

Modulare Kompaktheit des verallgemeinerten freien Feldes in zwei Dimensionen

Diplomarbeit

Vorgelegt von
Jan Malte Slowik
geboren in
Berlin

Angefertigt am
Institut für Theoretische Physik
der
Georg-August-Universität Göttingen

Januar 2011

Erstgutachter: Prof. Dr. Karl-Henning Rehren
Zweitgutachter: Prof. Dr. Detlev Buchholz

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Symbolverzeichnis | 5 |
| 1. Einleitung | 7 |
| 2. Grundlagen | 9 |
| 2.1. Notationen und Konventionen | 9 |
| 2.2. Algebraische Quantenfeldtheorie | 11 |
| 2.3. Tomita-Takesaki Theorie | 12 |
| 2.4. Das Bisognano-Wichmann Theorem | 14 |
| 2.5. Konstruktion lokaler Netze in zwei Dimensionen | 14 |
| 2.6. Die Split-Eigenschaft für Keile | 16 |
| 2.7. Die modulare Nuklearitätsbedingung | 18 |
| 3. Das verallgemeinerte freie Feld | 21 |
| 3.1. Die Weylalgebra | 21 |
| 3.2. Lokale Algebren und Standardkeilalgebra | 27 |
| 3.3. Modulare Gruppe der rechten Keilalgebra | 29 |
| 4. Modulare Kompaktheit des verallgemeinerten freien Feldes | 33 |
| 4.1. Von modularer Nuklearität zu modularer Kompaktheit | 33 |
| 4.2. Modulare Kompaktheit gilt nicht | 35 |
| 4.2.1. Absolut stetiges Maß | 35 |
| 4.2.2. Maß mit atomarem Anteil | 40 |
| 4.3. Anwendung auf das freie Feld in 4d | 41 |
| 4.3.1. Das freie Feld in 4d | 42 |
| 4.3.2. Unterhalbgebren für Einschränkung auf zweidimensionale Keile | 43 |
| 4.3.3. Unterhalbgebren mit fester Lokalisation | 47 |
| 5. Zusammenfassung | 49 |
| A. Nützliche Theoreme | 51 |
| A.1. Ein Paley-Wiener Theorem | 51 |
| A.2. Kompakte Operatoren | 54 |
| A.3. Operatoren im schwachen Abschluss der lokalen Algebren | 56 |

| | |
|---|-----------|
| A.4. Koordinaten in $d = 2$ | 58 |
| A.5. Der Operator Ξ | 59 |
| B. Die Folge $\{g_n\}$ | 61 |
| B.1. Eigenschaften von \hat{g}_n | 61 |
| B.2. Konvergenz in \mathcal{H} | 66 |
| C. Die Folge $\{W(\hat{g}_n)\}$ | 73 |
| Literaturverzeichnis | 79 |

Symbolverzeichnis

| | | | |
|--|---|--|--|
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | Skalarprodukt im Ein- feld Hilbertraum | $C_0^\infty(\mathcal{O})$ | glatte Funktionen auf \mathcal{O} mit kompaktem Träger |
| (\cdot, \cdot) | Skalarprodukt im Fock- raum | $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ | Testfunktionen mit kom- paktem Träger in \mathcal{O} |
| $\ \cdot \ , \ \cdot \ _{\mathcal{H}}, \ \cdot \ _{\rho}, \ \cdot \ _{\delta_{\lambda^2}}$ | Normen, der Index spe- zifiziert den Hilbertraum bzw. das Lehmann-Maß | $\mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathcal{O})$ | reellwertige Testfunk- tionen mit kompaktem Träger in \mathcal{O} |
| \square | D'Alembert-Operator | Δ | modularer Operator |
| $\mathcal{O}_1 \Subset \mathcal{O}_2$ | Abschluss von \mathcal{O}_1 ist Teilmenge des Inneren von \mathcal{O}_2 | δ_{ξ_j} | $\delta(x_j - \xi_j)$ |
| \mathcal{O}' | kausales Komplement ei- nes Gebietes \mathcal{O} | $\mathfrak{D}(A)$ | Definitionsbereich eines Operators A |
| \mathcal{M}' | Kommutante einer von- Neumann-Algebra \mathcal{M} | $D_{a,b}$ | Doppelkegel |
| \tilde{f} | Fouriertransformierte von f in x_0, x_1, \dots Ko- ordinaten | $\varepsilon(x)$ | Signumfunktion |
| \hat{f} | Fouriertransformierte von f in p_{\pm} -Koordinaten | $\eta(\psi)$ | kohärenter Vektor im Fockraum |
| \check{f} | Fouriertransformierte von f in θ_{\pm} -Koordinaten | E | Projektor bzw. Projektor- wertiges Maß |
| $f * g$ | Faltung von f und g | $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ | Fockraum über \mathcal{H} |
| $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ | lokale C^* -Algebra | \mathcal{H}_m | $L^2(H_m, d\Omega_m)$ |
| $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ | beschränkte Operatoren auf dem Hilbertraum \mathcal{H} | H_m | Massenschale |
| β_{λ} | Deltafolge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ | \mathcal{J} | Menge der offenen be- schränkten Gebiete in \mathbb{M} |
| \mathbb{C} | komplexe Zahlen | J | modulare Konjugation |
| $C^\infty(\mathcal{O})$ | glatte Funktionen auf \mathcal{O} | \mathcal{K} | Menge der Doppelkegel |
| | | K | Abbildung von \mathbb{S} nach \mathcal{H} |
| | | $\Lambda(t)$ | Lorentz-Boost in x_1 - Richtung |
| | | \mathcal{M} | von-Neumann-Algebra |
| | | $\mathcal{M}(\mathcal{O}), \mathcal{N}(\mathcal{O})$ | lokale von-Neuman- Algebren |
| | | $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})$ | Unteralgebra des freien Feldes in 4d durch Ein- schränkung auf 2d-Keil |

| | | | |
|-----------------------------|---|-----------------------------------|--|
| $\mathcal{M}_g(W_r^{2d})$ | Unteralgebra des freien Feldes in 4d durch Lokalisation mit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ in x_2, x_3 | τ | arform positive, symmetrische Bilinearform |
| \mathbb{M} | Minkowskiraum | θ_{\pm} | Rapiditätskoordinaten im Impulsraum |
| μ | Lehmann-Maß | u | $\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}$ |
| \mathcal{O} | offenes Gebiet in \mathcal{M} | v | $\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}$ |
| Ω | zyklischer, separierender Vektor (Vakuumbvektor) | V_+ | Vorwärtslichtkegel |
| ω_ρ | Vakuum-Zustand | \mathcal{W} | Menge aller Keilgebiete |
| Ω_m | Lorentzinvariantes Maß auf der Massenschale | $\mathcal{W}(\sigma, \mathbb{S})$ | Weylgebra bzgl. σ, \mathbb{S} |
| \mathcal{P} | Poincarégruppe | $W(\hat{g})$ | Operator, für bestimmte $\hat{g} \in \mathcal{H}$ im schwachen Abschluss einer lokalen Algebra |
| \mathcal{P}_+^\uparrow | eigentliche, orthochrone Poincarégruppe | $W(f)$ | Weyloperator zu $f \in \mathbb{S}$ |
| $P(n)$ | Permutationsgruppe von n Elementen | W_l | linker Keil |
| p_{\pm} | Lichtkegelkoordinaten im Impulsraum | W_r | rechter Keil |
| \mathbb{R} | reelle Zahlen | W_r^{2d} | zweidimensionaler rechter Keil |
| \mathbb{R}_+ | positive reelle Zahlen | $W_r^{\xi_2, \xi_3}$ | Einschränkung des 4d-Keils auf eine Ebene |
| ρ | Dichtefunktion eines absolut stetigen Maßes | \mathcal{X} | Wirkung von Ξ auf Einfeld Hilbertraum |
| $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ | Schwartzfunktionen auf \mathbb{R}^n | Ξ, Ξ_a | Abbildungen in modularer Nuklearitäts- bzw. Kompaktheitsbedingung |
| \mathbb{S} | reeller Vektorraum, $\mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathbb{R}^2)/\ker(\sigma)$ | x_{\pm} | Lichtkegelkoordinaten im Ortsraum |
| σ | antisymmetrische Biline- | | |

1. Einleitung

Die algebraische Quantenfeldtheorie (bzw. lokale Quantenphysik) [Ha96, Ar99] ist eine axiomatische Formulierung von Quantenfeldtheorien mit operatoralgebraischen Methoden.

Ein Aspekt dieses Zugangs ist die modellunabhängige Analyse der Struktur von Quantenfeldtheorien, ausgehend von physikalisch motivierten Annahmen – den Haag-Kastler Axiomen [HK64]. Hierbei ist man zu tiefen Einsichten in die mathematische und physikalische Struktur der relativistischen Quantenphysik gelangt (z. B. Spin-Statistik- und CPT-Theorem, Superauswahlregeln, Teilchen-Inhalt, Kurzabstandsverhalten, Streutheorie).

Ein weiterer Aspekt dieses Zugangs ist die explizite Konstruktion wechselwirkender Modelle. Hierbei erweisen sich die Algebren, welche zu den in Keilgebieten lokalisierten Observablen assoziiert werden, kurz Keilalgebren, als besonders hilfreich.

In zwei Raumzeit-Dimensionen ($d=2$) ist es Borchers [Bo92] gelungen ein kovariantes, lokales Netz von Observablen-Algebren aus einer Keilalgebra, einer Darstellung der Translationen mit Spektrumsbedingung und einem zyklischen, separierenden Vektor (Vakuum) zu konstruieren. Die Existenz nichttrivialer Observablen, die in beschränkten Raumzeitgebieten lokalisiert sind, ist bei dieser Konstruktion jedoch nicht gesichert. Als hinreichendes Kriterium wurde von Buchholz und Lechner [BL04] die modulare Nuklearitätsbedingung formuliert, welche die spektralen Eigenschaften des modularen Operators der Keilalgebra einschränkt. Lechner [Le06] konnte zeigen, dass diese Bedingung für eine große Klasse von Modellen mit faktorisierender S-Matrix erfüllt ist.

In vier Raumzeit-Dimensionen ($d=4$) konnten Keil-lokale Modelle mit Wechselwirkung durch geeignete Deformationen von freien Theorien konstruiert werden [GL08, BS08, BLS10]. Die zentrale Frage ist ebenfalls, wann Keilalgebren schärfer lokalisierte Operatoren enthalten. Es ist zu vermuten, dass auch in diesem Kontext die modulare Struktur von Bedeutung ist. Für das freie Feld in $d > 2$ ist jedoch bekannt, dass die modulare Nuklearitätsbedingung nicht erfüllt sein kann [Le06, Bu74]. Trotzdem ist zu hoffen, dass geeignete Nuklearitätskriterien Aussagen über die lokale Struktur von Modellen erlauben.

In dieser Arbeit wird, anhand des freien Feldes, ein Schritt in diese Richtung unternommen. Der Ansatz, durch Einschränkung des freien Feldes im Ortsraum zu angepassten Nuklearitätskriterien zu gelangen, wird verfolgt. Dies führt zu verallgemeinerten freien Feldern in zwei Dimensionen. Da für verallgemeinerte freie Felder

mit absolut stetigem Anteil im Lehmann-Maß die modulare Nuklearitätsbedingung nicht gilt [DL84], wird das abgeschwächte Kriterium der modularen Kompaktheit formuliert und untersucht. Es wird gezeigt, dass auch diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

In Kapitel 2 werden die verwendeten Notationen und benötigten Grundlagen der Arbeit vorgestellt. Standardkeilalgebren werden definiert und es wird gezeigt, wie aus ihnen Vakuumdarstellungen konstruiert werden können. Als Bedingung für die Existenz nichttrivialer lokaler Algebren wird die Split-Eigenschaft für Keile verwendet. Schließlich wird die modulare Nuklearitätsbedingung als hinreichendes Kriterium für die Split-Eigenschaft für Keile genannt.

In Kapitel 3 wird das Modell des verallgemeinerten freien Feldes in zwei Dimensionen definiert. Zunächst werden die Weylalgebra und ihre Vakuumdarstellung, anschließend hierfür eine rechte Standardkeilalgebra konstruiert. Schließlich wird die modulare Gruppe der Standardkeilalgebra berechnet.

In Kapitel 4 wird die modulare Kompaktheitsbedingung formuliert und untersucht. Es wird gezeigt, dass diese nicht gilt für verallgemeinerte freie Felder mit absolut stetigem Lehmann-Maß, sowie für Lehmann-Maße mit absolut stetigem Anteil und singulärem Anteil aus endlich vielen Dirac-Maßen.

In Anhängen A, B und C finden sich technische Resultate, die in Kapitel 4 verwendet werden.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Grundlagen der Arbeit zusammengestellt und kurz erläutert. Dies dient auch dazu die verwendete Notation einzuführen.

2.1. Notationen und Konventionen

Wir verwenden natürliche Einheiten, d. h. $\hbar = c = 1$. In Raumzeit-Koordinaten werden die Punkte des d -dimensionalen Minkowskiraums $\mathbb{M} = \mathbb{R}^{1+n}$, mit $d = 1 + n$, durch (x_0, \mathbf{x}) , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, beschrieben. Das Minkowskiprodukt ist definiert durch $xy = x_0y_0 - \mathbf{x}\mathbf{y}$, wobei $\mathbf{x}\mathbf{y}$ das euklidische Skalarprodukt bezeichnet.

Hauptsächlich werden wir in dieser Arbeit den Fall $d = 2$ verwenden, d. h. wir betrachten als Raumzeit \mathbb{R}^2 mit $xy = x_0y_0 - x_1y_1$ oder wir verwenden noch weitere Koordinatensysteme, z. B. Lichtkegel- oder Rapiditätskoordinaten x_{\pm} bzw. θ_{\pm} , siehe Abschnitt A.4.

Ein Vektor $x \in \mathbb{M}$ heißt raumartig, falls $x^2 < 0$, zeitartig für $x^2 > 0$ und lichtartig, wenn $x^2 = 0$. Das kausale Komplement \mathcal{O}' einer Menge \mathcal{O} ist

$$\mathcal{O}' := \{y \in \mathbb{M} : (x - y)^2 < 0, \forall x \in \overline{\mathcal{O}}\}^{\circ},$$

so dass wir immer mit offenen Gebieten arbeiten. Zwei Gebiete $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{M}$ sind raumartig getrennt, wenn $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'_2$.

Die Isometriegruppe des Minkowskiraumes ist die Lorentzgruppe \mathcal{L} , die zusammen mit den Translationen die Poincarégruppe $\mathcal{P} = \mathcal{L} \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$ erzeugt. Die Zusammenhangskomponente der Identität der Poincarégruppe heißt eigentliche orthochrone Poincarégruppe und wird mit \mathcal{P}_+^{\uparrow} bezeichnet.¹ Die Lorentztransformationen der Boosts in x_1 -Richtung bezeichnen wir mit

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \cosh(2\pi t) & -\sinh(2\pi t) & 0 \\ -\sinh(2\pi t) & \cosh(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

wobei $\mathbb{1}$ die $(n-1)$ -dimensionale Einheitsmatrix ist. In $d = 2$ hat \mathcal{P}_+^{\uparrow} eine besonders einfache Struktur, sie wird von den Translationen und Boosts erzeugt.

¹Im Folgenden wird \mathcal{P}_+^{\uparrow} einfach Poincarégruppe genannt, falls keine Verwechslungen auftreten sollten.

2. Grundlagen

In diesen Arbeiten sind die Keilgebiete besonders wichtig, der rechte und linke Keil, W_r bzw. W_l , sind definiert durch

$$W_r := \{x \in \mathbb{M} : x_1 > |x_0|\}, \quad W_l := \{x \in \mathbb{M} : -x_1 > |x_0|\}. \quad (2.2)$$

Dann ist $W_r' = W_l$ und W_r, W_l sind invariant unter den Boost-Transformationen aus (2.1). Die Menge aller Keilgebiete \mathcal{W} ist definiert als

$$\mathcal{W} := \{\lambda W_r : \lambda \in \mathcal{P}\}.$$

Der (offene) Vorwärtslichtkegel V_+ ist die Menge

$$V_+ := \{(x_0, \mathbf{x}) \in \mathbb{M} : x_0 > |\mathbf{x}|\}. \quad (2.3)$$

Ein Doppelkegel $D \subset \mathbb{M}$ ist ein kausal vollständiges Gebiet, d. h. $D'' = D$, so dass $x, y \in \mathbb{M}$ existieren, mit $y \in \{V_+ + x\}$ und

$$D := \{V_+ + x\} \cap \{-V_+ + y\}.$$

In $d = 2$ können Doppelkegel durch zwei raumartige Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $b \in a + W_r$ und die beiden Keile charakterisiert werden

$$D_{a,b} := \{a + W_r\} \cap \{b + W_l\}.$$

Die Menge aller Doppelkegel bezeichnen wir mit \mathcal{K} . Die Menge aller offener, beschränkter Gebiete $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$, partiell geordnet und gerichtet durch Inklusion, bezeichnen wir mit \mathcal{J} .

Im Impulsraum bezeichnet $H_m := \{p \in V_+ : p^2 = m^2\}$ die Massenschale zur Masse $m > 0$ und $d\Omega_m := \frac{d^n \mathbf{p}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}$ das eindeutige lorentzinvariante Maß auf H_m .

Wir schreiben $\mathcal{H}_m := L^2(H_m, d\Omega_m)$.

Der D'Alembert Operator \square ist in $(n + 1)$ Dimensionen definiert durch

$$\square := \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Mit $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die glatten Funktionen auf \mathbb{R}^n , mit $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die glatten Funktionen mit kompaktem Träger. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet die Schwartzfunktionen und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet die Testfunktionen, d. h. Schwartzfunktionen mit kompaktem Träger. Die Menge der reellwertigen Funktionen in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet $\mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathbb{R}^n)$. Wir bezeichnen die Fouriertransformation von f mit \tilde{f} , definiert durch

$$\tilde{f}(p) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x) e^{ipx} d^n x. \quad (2.4)$$

2.2. Algebraische Quantenfeldtheorie

Wir nutzen den algebraischen Zugang zur Quantenfeldtheorie [Ha96]. In der algebraischen Quantenfeldtheorie (AQFT) betrachtet man Netze von C^* -Algebren $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ offen und beschränkt, die gewissen Axiomen genügen. Die selbstadjungierten Elemente in $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ werden als die \mathcal{O} lokalisierten Observablen interpretiert.

In dieser Arbeit werden wir nur Vakuumdarstellungen betrachten, d. h. man betrachtet das GNS-Tripel $(\pi, \mathcal{H}, \Omega)$ eines Vakuumzustandes² ω auf $\overline{\cup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}^{\|\cdot\|}$ und die von-Neumann-Algebren $\mathcal{M}(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}))''$.

Gegeben ein Netz von von-Neumann-Algebren $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{O})$; dann müssen einige Bedingungen erfüllt sein, wie Isotonie, Lokalität, Kovarianz, Spektrumsbedingung und Invarianz des Vakuumvektors, damit es eine sinnvolle physikalische Interpretation als Netz lokaler Observablen-Algebren in einer Vakuumdarstellung besitzt (siehe zum Beispiel [Ha96, Ba95]).

Betrachte ein Netz von von-Neumann-Algebren $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ auf einem gemeinsamen Hilbertraum \mathcal{H} , indiziert durch $\mathcal{O} \in \mathcal{J}$. Die selbstadjungierten Elemente von $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ werden als in \mathcal{O} lokalisierte Observable interpretiert. Wir fordern *Isotonie*

$$\mathcal{M}(\mathcal{O}_1) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O}_2) \quad \text{für } \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \quad (2.5)$$

und *Additivität*

$$\mathcal{M}(\cup_j \mathcal{O}_j) = \left(\cup_j \mathcal{M}(\mathcal{O}_j) \right)'' . \quad (2.6)$$

Damit in relativistischen Theorien das Kausalitätsprinzip gilt, fordern wir *Lokalität*

$$\mathcal{M}(\mathcal{O}_1) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{O}_2)' \quad \text{für } \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2' . \quad (2.7)$$

Außerdem fordern wir die Existenz einer stark stetigen, unitären Darstellung $U : \mathcal{P}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ der eigentlichen orthochronen Poincarégruppe und *Kovarianz* der lokalen Algebren

$$U(g)\mathcal{M}(\mathcal{O})U(g)^{-1} = \mathcal{M}(g\mathcal{O}), \quad g \in \mathcal{P}_+^\uparrow, \quad (2.8)$$

wobei $g\mathcal{O} = \{gx : x \in \mathcal{O}\}$.

Die Translationen $(\mathbb{R}^d, +)$ sind als Untergruppe in \mathcal{P}_+^\uparrow enthalten. Stabilität der Materie erfordert Positivität der Energie für alle Lorentzbeobachter, daher fordern wir die *Spektrumsbedingung*: Das Spektralmaß $E(p)$ mit $U(x) = \int e^{ixp} dE(p)$ erfüllt

$$\text{supp } dE(p) \subseteq \overline{V_+} . \quad (2.9)$$

²einem ausgezeichneten Zustand mit speziellen Eigenschaften wie Poincaré-Invarianz und Stabilität.

2. Grundlagen

Schließlich fordern wir die Existenz eines Vakuumvektors $\Omega \in \mathcal{H}$ mit der Reeh-Schlieder-Eigenschaft: Es gibt ein $\Omega \in \mathcal{H}$, mit $\|\Omega\| = 1$, so dass

$$U(g)\Omega = \Omega, \quad \forall g \in \mathcal{P}_+^\dagger, \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{M}(\mathcal{O})\Omega} = \mathcal{H}, \quad \text{für alle } \mathcal{O} \in \mathcal{J}, \quad (2.10)$$

d. h. Ω ist zyklisch für alle $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ mit $\mathcal{O} \in \mathcal{J}$. Für Gebiete \mathcal{O} mit nichtleerem kausalen Komplement folgt daraus, dass Ω auch separierend für $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ ist.

Ein Netz lokaler Algebren $(\{\mathcal{M}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{J}}, U, \Omega)$, das die Bedingungen (2.5)-(2.10) erfüllt, nennen wir eine *Vakuumdarstellung*.

2.3. Tomita-Takesaki Theorie

Sei \mathcal{M} eine von-Neumann-Algebra die auf einen Hilbertraum \mathcal{H} wirkt. Ein Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ heißt *zyklisch*, falls $\mathcal{M}\Omega$ dicht in \mathcal{H} ist und *separierend* falls $\mathcal{M}'\Omega$ dicht in \mathcal{H} ist. Die Tomita-Takesaki Theorie sichert die Existenz einer Automorphismengruppe auf \mathcal{M} und eines *-Antiisomorphismus der Algebra auf ihre Kommutante. Wir übernehmen hier die Darstellung in [Bo00, Abschn. I.3].

Theorem 2.1 (Tomita-Takesaki). *Sei \mathcal{M} eine von-Neumann-Algebra mit zyklischem und separierendem Vektor Ω , dann existieren der modulare Operator Δ und die modulare Konjugation J , so dass:*

1. Δ ist selbstadjungiert, positiv, invertierbar und

$$\Delta\Omega = \Omega \quad J\Omega = \Omega. \quad (2.11)$$

2. Die unitäre Gruppe $\{\Delta^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ definiert eine Automorphismengruppe σ_t von \mathcal{M} durch $\sigma_t(A) := \Delta^{it}A\Delta^{-it}$, genannt modulare Gruppe, so dass

$$\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

3. $A\Omega$ gehört für alle $A \in \mathcal{M}$ zum Definitionsbereich von $\Delta^{1/2}$.
4. J ist eine Konjugation, d. h. J ist antilinear und $J = J^* = J^{-1}$. Des Weiteren kommutiert J mit Δ^{it} , $\forall t$, und es gilt

$$J\Delta J^{-1} = \Delta^{-1}. \quad (2.13)$$

5. J bildet \mathcal{M} auf seine Kommutante ab

$$J\mathcal{M}J^{-1} = \mathcal{M}'. \quad (2.14)$$

6. Die Operatoren $S := J\Delta^{1/2}$ und $S^* := J\Delta^{-1/2}$ haben die Eigenschaften

$$\begin{aligned} SA\Omega &= A^*\Omega, & \forall A \in \mathcal{M}, \\ S^*A'\Omega &= A'^*\Omega, & \forall A' \in \mathcal{M}'. \end{aligned} \quad (2.15)$$

7. Für $A \in \mathcal{M}$ hat die vektorwertige Funktion $t \mapsto \Delta^{it}A\Omega$ eine analytische Fortsetzung in den Streifen $S(-\frac{1}{2}, 0) := \{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < \text{Im}(z) < 0\}$. Dies impliziert

$$\Delta^{i(t-i/2)}A\Omega = \Delta^{it}JA^*\Omega, \quad A \in \mathcal{M}. \quad (2.16)$$

Für $B \in \mathcal{M}'$ hat $t \mapsto \Delta^{it}B\Omega$ eine analytische Fortsetzung in $S(0, \frac{1}{2})$ und

$$\Delta^{i(t+i/2)}B\Omega = \Delta^{it}JB^*\Omega, \quad B \in \mathcal{M}'. \quad (2.17)$$

8. Für $A, B \in \mathcal{M}$ kann die Funktion $t \mapsto (\Omega, B\sigma^t(A)\Omega)$ in $S(-1, 0)$ analytisch fortgesetzt werden. Insbesondere ist die KMS-Bedingung erfüllt:

$$(\Omega, B\sigma_{t-i}(A)\Omega) = (\Omega, \sigma_t(A)B\Omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Beweise finden sich zum Beispiel in [BR87, Abschn. 2.5.2] oder [KR86, Abschn. 9.2], siehe auch die in [Bo00] zitierte Literatur.

