mathcal{M})) \subseteq \mathbb{R}^n$$

²¹³ g_ν ist die Standardbilinearform auf \mathbb{R}^n mit $\text{ind}(g_\nu) = \text{ind}(g_p) = \nu$; $g_\nu = -\sum_{i=1}^{\nu} du^i \otimes du^i + \sum_{k=\nu+1}^n du^k \otimes du^k$.

gegeben. Definiert man $\xi \in T_x(\mathbb{R}^n)$ durch²¹⁴

$$\begin{aligned}\xi &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} \psi \circ \exp_{\psi^{-1}(y)} \circ (\psi^{-1})_{*,y}(t\eta) \\ &= \psi_{*,\psi^{-1}(x)} \circ (\exp_{\psi^{-1}(y)})_{*,(\psi^{-1})_{*,y}(\eta)} \circ ((\psi^{-1})_{*,y})_{*,\eta}(\eta) \\ &= \psi_{*,\psi^{-1}(x)} \circ (\exp_{\psi^{-1}(y)})_{*,(\psi^{-1})_{*,y}(\eta)} \circ (\psi^{-1})_{*,y}(\eta),\end{aligned}$$

so ergeben sich für die Komponenten des Differentialen von Γ die folgenden Relationen:

$$\frac{\partial \Gamma_y}{\partial u^i}(x) = 2g_{ij}(x)\xi^j \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Gamma_x}{\partial u^i}(y) = -2g_{ij}(y)\eta^j$$

mit $\Gamma(x, y) := ((\psi^{-1})^*\Gamma)(x, y)$ und $\{g_{ij}(x) := \alpha g_{ij}(\psi_\alpha^{-1}(x))\}_{i,j=1,\dots,n}$ (vgl. Definition B.7).

Die Existenz geodätisch konvexer Umgebungen wird durch ein Theorem von Whitehead (1932) gesichert (vgl. [Fri75], S.15).

Theorem B.26:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit, so besitzt jeder Punkt $p \in \mathcal{M}$ eine geodätisch konvexe Umgebung.

Daraus ergibt sich (vgl. [O'N83], Lemma 10 (S.131))

Lemma B.27:

Jede offene Überdeckung einer Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} besitzt eine geodätisch konvexe Verfeinerung²¹⁵.

B.2 (Hyper-)Quadriken

Eine nützliche Klasse von Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeiten ergibt sich durch Betrachtung von Hyperflächen im \mathbb{R}^n (vgl. [O'N83], S.108ff).

Definition B.28:

Die Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit \mathbb{R}_ν^n ist die Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^n , versehen mit der Standard-Bilinearform

$$g_\nu = - \sum_{i=1}^{\nu} du^i \otimes du^i + \sum_{k=\nu+1}^n du^k \otimes du^k$$

als Metrik. \mathbb{R}_1^n heißt n -dimensionaler Minkowskiraum. Die quadratische Form von g_ν kann als Funktion auf \mathbb{R}_ν^n aufgefasst werden:

$$q_\nu = g_\nu(P, P),$$

wobei P das Ortsvektorfeld

$$P_x := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} (tx), \quad x \in \mathbb{R}_\nu^n$$

ist. Die zu q_ν assoziierte Bilinearform $q_\nu(x, y) = \frac{1}{2}(q_\nu(x+y) - q_\nu(x) - q_\nu(y))$ wird ebenfalls mit q_ν bezeichnet.

²¹⁴In der letzten Zeile wird der natürliche Isomorphismus $\mathbb{R}^n \cong T_\eta(\mathbb{R}^n)$ benutzt.

²¹⁵Eine geodätisch konvexe Überdeckung ist eine Überdeckung von \mathcal{M} mit geodätisch konvexen Umgebungen, s.d. der Schnitt zweier solcher Umgebungen ebenfalls konvex ist.

Proposition B.29:

Die Quadriken

$$Q_{\nu,\pm}^{n+1}(r) := q_\nu^{-1}(\{\pm r^2\}), \quad r > 0$$

sind Semi-Riemann'sche, eingebettete Hyperflächen des \mathbb{R}_ν^{n+1} .

Für $n \geq 2$ und $n \geq \nu \geq 0$ definiert man:

- (1) $S_\nu^n(r) := Q_{\nu,+}^{n+1}(r)$ als die n -dimensionale Pseudo-Sphäre mit Radius r und Index ν ,
- (2) $H_\nu^n(r) := Q_{\nu+1,-}^{n+1}(r)$ als den n -dimensionalen pseudohyperbolischen Raum mit Radius r und Index ν .

Bemerkung B.30:

Das Vektorfeld

$$\mathbf{n} := \frac{1}{r}P \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$$

ist normiert und orthogonal zu allen Tangentialvektoren an $Q_{\nu,\pm}^{n+1}(r)$, bezüglich der (natürlichen) Einbettung $T_p(Q_{\nu,\pm}^{n+1}(r)) \subseteq T_p(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$, denn

$$g_\nu(\text{grad } q_\nu, V) = Vq_\nu = Vg_\nu(P, P) = 2g_\nu(\nabla_V P, P) = 2g_\nu(V, P) \quad \forall V \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_\nu^{n+1}).$$

Bemerkung B.31:

Die Menge

$$C_\nu^n(0) := q_\nu^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$$

ist eine eingebettete Hyperfläche des \mathbb{R}_ν^{n+1} , aber nicht Semi-Riemann'sch'. C_0 wird als Doppel-Lichtkegel an $0 \in \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ bezeichnet.

Die Pseudo-Sphären und pseudohyperbolischen Räumen können in nützlicher Weise in Beziehung gesetzt werden.

Lemma B.32:

Die Abbildung

$$\mathbb{R}_\nu^{n+1} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}_{n-\nu+1}^{n+1} \tag{B.4}$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_{\nu+1}, \dots, x_{n+1}, x_1, \dots, x_\nu)$$

ist eine Anti-Isometrie, d.h. σ ist ein Diffeomorphismus mit $\sigma^*(g_{n-\nu+1}) = -g_\nu$. Durch Einschränkung auf $S_\nu^n(r) \subseteq \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ erhält man für alle $r > 0$ eine Anti-Isometrie, ebenfalls σ ,

$$S_\nu^n(r) \longrightarrow H_{n-\nu}^n(r) \tag{B.5}$$

Aufschluß über die Geodäten und Krümmungseigenschaften von $S_\nu^n(r)$ und $H_\nu^n(r)$ gibt die folgende

Proposition B.33:

Für alle $r > 0$ gilt:

- (1) Die Pseudo-Sphäre $S_\nu^n(r)$ ist geodätisch vollständig und hat die konstante Krümmung $K = \frac{1}{r^2}$. Die (nicht konstanten) Geodäten $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow S_\nu^n(r)$ sind, wie folgt, gegeben:

- (a) Ist γ zeitartig, so ist γ die Parametrisierung eines Blattes einer Hyperbel in \mathbb{R}_ν^{n+1} .
- (b) Ist γ lichtartig, so ist γ die Parametrisierung einer Geraden in \mathbb{R}_ν^{n+1} .
- (c) Ist γ raumartig, so ist γ die periodische Parametrisierung einer Ellipse in \mathbb{R}_ν^{n+1} .
- (2) Der pseudohyperbolische Raum $H_\nu^n(r)$ ist geodätisch vollständig und hat die konstante Krümmung $K = -\frac{1}{r^2}$. Die (nicht konstanten) Geodäten $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow H_\nu^n(r)$ sind, wie folgt, gegeben:
- (a) Ist γ raumartig, so ist γ die Parametrisierung eines Blattes einer Hyperbel in $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$.
- (b) Ist γ lichtartig, so ist γ die Parametrisierung einer Geraden in $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$.
- (c) Ist γ zeitartig, so ist γ die periodische Parametrisierung einer Ellipse in $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$.

Der Beweis für die Geodäten ist analog zu [O'N83], Proposition 26 (S.112); für die Krümmungseigenschaften siehe [O'N83], Lemma 11 (S.111) und Korollar 20 (S.107).

Beweis:

- (1) Ist $p \in S_\nu^n(r)$ ein Punkt und $\Sigma \subseteq \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ eine Ebene durch 0 und p , so ergeben sich, da $P|_p$ raumartig ist, drei Fälle für $g_\nu|_\Sigma$:
- (a) $g_\nu|_\Sigma$ ist nicht-ausgeartet mit $\text{ind}(g_\nu|_\Sigma) = 1$. Ist $\{e_1, e_2\}$ eine Orthonormalbasis von Σ mit $e_2 = rp$ und $P|_{e_1}$ zeitartig, so ist ein Punkt $x = \lambda e_1 + \mu e_2 \in \Sigma$ in $S_\nu^n(r)$, falls $-\lambda^2 + \mu^2 = q_\nu(x) = r^2$ gilt. Folglich ist $S_\nu^n(r) \cap \Sigma$ eine zwei-blättrige Hyperbel. Die (geodätische) Parametrisierung des Blattes durch p ist

$$\gamma(t) = r \sinh(t)e_1 + r \cosh(t)e_2.$$

Wegen $g_\nu(\gamma', \gamma') = -r^2$ ist γ zeitartig und aus $\nabla_{\gamma'}^{\mathbb{R}_\nu^{n+1}} \gamma' = P|_\gamma$ folgt mit Bemerkung B.30, daß die Beschleunigung von γ , $\nabla_{\gamma'}^{S_\nu^n(r)} \gamma'$, tangential zu $S_\nu^n(r)$ verschwindet; demnach ist γ eine Geodäte.

