Über die aus dem skalaren Wickquadrat eines konform kovarianten Vektorfeldes erzeugte Algebra und deren Beziehung zur Wightmanpositivität

Diplomarbeit

vorgelegt von

ANSGAR SCHNEIDER

aus

FOERDE

geboren in

SIEGEN

angefertigt

am Institut für theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

Mai 2005

Inhaltsverzeichnis

Notationskonventionen

Wir benutzen Einheiten, in denen $\hbar = c = 1$ gilt.

Die reellen und komplexen Zahlen bezeichen wir mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beginnen mit der Null: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Die natürlichen Zahlen ohne Null bezeichnen wir mit $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\}$.

Raumzeitindices in vier Dimensionen zählen wir mit $0, 1, 2, 3$ ab, und die Komponenten von Elementen aus (oder Funktionen nach) $\mathbb{R}^4 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^4$ oder $\mathbb{C}^4 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^4$ bezeichnen wir mit hochgestellten Indices, etwa $\mathbb{R}^4 \ni x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Wir wählen $\eta = (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\dots,3} = (\eta^{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\dots,3}$ mit $\eta_{00} = 1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1, \eta_{\mu\nu} = 0$, für $\mu \neq \nu$.

Hie und da werden wir den Riccikalkül in dem Sinne verwenden, daß wir Raumzeitindices mittels η hoch- oder herunterziehen, etwa für $x \in \mathbb{R}^4$, $x_\mu := \sum_\nu \eta_{\mu\nu} x^\nu$.

Die Euklidische Norm eines Elementes x aus $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, n=1,2,3,..., bezeichnen wir mit $|x|$.

Die Minkowskibilinearform ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \,.\,.. : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy := \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \end{array}$$

die dazugehörige quadratische Form bezeichen wir mit

$$\begin{array}{rcl} (\ .\ )^2 : \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x)^2 := xx, \end{array}$$

und hoffen, daß $(x)^2$ nicht mit der Komponente x^2 vewechselt wird.

Elemente $x \in \mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft $(x)^2 = 0$ nennen wir lichtartig, oder Nullvektoren. Den Vorwärtslichtkegel bezeichen wir mit $\overline{V}_+ := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p)^2 \geq 0, p^0 \geq 0\}$, dessen Rand bezeichnen wir mit $V_0^+ := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p)^2 = 0, p^0 \geq 0\}$ und das Innere mit $V_+ := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p)^2 > 0, p^0 > 0\}$.

Die Projektion der Raumzeit auf den Raum bezeichnen wir mit

$$\begin{array}{rcl} \vec{.} : \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x = (x^0, x^1, x^2, x^3) & \mapsto & \vec{x} := (x^1, x^2, x^3) \end{array}$$

und die Projektionen auf die einzelnen Komponenten mit $id^\mu : x \mapsto x^\mu$, $id_\mu : x \mapsto x_\mu$, für $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Wir nennen $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ den Raum der „echt beschränkten" Funktionen:

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^m) := \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \partial^\alpha f \text{ ist beschränkt für alle } \alpha \in \mathbb{N}^m\}.$$

Den Schwartzraum der unendlich oft differenzierbaren, schnell fallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ und seinen Dualraum, die temperierten Distributionen, mit $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Gelegentlich fassen wir $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ als Untervektoraum auf, etwa um Fouriertransformationen, von Elementen $f \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ zu berechnen.

Die Fouriertransformation auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$, bzw. auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ notieren wir mit $\hat{}: \mathscr{S}^{(\prime)}(\mathbb{R}^{4n}) \to \mathscr{S}^{(\prime)}(\mathbb{R}^{4n})$, die inverse Fouriertransformation mit $\check{} : \mathscr{S}^{(\prime)}(\mathbb{R}^{4n}) \to \mathscr{S}^{(\prime)}(\mathbb{R}^{4n})$, wobei wir die folgende Konvention treffen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(p_1, \dots, p_n) &:= \int f(x_1, \dots, x_n) \frac{e^{ix_1p_1}}{(2\pi)^2} \cdots \frac{e^{ix_np_n}}{(2\pi)^2}\, d(x_1, \dots, x_n),\\
\check{f}(p_1, \dots, p_n) &:= \int f(x_1, \dots, x_n) \frac{e^{-ix_1p_1}}{(2\pi)^2} \cdots \frac{e^{-ix_np_n}}{(2\pi)^2}\, d(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

dabei sind $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^4$.

Ist $E \cong \mathbb{C}^n$ mit Dualraum E', so ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, E)$ die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R}^m \to E$, mit $\{x \mapsto v(f(x))\} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, für alle $v \in E'$. Notieren wir für den Moment die Schwartzhalbnormen mit $\|.\|_{\alpha,\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$, so wird durch die Familie $(f \mapsto \|v \circ f\|_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^m, v\in E'}$ $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, E)$ wieder zu einem Fréchetraum mit Dual $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m, E)$. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, E)$ ist offenbar die Menge der Funktionen, die in jeder Komponente Schwartzsch sind. Die (komponentenweise) Fouriertransformation auf $\mathscr{S}^{(\prime)}(\mathbb{R}^{4n}, E)$ und ihre Inverse bezeichen wir ebenfalls mit $\hat{}$ und $\check{}$.

Zur Theorie von Distributionen, Fourieranalysis &c. siehe man etwa [RS1,2] oder [Hö].

Alle vorkommenden Maße auf $\mathbb{R}^m$ betrachten wir über derselben σ-Algebra (nämlich der Borel-σ-Algebra). Wir können also Summen von Maßen bilden.

Weiter nehmen wir an, daß alle Maße polynomial beschränkt sind, das heißt für jedes Maß μ gibt es Konstanten $C > 0, N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $R \geq 0$ gilt: $\mu(B_R) \leq C + R^N$, wobei $B_R := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq R\}$.

Unter einem reellen, polynomial beschränkten Maß ω verstehen wir eine temperierte Distribution $\omega : \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{C}$, die gegeben ist durch $f \mapsto \int f\ g\ d\mu$, für ein polynomial beschränktes Maß μ und eine meßbare Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \{-1, 1\}$, und wir definieren $\int f\ d\omega := \omega(f)$. Das Maß μ nennen wir auch den Betrag von ω und schreiben $\mu = |\omega|$ und $d\omega = g\ d\mu$.

Die Notation $d\omega = h\ d\mu$ verwenden wir, wenn $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ polynomial beschränkt ist, auch für $\omega : \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto \int f\ g\ d\rho \in \mathbb{C}$, mit[1] $g := sign \circ h$ und dem Maß ρ, das definiert ist durch $d\rho = |h|\ d\mu$, d.h.[2] $\rho(A) := \int \chi_A\ |h|\ d\mu$, für Borelmengen A.

Von technischer Bedeutung wird für uns die folgende Aussage sein:

[1]Wir wählen hier (etwas unüblich) $sign(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$.

[2]χ_M = charakteristische Funktion von M, also $\chi_M(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M \\ 0, & \text{falls } x \notin M \end{cases}$.

Lemma 0.1 Die Menge der reellen Maße ist ein reeller Untervektorraum von $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Beweis: Daß reelle Vielfache eines reellen Maßes wieder reelle Maße sind, ist klar.

Nehmen wir zwei reelle Maße ω_1, ω_2. Dann bekommen wir

$$(\omega_1 + \omega_2)(f) = \int f \; g_1 \; d\mu_1 + \int f \; g_2 \; d\mu_2,$$

für geeignete $g_1, g_2 : \mathbb{R}^m \to \{-1, 1\}$ und polynomial beschränkte Maße μ_1, μ_2. Nach dem Lebesgueschen Zerlegungssatz können wir μ_2 in eine Summe eines bzgl. μ_1 absolut stetigen Maßes und eines Maßes ρ, zerlegen, so daß ρ und μ_1 gegenseitig singulär sind, d.h. es gibt eine Menge $N \subset \mathbb{R}^m$, so daß $\rho(N) = 0$ und $\mu_1(\mathbb{R}^m \setminus N) = 0$ gilt. Man hat also $d\mu_2 = h \; d\mu_1 + d\rho$, mit einer positiven meßbaren Funktion h. Offenbar sind die beiden Maße $h \; d\mu_1$ und $d\rho$ polynomial beschräkt, da sie gegen $d\mu_2$ abschätzbar sind.