Da $\{\Delta^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ eine einparametrische unitäre Gruppe ist, gibt es nach Stones Theorem einen selbstadjungierten Erzeuger $(A, \mathfrak{D}(A))$, so dass

$$\Delta^{it} = e^{itA}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall ist $A = \log(\Delta)$, siehe [KR86]. Mit Hilfe der Spektralzerlegung unbeschränkter Operatoren findet man ein Spektralmaß E von A . Für messbare Funktionen f ist $f(A) := \int f(\lambda)dE_\lambda$ definiert, und $\Psi \in \mathfrak{D}(f(A))$ genau dann, wenn $\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda \Psi, \Psi \rangle < \infty$. Für $\Psi \in \mathfrak{D}(f(A))$ gilt $\langle f(A)\Psi, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E_\lambda \Psi, \Phi \rangle$. Wir betrachten nun die analytische Fortsetzung von Δ^{it} in die komplexe Ebene

$$\Delta^{iz} := e^{izA} = \int_{\mathbb{R}} e^{iz\lambda} dE_\lambda.$$

Beachte, dass wir für $z = -i\mu$, mit $\mu \in \mathbb{R}$, Δ^μ erhalten. Aus der Tomita-Takesaki Theorie folgt (siehe 3. in Thm. 2.1), dass $\mathcal{M}\Omega \subset \mathfrak{D}(\Delta^{1/2})$ und

$$\langle \Delta^{1/2}\Psi, \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}\lambda} d\langle E_\lambda \Psi, \Psi \rangle < \infty \quad \text{für } \Psi \in \mathcal{M}\Omega. \quad (2.19)$$

Der Definitionsbereich von $\Delta^{1/4}$ ist

$$\mathfrak{D}(\Delta^{1/4}) = \left\{ \Psi : \int_{\mathbb{R}} |e^{\frac{1}{4}\lambda}|^2 d\langle E_\lambda \Psi, \Psi \rangle \right\} = \left\{ \Psi : \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}\lambda} d\langle E_\lambda \Psi, \Psi \rangle \right\}.$$

Zusammen mit Gleichung (2.19) erhalten wir

$$\mathcal{M}\Omega \subset \mathfrak{D}(\Delta^{1/4}). \quad (2.20)$$

2.4. Das Bisognano-Wichmann Theorem

Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{1+3}$ so gewählt, dass \mathcal{O}' nicht leer ist. Aus der Reeh-Schlieder-Eigenschaft des Vakuums folgt, dass in einer Vakuumdarstellung jedes Paar $(\mathcal{M}(\mathcal{O}), \Omega)$ die Voraussetzungen des Tomita-Takesaki Theorems erfüllt. Somit existieren Δ und J für jedes $\mathcal{M}(\mathcal{O})$.

Die Frage ist nun, ob diese Operatoren eine physikalische Interpretation besitzen. Sie konnte in [BW75] für Keilgebiete im Rahmen der Wightmanschen Quantenfeldtheorie [SW78] positiv beantwortet werden. Der rechten Keil W_r ist invariant unter der einparametrischen Gruppe der Lorentzboosts $\{\Lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$ (siehe (2.1)). Sei ϕ ein skalares, neutrales Wightmanfeld ([SW78]) und sei $\mathcal{P}(W_r)$ die *-Algebra aller Polynome $c + \sum_{j=1}^N \phi(f_1^{(j)}) \cdots \phi(f_j^{(j)})$, wobei $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante und $f_j^{(k)}$ Testfunktionen mit Träger in W_r . Definiere $\mathcal{R}(W_r)$ als die zu $\mathcal{P}(W_r)$ affilierte von-Neumann-Algebra, d. h. die von den Spektralfamilien der hermiteschen Elemente erzeugte von-Neumann-Algebra.

Theorem 2.2 (Bisognano-Wichmann). *Sei $\mathcal{R}(W_r)$ die mit dem rechten Keil assoziierte von-Neumann-Algebra. Die modulare Gruppe und die modulare Konjugation zu dem Paar $(\mathcal{R}(W_r), \Omega)$ sind gegeben durch*

$$\Delta_{W_r}^{it} = U(\Lambda(t)) , \quad (2.21)$$

$$J_{W_r} = \Theta U(R_{W_r}(\pi)) . \quad (2.22)$$

Hierbei ist Θ der PCT-Operator und $R_{W_r}(\pi)$ eine Rotation um den Winkel π um die 1-Achse. Außerdem gilt Keil-Dualität

$$\mathcal{R}(W_r') = \mathcal{R}(W_r)' . \quad (2.23)$$

Aus (2.21) folgt insbesondere, dass

$$\Delta = U(\Lambda(-i)) .$$

Der CPT-Operator Θ ist ein antiunitärer Operator, der die CPT-Symmetrie implementiert. Auf ein skalares Feld wirkt er gemäß

$$\Theta \phi(x) \Theta^{-1} = \phi^*(-x) .$$

2.5. Konstruktion lokaler Netze in zwei Dimensionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit zweidimensionalen Theorien. Alle Ergebnisse finden sich in [Bo92]. Borchers ist es gelungen, aus einer Keilalgebra³ und

³Die mit einem Keil (Doppelkegel) assoziierte Algebra wird im Folgenden kurz Keilalgebra (Doppelkegelalgebra) genannt.

einer Darstellung der Translationen, die die Spektrumsbedingung erfüllt, eine Vakuumdarstellung zu konstruieren (siehe auch [Bo00], [Le06], [BL04]). Zusätzlich erhält man CPT-Symmetrie und den CPT-Operator.

Definition 2.3. Wir nennen ein Tripel $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$, bestehend aus

- einer von-Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, die auf den Hilbertraum \mathcal{H} , mit $\dim \mathcal{H} > 1$, wirkt,
- einem Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$, zyklisch und separierend für \mathcal{M} ,
- einer stark stetigen, unitären Darstellung $U(a), a \in \mathbb{R}^2$, der Translationsgruppe $(\mathbb{R}^2, +)$,

eine rechte Standardkeilalgebra, falls:

- (a) $U(a)\Omega = \Omega$ für alle $a \in \mathbb{R}^2$,
- (b) U die Spektrumsbedingung (2.9) erfüllt,
- (c) für alle $a \in \overline{W_r}$ gilt $U(a)\mathcal{M}U(a)^{-1} \subset \mathcal{M}$.

Obwohl wir nur eine Darstellung der Translationen voraussetzen, zeigt das nächste Theorem, dass aus diesen Daten eine Darstellung der Poincarégruppe konstruiert werden kann.

Theorem 2.4 ([Bo92, Thm. III.1]). Sei $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ eine rechte Standardkeilalgebra und Δ, J die modularen Operatoren des Paares (\mathcal{M}, Ω) . Für den Lorentzboost

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \cosh(2\pi t) & -\sinh(2\pi t) \\ -\sinh(2\pi t) & \cosh(2\pi t) \end{pmatrix}$$

definiere

$$U(\Lambda(t)) := \Delta^{it}. \quad (2.24)$$

Dann induziert $\{U(\Lambda(t)), U(a) : t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^2\}$ eine Darstellung der zweidimensionalen Poincarégruppe \mathcal{P}_+^\uparrow , die die Spektrumsbedingung erfüllt und Ω als invarianten Vektor besitzt. Außerdem gilt

$$JU(a)J = U(-a). \quad (2.25)$$

Wir definieren außerdem die translatierten Algebren

$$\mathcal{M}(a) := U(a)\mathcal{M}U(-a) \quad a \in \mathbb{R}^2.$$

Dann ist $\mathcal{M}'(a)$ die Kommutante von $\mathcal{M}(a)$. Sei $D_{a,b}$ der Doppelkegel $D_{a,b} := \{a + W_r\} \cap \{b + W_l\}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $b \in a + W_r$.

Theorem 2.5 ([Bo92, Prop. III.3]). *Mit den genannten Voraussetzungen sei*

$$\mathcal{N}(D_{a,b}) := \mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}'(b) . \quad (2.26)$$

Dann definiert $\{\{\mathcal{N}(D)\}_{D \in \mathcal{K}}, U(\Lambda, a), \Omega\}$, wobei $U(\Lambda, a)$ die Darstellung der Poincarégruppe aus Thm. 2.4 ist, ein kovariantes, lokales Netz, das J als CPT-Operator besitzt.

Mittels Additivität erweitern wir dieses Netz auf allgemeine offene Gebiete $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}) := \left(\bigcup_{\mathcal{K} \ni D \subset \mathcal{O}} \mathcal{N}(D) \right)'' . \quad (2.27)$$

Bis auf die Reeh-Schlieder-Eigenschaft hat das Netz $\{\{\mathcal{N}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{J}}, U(\Lambda, a), \Omega\}$ alle Eigenschaften einer Vakuumdarstellung. Die lokalen Algebren sind als relative Kommutanten von Keilalgebren definiert. Daher ist der Fall, dass sie trivial sind, d. h. $\mathcal{N}(D) = \mathbb{C}\mathbf{1}$, nicht ausgeschlossen. Bedingungen, welche die Nichttrivialität der lokalen Algebren zur Folge haben, werden wir im nächsten Abschnitt aufstellen.

Nehmen wir zunächst an, dass die Algebren $\mathcal{N}(D)$ groß genug sind, indem wir fordern, dass das Vakuum für die C^* -Algebra

$$\mathcal{N} := \overline{\bigcup_{D \in \mathcal{K}} \mathcal{N}(D)}^{\|\cdot\|}$$

zyklisch sei.

Theorem 2.6 ([Bo92, Thm. III.5]). *Seien $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ eine rechte Standardkeilalgebra und $\{\{\mathcal{N}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}}, U(\Lambda, a), \Omega\}$ das kovariante, lokale Netz aus Thm. 2.5 und sei $\mathcal{N}\Omega$ dicht in \mathcal{H} . Dann gilt $\mathcal{N}(W_r) = \mathcal{M}$ und $\mathcal{N}(W_l) = \mathcal{M}'$, d. h. es gilt Keildualität. Außerdem gilt Dualität für Doppelkegel, d. h.*

$$\mathcal{N}(D') = \mathcal{N}(D)' , \quad \forall D \in \mathcal{K} .$$

2.6. Die Split-Eigenschaft für Keile

Im letzten Abschnitt wurde aus Standardkeilalgebra ein kovariantes, lokales Netz konstruiert. Jetzt erläutern wir eine hinreichende Bedingung, dass die so konstruierten lokalen Algebren nicht trivial sind. In [BL04] wurde gezeigt, dass die Split-Eigenschaft für Keile ein solches Kriterium ist. Für eine ausführliche Darstellung der Ergebnisse in diesem Abschnitt siehe auch [Le06, Abschn. 2.2].

Zunächst stellen wir fest, dass die algebraischen Eigenschaften einer rechten Standardkeilalgebra eingeschränkt sind.

Theorem 2.7 ([Lo79, Thm. 3]). Sei $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ eine Standardkeilalgebra, dann ist \mathcal{M} ein Faktor vom Typ III_1 in der Klassifikation von Connes.

Der triviale Fall $\mathcal{M} = \mathbb{C}\mathbf{1}$ ist hier ausgeschlossen, da wir $\dim \mathcal{H} > 1$ und Zyklizität des Vakuumvektors verlangt haben. Die Algebren $\mathcal{M}(a) := U(a)\mathcal{M}U(a)^{-1}$, $a \in W_r$, sind unitär äquivalent zu \mathcal{M} und somit auch Faktoren vom Typ III_1 .

Definition 2.8 ([DL84]).

i) Eine Inklusion zweier von-Neumann-Algebren $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ heißt split, falls ein Faktor \mathcal{N} vom Typ I existiert, so dass

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{M}_2. \quad (2.28)$$

ii) Eine Inklusion zweier von-Neumann-Algebren $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, die auf einen Hilbertraum \mathcal{H} wirken, heißt standard, falls ein Vektor in \mathcal{H} existiert, der zyklisch und separierend für \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und deren relative Kommutante $\mathcal{M}'_1 \cap \mathcal{M}_2$ ist.

iii) Ein lokales Netz hat die Split-Eigenschaft für Keile (Doppelkegel), falls für jede Inklusion von Keilen $W_1 \Subset W_2$ (Doppelkegeln $D_1 \Subset D_2$) die entsprechende Inklusion von Keilalgebren (Doppelkegelalgebren) split ist.

Im letzten Abschnitt wurden die lokalen Algebren $\mathcal{N}(D_{a,b}) = \mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b)'$ aus Schnitten von translatierten Keilalgebren gebildet. Aufgrund der Kovarianz unter Translationen genügt es die Nichttrivialität der relativen Kommutanten $\mathcal{M}(a)' \cap \mathcal{M}$ für $a \in W_r$ zu zeigen.

Theorem 2.9 ([BL04, Le06]). Sei $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ eine rechte Standardkeilalgebra mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in W_r$ die Inklusionen $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{M}$ split sind. Dann gilt:

- i) \mathcal{H} ist separabel.
- ii) \mathcal{M} ist isomorph zum eindeutigen hyperfiniten Typ III_1 -Faktor.
- iii) Die Inklusion $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{M}$, $a \in W_r$, ist standard.
- iv) Die relative Kommutante $\mathcal{M}(a)' \cap \mathcal{M}$, $a \in W_r$, ist isomorph zum eindeutigen hyperfiniten Typ III_1 -Faktor. Insbesondere hat diese Algebra zyklische Vektoren und ist deswegen nichttrivial.
- v) Der Vakuumvektor Ω ist zyklisch für alle lokalen Algebren $\mathcal{N}(\mathcal{O})$ (2.27), welche mit nichtleerem, offenem, beschränktem Gebiet \mathcal{O} assoziiert sind.

2. Grundlagen

Beweise für i)- iv) finden sich in [Le06, Prop. 2.2.3], für iv) siehe auch [BL04, Prop. 2.2]. Das Resultat v) wurde in [Le06, Prop. 2.2.6] bewiesen.

Punkt iv) aus Thm. 2.9 liefert das gesuchte Resultat, dass die Doppelkegelalgebren $\mathcal{N}(D_{a,b}) = \mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b)'$ nichttrivial sind. Punkt v) liefert die Reeh-Schlieder Eigenschaft und somit nach Thm 2.6 auch $\mathcal{N}(W_r) = \mathcal{M}$ und $\mathcal{N}(W_l) = \mathcal{M}'$.

Ist eine Standardkeilalgebra $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ gegeben, kann man jedem Keil $W \in \mathcal{W}$ eine von-Neumann-Algebra $\tilde{\mathcal{N}}(W)$ zuordnen:

$$\tilde{\mathcal{N}}(W_r + x) := \mathcal{M}(x), \quad \tilde{\mathcal{N}}(W_l + x) := \mathcal{M}(x)', \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Sind die Voraussetzungen von Thm. 2.9 erfüllt, gilt $\mathcal{N}(W) = \tilde{\mathcal{N}}(W)$ für alle $W \in \mathcal{W}$, siehe die obige Bemerkung zu Punkt v).

Das Netz $\mathcal{W} \ni W \mapsto \tilde{\mathcal{N}}(W)$ ist lokal und kovariant unter U , siehe [Le06, Lem. 2.1.2]. Wegen der Translationskovarianz und $J\mathcal{M}(x)'J = \mathcal{M}(-x)$ ist jede Inklusion von Keilalgebren für $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ mit $W_1 \Subset W_2$ äquivalent zu einer Inklusion $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{M}$ mit $a \in W_r$. Daher ist die Voraussetzung aus Thm. 2.9 äquivalent dazu, dass $\{\tilde{\mathcal{N}}(W)\}_{W \in \mathcal{W}}$ die Split-Eigenschaft für Keile erfüllt. Wir werden deswegen die Eigenschaft $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{M}$ ist split für alle $a \in W_r$ im Folgenden auch als Split-Eigenschaft für Keile bezeichnen.

In diesem Sinne ist die Split-Eigenschaft für Keile ein hinreichendes Kriterium für die Nichttrivialität der lokalen Algebren.

In [Mü98, Lemma 4.2] wurde außerdem gezeigt, dass unter den Voraussetzungen von Thm. 2.9 das Netz $D \mapsto \mathcal{N}(D)$ die Split-Eigenschaft für Doppelkegel erfüllt.

2.7. Die modulare Nuklearitätsbedingung

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass die Split-Eigenschaft für Keile ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von lokalen Observablen ist. Allerdings ist die geforderte Existenz interpolierender Typ I-Faktoren in konkreten Modellen nicht einfach zu zeigen. In diesem Abschnitt stellen wir ein handlicheres Kriterium vor, welches die Split-Eigenschaft für Keile impliziert.

Zunächst benötigen wir das Konzept einer nuklearen Abbildung.

Definition 2.10. *Ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen X und Y heißt nuklear, falls Folgen $\{x'_n\} \subset X'$ und $\{y_n\} \subset Y$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \|y_n\| < \infty$ existieren, so dass*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) y_n, \quad \forall x \in X.$$

Da $x'_n(\cdot)y_n$ eindimensionales Bild hat und $T_N = \sum_{n=1}^N x'_n(x)y_n$ in Norm gegen T konvergiert, ist jeder nukleare Operator kompakt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Sei $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ eine Inklusion zweier von-Neumann-Faktoren, die auf einen Hilbertraum \mathcal{H} wirken. Wir nehmen weiterhin an, dass Ω ein zyklischer und separierender Vektor für \mathcal{M}_2 ist und bezeichnen mit $\Delta_{\mathcal{M}_2}$ den modularen Operator von (\mathcal{M}_2, Ω) . Wir definieren die Abbildung

$$\Xi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2} : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{H}, \quad M \mapsto \Delta_{\mathcal{M}_2}^{1/4} M \Omega, \quad M \in \mathcal{M}_1. \quad (2.29)$$

Diese Abbildung ist beschränkt mit Norm $\|\Xi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}\| = 1$, denn $\|\Xi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(\mathbb{1})\| = \|\Omega\| = 1$ und für $M \in \mathcal{M}_1$ gilt

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\mathcal{M}_2}^{1/4} M \Omega\|^2 &= (\Delta_{\mathcal{M}_2}^{1/4} M \Omega, \Delta_{\mathcal{M}_2}^{1/4} M \Omega) = (M \Omega, \Delta_{\mathcal{M}_2}^{1/2} M \Omega) = (M \Omega, J M^* \Omega) \\ &\leq \|M\| \|M^*\| = \|M\|^2. \end{aligned}$$

In [BDL90a] wurde der folgende Zusammenhang der Split-Eigenschaft und der Abbildung $\Xi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$ gezeigt:

Theorem 2.11 ([BDL90a, Thm. 3.3]). *Sei $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ eine Inklusion zweier von Neumann-Faktoren, $\Omega \in \mathcal{H}$ zyklisch und separierend für \mathcal{M}_2 . Dann gilt:*

- i) *Wenn $\Xi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$ nuklear ist, dann ist $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ split.*
- ii) *Wenn $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ split ist, dann ist $\Xi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$ kompakt.*

Man beachte, dass Kompaktheit von $\Xi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$ notwendig aber nicht hinreichend für die Split-Eigenschaft ist. Insbesondere gibt es Beispiele in denen Kompaktheit gilt, aber die Split-Eigenschaft nicht erfüllt ist [BDL90a, Prop. 3.2].

Wir erhalten die Split-Eigenschaft für Keile, und somit die Nichttrivialität der Doppelkegelalgebren, wenn folgende Bedingung erfüllt ist (vgl. [BL04]).

Definition 2.12 ([BDL90a]). *Sei $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ eine rechte Standardkeilalgebra. Dann erfüllt $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ die modulare Nuklearitätsbedingung, wenn die Abbildungen*

$$\Xi_a : M \mapsto \Delta^{1/4} U(a) M \Omega, \quad M \in \mathcal{M}, \quad (2.30)$$

für alle $a \in W_r$ nuklear sind.

Beachte, dass die Abbildung Ξ_a gerade $\Xi_{\mathcal{M}(a), \mathcal{M}}$ entspricht.

In [BL04] wurde gezeigt, dass die modulare Nuklearitätsbedingung für ein freies, massives bosonisches Feld erfüllt ist. In [Le06] wurde die modulare Nuklearitätsbedingung für eine große Klasse von Modellen mit faktorisierender S-Matrix nachgewiesen. Die Beziehungen zwischen modularer Nuklearität und Energie-Nuklearität [BW86] wurden in [BDL90b] untersucht.

Wir können die Ergebnisse der letzten Abschnitte zusammenfassen zu

2. Grundlagen

Theorem 2.13. Sei $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ eine rechte Standardkeilalgebra, welche die modulare Nuklearitätsbedingung erfüllt. Dann ist $\{\mathcal{N}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{J}}, U(\Lambda, a), \Omega\}$ eine Vakuumdarstellung, d. h. (2.5)-(2.10) sind erfüllt. Für allgemeine offene Gebiete $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ gilt:

- $\mathcal{N}(W_r) = \mathcal{M}$,
- für jeden Doppelkegel D ist $\mathcal{N}(D)$ isomorph zum eindeutigen hyperfiniten Typ III₁-Faktor, insbesondere ist $\mathcal{N}(D)$ nichttrivial,
- $\{\mathcal{N}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \subset \mathbb{M}}$ besitzt die Split-Eigenschaft für Keile,
- $\{\mathcal{N}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \subset \mathbb{M}}$ besitzt die Split-Eigenschaft für Doppelkegel,
- $\{\mathcal{N}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \subset \mathbb{M}}$ erfüllt Dualität für Keile, d. h. $\mathcal{N}(W_r)' = \mathcal{N}(W_l)$,
- $\{\mathcal{N}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \subset \mathbb{M}}$ erfüllt Dualität für Doppelkegel, d. h. $\mathcal{N}(D)' = \mathcal{N}(D')$,
- $\{\mathcal{N}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \subset \mathbb{M}}$ besitzt J als CPT-Operator.

3. Das verallgemeinerte freie Feld

In diesem Kapitel wird das zu untersuchende Modell im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie definiert. Eine rechte Standardkeilalgebra wird konstruiert und die modulare Gruppe explizit angegeben.

3.1. Die Weylalgebra

Wir wollen das Modell des skalaren, neutralen, bosonischen, verallgemeinerten freien Feldes in zwei Dimensionen im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie konstruieren.

Betrachte die Klein-Gordon-Gleichung zur Masse m für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$(\square + m^2)f = 0 . \quad (3.1)$$

Der avancierte und der retardierte Propagator $D_m^{\text{avc}}, D_m^{\text{ret}} : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sind Fundamentallösungen der inhomogenen Klein-Gordon-Gleichung. Schreibe

$$(D_m^{\text{avc/ret}} f)(x) = \int D_m^{\text{avc/ret}}(x-y)f(y)dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

dann erfüllen die Integralkerne $D_m^{\text{avc/ret}}(x)$

$$\begin{aligned} (\square + m^2)D_m^{\text{avc/ret}}(x) &= \delta(x), \\ D_m^{\text{ret}}(x) &= 0 \quad \text{für } x_0 < 0, \quad D_m^{\text{avc}}(x) = 0 \quad \text{für } x_0 > 0. \end{aligned}$$

Es gilt

$$D_m^{\text{ret}}(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint dp_1 dp_0 \frac{e^{-ipx}}{(p^0 \pm i\varepsilon)^2 - (p^1)^2 - m^2}. \quad (3.2)$$

Wir definieren die Pauli-Jordan-Distribution D_m durch

$$D_m := D_m^{\text{ret}} - D_m^{\text{avc}}.$$

Aus (3.2) ergibt sich die Integraldarstellung des Integralkerns

$$D_m(x) = \frac{i}{2\pi} \int d^2p e^{-ipx} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2). \quad (3.3)$$

3. Das verallgemeinerte freie Feld

Das verallgemeinerte freie Feld wird durch ein positives, temperiertes Maß μ mit Träger in \mathbb{R}_+ charakterisiert. Es beschreibt die Massenverteilung des Modells und wird Lehmann-Maß genannt. Im Fall eines Dirac-Maßes bzw. $d\mu(m) = \delta(m - m_0)dm$ erhalten wir das skalare, neutrale, freie Feld zur Masse m_0 .

Definition 3.1. *Definiere für $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathbb{R}^2)$ eine Bilinearform durch*

$$\sigma(f_1, f_2) := \frac{1}{2i} \int d\mu(m) \iint \frac{1}{i} D_m(x - y) f_1(x) f_2(y) d^2x d^2y . \quad (3.4)$$

Wegen (3.3) gilt

$$\begin{aligned} \sigma(f_1, f_2) = \frac{1}{2i} \int d\mu(m) \int dp \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m^2}} & \left(\widetilde{f}_1(-\sqrt{p^2 + m^2}, -p) \widetilde{f}_2(\sqrt{p^2 + m^2}, p) \right. \\ & \left. - \widetilde{f}_1(\sqrt{p^2 + m^2}, p) \widetilde{f}_2(-\sqrt{p^2 + m^2}, -p) \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

und hieraus folgt sofort, dass σ antisymmetrisch ist, $\sigma(f_1, f_2) = -\sigma(f_2, f_1)$. Die antisymmetrische Bilinearform σ ist auf dem reellen Vektorraum

$$\mathbf{S} := \mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathbb{R}^2) / \ker(\sigma) \quad (3.6)$$

nicht entartet, also eine symplektische Form.

Die Weylalgebra $\mathcal{W}(\mathbf{S}, \sigma)$ kann nun wie folgt konstruiert werden.

Theorem 3.2 ([BR97, Thm. 5.2.8.]). *Sei \mathbf{S} ein reeller Vektorraum, der mit einer symplektischen Form σ ausgestattet sei. Dann existiert eine bis auf *-Isomorphismen eindeutige C^* -Algebra $\mathcal{W}(\mathbf{S}, \sigma)$, die von Elementen $W(f)$, $f \in \mathbf{S}$, erzeugt wird, welche folgende Bedingungen erfüllen:*

1. $W(-f) = W(f)^*$,
2. $W(f)W(g) = e^{-i\sigma(f,g)/2} W(f+g)$ für alle $f, g \in \mathbf{S}$.