- (b) $g_\nu|_\Sigma$ ist ausgeartet mit $\dim \ker(*^g) = 1$. Ist $v \in \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ mit $P|_v \in \ker(*^g)$, so gilt $q_\nu(v) = 0$ und $\{p, v\}$ ist eine Basis für Σ . Ein Punkt $x = \lambda p + \mu v \in \Sigma$ ist in $S_\nu^n(r)$, falls $\lambda^2 = 1$ gilt. Folglich besteht $S_\nu^n(r) \cap \Sigma$ aus zwei Geraden. Die (geodätische) Parametrisierung der Geraden durch p ist:

$$\gamma(t) = p + tv.$$

Wegen $\gamma'(0) = v_p$ und der kanonische Identifizierung $v_p = v$ ist γ lichtartig. γ ist eine Geodäte von $S_\nu^n(r)$, da γ bereits eine von \mathbb{R}_ν^{n+1} ist, und $S_\nu^n(r)$ die induzierte Geometrie von \mathbb{R}_ν^{n+1} trägt.

- (c) $g_\nu|_\Sigma$ ist positiv definit. Ist $\{e_1, e_2\}$ eine Orthonormalbasis von Σ mit $e_1 = rp$, so ist ein Punkt $x = \lambda e_1 + \mu e_2 \in \Sigma$ in $S_\nu^n(r)$, falls $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ gilt. Folglich ist $S_\nu^n(r) \cap \Sigma$ eine Ellipse. Die (geodätische) Parametrisierung ist:

$$\gamma(t) = r \cos(t)e_1 + r \sin(t)e_2.$$

Wegen $g_\nu(\gamma', \gamma') = r^2$ ist γ raumartig und mit $\nabla_{\gamma'}^{\mathbb{R}_\nu^{n+1}} \gamma' = -P|_\gamma$ folgt wie in (a), daß γ eine Geodäte ist.

Um zu zeigen, daß jede Geodäte $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow S_\nu^n(r)$ von dieser Form ist, betrachtet man die Ebene Σ durch 0 und $\gamma(0)$, s.d. $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}(\Sigma)$ ²¹⁶ gilt. Es folgt mit Bemerkung B.30, daß $g_\nu(\gamma'(0), P|_{\gamma(0)}) = 0$ gilt. Ist $v_{\gamma'} \in \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ der, durch den natürlichen Isomorphismus $T_{\gamma(0)}(\mathbb{R}_\nu^{n+1}) \cong \mathbb{R}_\nu^{n+1}$, mit $\gamma(0)'$ identifizierte Punkt, so ist $\{\gamma(0), v_{\gamma'}\}$ eine Basis von Σ . Wird

²¹⁶Dies ist im Sinne der natürlichen Einbettungen $T_{\gamma(0)}(S_\nu^n(r)) \subseteq T_{\gamma(0)}(\mathbb{R}_\nu^{n+1}) \supseteq T_{\gamma(0)}(\Sigma)$ zu verstehen.

in Abhängigkeit des kausalen Charakters von $\gamma'(0)$ eine (geodätische) Parametrisierung ζ von $S_\nu^n(r) \cap \Sigma$, in Analogie mit (a), (b) oder (c), mit $\zeta'(0) = \gamma'(0)$ gewählt, so folgt aus Aussage (2) in Definition B.16 $\zeta(t) = \gamma(t) \forall t \in \mathcal{I}$.

- (2) Die Aussagen für $H_\nu^n(r)$ ergeben sich unter Verwendung der Abbildung σ aus Lemma B.32. □

Die Existenz von Geodäten zwischen Punkten in $S_\nu^n(r)$ bzw. $H_\nu^n(r)$ erklärt

Proposition B.34:

Für alle $r > 0$ gilt:

- (1) Sind $p, p' \in S_\nu^n(r)$ mit $p \neq \pm p'$, so ergeben sich die folgenden Fälle:

- (a) Gilt $q_\nu(p, p') > r^2$, so gibt es eine eindeutige²¹⁷, zeitartige Geodäte zwischen p und p' . Das geodätische Abstandsquadrat zwischen p und p' ist:

$$\Gamma(p, p') = -r^2 \operatorname{arcosh} \left(\frac{q_\nu(p, p')}{r^2} \right)$$

- (b) Gilt $q_\nu(p, p') = r^2$, so gibt es eine eindeutige, lichtartige Geodäte zwischen p und p' . Das geodätische Abstandsquadrat zwischen p und p' ist:

$$\Gamma(p, p') = 0$$

- (c) Gilt $-r^2 < q_\nu(p, p') < r^2$, so gibt es eine eindeutige, periodische, raumartige Geodäte zwischen p und p' . Das geodätische Abstandsquadrat zwischen p und p' ist:

$$\Gamma(p, p') = r^2 \arccos \left(\frac{q_\nu(p, p')}{r^2} \right)$$

- (d) Gilt $q_\nu(p, p') \leq -r^2$, so gibt es keine Geodäte zwischen p und p' .

- (2) Sind $p, p' \in H_\nu^n(r)$ mit $p \neq \pm p'$, so ergeben sich die folgenden Fälle:

- (a) Gilt $-r^2 < q_{\nu+1}(p, p') < r^2$, so gibt es eine eindeutige, periodische, zeitartige Geodäte zwischen p und p' . Das geodätische Abstandsquadrat zwischen p und p' ist:

$$\Gamma(p, p') = -r^2 \arccos \left(-\frac{q_{\nu+1}(p, p')}{r^2} \right)$$

- (b) Gilt $q_{\nu+1}(p, p') = -r^2$, so gibt es eine eindeutige, lichtartige Geodäte zwischen p und p' . Das geodätische Abstandsquadrat zwischen p und p' ist:

$$\Gamma(p, p') = 0$$

- (c) Gilt $q_{\nu+1}(p, p') < -r^2$, so gibt es eine eindeutige, raumartige Geodäte zwischen p und p' . Das geodätische Abstandsquadrat zwischen p und p' ist:

$$\Gamma(p, p') = r^2 \operatorname{arcosh} \left(-\frac{q_{\nu+1}(p, p')}{r^2} \right)$$

- (d) Gilt $q_{\nu+1}(p, p') \geq r^2$, so gibt es keine Geodäte zwischen p und p' .

²¹⁷Genauer ist hier "bis auf affin-lineare Reparametrisierung" gemeint.

Der Beweis ist analog zu [O'N83], Proposition 38 (S.149). Die Aussagen über das geodätische Abstandsquadrat Γ sind eine direkte Folgerung aus den angegebenen Parametrisierungen in Proposition B.33, und der Tatsache, daß Γ entlang lichtartiger Kurven verschwindet.

Beweis:

- (1) Die Annahmen über p und p' implizieren, daß es eine eindeutige Ebene Σ durch p , p' und $0 \in \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ und gibt. Aus dem Beweis von Proposition B.33 erkennt man, daß eine Geodäte zwischen p und p' durch eine Parametrisierung von $S_\nu^n(r) \cap \Sigma$ gegeben sein muss. Die drei Fälle aus Proposition B.33 führen auf:
 - (a) Ist $g_\nu|_\Sigma$ nicht-ausgeartet mit $\text{ind}(g_\nu|_\Sigma) = 1$, so ist $S_\nu^n(r) \cap \Sigma$ eine zwei-blättrige Hyperbel. Aus der Parametrisierung ergibt sich, daß p und p' nur dann auf dem selben Blatt liegen, falls $q_\nu(p, p') > r^2$ gilt, und nur dann auf entgegengesetzten Blätter liegen, falls $q_\nu(p, p') < r^2$ gilt. Es gibt also nur im ersten Fall eine Geodäte zwischen p und p' ; diese Geodäte ist zeitartig.
 - (b) Ist $g_\nu|_\Sigma$ ausgeartet mit $\dim \ker(*^g) = 1$, so ist $S_\nu^n(r) \cap \Sigma$ ein, in \mathbb{R}_ν^{n+1} paralleles, Paar von Geraden. Die Parametrisierung zeigt, daß p und p' nur dann auf der selben Geraden liegen, falls $q_\nu(p, p') = r^2$ gilt, und nur dann auf entgegengesetzten Geraden liegen, falls $q_\nu(p, p') = -r^2$ gilt. Es gibt also nur im ersten Fall eine Geodäte zwischen p und p' ; diese Geodäte ist lichtartig.
 - (c) Ist $g_\nu|_\Sigma$ positiv definit, so ist $S_\nu^n(r) \cap \Sigma$ eine Ellipse und es gilt $-r^2 < q_\nu(p, p') < r^2$.
 - (d) Da (a), (b) und (c) alle möglichen Lagen von Σ in \mathbb{R}_ν^{n+1} abdecken, folgt, daß es keine Geodäte zwischen p und p' gibt, falls $q_\nu(p, p') \leq -r^2$ gilt.
- (2) Die Aussagen für $H_\nu^n(r)$ ergeben sich unter Verwendung der Abbildung σ aus Lemma B.32. □

B.3 Konforme Abbildungen

Konforme Abbildungen sind ein nützliches Werkzeug in der Theorie und Analysis auf Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeiten, auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie erweisen sie sich als unverzichtbar²¹⁸.

Definition B.35:

Ist \mathcal{M} eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Metrik g , so wird durch

$$\tilde{g} := \Omega^2 \cdot g,$$

mit einer nirgends verschwindenden Funktion $\Omega \in C^\infty(\mathcal{M})$, eine weitere Metrik auf \mathcal{M} erklärt. Ein Paar (\mathcal{M}, \tilde{g}) , das aus (\mathcal{M}, g) in dieser Weise hervorgeht, wird als konforme Transformation von (\mathcal{M}, g) bezeichnet²¹⁹.

Ein glatte Abbildung $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ zwischen Semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeiten wird als konform bezeichnet, falls

$$\phi^*(g_{\mathcal{N}}) = \Omega^2 \cdot g_{\mathcal{M}} \text{ mit } \Omega \text{ wie oben,}$$

gilt.

Bemerkung B.36:

Eine konforme Transformation/Abbildung erhält den kausalen Charakter aller Tangentialvektoren.