Wir bekommen nun

$$(\omega_1 + \omega_2)(f) = \int f \; (g_1 + g_2 h) \; d\mu_1 + \int f \; g_2 \; d\rho$$

und setzen: $d\mu' := |g_1 + g_2 h| \; d\mu_1 + d\rho$ sowie $g' := sign \circ (g_1 + g_2 h) \; \chi_N + g_2 \; \chi_{\mathbb{R}^m \setminus N}$, woraus sich ergibt, daß

$$(\omega_1 + \omega_2)(f) = \int f \; g' \; d\mu'.$$

$\omega_1 + \omega_2$ ist also gegeben durch das reelle Maß $d\omega' := g' \; d\mu'$. ■

Insbesondere werden wir mit den folgenden beiden (reellen) Maßen arbeiten: Das charakteristische Maß des Vorwärtslichtkegels V_+:

$$H_+ : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^4} f(p) \, dH_+(p) := \int_{\mathbb{R}^4} f(p) \; \chi_{V_+}(p) \; dp, \tag{0.1}$$

und das (bis auf skalare Vielfache und ein Diracmaß im Ursprung) eindeutige Lorentzinvariante Maß mit Träger auf dem Rand des Vorwärtslichtkegels V_0^+:

$$H_0 : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^4} f(p) \, dH_0(p) := \int_{\mathbb{R}^3} f(|\vec{p}|, \vec{p}) \, \frac{1}{2|\vec{p}|} \, d\vec{p}. \tag{0.2}$$

Den Träger von Funktionen f, (reellen) Maßen ω und Distributionen T kürzen wir mit $Tr \; f, Tr \; \omega$ bzw. $Tr \; T$ ab.

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einleitung

Eine der ersten Einsichten, die man beim Studium der axiomatischen Quantenfeldthorie gewinnt, ist, daß eine Quantenfeldtheorie vollständig durch die Angabe ihrer Vakuumerwartungswerte, den Wightmandistributionen oder n-Punkt-Funktionen, beschrieben wird[1]:

Die mathematisch formulierten, physikalischen Eigenschaften der Theorie, die Wightmanaxiome (Kovarianz, Spektrumsbedingung, Lokalität, Hilbertraum, &c.), bedingen ihrerseits gewisse mathematische Strukturen der Vakuumerwartungswerte. Hat man andererseits eine Familie von Distributionen gegeben, die nämliche Struktur besitzen, so kann man daraus die (bis auf unitäre Isomorphie eindeutige) Quantenfeldtheorie (re)konstruieren, deren Wightmandistributionen mit den gegebenen Distributionen übereinstimmen.

Einfache, quantenfeldtheoretische Modelle lassen sich nur durch Angabe einer Zweipunktfunktion konstruieren, denn aus einer gegebenen Zweipunktfunktion läßt sich bereits ein Quantenfeld[2] konstruieren, nämlich das (verallgemeinerte) freie Feld dieser Zweipunktfunktion, dessen n-Punkt-Funktionen bereits durch eine Summe von Produkten der Zweipunktfunktion festgelegt ist. Der Hilbertraum der Theorie ist dann der Fockraum eines (Einteilchen-) Hilbertraums, und die Zweipunktfunktion korrespondiert mit dem Skalarprodukt des Einteilchenraumes. Wir werden ein besonderes Augenmerk auf die damit verbundene Positivitätsbedingung der Zweipunktfunktion richten.

Fordert man über Poincarékovarianz hinaus konforme Kovarianz der Theorie, so ergeben sich daraus weitere Eigenschaften der Vakuumerwartungswerte. Tatsächlich ist dann die Zweipunktfunktion eines Feldes bereits vollständig durch dessen Spin und dessen sogenannte Skalendimension festgelegt. (Letztere macht eine Aussage über die Homogenität der n-Punkt-Funktionen (s. nächster Abschn.).)

Es stellt sich weiter heraus, daß die Positivitätsbedingung der Zweipunktfunktion eine untere Schranke, die sog. Unitaritätsschranke, für die Skalendimension des Feldes, in Abhängigkeit des Spins, liefert. Zum Beispiel muß im Falle eines Spin-1-Vektorfeldes die Skalendimension größer gleich drei sein.

[1] Siehe etwa [BLT].

[2] Wir betrachten hier ausschließlich reelle Felder B, d.h. $B(f)^\star = B(\bar{f})$.

Nichtsdestotrotz ist die (Re)Konstruktion eines freien Feldes aus einer gegebenen Zweipunktfunktion auch für Skalendimensionen möglich, die unterhalb der Unitaritätsschranke liegen (natürlich unter Verzicht der Hilberraumstuktur der Theorie). Der resultierende „Fockraum“ ist dann ein Raum, indem es Zustände negativer „Norm“ gibt; solche werden in der Literatur manchmal als Geister bezeichnet. In Kapitel 2 führen wir diese Konstruktion ausführlich für ein Spin-1-Vektorfeld

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \ni f \mapsto B(f) = \sum_\mu B_\mu(f^\mu)$$

(mit Skalendimension ≥ 2) durch. Zudem konstruieren wir das zugehörige normalgeordnete Skalarfeld

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^4) \ni g \mapsto \Phi(g),$$

das skalare Wickquadrat des Feldes B, das man heuristisch gern als $\Phi(x) = \sum_\mu \, :B_\mu(x)B^\mu(x):$ notiert. Es wird sich dann die Frage stellen, ob, trotz der Indefinitheit von B, die Vakuumerwartungswerte

$$W_{\Phi,n} : (g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) \mapsto \langle \Omega, \Phi(g_1) \ldots \Phi(g_n)\Omega \rangle_{\mathfrak{F}_0}, \quad \Omega = \text{Vakuum},$$

des skalaren Feldes Φ der Positivitätsbedingung

$$\sum_{m,n=0}^{N} W_{\Phi,n+m}(\tilde{G}_n \otimes G_m) \geq 0, \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}$$

mit $G_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4k})$ und $\tilde{G}_k(x_1, \ldots, x_k) := \overline{G_k(x_k, \ldots, x_1)}$, genügen, also Wightmandistributionen einer physikalischen Theorie sind, ob also das Feld Φ, im Gegensatz zu B, keine Geister erzeugt.

Daß überhaupt Anlaß zu dieser Vermutung gegeben ist, ist die bemerkenswerte Tatsache, daß sowohl auf Ebene der Zweipunktfunktion, als auch auf Ebene der Vierpunktfunktion die Wightmanpositivität von Φ erfüllt ist. Für die Zweipunktfunktion rechnet man dies schnell nach (s. Abschnitt 2.4). Die höheren n-Punkt-Funktionen sind nur mühsam explizit auf Positivität zu untersuchen, aber aus [NRT] entnimmt man, daß die Koeffizienten einer Partialwellenentwicklung der Vierpunktfunktion allesamt positiv sind, so daß auch die Vierpunktfunktion positiv ist.

Wir werden am Ende des dritten Kapitels sehen, daß man (nicht konform kovariante) Beispiele angeben kann, in denen die Positivitätsvermutung – die n-Punkt-Funktionen eines Feldes, das quadratisch in einem indefiniten Feld ist, erfüllen Wightmanpositivität – erfüllt ist, letztlich zeigt sich in Kapitel 4 jedoch, daß im konformen Fall auch Φ Geister hervorruft. Dazu werden wir zeigen, daß man den Operator $B(f_1)B(f_2)$ in einer geeigneten Weise durch Summen und Produkte von Operatoren $\Phi(g)$ approximieren kann. Man sieht nun leicht ein (Lemma 2.4), daß man f_1 und f_2 so wählen kann, daß $B(f_1)B(f_2)\Omega$ ein Geist ist, was somit impliziert, daß die Wightmanpositivität von Φ nicht erfüllt ist. Zur Approximation von $B(f_1)B(f_2)$ werden wir eine sechste Potenz der Operatoren $\Phi(g)$ benötigen; dies bedeutet für die Vakuumerwartungswerte, daß die Bedingung

$$\sum_{m,n=0}^{6} W_{\Phi,n+m}(\tilde{G}_n \otimes G_m) \geq 0$$

nicht für jede Wahl der G_k erfüllt ist, daß also spätestens auf Ebene der Zwölfpunktfunktion die Wightmanpositivität des Feldes Φ verletzt ist.

Das konstruierte skalare Feld Φ ist somit ein Gegenbeispiel zu der Annahme, daß in einer konform kovarianten Theorie aus Wightmanpositivität auf Ebene der Vierpunktfunktion schon Wightmanpositivität folgt. Diese Arbeit gliedert sich so als Spezialfall in ein Projekt [NRT] ein, (potentielle) Wightmandistributionen konformer Quantenfeldtheorien auf Wightmanpositivität hin zu untersuchen.

Das Zwischenergebnis (Satz 4.4), daß man $B(f_1)B(f_2)$ durch geeignete Limiten von Feldoperatoren von Φ generieren kann, ist ein Resultat, das den Ergebnissen von [SL] für das Wickquadrat des freien (geladenen) Skalarfeldes mit Masse m entspricht. Heuristisch gesagt reicht es für ein Wickquadrat $:\phi(x)\phi(x):$ eines skalaren Feldes ϕ aus, die Punkte x und $y = x$ zu trennen, um $\phi(x)\phi(y)$ zu generieren. In unserem Fall muß man außer den Punkten auch die kontrahierten Lorentzindices trennen. Möglich ist dies wegen des $x_\mu x_\nu$-Terms im Nenner und der Lichtkegelsingularität der Zweipunktfunktion (s. Anhang A).