Außerdem gilt $W(0) = \mathbf{1}$, $W(f)$ ist unitär für alle $f \in \mathbf{S}$ und $\|W(f) - \mathbf{1}\| = 2$, falls $f \in \mathbf{S}$ nicht Null ist. Ist T ein reell-linearer, invertierbarer Operator auf \mathbf{S} , so dass $\sigma(Tf, Tg) = \sigma(f, g)$ für alle $f, g \in \mathbf{S}$, dann existiert ein eindeutiger *-Automorphismus α auf $\mathcal{W}(\mathbf{S}, \sigma)$, so dass

$$\alpha(W(f)) = W(Tf) .$$

Ersetzen wir nun $\varepsilon(p_0)$ in der Integraldarstellung von $\frac{1}{i} D_m$ durch 1 und definieren

$$\begin{aligned} \tau(f_1, f_2) &:= \frac{1}{2} \int d\mu(m) \iint d^2x d^2y \frac{1}{2\pi} \int d^2p \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)} f_1(x) f_2(y) \\ &= \frac{1}{2} \int d\mu(m) \int dp \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \left(\widetilde{f}_1(-\sqrt{p^2 + m^2}, -p) \widetilde{f}_2(\sqrt{p^2 + m^2}, p) \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{f}_1(\sqrt{p^2 + m^2}, p) \widetilde{f}_2(-\sqrt{p^2 + m^2}, -p) \right) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dann ist τ eine positive, symmetrische Bilinearform $\tau : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Aus Dreiecks- und Hölderungleichung folgt, dass für $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$ die Ungleichung

$$|\sigma(f_1, f_2)| \leq \tau(f_1, f_1)^{1/2} \tau(f_2, f_2)^{1/2} \quad (3.8)$$

gilt. In diesem Fall ist $e^{-\tau(f,f)/4}$ das erzeugende Funktional eines regulären Zustands¹ ω_τ auf $\mathscr{W}(\mathcal{S}, \sigma)$ [BW92, Lemma 8.2.8]. Wir können daher durch τ einen regulären Zustand ω_τ auf $\mathscr{W}(\mathcal{S}, \sigma)$ definieren,

$$\omega_\tau(W(f)) := e^{-\tau(f,f)/4}, \quad \text{für alle } f \in \mathcal{S}, \quad (3.9)$$

die Wirkung auf beliebige Elemente in $\mathscr{W}(\mathcal{S}, \sigma)$ ist durch Linearität und Stetigkeit bestimmt.

Wir können nun außerdem einen (kanonischen) „Ein-Feld Hilbertraum“ \mathcal{H} konstruieren.

Theorem 3.3 ([KW91, Prop. 3.1]). *Sei \mathcal{S} ein reeller Vektorraum, der mit einer symplektischen Form σ und einer positiven, symmetrischen Bilinearform τ ausgestattet sei, welche Gleichung (3.8) erfüllen. Dann existieren ein komplexer Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und eine reell-lineare Abbildung $K : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$, so dass*

1. $K\mathcal{S} + iK\mathcal{S}$ dicht in \mathcal{H} ist,
2. $\tau(f_1, f_2) = \operatorname{Re}\langle Kf_1, Kf_2 \rangle$, für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$,
3. $\sigma(f_1, f_2) = \operatorname{Im}\langle Kf_1, Kf_2 \rangle$, für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$.

Das Paar (K, \mathcal{H}) ist bis auf Äquivalenz eindeutig festgelegt. Wir sagen (K', \mathcal{H}') ist äquivalent zu (K, \mathcal{H}) , falls ein Isomorphismus $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ existiert, so dass $UK = K'$.

Lemma 3.4. *Seien σ, τ die Abbildungen aus (3.4), (3.7) und das Lehmann-Maß μ ein reguläres Borel-Maß ohne singulär stetigen Anteil. Sei $\mathcal{H}_m := L^2(H_m, d\Omega_m)$. Dann sind das direkte Integral*

$$\mathcal{H} := \int^\oplus \mathcal{H}_m d\mu(m)$$

mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int d\mu(m) \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_m}$ und

$$K : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}, \quad f \mapsto \tilde{f},$$

das zu $\sigma, \mathcal{S}, \tau$ gehörige Paar (K, \mathcal{H}) aus Thm. 3.3.

¹d. h. $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \omega_\tau(W(\lambda f))$ ist stetig für alle $f \in \mathcal{S}$.

3. Das verallgemeinerte freie Feld

Beweis. Da für $f, g \in \mathcal{S}$ gilt

$$\langle Kf, Kg \rangle = \int d\mu(m) \int \frac{dp}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \overline{\tilde{f}(\sqrt{p^2 + m^2}, p)} \tilde{g}(\sqrt{p^2 + m^2}, p),$$

sieht man sofort, dass $\text{Im}\langle Kf, Kg \rangle = \sigma(f, g)$ und $\text{Re}\langle Kf, Kg \rangle = \tau(f, g)$.

Die Lebesgue-Zerlegung von μ in absolut stetigen und singulären Anteil sei

$$d\mu(m) = \rho(m^2)dm^2 + d\nu(m).$$

Der singuläre Anteil ist rein atomar und nimmt die Form $d\nu(m) = \sum_i c_i \delta_{m_i}(m)$ an, wobei δ_{m_i} das Dirac-Maß bzgl. m_i ist und die $c_i > 0$ polynomial beschränkt sind.

Sei $\Psi \in (KS)^\perp$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass $\Psi \equiv 0$ folgt. Die Zerlegung des Skalarprodukts in absolut stetigen und singulären Anteil schreiben wir

$$0 = \langle \Psi, Kf \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Psi, Kf \rangle_\rho + \langle \Psi, Kf \rangle_\nu, \quad \forall f \in \mathcal{S}. \quad (3.10)$$

Da $\langle \Psi, Kf \rangle_\rho = -\langle \Psi, Kf \rangle_\nu \neq 0$ nicht für alle $f \in \mathcal{S}$ gelten kann, verschwinden beide Anteile.

Betrachte zunächst den absolut stetigen Anteil. Da \mathcal{S} invariant unter Translationen ist, betrachte die translatierte Funktion $f_a(x) := f(x - a)$, $a \in \mathbb{R}^2$. In Lichtkegel-Koordinaten p_\pm lässt sich das Skalarprodukt schreiben als

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Psi, Kf_a \rangle_\rho = \int dm^2 \rho(m^2) \langle \Psi, Kf_a \rangle_{\mathcal{H}_m} \\ &= \int dm^2 \rho(m^2) \frac{dp}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \overline{\Psi(p, m)} \tilde{f}_a(\sqrt{p^2 + m^2}, p) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dp_+ dp_- \rho(p_+ p_-) \chi_{V_+}(p_+, p_-) \overline{\Psi(p_+, p_-)} \hat{f}(p_+, p_-) e^{ip_+ a_+ + ip_- a_-}, \end{aligned}$$

wobei hier χ_{V_+} die charakteristische Funktion von V_+ bezeichnet. Wegen $\Psi \in \mathcal{H}$ gilt $\sqrt{\rho} \chi_{V_+} \overline{\Psi} \in L^2(\mathbb{R}^2, dp_+ dp_-)$, und da außerdem $\sqrt{\rho} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, folgt, dass der Integrand in L^1 liegt und daher das Fourierintegral existiert. Da allerdings die Fouriertransformierte für alle $a \in \mathbb{R}^2$ verschwindet, folgt

$$\rho(p_+ p_-) \chi_{V_+}(p_+, p_-) \overline{\Psi(p_+, p_-)} \hat{f}(p_+, p_-) = 0, \quad d^2p\text{-fast überall.}$$

Dies bedeutet aber

$$\Psi(p_+, p_-) = 0 \quad \text{für alle } (p_+, p_-) \text{ mit } p_+ p_- \in \text{supp } \rho. \quad (3.11)$$

Betrachte nun den singulären Anteil, wähle $a_0 = 0$, $a_1 = a$,

$$\begin{aligned} 0 = \langle \Psi, K f_a \rangle_\nu &= \int d\nu(m) \int dp \frac{\overline{\Psi(p, m)}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \tilde{f}(\sqrt{p^2 + m^2}, p) e^{-ipa} \\ &= \sum_i c_i \int dp \frac{\overline{\Psi(p, m_i)}}{\sqrt{p^2 + m_i^2}} \tilde{f}(\sqrt{p^2 + m_i^2}, p) e^{-ipa} \\ &= \sum_i c_i \widetilde{\Phi_{m_i}}(a), \end{aligned}$$

wobei $\Phi_{m_i}(p) := \frac{\overline{\Psi(p, m_i)}}{\sqrt{p^2 + m_i^2}} \tilde{f}(\sqrt{p^2 + m_i^2}, p) \in L^1(\mathbb{R}, dp)$. Damit die Summe verschwindet für alle $f \in \mathcal{S}$, muss $\widetilde{\Phi_{m_i}}(a) \equiv 0$ für alle m_i gelten. Aufgrund der Eindeutigkeit der Fouriertransformation folgt

$$\Psi(p, m_i) = 0 \quad \text{für alle } m_i \in \text{supp } \nu. \quad (3.12)$$

Aus (3.11) und (3.12) folgt

$$\Psi \equiv 0 \quad d\mu\text{-fast überall.}$$

□

Wir bilden nun den Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ über dem Ein-Feld Hilbertraum \mathcal{H} und erhalten die Fockdarstellung der Weylalgebra.

Definition 3.5. Der symmetrische Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ über \mathcal{H} ist definiert als

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Sym}(\mathcal{H}^{\otimes n}),$$

die orthogonale Projektion Sym ist definiert durch

$$\text{Sym}(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P(n)} \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}, \quad \psi_i \in \mathcal{H}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Das Skalarprodukt (\cdot, \cdot) von $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ ist für $\Psi = \bigoplus_n \Psi_n$, $\Phi = \bigoplus_n \Phi_n$ mit $\Psi_n \in \text{Sym}\mathcal{H}^{\otimes n}$, $\Phi_n \in \text{Sym}\mathcal{H}^{\otimes n}$ definiert durch $(\Psi, \Phi) := \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi_n, \Phi_n)_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$.

Für jeden Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ definieren wir einen kohärenten Vektor $\eta(\psi)$ in $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ durch

$$\eta(\psi) := 1 \oplus \frac{1}{\sqrt{2}} \psi \oplus \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2!}} \psi^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n!}} \psi^{\otimes n} \oplus \cdots$$

3. Das verallgemeinerte freie Feld

Diese Vektoren haben die Eigenschaft

$$(\eta(\psi), \eta(\phi)) = e^{\frac{1}{2}\langle \psi, \phi \rangle},$$

und es gilt, siehe [Bo96, Lemma I.2.3]

$$\{\eta(\psi) : \psi \in \mathcal{H}\} \text{ ist total in } \mathcal{F}(\mathcal{H}).$$

Theorem 3.6. *Definiere Operatoren $\pi(W(f))$, genannt Weyloperatoren, auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, $f \in \mathcal{S}$, $\psi \in \mathcal{H}$ durch*

$$\pi(W(f))\eta(\psi) := e^{-\frac{1}{4}\|Kf\|^2 - \frac{1}{2}\langle Kf, \psi \rangle} \eta(Kf + \psi).$$

Dann ist π eine Darstellung von $\mathscr{W}(\mathcal{S}, \sigma)$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ und $(\pi, \mathcal{F}(\mathcal{H}), \eta(0))$ ist unitär äquivalent zum GNS-Tripel von $\mathscr{W}(\mathcal{S}, \sigma)$ bezüglich ω_τ .

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $\pi(W(f))$ unitär ist. Seien $f \in \mathcal{S}$, $\phi, \psi \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} & \left(\pi(W(f))\eta(\phi), \pi(W(f))\eta(\psi) \right) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|Kf\|^2 - \frac{1}{2}\overline{\langle Kf, \phi \rangle} - \frac{1}{4}\|Kf\|^2 - \frac{1}{2}\langle Kf, \psi \rangle} \left(\eta(Kf + \phi), \eta(Kf + \psi) \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\|Kf\|^2 - \langle \phi, Kf \rangle - \langle Kf, \psi \rangle)} e^{\frac{1}{2}\langle Kf + \phi, Kf + \psi \rangle} = e^{\frac{1}{2}\langle \phi, \psi \rangle} = \left(\eta(\phi), \eta(\psi) \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Daher ist $\pi(W(f))$ eine Isometrie, welche eine totale Menge auf eine totale Menge abbildet. Also ist $\pi(W(f))$ surjektiv und somit unitär. Man zeigt ebenso, dass $\pi(W(f))^* = \pi(W(f)^*) = \pi(W(-f))$.

Betrachte nun

$$\begin{aligned} \pi(W(f))\pi(W(g))\eta(\phi) &= e^{-\frac{1}{4}(\|Kf\|^2 + \|Kg\|^2) - \frac{1}{2}\langle Kf, Kg \rangle - \frac{1}{2}\langle Kf + Kg, \phi \rangle} \eta(Kf + Kg + \phi) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|Kf + Kg\|^2 - \frac{1}{4}(\langle Kf, Kg \rangle - \langle Kg, Kf \rangle) - \frac{1}{2}\langle Kf + Kg, \phi \rangle} \eta(Kf + Kg + \phi) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f, g)} \pi(W(f + g))\eta(\phi) = \pi(W(f)W(g))\eta(\phi). \end{aligned}$$

$\pi(W(f))$ erfüllt somit die algebraischen Relationen. π kann so auf ganz $\mathscr{W}(\mathcal{S}, \sigma)$ fortgesetzt werden, dass π ein *-Homomorphismus ist.

Um zu zeigen, dass $(\pi, \mathcal{F}(\mathcal{H}), \eta(0))$ unitär äquivalent zum GNS-Tripel ist, betrachte

$$\begin{aligned} (\eta(0), \pi(W(f))\eta(0)) &= e^{-\frac{1}{4}\|Kf\|^2} (\eta(0), \eta(Kf)) = e^{-\frac{1}{4}\|Kf\|^2} \\ &= e^{-\frac{1}{4}\tau(f, f)} = \omega_\tau(W(f)). \end{aligned}$$

Somit ist der Zustand ω_τ in der Darstellung $(\pi, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$ durch den Vektor $\eta(0)$ gegeben. Es bleibt zu zeigen, dass $\eta(0)$ zyklisch für $\pi(\mathscr{W}(\mathcal{S}, \sigma))$ ist. Aus $\pi(W(f))\eta(0) =$

$e^{-\frac{1}{4}\|Kf\|^2} \eta(Kf)$ folgt, dass $\{\pi(W(f))\eta(0) : f \in \mathcal{S}\}$ und $\{\eta(Kf) : f \in \mathcal{S}\}$ dieselbe lineare Hülle haben. Aus Lemma 2.9 und Lemma 2.11 in [Gu08] folgt, dass der Normabschluss der linearen Hülle von $\{\eta(Kf) : f \in \mathcal{S}\}$ alle Vektoren der Form $\text{Sym}(Kf_1 \otimes \cdots \otimes Kf_n)$, für $f_i \in \mathcal{S}$, enthält. Da $K\mathcal{S}$ dicht in \mathcal{H} ist, folgt die Zyklizität von $\eta(0)$. Vgl. [KW91, Lemma A.2.]. \square

3.2. Lokale Algebren und Standardkeilalgebra

Wir betrachten im Folgenden nur noch die Darstellung von $\mathscr{W}(\mathcal{S}, \sigma)$ aus Thm. 3.6 in die beschränkten Operatoren des Fockraums. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir daher $W(f)$ statt $\pi(W(f))$ und $\Omega := \eta(0)$.

Die lokalen von-Neumann-Algebren sind für offene Gebiete $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathcal{M}(\mathcal{O}) := \{W(f) : f \in \mathcal{S}, \text{supp } f \subset \mathcal{O}\}'' . \quad (3.14)$$

Wir definieren eine Darstellung der Translationen.

Lemma 3.7. *Die stetige Fortsetzung von*

$$U(a)\eta(Kf) := \eta(KT_a f) , \quad (T_a f)(x) := f(x - a) , \quad a \in \mathbb{R}^2, f \in \mathcal{S} , \quad (3.15)$$

definiert eine stetige unitäre Darstellung der Translationen auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Diese Darstellung erfüllt die Spektrumsbedingung und es gilt $U(a)\Omega = \Omega$ für alle $a \in \mathbb{R}^2$. Die lokalen Algebren sind kovariant unter der Wirkung von U :

$$U(a)\mathcal{M}(\mathcal{O})U(a)^{-1} = \mathcal{M}(\mathcal{O} + a) . \quad (3.16)$$

Beweis. Aus (3.5), (3.7) und den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt $\sigma(T_a f, T_a g) = \sigma(f, g)$ und $\tau(T_a f, T_a g) = \tau(f, g)$. Somit gilt

$$\langle KT_a f, KT_a g \rangle = \langle Kf, Kg \rangle . \quad (3.17)$$

Das heißt $Kf \mapsto KT_a f$ ist isometrisch auf der dichten Teilmenge $K\mathcal{S} + iK\mathcal{S}$. Da diese auf sich selbst abgebildet wird, kann diese Abbildung zu einem unitären Operator $u(a)$ auf \mathcal{H} fortgesetzt werden. Durch $U(a)\eta(\psi) := \eta(u(a)\psi)$ ist U nun auf der linearen Hülle von $\{\eta(\psi), \psi \in \mathcal{H}\}$ definiert. Für $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ gilt dann

$$\begin{aligned} (U(a)\eta(\psi), U(a)\eta(\phi)) &= (\eta(u(a)\psi), \eta(u(a)\phi)) = e^{\frac{1}{2}\langle u(a)\psi, u(a)\phi \rangle} = e^{\frac{1}{2}\langle \psi, \phi \rangle} \\ &= (\eta(\psi), \eta(\phi)) . \end{aligned}$$

Da $\{\eta(\psi), \psi \in \mathcal{H}\}$ eine totale Menge in $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ ist und $U(a)$ diese auf sich selbst abbildet, ist $U(a)$ unitär.

Die Invarianz von $\Omega = \eta(0)$ ist offensichtlich.

3. Das verallgemeinerte freie Feld

Den Beweis der Spektrumsbedingung für eine Masse m findet man in [RS75, Thm. X.42], die Verallgemeinerung für Massenspektrum $d\mu(m)$ ist analog, da $d\mu(m) \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) d^2p$ Träger in $\overline{V_+}$ hat.

Die folgende Rechnung zeigt $U(a)W(f)U(-a) = W(T_a f)$, für alle $f \in \mathcal{S}$, hieraus folgt die Kovarianz der lokalen Algebren unter Translationen (3.16).

$$\begin{aligned} U(a)W(f)U(-a)\eta(Kg) &= U(a)W(f)\eta(KT_{-a}g) \\ &= U(a)e^{-\frac{1}{4}\|Kf\|^2 - \frac{1}{2}\langle Kf, KT_{-a}g \rangle} \eta(KT_{-a}g + Kf) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|Kf\|^2 - \frac{1}{2}\langle Kf, KT_{-a}g \rangle} \eta(Kg + KT_a f) \\ &= W(T_a f)\eta(Kg), \end{aligned}$$

der letzte Schritt erfolgte mit Hilfe von (3.17). \square

Lemma 3.8. *Sei \mathcal{O} ein offenes Gebiet mit nichtleerem kausalen Komplement. Dann ist Ω zyklisch und separierend für $\mathcal{M}(\mathcal{O})$, d. h. Ω besitzt die Reeh-Schlieder-Eigenschaft.*

Beweis. Dies folgt aus Additivität, Translationskovarianz und Spektrumsbedingung mit Hilfe des Edge-of-the-Wedge Theorems, siehe Thm. 1.3.2 und 1.3.3 in [Ba95]. \square

Die lokale Algebra des rechten Keils W_r ist definiert durch

$$\mathcal{M}(W_r) := \{W(f) : f \in \mathcal{S}, \text{supp } f \subset W_r\}'' . \quad (3.18)$$

Für den rechten Keil gilt $W_r + a \subset W_r, \forall a \in \overline{W_r}$, daher gilt

$$U(a)\mathcal{M}(W_r)U(a)^{-1} \subset \mathcal{M}(W_r), \quad \forall a \in \overline{W_r} . \quad (3.19)$$

Zusammen mit den Lemmata 3.7, 3.8 ergibt sich

Theorem 3.9. $\{\mathcal{M}(W_r), U, \Omega\}$ ist eine rechte Standardkeilalgebra.

Theorem 3.10. *Die lokalen Algebren $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ erfüllen außerdem die Lokalisierungsbedingung*

$$\mathcal{M}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{M}(\mathcal{O}_2)' \quad \text{für} \quad \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' .$$

Für die Keilalgebren gilt sogar Dualität

$$\mathcal{M}(W_r)' = \mathcal{M}(W_l) .$$

Beweis. Der Beweis der Lokalität findet sich zum Beispiel in [Bo96, Lemma I.2.2.]. Zum Beweis der Dualität für Keile siehe [GY00, Prop. IV.1]. \square

3.3. Modulare Gruppe der rechten Keilalgebra

Um die Ergebnisse aus Kapitel 2 auf $\{\mathcal{M}(W_r), U, \Omega\}$ anwenden zu können, müssen wir noch die modularen Operatoren von $\{\mathcal{M}(W_r), \Omega\}$ berechnen.

Betrachte die Boosts in den Keil, d. h. die Abbildungen $B(t) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, mit $t \in \mathbb{R}$,

$$(B(t)f)(x) := f \left(\begin{pmatrix} \cosh(2\pi t) & -\sinh(2\pi t) \\ -\sinh(2\pi t) & \cosh(2\pi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right). \quad (3.20)$$

Lemma 3.11. *Definiere auf $K\mathbb{S}$ den Operator $u(B(t))$ durch*

$$u(B(t))Kf = KB(t)f \quad \text{für alle } f \in \mathbb{S}, t \in \mathbb{R}, \quad (3.21)$$

dann kann dieser stetig auf \mathcal{H} fortgesetzt werden und ist unitär.

Beweis. Wir zeigen, dass $u(B(t))$ isometrisch auf $K\mathbb{S}$ ist. Schreibe $(B(t)f)(x) = f(\Lambda(t)x)$. Man rechnet leicht nach, dass für das Minkowskiprodukt gilt

$$p\Lambda(t)x = \Lambda(-t)px, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt für die Fouriertransformation

$$\widehat{(B(t)f)}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint d^2x f(\Lambda(t)x) e^{ip \cdot x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint d^2x f(x) e^{i\Lambda(t)p \cdot x} = \tilde{f}(\Lambda(t)p).$$

Außerdem sieht man leicht, dass das Maß $\frac{d\mu(m)dp}{2\sqrt{p^2+m^2}}$ invariant ist unter $p \mapsto \Lambda(t)p$, für alle $t \in \mathbb{R}$. Seien $f, g \in \mathbb{S}$, dann ist

$$\begin{aligned} \langle u(B(t))Kf, u(B(t))Kg \rangle &= \langle KB(t)f, KB(t)g \rangle \\ &= \iint \frac{d\mu(m)dp}{2\sqrt{p^2+m^2}} \overline{\widehat{(B(t)f)}(\sqrt{p^2+m^2}, p)} \widehat{(B(t)g)}(\sqrt{p^2+m^2}, p), \end{aligned}$$

mit der Substitution $p \mapsto \Lambda(-t)p$ folgt

$$\begin{aligned} &= \iint \frac{d\mu(m)dp}{2\sqrt{p^2+m^2}} \overline{\tilde{f}(\sqrt{p^2+m^2}, p)} \tilde{g}(\sqrt{p^2+m^2}, p) \\ &= \langle Kf, Kg \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist $u(B(t))$ isometrisch auf $K\mathbb{S} + iK\mathbb{S}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und bildet diese Menge auf sich selbst ab. Daher kann u unitär auf \mathcal{H} fortgesetzt werden. \square

Wir benötigen noch

3. Das verallgemeinerte freie Feld

Lemma 3.12 ([KR86, Lemma 9.2.17]). *Sei Ω ein zyklischer und separierender Vektor einer von-Neumann-Algebra \mathcal{M} , sei $\{\alpha_t\}$ eine einparametrische Gruppe von Automorphismen von \mathcal{M} und sei $\mathcal{M} = \mathcal{A}''$, wobei \mathcal{A} eine selbstadjungierte Unteralgebra von \mathcal{M} sei mit folgender Eigenschaft: Gegeben $A, B \in \mathcal{A}$, dann existiert eine komplexwertige Funktion $F_{A,B}$, beschränkt und stetig auf $\overline{S(-1,0)}$, analytisch in $S(-1,0)$, so dass*

$$F_{A,B}(t) = (\Omega, A\alpha_t(B)\Omega), \quad F_{A,B}(t-i) = (\Omega, \alpha_t(B)A\Omega), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Dann ist $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$ die modulare Gruppe von (\mathcal{M}, Ω) .

Mit Hilfe von Lemma 3.12 zeigen wir nun (vgl. [GY00])

Theorem 3.13. *Die modulare Gruppe von $(\mathcal{M}(W_r), \Omega)$ ist gegeben durch*

$$\Delta^{it}\eta(\psi) = \eta(u(B(t))\psi), \quad \psi \in \mathcal{H}, t \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Beweis. Nach Lemma 3.12 genügt es zu zeigen, dass

$$\alpha_t := \text{ad } U(B(t))$$

mit $U(B(t))\eta(\psi) := \eta(u(B(t))\psi)$ eine Automorphismengruppe von $\mathcal{M}(W_r)$ erzeugt, welche Bedingung (3.22) für alle Weyloperatoren erfüllt. Zur Vereinfachung der Notation werden wir im Folgenden nicht zwischen \tilde{f} und Kf unterscheiden.

Zeigen wir zunächst, dass $\text{ad } U(B(t))$ eine Automorphismengruppe von $\mathcal{M}(W_r)$ ist. Die Operatoren $U(B(t))$, $t \in \mathbb{R}$, besitzen folgende Eigenschaften:

$$U(B(t))^* = U(B(-t)) \quad (3.24)$$

$$\langle \tilde{f}, \widetilde{B(-t)g} \rangle = \langle \widetilde{B(t)f}, \tilde{g} \rangle \quad (3.25)$$

$$U(B(t))U(B(s)) = U(B(t+s)). \quad (3.26)$$

Seien $f \in \mathfrak{S}$ mit $\text{supp } f \subset W_r$ und $g \in \mathfrak{S}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_t(W(f))\eta(\tilde{g}) &= U(B(t)) W(f) U(B(t))^* \eta(\tilde{g}) \\ &= U(B(t)) W(f) \eta(\widetilde{B(-t)g}) \\ &= e^{-\|\tilde{f}\|^2/4 - \langle \tilde{f}, \widetilde{B(-t)g} \rangle / 2} U(B(t)) \eta(\tilde{f} + \widetilde{B(-t)g}) \\ &= e^{-\|\tilde{f}\|^2/4 - \langle \widetilde{B(t)f}, \tilde{g} \rangle / 2} \eta(\widetilde{B(t)f} + \tilde{g}) \\ &= W(B(t)f) \eta(\tilde{g}). \end{aligned}$$

Somit ist die Wirkung von α_t auf $\mathcal{M}(W_r)$ durch

$$\alpha_t(W(f)) = W(B(t)f) \in \mathcal{M}(W_r)$$

gegeben. Aus $\text{supp } f \subset W_r$ folgt $\text{supp } B(t)f \subset W_r$, für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit werden $\alpha_t(\mathcal{M}(W_r))$ und $\mathcal{M}(W_r)$ von denselben Elementen erzeugt, d. h. für alle $t \in \mathbb{R}$ ist α_t ein Automorphismus auf $\mathcal{M}(W_r)$.