²¹⁸Man bedenke z.B. die Definitionen für *konforme Kompaktifizierung* oder *asymptotische Flachheit*, sowie die Analyse konform in-/kovarianter Differentialgleichungen (Maxwell-Gleichungen).

²¹⁹Eine konforme Transformation ist nicht zwangsläufig durch einen Diffeomorphismus $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ induziert.

Eine wichtige Frage ist wie sich zur Metrik assoziierte Größen, wie der Levi-Civita Zusammenhang oder der Riemann'sche Krümmungstensor, unter einer konformen Transformation verhalten. Eine explizite Berechnung findet sich in [Wal84], Appendix D. Die folgende Proposition gibt die Relationen zwischen den Skalarkrümmungen und den Laplace-d'Alembert-Operatoren an.

Proposition B.37:

Ist (\mathcal{M}^n, g) eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $(\mathcal{M}, \tilde{g} = \Omega^2 \cdot g)$ eine konforme Transformation, so gilt in lokalen Koordinaten (\mathcal{U}, ψ) für

(1) die Skalarkrümmungen

$$S_{\tilde{g}} = \Omega^{-2}(S_g - 2(n-1)\Omega^{-1}\square_g\Omega - (n-4)(n-1)\Omega^{-2}g(\text{grad}_g\Omega, \text{grad}_g\Omega))$$

(2) die Laplace-d'Alembert-Operatoren:

$$\begin{aligned}\square_{\tilde{g}}(\Omega^s f) &= \Omega^{s-2}\square_g f \\ &\quad - (2s+n-2)\Omega^{s-3}g(\text{grad}_g\Omega, \text{grad}_g f) \\ &\quad - s\Omega^{s-3}f\square_g\Omega \\ &\quad - s(n+s-3)\Omega^{s-4}fg(\text{grad}_g\Omega, \text{grad}_g\Omega)\end{aligned}$$

Der zusätzliche Parameter $s \in \mathbb{R}$ in der Relation für die Laplace-d'Alembert-Operatoren wird konformes Gewicht genannt; $\tilde{f} = \Omega^s f$ ist die konforme Gewichtung von f .

Bemerkung B.38:

Proposition B.37 zeigt, daß der *konform gekoppelte Laplace-d'Alembert-Operator*

$$\Upsilon_g = \square_g + \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$$

für $n > 1$ *konform kovariant* ist, mit konformem Gewicht $s = 1 - \frac{n}{2}$, d.h.

$$\Upsilon_{\tilde{g}}(\Omega^{1-\frac{n}{2}}f) = \Omega^{-1-\frac{n}{2}}\Upsilon_g(f), \quad f \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

B.4 Zeit-Orientierbarkeit und Kausalität

Für Lorentz'sche Mannigfaltigkeiten gibt es, neben dem Konzept der Orientierbarkeit, die Eigenschaft der Zeit-Orientierbarkeit²²⁰.

Definition B.39:

Ist \mathcal{M} eine Lorentz'sche Mannigfaltigkeit und $v \in T_p(\mathcal{M})$ ein zeitartiger Tangentialvektor an $p \in \mathcal{M}$, so heißt die Menge

$$C_p(v) := \{w \in T_p(\mathcal{M}) \mid w \text{ ist zeitartig, } g|_p(v, w) < 0\}$$

der Zeitkegel von v an p . Der entgegengesetzte Zeitkegel von v an p ist:

$$-C_p(v) := C_p(-v).$$

Bemerkung B.40:

Das orthogonale Komplement v^\perp eines zeitartigen Tangentialvektors $v \in T_p(\mathcal{M})$ besteht nur aus raumartigen Vektoren und 0, daher ist die Vereinigung $C_p(v) \cup -C_p(v)$ die Menge aller zeitartigen Tangentialvektoren in $T_p(\mathcal{M})$.

Ferner sind zwei zeitartige Tangentialvektoren $v, w \in T_p(\mathcal{M})$ genau dann im selben Zeitkegel an p enthalten, wenn $g|_p(v, w) < 0$ gilt, d.h. es gibt genau zwei Zeitkegel an p .

²²⁰Zeit-Orientierbarkeit und die duale Raum-Orientierbarkeit kann auch für allgemeine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten definiert werden, s. [O'N83], Kapitel 9 (S.140).

Definition B.41:

Eine Zeit-Orientierung auf Lorentz'schen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist eine glatte Abbildung c , die jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ einen Zeitkegel an p zuordnet. c ist glatt in dem Sinne, daß für alle p eine Umgebung \mathcal{U}_p (von p) und ein Vektorfeld $V \in \mathcal{X}(\mathcal{U}_p)$ existieren, s.d. $V|_p \in c(p)$ auf \mathcal{U}_p gilt.

Existiert eine solche Abbildung c , so heißt \mathcal{M} zeit-orientierbar; wird eine solche Abbildung gewählt, so heißt \mathcal{M} zeit-orientiert. $c(p)$ heißt Zukunftskegel an p , $-c(p)$ Vergangenheitskegel an p . Es folgt, daß es genau zwei Zeit-Orientierungen auf einer zeit-orientierbaren Lorentz'schen Mannigfaltigkeit gibt, falls diese zusammenhängend ist.

Die Standard-Zeitorientierung auf \mathbb{R}_1 ist durch das Vektorfeld ∂_1 gegeben.

Bemerkung B.42:

Eine lokale Isometrie $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ zwischen zeit-orientierten Lorentz'schen Mannigfaltigkeiten heißt *zeit-orientierungserhaltend*, falls Zukunfts-/Vergangenheitskegel auf Zukunfts-/Vergangenheitskegel abgebildet werden; sie heißt *zeit-orientierungsumkehrend*, falls Zukunfts-/Vergangenheitskegel auf Vergangenheits-/Zukunftskegel abgebildet werden.

Ist \mathcal{M} zusammenhängend, so sind dies die einzigen Möglichkeiten.

Die Zeit-Orientierbarkeit und die Kausalitätseigenschaften von Tangentialvektoren führen zu folgenden Definitionen.

Definition B.43:

Ist (\mathcal{M}, c) eine zeitorientierte Lorentz'sche Mannigfaltigkeit und sind \mathcal{S} und \mathcal{U} zwei Teilmengen von \mathcal{M} , so definiert man:

- (1) Die chronologische Zukunft/Vergangenheit von \mathcal{S} relativ zu \mathcal{U}

$$I_{\pm}(\mathcal{S}, \mathcal{U}) := \{p \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \mid \text{Es existiert ein zeitartiges Kurvensegment } \gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U} : \\ \gamma(a) \in \mathcal{S}, \gamma(b) = p, \gamma'(t) \in \pm c(\gamma(t))\}.$$

- (2) Die kausale Zukunft/Vergangenheit von \mathcal{S} relativ zu \mathcal{U}

$$J_{\pm}(\mathcal{S}, \mathcal{U}) := \{p \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \mid \text{Es existiert ein Kurvensegment } \gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U} : \\ \gamma(a) \in \mathcal{S}, \gamma(b) = p, \gamma'(t) \in \pm c(\gamma(t))\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ heißt kausal-verträglich, falls

$$J_{\pm}(p, \mathcal{U}) = J_{\pm}(p, \mathcal{M}) \cap \mathcal{U}$$

für alle $p \in \mathcal{U}$ gilt.

C Elemente der Kategorien-Theorie

Categories were introduced to define functors, and functors were introduced to define natural transformations.

SAMUEL EILENBERG & SAUNDERS MAC LANE

In diesem Abschnitt finden sich einige grundlegende Definitionen Aussagen der Kategorien-Theorie²²¹.

C.1 Kategorien und Metakategorien

Definition C.1:

Ein Metagraph wird durch die folgenden Daten bestimmt:

(1) Objekte \mathcal{O} : a, b, c, \dots

(2) Morphismen \mathcal{A} : f, g, h, \dots

(3) sowie zwei Abbildungen

(a) $\text{dom} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}$ (Domäne)

(b) $\text{cod} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}$ (Kodomäne)

Bemerkung C.2:

Die Wirkung der Abbildungen dom und cod auf \mathcal{A} wird durch Digramme der Form

$$a \xrightarrow{f} b$$

(Morphismus f mit $\text{dom } f = a$ und $\text{cod } f = b$, Objekte a, b)

dargestellt.

Definition C.3:

Eine Metakategorie ist ein Metagraph mit zwei Abbildungen

(1) $\text{id} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A}$, $a \mapsto \text{id}_a$ (Eins)

(2) $\circ : \mathcal{A}_{\text{dom}} \times_{\text{cod}} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $(f, g, \text{dom } f = \text{cod } g) \mapsto (f \circ g : \text{dom } g \rightarrow \text{cod } f)$ (Komposition)

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{cod } g = \text{dom } f & \\
 g \nearrow & & \searrow f \\
 \text{dom } g & \xrightarrow{f \circ g} & \text{cod } f
 \end{array} \tag{C.1}$$

²²¹siehe [Mac71]

welche die folgenden Axiome erfüllen:

(a) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (Assoziativität)

$$\begin{array}{ccc}
 \text{dom } h & \xrightarrow{f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h} & \text{cod } f \\
 \downarrow h & \swarrow g \circ h & \uparrow f \\
 & f \circ g & \\
 \text{cod } h = \text{dom } g & \xrightarrow{g} & \text{cod } g = \text{dom } f
 \end{array} \tag{C.2}$$

(b) Für alle Objekte a und Morphismen f, g gilt:

$\text{id}_a \circ f = f$ und $g \circ \text{id}_a = g$, falls $\text{cod } f = a$ und $\text{dom } g = a$ (Neutralität der Eins)

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{dom } f & \xrightarrow{f} & a & & \\
 & \searrow f & \downarrow \text{id}_a & \swarrow g & \\
 & & a & \xrightarrow{g} & \text{cod } g
 \end{array} \tag{C.3}$$