1.2 Bemerkungen zur konformen Kovarianz

Die Kovarianz eines Quantenfeldes fordert man zumeist für die Überlagerungsgruppe $SL(2,\mathbb{C})$ der eigentlichen, orthochronen Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow = SO_e(1,3)$, bzw. an die Überlagerungsgruppe $\tilde{\mathcal{P}}$ der Poincarégruppe $\mathcal{P}_+^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \ltimes \mathbb{R}^4$. Die Kovarianz eines Feldes $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E) \ni f \mapsto B(f)$ ($E \cong \mathbb{C}^r$ ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum) wird dann als

$$U(\tilde{g})B(f)U(\tilde{g}^{-1}) = B(u(\tilde{g})f), \quad \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{P}}$$

formuliert. Dabei ist $U : \tilde{\mathcal{P}} \to Aut(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Theorie und $(u(\tilde{g})f)(x) := D(A^{-1})^T f(\Lambda(A^{-1})(x-a))$ für $\tilde{g} = (A,a) \in SL(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$, mit der zu A gehörigen Lorentztransformation $\Lambda(A)$ und einer weiteren r-dimensionalen Darstellung $D : SL(2,\mathbb{C}) \to Aut(E)$. Symbolisch mag man dies als

$$U(\tilde{g})B(x)U(\tilde{g}^{-1}) = D(A^{-1})B(\Lambda(A)x + a), \quad \tilde{g} = (A,a),$$

auffassen.

In konform kovarianten Theorien, fordert man stärkere Kovarianz, nämlich bezüglich der Überlagerungsgruppe $\tilde{G}$ der konforme Gruppe $G \supset \mathcal{P}_+^\uparrow$ des kompaktifizierten Minkowskiraumes $\overline{\mathbb{R}^4} \cong (S^1 \times S^3)/\mathbb{Z}_2$. Eine Einführung in die konforme Gruppe findet man etwa in [Scho].

Technisch bereitet das, wie nun dargelegt, etwas Schwierigkeiten:
Die konforme Gruppe besteht aus konformen Diffeomorphismen auf der Mannigfaltigkeit $\overline{\mathbb{R}^4}$. Sie wird durch Poincarétransformationen

$$\begin{aligned} (\Lambda,a) : x &\mapsto \Lambda x + a, &&\text{für } x \in \mathbb{R}^4, \\ \infty &\mapsto (\Lambda,a)\infty, &&\text{für } \infty \in \overline{\mathbb{R}^4} \setminus \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

und Dilatationen

$$\begin{aligned}\check{\lambda}: x &\mapsto \lambda x, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^4, \\ \infty &\mapsto \infty, \quad \text{für } \infty \in \overline{\mathbb{R}^4} \setminus \mathbb{R}^4,\end{aligned}$$

mit $\lambda > 0$, die die beiden disjunkten Teilmengen $\mathbb{R}^4$ und $\overline{\mathbb{R}^4} \setminus \mathbb{R}^4$ invariant lassen, sowie durch sog. spezielle konforme Transformationen

$$\begin{aligned}S_b : x &\mapsto \frac{x + (x)^2 b}{1 + 2xb + (x)^2 (b)^2}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^4 \setminus N(b), \\ \star &\mapsto S_b(\star), \quad \text{für } \star \in (\overline{\mathbb{R}^4} \setminus \mathbb{R}^4) \cup N(b),\end{aligned}$$

mit $b \in \mathbb{R}^4$ und $N(b) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 1 + 2xb + (x)^2(b)^2 \neq 0\}$, generiert – wir geben hier nicht die vollständigen Abbildungsvorschriften an, siehe dazu [Scho]. Letztere lassen offenbar $\mathbb{R}^4$ nicht invariant, sie überführen Punkte von $\mathbb{R}^4$ nach $\overline{\mathbb{R}^4} \setminus \mathbb{R}^4$ und umgekehrt.

Sei jetzt eine unitäre Darstellung $U : \tilde{G} \to Aut(\mathcal{H})$ gegeben. Da wir Quantenfelder als operatorwertige Distribution $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E) \ni f \mapsto B(f)$ auf dem Minkowskiraum $\mathbb{R}^4$ verstehen, ist eine Kovarianzbedingung der Art

$$U(\tilde{g})B(f)U(\tilde{g}^{-1}) = B(u(\tilde{g})f), \quad \tilde{g} \in \tilde{G}, \tag{1.1}$$

mit[3][4]

$$(u(\tilde{g})f)(x) := D(\tilde{g}^{-1})^T \ \det\left(\frac{\partial g^{-1}x}{\partial x}\right) f(g^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^4 \tag{1.2}$$

und einer r-dimensionalen Darstellung $D : \tilde{G} \to Aut(E)$, symbolisch geschrieben als

$$U(\tilde{g})B(x)U(\tilde{g}^{-1}) = D(\tilde{g}^{-1})B(gx), \tag{1.3}$$

für spezielle konforme Transformationen g offenbar problematisch, allerdings sinnvoll für die Untergruppe $G' \subset G$, die aus Poincarétransformationen und Dilatationen generiert wird.

Ist dann die Unterdarstellung $D|_{SL(2,\mathbb{C})} : SL(2,\mathbb{C}) \to Aut(E)$ irreduzibel, so findet man, weil Dilatationen und Lorentztransformationen miteinander kommutieren mit Hilfe von Schurs Lemma, daß $D(\check{\lambda}) = \lambda^{-\delta}\mathbf{1}_E$, mit einem $\delta \in \mathbb{R}$, und man spricht von der Skalendimension δ des Feldes B.

Für die Zweipunktfunktion

$$W : (f, g) \mapsto \langle \Omega, B(f)B(g)\Omega \rangle$$

des Feldes B bedeutet dies, daß selbige eine homogene Distribution vom Grade $\alpha = -2\delta$ ist.

Die gesamte konforme Gruppe brücksichtigen wir nun in ihrer infinitesimalen Form, d.h. wir konstruieren aus u aus Gleichung (1.2) eine Darstellung für ganz $\tilde{G}$, die eine Liealgebradarstellung besitzt, die den Schwartzraum invariant läßt.

[3] Das Weglassen der Schlange ist der kanonische Homomorphismus $\tilde{G} \to G$. Man beachte, daß $g \mapsto \tilde{g}$ nicht wohldefiniert ist.

[4] Man hat für die oben angegebenen g immer $\left|\det \frac{\partial g^{-1}x}{\partial x}\right| = \det \frac{\partial g^{-1}x}{\partial x}$, für $x \in \mathbb{R}^4 \subset \overline{\mathbb{R}^4}$.

Dies spiegelt schlicht die Tatsache wieder, daß „$\frac{\partial}{\partial b^\mu}\Big|_{b=0} f(S_b(x))$“ wohldefiniert ist. (Da die folgenden zwei Seiten eine rein technische Diskussion sind, mag man sie getrost überspringen und mit Gleichung (1.4) fortfahren.)

Wir wollen den Schwartzraum für den Moment als Untervektorraum von

$$\bigwedge_{k=0}^{3}(\overline{\mathbb{R}^4}, E) := \text{ Menge der glatten } E\text{-wertigen 4-Formen auf } \overline{\mathbb{R}^4}$$

auffassen, d.h. von der Menge der Zuordnungen

$$\overline{\mathbb{R}^4} \ni \star \mapsto \gamma(\star) = (\gamma_1(\star), \ldots, \gamma_r(\star)),$$

für die Real- und Imaginärteil der Komponenten 4-Formen sind, also $\Re\gamma_i(\star) \in \bigwedge_{k=0}^{3} T_\star\overline{\mathbb{R}^4}$. Für eine Karte $\kappa : U \subset \overline{\mathbb{R}^4} \to \kappa(U) \subset \mathbb{R}^4$ mit $\kappa(\star) = x, \star \in U$, bedeutet das somit

$$\Re\gamma_i(\star) = \Re(\gamma_i)_\kappa(x)\ dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3,$$

ebenso für $\Im\gamma_i(\star)$, und wir schreiben $\gamma(\star) = \gamma_\kappa(x)\ dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3$.