Wir betrachten die Unteralgebra \mathcal{A} , die von den Weyloperatoren erzeugt wird, da sie $\mathcal{A}'' = \mathcal{M}(W_r)$ erfüllt und somit den Voraussetzungen in Lemma 3.12 genügt. Wir definieren eine Funktion $F_{X,Y}$ für $X, Y \in \mathcal{A}$

$$F_{X,Y}(t) := (\Omega, XU(B(t))YU(B(-t))\Omega) = (U(B(\frac{-t}{2})X^*\Omega, U(B(\frac{t}{2}))Y\Omega) \quad (3.27)$$

und wollen zeigen, dass sie analytisch in $S(-1, 0)$ fortgesetzt werden kann. Sei $X = W(f)$ und $Y = W(g)$, wobei $f, g \in \mathcal{S}$, mit Träger in W_r . Es gilt

$$\begin{aligned} F_{W(f),W(g)}(t) &= \left(e^{-\|\tilde{f}\|^2/4} \eta(-\widetilde{B(\frac{-t}{2})f}), e^{-\|B(t/2)g\|^2/4} \eta(\widetilde{B(\frac{t}{2})g}) \right) \\ &= e^{-(\|\tilde{f}\|^2 + \|B(t/2)g\|^2)/4} e^{-\langle \widetilde{B(-t/2)f}, \widetilde{B(t/2)g} \rangle / 2} \\ &= e^{-(\|\tilde{f}\|^2 + \|\tilde{g}\|^2)/4} e^{-\langle \widetilde{B(-t/2)f}, \widetilde{B(t/2)g} \rangle / 2}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\|B(\frac{t}{2})g\| = \|g\|$ verwendet haben. Damit $F_{W(f),W(g)}(t)$ analytisch fortgesetzt werden kann, muss folglich

$$\langle \widetilde{B(\frac{-t}{2})f}, \widetilde{B(\frac{t}{2})g} \rangle = \int d\mu(m) \int \frac{dp}{2\sqrt{p^2+m^2}} \overline{\widetilde{f_{B_-}(\sqrt{p^2+m^2}, p)}} \widetilde{g_{B_+}(\sqrt{p^2+m^2}, p)}, \quad (3.28)$$

analytisch fortsetzbar sein, wobei $f_{B_-} := B(\frac{-t}{2})f$ und $g_{B_+} := B(\frac{t}{2})g$. Da f_{B_-}, g_{B_+} kompakten Träger haben, sind die Fouriertransformierten ganze Funktionen. Es bleibt also zu zeigen, dass das Integral auf der rechten Seite von (3.28) existiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{g_{B_+}}}(p) &= \int d^2\xi e^{ip\xi} g(\Lambda(\frac{t}{2})\xi) = \int d^2\xi e^{ip(\Lambda(\frac{t}{2})^{-1}\xi)} g(\xi) = \int d^2\xi e^{i(\Lambda(\frac{-t}{2})p)\xi} g(\xi) \\ &= \widetilde{g}(\Lambda(\frac{-t}{2})p). \end{aligned}$$

Für komplexe Argumente $z := t + iq$, so dass

$$\text{Im}\left((\Lambda(\frac{-z}{2})p)\xi\right) > 0, \quad \forall \xi \in \text{supp } g, \quad (3.29)$$

ist $|\overline{\widetilde{B(\frac{z}{2})g}}(p)| \leq |\overline{\widetilde{g_{B_+}}}(p)|$, da das schon konvergente Integral der Fouriertransformierten einen zusätzlichen Dämpfungsfaktor erhält. $\overline{\widetilde{g_{B_+}}}$ und $\widetilde{f_{B_-}}$ sind, wegen $f, g \in \mathcal{D}(W_r)$, in $L^1(\mathbb{R}^2)$ enthalten, deshalb auch ihr Produkt, so dass

$$\left| \langle \widetilde{B(\frac{-z}{2})f}, \widetilde{B(\frac{z}{2})g} \rangle \right| \leq \iint d\mu(m) \frac{dp}{2\sqrt{p^2+m^2}} \left| \overline{\widetilde{f_{B_-}}} \right| \left| \overline{\widetilde{g_{B_+}}} \right| < \infty.$$

3. Das verallgemeinerte freie Feld

Rechnung ergibt

$$\operatorname{Im}\left(\Lambda\left(\frac{-z}{2}\right)p\right)\xi = \sin(-\pi q) \cdot p\eta ,$$

wobei $\begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \sinh(-\pi t) + \xi_1 \cosh(-\pi t) \\ \xi_0 \cosh(-\pi t) + \xi_1 \sinh(-\pi t) \end{pmatrix}$. Aus $\xi \in W_r$ folgt $\eta^2 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen $\overline{p} \in \overline{V_+}$ ist $p\eta > 0$. Für $\sin(-\pi q) > 0$ ist daher die Bedingung (3.29) erfüllt. Für $\overline{f_{B_-}}$ geht man ganz analog vor.

Somit ist $F_{W(f),W(g)}(z)$ analytisch im Streifen $S(-1, 0)$, beschränkt und stetig auf dem Rand.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion (3.27) die zweite Bedingung in (3.22) erfüllt. Es ist also zu zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(t-i) &= \left(\Omega, U(B(t))YU(B(-t))X\Omega \right) \\ &= \left(U(B(\tfrac{t}{2}))Y^*\Omega, U(B(\tfrac{-t}{2}))X\Omega \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Seien wieder $X = W(f)$ und $Y = W(g)$ mit $f, g \in \mathcal{D}(W_r)$ reell. Dann gilt für die rechte Seite von (3.30)

$$\begin{aligned} \left(U(B(\tfrac{t}{2}))W(-g)\Omega, U(B(\tfrac{-t}{2}))W(f)\Omega \right) &= \left(W(-g_{B_-})\eta(0), W(f_{B_+})\eta(0) \right) \\ &= e^{-(\|\tilde{g}\|^2 + \|\tilde{f}\|^2)/4} e^{-\langle \widetilde{g_{B_-}}, \widetilde{f_{B_+}} \rangle / 2} \end{aligned}$$

und für die linke Seite

$$\begin{aligned} F_{W(f),W(g)}(t-i) &= \left(U(B(\tfrac{-(t-i)}{2}))W(-f)\Omega, U(B(\tfrac{(t-i)}{2}))W(g)\Omega \right) \\ &= \left(U(B(\tfrac{i}{2}))U(B(\tfrac{-t}{2}))W(-f)\Omega, U(B(\tfrac{-i}{2}))U(B(\tfrac{t}{2}))W(g)\Omega \right) \\ &= \left(U(B(\tfrac{i}{2}))W(-f_{B_-})\Omega, U(B(\tfrac{-i}{2}))W(g_{B_+})\Omega \right) \\ &= e^{-(\|\tilde{f}\|^2 + \|\tilde{g}\|^2)/4} e^{-\langle \widetilde{f_{B_-}}, \widetilde{g_{B_+}} \rangle / 2}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $\underline{f}(x) := f(-x)$ definiert und $U(B(i/2))\eta(f) = \eta(\hat{f})$, sowie $\Lambda(i) = -1$ benutzt wurde. Die Gleichung

$$\langle g_{B_-}, f_{B_+} \rangle = \langle \underline{f_{B_-}}, \underline{g_{B_+}} \rangle$$

folgt sofort aus den Eigenschaften der Fouriertransformation. \square

4. Modulare Kompaktheit des verallgemeinerten freien Feldes

In diesem Kapitel wird die modulare Kompaktheit motiviert und anschließend gezeigt, dass sie für stetiges Lehmann-Maß nicht erfüllt ist. Dieses Ergebnis wird dann auf Unteralgebren des freien vierdimensionalen Feldes angewandt.

4.1. Von modularer Nuklearität zu modularer Kompaktheit

In Kapitel 3 haben wir in Thm. 3.9 eine Standardkeilalgebra für das verallgemeinerte freie Feld gefunden. Damit können wir also die Theorie aus Kapitel 2 anwenden und wie in Theorem 2.5 ein lokales Netz \mathcal{N} konstruieren.

Wenn die Inklusionen $\mathcal{M}(x) \subset \mathcal{M}$ für alle $x \in W_r$ split sind, dann ist nach Theorem 2.9 der Vakuumvektor zyklisch für alle lokalen Algebren. Damit ist auch die Voraussetzung von Theorem 2.6 erfüllt und es gilt Dualität für Doppelkegel und für Keile. Das Netz \mathcal{N} besitzt dann außerdem die Split-Eigenschaft für Doppelkegel [Mü98]. Dies stellt aber eine starke Einschränkung an das Lehmann-Maß μ dar – es können nur diskrete Massen auftreten.

Theorem 4.1 ([DL84, Thm. 10.2.]). *Sei $\{\mathcal{N}(D)\}_{D \in \mathcal{K}}$ ein lokales Netz des verallgemeinerten freien Feldes mit Lehmann-Maß μ , welches die Dualität für Doppelkegel erfüllt. Wenn \mathcal{N} die Split-Eigenschaft für Doppelkegel besitzt, dann ist μ rein atomar, konzentriert auf isolierte Punkte.*

Da die modulare Nuklearitätsbedingung (MNB) gerade die Split-Eigenschaft für Keile und somit für Doppelkegel impliziert und außerdem Dualität für Doppelkegel gilt, folgt

$$\text{MNB erfüllt} \implies \mu \text{ rein atomar.} \quad (4.1)$$

Insbesondere kann die modulare Nuklearitätsbedingung nicht erfüllt sein, wenn μ nicht rein atomar ist.

Es bleibt die Frage, ob dennoch Informationen über die lokale Struktur eines verallgemeinerten freien Feldes in den Spektraleigenschaften des modularen Operators kodiert sind. Die modulare Nuklearitätsbedingung ist jedoch eine zu starke Bedingung, da sie die Split-Eigenschaft für Keile impliziert und daher für verallgemeinerte freie Felder mit absolut stetigem Maß nicht erfüllt ist. Nach Thm. 2.11 impliziert

Kompaktheit von Ξ_a nicht die Split-Eigenschaft und es gibt sogar Beispiele von Inklusionen mit kompaktem Ξ_a , die nicht split sind. Angesichts dieser Tatsache stellt sich die Frage, ob die Abbildungen Ξ_a kompakt sind.

Daher untersuchen wir die *modulare Kompaktheitsbedingung (MKB)*, d.h. ob die Abbildungen

$$\Xi_a : M \mapsto \Delta^{1/4}U(a)M\Omega, \quad M \in \mathcal{M}(W_r), \quad (4.2)$$

für $a \in W_r$ kompakt sind.

Diese Bedingung wird außerdem durch folgende Überlegungen motiviert. Betrachten wir das Modell $\{\mathcal{M}(D)\}_{D \in \mathcal{K}}$ eines verallgemeinerten freien Feldes mit absolut stetigem Maß μ , welches die Dualität für Doppelkegel nicht erfüllt. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass μ nicht exponentiell abfällt, siehe [La74, Ga75]. Sei $\{\mathcal{N}(D)\}_{D \in \mathcal{K}}$ das Netz, welches aus der Standardkeilalgebra $(\mathcal{M}(W_r), U, \Omega)$ erzeugt wird. Die lokalen Algebren sind nichttrivial, da

$$\mathcal{M}(D_{a,b}) \subset \mathcal{N}(D_{a,b}).$$

Das Netz $\{\mathcal{M}(D)\}_{D \in \mathcal{K}}$ kann die Split-Eigenschaft für Doppelkegel besitzen, da Dualität für Keile Voraussetzung von Thm. 4.1 ist. Sei $D_{a,b} \Subset D_{c,d} \Subset W_r$, dann gibt es einen Typ I-Faktor \mathcal{N} , so dass

$$\mathcal{M}(D_{a,b}) \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{M}(D_{c,d}) \subset \mathcal{M}(W_r).$$

Somit ist auch $\mathcal{M}(D_{a,b}) \subset \mathcal{M}(W_r)$ eine Split-Inklusion und aus Thm. 2.11 folgt

$$\Xi_a|_{\mathcal{M}(D)} \text{ ist kompakt, für alle Doppelkegel } D \Subset W_r. \quad (4.3)$$

Daher ließe sich erwarten, dass Ξ_a für $\mathcal{M}(W_r)$ kompakt ist. Wie wir sehen werden, ist dies nicht der Fall.

Als Beispiel für ein Netz, das diese Bedingungen erfüllt, betrachte man die Einschränkung des freien vierdimensionalen Feldes auf eine zweidimensionale Ebene $x_2 = \xi_2, x_3 = \xi_3$, d. h. das Netz $D_{a,b} \mapsto \mathcal{M}(D_{a,b}^{\xi_2, \xi_3})$ (siehe Abschnitt 4.3.2). Dann ist die Darstellung reduzibel und die Unterdarstellung unitär äquivalent zu einem verallgemeinerten freien Feld mit absolut stetigem Maß μ , siehe Satz 4.9. Das freie Feld erfüllt die Energie-Nuklearität [BW86] und daher auch die (distale) Split-Eigenschaft für Doppelkegel. Die Unteralgebren erfüllen folglich auch die Energie-Nuklearität und somit besitzt auch das entsprechende verallgemeinerte freie Feld die (distale) Split-Eigenschaft für Doppelkegel.

Wir werden jedoch zeigen, dass die modulare Kompaktheit für absolut stetiges Lehmann-Maß nicht erfüllt sein kann:¹

$$\text{MKB erfüllt} \implies \mu \text{ nicht absolut stetig.} \quad (4.4)$$

4.2. Modulare Kompaktheit gilt nicht

Sei $(\mathcal{M}(W_r), U, \Omega)$ die rechte Standardkeilalgebra eines verallgemeinerten freien Feldes (siehe Kapitel 3). Betrachte die Abbildungen (2.30)

$$\Xi_a : \mathcal{M}(W_r) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}), \quad M \mapsto \Delta^{1/4}U(a)M\Omega, \quad a \in W_r. \quad (4.5)$$

Wir wollen zeigen, dass diese Abbildungen nicht kompakt sind.

4.2.1. Absolut stetiges Maß

Wir betrachten den Fall, dass μ absolut stetig bezüglich dem Lebesgue-Maß, positiv und polynomial beschränkt ist und Träger in \mathbb{R}_+ hat. Dann gibt es nach dem Satz von Radon-Nikodym eine messbare, lokal integrierbare, positive Funktion ρ auf \mathbb{R}_+ , so dass

$$d\mu(m) = \rho(m^2)dm^2. \quad (4.6)$$

Wir können nun unsere zentrale Aussage beweisen. Einige Ergebnisse, die im Anhang bewiesen werden, sind hier zur besseren Lesbarkeit nochmal aufgeführt.

Theorem 4.2. *Sei μ absolut stetig, also $d\mu(m) = \rho(m^2)dm^2$, wobei ρ messbar, lokal integrierbar, positiv und polynomial beschränkt sei. Dann sind die Abbildungen Ξ_a mit $a \in W_r$ nicht kompakt.*

Beweis. Sei $a = (a_+, -a_-) \in W_r$, $a_{\pm} > 0$, wir schreiben kurz Ξ für Ξ_a . Nehmen wir an Ξ sei kompakt. Thm. A.3 besagt, dass das Bild unter Ξ für bestimmte Folgen in $\mathcal{M}(W_r)$ in Norm konvergiert. Wir werden im Folgenden eine Folge konstruieren, die dies nicht erfüllt.

Theorem A.3. *Sei $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ eine rechte Standardkeilalgebra, Δ bezeichne den modularen Operator von (\mathcal{M}, Ω) . Sei $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{M} , so dass*

$$i) \sup_{n \geq 1} \|W_n\| < \infty,$$

$$ii) \langle \Psi, W_n \Omega \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \Psi, W_\infty \Omega \rangle \text{ gilt für ein } W_\infty \in \mathcal{M} \text{ und für alle } \Psi \in \mathcal{H}.$$

Der Operator $\Xi_a : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$ sei für $a \in W_r$ definiert durch $M \mapsto \Delta^{1/4}U(a)M\Omega$.

Wenn Ξ_a ein kompakter Operator ist, dann konvergiert $\{\Xi_a W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} in Norm

$$\|\Xi_a W_n - \Xi_a W_\infty\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

¹Man beachte: Wenn modulare Kompaktheit nicht gilt, folgt aus Thm 2.11 sofort, dass die Split-Eigenschaft für Keile nicht gilt.

4. Modulare Kompaktheit des verallgemeinerten freien Feldes

Wir betrachten die Funktionenfolge $\{\check{g}_n\}$ aus Anhang B.1, definiert durch

$$\check{g}_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \check{g}_n(\theta_+, \theta_-) := C_n e^{-n(\theta_+ - \theta_-)^2/4} \frac{1}{\left(\sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right) + i\right)^2}, \quad (\text{B.1})$$

wobei $C_n \in \mathbb{R}$, so dass $|C_n| \propto \sqrt[4]{n}$. In Satz C.1 ist gezeigt, dass sich mit Hilfe dieser Funktionen, durch

$$W(\hat{g}_n)\eta(\psi) = e^{-\frac{1}{4}\|\hat{g}_n\|^2 - \frac{1}{2}\langle \hat{g}_n, \psi \rangle} \eta(\hat{g}_n + \psi), \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H},$$

eine Folge von Operatoren $\{W(\hat{g}_n)\} \subset \mathcal{M}(W_r)$ definieren lässt.

Satz C.1. *Sei ρ polynomial beschränkt. Dann gilt $W(\hat{g}_n) \in \mathcal{M}(W_r)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Lemma C.2 zeigt, dass diese Folge die Voraussetzungen von Thm. A.3 erfüllt.² Man beachte, dass die Keilalgebra $\mathcal{M}(W_r)$ auf den Hilbertraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ wirkt.

Lemma C.2. *Sei $W_\infty := e^{-\frac{1}{4}C} \mathbf{1}$, mit $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2$.*

Die Folge $\{W(\hat{g}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt

- i) $\sup_{n \geq 1} \|W(\hat{g}_n)\| < \infty$,*
- ii) $(\Psi, W(\hat{g}_n)\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\Psi, W_\infty\Omega)$ für alle $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

Wenn Ξ kompakt wäre, müsste $\|\Xi W(\hat{g}_n) - \Xi W_\infty\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ nach Thm. A.3 gelten. Wir werden jedoch zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Xi W(\hat{g}_n) - \Xi W_\infty\| \neq 0. \quad (4.7)$$

Dies liefert den Widerspruch zur Kompaktheit von Ξ .

Beachte zunächst, dass

$$\begin{aligned} \Xi W(\hat{g}_n) &= \Delta^{1/4} U(a) W(\hat{g}_n) \Omega = U\left(B\left(-\frac{i}{4}\right)\right) U(a) e^{-\frac{1}{4}\|\hat{g}_n\|^2} \eta(\hat{g}_n) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|\hat{g}_n\|^2} \eta(\mathcal{X}\hat{g}_n), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{X} = u\left(B\left(-\frac{i}{4}\right)\right)u(a)$ die Wirkung von Ξ auf \mathcal{H} ist, siehe (A.30).

²Die Existenz von C ist durch Lemma B.7 gesichert.

Mit $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}_n\|^2$ und $\Lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}\hat{g}_n\|^2$ gilt³

$$\begin{aligned}
\|\Xi W(\hat{g}_n) - \Xi W_\infty\|^2 &= \|e^{-\frac{1}{4}\|\hat{g}_n\|^2} \eta(\mathcal{X}\hat{g}_n) - e^{-\frac{1}{4}C} \eta(0)\|^2 \\
&= \left(e^{-\frac{1}{4}\|\hat{g}_n\|^2} \eta(\mathcal{X}\hat{g}_n) - e^{-\frac{1}{4}C} \eta(0), e^{-\frac{1}{4}\|\hat{g}_n\|^2} \eta(\mathcal{X}\hat{g}_n) - e^{-\frac{1}{4}C} \eta(0) \right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|\hat{g}_n\|^2} \left(\eta(\mathcal{X}\hat{g}_n), \eta(\mathcal{X}\hat{g}_n) \right) - e^{-\frac{1}{4}(\|\hat{g}_n\|^2+C)} \left(\eta(\mathcal{X}\hat{g}_n), \eta(0) \right) \\
&\quad - e^{-\frac{1}{4}(\|\hat{g}_n\|^2+C)} \left(\eta(0), \eta(\mathcal{X}\hat{g}_n) \right) - e^{-\frac{1}{2}C} \left(\eta(0), \eta(0) \right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|\hat{g}_n\|^2} e^{\frac{1}{2}\|\mathcal{X}\hat{g}_n\|^2} + e^{-\frac{1}{2}C} - 2e^{-\frac{1}{4}(\|\hat{g}_n\|^2+C)} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\Lambda} + e^{-\frac{1}{2}C} - 2e^{-\frac{1}{2}C} \\
&= e^{-\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\Lambda} - e^{-\frac{1}{2}C} .
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Xi W(\hat{g}_n) - \Xi W_\infty\| \neq 0, \quad \text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}\hat{g}_n\|^2 \neq 0. \tag{4.9}$$

Die Wirkung von \mathcal{X} auf \hat{g}_n ist in (A.31) gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}\hat{g}_n\|^2 &= \iint_{V_+} dp_+ dp_- \rho(p_+ p_-) |\mathcal{X}\hat{g}_n(p_+, p_-)|^2 \\
&= m_0^2 \iint_{\mathbb{R}^2} d\theta_+ d\theta_- e^{\theta_+ - \theta_-} \rho(m_0^2 e^{\theta_+ - \theta_-}) \\
&\quad \cdot \left| e^{-m_0(a_+ e^{\theta_+} + a_- e^{\theta_-})} \check{g}_n(\theta_+ + i\frac{\pi}{2}, \theta_- + i\frac{\pi}{2}) \right|^2 \\
&= m_0^2 \iint_{\mathbb{R}^2} d\theta_+ d\theta_- e^{\theta_+ - \theta_-} \rho(m_0^2 e^{\theta_+ - \theta_-}) e^{-2m_0(a_+ e^{\theta_+} + a_- e^{\theta_-})} \\
&\quad \cdot |C_n|^2 e^{-\frac{n}{2}(\theta_+ - \theta_-)^2} \left| \frac{1}{\left(\sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + i\frac{\pi}{2}\right) + i \right)^2} \right|^2 \\
&= \frac{m_0^2 |C_n|^2}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} dudv e^{2u} \rho(m_0^2 e^{2u}) \\
&\quad \cdot e^{-2m_0(a_+ e^{u+v} + a_- e^{u-v})} e^{-2nu^2} \left(\frac{1}{\cosh(v) + 1} \right)^4,
\end{aligned}$$

³Man kann annehmen, dass Λ endlich ist, da sonst wegen (4.8) sofort folgt, dass die Folge $\{\Xi W(\hat{g}_n)\}$ nicht konvergiert.

4. Modulare Kompaktheit des verallgemeinerten freien Feldes

verwende $z := \sqrt{n}u$,

$$= \frac{m_0^2 |C_n|^2}{2\sqrt{n}} \iint_{\mathbb{R}^2} dz dv \frac{1}{(\cosh(v) + 1)^4} \cdot \underbrace{\rho(m_0^2 e^{2z/\sqrt{n}}) e^{-2m_0 e^{z/\sqrt{n}}(a_+ e^v + a_- e^{-v})} e^{-2z^2 + 2z/\sqrt{n}}}_{=: f_n(z)}. \quad (4.10)$$

Betrachten wir zunächst den Fall, dass ein $m_0^2 > 0$ existiert, so dass ρ an m_0^2 stetig ist und $\rho(m_0^2) \neq 0$. Aufgrund der Stetigkeit konvergiert $f_n(z)$ punktweise gegen $\rho(m_0^2) e^{-2z^2} e^{-2m_0(a_+ e^v + a_- e^{-v})}$. Für polynomial beschränktes ρ wird $f_n(z)$ durch die integrable Funktion $\alpha(1 + e^{2|z|})^N e^{-2z^2 + |z|}$ dominiert. Daher liefert der Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}\hat{g}_n\|^2 &= \frac{m_0^2}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|^2}{\sqrt{n}} \right) \iint_{\mathbb{R}^2} dv dz \rho(m_0^2) e^{-2z^2} \frac{e^{-2m_0(a_+ e^v + a_- e^{-v})}}{(\cosh(v) + 1)^4} \\ &= \frac{m_0^2}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|^2}{\sqrt{n}} \right) \rho(m_0^2) \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}} dv \frac{e^{-2m_0(a_+ e^v + a_- e^{-v})}}{(\cosh(v) + 1)^4}}_{\neq 0 \text{ und } < \infty} > 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Da $\rho(m_0^2) \neq 0$ vorausgesetzt wurde und da $|C_n|^2 \propto \sqrt{n}$ (siehe Lemma B.7), konvergiert $\|\mathcal{X}\hat{g}_n\|$ nicht gegen Null und wegen (4.9) ist der Beweis für diesen Fall abgeschlossen.