Definition C.4:

Eine Kategorie C ist die Auslegung der Axiome einer Metakategorie im mengentheoretischen Sinn:

(1) Ein Graph, d.h. eine Menge von Objekten \mathcal{O}_C und eine Menge von Morphismen \mathcal{A}_C mit den Abbildungen dom und cod :

$$\mathcal{A}_C \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} \mathcal{O}_C \tag{C.4}$$

(2) Zwei Abbildungen id und \circ :

$$\mathcal{O}_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_C \quad , \quad \mathcal{A}_C \times_{\mathcal{O}_C} \mathcal{A}_C \xrightarrow{\circ} \mathcal{A}_C \tag{C.5}$$

$$a \mapsto \text{id}_a \quad , \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

mit $\mathcal{A}_C \times_{\mathcal{O}_C} \mathcal{A}_C = \{(f, g) | f, g \in \mathcal{A}_C, \text{dom } f = \text{cod } g\}$

(3) Die Homomorphismen zwischen zwei Objekten $a, b \in C$ sind definiert als:

$$\text{hom}_C(a, b) = \{f | f \in \mathcal{A}_C, \text{dom } f = a, \text{cod } f = b\} \tag{C.6}$$

Definition C.5:

Eine Unterkategorie S einer Kategorie C ist ein Teilgraph

$$\mathcal{A}_S \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} \mathcal{O}_S \quad (\text{C.7})$$

s.d. durch Einschränkung der Abbildungen id und \circ die Bedingungen an eine Kategorie erfüllt sind.

C.2 Funktoren

Betrachtet man die Metakategorie aller Kategorien $m\text{Cat}$, so führt dies in natürlicher Weise zum Konzept des *Funktors*.

Definition C.6:

Ein Funktor F ist ein Morphismus in $m\text{Cat}$.

Seien A, B zwei Kategorien, s.d. $\text{dom } F = A$ und $\text{cod } F = B$, so läßt sich F durch die Angabe zweier Abbildungen (ebenfalls F) charakterisieren:

$$(1) F : \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_B, c \mapsto F(c) \quad (\text{Objekt-Abbildung})$$

$$(2) F : \mathcal{A}_A \rightarrow \mathcal{A}_B, f \mapsto F(f) \quad (\text{Morphismen-Abbildung})$$

welche zwei Axiomen genügen:

$$(a) F(\text{id}_c) = \text{id}_{F(c)} \quad \forall c \in \mathcal{O}_A$$

$$(b) F(f \circ_A g) = F(f) \circ_B F(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{A}_A \times_{\mathcal{O}_A} \mathcal{A}_A$$

Bemerkung C.7:

Die obige Definition eines Funktors lässt sich in offensichtlicher Weise zur Definition eines Metafunktors verwenden.

Bemerkung C.8:

Für die Homomorphismen zwischen c und d in A bedeutet dies, daß F eine Abbildung

$$F_{c,d} : \text{hom}_A(c, d) \rightarrow \text{hom}_B(F(c), F(d)) \quad (\text{C.8})$$

induziert.

Definition C.9:

Ein Funktor F ist

- (1) injektiv, falls Objekt- sowie Morphismen-Abbildung injektiv sind.
- (2) surjektiv, falls Objekt- sowie Morphismen-Abbildung surjektiv sind.
- (3) bijektiv (ein Isomorphismus von Kategorien), falls Objekt- sowie Morphismen-Abbildung bijektiv sind.
- (4) eine Einbettung, falls die Morphismen-Abbildung injektiv ist.

Definition C.10:

Ein Funktor F mit $\text{dom } F = A$ ist

- (1) treu, falls $F_{c,d} \forall c, d \in \mathcal{O}_A$ injektiv ist.
- (2) voll, falls $F_{c,d} \forall c, d \in \mathcal{O}_A$ surjektiv ist.

(3) volltreu, falls $F_{c,d} \forall c, d \in \mathcal{O}_A$ bijektiv ist.

Bemerkung C.11:

Einer Unterkategorie S einer Kategorie C ist in natürlicher Weise ein (treuer) Funktor $I : S \hookrightarrow C$ (Inklusion) zugeordnet. Ist der Funktor I voll, so bezeichnet man S als eine *volle Unterkategorie*.

C.3 Natürliche Transformationen

Der Begriff des Funktor wiederum führt auf die Frage nach den *Morphismen von Funktoren*, und in welcher Weise Funktoren als Kategorie aufgefasst werden können.

Definition C.12:

Eine natürliche Transformation $\tau : F \rightarrow G$ zweier Funktoren $F, G : A \rightarrow B$ ist eine Abbildung (ebenfalls τ)

$$\mathcal{O}_A \xrightarrow{\tau} \mathcal{A}_B \tag{C.9}$$

$$a \longmapsto (\tau_a : F(a) \rightarrow G(a))$$

s.d. $\forall f \in A, f : a \rightarrow a'$ gilt:

$$G(f) \circ_B \tau_a = \tau_{a'} \circ_B F(f)$$

$$\begin{array}{ccc} a & & F(a) \xrightarrow{\tau_a} G(a) \\ \downarrow f & & \downarrow F(f) \quad \downarrow G(f) \\ a' & & F(a') \xrightarrow{\tau_{a'}} G(a') \end{array} \tag{C.10}$$

Die Morphismen $\tau_a \in \mathcal{A}_B, a \in \mathcal{O}_A$ werden als die Komponenten der Natürlichen Transformation τ bezeichnet.

Definition C.13:

Eine natürliche Transformation τ heißt *natürliche Äquivalenz* oder *natürlicher Isomorphismus*, falls alle Komponenten $\tau_a \in \mathcal{A}_B, a \in \mathcal{O}_A$ in B invertierbar sind.

Definition C.14:

Eine Äquivalenz von Kategorien A, B ist ein Paar von Funktoren $F : A \rightarrow B, G : B \rightarrow A$ zusammen mit natürlichen Isomorphismen $\tau : I_A \rightarrow G \circ F, \sigma : I_B \rightarrow F \circ G$. I_A und I_B bezeichnen dabei die identischen Funktoren zu A bzw. B

D C^* -Algebren

In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of every individual discipline of mathematics.

Hermann Weyl

Im vorliegenden Abschnitt finden sich einige grundsätzliche Definitionen und Aussagen zum Thema C^* -Algebren²²². Der Leser sollte mit der Theorie topologischer Vektorräume vertraut sein, falls dies nicht der Fall ist, finden sich Details z.B. im Buch [Rud73].

D.1 Grundlagen

Definition D.1:

Eine C^* -Algebra \mathfrak{A} ist eine normierte Algebra über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, d.h. es existiert eine Abbildung

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (\text{D.1})$$

$$A \longmapsto \|A\|$$

(Norm)

mit den Eigenschaften, daß für alle $A, B \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(1) \|A\| \geq 0 \text{ und } \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$(2) \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$$

$$(3) \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$(4) \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$(5) \|A^*A\| = \|A\|^2$$

s.d. \mathfrak{A} in der durch $\|\cdot\|$ induzierten Topologie vollständig ist, sowie eine weitere Abbildung

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{*} \mathfrak{A} \quad (\text{D.2})$$

$$A \longmapsto A^*$$

(Involution)

mit den Eigenschaften ($A, B \in \mathfrak{A}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$):

$$(1) A^{**} = A$$

$$(2) (AB)^* = B^*A^*$$

$$(3) (\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda}A + \bar{\mu}B$$

Bemerkung D.2:

Ist \mathfrak{A} eine C^* -Algebra mit Eins $\mathbf{1}$, so folgt aus den Eigenschaften der Norm und der Involution

$$\|\mathbf{1}\| = \|\mathbf{1}^*\mathbf{1}\| = \|\mathbf{1}\|^2$$

$$\|A\| = \|\mathbf{1}A\| \leq \|\mathbf{1}\| \cdot \|A\|$$

d.h. $\|\mathbf{1}\| = 1$ oder 0 . Da letzteres $\|A\| = 0 \forall A \in \mathfrak{A}$ impliziert, kann dieser Fall ignoriert werden.

²²²siehe [BR87](s. Abschnitt 2.1-2.3), [Tak79](s. Kapitel 1), [BGP07](s. Abschnitt 4) für weitere Details

Definition D.3:

Eine Teilmenge \mathfrak{B} einer C^* -Algebra \mathfrak{A} heißt selbstadjungiert, falls $A \in \mathfrak{B} \Rightarrow A^* \in \mathfrak{B}$ gilt.

Im Folgenden sei \mathfrak{A} immer eine C^* -Algebra mit Eins $\mathbf{1}$.

Definition D.4:

Für eine C^* -Algebra \mathfrak{A} und ein Element $A \in \mathfrak{A}$ bezeichnet man

- (1) $r_{\mathfrak{A}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda\mathbf{1} - A)^{-1} \in \mathfrak{A}\}$ als die Resolventenmenge von A in \mathfrak{A} . $(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}$ heißt die Resolvente von A bei λ .
- (2) $\sigma_{\mathfrak{A}}(A) := \mathbb{C} \setminus \{r_{\mathfrak{A}}(A)\}$ als das Spektrum von A in \mathfrak{A} .
- (3) $\rho_{\mathfrak{A}}(A) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_{\mathfrak{A}}(A)\}$ als den Spektralradius von A in \mathfrak{A} .

Proposition D.5:

Für alle $A \in \mathfrak{A}$ ist die Resolventenmenge $r_{\mathfrak{A}}(A)$ offen und die Resolvente $(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}$ analytisch in $r_{\mathfrak{A}}(A)$. Das Spektrum $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ ist abgeschlossen, kompakt und nicht leer, denn das Supremum $\rho_{\mathfrak{A}}(A) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_{\mathfrak{A}}(A)\}$ existiert.

Ferner gilt $\rho_{\mathfrak{A}}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$.