Die Einbettung $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E) \hookrightarrow \bigwedge_{k=0}^{3}(\overline{\mathbb{R}^4}, E)$ definieren wir nun lokal: Ist $\kappa : U \subset \overline{\mathbb{R}^4} \to \kappa(U) \subset \mathbb{R}^4$ eine Karte mit $\kappa(\star) = x$ und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E)$ so setzen wir

$$f^\wedge(\star) := \begin{cases} f_\kappa(x)\ dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3, & \text{falls } \star = \kappa^{-1}(x) \in \mathbb{R}^4 \subset \overline{\mathbb{R}^4} \\ 0, & \text{falls } \star \in \overline{\mathbb{R}^4} \setminus \mathbb{R}^4 \end{cases}.$$

Darin ist $f_\kappa(x) := \det\left(\frac{\partial\kappa^{-1}(x)}{\partial x}\right)(f \circ \kappa^{-1})(x)$ gesetzt, was wohldefiniert ist, denn für eine hinreichend kleine Umgebung $V \ni x$ gilt $\kappa^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^4$, falls $\star = \kappa^{-1}(x) \in \mathbb{R}^4 \subset \overline{\mathbb{R}^4}$.

$f^\wedge(\star)$ ist dann unabhängig von der Wahl der Karte, und definiert ein $f^\wedge \in \bigwedge_{k=0}^{3}(\overline{\mathbb{R}^4}, E)$.

Wie erweitern nun u aus (1.2) zu einer Darstellung $u : \tilde{G} \to Aut(\bigwedge_{k=0}^{3}(\overline{\mathbb{R}^4}, E))$, indem wir definieren:

$$(u(\tilde{g})\gamma)(\star) := D(\tilde{g}^{-1})^T\ \mathrm{Det}(dg^{-1}(\star))\gamma(g^{-1}\star), \quad \text{für } \star \in \overline{\mathbb{R}^4}, \gamma \in \bigwedge_{k=0}^{3}(\overline{\mathbb{R}^4}, E).$$

Diese Definition wird durch die folgenden drei Punkte erklärt:
a) $dg^{-1}(\star) : T_\star\overline{\mathbb{R}^4} \to T_{g^{-1}\star}\overline{\mathbb{R}^4}$ ist das Differential von $g^{-1} : \overline{\mathbb{R}^4} \to \overline{\mathbb{R}^4}$.
b) Det ist für beliebige lineare Abbildungen $\phi : X \to Y$ zwischen vierdimensionalen Vektorräumen X, Y mit Basen $\{x_0, \ldots, x_3\}, \{y_0, \ldots, y_3\}$ durch die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\phi) &:= \frac{1}{4!}\ x_0^* \wedge \cdots \wedge x_3^* \otimes \phi(x_0) \wedge \ldots \wedge \phi(x_3) \\ &= \frac{1}{4!}\ \det(A)\ x_0^* \wedge \cdots \wedge x_3^* \otimes y_0 \wedge \ldots \wedge y_3 \\ &\in \bigwedge_{k=0}^{3} X^* \otimes \bigwedge_{k=0}^{3} Y \end{aligned}$$

definiert, worin $\{x_0^*, \ldots, x_3^*\} \subset X^*$ die duale Basis von $\{x_0, \ldots, x_3\}$ ist, also $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, und $A = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots 3}$, mit $\phi(x_i) = \sum_j a_{ij} y_j$ ist. Man beachte, daß Det wohldefiniert ist, d.h. unabhänging von der Wahl der Basen ist.

Damit ist also

$$\mathrm{Det}(dg^{-1}(\star)) \in \bigwedge_{k=0}^{3} T_\star^* \overline{\mathbb{R}^4} \otimes \bigwedge_{k=0}^{3} T_{g^{-1}\star} \overline{\mathbb{R}^4},$$

und mit zwei Karten $\kappa : (U \ni \star) \to \kappa(U) \subset \mathbb{R}^4$ und $\lambda : (V \ni g^{-1}\star) \to \lambda(V) \subset \mathbb{R}^4$, mit $\kappa(\star) = x$ und $\lambda(g^{-1}\star) = y$, erhält man so

$$\mathrm{Det}(dg^{-1}(\star)) = \frac{1}{4!} \det \left(\frac{\partial(\lambda \circ g^{-1} \circ \kappa^{-1})(x)}{\partial x} \right) dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3 \otimes \frac{\partial}{\partial y^0} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial y^3}.$$

c) Nun ist in den Koordinaten $y = \lambda(g^{-1}\star)$

$$\gamma(g^{-1}\star) = \gamma_\lambda(y)\ dy^0 \wedge \ldots \wedge dy^3 \in \bigwedge_{k=0}^{3} T_{g^{-1}\star}^* \overline{\mathbb{R}^4},$$

daher ist die Paarung (Kontraktion)

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(dg^{-1}(\star))\gamma(g^{-1}(\star)) &= \det \left(\frac{\partial(\lambda \circ g^{-1} \circ \kappa^{-1})(x)}{\partial x} \right) \gamma_\lambda(y)\ dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3 \\ &\in \bigwedge_{k=0}^{3} T_\star^* \overline{\mathbb{R}^4} \end{aligned}$$

wohldefiniert. (Hier erklärt sich auch der Faktor $\frac{1}{4!}$ in der Definition von Det, denn es ist $(\frac{\partial}{\partial y_0} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial y_3})(dy^0 \wedge \ldots \wedge dy^3) = 4!$, und wir bekommen mit dieser Konvention $u(1 \in \tilde{G})\gamma = \gamma$.)

Daß dies so gesetzte u wirklich eine Darstellung ist, sieht man ein, weil für

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

eine Paarung (Kontraktion) von $Det(\phi)$ mit $\mathrm{Det}(\phi)$ die Beziehung

$$\mathrm{Det}(\psi)\,\mathrm{Det}(\phi) = \mathrm{Det}(\psi \circ \phi) \in \bigwedge_{k=0}^{3} X^* \otimes \bigwedge_{k=0}^{3} Z$$

erfüllt, und weil $dg^{-1}(h^{-1}\star) \circ dh^{-1}(\star) = d(g^{-1}h^{-1})(\star) = d(hg)^{-1}(\star)$ gilt.

Nun können wir die infinitesimale Wirkung der konformen Gruppe auf den Schwartzraum diskutieren:
Obschon $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E))^\wedge$ nicht invariant unter der Wirkung von $u(G)$ ist, werden wir sehen, daß $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E))^\wedge$ invariant unter infinitesimaler Wirkung ist, d.h. unter der zugehörigen Darstellung u' der Liealgebra $Lie(\tilde{G})$ von $\tilde{G}$, die durch Differentiation wirkt, denn:

Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^4$ gibt es immer einen offenen Ball $B_R := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| < R\}$ und $\varepsilon > 0$, so daß $K \subset S_b(B_R)$, für alle speziellen konformen Transformationen mit $|b| < \varepsilon$, was seinerseits impliziert, daß aus $Tr\ f^\wedge \subset K$, für $f^\wedge \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E))^\wedge \subset \bigwedge_{k=0}^{3}(\overline{\mathbb{R}^4}, E)$, folgt, daß auch $f^\wedge \circ S_b \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E))^\wedge$, wenn $|b| < \varepsilon$ ist. Schlußendlich bedeutet dies, daß $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E))^\wedge$ invariant ist unter der Liealgebradarstellung

$$\begin{aligned}(u'(L)f^\wedge)(x) &:= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big((u(\tilde{g}(t))f^\wedge)(x)\Big) \qquad (1.4)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(D(\tilde{g}(t)^{-1})^T\ Det((dg(t))(x))\ f^\wedge(g(t)x)\Big),\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^4 \subset \overline{\mathbb{R}^4}$, für jede einparametrige Untergruppe $\tilde{g}(t) = \exp(tL) \in \tilde{G}, L \in Lie(\tilde{G})$.

Konforme Kovarianz eines Quantenfeldes B auf dem Minkowskiraum $\mathbb{R}^4$ mit Skalendimension δ formulieren wir daher geeignet in infinitesimaler Form durch

$$[U'(L), B(f)] = B(u'(L)f), \quad L \in Lie(G), \qquad (1.5)$$

wobei U' die zu U gehörige selbstadjungierte Liealgebradarstellung ist, und wir für die Untergruppe $\tilde{G}' \subset \tilde{G}$ die „integrierte“ Form

$$U(\check{\lambda}, (A, a))B(f)U(\check{\lambda}, (A, a))^{-1} = B(u(\check{\lambda}, (A, a))f), \quad (\check{\lambda}, (A, a)) \in \tilde{G}',$$

mit $u(\check{\lambda}, (A, a))f(x) = \lambda^{\delta-4}D|_{SL(2,\mathbb{C})}(A^{-1})^T f(\frac{1}{\lambda}\Lambda(A^{-1})(x-a))$ annehmen können.

Der eigentliche Grund der Diskussion in diesem Abschnitt ist, daß man über die Struktur der Vakuumerwartungswerte eines konform kovarianten Quantenfeldes offenbar a priori mehr Information gegeben hat.