Betrachten wir nun den Fall, dass ρ an keiner Stelle m mit $\rho(m) > 0$ stetig ist. Beachte, dass die Koordinaten θ_{\pm} von m anhängen und somit per Definition auch $\hat{g}_n = \widehat{g_n(m)}$. Wir werden zeigen, dass $\int_0^M \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}\|^2 dm > 0$ ist, für ein $M > 0$. Dann existiert ein m , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}\|^2 \neq 0$. Zunächst beobachten wir, dass

$$\|\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}\|^2 \leq \frac{m^2 |C_n|^2}{2\sqrt{n}} \iint_{\mathbb{R}^2} dz dv \alpha(1 + m^2 e^{\frac{2z}{\sqrt{n}}})^N \frac{e^{-2z^2 + \frac{2z}{\sqrt{n}} e^{-2m e^{\frac{z}{\sqrt{n}}}(a_+ e^v + a_- e^{-v})}}}{(\cosh(v) + 1)^4}.$$

Definiere

$$B(m) := \frac{\alpha}{2} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|C_n|^2}{\sqrt{n}} \right) \iint dz dv \frac{e^{-2z^2 + 2|z|}}{(\cosh(v) + 1)^4} m^2 (1 + m^2 e^{2|z|})^N.$$

Dann gilt $\|\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}\|^2 \leq B(m)$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $B \in L^1([0, M], dm)$. Somit folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\int_0^M \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}\|^2 dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^M \|\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}\|^2 dm. \quad (4.12)$$

Berechne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^M \|\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}\|^2 dm &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^M dm \int_{\mathbb{R}^2} dz dv \frac{m^2 |C_n|^2}{2\sqrt{n}} \frac{e^{-2z^2 + \frac{2z}{\sqrt{n}}}}{(\cosh(v) + 1)^4} \\ &\quad \cdot \rho(m^2 e^{\frac{2z}{\sqrt{n}}}) e^{-2m e^{\frac{z}{\sqrt{n}}}(a_+ e^v + a_- e^{-v})}, \end{aligned}$$

da der Integrand überall positiv ist, ist das Integral über eine Teilmenge $[0, C_v] \times [0, C_z]$, für beliebige $C_v, C_z > 0$, kleiner als das Integral über \mathbb{R}^2 ,

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^M dm \int_0^{C_z} dz \int_0^{C_v} dv \frac{m^2 |C_n|^2}{2\sqrt{n}} \frac{e^{-2z^2 + \frac{2z}{\sqrt{n}}}}{(\cosh(v) + 1)^4} \rho(m^2 e^{\frac{2z}{\sqrt{n}}}) e^{-2m e^{\frac{z}{\sqrt{n}}}(a_+ e^{C_v} + a_-)}.$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|^2}{2\sqrt{n}} \int_0^{C_z} dz \int_0^{C_v} dv \frac{e^{-2z^2 + \frac{2z}{\sqrt{n}}}}{(\cosh(v) + 1)^4} \int_0^M dm m^2 \rho(m^2 e^{\frac{2z}{\sqrt{n}}}) e^{-2m e^{\frac{z}{\sqrt{n}}}(a_+ e^{C_v} + a_-)},$$

verwende $\lambda := m e^{z/\sqrt{n}}$,

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|^2}{2\sqrt{n}} \int_0^{C_z} dz \int_0^{C_v} dv \frac{e^{-2z^2 - \frac{z}{\sqrt{n}}}}{(\cosh(v) + 1)^4} \int_0^{M e^{z/\sqrt{n}}} d\lambda \underbrace{\lambda^2 \rho(\lambda^2) e^{-2\lambda(a_+ e^{C_v} + a_-)}}_{=: f(\lambda)},$$

da ρ messbar und lokal integrierbar ist, existiert $F(M) := \int_0^M f(\lambda) d\lambda$ und ist absolut stetig,

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|^2}{2\sqrt{n}} \int_0^{C_z} dz \int_0^{C_v} dv \frac{e^{-2z^2 - \frac{z}{\sqrt{n}}}}{(\cosh(v) + 1)^4} F(M e^{\frac{z}{\sqrt{n}}}).$$

Der Satz von Lebesgue liefert

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|^2}{2\sqrt{n}} \right) \int_0^{C_z} dz \int_0^{C_v} dv \frac{e^{-2z^2} F(M)}{(\cosh(v) + 1)^4} > 0, \quad \text{falls } F(M) \neq 0.$$

Da $\rho \not\equiv 0$, existiert ein $M > 0$, so dass $F(M) \neq 0$. Für ein solches M haben wir wegen (4.12)

$$\int_0^M \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}\|^2 dm > 0.$$

Es gibt also ein $m \in [0, M]$, so dass $\widehat{\mathcal{X}g_n(m)}$ nicht gegen Null konvergiert. Damit ist (4.9) gezeigt und der Beweis ist abgeschlossen. \square

4.2.2. Maß mit atomarem Anteil

Betrachte ein Lehmann-Maß μ mit Lebesgue Zerlegung

$$d\mu(m) = \rho(m^2)dm^2 + \sum_{i=1}^N c_i \delta_{m_i^2}(m^2), \quad (4.13)$$

wobei $\delta_{m_i^2}$ das auf m_i^2 konzentrierte Dirac-Maß ist und $m_i, c_i > 0$. Dann gilt ebenfalls keine Kompaktheit für Ξ .

Theorem 4.3. *Sei μ wie in (4.13) ein Maß, dessen singulärer Anteil endlich viele Dirac-Maße sind und $\rho \not\equiv 0$. Dann sind die Abbildungen Ξ_a , für $a \in W_r$, nicht kompakt.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum absolut stetigen Fall. Wir verwenden wieder die Folge $\{W(\hat{g}_n)\}$. Wir zeigen hier zunächst, dass diese Folge wohldefiniert ist und die nötigen Voraussetzungen erfüllt. Beachte, dass für ein Diracmaß δ_{λ^2} gilt

$$\begin{aligned} \|\hat{g}_n\|_{\delta_{\lambda^2}}^2 &= \int_0^\infty dp_+ \frac{1}{p_+} |\hat{g}_n(p_+, \frac{\lambda^2}{p_+})|^2 = \int_{\mathbb{R}} d\theta_+ |\check{g}_n(\theta_+, \theta_+ - \ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2}))|^2 \\ &= |C_n|^2 e^{-\frac{n}{2} \left(\ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2})\right)^2} \int_{\mathbb{R}} d\theta_+ \frac{1}{\left(\cosh\left(\theta_+ - \frac{1}{2} \ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2})\right)\right)^4} < \infty, \end{aligned} \quad (4.14)$$

und somit folgt für $|C_n|^2 \propto \sqrt{n}$ und $m_0 \neq \lambda$

$$\|\hat{g}_n\|_{\delta_{\lambda^2}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.15)$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle_{\delta_{\lambda^2}} &= \int_0^\infty dp_+ \frac{1}{p_+} \overline{\hat{f}(p_+, \frac{\lambda^2}{p_+})} \hat{g}_n(p_+, \frac{\lambda^2}{p_+}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\theta_+ \overline{\check{f}(\theta_+, \theta_+ - \ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2}))} \check{g}_n(\theta_+, \theta_+ - \ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2})). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |\langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle_{\delta_{\lambda^2}}| &\leq \int_{\mathbb{R}} d\theta_+ \left| \overline{\check{f}(\theta_+, \theta_+ - \ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2}))} \right| \frac{|C_n| e^{-\frac{n}{4} \left(\ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2})\right)^2}}{\left(\cosh\left(\theta_+ - \frac{1}{2} \ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2})\right)\right)^2} \\ &= |C_n| e^{-\frac{n}{4} \left(\ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2})\right)^2} \int_{\mathbb{R}} d\theta_+ \frac{\left| \overline{\check{f}(\theta_+, \theta_+ - \ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2}))} \right|}{\left(\cosh\left(\theta_+ - \frac{1}{2} \ln(\frac{\lambda^2}{m_0^2})\right)\right)^2}, \end{aligned}$$

und folglich gilt

$$\langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle_{\delta_{\lambda^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.16)$$

Den Ein-Feld-Hilbertraum zum Lehmann-Maß μ aus (4.13) bezeichnen wir mit \mathcal{H} . Dann ist

$$\|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\hat{g}_n\|_{\rho}^2 + \sum_{i=1}^N c_i \|\hat{g}_n\|_{\delta_{m_i^2}}^2, \quad (4.17)$$

und es folgt aus (4.14) und (4.15), dass

$$\hat{g}_n \in \mathcal{H} \quad \text{und} \quad \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}_n\|_{\rho}^2. \quad (4.18)$$

Somit können wir Operatoren $W(\hat{g}_n)$ definieren. Da für das Skalarprodukt gilt

$$\langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle_{\rho} + \sum_{i=1}^N c_i \langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle_{\delta_{m_i^2}}, \quad (4.19)$$

und das freie Feld Dualität für Keile erfüllt, gilt nach Satz A.5 und Satz C.1

$$W(\hat{g}_n) \in \mathcal{M}(W_r). \quad (4.20)$$

Beachte, dass wegen (4.15) und (4.16) Lemma C.2 wortwörtlich übernommen werden kann und die Folge $\{W(\hat{g}_n)\}$ die Voraussetzungen von Thm. A.3 erfüllt. Es genügt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}\hat{g}_n\|^2 \neq 0$$

zu zeigen, siehe (4.9).

Für ein Diracmaß δ_{λ^2} gilt zwar $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}\hat{g}_n\|_{\delta_{\lambda^2}}^2 = 0$, aber für das absolut stetige Maß ρ können wir, wie im letzten Abschnitt gesehen, ein $m_0 \neq m_i$ für $i = 1, \dots, N$ wählen, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}\hat{g}_n\|_{\rho}^2 \neq 0. \quad (4.21)$$

□

4.3. Anwendung auf das freie Feld in 4d

In Kapitel 2.5 wurde gezeigt, wie man aus einer rechten Standardkeilalgebra lokale Modelle in zwei Dimensionen konstruieren kann. In Kapitel 2.7 wurde die modulare Nuklearitätsbedingung für Keile als ein Kriterium angegeben, welches die Nichttrivialität der lokalen Algebren garantiert.

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Methode auch in vier Dimensionen verwendet werden kann. Leider ist dies nicht der Fall, da die modulare Nuklearitätsbedingung

die Split-Eigenschaft impliziert und die Split-Eigenschaft für Keile in mehr als zwei Dimensionen nicht erfüllt sein kann. Dies ist ein Ergebnis von Araki, siehe [Bu74, S. 292], welches die Freiheitsgrade der Translationskovarianz entlang der Kante der Keile ausnutzt.

Betrachten wir nun das vierdimensionale skalare freie Feld. Man kann Unteralgebren der rechten Keilalgebra finden, welche nur eingeschränkte oder keine Translationskovarianz entlang der Kante des Keils besitzen. Es stellt sich die Frage, ob für diese Unteralgebren eine Phasenraumbedingung wie die modulare Nuklearitätsbedingung gilt. Wir werden nun für eine einfache Klasse von Unteralgebren zeigen, dass keine modulare Kompaktheit gilt.

Bei der Wahl der Unteralgebren muss man beachten, dass für modular kovariante Unteralgebren das Vakuum nicht zyklisch sein darf.

Satz 4.4. *Sei \mathcal{M} eine von-Neumann-Algebra, die auf den Hilbertraum \mathcal{H} wirkt. Sei $\Omega \in \mathcal{H}$ zyklisch für \mathcal{M} , $\Delta_{\mathcal{M}}$ der zugehörige modulare Operator. Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, eine von-Neumann-Unteralgebra, die modular kovariant ist, d. h.*

$$\Delta_{\mathcal{M}}^{it} \mathcal{N} \Delta_{\mathcal{M}}^{-it} = \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

Ist Ω zyklisch für \mathcal{N} , dann gilt

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}. \quad (4.23)$$

Beweis. Für einen Beweis nach Takesaki siehe [Bo00, Lemma VI.1.2]. Wir verwenden hier [KR86, Thm. 9.2.36.], wonach $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ äquivalent zu der Bedingung ist, dass $\mathcal{N}\Omega$ ein Definitionskern („core“) von $\Delta_{\mathcal{M}}^{1/2}$ ist, d. h. $\overline{\Delta_{\mathcal{M}}^{1/2} \mathcal{N}\Omega} = \Delta_{\mathcal{M}}^{1/2}$.

Da Ω zyklisch für \mathcal{N} ist existiert der modulare Operator $\Delta_{\mathcal{N}}^{1/2}$ dieses Paares. Aus der modularen Kovarianz (4.22) folgt, dass $\Delta_{\mathcal{N}}^{1/2} = \Delta_{\mathcal{M}}^{1/2}$ und aus der Tomita-Takesaki Theorie folgt, dass $\mathcal{N}\Omega$ ein Definitionskern ist. \square

4.3.1. Das freie Feld in 4d

Die Konstruktion des freien, skalaren, hermiteschen Feldes zur Masse m erfolgt wie im zweidimensionalen Fall (siehe z.B. [Bo96, Kap. I.2]) oder [BW92, Kap. 8.3 & 12.5].

Der Einteilchen-Hilbertraum ist $\mathcal{H}_m = L^2(H_m, d\Omega_m)$. Sei $\mathcal{S} := \mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathbb{R}^4)/\mathcal{N}$, wobei $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathbb{R}^4) : \tilde{f}|_{H_m} = 0\}$. Für $f, g \in \mathcal{S}$ sind $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{H}_m$ und es gilt

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \overline{\tilde{f}(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p})} \tilde{g}(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p}).$$

Sei $\mathcal{F}(\mathcal{H}_m)$ der symmetrische Fockraum über \mathcal{H}_m . Wie in Thm. 3.6 erhalten wir eine Darstellung der Weylalgebra bzgl. $(\mathcal{S}, \text{Im}\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle)$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}_m))$ durch

$$W(f)\eta(\psi) := e^{-\frac{1}{4}\|\tilde{f}\|^2 - \frac{1}{2}\langle \tilde{f}, \psi \rangle} \eta(\tilde{f} + \psi) \quad \forall f \in \mathcal{S}, \psi \in \mathcal{H}.$$

Die lokalen Algebren werden wie in (3.14) definiert durch

$$\mathcal{M}^{4d}(\mathcal{O}) := \{W(f) : f \in \mathcal{S}, \text{supp } f \subset \mathcal{O}\}'' .$$

4.3.2. Unteralgebren für Einschränkung auf zweidimensionale Keile

Seien $\xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest gewählt. Seien W_r^{2d}, W_r^{4d} der zwei- bzw. vierdimensionale rechte Keil. Wir wollen die Operatoren betrachten, die in

$$W_r^{(\xi_2, \xi_3)} := \{(x_0, x_1, \xi_2, \xi_3) : (x_0, x_1) \in W_r^{2d}\} \subset W_r^{4d}$$

lokalisiert sind.

Sei $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d})$. Wir suchen Operatoren in $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{4d})$ deren Lokalisierung durch die Distribution $f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3} := f(x_0, x_1)\delta(x_2 - \xi_2)\delta(x_3 - \xi_3)$ beschrieben wird. Beachte, dass formal $\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} = \frac{1}{2\pi}\tilde{f}(p_0, p_1)e^{-ip_2\xi_2}e^{-ip_3\xi_3}$ gilt. Die rechte Seite ist ein Element in \mathcal{H}_m , da

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}\|_{\mathcal{H}_m}^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \left| \tilde{f}(\sqrt{p^2 + m^2}, p_1) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\sqrt{p^2 + r^2 + m^2}} \left| \tilde{f}(\sqrt{p^2 + r^2 + m^2}, p) \right|^2 \\ &= \int_{m^2}^\infty \frac{1}{4\pi} d\lambda^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \left| \tilde{f}(\sqrt{p^2 + \lambda^2}, p) \right|^2 \\ &\leq \int_{m^2}^\infty \frac{1}{4\pi} d\lambda^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \frac{C^2}{(2p^2 + \lambda^2 + 1)^2} < \infty, \end{aligned} \quad (4.24)$$

hierbei wurde $\lambda^2 = r^2 + m^2$ und $|\tilde{f}(p_0, p_1)| \leq \frac{C}{1+p_0^2+p_1^2}$ verwendet. Da $\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} \in \mathcal{H}_m$, können wir einen zugehörigen Weyloperator $W(\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}})$ definieren (siehe (A.9)).

Lemma 4.5. *Die Operatoren $W(\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}})$ sind Elemente der rechten Keilalgebra $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{4d})$.*

Beweis. Nach Satz A.4 genügt es eine Folge $\{f_n\} \subset \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{4d})$ zu finden, so dass

$$\|\tilde{f}_n - \widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}\|_{\mathcal{H}_m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Definiere

$$f_n(x_0, x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{2\pi} f(x_0, x_1) \beta_{1/n}(x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) ,$$

4. Modulare Kompaktheit des verallgemeinerten freien Feldes

wobei $\beta_\lambda(x)$ die in (B.4) definierte Folge von Testfunktionen mit kompaktem Träger ist. Beachte, dass wegen (B.4) und (B.5) gilt

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(p) &= \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(p_0, p_1) \frac{1}{2\pi} \iint dx_2 dx_3 \beta_{1/n}(x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) e^{-ip_2 x_2 - ip_3 x_3} \\ &= \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(p_0, p_1) e^{-ip_2 \xi_2 - ip_3 \xi_3} \frac{1}{2\pi} \iint d^2x \beta(x) e^{-i\frac{p}{n}x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(p_0, p_1) e^{-ip_2 \xi_2 - ip_3 \xi_3} \tilde{\beta}\left(\frac{p_2}{n}, \frac{p_3}{n}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(p_0, p_1) e^{-ip_2 \xi_2 - ip_3 \xi_3} = \widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}(p) .\end{aligned}$$

Wegen $|\tilde{\beta}(p)| \leq 1$, folgt aus dominierter Konvergenz

$$\|\tilde{f}_n - \widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}\|_{\mathcal{H}_m}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

□

Definition 4.6. Wir betrachten die Unteralgebra

$$\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3}) := \left\{ W(\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) : f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d}) \right\}''$$

von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{4d})$.

Lemma 4.7. Für $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})$ ist das Vakuum nicht zyklisch.

Beweis. Betrachte (p_2, p_3) in Polarkoordinaten (r, ϕ) . Sei

$$\Psi(p, r, \phi) := \psi(\sqrt{p^2 + r^2 + m^2}, p) \sin(\phi) e^{-ip_2(r, \phi)\xi_2 - ip_3(r, \phi)\xi_3} ,$$

wobei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\Psi \in \mathcal{H}_m$ und es gilt

$$\begin{aligned}\langle \Psi, \widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp r dr \overline{\psi(\sqrt{p^2 + r^2 + m^2}, p)} \tilde{f}(\sqrt{p^2 + r^2 + m^2}, p) \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\phi) \\ &= 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d}) .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(\eta(\Psi) - \Omega, W(\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}})\Omega) &= e^{-\frac{1}{4}\|\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}\|^2} e^{\frac{1}{2}\langle \Psi, \widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} \rangle} - e^{-\frac{1}{4}\|\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}\|^2} e^{\frac{1}{2}\langle 0, \widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} \rangle} \\ &= 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d}) .\end{aligned}$$

Also ist $\eta(\Psi) - \Omega$ ein nichttriviales Element im orthogonalen Komplement von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})\Omega$. □

Sei E die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\overline{\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})\Omega}$ von $\mathcal{F}(\mathcal{H}_m)$. Wir zeigen nun, dass die Unter algebra $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})$ auf dem Hilbertraum $E\mathcal{F}(\mathcal{H}_m)$ durch die Keilalgebra eines zweidimensionalen verallgemeinerten freien Feldes dargestellt werden kann. Seien $f, g \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}, \widetilde{g\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{2\sqrt{p^2+m^2}} \frac{1}{4\pi^2} \overline{\tilde{f}(\sqrt{p^2+m^2}, p_1)} \tilde{g}(\sqrt{p^2+m^2}, p_1) \\ &= \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dp \frac{\overline{\tilde{f}(\sqrt{p^2+r^2+m^2}, p)} \tilde{g}(\sqrt{p^2+r^2+m^2}, p)}{8\pi^2 \sqrt{p^2+r^2+m^2}} \\ &= \int_{m^2}^\infty \frac{1}{4\pi} d\lambda^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\sqrt{p^2+\lambda^2}} \overline{\tilde{f}(\sqrt{p^2+\lambda^2}, p)} \tilde{g}(\sqrt{p^2+\lambda^2}, p). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dies ist gerade das Skalarprodukt $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_\rho$ für ein verallgemeinertes freies Feld mit

$$\rho(\lambda^2) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & \lambda \geq m \\ 0, & \lambda < m. \end{cases} \quad (4.26)$$

Sei \mathcal{H}_ρ der zugehörige Ein-Feld-Hilbertraum des verallgemeinerten freien Feldes mit Maß $d\mu(\lambda) = \rho(\lambda^2)d\lambda^2$.

Lemma 4.8. *Die stetige Fortsetzung von*

$$U : E\mathcal{F}(\mathcal{H}_m) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}_\rho), \quad \eta(\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) \mapsto \eta(\tilde{f}), \quad f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d}), \quad (4.27)$$

ist ein unitärer Operator $U : E\mathcal{F}(\mathcal{H}_m) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}_\rho)$. Es gilt

$$U\Omega_m = \Omega_\rho,$$

wobei Ω_m, Ω_ρ jeweils die Vakuumvektoren bezeichnen.

Beweis. Die lineare Hülle aller Vektoren der Form $\eta(\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}})$ bzw. $\eta(\tilde{f})$, mit $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d})$, ist dicht in $E\mathcal{F}(\mathcal{H}_m)$ bzw. $\mathcal{F}(\mathcal{H}_\rho)$. Die Isometrie von U folgt aus (4.25)

$$\begin{aligned} \left(U\eta(\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}), U\eta(\widetilde{g\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) \right)_{\mathcal{F}(\mathcal{H}_\rho)} &= e^{\frac{1}{2}\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{H}_\rho}} = \left(\eta(\tilde{f}), \eta(\tilde{g}) \right) = e^{\frac{1}{2}\langle \widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}, \widetilde{g\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} \rangle_{\mathcal{H}_m}} \\ &= \left(\eta(\widetilde{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}), \eta(\widetilde{g\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) \right)_{\mathcal{F}(\mathcal{H}_m)}. \end{aligned}$$

Da $\Omega_m = \eta(\widetilde{0 \cdot \delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}})$ ist, gilt $U\Omega_m = \eta(0) = \Omega_\rho$. \square

Sei nun $\mathcal{M}^{2d}(W_r^{2d})$ die Keilalgebra des verallgemeinerten freien Feldes in zwei Dimensionen mit Lehmann-Maß (4.26).

Satz 4.9. Die Einschränkung von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})$ auf den Hilbertraum $E\mathcal{F}(\mathcal{H}_m) = \overline{\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})\Omega_m}$ ist unitär äquivalent zu $\mathcal{M}^{2d}(W_r^{2d})$ auf \mathcal{H}_ρ .

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d})$. Wegen Lemma 4.8, Gleichung (4.24) und (4.25) gilt

$$\begin{aligned} U W(\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) U^* \eta_\rho(\tilde{g}) &= U W(\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) \eta_m(\widehat{g\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}\|_{\mathcal{H}_m}^2 - \frac{1}{2}\langle \widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}, \widehat{g\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} \rangle_{\mathcal{H}_m}} U \eta_m(\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}} + \widehat{g\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|\tilde{f}\|_{\mathcal{H}_\rho}^2 - \frac{1}{2}\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{H}_\rho}} \eta_\rho(\tilde{f} + \tilde{g}) = W(f)\eta_\rho(\tilde{g}). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$U W(\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) U^* = W(f). \quad (4.28)$$

Diese Operatoren erzeugen die Algebren, daher ist

$$W \mapsto U W U^*$$

eine zyklische Darstellung von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})|_{E\mathcal{F}(\mathcal{H}_m)}$ auf $\mathcal{M}^{2d}(W_r^{2d})$ und

$$U \mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3}) U^* = \mathcal{M}^{2d}(W_r^{2d}). \quad (4.29)$$

□

Theorem 4.10. Die Unteralgebren $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})$ von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{4d})$ erfüllen nicht die modulare Nuklearitätsbedingung. Insbesondere sind die Abbildungen

$$\Xi_a^{4d} : M \mapsto \Delta^{1/4} U(a) M \Omega, \quad M \in \mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3}), \quad a \in W_r^{2d} \quad (4.30)$$

nicht kompakt.

Beweis. Das Bisognano-Wichmann-Theorem besagt, dass die modulare Gruppe Δ^{it} der Keilalgebra des vierdimensionalen Feldes durch die Lorentzboosts in den Keil gegeben ist. $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})$ ist eine modular kovariante Unteralgebra von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{4d})$, daher ist $\Delta|_{E\mathcal{F}(\mathcal{H}_m)}$ der modulare Operator von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{\xi_2, \xi_3})|_{E\mathcal{F}(\mathcal{H}_m)}$ (siehe [Bo00, Lem. VI.1.2.]).

Man sieht leicht, dass $\Xi_a^{4d} W(\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) = W(\mathcal{X}\tilde{f} \cdot \widehat{\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) \Omega_m$, wobei \mathcal{X} die Wirkung von Ξ auf \mathcal{H} ist (siehe (A.31)). Sei nun U der unitäre Operator aus (4.27), der auf die Darstellung als verallgemeinertes freies Feld mit Lehmann-Maß ρ (4.26) abbildet. Dann gilt

$$U \Xi_a^{4d} W(\widehat{f\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_3}}) = W(\mathcal{X}\tilde{f}) \Omega_\rho = \Xi_a W(\tilde{f}), \quad (4.31)$$

wobei Ξ_a der entsprechende Operator des verallgemeinerten freien Feldes ist, siehe (4.5). Aus Theorem 4.2 folgt, dass Ξ_a und somit Ξ_a^{4d} nicht kompakt sind. □

4.3.3. Unteralgebren mit fester Lokalisation

Anstatt den vierdimensionalen Keil auf zweidimensionale Keile einzuschränken, geben wir eine Lokalisation in x_2, x_3 durch eine feste Funktion vor. Sei $g \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathbb{R}^2)$ eine beliebige, aber fest gewählte Testfunktion.