Definition D.6:

Ein Element A einer C^* -Algebra \mathfrak{A} heißt

- (1) isometrisch, falls $A^*A = \mathbf{1}$ gilt.
- (2) unitär, falls $A^*A = \mathbf{1} = AA^*$ gilt.
- (3) normal, falls $A^*A = AA^*$ gilt.
- (4) positiv ($A \geq 0$), falls A selbstadjungiert ist und $\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.

Proposition D.7:

Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra. Für $A, B \in \mathfrak{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

- (1) $\sigma_{\mathfrak{A}}(\lambda\mathbf{1} - A) = \lambda - \sigma_{\mathfrak{A}}(A)$
- (2) $\sigma_{\mathfrak{A}}(A^*) = \overline{\sigma_{\mathfrak{A}}(A)}$
- (3) $\sigma_{\mathfrak{A}}(A^{-1}) = \sigma_{\mathfrak{A}}(A)^{-1}$, falls $A^{-1} \in \mathfrak{A}$
- (4) $\sigma_{\mathfrak{A}}(AB) \cup \{0\} = \sigma_{\mathfrak{A}}(BA) \cup \{0\}$
- (5) $\sigma_{\mathfrak{A}}(P(A)) = P(\sigma_{\mathfrak{A}}(A))$, falls P ein (komplexes) Polynom ist
- (6) $\sigma_{\mathfrak{B}}(A) = \sigma_{\mathfrak{A}}(A)$, falls $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ eine C^* -Unteralgebra ist und $A \in \mathfrak{B}$ gilt
- (7) $\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$, falls A unitär ist
- (8) $\sigma_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$, falls A selbstadjungiert ist
- (9) $\rho_{\mathfrak{A}}(A) = 1$, falls A isometrisch oder unitär ist
- (10) $\rho_{\mathfrak{A}}(A) = \|A\|$, falls A normal ist

Wegen (10) aus Prop. D.7 folgt:

Korollar D.8:

Ist \mathfrak{A} eine C^* -Algebra, d.h. die Norm (s. Def. D.1) auf \mathfrak{A} wird nicht gefordert, und existiert eine Norm $\|\cdot\|$ wie in Def. D.1 auf \mathfrak{A} , s.d. \mathfrak{A} bezüglich dieser abgeschlossen ist, so ist diese Norm eindeutig.

Proposition D.9:

Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra und $A \in \mathfrak{A}$, dann sind äquivalent:

- (1) A ist positiv
- (2) $A = B^*B$ für ein $B \in \mathfrak{A}$

Definition D.10:

Ein Unterraum \mathfrak{B} einer Algebra \mathfrak{A} heißt Links-(Rechts-)Ideal, falls für alle $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{B}$ folgt, daß AB (BA) $\in \mathfrak{B}$ gilt.

\mathfrak{B} heißt zweiseitiges Ideal, falls es sowohl Links- als auch Rechts-Ideal ist.

Proposition D.11:

Sei \mathfrak{A} eine Banach $*$ -Algebra, d.h. die Norm in Def. D.1 erfüllt statt Eigenschaft (5) die Relation $\|A\| = \|A^*\|$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, und sei \mathfrak{I} ein abgeschlossenes, selbstadjungiertes, zweiseitiges Ideal in \mathfrak{A} , dann ist der Quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ mit der Norm

$$\|A_{\mathfrak{I}}\| = \inf \{\|A\| \mid A \in A_{\mathfrak{I}}\}$$

$$(A_{\mathfrak{I}} := \{A + I \mid I \in \mathfrak{I}\} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I})$$

wieder eine Banach $*$ -Algebra.

Ist ferner \mathfrak{I} ein abgeschlossenes, zweiseitiges Ideal einer C^* -Algebra \mathfrak{A} , so ist \mathfrak{I} schon selbstadjungiert und $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ eine C^* -Algebra.

Definition D.12:

Ein $*$ -Homomorphismus π zwischen zwei C^* -Algebren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ist eine Abbildung

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{B} \tag{D.3}$$

$$A \longmapsto \pi(A)$$

mit den Eigenschaften

- (1) $\pi(\lambda A + \mu A') = \lambda\pi(A) + \mu\pi(A')$
- (2) $\pi(AA') = \pi(A)\pi(A')$
- (3) $\pi(A^*) = \pi(A)^*$

für alle $A, A' \in \mathfrak{A}$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Proposition D.13:

Für einen $*$ -Homomorphismus π zwischen zwei C^* -Algebren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} gilt:

- (1) $\|\pi(A)\|_{\mathfrak{B}} \leq \|A\|_{\mathfrak{A}} \quad \forall A \in \mathfrak{A}$
- (2) $\pi(A) \geq 0 \quad \forall 0 \leq A \in \mathfrak{A}$
- (3) $\pi(\mathfrak{A}) := \{\pi(A) \mid A \in \mathfrak{A}\} \subseteq \mathfrak{B}$ ist eine C^* -Unteralgebra von \mathfrak{B} .
- (4) $\ker \pi = \{0\} \Leftrightarrow \|\pi(A)\|_{\mathfrak{B}} = \|A\|_{\mathfrak{A}} \quad \forall A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow \pi(A) > 0 \quad \forall 0 < A \in \mathfrak{A}$
- (5) $\|\pi(A)\|_{\mathfrak{B}} = \|A\|_{\mathfrak{A}} \quad \forall A \in \mathfrak{A}$, falls π ein $*$ -Isomorphismus ist.

Bemerkung D.14:

Für eine C^* -Algebra \mathfrak{A} und ein zweiseitiges, abgeschlossenes Ideal \mathfrak{J} ist die kanonische Projektion $\pi_{\mathfrak{J}}$

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{J}}} \mathfrak{A}/\mathfrak{J} \quad (\text{D.4})$$

$$A \longmapsto A_{\mathfrak{J}}$$

ein $*$ -Homomorphismus.

D.2 Zustände**Definition D.15:**

Ein lineares Funktional ω über einer C^* -Algebra \mathfrak{A} heißt Zustand, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

$$(1) \quad \omega(A) \geq 0 \quad \forall 0 \leq A \in \mathfrak{A} \quad (\text{Positivität})$$

$$(2) \quad \|\omega\| = \sup \{ |\omega(A)| \mid \|A\| = 1, A \in \mathfrak{A} \} = 1 \quad (\text{Normierung})$$

Die Menge aller Zustände über \mathfrak{A} wird mit $S_{\mathfrak{A}}$ bezeichnet. Allgemeiner stellt man die Bedingungen:

$$(3) \quad \omega(A^*A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A},$$

$$(4) \quad \omega(\mathbf{1}) = 1.$$

Die Bedingungen (3) und (4) sind auch dann sinnvoll, wenn \mathfrak{A} keine C^* -Algebra ist.

Lemma D.16:

Ein Zustand ω über einer C^* -Algebra \mathfrak{A} besitzt die folgenden Eigenschaften.

$$(1) \quad \omega(A^*B) = \overline{\omega(B^*A)} \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(2) \quad |\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B) \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung})$$

für alle $A, B \in \mathfrak{A}$.

Definition D.17:

Ein Zustand über einer C^* -Algebra heißt rein, falls er nicht als eine konvexe Kombination $\omega = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2$ zweier Zustände $\omega_1, \omega_2 \neq \omega$ mit $\lambda \in (0, 1)$ geschrieben werden kann.

Die Menge aller reinen Zustände über \mathfrak{A} wird mit $P_{\mathfrak{A}}$ bezeichnet.

Eine wesentliche Aussage über die Beschaffenheit der Menge der Zustände macht das folgende

Theorem D.18:

Die Menge der Zustände $S_{\mathfrak{A}}$ einer C^* -Algebra \mathfrak{A} ist konvex, und schwach- $*$ -kompakt genau dann, wenn \mathfrak{A} eine Eins $\mathbf{1}$ besitzt.

Ist letzteres der Fall, so ist $P_{\mathfrak{A}}$ die Menge der Extrempunkte von $S_{\mathfrak{A}}$ und $S_{\mathfrak{A}}$ ist der schwach- $*$ -Abschluß der konvexen Hülle von $P_{\mathfrak{A}}$.

D.3 Darstellungen

Definition D.19:

Eine Darstellung einer C^* -Algebra \mathfrak{A} ist ein Paar (π, \mathfrak{H}) , wobei \mathfrak{H} ein Hilbertraum und π ein $*$ -Homomorphismus zwischen \mathfrak{A} und $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ ist.

(π, \mathfrak{H}) heißt

- (1) *treu*, falls π injektiv ist.
- (2) *zyklisch*, falls ein Vektor $\Omega \in \mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft existiert, daß die Menge $\{\pi(A)\Omega \mid A \in \mathfrak{A}\}$ dicht in \mathfrak{H} ist. Ω wird als *zyklischer Vektor* bezeichnet.
- (3) *nicht-ausgeartet*, falls $\pi(A)\xi = 0 \forall A \in \mathfrak{A}$ für ein $\xi \in \mathfrak{H}$ impliziert, daß $\xi = 0$ gilt.
- (4) *irreduzibel*, falls die einzigen abgeschlossenen Unterräume \mathfrak{U} von \mathfrak{H} mit $\pi(\mathfrak{A})\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}$ die trivialen Unterräume $\{0\}$ und \mathfrak{H} sind.

Für nicht ausgeartete Darstellung findet man das wichtige Resultat:

Theorem D.20:

Ist (π, \mathfrak{H}) eine nicht ausgeartete Darstellung einer C^* -Algebra \mathfrak{A} , so ist (π, \mathfrak{H}) die direkte Summe zyklischer Unterdarstellungen.

Bemerkung D.21 (GNS-Konstruktion):

Der Zusammenhang zwischen Zuständen und Darstellungen wird durch die folgende Konstruktion geklärt.