Wie bereits in der Einleitung bemerkt, gilt das folgende Lemma, für das wir hier keinen Beweis geben wollen[5].

Lemma 1.1 Die Zweipunktfunktion Weines konform kovarianten Quantenfeldes $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E) \ni f \mapsto B(f)$ mit Skalendimension δ ist (bis auf einen Faktor) eindeutig bestimmt. Zudem impliziert die Positivitätsbedingung

$$W(\bar{f}, f) = \langle B(f)\Omega, B(f)\Omega\rangle \geq 0,$$

daß die Skalendimension δ, abhängig vom Spin des Feldes, d.h. abhängig von der irreduziblen endlichdim. Darstellung $D|_{SL(2,\mathbb{C})} : SL(2, \mathbb{C}) \to Aut(E)$, nach unten beschränkt ist (Unitaritätsschranke).

Damit gibt es zu jedem Spin genau ein (generalisiertes) freies, konform kovariantes Quantenfeld zu einer gegebenen Skalendimension δ.

Betrachten wir nun den Fall eines Spin-1-Vektorfeldes (D.h. $E = \mathbb{C}^4$ und $D|_{SL(2,\mathbb{C})}$ ist durch den Homomorpismus $A \mapsto D|_{SL(2,\mathbb{C})}(A) = \Lambda(A^{-1})^T \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ gegeben, also $D|_{SL(2,\mathbb{C})}(A^{-1})^T = \Lambda(A)$.):

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \ni f \mapsto B(f)$$

Wegen Linearität zerfällt das Feld B und die Zweipunktfunktion W in Komponenten $B(f) = \sum B_\mu(f^\mu)$ und $W(f, g) = \sum W_{\mu\nu}(f^\mu, g^\nu)$ mit $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Ist weiter $w = (w_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ die Zweipunktfunktion in der Differenzvariablen[6], d.h.

$$\sum W_{\mu\nu}(f^\mu, g^\nu) = \sum \int f^\mu(x)\ (w_{\mu\nu} * g^\nu)(x)\ dx,$$

[5] Siehe dazu [Ma] und auch Anhang A

[6] Die Existenz eines solchen w ist bereits durch das kovariante Transformationsverhalten unter Translationen gesichert.

was man symbolisch als $W(x,y) = w(x-y)$ auffassen kann, so ist w, wie in Anhang A dargelegt, durch den Ausdruck

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\eta_{\mu\nu}(x)^2 - 2x_\mu x_\nu}{(-(x^0 - it)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta+1}},$$

d.h. durch

$$w_{\mu\nu}(h) = \lim_{t \searrow 0} \int \frac{\eta_{\mu\nu}(x)^2 - 2x_\mu x_\nu}{(-(x^0 - it)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta+1}} h(x)\ dx$$

gegeben. Äquivalent auch

$$W(f,g) = \lim_{t \searrow 0} \sum \int f^\mu(x) g^\nu(y) \frac{\eta_{\mu\nu}(x-y)^2 - 2(x_\mu - y_\mu)(x_\nu - y_\nu)}{(-(x^0 - y^0 - it)^2 + |\vec{x} - \vec{y}|^2)^{\delta+1}}\ d(x,y).$$

Die Fouriertransformation $\hat{w}_{\mu\nu}$ von $w_{\mu\nu} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ zeigt, daß für die Positivität der Zweipunktfunktion die Bedingung $\delta \geq 3$ gelten muß (s. [Ma] und Anhang A, Lemma A.1).

Wir werden im Folgenden sowohl für $W = (W_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ als auch für $w = (w_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ die Bezeichnung Zweipunktfunktion verwenden.

Kapitel 2

Die Definition der Felder und erste Folgerungen

In diesem Kapitel (re)konstruieren wir ausgehend von seiner Zweipunktfunktion $w = (w_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ bzw. deren Fouriertransformierten $\hat{w} = (\hat{w}_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ das Vektorfeld $B = (B_\mu)_{\mu=0,1,2,3}$, sowie das dazugehörige normalgeordnete Skalarfeld Φ als operatorwertige Distributionen auf einem Vektorraum $\mathcal{S}_0$ mit (indefinitem) Skalarprodukt $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$.

Bei unserem Vorgehen wird der wesentliche Gedanke sein, daß man, ausgehend von gewissen Sesquilinearformen, einen Operator durch Integration erhält (Lemma 2.1), dabei spielt die Trägereigenschaft $\hat{w}_{\mu\nu} =: 1/(2\pi)^2 \omega_{\mu\nu} \subset \overline{V}_+$, d.h. die Spektrumsbedingung, die entscheidende Rolle. Eine weitere Struktur von $(w_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ benötigen wir für die Konstruktion der Felder nicht. Physikalisch interessante Eigenschaften erhält man natürlich erst durch mehr Struktur. Für dieses Kapitel nehmen wir an, daß wir $w = (w_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ durch Gleichung (A.4) gegeben haben. Dabei interressieren wir uns vorrangig für den den Fall der Skalendimension $\delta = 2$. In diesem Fall ist die Fouriertransformierte $\hat{w}_{\mu\nu}$ bzw. $\omega_{\mu\nu}$ der Zweipunktfunktion durch Gleichung (A.7) gegeben. Wie im Anschluß an (A.6) dargelegt, entspricht dieser Fall einer indefiniten Zweipunktfunktion des Vektorfeldes B und führt damit zu einem indefiniten Skalarprodukt $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$.

Daß die n-Punkt-Funktionen der zwei Felder B und Φ (oder die Felder selbst) alle Axiome, mit Ausnahme derer die sich auf die explizite Hilbertraumstruktur beziehen, erfüllen, führen wir im einzelnen nicht auf, da es uns vorrangig um die Frage der Positivität (s. Def. 2.14) des Feldes Φ geht.

Die Existenz einer unitären, d.h. einer $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-invarianten, Darstellung $U : \tilde{\mathcal{P}} \to Aut(\mathcal{S}_0)$ auf dem Raum $(\mathcal{S}_0, \langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0})$ mit invariantem Vakuum erhält man mittels zweiter Quantisierung, in der Literatur oft als $U = \Gamma(u)$ notiert, aus der Darstellung u des Einteilchenraumes mit $(u(A,a)f)(x) = \Lambda(A^{-1})^T f(\Lambda(A^{-1})(x-a))$.

Daß die beiden Felder B und Φ auch lokale Felder sind, ist in Anhang C dargelegt.

Wir beginnen mit einigen Definitionen.

2.1 Das Vektorfeld B

Für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ setzen wir

$$\langle f, g \rangle_1 := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \int \bar{\hat{f}}^{\mu} \hat{g}^{\nu} \; d\omega_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \int f^{\mu}(x)(w_{\mu\nu} * g^{\nu})(x) \; dx. \tag{2.1}$$

Also ist $\langle . , .. \rangle_1 : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \to \mathbb{C}$ sesquilinear, aber im allgemeinen nicht positiv definit.

Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ ein nuklearer Raum ist, kann man die partiell stetige Abbildung $(f, g) \mapsto \sum \int f^{\mu}(x)(w_{\mu\nu} * g^{\nu})(x) \; dx$ stetig auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}, \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4)$ fortsetzen. Die Fortsetzung notieren wir mit W, ihre Komponenten mit $W_{\mu\nu}$ also

$$\sum \int f^{\mu}(x)(w_{\mu\nu} * g^{\nu})(x) \; dx =: W(f \otimes g) = \sum W_{\mu\nu}(f^{\mu} \otimes g^{\nu}). \tag{2.2}$$

$\langle . , .. \rangle_1$ induziert auf natürliche Art weitere Sesquilinearformen $\langle . \, , .. \rangle_n$ auf den n-Teilchenräumen

$$\begin{aligned} \mathscr{S}^{(n),sym} \quad &:= \quad \mathscr{S}(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathbb{R}^4, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{C}^4)^{sym} \\ &:= \quad \{ f \in \mathscr{S}(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathbb{R}^4, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{C}^4) \mid f^{\cdots\mu_i\cdots\mu_j\cdots}(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) \\ &\qquad\qquad = f^{\cdots\mu_j\cdots\mu_i\cdots}(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) \} \end{aligned}$$

via

$$\langle f, g \rangle_n := \sum \int \ldots \int \bar{\hat{f}}^{\mu_1\ldots\mu_n}(p_1, \ldots, p_n) \hat{g}^{\nu_1\ldots\nu_n}(p_1, \ldots, p_n) d\omega_{\mu_1\nu_1}(p_1) \ldots d\omega_{\mu_n\nu_n}(p_n)$$

und damit auch auf der algebraischen direkten Summe

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_0 \quad &:= \quad \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}^{(n),sym} \\ &:= \quad \{ \varphi = (\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid \varphi_0 \in \mathbb{C}, \varphi_k \in \mathscr{S}^{(n),sym}, \\ &\qquad\qquad \text{für jedes } \varphi \text{ sind nur endlich viele } \varphi_k \neq 0 \}, \end{aligned}$$

definiert durch

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathscr{S}_0} := \bar{\varphi}_0 \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, \psi_n \rangle_n .$$