Definition 4.11. *Definiere die Unteralgebra $\mathcal{M}_g(W_r^{2d})$ von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{4d})$ durch*

$$\mathcal{M}_g(W_r^{2d}) := \{W(f(x_0, x_1)g(x_2, x_3)) : f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d})\}'' . \quad (4.32)$$

Lemma 4.12. *Für $\mathcal{M}_g(W_r^{2d})$ ist das Vakuum nicht zyklisch.*

Beweis. Betrachte \tilde{g} in Polarkoordinaten $\tilde{g}(p_2, p_3) = \tilde{g}(r, \phi)$. Es genügt einen Vektor Ψ im Einteilchenraum \mathcal{H}_m zu finden, der im Komplement von fg liegt (vgl. Lemma 4.7). Sei $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, definiere $\mathcal{H}_m \ni \Psi(p, r, \phi) := h(r, p)\psi(r, \phi)$, wobei

$$\overline{\psi(r, \phi)} = \begin{cases} -\int_{\pi}^{2\pi} \tilde{g}(r, \phi') d\phi', & \text{für } 0 \leq \phi \leq \pi \\ \int_0^{\pi} \tilde{g}(r, \phi') d\phi', & \text{für } \pi < \phi \leq 2\pi \end{cases} .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \tilde{fg} \rangle &= \int dp \int r dr \int d\phi \overline{h(r, p)\psi(r, \phi)} \tilde{f}(\sqrt{p^2 + r^2 + m^2}, p) \tilde{g}(r, \phi) \\ &= \int dp \int r dr \overline{h(r, p)} \tilde{f}(\sqrt{p^2 + r^2 + m^2}, p) \\ &\quad \left(-\int_{\pi}^{2\pi} \tilde{g}(r, \phi') d\phi' \int_0^{\pi} \tilde{g}(r, \phi) d\phi + \int_0^{\pi} \tilde{g}(r, \phi') d\phi' \int_{\pi}^{2\pi} \tilde{g}(r, \phi) d\phi \right) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

Bestimmen wir das Skalarprodukt zweier Vektoren in $\mathcal{M}_g(W_r^{2d})\Omega$. Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r^{2d})$. Betrachte \tilde{g} in Polarkoordinaten r, ϕ und verwende $\lambda^2 = r^2 + m^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle W(f_1g)\Omega, W(f_2g)\Omega \rangle &= \int_{m^2}^{\infty} \frac{1}{2} d\lambda^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{g}(\sqrt{\lambda^2 - m^2}, \phi)|^2 d\phi \cdot \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \overline{\tilde{f}_1(\sqrt{p^2 + \lambda^2}, p)} \tilde{f}_2(\sqrt{p^2 + \lambda^2}) . \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Skalarprodukt eines verallgemeinerten freien Feldes mit

$$\rho(\lambda^2) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\tilde{g}(\sqrt{\lambda^2 - m^2}, \phi)|^2 d\phi, & \text{für } \lambda > m \\ 0, & \text{für } \lambda \leq m \end{cases} . \quad (4.33)$$

Lemma 4.13. *Die Einschränkung $\mathcal{M}_g(W_r^{2d})|_{\mathcal{M}_g(W_r^{2d})\Omega}$ ist unitär äquivalent zur Keilalgebra $\mathcal{M}^{2d}(W_r)$ auf \mathcal{H}_ρ des verallgemeinerten freien Feldes mit dem in Gleichung (4.33) definierten Lehmann-Maß ρ .*

Beweis. Der Beweis ist analog zu den Beweisen von Lemma 4.8 und Satz 4.9. \square

Daher gilt auch für diese Unteralgebren

Theorem 4.14. *Die Unteralgebren $\mathcal{M}_g(W_r^{2d})$ von $\mathcal{M}^{4d}(W_r^{4d})$ erfüllen nicht die modulare Nuklearitätsbedingung. Insbesondere sind die Abbildungen*

$$\Xi_a^{4d} : M \mapsto \Delta^{1/4} U(a) M \Omega, \quad M \in \mathcal{M}_g(W_r^{2d}), \quad a \in W_r^{2d} \quad (4.34)$$

nicht kompakt.

Beweis. Analog zum Beweis von Thm. 4.10. \square

5. Zusammenfassung

Die modulare Nuklearitätsbedingung kann für verallgemeinerte freie Felder mit absolut stetigem Anteil im Lehmann-Maß nicht erfüllt sein. Daher wurde in dieser Arbeit die schwächere Bedingung der modularen Kompaktheit formuliert und untersucht.

Es konnte bewiesen werden, dass für skalare verallgemeinerte freie Felder in $d = 2$ mit absolut stetigem Lehmann-Maß modulare Kompaktheit nicht gilt. Außerdem wurde gezeigt, dass modulare Kompaktheit nicht gilt, wenn der singuläre Anteil des Lehmann-Maßes aus endlich vielen Dirac-Maßen besteht.

Es wäre interessant dieses Resultat auf Lehmann-Maße mit beliebigem singulären Anteil und absolut stetigem Anteil auszuweiten. Dann könnte (4.4) verschärft werden zu: MKB erfüllt $\implies \mu$ rein singulär.

Außerdem wurden bestimmte Unteralgebren mit eingeschränkter Kovarianz des skalaren, freien Feldes in $d = 4$ untersucht. Diese Unteralgebren erhält man, wenn man das freie Feld auf zweidimensionale Keile einschränkt oder die Lokalisation der Weyloperatoren in den x_2, x_3 -Koordinaten durch eine feste Testfunktion festlegt. Die Einschränkung dieser Unteralgebren auf geeignete Unterräume ist äquivalent zu den Keilalgebren zweidimensionaler verallgemeinerter freier Felder mit absolut stetigem Lehmann-Maß. Das Resultat über modulare Kompaktheit konnte daher angewendet werden, d. h. diese Unteralgebren erfüllen nicht die modulare Kompaktheitsbedingung und insbesondere nicht die modulare Nuklearitätsbedingung.

Obwohl für das Modell des freien Feldes lokale Observablen existieren, lassen sich aufgrund dieser Kriterien für die hier untersuchten Unteralgebren keine Aussagen zur Existenz von lokalen Observablen treffen. Es ist zu vermuten, dass sich andere Unteralgebren besser eignen, für welche modulare Kompaktheit oder wünschenswerterweise sogar modulare Nuklearität gilt. Man könnte beispielsweise statt im Ortsraum im Impulsraum nach geeigneten Einschränkungen suchen. Wie wir für das verallgemeinerte Feld in $d = 2$ gesehen haben, ist modulare Kompaktheit nicht erfüllt, obwohl lokale Observablen existieren. Daher könnte man auch versuchen die Phasenraumkriterien in geeigneter Weise weiter abzuschwächen.

5. Zusammenfassung

A. Nützliche Theoreme

A.1. Ein Paley-Wiener Theorem

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = 1$ und $\theta \in (0, \pi/2)$. Dann heißt

$$\Gamma_{a,\theta} := \{\eta \in \mathbb{R}^n : \eta \cdot a > |\eta| \cos \theta\} \quad (\text{A.1})$$

der Kegel um a mit Öffnungswinkel θ und $\Gamma_{a,\theta}^* := \Gamma_{a,\pi/2-\theta}$ ist der zu $\Gamma_{a,\theta}$ duale Kegel.¹

Wir werden nun zeigen, dass Funktionen, die in bestimmten Gebieten analytisch sind, Randwerte besitzen deren Fouriertransformierte im Sinne von Distributionen in bestimmten Gebieten getragen sind. Wir geben Thm. IX.16 aus [RS75] wieder, allerdings beschränken wir uns auf Funktionen die im Analytizitätsgebiet beschränkt sind. In [RS75] wird der allgemeinere Fall polynomial beschränkter, am Rand singulärer Funktionen, behandelt.²

Theorem A.1. *Sei $F(\lambda + i\eta)$ analytisch in $\mathbb{R}^n + i\Gamma_{a,\theta}^*$ und es gebe eine Konstante C , so dass*

$$|F(\lambda + i\eta)| \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \forall \eta \in \Gamma_{a,\theta}^*. \quad (\text{A.2})$$

Dann gibt es eine temperierte Distribution T mit Träger in $\overline{\Gamma_{a,\theta}}$, so dass \hat{T} der Randwert von $F(\lambda + i\eta)$ im Sinne von Distributionen ist. Außerdem erhält man F aus T zurück mittels

$$F(\cdot + i\eta) = \widehat{e^{-\eta x} T(\cdot)}. \quad (\text{A.3})$$

Beweis. Wir werden zeigen:

1. $F(\lambda + it\eta)$ hat eine temperierte Distribution als Randwert für $t \downarrow 0$.
2. Der Randwert ist unabhängig von η .
3. T hat Träger in $\overline{\Gamma_{a,\theta}^*}$.

¹In diesem Abschnitt bezeichnet $\eta \cdot a$ das euklidische Skalarprodukt.

²Im Gegensatz zu [RS75] sind unsere Konventionen hier Analytizität in $\mathbb{R}^n + i\Gamma_{a,\theta}^*$, sowie die Fouriertransformation (A.12), (A.13).

A. Nützliche Theoreme

1.) Sei $\eta_0 \in \Gamma_{a,\theta}^*$ fest gewählt und $0 < t \leq 1$. Sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Bezeichne mit $\|\psi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \psi(x)|$ die Halbnormen, welche die Schwartzraumtopologie erzeugen. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda + it\eta_0) \psi(\lambda) d\lambda \right| &\leq \int \mathbf{C} |\psi(\lambda)| d\lambda \leq C \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} (1 + |\lambda|^k) |\psi(\lambda)| \\ &\leq C(\|\psi\|_{0,0} + \|\psi\|_{k,0}), \end{aligned}$$

wobei $C = \mathbf{C} \cdot \int d\lambda (1 + |\lambda|^k)^{-1}$ und k genügend groß ist. Daraus folgt, dass $F(\lambda + i\eta_0)$ eine temperierte Distribution ist. Setze

$$h(t) \equiv \hat{T}_{t,\eta_0}(\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda + it\eta_0) \psi(\lambda) d\lambda.$$

Da h differenzierbar ist können wir schreiben

$$h(t) = h(1) - \int_t^1 h'(t') dt'.$$

Es gilt $h'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda + it\eta_0) (-i\eta_0 \frac{\partial}{\partial \lambda}) \psi(\lambda) d\lambda$ und somit $|h'(t)| \leq \mathbf{C} \|\psi\|_{0,1}$. Daraus folgt

$$\left| \int_t^1 h'(t') dt' \right| \leq \int_t^1 \mathbf{C} \|\psi\|_{0,1} dt' = \mathbf{C} \|\psi\|_{0,1} (1 - t),$$

d. h. der Limes für $t \downarrow 0$ existiert und

$$|h(0)| \leq C(\|\psi\|_{0,0} + \|\psi\|_{k,0}) + \mathbf{C} \|\psi\|_{0,1}.$$

Somit ist $h(0) = \hat{T}_{0,\eta_0}$ eine temperierte Distribution.

2.) Seien nun $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma_{a,\theta}^*$ und $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{T}_{t,\eta_1}(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda + it\eta_1) \hat{\psi}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda + it\eta_2 - it(\eta_2 - \eta_1)) \hat{\psi}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda + it\eta_2) \hat{\psi}(\lambda + it(\eta_2 - \eta_1)) d\lambda \\ &= \hat{T}_{t,\eta_2}(e^{-t(\eta_2 - \eta_1)x} \psi(x)), \end{aligned} \tag{A.4}$$

wobei im dritten Schritt benutzt wurde, dass $\hat{\psi}$ eine ganze Funktion ist und die Paley-Wiener Abschätzungen erfüllt.

Wir wollen nun zeigen, dass der letzte Term für $t \downarrow 0$ gegen $\hat{T}_{0,\eta_2}(\psi)$ konvergiert. Wie man leicht sieht, gilt $e^{-t(\eta_2-\eta_1)x} \psi \xrightarrow{t \downarrow 0} \psi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} & \left| \hat{T}_{t,\eta_2}(e^{-t(\eta_2-\eta_1)x} \psi) - \hat{T}_{0,\eta_2}(\psi) \right| \\ & \leq \left| \hat{T}_{t,\eta_2}(e^{-t(\eta_2-\eta_1)x} \psi) - \hat{T}_{0,\eta_2}(e^{-t(\eta_2-\eta_1)x} \psi) \right| + \left| \hat{T}_{0,\eta_2}(e^{-t(\eta_2-\eta_1)x} \psi) - \hat{T}_{0,\eta_2}(\psi) \right|. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Da \hat{T}_{0,η_2} eine temperierte Distribution ist, wird der zweite Summand auf der rechten Seite beliebig klein für genügend kleine t .

Wir benutzen nun Thm.V.8. aus [RS80], welches besagt, dass aus punktweiser Konvergenz von Distributionen uniforme Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt. Betrachte nun die Familie von Schwartzfunktionen $\mathcal{F} := \{e^{-t(\eta_2-\eta_1)x} \psi : t \in [0, 1]\}$. Diese Familie ist in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ kompakt.³ Wegen $\hat{T}_{t,\eta_2}(\psi) \rightarrow \hat{T}_{0,\eta_2}(\psi)$ folgt uniforme Konvergenz auf kompakten Mengen, d. h.

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |\hat{T}_{t,\eta_2}(f) - \hat{T}_{0,\eta_2}(f)| < \varepsilon, \quad \text{für genügend kleine } t.$$

Im ersten Summanden in (A.5) steht eine Funktion aus \mathcal{F} , daher ist er sicherlich kleiner als das Supremum über alle Funktionen aus \mathcal{F} und es gilt

$$\hat{T}_{t,\eta_2}(e^{-t(\eta_2-\eta_1)x} \psi) \rightarrow \hat{T}_{0,\eta_2}(\psi).$$

Aus (A.4) folgt $\hat{T}_{0,\eta_1}(\psi) = \hat{T}_{0,\eta_2}(\psi)$ und weil $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist gilt

$$\hat{T}_{0,\eta_1} = \hat{T}_{0,\eta_2}.$$

3.) Sei $\eta_1 \in \Gamma_{a,\theta}^*$ gegeben und $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\phi) \subset \{x : \eta_1 \cdot x < 0\}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in \text{supp} \phi$ gilt $\eta_1 \cdot x \leq -\varepsilon$. Man beachte, dass $\check{\phi}$ ganz analytisch ist und man für jedes N eine Konstante C_N finden kann, so dass

$$\begin{aligned} |\check{\phi}(\lambda + is\eta_1)| &= \left| (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\lambda + is\eta_1) \cdot x} \phi(x) dx \right| \\ &\leq \frac{C_N e^{-s\varepsilon}}{1 + |\lambda - is\eta_1|^N}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Die Cauchyformel liefert

$$\begin{aligned} T_{t,\eta_1}(\phi) &= \hat{T}_{t,\eta_1}(\check{\phi}) \\ &= \int F(\lambda + it\eta_1) \check{\phi}(\lambda) d\lambda \\ &= \int F(\lambda + i(t+s)\eta_1) \check{\phi}(\lambda + is\eta_1) d\lambda. \end{aligned}$$

³Es genügt Folgenkompaktheit zu zeigen. Jede Folge f_n in \mathcal{F} entspricht einer Folge t_n in $[0, 1]$ die eine konvergente Teilfolge $t_{n_k} \rightarrow \tau$ besitzt. Da $\text{supp} \psi$ kompakt ist, zeigt man, dass dann auch f_{n_k} in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen $e^{-\tau(\eta_2-\eta_1)x} \psi$ konvergiert.

Die Voraussetzung (A.2) und Gleichung (A.6) liefern

$$T_{t,\eta_1}(\phi) \leq C e^{-s\varepsilon}, \quad \text{für beliebiges } s > 0. \quad (\text{A.7})$$

Daraus folgt $T_{t,\eta_1}(\phi) = 0$. Daher ist der Träger von T_{t,η_1} für alle $t > 0$ im Halbraum $\{x : \eta_1 \cdot x \geq 0\}$ enthalten. Da $T_{t,\eta_1} \rightarrow T$ für $t \downarrow 0$ schließen wir

$$\text{supp } T \subset \{x : \eta_1 \cdot x \geq 0\}.$$

Da $\overline{\Gamma_{a,\theta}}$ der Schnitt aller abgeschlossener Halbräume $\{x : \eta \cdot x \geq 0\}$ für alle $\eta \in \Gamma_{a,\theta}^*$ ist, gilt

$$\text{supp } T \subset \overline{\Gamma_{a,\theta}}.$$

Schließlich sei $\check{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int F(\lambda + i\eta)\psi(\lambda)d\lambda &= \int F(\lambda + is\eta)\psi(\lambda + (s-1)i\eta)d\lambda \\ &= \hat{T}_{s,\eta}(\widehat{e^{-(s-1)\eta x} \check{\psi}}) \\ &\xrightarrow{s \rightarrow 0} \hat{T}(\widehat{e^{\eta x} \check{\psi}}) \end{aligned}$$

und

$$\hat{T}(\widehat{e^{\eta x} \check{\psi}}) = T(e^{-\eta x} \hat{\psi}) = e^{-\eta x} T(\hat{\psi}) = \widehat{e^{-\eta x} T(\psi)},$$

d. h. man erhält F aus T via (A.3). □

A.2. Kompakte Operatoren

Ein Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X, Y , welcher beschränkte in präkompakte Mengen abbildet, heißt kompakt. Ein Operator ist genau dann kompakt, wenn $\{Tx_n\}$ für jede beschränkte Folge $\{x_n\} \subset X$ eine konvergente Teilfolge in Y besitzt.

Wir zeigen die nützliche Eigenschaft kompakter Operatoren, dass schwach konvergente in normkonvergente Folgen abgebildet werden. Der Beweis setzt sich zusammen aus [RS80, Thm. VI.11] und [Yo80, V.1 Thm. 3].

Theorem A.2. *Seien X und Y Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ ein kompakter Operator. Sei $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge in X , die auf einer dichten Teilmenge schwach gegen $x_\infty \in X$ konvergiert, d. h.*

1. $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_\infty)$ für alle $f \in D'$ aus einer dichten Teilmenge D' aus dem Dualraum X' .

Dann konvergiert die Folge $\{Tx_n\}$ in Y in Norm gegen $\{Tx_\infty\}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\{x_n\}$ schwach gegen x_∞ konvergiert. Für jedes $g \in X'$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $f \in D'$, so dass $\|g - f\| < \varepsilon$. Daher gilt

$$\begin{aligned} |g(x_n) - g(x_\infty)| &\leq |g(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_\infty)| + |f(x_\infty) - g(x_\infty)| \\ &\leq \varepsilon \|x_n\| + |f(x_n) - f(x_\infty)| + \varepsilon \|x_\infty\|. \end{aligned}$$

Da $f \in D'$ finden wir $\lim_{n \rightarrow \infty} |g(x_n) - g(x_\infty)| \leq 2\varepsilon \sup_{1 \leq n \leq \infty} \|x_n\|$. Dies bedeutet, dass x_n schwach gegen x_∞ konvergiert.

Wir zeigen nun, dass ein kompakter Operator schwach konvergente in normkonvergente Folgen abbildet. Sei $y_n := Tx_n$. Dann gilt $l(y_n) - l(y) = (T'l)(x_n - x)$ für alle $l \in Y'$. Also konvergiert $\{y_n\}$ schwach in Y gegen $y = Tx$. Angenommen $\{y_n\}$ konvergierte nicht in Norm, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ mit $\|y_{n_k} - y_n\| \geq \varepsilon$. Da die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ beschränkt ist und T kompakt, hat $\{y_{n_k}\}$ eine Teilfolge, die gegen ein $\tilde{y} \neq y$ konvergiert. Dann muss diese Teilfolge auch schwach gegen \tilde{y} konvergieren, was aber unmöglich ist, da y_n schwach gegen y konvergiert. Also konvergiert $y_n = Tx_n$ in Norm. \square

In unseren Anwendungen wird der Banachraum X die Keilalgebra $\mathcal{M}(W_r)$ sein. Da die schwache Banachraumtopologie von $\mathcal{M}(W_r)$ stärker als die schwache Operatortopologie ist, ist das vorherige Theorem nicht direkt anwendbar. Mit der schwachen Banachraumtopologie zu arbeiten ist zu kompliziert, aber wir zeigen nun, dass für unsere Anwendung die Konvergenz bestimmter Matricelemente ausreicht.

Theorem A.3. Sei $\{\mathcal{M}, U, \Omega\}$ eine rechte Standardkeilalgebra, Δ bezeichne den modularen Operator von (\mathcal{M}, Ω) . Sei $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{M} , so dass

$$i) \sup_{n \geq 1} \|W_n\| < \infty,$$

$$ii) \langle \Psi, W_n \Omega \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \Psi, W_\infty \Omega \rangle \text{ gilt für ein } W_\infty \in \mathcal{M} \text{ und für alle } \Psi \in \mathcal{H}.$$

Der Operator $\Xi_a : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$ sei für $a \in W_r$ definiert durch $M \mapsto \Delta^{1/4} U(a) M \Omega$.

Wenn Ξ_a ein kompakter Operator ist, dann konvergiert $\{\Xi_a W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} in Norm

$$\|\Xi_a W_n - \Xi_a W_\infty\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis. Sei $a \in W_r$, schreibe Ξ für Ξ_a . Nach (2.20) gilt $\mathcal{M}\Omega \subset \mathfrak{D}(\Delta^{1/4})$, außerdem ist $\Delta^{1/4}$ selbstadjungiert und $\|\Xi_a\| = 1$. Aus ii) folgt, dass für $\psi \in \mathcal{M}\Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \psi, \Xi W_n \rangle &= \langle \psi, \Delta^{1/4} U(a) W_n \Omega \rangle = \langle U(a)^* \Delta^{1/4} \psi, W_n \Omega \rangle \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle U(a)^* \Delta^{1/4} \psi, W_\infty \Omega \rangle = \langle \psi, \Delta^{1/4} U(a) W_\infty \Omega \rangle = \langle \psi, \Xi W_\infty \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Wir zeigen nun, dass $\{\Xi W_n\}$ in \mathcal{H} schwach gegen ΞW_∞ konvergiert. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{M}\Omega$ dicht in \mathcal{H} , d. h. für jedes $\Psi \in \mathcal{H}$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\psi \in \mathcal{M}\Omega$, so dass $\|\Psi - \psi\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned} & |\langle \Psi, \Xi W_n \rangle - \langle \Psi, \Xi W_\infty \rangle| \\ & \leq |\langle \Psi, \Xi W_n \rangle - \langle \psi, \Xi W_n \rangle| + |\langle \psi, \Xi W_n \rangle - \langle \psi, \Xi W_\infty \rangle| + |\langle \psi, \Xi W_\infty \rangle - \langle \Psi, \Xi W_n \rangle| \\ & = |\langle \Psi - \psi, \Xi W_n \rangle| + |\langle \psi, \Xi W_n \rangle - \langle \psi, \Xi W_\infty \rangle| + |\langle \psi - \Psi, \Xi W_\infty \rangle| \\ & \leq \|\Psi - \psi\| \|\Xi W_n\| + |\langle \psi, \Xi W_n \rangle - \langle \psi, \Xi W_\infty \rangle| + \|\psi - \Psi\| \|\Xi W_\infty\| , \end{aligned}$$

wegen (A.8) wird der mittlere Term für große n kleiner als jedes ε und wegen $\|\Xi\| = 1$ folgt mit $i)$

$$\leq \varepsilon(2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \|W_n\| + 1) < \varepsilon' .$$

Sei Ξ kompakt und nehmen wir an, dass ΞW_n nicht in Norm gegen ΞW_∞ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $\{\Xi W_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ und ein ε , so dass $\|\Xi W_{n_k} - \Xi W_\infty\| \geq \varepsilon$. Da $\{W_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in \mathcal{M} und Ξ kompakt ist, besitzt $\{\Xi W_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, die gegen ein $\Psi \neq \Xi W_\infty$ (in Norm) konvergiert. Dann muss diese Teilfolge auch schwach gegen Ψ konvergieren, was aber unmöglich ist, da $\{\Xi W_n\}$ schwach gegen ΞW_∞ konvergiert. Daher führt die Annahme zu einem Widerspruch und ΞW_n konvergiert in Norm gegen ΞW_∞ . \square

A.3. Operatoren im schwachen Abschluss der lokalen Algebren

Seien \mathcal{H}, K, S wie in Lemma 3.4.

Satz A.4. Sei $\phi \in \mathcal{H}$ und sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathcal{O})$, so dass

$$\|K f_n - \phi\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Dann gibt es einen Operator $W(\phi) \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$, so dass $W(f_n) \rightarrow W(\phi)$ in der starken Operatorortopologie.

Beweis. Definiere $W(\phi)$ durch

$$W(\phi)\eta(\psi) := e^{-1/4\|\phi\|^2 - 1/2\langle \phi, \psi \rangle} \eta(\phi + \psi) , \quad \forall \psi \in \mathcal{H} . \quad (\text{A.9})$$

Wir zeigen, dass $W(f_n)$ in der starken Operatorortopologie gegen $W(\phi)$ konvergiert.

Sei $\psi \in \mathcal{H}$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}
 & \|W(f_n)\eta(\psi) - W(\phi)\eta(\psi)\|^2 \\
 &= \|W(f_n)\eta(\psi)\|^2 + \|W(\phi)\eta(\psi)\|^2 - 2 \operatorname{Re} \left[\left(W(f_n)\eta(\psi), W(\phi)\eta(\psi) \right) \right] \\
 &= \|e^{-1/4\|Kf_n\|^2 - 1/2\langle Kf_n, \psi \rangle} \eta(Kf_n + \psi)\|^2 + \|e^{-1/4\|\phi\|^2 - 1/2\langle \phi, \psi \rangle} \eta(\phi + \psi)\|^2 \\
 &\quad - 2 \operatorname{Re} \left[e^{-1/4\|Kf_n\|^2 - 1/4\|\phi\|^2 - 1/2\langle Kf_n, \psi \rangle - 1/2\overline{\langle \phi, \psi \rangle}} e^{\langle Kf_n + \psi, \phi + \psi \rangle} \right] \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Die Folge $\{W(f_n)\Phi\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also für alle Φ aus der dichten Teilmenge $\operatorname{Span}\{\eta(\psi) : \psi \in \mathcal{H}\}$. Sei nun $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ beliebig. Aus

$$\begin{aligned}
 \|W(f_n)\Psi - W(\phi)\Psi\| &\leq \|W(f_n)\Psi - W(f_n)\Phi\| + \|W(f_n)\Phi - W(\phi)\Phi\| \\
 &\quad + \|W(\phi)\Phi - W(\phi)\Psi\| \\
 &\leq (1 + \|W(\phi)\|)\|\Psi - \Phi\| + \|W(f_n)\Phi - W(\phi)\Phi\|
 \end{aligned}$$

folgt, dass $\{W(f_n)\Psi\}$ für alle $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ gegen $W(\phi)\Psi$ konvergiert. Da $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ stark abgeschlossen ist, folgt $W(\phi) \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$. \square

Satz A.5. *Sei ϕ ein Element in \mathcal{H} , so dass für alle Testfunktionen f mit Träger im linken Keil gilt*

$$\operatorname{Im} \langle \phi, Kf \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\operatorname{reell}}(W_l). \quad (\text{A.10})$$

Dann ist der wie in (A.9) definierte Operator $W(\phi)$ ein Element in $\mathcal{M}(W_r)$. Ist andererseits $W(\phi) \in \mathcal{M}(W_r)$, dann gilt (A.10).