Ist \mathfrak{A} eine C^* -Algebra, ω ein Zustand über \mathfrak{A} und \mathfrak{I}_ω das Links-Ideal $\{A \mid \omega(A^*A) = 0, A \in \mathfrak{A}\}$, so wird $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}_\omega$ mit

$$(A_{\mathfrak{I}_\omega}, B_{\mathfrak{I}_\omega}) := \omega(A^*B) \quad \forall A_{\mathfrak{I}_\omega}, B_{\mathfrak{I}_\omega} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_\omega \text{ und } A \in A_{\mathfrak{I}_\omega}, B \in B_{\mathfrak{I}_\omega}$$

zu einem Prähilbertraum $\tilde{\mathfrak{H}}_\omega$.

$\tilde{\mathfrak{H}}_\omega$ kann in der durch (\cdot, \cdot) induzierten Topologie zu einem Hilbertraum \mathfrak{H}_ω vervollständigt werden.

Die Darstellung von \mathfrak{A} auf \mathfrak{H}_ω wird durch

$$\pi_\omega(A)B_{\mathfrak{I}_\omega} := (AB)_{\mathfrak{I}_\omega} \quad \forall A \in \mathfrak{A}, B_{\mathfrak{I}_\omega} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_\omega$$

induziert.

Die so konstruierte Darstellung $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)$ besitzt ferner einen zyklischen Vektor Ω_ω , der durch

$$\Omega_\omega := \mathbb{1}_{\mathfrak{I}_\omega}$$

gegeben ist

Der Vektor Ω_ω erlaubt es außerdem den Zustand ω mittels der Darstellung wie folgt auszudrücken

$$\omega(A) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Die so beschriebene Konstruktion einer zu einem Zustand ω assoziierten Darstellung $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)$ wird als *GNS-Konstruktion*²²³ bezeichnet.

Mittels der GNS-Konstruktion findet man

Theorem D.22:

Ist ω ein Zustand über einer C^* -Algebra \mathfrak{A} , so besitzt \mathfrak{A} eine zyklische Darstellung $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)$, s.d.

$$\omega(A) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

²²³benannt nach I.M. Gel'fand, M.A. Naimark und I. Segal

$(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)$ ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt, d.h. falls $(\pi'_\omega, \mathfrak{H}'_\omega)$ eine weitere zyklische Darstellung mit zyklischem Vektor Ω'_ω und $\omega(A) = (\Omega'_\omega, \pi'_\omega(A)\Omega'_\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{A}$ ist, so existiert eine unitärer Operator

$$\mathfrak{H}_\omega \xrightarrow{U} \mathfrak{H}'_\omega \quad (\text{D.5})$$

mit den Eigenschaften

$$(1) \quad U^{-1}\pi'_\omega(A)U = \pi_\omega(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

$$(2) \quad U\Omega_\omega = \Omega'_\omega$$

Dies wiederum führt zu

Korollar D.23:

Ist \mathfrak{A} eine C^* -Algebra und α ein $*$ -Automorphismus von \mathfrak{A} , sowie ω eine α -invarianten Zustand über \mathfrak{A} , d.h.

$$\omega(\alpha(A)) = \omega(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A},$$

und $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)$ die zu ω assoziierte, zyklische Darstellung, so existiert ein eindeutig bestimmter, unitärer Operator $U_\alpha : \mathfrak{H}_\omega \rightarrow \mathfrak{H}_\omega$ mit den Eigenschaften

$$(1) \quad U_\alpha \pi_\omega(A) U_\alpha^{-1} = \pi_\omega(\alpha(A)) \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

$$(2) \quad U_\alpha \Omega_\omega = \Omega_\omega$$

Zwischen reinen Zuständen und irreduziblen Darstellungen einer C^* -Algebra besteht ein direkter Zusammenhang.

Theorem D.24:

Ist \mathfrak{A} eine C^* -Algebra und $\omega \in S_{\mathfrak{A}}$, so gilt:

$$(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega) \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow \omega \in P_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \omega \text{ ist ein Extrempunkt von } S_{\mathfrak{A}}$$

Abschließend seien noch drei wesentliche Theoreme zur Klassifikation von C^* -Algebren genannt.

Theorem D.25:

Eine C^* -Algebra \mathfrak{A} ist $*$ -isomorph zu einer abgeschlossenen (in Norm), selbstadjungierten Algebra beschränkter Operatoren über einem Hilbertraum.

Theorem D.26:

Eine abelsche C^* -Algebra \mathfrak{A} ist $*$ -isomorph zu der Algebra der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, über dem Spektrum von \mathfrak{A} : $C_0(\sigma(\mathfrak{A}))$.

Dabei ist das Spektrum $\sigma(\mathfrak{A})$ von \mathfrak{A} die Menge der reinen Zustände $P_{\mathfrak{A}}$, welche in der schwach- $*$ -Topologie ein (lokal) kompakter, Hausdorff Raum ist.

$\sigma(\mathfrak{A})$ ist genau dann kompakt, wenn \mathfrak{A} eine Eins $\mathbf{1}$ besitzt.

Theorem D.27:

Ist \mathfrak{A} eine von einem Element A erzeugte abelsche C^* -Algebra, so ist \mathfrak{A} $*$ -isomorph zu $C_0(\sigma(A))$.

Index

- Abbildung
 - der Klasse C^r , **73**
 - glatt, **74**
 - symplektisch, **21**
- Ableitung
 - kovariante, *siehe* Zusammenhang
 - höhere, *siehe* Zusammenhang
- Algebra
 - *-, **128**
 - äußere, **87, 88**
 - Banach *- , **129**
 - C^* -, **127**
 - Lie-, **75**, *siehe* Lie-Algebra
 - Quotienten-, **129**
 - Weyl-, **22**
- Atlas
 - der Klasse C^r , **72**
 - kompatibel, **72**
 - orientierend, **79**
 - verträglich, **72**
 - vollständig, **73**
- Bündel
 - Homomorphismus, **96**
 - Isomorphismus, **96**
 - atlas, **96**
 - projektion, **95**
 - Faser-, **91, 95**
 - assoziiert, **98**
 - induziert, **97**
 - trivial, **96**
 - Kotangentiale, **99**
 - Tangentiale, **99**
 - Vektor-, **98**
 - Homomorphismus, **99**
 - direkte Summe, **99**
 - Dual, **99**
 - Rang, **99**
 - Tensorprodukt, **99**
- Basenfeld, **100**
- Bedingung
 - Kozykel-, **97**
 - Prä- ρ -Kozykel-, **96**
- Cauchy-Fläche, **11**
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, **130**
- Darstellung
 - adjungierte, **94**
 - C^* -Algebra, **131**
 - irreduzibel, **131**
 - nicht-ausgeartet, **131**
 - treu, **131**
 - zyklisch, **131**
- Derivation
 - Tensor-, **83**
 - Tensorfeld-, **84**
- diffeomorph, **73**
- Diffeomorphismus
 - 1-Parameter Gruppe, **86**
 - affin-linear, **112**
 - der Klasse C^r , **73**
 - lokal, **79**
 - orientierungsändernd, **80**
 - orientierungserhaltend, **80**
- Differential, **77**
 - äußeres, **88**
- Differentialoperator
 - Huygens'sch, **13**
 - linearer, **102**
 - adjungierter, **103**
 - formal selbstadjungiert, **18**
 - Hauptsymbol, **103**
 - Ordnung, **103**
 - Tensorprodukt, **106**
 - trivialisierendes Koordinatensystem, **103**
 - normal hyperbolisch, **2**
- Distribution, **104**
 - Ordnung, **104**
 - Pullback, **105**
 - Riesz-
 - avanciert, **5**
 - retardiert, **5**
 - Tensorprodukt, **106**
- Divergenz, **109**
- Dynamik, **30**
- Eichinvarianz, **37**
- Eins
 - C^* -, **127**
- Einstein'sche Feldgleichungen, **39**
- Einstein-Universum, (statisch), **39**
- Endpunkt, **75**
- Exponentialabbildung
 - einer Lie-Gruppe, **93**
- Faser, **96**
 - Metrik, *siehe* Metrik
 - bündel, *siehe* Bündel
 - erhaltend, **96**
 - typ, **95**

- flach
 Ricci, **111**
 Fluß, **86**
 lokal, **86**
 Form
 1-, *siehe s-Form* oder Kovektorfeld
 Differential-, *siehe s-Form*
 Koordinaten-1-, **77**
 s-, **87**
 Volumen-, **89**
 Formel
 Weitzenböck-, **3**
 Friedmann-Gleichungen, **39**
 Fundamentallösung, **4**
 Funktor, **125**
 bijektiv, **125**
 Einbettung, **125**
 identischer, **126**
 injektiv, **125**
 Inklusion, **126**
 surjektiv, **125**
 treu, **125**
 voll, **125**
 volltreu, **126**

 Geodäte, **111**
 maximal, **112**
 nicht geodätisch fortsetzbar, **112**
 Prä-, **112**
 geodätisches Abstandsquadrat, **114**
 Gleichgewicht
 lokal, **31**
 GNS-Konstruktion, **131**
 Gradient, **109**
 Graph, **124**

 Hadamard-Koeffizienten, **7**
 Hadamard-Parametrix, **26**
 Hopf-Koordinaten, **48**
 Hyperfläche, **85**

 Ideal
 Links-, **129**
 Rechts-, **129**
 zweiseitiges, **129**
 Immersion, **78**
 Integral
 einer Differentialform, **89**
 inverse Temperatur, **30**
 Involution, **127**
 Isometrie, **108**
 Anti-, **116**
 lokal, **108**
 zeit-orientierungserhaltend, **121**
 zeit-orientierungsumkehrend, **121**
 zeitartig, **30**
 isometrisch, **108**, **128**
 isometrische Einbettung, **108**