$\mathscr{S}_0$ trägt als induktiver Limes der Räume $\mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{N} \mathscr{S}(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathbb{R}^4, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{C}^4)^{sym}$ eine natürliche Topologie, d.h. ist $(\varphi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}_0$ eine Folge und $\psi \in \mathscr{S}_0$, so gilt

$$\begin{aligned} & \varphi^{(n)} \to \psi, \quad \text{für } n \to \infty \\ \Leftrightarrow \quad & \forall j \in \mathbb{N} : \varphi_j^{(n)} \to \psi_j, \quad \text{für } n \to \infty, \text{ und } \exists j_0 : \forall j > j_0, \forall n : \varphi_j^{(n)} = 0. \end{aligned}$$

Auf $\mathscr{S}_0$ erklären wir eine Äquivalenzrelation

$$\varphi \sim \psi \; :\Leftrightarrow \langle \varphi, . \, \rangle_{\mathscr{S}_0} = \langle \psi, . \, \rangle_{\mathscr{S}_0} : \mathscr{S}_0 \to \mathbb{C}$$

und setzen $\mathscr{N} := \{\varphi \in \mathscr{S}_0 | \ \varphi \sim 0\}$. $\mathscr{N} \subset \mathscr{S}_0$ ist ein Untervektorraum, so daß

$$\mathcal{S}_0 := \mathscr{S}_0 \diagup \mathscr{N} \tag{2.3}$$

(als Vektorraum) wohldefiniert ist. Man beachte, daß

$$\varphi \approx \psi \ :\Leftrightarrow \langle \varphi - \psi, \varphi - \psi \rangle_{\mathscr{S}_0} = 0$$

nur dann eine Äquivalenzrelation definiert, wenn $\langle . \, , .. \rangle_{\mathscr{S}_0}$ positiv semidefinit ist, da man in diesem Fall für Transitivität die Dreiecksungleichung benötigt.

Auf $\mathcal{S}_0$ setzen wir $\langle [\varphi], [\psi] \rangle_{\mathcal{S}_0} := \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathscr{S}_0}$, wobei $[\varphi], [\psi] \in \mathcal{S}_0$ und $\varphi, \psi \in \mathscr{S}_0$ jeweils Repräsentanten von $[\varphi]$, bzw. $[\psi]$ sind. $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten und daher wohldefiniert. Ungeachtet ob $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$ positiv definit ist, setzen wir $\|\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} := \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{S}_0}$, für $\varphi \in \mathcal{S}_0$.

$\mathcal{S}_0$ ist mittels der Quotiententopologie ein topologischer Vektorraum.

Definition 2.1 Die Menge der stetigen Endomorphismen auf $\mathcal{S}_0$ bezeichnen wir mit $End(\mathcal{S}_0)$, d.h.:

$$End(\mathcal{S}_0) := \{X : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0 \mid X \text{ linear und stetig}\}.$$

Definition 2.2 Der spezielle Vektor

$$\Omega := (1, 0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{S}_0$$

heißt Vakuum.

Als nächstes führen wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf $\mathcal{S}_0$ ein. Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ und $\varphi := [(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}] \in \mathcal{S}_0$ sei

$$\begin{aligned} b(f)(\varphi) \ := \ [\ (& \sqrt{1} \ \langle \bar{f}, \varphi_1 \rangle_1, \\ & \sqrt{2} \ (x \mapsto \langle \bar{f}, \varphi_2(. \, , x) \rangle_1), \\ & \sqrt{3} \ ((x, y) \mapsto \langle \bar{f}, \varphi_3(. \, , x, y) \rangle_1), \\ & \sqrt{4} \ ((x, y, z) \mapsto \langle \bar{f}, \varphi_4(. \, , x, y, z) \rangle_1), \\ & \dots) \ ]. \end{aligned}$$

Die Definition ist unabhängig von der Repräsentantenwahl und definiert so eine lineare Abbildung $b(f) : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$. $b(f)$ ist stetig, weil die Komponentenabbildungen $\varphi_1 \mapsto \langle \bar{f}, \varphi_1 \rangle_1$, $\varphi_2 \mapsto \{x \mapsto \langle \bar{f}, \varphi_2(. \, , x) \rangle_1\}$ usw. stetig sind. Die Abbildung $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \ni f \mapsto b(f) \in End(\mathcal{S}_0)$ ist linear, also ist $b(f) = \sum_\mu b_\mu(f^\mu)$ für gewisse $b_\mu : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4) \to End(\mathcal{S}_0)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Die Abbildungen $\{b(f) \mid f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)\}$ heißen Vernichtungsoperatoren, die Abbildung $b : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \to End(\mathcal{S}_0)$ Vernichter.

Sei $\{e_\mu | \ \mu = 0, 1, 2, 3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^4$, dann definiert

$$\begin{aligned} b^\dagger(f)(\varphi) \ := \ [\ (& 0, \\ & \frac{1}{\sqrt{1}} \varphi_0 f, \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} ((x, y) \mapsto (f^\kappa(x) \varphi_1^\lambda(y) + f^\lambda(y) \varphi_1^\kappa(x)) \ e_\kappa \otimes e_\lambda), \\ & \frac{1}{\sqrt{3}} \ ((x, y, z) \mapsto (f^\kappa(x) \varphi_2^{\lambda\mu}(y, z) + f^\lambda(y) \varphi_1^{\kappa\mu}(x, z) + \\ & \qquad f^\mu(z) \varphi_2^{\kappa\lambda}(x, y)) \ e_\kappa \otimes e_\lambda \otimes e_\mu), \\ & \dots) \ ]. \end{aligned}$$

ebenfalls eine stetige lineare Abbildung $b^\dagger(f) = \sum_\mu b^\dagger_\mu(f^\mu) : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$.

Die Abbildungen $\{b^\dagger(f) \mid f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)\}$ heißen Erzeugungsoperatoren, die Abbildung $b^\dagger : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \to End(\mathcal{S}_0)$ Erzeuger.

Ist $X \in End(\mathcal{S}_0)$, und gibt es ein $Y \in End(\mathcal{S}_0)$ mit $\langle \varphi, X\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \langle Y\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}_0}$, für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$, so heiße Y der $\langle . , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierte zu X, und wir bezeichnen diesen mit $X^\star$. Ist $Y = X^\star$, so exisitiert $Y^\star$ und es ist $Y^\star = (X^\star)^\star = X$.

Für $X, Y \in End(\mathcal{S}_0)$ sei $[X, Y] := XY - YX$ der Kommutator von X und Y.

Proposition 2.1 Seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ beliebig und $\mathbf{1}, \mathbf{0} : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$ die identische bzw. die Nullabbildung, dann ergeben sich (wegen der Symmetrie von $\mathscr{S}^{(n),sym}$) die folgenden Beziehungen:

$$i) \qquad (b(f))^\star = b^\dagger(\bar{f}), \tag{2.4}$$

$$ii) \qquad [b(f), b^\dagger(g)] = \langle \bar{f}, g \rangle_1 \mathbf{1}, \tag{2.5}$$

$$iii) \qquad [b(f), b(g)] = [b^\dagger(f), b^\dagger(g)] = \mathbf{0}. \tag{2.6}$$

(2.5) und (2.6) heißen kanonische Vertauschungsrelationen von b und $b^\dagger$.

Definition 2.3 Die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} B : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) & \to & End(\mathcal{S}_0) \\ f & \mapsto & b^\dagger(f) + b(f) \end{array}$$

heißt das Vektorfeld des Erzeugers $b^\dagger$ und Vernichters b.

B ist linear, also gibt es $(B_\mu)_{\mu=0,1,2,3}$, so daß $B(f) = \sum_\mu B_\mu(f^\mu)$.

Proposition 2.2 Für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ findet man die folgenden Beziehungen:

$$i) \qquad (B(f))^\star = B(\bar{f}), \text{ d.h. für reelles } f \text{ ist } (B(f))^\star = B(f), \tag{2.7}$$

$$ii) \qquad [B(f), B(g)] = (\langle \bar{f}, g \rangle_1 - \langle \bar{g}, f \rangle_1)\mathbf{1}, \tag{2.8}$$

$$iii) \qquad \langle \Omega, B(f)B(g)\Omega \rangle_{\mathcal{S}_0} = \langle \bar{f}, g \rangle_1 = W(f \otimes g). \tag{2.9}$$

Gleichung (2.9) zeigt offenbar, daß wir ein Feld (re)konstruiert haben, das $W \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4)$ zur Zweipunktfunktion hat.