Beweis. Für die Keilalgebren gilt Dualität, d. h. $\mathcal{M}(W_r) = \mathcal{M}(W_l)'$ (siehe Thm. 3.10). Es genügt zu zeigen, dass $W(\phi)$ mit allen Weyloperatoren in $\mathcal{M}(W_l)$ kommutiert. Denn sei $B \in \mathcal{M}(W_l)$ beliebig, dann existierten Operatoren $A_i \in \operatorname{Span}\{W(f) : f \in \mathcal{D}_{\operatorname{reell}}(W_l)\}$, die schwach gegen B konvergieren. Für beliebige $\Psi, \Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 \left(\Psi, (W(\phi)A_i - A_i W(\phi))\Phi \right) &= \left(W(\phi)^*\Psi, A_i\Phi \right) - \left(\Psi, A_i W(\phi)\Phi \right) \\
 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \left(W(\phi)^*\Psi, B\Phi \right) - \left(\Psi, B W(\phi)\Phi \right) = \left(\Psi, (W(\phi)B - B W(\phi))\Phi \right).
 \end{aligned}$$

Es folgt, dass $W(\phi) \in \mathcal{M}(W_l)'$, wenn $W(\phi)$ mit allen $W(f)$ aus $\mathcal{M}(W_l)$ kommutiert.

Sei nun $\psi \in \mathcal{H}$ beliebig und $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_l)$. Schreibe $Kf = \hat{f}$, dann gilt

$$\begin{aligned} (W(\phi)W(f) - W(f)W(\phi))\eta(\psi) &= e^{-\frac{1}{4}\|\phi\|^2 - \frac{1}{4}\|\hat{f}\|^2} e^{-\frac{1}{2}\langle\phi,\psi\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle\hat{f},\psi\rangle} \\ &\quad \left(e^{-\frac{1}{2}\langle\phi,\hat{f}\rangle} - e^{\frac{1}{2}\langle\hat{f},\phi\rangle} \right) \eta(\hat{f} + \phi + \psi) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\iff e^{-\frac{1}{2}\langle\phi,\hat{f}\rangle} = e^{\frac{1}{2}\langle\hat{f},\phi\rangle} \iff \text{Im} \langle\phi, \hat{f}\rangle . \end{aligned}$$

Wir sehen, dass (A.10) gilt, wenn $W(\phi) \in \mathcal{M}(W_r)$.

Andererseits ist $[W(\phi), W(f)]\eta(\psi) = 0$ für alle ψ in \mathcal{H} , wenn (A.10) gilt. Da die lineare Hülle der $\eta(\psi)$ dicht in $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ und der Kommutator ein beschränkter Operator ist, gilt $[W(\phi), W(f)] = 0$. \square

A.4. Koordinaten in $d = 2$

Neben den Raum-Zeit-Koordinaten x_0, x_1 verwenden wir auch Lichtkegelkoordinaten x_{\pm}

$$x_{\pm} := \frac{1}{2}(x_0 \pm x_1) . \quad (\text{A.11})$$

Wir definieren die Impulse $p_{\pm} := p_0 \pm p_1$. Die Fouriertransformierte einer Funktion $x_{\pm} \mapsto f(x_+, x_-)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ ist

$$\hat{f}(p_+, p_-) := \frac{1}{2\pi} \iint dx_+ dx_- f(x_+, x_-) e^{i(p_+ x_+ + p_- x_-)} . \quad (\text{A.12})$$

Diese Definition ist so gewählt, dass $\tilde{f}(p_0, p_1) = \hat{f}(p_+, p_-)$ gilt. Die inverse Fouriertransformation ist gegeben durch

$$f(x_+, x_-) := \frac{1}{2\pi} \iint dp_+ dp_- \hat{f}(p_+, p_-) e^{-i(x_+ p_+ + x_- p_-)} . \quad (\text{A.13})$$

Der Vorwärtslichtkegel V_+ wird in Lichtkegelkoordinaten beschrieben durch

$$V_+ = \{p_+, p_- : p_+ > 0, p_- > 0\} . \quad (\text{A.14})$$

Außerdem werden wir in V_+ Rapiditätskoordinaten θ_+, θ_- verwenden. Diese sind definiert durch

$$p_+ = m_0 e^{\theta_+} , \quad p_- = m_0 e^{-\theta_-} . \quad (\text{A.15})$$

Für die Fouriertransformation in Rapiditätskoordinaten schreiben wir \check{f} , für $p \in V_+$ gilt dann

$$\hat{f}(p_+, p_-) = \check{f}(\theta_+, \theta_-) . \quad (\text{A.16})$$

Der Vorwärtslichtkegel wird dann beschrieben durch

$$V_+ = \{\theta_+, \theta_- : \theta_+ \in \mathbb{R}, \theta_- \in \mathbb{R}\} . \quad (\text{A.17})$$

Außerdem werden wir in den Rechnungen folgende Substitution für die Rapiditätskoordinaten verwenden

$$u = \frac{\theta_+ - \theta_-}{2}, \quad v = \frac{\theta_+ + \theta_-}{2}. \quad (\text{A.18})$$

Der Vorwärtslichtkegel wird dann beschrieben durch

$$V_+ = \{u, v : u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{A.19})$$

Betrachten wir das Maß

$$d\Omega := d\mu(m) \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \rho(m^2) dm^2 \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = 2m\rho(m^2) dm \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}}, \quad (\text{A.20})$$

hierbei sei ρ eine temperierte Distribution mit Träger in $[0, \infty)$. In Raum-Zeit-Koordinaten wird dieses Maß zu

$$d\Omega = dp_0 dp_1 2\rho(p_0^2 - p_1^2). \quad (\text{A.21})$$

In Lichtkegelkoordinaten besitzt es die einfache Form

$$d\Omega = dp_+ dp_- \rho(p_+ p_-), \quad (\text{A.22})$$

die sich in Rapiditätskoordinaten schreibt

$$d\Omega = d\theta_+ d\theta_- m_0^2 e^{\theta_+ - \theta_-} \rho(m_0^2 e^{\theta_+ - \theta_-}). \quad (\text{A.23})$$

Dies wird für u, v zu

$$d\Omega = dudv \frac{m_0^2}{2} e^{2u} \rho(m_0^2 e^{2u}). \quad (\text{A.24})$$

A.5. Der Operator Ξ

Wir wollen die Wirkung von Ξ_a auf $\mathcal{M}(W_r)$ bestimmen. Sei $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(\mathbb{R}^2)$, dann gilt nach (3.23) und (3.21)

$$\Delta^{it} \eta(Kf) = \eta(u(B(t))Kf) = \eta(K(B(t)f)). \quad (\text{A.25})$$

Für $f \in \mathcal{S}$ gilt $Kf = \hat{f}$. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\widehat{(B(t)f)}(p_+, p_-) = \hat{f} \left(\frac{p_+}{\cosh(2\pi t) - \sinh(2\pi t)}, \frac{p_-}{\cosh(2\pi t) + \sinh(2\pi t)} \right).$$

Definieren wir $c_{\pm}(t) := \cosh(2\pi t) \mp \sinh(2\pi t)$ erhält man für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$(u(B(t))\hat{f})(p_+, p_-) = \hat{f}\left(\frac{p_+}{c_+(t)}, \frac{p_-}{c_-(t)}\right)$$

und wir erhalten die stetige Fortsetzung von $u(B(t))$ auf \mathcal{H}

$$(u(B(t))\psi)(p_+, p_-) = \psi\left(\frac{p_+}{c_+(t)}, \frac{p_-}{c_-(t)}\right), \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \quad (\text{A.26})$$

Sei nun $\eta(\psi) \in \mathcal{M}(W_r)\Omega$ für ein $\psi \in \mathcal{H}$. Nach (2.20) ist $\eta(\psi) \in \mathcal{D}(\Delta^{1/4})$ und

$$\Delta^{1/4}\eta(\psi) = \eta(u(B(-i/4))\psi), \quad (\text{A.27})$$

aus (A.26) erhält man

$$(u(B(-i/4))\psi)(p_+, p_-) = \psi(ip_+, -ip_-). \quad (\text{A.28})$$

Die Translationen stellen sich in Lichtkegelkoordinaten durch

$$\widehat{(T_a f)}(p_+, p_-) = e^{ia_+ p_+ + ia_- p_-} \hat{f}(p_+, p_-), \quad \forall a = (a_+, a_-) \in \mathbb{R}^2,$$

dar. Wir erhalten die Fortsetzung auf \mathcal{H} durch

$$(u(a)\psi)(p_+, p_-) = e^{ia_+ p_+ + ia_- p_-} \psi(p_+, p_-), \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \quad (\text{A.29})$$

Sei $a = (a_+, -a_-) \in W_r$, $a_{\pm} > 0$, und $\eta(\psi) = M\Omega$ für ein $M \in \mathcal{M}(W_r)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Xi_a M &= \Delta^{1/4}U(a)M\Omega = \Delta^{1/4}U(a)\eta(\psi) \\ &= \Delta^{1/4}\eta(u(a)\psi) = \eta(u(B(-i/4))u(a)\psi) \\ &= \eta(\mathcal{X}\psi), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\psi(p_+, p_-) &= (u(B(-i/4))u(a)\psi)(p_+, p_-) \\ &= e^{-a_+ p_+ - a_- p_-} \psi(ip_+, -ip_-). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

B. Die Folge $\{g_n\}$

Wir verwenden in diesem Kapitel Rapiditäts- und Lichtkegelkoordinaten (siehe A.4).

B.1. Eigenschaften von \hat{g}_n

Definiere eine Folge von Funktionen $\{\check{g}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\check{g}_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \check{g}_n(\theta_+, \theta_-) := C_n e^{-n(\theta_+ - \theta_-)^2/4} \frac{1}{\left(\sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right) + i\right)^2}, \quad (\text{B.1})$$

wobei $C_n \in \mathbb{R}$, so dass $|C_n| \propto \sqrt[4]{n}$. Wir betrachten \check{g}_n als eine Funktion auf V_+ in Rapiditätskoordinaten θ_{\pm} , d. h. $p_{\pm} = m_0 e^{\pm\theta_{\pm}}$. Durch

$$\hat{g}_n(p_+, p_-) = \check{g}_n\left(\ln\left(\frac{p_+}{m_0}\right), -\ln\left(\frac{p_-}{m_0}\right)\right) = \check{g}_n(\theta_+, \theta_-), \quad p \in V_+,$$

erhalten wir eine Funktion auf $V_+ = \{p_{\pm} > 0\}$. Wir können durch \check{g}_n sogar eine Funktion \hat{g}_n auf ganz \mathbb{R}^2 definieren:

$$\hat{g}_n(p_+, p_-) := \begin{cases} \check{g}_n\left(\ln\left(\frac{|p_+|}{m_0}\right), -\ln\left(\frac{|p_-|}{m_0}\right)\right), & p_+ > 0, p_- > 0, \\ \check{g}_n\left(\ln\left(\frac{|p_+|}{m_0}\right) + i\pi, -\ln\left(\frac{|p_-|}{m_0}\right)\right), & p_+ < 0, p_- > 0, \\ \check{g}_n\left(\ln\left(\frac{|p_+|}{m_0}\right), -\ln\left(\frac{|p_-|}{m_0}\right) + i\pi\right), & p_+ > 0, p_- < 0, \\ \check{g}_n\left(\ln\left(\frac{|p_+|}{m_0}\right) + i\pi, -\ln\left(\frac{|p_-|}{m_0}\right) + i\pi\right), & p_+ < 0, p_- < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Lemma B.1. *Es gilt $\hat{g}_n \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Beweis. Man erhält $\hat{g}_n(p_+, p_-)$ aus den Randwerten von $\check{g}_n(\theta_+, \theta_-)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} dp_+ dp_- |\hat{g}_n| &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 dp_+ dp_- |\hat{g}_n|}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} dp_+ dp_- |\hat{g}_n|}_{\text{II}} \\ &+ \underbrace{\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 dp_+ dp_- |\hat{g}_n|}_{\text{III}} + \underbrace{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dp_+ dp_- |\hat{g}_n|}_{\text{IV}}. \end{aligned}$$

B. Die Folge $\{g_n\}$

Da I = IV und II = III gilt und

$$\begin{aligned} \text{I} &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 dp_+ dp_- |\hat{g}_n| = m_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_+ d\theta_- |\check{g}_n(\theta_+ + i\pi, \theta_- + i\pi)| \\ &= \frac{m_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv e^{2u} |C_n| e^{-nu^2} \left| \frac{1}{(\sinh(v + i\pi) + i)^2} \right| \\ &= \frac{m_0^2}{2} |C_n| \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-nu^2 + 2u} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{\cosh(v)^2} < \infty, \end{aligned}$$

wobei C eine Konstante bezeichnet, sowie

$$\begin{aligned} \text{II} &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} dp_+ dp_- |\hat{g}_n| = m_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_+ d\theta_- |\check{g}_n(\theta_+ + i\pi, \theta_-)| \\ &= \frac{m_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv e^{2u} |C_n| e^{-nu^2 + n\pi^2/4} \left| \frac{1}{(\sinh(v + i\pi/2) + i)^2} \right| \\ &= \frac{m_0^2}{2} |C_n| \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-nu^2 + 2u + n\pi^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{(\cosh(v) + 1)^2} < \infty, \end{aligned}$$

ist $\hat{g}_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Der Beweis für $L^2(\mathbb{R}^2)$ ist analog. \square

Wir werden nun mit Hilfe von Thm. A.1 zeigen, dass \hat{g}_n , im Sinne von Distributionen, die Fouriertransformierte einer Funktion g_n mit Träger im rechten Keil W_r ist.

Lemma B.2. *Man kann \check{g}_n analytisch in den Streifen*

$$S_{(0,\pi),(0,\pi)} := \{(\theta_+ + i\eta_+, \theta_- + i\eta_-) \in \mathbb{C}^2 : (\eta_+, \eta_-) \in (0, \pi) \times (0, \pi)\}$$

fortsetzen. Die Funktion \hat{g}_n ist in $H_+ \times H_- = \{(z_+, z_-) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im}(z_{\pm}) \geq 0\}$ analytisch.

Beweis. \check{g}_n ist analytisch, wenn Analytizität für jede Variable gilt. Da $e^{-nz^2/4}$ und $\sinh(z)$ ganze Funktionen sind, genügt es zu zeigen, dass $\frac{1}{(\sinh(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}) + i)^2}$ in $S_{(0,\pi),(0,\pi)}$ keine Polstelle hat. Da

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + i\frac{\eta_+ + \eta_-}{2}\right) &= \\ &= \cos\left(\frac{\eta_+ + \eta_-}{2}\right) \sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\eta_+ + \eta_-}{2}\right) \cosh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right) \end{aligned}$$

und $\frac{\eta_+ + \eta_-}{2} \in (0, \pi)$ ist $\sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + i\frac{\eta_+ + \eta_-}{2}\right) \neq i$. Beachte nun, dass der Koordinatenwechsel

$$\zeta : (\theta_+ + i\eta_+, \theta_- + i\eta_-) \mapsto (m_0 e^{\theta_+ + i\eta_+}, m_0 e^{-\theta_- - i\eta_-}) = (z_+, z_-)$$

eine biholomorphe Abbildung von $S_{(0,\pi),(0,\pi)}$ auf $H_+ \times H_-$ ist. Die Umkehrfunktion verwendet nur den Hauptzweig der Logarithmusfunktion

$$\zeta^{-1}(z_+, z_-) = (\ln\left(\frac{z_+}{m_0}\right), -\ln\left(\frac{z_-}{m_0}\right)),$$

und dieser ist für $z_{\pm} \in H_{\pm}$ analytisch. Wegen $\hat{g}_n(z_+, z_-) = \check{g}_n \circ \zeta^{-1}(z_+, z_-)$ folgt die Behauptung. \square

Lemma B.3. Für alle $(z_+, z_-) \in H_+ \times H_-$ gilt für eine Konstante C , die nur von n abhängt,

$$|\check{g}_n(\zeta^{-1}(z_+, z_-))| = |\hat{g}_n(z_+, z_-)| \leq C.$$

Beweis. Sei $(z_+, z_-) \in H_+ \times H_-$ beliebig und $\zeta^{-1}(z_+, z_-) = (\theta_+ + i\eta_+, \theta_- + i\eta_-)$. Es gilt

$$|\check{g}_n(\zeta^{-1}(z_+, z_-))| = |C_n| e^{-n((\theta_+ - \theta_-) + i(\eta_+ - \eta_-))^2/4} \left| \left(\sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + i\frac{\eta_+ + \eta_-}{2}\right) + i \right)^{-2} \right|,$$

schreibe $x = \frac{\theta_+ + \theta_-}{2}$ und $y = \frac{\eta_+ + \eta_-}{2}$,

$$\begin{aligned} &= |C_n| e^{-n(\theta_+ + \theta_-)^2/4 + n(\eta_+ - \eta_-)^2/4} \frac{1}{|\sinh(x + iy) + i|^2} \\ &\leq \frac{|C_n| e^{n\pi^2/4}}{\cos^2(y) \sinh^2(x) + \sin^2(y) \cosh^2(x) + 2 \sin(y) \cosh(x) + 1} \\ &\leq |C_n| e^{n\pi^2/4}. \end{aligned}$$

\square

Lemma B.4. Es existiert eine temperierte Distribution T_n mit Träger in $\overline{W_r}$, so dass \hat{T}_n der Randwert von $\hat{g}_n(z)$, $z \in H_+ \times H_-$, im Sinne von Distributionen ist.

Beweis. $\hat{g}_n(z)$ ist im Kegel $H_+ \times H_-$ analytisch und durch eine Konstante beschränkt. Es gilt $H_+ \times H_- = \mathbb{R}^n + i\Gamma_{a,\theta}^*$, mit $a = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ und $\theta = \pi/4$. In diesem Fall ist $\Gamma_{a,\theta}^* = \Gamma_{a,\theta}$ und dies ist gerade der rechte Keil W_r in Lichtkegelkoordinaten. Nach Theorem A.1 existiert eine Distribution T_n mit den genannten Eigenschaften. \square

Lemma B.5. *Es gilt*

$$T_n(\phi) = \iint_{\mathbb{R}^2} d^2x g_n(x) \phi(x) \quad (\text{B.3})$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Beweis. T_n wurde in Lemma B.4 dadurch definiert, dass die Fouriertransformierte \hat{T}_n der Randwert von $\hat{g}_n(z)$ ist. Aus Lemma B.1 geht hervor, dass der Randwert $\hat{g}_n(p)$ eine Funktion aus $L^1(\mathbb{R}^2)$ ist und deswegen eine Fouriertransformierte

$$g_n(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} d^2p \hat{g}_n(p) e^{-ipx}$$

besitzt, die stetig ist und im Unendlichen verschwindet. Für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\begin{aligned} T_n(\hat{\phi}) &= \iint_{\mathbb{R}^2} d^2p \hat{g}_n(p) \phi(p) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} d^2p \hat{g}_n(p) \iint_{\mathbb{R}^2} d^2x \hat{\phi}(x) e^{-ipx} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} d^2x \hat{\phi}(x) \iint_{\mathbb{R}^2} d^2p \hat{g}_n(p) e^{-ipx} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} d^2x g_n(x) \hat{\phi}(x) , \end{aligned}$$

im dritten Schritt konnte der Satz von Fubini verwendet werden, da wegen $\hat{g}_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\iint d^2p d^2x |\hat{g}_n(p)| |\hat{\phi}(x)| < \infty .$$

□

Die Funktion

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

ist glatt und hat Träger im abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B(0,1)}$ und ihr Integral über \mathbb{R}^2 ist endlich. $\beta(x) := \alpha(x) [\int \alpha(x) d^2x]^{-1}$ hat Träger in $\overline{B(0,1)}$ und $\int \beta(x) d^2x = 1$. Definiere für $\lambda > 0$,

$$\beta_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} \beta\left(\frac{x}{\lambda}\right) . \quad (\text{B.4})$$

Dann ist $\beta_\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ und $\text{supp } \beta_\lambda = \overline{B(0,\lambda)}$ und

$$\int \beta_\lambda(x) d^2x = 1 . \quad (\text{B.5})$$

Lemma B.6. g_n ist eine reelle Funktion in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ mit Träger

$$\text{supp } g_n \subset W_r . \quad (\text{B.6})$$

Beweis. Da g_n stetig ist und im Unendlichen verschwindet, ist g_n Element in L^1_{loc} . Die Bedingung, für $g_n(x) \in \mathbb{R}$ lautet

$$\overline{\hat{g}_n(-p)} = \hat{g}_n(p) \quad \Leftrightarrow \quad \check{g}_n(\theta + i\pi) = \overline{\check{g}_n(\theta)} . \quad (\text{B.7})$$

Zeigen wir, dass g_n die Realitätsbedingung (B.7) erfüllt

$$\begin{aligned} \check{g}_n(\theta_+ + i\pi, \theta_- + i\pi) &= C_n e^{-n(\theta_+ - \theta_-)^2/4} \frac{1}{\left(\sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + i\pi\right) + i\right)^2} \\ &= C_n e^{-n(\theta_+ - \theta_-)^2/4} \frac{1}{\left(-\sinh\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right) + i\right)^2} \\ &= \overline{\check{g}_n(\theta_+, \theta_-)} . \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\text{supp } g_n \subset W_r$. Aus Lemma B.4 folgt, dass die Distribution T_n Träger in $\overline{W_r}$ hat. Das heißt

$$T_n(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x g_n(x) \phi(x) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \text{ mit } \text{supp } \phi \not\subset \overline{W_r} . \quad (\text{B.8})$$

Wir zeigen, dass dann $g_n(x) = 0$ für alle $x \in \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{W_r}$ folgt. Seien Ω_1, Ω_2 zwei beschränkte Gebiete und $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2 \subseteq \overline{\Omega_2} \subset \Omega$. Wir betrachten $f = g_n \chi_{\Omega_2}$. Es ist klar, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Sei β_λ die „Delta-Folge“ von C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger, definiert in (B.4). Wenn λ_0 genügend klein ist, folgt aus (B.8), dass für alle $0 < \lambda \leq \lambda_0$ gilt

$$(f * \beta_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \beta_\lambda(x - y) dy = \int_{\Omega} g_n(y) \beta_\lambda(x - y) dy = 0, \quad \forall x \in \Omega_1 .$$

Es gilt außerdem

$$(f * \beta_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x - \lambda y) \beta(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 .$$

Daraus folgt

$$(f * \beta_\lambda)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} [f(x - \lambda y) - f(x)] \beta(y) dy ,$$

B. Die Folge $\{g_n\}$

und hieraus die Abschätzung

$$\|f * \beta_\lambda - f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \int_{\mathbb{R}^2} \|f(\cdot - \lambda y) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \beta(y) dy \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

Aus $f * \beta_\lambda(x) = 0$ für alle $x \in \Omega_1$ folgt

$$\|f\|_{L^1(\Omega_1)} \leq \|f - f * \beta_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

Aus $f(x) = g_n(x)$ für $x \in \Omega_1$ und der Stetigkeit von g_n folgt, dass $g_n \equiv 0$ für alle $\Omega_1 \subset \Omega$. Dies bedeutet schließlich

$$g_n \equiv 0 \text{ in } \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus W_r.$$

□

B.2. Konvergenz in \mathcal{H}

Wir betrachten den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(V_+, \rho(p_+ p_-) dp_+ dp_-)$, wobei ρ eine messbare, positive Funktion mit Träger in \mathbb{R}_+ ist. Für $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ ist

$$\langle \phi, \psi \rangle = \iint_{V_+} dp_+ dp_- \rho(p_+ p_-) \overline{\phi(p_+, p_-)} \psi(p_+, p_-).$$

Lemma B.7. *Sei ρ polynomial beschränkt, d. h. $\rho(x) \leq \alpha(1 + |x|)^N$, für positive Konstanten α, N . Dann ist $\hat{g}_n \in \mathcal{H}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt für $|C_n| \propto \sqrt[4]{n}$*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \iint_{V_+} dp_+ dp_- \rho(p_+ p_-) |\hat{g}_n(p_+, p_-)|^2 \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} d\theta_+ d\theta_- m_0^2 e^{\theta_+ - \theta_-} \rho(m_0^2 e^{\theta_+ - \theta_-}) |\check{g}_n(\theta_+, \theta_-)|^2 \\ &= \frac{m_0^2}{2} |C_n|^2 \iint_{\mathbb{R}^2} dudv \rho(m_0^2 e^{2u}) e^{-2nu^2 + 2u} \frac{1}{\cosh(v)^4}, \end{aligned} \tag{B.9}$$

da ρ positiv ist und als polynomial beschränkt angenommen wurde, folgt

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{m_0^2}{2} |C_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{\cosh(v)^4} \int_{-\infty}^{\infty} du \alpha(1 + m_0^2 e^{2u})^N e^{-2nu^2+2u} \\
 &= \sum_{M=0}^N \frac{m_0^2}{2} |C_n|^2 \frac{4}{3} \alpha m_0^{2M} \binom{N}{M} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-2nu^2+2(M+1)u} \\
 &= \sum_{M=0}^N \frac{\alpha m_0^{(2M+2)}}{3} \binom{N}{M} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{(M+1)^2}{2n}} \frac{|C_n|^2}{\sqrt{n}} < \infty .
 \end{aligned}$$

D. h. es gilt

$$\|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} < \infty . \quad (\text{B.10})$$

Nach Voraussetzung ist $|C_n|^2 \propto \sqrt{n}$, d.h. $\left\{ \frac{|C_n|^2}{\sqrt{n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt ein Supremum C und konvergiert für $n \rightarrow \infty$. Daher ist

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{M=0}^N C \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}} m_0^{(2M+2)} \binom{N}{M} < \infty , \quad (\text{B.11})$$

und somit existiert auch $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\hat{g}_n\|$. Dass $\|\hat{g}_n\|$ konvergiert, folgt mit Lebesgues Theorem. Setze $z := \sqrt{n}u$, dann wird (B.9) zu

$$\begin{aligned}
 \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \frac{m_0^2}{2} \frac{|C_n|^2}{\sqrt{n}} \iint_{\mathbb{R}^2} dz dv \rho(m_0^2 e^{2z/\sqrt{n}}) e^{-2z^2+2z/\sqrt{n}} \frac{1}{\cosh(v)^4} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{m_0^2}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|^2}{\sqrt{n}} \right) \rho(m_0^2) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{4}{3} .
 \end{aligned}$$

Hier bei haben wir $\alpha(1 + m_0^2 e^{2z})^N e^{-2z^2+2|z|}$ als Majorante verwendet. \square

Lemma B.8. Sei ρ polynomial beschränkt, sowie $|C_n| \propto \sqrt[4]{n}$. Dann gilt

$$\langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 , \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) .$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle &= \iint_{V_+} dp_+ dp_- \rho(p_+ p_-) \overline{\hat{f}(p_+, p_-)} \hat{g}_n(p_+, p_-) \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} d\theta_+ d\theta_- m_0^2 e^{\theta_+ - \theta_-} \rho(m_0^2 e^{\theta_+ - \theta_-}) \overline{\hat{f}(\theta_+, \theta_-)} \hat{g}_n(\theta_+, \theta_-) \\
 &= \frac{m_0^2}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} dudv e^{2u} \rho(m_0^2 e^{2u}) \overline{\hat{f}(u+v, u-v)} C_n e^{-nu^2} \frac{1}{(\sinh(v) + i)^2} ,
 \end{aligned}$$

B. Die Folge $\{g_n\}$

verwende $z := \sqrt{n}u$,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m_0^2}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} dz dv \frac{C_n}{\sqrt{n}} \rho(m_0^2 e^{2z/\sqrt{n}}) e^{-z^2+2z/\sqrt{n}} \frac{\overline{\check{f}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}+v, \frac{z}{\sqrt{n}}-v\right)}}{(\sinh(v)+i)^2} \\
 \Rightarrow |\langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle| &\leq \frac{m_0^2}{2} \frac{|C_n|}{\sqrt{n}} \iint_{\mathbb{R}^2} dz dv \left| \rho(m_0^2 e^{2z/\sqrt{n}}) \right| e^{-z^2+2z/\sqrt{n}} \frac{\left| \check{f}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}+v, \frac{z}{\sqrt{n}}-v\right) \right|}{\cosh(v)^2}.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Weil $|C_n|/\sqrt{n} \propto 1/\sqrt[4]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, genügt es, dass das Integral in (B.12) für $n \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Da $\hat{f} \in \widehat{\mathcal{D}}(W_r)$, existiert $C := \sup_{p \in V_+} |\hat{f}(p)|$. Für polynomial beschränktes ρ gilt

$$\begin{aligned}
 \rho(m_0^2 e^{2z/\sqrt{n}}) e^{-z^2+2z/\sqrt{n}} \overline{\check{f}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}+v, \frac{z}{\sqrt{n}}-v\right)} &\leq \alpha(1+m_0^2 e^{2z/\sqrt{n}})^N e^{-z^2+2z/\sqrt{n}} C \\
 &\leq \alpha(1+m_0^2 e^{2|z|})^N e^{-z^2+2|z|} C.
 \end{aligned}$$

Da die Schranke integrierbar ist, folgt aus Lebesgues Satz über dominierte Konvergenz, dass für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle| &\leq \frac{m_0^2}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{\sqrt{n}} \right) \iint_{\mathbb{R}^2} dz dv \alpha(1+m_0^2)^N e^{-z^2} \frac{C}{\cosh(v)^2} \\
 &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{\sqrt{n}} \right) \alpha \sqrt{\pi} C m_0^2 (1+m_0^2)^N = 0.
 \end{aligned}$$

□

Satz B.9. Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, so dass $\hat{u} \in \mathcal{H}$. Sei außerdem β_λ die „Delta-Folge“ von C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger aus (B.4). Dann gilt

i) $\|\widehat{u * \beta_\lambda}\|_{\mathcal{H}} \leq \|\hat{u}\|_{\mathcal{H}},$

ii) $\|\widehat{u * \beta_\lambda} - \hat{u}\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow 0$.