 Jacobi
 -Determinante, **90**
 -Matrix, **79**

 Karte, **72**
 Kategorie, **124**
 Äquivalenz, **126**
 Unter-, **125**
 voll, **126**
 kausal-verträglich, **121**
 Kegel
 Licht-, **13**
 Doppel-, **116**
 Vergangenheits-, **121**
 Zeit-, **120**
 entgegengesetzt, **120**
 Zukunfts-, **121**
 KMS-Bedingung, **30**
 Kodimension, **85**
 kompakt
 vergangenheits-, **10**
 zukunfts-, **10**
 konform
 Gewicht, **120**
 kovariant, **120**
 Transformation, **119**
 Kontraktion, **83**
 Koordinatenfunktionen, **72**
 Koordinatensystem, **72**
 Normal-, **114**
 Ortho, **114**
 Produkt-, **73**
 kosmologische Konstante, **39**
 Kotangentia
 -raum, **76**
 -vektor, **76**
 Kovektorfeld, **76**
 glatt, **76**
 Kovektorfelder
 Koordinaten-, **77**
 Krümmung
 konstant, **111**
 Schnitt-, **111**
 Skalar-, **111**
 Kurve, **75**
 fortsetzbar, **75**
 Integral-, **85**

- maximal, **86**
 - kausal, **108**
 - lichtartig, **108**
 - raumartig, **108**
 - regulär, **75**
 - zeitartig, **108**
- Kurvensegment
 - kausal, **108**
 - lichtartig, **108**
 - raumartig, **108**
 - stückweise glatt, **75**
 - zeitartig, **108**
- Laplace-d'Alembert
 - konform gekoppelt, **120**
- Laplace-d'Alembert-Operator, **109**
- Laplace-Operator
 - Bochner, **2**
- Lie-
 - Ableitung, **84, 86**
 - Algebra, **75, 91**
 - Algebrenhomomorphismus, **92**
 - Gruppe, **90**
 - Gruppenhomomorphismus, **90**
 - Unteralgebra, **92**
 - Untergruppe, **91**
 - 1-Parameter, **91**
 - abgeschlossen, **91**
- Mannigfaltigkeit
 - der Klasse C^r , **73**
 - glatt, **74**
 - kartesisches Produkt, **73**
 - Lorentz'sche, **107**
 - zeit-orientierbar, **121**
 - zeit-orientiert, **121**
 - orientierbar, **79, 80**
 - orientiert, **79, 80**
 - parakompakt, **73**
 - Riemann'sche, **107**
 - Semi-Riemann'sche, **107**
 - geodätisch vollständig, **112**
 - Unter-, **85**
 - eingebettet, **85**
 - Semi-Riemann'sche, **107**
- maximal symmetrisch, **50**
- Meta
 - graph, **123**
 - kategorie, **123**
- Metrik, **107**
 - verträglich, *siehe* Zusammenhang
- Faser-, **102**
 - direkte Summe, **102**
 - dual, **102**
 - Tensorprodukt, **102**
- Minkowskiraum, **115**
 - Standard-Zeitorientierung, **121**
- Modul
 - \mathcal{G} -, **94**
 - \mathfrak{g} -, **94**
- Morphismus, **123**
 - *-, **129**
 - Homo-, **124**
- Norm
 - C^* -, **127**
 - $C^r_{\mathcal{X}}$ -Halb-, **104**
- normal, **128**
- Normierung, **130**
- Objekt, **123**
- Observable
 - lokale thermische, **31**
- Orientierung
 - Koordinatensystem, **79**
 - Mannigfaltigkeit, **79, 89**
 - Standard-, **80**
 - Tangentialraum, **79, 89**
 - Zeit-, **121**
- Paralleltransport, **101**
- Poisson'sche Summenformel, **44**
- positiv, **128**
- Positivität, **130**
- Produkt
 - äußeres, **87**
- Propagator
 - avanciert, **4, 10, 12**
 - kausal, **12**
 - retardiert, **4, 10, 12**
- Pullback, **78, 82**
 - einer Distribution, *siehe* Distribution
- Pushforward, **77, 82**
- Quantenfeld
 - kausal, **18**
 - lokal kovariant, **17**
- Quantenfeldtheorie
 - kausal, **16**
 - lokal kovariant, **16**
 - Zeit-Schnitt-Axiom, **17**
- Raumzeit, vii
 - global hyperbolisch, **11**
 - stationär, **35**
- Resolvente, **128**
- Resolventenmenge, **128**

- Schnitt, **98**
 lokaler, **98**
 Test-, **104**
 Träger, **99**
- selbstadjungiert, **128**
- Spektralradius, **128**
- Spektrum, **128**
- Struktur
 -Gruppe, **95**
 C^r -, **73**
 glatt, **74**
- Submersion, **78**
- Tangential
 -raum, **74**
 -vektor, **74**
- Tangentialvektor
 lichtartig, **108**
 raumartig, **108**
 zeitartig, **108**
- Tensor, **80**
 -feld, **81**
 glatt, **81**
 kontravariant, **80**
 kovariant, **80**
 Krümmungs-, **102**
 Ricci-, **110**
 Torsions-, **109**
- thermische Funktionen, **33**
- Träger, **73**
- Transformation
 Bogoliubov-, **22**
 Natürliche
 Isomorphismus, **126**
 natürliche, **126**
 Äquivalenz, **126**
- Transportgleichungen, **7**
- Trivialisierung
 globale, **96**
 lokal, **96**
- Übergangsfunktion, **72**
 eines Faserbündels, **96**
- Umgebung
 geodätisch konvex, **113**
 kausal, **9**
 normal, **113**
- unitär, **128**
- Vektorfeld, **75**
 Fundamental-, **95**
 glatt, **75**
 Kommutator, **75**
 Koordinaten-, **77**
 links-/rechts-invariant, **92**
 Orts-, **115**
 vollständig, **86**
- Vektorraum
 symplektisch, **20**
- Vergangenheit
 chronologische, *siehe* Zukunft
 kausale, *siehe* Zukunft
- Vertauschungrelationen
 kanonische
 exponentielle Form, **22**
- Volumen, **90**
- Wellengleichung, **4**
- Wick-Monome, **27**
- Wick-Quadrat, **27**
- Wirkung
 effektiv, **95**
 frei, **95**
 Links-, **95**
 Rechts-, **95**
 transitiv, **95**
- Zerlegung der Eins, **74**
- Zukunft
 chronologische, **121**
 kausale, **121**
- Zusammenhang, **100**
 1-Form, **101**
 Christoffel Symbole, **101**, **109**
 direkte Summe, **101**
 Dual, **101**
 Levi-Civita, **109**
 metrik-verträglich, **102**, **109**
 P-verträglich, **3**
 Tensorprodukt, **101**
 torsionsfrei, **109**
- Zustand, **130**
 2-Punkt-Funktion, **25**
 analytisch, **25**
 Gibbs-, **30**
 Grund-, **30**
 Hadamard-
 global, **26**
 lokal, **25**
 invarianter, **132**
 KMS-, **30**
 n -Punkt-Funktion, **25**
 quasifrei, **25**
 rein, **130**
 thermischer Referenz, **31**

Literatur

- [AF01] AGRICOLA, Ilka ; FRIEDRICH, Thomas: *Globale Analysis: Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik*. Vieweg Verlag, 2001
- [AIS78] AVIS, S. J. ; ISHAM, C. J. ; STOREY, D.: Quantum Field Theory in anti-De Sitter Space-Time. In: *Phys. Rev. D* 18 (1978), S. 3565. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.18.3565>. – DOI 10.1103/PhysRevD.18.3565
- [Bar02] BARROW, John D.: *The constants of nature : From Alpha to Omega - the numbers that encode the deepest secrets of the universe*. New York : Pantheon Book, 2002
- [BFK96] BRUNETTI, R. ; FREDENHAGEN, K. ; KÖHLER, M.: The microlocal spectrum condition and Wick polynomials of free fields on curved spacetimes. In: *Commun. Math. Phys.* 180 (1996), S. 633–652. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02099626>. – DOI 10.1007/BF02099626
- [BFV03] BRUNETTI, Romeo ; FREDENHAGEN, Klaus ; VERCH, Rainer: The generally covariant locality principle: A new paradigm for local quantum physics. In: *Commun. Math. Phys.* 237 (2003), S. 31–68
- [BGP07] BÄR, Christian ; GINOUX, Nicolas ; PFÄFFLE, Frank ; SCHWERMER, Joachim (Hrsg.) ; YNGVASON, Jakob (Hrsg.): *Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*. European Mathematical Society, 2007 (ESI Lectures in Mathematics and Physics)
- [BK96] BAUM, Helga ; KATH, Ines: Normally hyperbolic operators, the Huygens property and conformal geometry. In: *Annals of Global Analysis and Geometry* 14 (1996), S. 315–371. – SFB-288-212
- [BOR02] BUCHHOLZ, Detlev ; OJIMA, Izumi ; ROOS, Hansjorg: Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory. In: *Annals Phys.* 297 (2002), S. 219–242. <http://dx.doi.org/10.1006/aphy.2002.6222>. – DOI 10.1006/aphy.2002.6222
- [BR87] BRATTELI, Ola ; ROBINSON, Derek W. ; BALIAN, Roger (Hrsg.) ; BEIGLBÖCK, Wolf (Hrsg.) ; GROSSE, Harald (Hrsg.) ; LIEB, Elliott H. (Hrsg.) ; RESHETIKHIN, Nicolai (Hrsg.) ; SPOHN, Herbert (Hrsg.) ; THIRRING, Walter (Hrsg.): *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1: C*-and W*-Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*. 2ed. Springer Verlag, 1987 (Texts and Monographs in Physics)
- [BR97] BRATTELI, Ola ; ROBINSON, Derek W. ; BALIAN, Roger (Hrsg.) ; BEIGLBÖCK, Wolf (Hrsg.) ; GROSSE, Harald (Hrsg.) ; LIEB, Elliott H. (Hrsg.) ; RESHETIKHIN, Nicolai (Hrsg.) ; SPOHN, Herbert (Hrsg.) ; THIRRING, Walter (Hrsg.): *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2: Equilibrium States, Models in Quantum Statistical Mechanics*. 2ed. Springer Verlag, 1997 (Texts and Monographs in Physics)
- [Bre93] BREDON, Glen E. ; AXLER, S. (Hrsg.) ; GEHRING, F.W. (Hrsg.) ; RIBET, K.A. (Hrsg.): *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 139: *Topology and Geometry*. Springer Verlag, 1993
- [BS05] BERNAL, Antonio N. ; SÁNCHEZ, Miguel: Smoothness of Time Functions and the Metric Splitting of Globally Hyperbolic Spacetimes. In: *Commun. Math. Phys.* 257 (2005), S. 43–50