Wenden wir uns nun, zunächst ganz allgemein, einem Aspekt zu, den wir später zur Untersuchung der Eigenschaften des normalgeordneten Skalarfeldes Φ (siehe Def. 2.13) benötigen werden.

Definition 2.4 Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{X(i) : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0\}_{i \in I}$ eine Familie stetiger, linearer Abbildungen. Die Menge

$$\mathcal{A}(X) := \{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{i \in I_k} X(i) \mid I_k \subset I \text{endlich}, n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C}\},$$

$$\text{wobei} \prod_{i \in \emptyset} X(i) := \mathbf{1}, \ \sum_{k=1}^{0} \prod_{i \in I_k} \alpha_i X(i) := \mathbf{0},$$

heißt die von X erzeugte Algebra.

Wenn die Sesquilinearform $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$ indefinit ist, vermittelt sie natürlich keine Norm und so auch keine starke Operatortopologie, nichtsdestotrotz sind $End(\mathcal{S}_0) \ni X \mapsto |\langle \varphi, X\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}| =: \|X\|_{\varphi,\psi}$, für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$, Halbnormen, die Punkte in $\mathcal{S}_0$ trennen, was bedeutet, daß $\{\| \, . \, \|_{\varphi,\psi} \mid \varphi, \psi \in \mathcal{S}_0\}$ auf $End(\mathcal{S}_0)$ eine lokal konvexe Topologie definiert:

Definition 2.5 Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $End(\mathcal{S}_0)$, $Y \in End(\mathcal{S}_0)$, so daß für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - Y\|_{\varphi,\psi} = 0,$$

so heißt Y schwacher Grenzwert der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir schreiben $X_n \xrightarrow{\mathrm{w}} Y$, für $n \to \infty$, oder $Y = \text{w-}\lim_{n\to\infty} X_n$.

Der Begriff einer starken Konvergenz, im Sinne von $X_n \to Y \Leftrightarrow \forall\varphi : \lim_{n\to\infty} \|(X_n - Y)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} = 0$, ist, wie oben angedeutet, wenn $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$ indefinit ist, kein geeigneter Konvergenzbegriff. Er besitzt aber eine, für unsere Zwecke sinnvolle, natürliche Entsprechung, die, im Falle eines Hilbertraumes, mit dem starken Konvergenzbegriff übereinstimmt:

Definition 2.6 Gilt $X_k \xrightarrow{\mathrm{w}} Y$ und zusätzlich für alle $\varphi \in \mathcal{S}_0$:

$$\lim_{k\to\infty} \|(X_k - Y)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} = 0,$$

so heißt Y natürlicher Grenzwert der Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, und wir schreiben $X_k \xrightarrow{\mathrm{n}} Y$, für $k \to \infty$, oder $Y = \text{n-}\lim_{k\to\infty} X_k$.

Man beachte, daß

$$X_k \xrightarrow{\mathrm{n}} Y \Leftrightarrow X_k \xrightarrow{\mathrm{w}} Y \text{ und } \forall\varphi : \lim_{k\to\infty} \|X_k\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} = \|Y\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0}, \tag{2.10}$$

was die Form ist, in der wir den Begriff benutzen werden. Die Bedeutung dieses merkwürdigen Konvergenzbegriffs wird in Abschnitt 2.4 klar[1].

Definition 2.7 Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{X(i) : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0\}_{i\in I}$ eine Familie linearer und stetiger Abbildungen. Dann ist

i) $\text{w-}\lim \mathcal{A}(X) := \{Y \in End(\mathcal{S}_0) \mid \exists (i_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset I, \text{ so daß } X(i_k) \xrightarrow{\mathrm{w}} Y\}$,

ii) $\text{n-}\lim \mathcal{A}(X) := \{Y \in End(\mathcal{S}_0) \mid \exists (i_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset I, \text{ so daß } X(i_k) \xrightarrow{\mathrm{n}} Y\}$.

Man sieht direkt ein, daß $\text{w-}\lim \mathcal{A}(X)$ unter Addition abgeschlossen ist. Besitzen alle $X(i)$ einen $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierten, so wird $\text{w-}\lim \mathcal{A}(X)$ selbst wieder zu einer Algebra, denn sind $Y, Z \in \text{w-}\lim \mathcal{A}(X)$, mit $\mathcal{A}(X) \ni Y_k \xrightarrow{\mathrm{w}} Y$ und $\mathcal{A}(X) \ni Z_l \xrightarrow{\mathrm{w}} Z$, so gilt

$$\langle \varphi, Y_k Z_l \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \langle Y_k^\star \varphi, Z_l \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \langle Y_k^\star \varphi, Z\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \langle \varphi, Y_k Z\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle \varphi, YZ\psi \rangle_{\mathcal{S}_0},$$

d.h. ein $\varepsilon/2$-Argument liefert hier, daß $YZ \in \text{w-}\lim \mathcal{A}(X)$. Das heißt also:

---

[1]Ein wesentlicher Grund, daß wir nicht sparsamer definieren $X_k \xrightarrow{\mathrm{n}} Y \Leftrightarrow \forall\varphi : \lim_{k\to\infty} \|X_k\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} = \|Y\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0}$, was für die Überlegungen in Absch. 2.4 ausreichen würde, ist, daß dann $\text{n-}\lim \mathcal{A}(X)$ (Def. 2.7) nicht zwangsläufig wieder ein Vektorraum wird (s. Prop. 2.4).

Proposition 2.3 Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{X(i) : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0\}_{i\in I}$ eine Familie in $End(\mathcal{S}_0)$. Weiter existiere für jedes $X(i), i \in I$ der $\langle . , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierte $X(i)^\star$, dann ist auch $\text{w-lim}\,\mathcal{A}(X)$ wieder eine Algebra.

Die Existenz der $\langle . , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierten ist dabei wesentlich, da die Abbildung $End(\mathcal{S}_0) \ni Z \mapsto \langle \varphi, YZ\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}$ im allgemeinen nicht stetig ist, da die Abbildung $End(\mathcal{S}_0) \ni Z \mapsto Z\psi \in \mathcal{S}_0$ im allgemeinen nicht stetig ist. Man beachte auch: Wenn für alle $X_k, k \in \mathbb{N}$, der $\langle . , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierte existiert, und wenn $Y = \text{w-lim}\, X_k$, dann muß nicht folgen, daß $Y^\star$ existiert, wie man etwa am Beispiel $a_\mu(x)$ im nächsten Abschnitt sieht.

Es wird sich als nützlich erweisen, daß in $\text{n-lim}\,\mathcal{A}(X)$ die lineare Struktur ebenfalls erhalten ist:

Proposition 2.4 Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{X(i) : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0\}_{i\in I}$ eine Familie linearer und stetiger Abbildungen. Sind dann $Y, Z \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(X)$, so ist auch $Y + Z \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(X)$.

Beweis: Seien $\varphi \in \mathcal{S}_0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle Folgen $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}, (Z_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(X)$, so daß $Y_k \xrightarrow{\text{n}} Y$ und $Z_l \xrightarrow{\text{n}} Z$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(Y + Z_l)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} &= \|Y\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} + \langle Y\varphi, Z_l\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0} + \langle Z_l\varphi, Y\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0} + \|Z_l\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} \\ &\xrightarrow{l\to\infty} \|Y\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} + \langle Y\varphi, Z\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0} + \langle Z\varphi, Y\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0} + \|Z\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0}. \end{aligned}$$

Es gibt also $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $l > l_0$ gilt:

$$\left| \|(Y + Z_l)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|(Y + Z)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} \right| \le \varepsilon/2.$$

Ebenso findet man zu jedem $l > l_0$ ein $k_0(l) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k > k_0(l)$ gilt:

$$\left| \|(Y_k + Z_l)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|(Y + Z_l)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} \right| \le \varepsilon/2.$$

Somit ist also für $l > l_0$ und $k > k_0(l)$

$$\begin{aligned} & \left| \|(Y_k + Z_l)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|(Y + Z)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} \right| \\ \le\ & \left| \|(Y_k + Z_l)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|(Y + Z_l)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} \right| + \left| \|(Y + Z_l)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|(Y + Z)\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} \right| \\ \le\ & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da auch $Y_j + Z_j \xrightarrow{\text{w}} Y + Z$, für $j \to \infty$ gilt, folgt, wenn wir definieren $\tilde{k}(j) := \max\{j, k_0(j)\}$, daß $Y_j + Z_{\tilde{k}(j)} \xrightarrow{\text{n}} Y + Z$, für $j \to \infty$. ■

Es wird uns später etwas Mühe kosten, daß $\text{n-lim}\,\mathcal{A}(X)$ im allgemeinen keine Algebra ist, auch nicht wenn alle $\langle . , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierten existieren, denn möchte man wie oben zeigen, daß aus $Y, Z \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(X)$ folgt, daß $YZ \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(X)$, so benötigt man die Stetigkeit der Abbildung $Z \mapsto \langle YZ\varphi, YZ\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0}$, die im allgemeinen nicht gegeben ist.