Beweis. Wir schreiben $p = (p_+, p_-)$ und $\varrho(p) := \rho(p_+ p_-)$.

$$\begin{aligned}
 i) \quad \|\widehat{u * \beta_\lambda}\|_{\mathcal{H}}^2 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \widehat{u * \beta_\lambda}(p) \right|^2 \\
 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} dx (u * \beta_\lambda)(x) e^{ipx} \right|^2 \\
 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 x e^{ipx} \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 y \beta_\lambda(y) u(x-y) \right|^2 \\
 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 y \beta_\lambda(y) \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 x e^{ipx} u(x-y) \right|^2 \\
 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 y \beta_\lambda(y) e^{ipy} \hat{u}(p) \right|^2 \\
 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) |\hat{u}(p)|^2 \left| \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 y \beta_\lambda(y) e^{ipy} \right|^2 \\
 &\leq \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) |\hat{u}(p)|^2 = \|\hat{u}\|_{\mathcal{H}}^2.
 \end{aligned}$$

Im vierten Schritt wurde der Satz von Fubini verwendet. Dies ist für $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$ möglich, da $\iint dy dx \beta_\lambda(y) |u(x-y)| = \|u\|_{L^1}$. Im Schritt zur letzten Zeile wurde $\left| \iint d^2 y \beta_\lambda(y) e^{ipy} \right|^2 \leq \left(\iint_{\mathbb{R}^2} d^2 y |\beta_\lambda(y)| \right)^2 \leq 1$ verwendet.

ii) Sei $\varepsilon > 0$. Da die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in \mathcal{H} dicht liegen, ist es möglich ein $\hat{\phi} \in \mathcal{H}$ mit kompaktem Träger in V_+ zu wählen, so dass $\|\hat{\phi} - \hat{u}\| < \varepsilon$.

$$\|\widehat{u * \beta_\lambda} - \hat{u}\|_{\mathcal{H}} \leq \|\widehat{u * \beta_\lambda} - \widehat{\phi * \beta_\lambda}\|_{\mathcal{H}} + \|\widehat{\phi * \beta_\lambda} - \hat{\phi}\|_{\mathcal{H}} + \|\hat{\phi} - \hat{u}\|_{\mathcal{H}}. \quad (\text{B.13})$$

Aus i) folgt $\|\widehat{u * \beta_\lambda} - \widehat{\phi * \beta_\lambda}\|_{\mathcal{H}} = \|(\widehat{u - \phi}) * \beta_\lambda\|_{\mathcal{H}} \leq \|\widehat{u - \phi}\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$. Somit ist

$$\|\widehat{u * \beta_\lambda} - \hat{u}\|_{\mathcal{H}} \leq 2\varepsilon + \|\widehat{\phi * \beta_\lambda} - \hat{\phi}\|_{\mathcal{H}}. \quad (\text{B.14})$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{\phi * \beta_\lambda} - \hat{\phi}\|_{\mathcal{H}}^2 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \widehat{\phi * \beta_\lambda}(p) - \hat{\phi}(p) \right|^2 \\
 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 x e^{ipx} \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 y \beta_\lambda(y) \phi(x-y) - \hat{\phi}(p) \right|^2 \\
 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \iint_{\mathbb{R}^2} d^2 y \beta_\lambda(y) e^{ipy} \hat{\phi}(p) - \hat{\phi}(p) \right|^2 \\
 &= \iint_{V_+} d^2 p \varrho(p) \left| \hat{\phi}(p) \right|^2 \left| \hat{\beta}_\lambda(p) - 1 \right|^2,
 \end{aligned}$$

B. Die Folge $\{g_n\}$

und da $\hat{\phi}$ kompakten Träger $\text{supp}(\hat{\phi}) \subset V_+$ hat, folgt

$$\begin{aligned} &= \iint_{\text{supp}(\hat{\phi})} d^2p \varrho(p) \left| \hat{\phi}(p) \right|^2 \left| \hat{\beta}_\lambda(p) - 1 \right|^2 \\ &\leq \sup_{p \in \text{supp}(\hat{\phi})} \left| \hat{\beta}_\lambda(p) - 1 \right|^2 \|\hat{\phi}\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Da $\text{supp}(\hat{\phi})$ kompakt ist, gibt es für alle $\varepsilon' > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|e^{ipx} - 1| \leq \varepsilon'$ für alle $p \in \text{supp}(\hat{\phi})$ und für alle x mit $|x| \leq \delta$ gilt. Daher gilt für alle $p \in \text{supp}(\hat{\phi})$, wenn $\lambda \leq \delta$,

$$\left| \hat{\beta}_\lambda(p) - 1 \right| = \left| \iint_{\mathbb{R}^2} d^2x \beta_\lambda(x) (e^{ipx} - 1) \right| \leq \iint_{B(0, \lambda)} d^2x \beta_\lambda(x) |e^{ipx} - 1| \leq \varepsilon'.$$

Wenn λ hinreichend klein ist, gilt also $\|\widehat{\phi * \beta_\lambda} - \hat{\phi}\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon$. In (B.14) eingesetzt erhalten wir für hinreichend kleine λ

$$\|\widehat{u * \beta_\lambda} - \hat{u}\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon. \quad (\text{B.15})$$

□

Satz B.10. Sei $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Dann existiert eine Folge von Testfunktionen $f_k \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r)$, so dass

$$\|f_k - \hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{B.16})$$

Beweis. Betrachte Gebiete $\Omega_k \subset W_r$, so dass $\overline{\Omega_k}$ kompakt und $\Omega_{k-1} \subset \Omega_k$ und $\bigcup_k \Omega_k = W_r$. Seien $\chi_k \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r)$ Funktionen, die auf Ω_k identisch Eins sind. Definiere

$$f_k := \chi_k g_n * \beta_{1/j(k)}. \quad (\text{B.17})$$

Wir wählen $j(k)$, so dass $j(k) \geq k$ und $\Omega_k + \overline{B(0, 1/j(k))}$ eine kompakte Teilmenge von W_r ist. Daher ist $\chi_k g_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Wegen $\beta_\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ ist $\chi_k g_n * \beta_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und

$$\text{supp } \chi_k g_n * \beta_\lambda \subset \Omega_k + \overline{B(0, \lambda)}.$$

Nach Definition von $j(k)$ gilt

$$\text{supp } f_k \subset W_r \text{ ist kompakt.} \quad (\text{B.18})$$

Da $g_n, \chi_k, \beta_{1/j(k)}$ reell sind, ist auch f_k reell.

Wähle ein $\phi \in \mathcal{D}(W_r)$, so dass $\|\hat{\phi} - \hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon$. Dann gilt für genügend große k nach Satz B.9

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}_k - \hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} &= \|\widehat{\chi_k g_n * \beta_{1/j(k)}} - \hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|\widehat{\chi_k g_n * \beta_{1/j(k)}} - \widehat{\phi * \beta_{1/j(k)}}\|_{\mathcal{H}} + \|\widehat{\phi * \beta_{1/j(k)}} - \hat{\phi}\|_{\mathcal{H}} + \|\hat{\phi} - \hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|\widehat{\chi_k g_n} - \hat{\phi}\|_{\mathcal{H}} + 2\varepsilon \\
&\leq \|\widehat{\chi_k g_n} - \hat{g}_n\|_{\mathcal{H}} + 3\varepsilon.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Da $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ vorausgesetzt wurde, gilt

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\chi_k g_n} - \hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{V_+} d^2 p \varrho(p) |\widehat{\chi_k g_n}(p) - \hat{g}_n(p)|^2 \\
&\leq \|\varrho\|_{L^\infty} \int_{V_+} d^2 p |\widehat{\chi_k g_n}(p) - \hat{g}_n(p)|^2 \leq \|\varrho\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 p |\widehat{\chi_k g_n}(p) - \hat{g}_n(p)|^2 \\
&= \|\varrho\|_{L^\infty} \|\widehat{\chi_k g_n} - \hat{g}_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|\varrho\|_{L^\infty} \|\chi_k g_n - g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned}$$

Da der Träger von g_n in $\overline{W_r}$ liegt, berechnet sich die L^2 -Norm

$$\begin{aligned}
\|\chi_k g_n - g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\overline{W_r}} d^2 x |\chi_k(x) g_n(x) - g_n(x)|^2 \\
&= \int_{W_r \setminus \Omega_k} d^2 x |\chi_k(x) - 1|^2 |g_n(x)|^2 \leq \int_{W_r \setminus \Omega_k} d^2 x |g_n(x)|^2 \\
&= \int_{W_r} d^2 x |g_n(x)|^2 - \int_{\Omega_k} d^2 x |g_n(x)|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Aus (B.20) und (B.19) folgt (B.16). \square

B. Die Folge $\{g_n\}$

C. Die Folge $\{W(\hat{g}_n)\}$

Im letzten Kapitel haben wir die Folge $\{g_n\}$ definiert. Wir sehen nun, dass man jeder Funktion g_n einen Operator $W(\hat{g}_n)$ in der rechten Keilalgebra $\mathcal{M}(W_r)$ zuordnen kann. $W(\hat{g}_n)$ ist festgelegt durch

$$W(\hat{g}_n)\eta(\psi) = e^{-\frac{1}{4}\|\hat{g}_n\|^2 - \frac{1}{2}\langle \hat{g}_n, \psi \rangle} \eta(\hat{g}_n + \psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Satz C.1. *Sei ρ polynomial beschränkt. Dann gilt $W(\hat{g}_n) \in \mathcal{M}(W_r)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei zunächst $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Es gibt eine Folge $\{f_k\} \subset \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r)$, definiert in (B.17), so dass \hat{f}_k in \mathcal{H} gegen \hat{g}_n konvergiert (siehe Satz B.9). Satz A.4 besagt, dass dann die Folge von Weyloperatoren $\{W(f_k)\} \subset \mathcal{M}(W_r)$ in der starken Operator-topologie gegen einen Operator $W(\hat{g}_n)$ konvergiert. Da $\mathcal{M}(W_r)$ stark abgeschlossen ist, gilt $W(\hat{g}_n) \in \mathcal{M}(W_r)$.

Sei nun ρ polynomial beschränkt. Aus der Dualität $\mathcal{M}(W_r)' = \mathcal{M}(W_l)$ folgt nach Satz A.5, dass $W(\hat{g}_n) \in \mathcal{M}(W_r)$ genau dann, wenn $\text{Im} \langle \hat{g}_n, \hat{f} \rangle = 0$ für alle $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_l)$ ist. Definiere nun

$$\rho_k(p) := \begin{cases} \rho(p), & \text{falls } \rho(p) \leq k \\ k, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $\rho_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ und für das Modell mit Lehmann-Maß ρ_k ist $W(\hat{g}_n) \in \mathcal{M}(W_r)$. Nach Satz A.5 gilt für alle $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_l)$

$$\text{Im} \langle \hat{g}_n, \hat{f} \rangle_{\rho_k} = \int_{V_+} dp_+ dp_- \rho_k(p_+ p_-) (\overline{\hat{g}_n \hat{f}} - \hat{g}_n \overline{\hat{f}}) = 0.$$

Offensichtlich ist $\rho_k(p_+ p_-) |\overline{\hat{g}_n \hat{f}} - \hat{g}_n \overline{\hat{f}}| \leq \rho(p_+ p_-) |\overline{\hat{g}_n \hat{f}} - \hat{g}_n \overline{\hat{f}}|$ und ρ_k konvergiert punktweise gegen ρ . Wenn die rechte Seite integrierbar ist, liefert der Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \hat{g}_n, \hat{f} \rangle_\rho &= \int_{V_+} dp_+ dp_- \rho(p_+ p_-) (\overline{\hat{g}_n \hat{f}} - \hat{g}_n \overline{\hat{f}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{V_+} dp_+ dp_- \rho_k(p_+ p_-) (\overline{\hat{g}_n \hat{f}} - \hat{g}_n \overline{\hat{f}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Im} \langle \hat{g}_n, \hat{f} \rangle_{\rho_k} = 0. \end{aligned}$$

C. Die Folge $\{W(\hat{g}_n)\}$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\rho(p_+p_-)|\overline{\hat{g}_n\hat{f}} - \hat{g}_n\overline{\hat{f}}|$ über V_+ integrierbar ist. Aus

$$\begin{aligned} \int_{V_+} dp_+dp_- \left| \sqrt{\rho(p_+p_-)} \hat{g}_n \right|^2 &= \int_{V_+} dp_+dp_- \rho(p_+p_-) |\hat{g}_n|^2 = \|\hat{g}_n\|^2 < \infty, \\ \int_{V_+} dp_+dp_- \left| \sqrt{\rho(p_+p_-)} \overline{\hat{f}} \right|^2 &= \int_{V_+} dp_+dp_- \rho(p_+p_-) |\hat{f}|^2 = \|\hat{f}\|^2 < \infty, \end{aligned}$$

folgt $\rho\hat{g}_n\overline{\hat{f}} \in L^1(V_+, d^2p)$ und somit

$$\begin{aligned} \int_{V_+} dp_+dp_- \rho(p_+p_-) |\overline{\hat{g}_n\hat{f}} - \hat{g}_n\overline{\hat{f}}| &\leq \int_{V_+} dp_+dp_- \rho(p_+p_-) (|\overline{\hat{g}_n\hat{f}}| + |\hat{g}_n\overline{\hat{f}}|) \\ &= \|\rho\hat{g}_n\overline{\hat{f}}\|_{L^1(V_+)} + \|\rho\overline{\hat{g}_n\hat{f}}\|_{L^1(V_+)} < \infty. \end{aligned}$$

□

Lemma C.2. Sei $W_\infty := e^{-\frac{1}{4}C} \mathbf{1}$, mit $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2$.

Die Folge $\{W(\hat{g}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt

- i) $\sup_{n \geq 1} \|W(\hat{g}_n)\| < \infty$,
- ii) $(\Psi, W(\hat{g}_n)\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\Psi, W_\infty\Omega)$ für alle $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Beweis. Dieselbe Rechnung wie (3.13) zeigt, dass

$$\|W(\hat{g}_n)\eta(\psi)\|^2 = \|\eta(\psi)\|^2, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Es folgt $\|W(\hat{g}_n)\| = 1$ für die stetige Fortsetzung von $W(\hat{g}_n)$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Somit ist i) erfüllt.

Setze $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}_n\|_{\mathcal{H}}^2$ und definiere $W_\infty := e^{-\frac{1}{4}C} \mathbf{1}$. Für alle $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r)$ gilt dann

$$\begin{aligned} (W(f)\Omega, W(\hat{g}_n)\Omega) &= (e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2} \eta(\hat{f}), e^{-\frac{1}{4}\|\hat{g}_n\|^2} \eta(\hat{g}_n)) = e^{-\frac{1}{4}(\|f\|^2 + \|\hat{g}_n\|^2)} (\eta(\hat{f}), \eta(\hat{g}_n)) \\ &= e^{-\frac{1}{4}(\|f\|^2 + \|\hat{g}_n\|^2)} e^{\frac{1}{2}\langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{4}(\|f\|^2 + C)} = e^{-\frac{1}{4}C} (e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2} \eta(\hat{f}), \eta(0)) \\ &= (W(f)\Omega, e^{-\frac{1}{4}C} \Omega) = (W(f)\Omega, W_\infty\Omega), \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass nach Lemma B.8 $\langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt. Sei \mathcal{A} die Algebra, die von den Operatoren $W(f)$ mit $f \in \mathcal{D}_{\text{reell}}(W_r)$ erzeugt wird. Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt daher

$$(A\Omega, W(\hat{g}_n)\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (A\Omega, W_\infty\Omega). \quad (\text{C.1})$$

Der Abschluss von \mathcal{A} in der starken Operatortopologie ist $\mathcal{M}(W_r) = \mathcal{A}''$ und Ω ist zyklisch für \mathcal{A} .¹

Es bleibt zu zeigen, dass *ii*) gilt. Sei $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ beliebig. Wähle eine Folge $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, so dass

$$A_k \Omega \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Psi .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left| (\Psi, W(\hat{g}_n)\Omega) - (\Psi, W_\infty\Omega) \right| &\leq \left| (\Psi, W(\hat{g}_n)\Omega) - (A_k, W(\hat{g}_n)\Omega) \right| \\ &\quad + \left| (A_k\Omega, W(\hat{g}_n)\Omega) - (A_k\Omega, W_\infty\Omega) \right| \\ &\quad + \left| (A_k\Omega, W_\infty\Omega) - (\Psi, W_\infty\Omega) \right| , \end{aligned}$$

wählt man k groß genug und verwendet *i*), folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass der erste und dritte Summand beliebig klein werden,

$$\begin{aligned} &< \varepsilon/2 + \left| (A_k\Omega, W(\hat{g}_n)\Omega) - (A_k\Omega, W_\infty\Omega) \right| \\ &< \varepsilon . \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus Gleichung (C.1) für genügend große n .

□

¹Da Ω zyklisch für \mathcal{M} ist, gibt es $\forall \Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ eine Folge $\{M_l\}$ in $\mathcal{M}(W_r)$, so dass $\|\Psi - M_l\Omega\| \rightarrow 0$. Außerdem gibt es für jedes $l \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{A_k\} \subset \mathcal{A}$, die stark gegen M_l konvergiert. Dann gilt für genügend große l, k : $\|\Psi - A_k\Omega\| \leq \|\Psi - M_l\Omega\| + \|M_l\Omega - A_k\Omega\| < \varepsilon$.

Literaturverzeichnis

- [Ar99] H. Araki, *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford University Press, 1999.
- [Ba95] H. Baumgärtel, *Operatoralgebraic Methods in Quantum Field Theory*, Akademie Verlag, 1995.
- [BW92] H. Baumgärtel, M. Wollenberg, *Causal Nets of Operator Algebras*, Akademie Verlag, 1992.
- [BW75] J. J. Bisognano, E. H. Wichmann, *On the duality condition for a Hermitian scalar field*, J. Math. Phys. **16**(4), 985, 1975.
- [Bo92] H. J. Borchers, *The CPT-Theorem in Two-dimensional Theories of Local Observables*, Commun. Math. Phys. **143**, 315-332, 1992.
- [Bo96] H. J. Borchers, *Translation Group and Particle Representations in Quantum Field Theory*, Lecture Notes in Physics 40, Springer, 1996.
- [Bo00] H. J. Borchers, *On revolutionizing quantum field theory with Tomita's modular theory*, J. Math. Phys. **41**(6), 3604, 2000.
- [BR87] O. Bratelli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*, Springer, 2. Aufl., 1987.
- [BR97] O. Bratelli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2*, Springer, 2. Aufl., 1997.
- [Bu74] D. Buchholz, *Product States for Local Algebras*, Commun. Math. Phys. **36**, 287-304, 1974.
- [BDL90a] D. Buchholz, C. D'Antoni, R. Longo, *Nuclear Maps and Modular Structures. I . General Properties*, J. Funct. Anal. **88**, 233-250, 1990.
- [BDL90b] D. Buchholz, C. D'Antoni, R. Longo, *Nuclear Maps and Modular Structures II : Applications to Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **129**, 115-138, 1990.
- [BL04] D. Buchholz, G. Lechner, *Modular Nuclearity and Localization*, Ann. Henri Poincaré **5**, 1065-1080, 2004.

- [BLS10] D. Buchholz, G. Lechner, S. J. Summers, *Warped Convolutions, Rieffel Deformations and the Construction of Quantum Field Theories*, [arXiv:1005.2656](#) [math-ph], 2010.
- [BS08] D. Buchholz, S. J. Summers, *Warped Convolutions: A Novel Tool in the Construction of Quantum Field Theories*, [arXiv:0806.0349](#) [math-ph], 2008.
- [BW86] D. Buchholz, E. H. Wichmann, *Causal Independence and the Energy-Level Density of States in Local Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **106**, 321-344, 1986.
- [DL84] S. Doplicher, R. Longo, *Standard and split Inclusions of von Neumann algebras*, Invent. math. **75**, 493-536, 1984.
- [GY00] J. Gaier, J. Yngvason, *Geometric modular action, wedge duality, and Lorentz covariance are equivalent for generalized free fields*, J. Math. Phys. **41**(9), 5910, 2000.
- [Ga75] W.-D. Garber, *The Connexion of Duality and Causal Properties for Generalized Free Fields*, Commun. Math. Phys. **42**, 195-208, 1975.
- [GL08] H. Grosse, G. Lechner, *Noncommutative Deformations of Wightman Quantum Field Theories*, JHEP **0809**, 131, 2008.
- [Gu08] D. Guido, *Modular theory for the von Neumann algebras of Local Quantum Physics*, [arXiv:0812.1511v1](#) [math.OA], 2008.
- [Ha96] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, Springer, 2. Aufl., 1996.
- [HK64] R. Haag, D. Kastler, *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*, J. Math. Phys. **5**(7), 848-861, 1964.
- [KR86] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol. II*, Academic Press, 1986.
- [KW91] B. S. Kay, R. M. Wald, *Theorems on the Uniqueness and Thermal Properties of Stationary, Nonsingular, Quasifree States on Spacetimes with a Bifurcate Killing Horizon*, Phys. Rep. **207**, No. 2, 49-136, 1991.
- [La74] L. J. Landau, *On Local Functions of Fields*, Commun. Math. Phys. **39**, 49-62, 1974.
- [Le06] G. Lechner, *On the Construction of Quantum Field Theories with Factorizing S-Matrices*, Dissertation, Universität Göttingen, 2006.

- [Lo79] R. Longo, *Notes on Algebraic Invariants for Non-commutative Dynamical Systems*, Commun. Math. Phys. **69**, 195, 1979.
- [Mü98] M. Müger, *Superselection structure of massive quantum field theory in 1+1 dimensions*, Rev. Math. Phys. **10**, 1147, 1998.
- [RS80] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
- [RS75] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, 1975.
- [SW78] R. F. Streater, A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, And all That*, Princeton University Press, 2. Aufl., 1978.
- [Yo80] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, 6. Auflage, 1980.

Danksagung

Ich danke Prof. Rehren für die bereitwillige Übernahme der Betreuung dieser Arbeit, sowie seine Bereitschaft jederzeit Fragen zu beantworten. Der Vorschlag dieses Themas stammt von Prof. Buchholz, dem ich für zahlreiche Diskussionen und sehr viele wertvolle Hinweise danke, ohne die diese Arbeit nicht entstanden wäre.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe sei gedankt für die vielen Diskussionen, Kaffeegespräche, Seminare, Fragen, Antworten, etc. welche diese Arbeit, mein Studium und die Zeit in Göttingen geprägt haben. Stefan Birkholz danke ich sehr für seine Hilfe bibliografischer Natur. Eric Morfa-Morales bin ich äußerst dankbar für seine detaillierte, kritische Korrektur. Außerdem danke ich den vielen anderen Personen, die ich mit Fragen und Problemen genervt habe oder die sonst irgendwie ihren Anteil am Entstehen dieser Arbeit haben.

Der größte Dank gebührt zweifellos meinen Eltern. Sie haben mein Studium durch finanzielle Unterstützung überhaupt ermöglicht. Stets hatten sie Vertrauen in mich und ihre Ermutigung war oft genug eine wertvolle Stütze.