- [BS07] BUCHHOLZ, Detlev ; SCHLEMMER, Jan: Local Temperature in Curved Spacetime. In: *Class. Quant. Grav.* 24 (2007), S. F25. <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/24/7/F01>. – DOI 10.1088/0264-9381/24/7/F01
- [Buc03] BUCHHOLZ, Detlev: On hot bangs and the arrow of time in relativistic quantum field theory. In: *Commun. Math. Phys.* 237 (2003), S. 271–288
- [DB60] DEWITT, Bryce S. ; BREHME, Robert W.: Radiation damping in a gravitational field. In: *Ann. Phys.* 9 (1960), S. 220–259. [http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916\(60\)90030-0](http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916(60)90030-0). – DOI 10.1016/0003-4916(60)90030-0
- [Dim80] DIMOCK, John: Algebras of Local Observables on a Manifold. In: *Commun. Math. Phys.* 77 (1980), S. 219–228
- [Fri75] FRIEDLANDER, F.G. ; MCCREA, W.H. (Hrsg.) ; SCIAMA, D.W. (Hrsg.) ; POLKINGHORNE, J.C. (Hrsg.): *The Wave Equation on a Curved Space-Time*. Cambridge University Press, 1975 (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)
- [Ful89] FULLING, Stephen A. ; SERIES, C.M. (Hrsg.): *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. Cambridge University Press, 1989 (London Mathematical Society Student Texts 17)
- [Gün88] GÜNTHER, Paul: *Huygens' Principle and Hyperbolic Equations*. Academic Press, 1988 (Perspectives in Mathematics)
- [Haa96] HAAG, Rudolf ; BALIAN, Roger (Hrsg.) ; BEIGLBÖCK, Wolf (Hrsg.) ; GROSE, Harald (Hrsg.) ; LIEB, Elliott H. (Hrsg.) ; RESHETIKHIN, Nicolai (Hrsg.) ; SPOHN, Herbert (Hrsg.) ; THIRRING, Walter (Hrsg.): *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. 2ed. Springer Verlag, 1996 (Texts and Monographs in Physics)
- [Haw75] HAWKING, Stephen W.: Particle creation by black holes. In: *Commun. Math. Phys.* 43 (1975), S. 199–220
- [Hüb05] HÜBENER, Robert: *Lokale Gleichgewichtszustände massiver Bosonen*, Georg-August-Universität Göttingen, Institut für Theoretische Physik, Diplomarbeit, 2005
- [HE73] HAWKING, S.W. ; ELLIS, G.F.R. ; SCIAMA, D.W. (Hrsg.) ; WEINBERG, S. (Hrsg.) ; LANDSHOFF, P.V. (Hrsg.): *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973 (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)
- [Hel62] HELGASON, Sigurdur: *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1962
- [HHW67] HAAG, R. ; HUGENHOLTZ, N. M. ; WINNINK, M.: On the Equilibrium states in quantum statistical mechanics. In: *Commun. Math. Phys.* 5 (1967), S. 215–236
- [HK64] HAAG, Rudolf ; KASTLER, Daniel: An algebraic approach to quantum field theory. In: *J. Math. Phys.* 5 (1964), S. 848–861
- [Hör83] HÖRMANDER, Lars: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer Verlag, 1983 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)
- [HW01] HOLLANDS, Stefan ; WALD, Robert M.: Local Wick polynomials and time ordered products of quantum fields in curved spacetime. In: *Commun. Math. Phys.* 223 (2001), S. 289–326. <http://dx.doi.org/10.1007/s002200100540>. – DOI 10.1007/s002200100540

- [JS06] JANTZEN, Jens C. ; SCHWERMER, Joachim: *Algebra*. Springer Verlag, 2006
- [Kay06] *Kapitel Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. In: KAY, Bernard S.: *Encyclopedia of Mathematical Physics*. Bd. 4. Elsevier, 2006, S. 202–212
- [Küh99] KÜHNEL, Wolfgang: *Differentialgeometrie - Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten*. 3ed. Vieweg Verlag, 1999
- [KN63] KOBAYASHI, Shoshichi ; NOMIZU, Katsumi: *Foundations of Differential Geometry Volume I*. John Wiley & Sons, Inc., 1963 (Wiley Classics Library)
- [KN69] KOBAYASHI, Shoshichi ; NOMIZU, Katsumi: *Foundations of Differential Geometry Volume II*. John Wiley & Sons, Inc., 1969 (Wiley Classics Library)
- [KW91] KAY, Bernard S. ; WALD, Robert M.: Theorems on the Uniqueness and Thermal Properties of Stationary, Nonsingular, Quasifree States on Space-Times with a Bifurcate Killing Horizon. In: *Phys. Rept.* 207 (1991), S. 49–136. [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90015-E](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(91)90015-E). – DOI 10.1016/0370-1573(91)90015-E
- [Mac71] MACLANE, Saunders: *Categories for the Working Mathematician*. Springer Verlag, 1971
- [Mor03] MORETTI, Valter: Comments on the stress-energy tensor operator in curved spacetime. In: *Commun. Math. Phys.* 232 (2003), S. 189–221. <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-002-0702-7>. – DOI 10.1007/s00220-002-0702-7
- [Nic07] NICOLAESCU, Liviu I.: *Lectures on the Geometry of Manifolds*. World Scientific Publishing, 2007
- [O'N83] O'NEILL, Barrett ; EILENBERG, Samuel (Hrsg.) ; BASS, Hyman (Hrsg.): *Semi-Riemannian Geometry - With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983 (Pure and Applied Mathematics)
- [Pin09] PINAMONTI, Nicola: Conformal generally covariant quantum field theory: The scalar field and its Wick products. In: *Commun. Math. Phys.* 288 (2009), S. 1117–1135. <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-009-0780-x>. – DOI 10.1007/s00220-009-0780-x
- [Rad96] RADZIKOWSKI, M. J.: Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time. In: *Commun. Math. Phys.* 179 (1996), S. 529–553. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02100096>. – DOI 10.1007/BF02100096
- [Rud73] RUDIN, Walter ; FARNSWORTH, Jack L. (Hrsg.) ; BAYNE, Bradford (Hrsg.) ; MARGOLIES, M. E. (Hrsg.): *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1973
- [SKM⁺03] STEPHANI, H. ; KRAMER, D. ; MACCALLUM, M. A. H. ; HOENSELAERS, C. ; HERLT, E. ; LANDSHOFF, P. V. (Hrsg.) ; NELSON, D. R. (Hrsg.) ; WEINBERG, S. (Hrsg.): *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. 2ed. Cambridge University Press, 2003 (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)
- [SV00] SAHLMANN, Hanno ; VERCH, Rainer: Passivity and microlocal spectrum condition. In: *Commun. Math. Phys.* 214 (2000), S. 705–731. <http://dx.doi.org/10.1007/s002200000297>. – DOI 10.1007/s002200000297
- [SW64] STREATER, Raymond F. ; WIGHTMAN, Arthur S.: *PCT, Spin and Statistics, and All That*. W.A. Benjamin, Inc., 1964

- [Tak79] TAKESAKI, Masamichi ; CUNTZ, J. (Hrsg.) ; JONES, V. (Hrsg.): *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Bd. 124: *Theory of Operator Algebras I*. Springer Verlag, 1979
- [Unr76] UNRUH, William G.: Notes on black-hole evaporation. In: *Phys. Rev. D* 14 (1976), S. 870–892
- [Wal84] WALD, Robert M. ; WALD, Robert M. (Hrsg.): *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984
- [Wal94] WALD, Robert M. ; WALD, Robert M. (Hrsg.): *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. The University of Chicago Press, 1994 (Chicago Lectures in Physics)

Danksagungen

Mein Dank geht zunächst an Professor Buchholz für die Ermöglichung dieser Arbeit, die Auswahl der faszinierenden Thematik und deren erhellende Diskussion sowie die hilfreiche und angenehme Betreuung im Allgemeinen. Weiterhin möchte ich mich bei Professor Rehren für die Bereitschaft zur Übernahme des Koreferates bedanken.

Dank gilt auch allen Mitglieder der Arbeitsgruppe für zahlreiche Diskussion rund um die Welt der Quantenfeldtheorie und die angenehme Arbeitsatmosphäre der letzten zwölf Monate, die zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen hat.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei Frank Werner für die Bereitstellung seiner LaTeX-Kenntnisse und -Vorlagen, bei Martin Callies und Peter Schlicht für klärende Gespräche zur Differentialgeometrie und verwandter Themen sowie bei Bodo Wilts für die Durchsicht des umfangreichen Textes bedanken.

Ferner möchte ich meinen Eltern danken, die mir nicht nur dieses Studium ermöglicht haben, sondern auch in jeder anderen Hinsicht die Verwirklichung meiner Vorstellungen unterstützen. Abschließend danke ich besonders Lena für Geduld, moralischen Beistand, Lektorat und eine schöne Zeit auch abseits der Physik.

Göttingen
Oktober, 2009

Alexander Stottmeister