Möchte man aber trotzdem zeigen, daß ein Produkt $P = YZ \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(X)$, so muß man sich, wenn möglich, etwa in folgendem Sinne behelfen, und die Konvergenz direkt zeigen:

Proposition 2.5 Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset End(\mathcal{S}_0)$ und $P = \text{w-lim}_{k\to\infty} X_k$. Existiert dann für alle X_k der $\langle . , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierte $X_k^\star$, und existiert auch $P^\star$, so daß $P^\star P = \text{w-lim}_{k\to\infty} X_k^\star X_k$ gültig ist, so gilt schon $P = \text{n-lim}_{k\to\infty} X_k$.

Beweis: Sei $\varphi = \psi \in \mathcal{S}_0$, dann gilt:

$$\|X_k\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|P\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} = \langle\varphi, (X_k^\star X_k - P^\star P)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \longrightarrow 0, \quad \text{für } k \to \infty.$$

■

Auch die folgende Proposition werden wir später benutzen, da wir oft mit Grenzwerten von Grenzwerten arbeiten werden.

Proposition 2.6 Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{Z(i) : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0\}_{i\in I}$ eine Familie linearer und stetiger Abbildungen. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $X_k \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(Z)$ und $Y_k \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(Z)$. Dann gilt:

i) Ist $X \in End(\mathcal{S}_0)$, so daß $X_k \xrightarrow{\text{w}} X$, so ist auch $X \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(Z)$.

ii) Ist $Y \in End(\mathcal{S}_0)$, so daß $Y_k \xrightarrow{\text{n}} Y$, so ist auch $Y \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(Z)$.

Beweis: Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.
i) Da $X_k \xrightarrow{\text{w}} X$, gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|X_k - X\|_{\varphi,\psi} \leq \varepsilon/2$ für alle $k > k_0$. Wähle nun zu jedem X_k eine Folge $(X_k^l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}(Z)$, so daß $\|X_k^l - X_k\|_{\varphi,\psi} \leq \varepsilon/2$ für alle $l > l_0(k)$. Dann ist:

$$\|X_k^l - X\|_{\varphi,\psi} \leq \|X_k^l - X_k\|_{\varphi,\psi} + \|X_k - X\|_{\varphi,\psi} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

für $k > k_0$ und $l > l_0(k)$.
ii) Wähle zu jedem Y_k eine Folge $(Y_k^l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}(Z)$, so daß $Y_k^l \xrightarrow{\text{w}} Y_k$ und $|\|Y_k^l\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|Y_k\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0}| \leq \varepsilon/2$ für $l > l_1(k)$. Dann ist:

$$\begin{aligned} |\ \|Y_k^l\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|Y\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0}| &\leq |\ \|Y_k^l\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|Y_k\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0}| + |\ \|Y_k\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0} - \|Y\varphi\|^2_{\mathcal{S}_0}| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

für $k > k_1$ und $l > l_1(k)$. Zusammen mit der Abschätzung aus *i)* beweist das *ii)*. ■

Ist $X \in End(\mathcal{S}_0)$ so definiert $B(f) \div X := b^\dagger(f)X + Xb(f)$ für alle f ein neues Element aus $End(\mathcal{S}_0)$.

Per Definition besitzt jedes $X \in \mathcal{A}(B)$ eine mögliche Zerlegung der Form

$$X = \alpha\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{n} B(f_{k,1})B(f_{k,2})\ldots B(f_{k,m_k}).$$

Eine allgemein bekannte Konsequenz aus (2.5) und (2.6), sind die folgenden beiden Aussagen.

Proposition 2.7 Sei $X \in \mathcal{A}(B)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_{k,l} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)\backslash\{0\}$, so daß

$$X = \alpha\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{N} B(f_{k,1})B(f_{k,2})\ldots B(f_{k,n_k}).$$

Dann definiert

$$:\!X\!: := \alpha\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{N} B(f_{k,1}) \div (B(f_{k,2}) \div (\ldots \ \div B(f_{k,n_k})\ldots))$$

eine Abbildung $:\,.\,: \ :\mathcal{A}(B) \to \mathcal{A}(B)$, und es gilt $:\!XY\!: = :\!YX\!:$, für $X, Y \in \mathcal{A}(B)$.

Proposition 2.8 (Wicksches Theorem 1) Seien $f_1, f_2, \dots, f_N \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$, dann gilt:

$$B(f_1)B(f_2)\dots B(f_N) = \sum_{n=0}^{[\frac{N+1}{2}]} \sum_{\substack{k_1<l_1,\dots,k_n<l_n,\\ k_i<k_j,l_i<l_j,\\ \text{für } i\neq j}} \prod_{\nu=1}^{n} \langle \bar{f}_{k_\nu}, f_{l_\nu}\rangle_1 \ :\prod_{\substack{m\neq k_i,l_i\\ i=1,\dots,n}} B(f_m): \ ,$$

wobei [.] die Gaußklammer ist, d.h. [x]:=größte ganze Zahl kleiner gleich x.

Für $n = 2, 3$ heißt das z.B.:

$$B(f)B(g) = :B(f)B(g): \ + \langle \bar{f}, g\rangle_1 \mathbf{1}$$

$$B(f)B(g)B(h) = :B(f)B(g)B(h): \ + \langle \bar{f}, g\rangle_1 B(h) + \langle \bar{f}, h\rangle_1 B(g) + \langle \bar{g}, h\rangle_1 B(f)$$

Definition 2.8 Für $X \in \mathcal{A}(B)$ heißt $:X:$ das normalgeordnete Produkt von X.

2.2 Der verallgemeinerte Vernichter und das Feld am Punkt

Als nächstes definieren wir Operatoren, $a_\mu(x) \in End(\mathcal{S}_0)$, die mit $\{b(f)\}$ eng verknüpft sind. Es sei $x \in \mathbb{R}^4$ und $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Für $n \geq 1$ sei

$$\begin{array}{rcl} D_\mu^{(n)}(x) : \mathscr{S}^{(n),sym} & \rightarrow & \mathscr{S}^{(n-1),sym} \\ \varphi & \mapsto & D_\mu^{(n)}(x)(\varphi) \end{array}$$

definiert durch:

$$\begin{aligned} (D_\mu^{(n)}(x)(\varphi))^{\mu_2\dots\mu_n}(x_2,\dots,x_n) &:= \sum_\nu (w_{\mu\nu} * (\varphi^{\nu\mu_2\dots\mu_n}(\ \cdot\ , x_2,\dots,x_n)))(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_\nu \int e^{-ipx} \hat{\varphi}^{(1)\ \nu\mu_2\dots\mu_n}(p, x_2,\dots,x_n) d\omega_{\mu\nu}(p). \end{aligned}$$

Dabei ist $\hat{\cdot}^{(1)}$ die Fouriertransformation in der ersten Komponente, also

$$\hat{\varphi}^{(1)}(p, x_2 \dots, x_n) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x_1, x_2 \dots, x_n) e^{ipx_1} dx_1.$$

Als μ-te Komponente des verallgemeinerten Vernichtungsoperators bezeichnen wir die Abbildung

$$a_\mu(x) : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_0,$$

die vermöge

$$[(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}] \mapsto [\ (\sqrt{1}D_\mu^{(1)}(x)(\varphi_1), \sqrt{2}D_\mu^{(2)}(x)(\varphi_3), \sqrt{3}D_\mu^{(3)}(x)(\varphi_3), \dots)\ ]$$

wohldefiniert ist. $a_\mu(x)$ ist stetig und linear, und man findet wegen der Symmetrie von $\mathscr{S}^{(n),sym}$:

$$[a_\mu(x), a_\nu(y)] = \mathbf{0}. \tag{2.11}$$

Proposition 2.9 Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Dann gilt:

i) Die Abbildung $\mathbb{R}^4 \ni x \mapsto \langle \varphi, a_\mu(x)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \in \mathbb{C}$ ist aus $\mathscr{B}(\mathbb{R}^4)$,

ii) $\langle \varphi, a_\mu(\cdot)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} f(\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$.

Beweis: *ii)* folgt mit der Produktregel direkt aus *i)*. Zu *i)*: Es sei $\varphi = [(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}]$ und $\psi = [(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}]$, wobei $\hat{\varphi}_k, \hat{\psi}_k$ Schwartzsch sind. Dann darf man unter dem Integral differenzieren:

$$
\begin{aligned}
|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \langle \varphi, a_\mu(x)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}| \le\ & |\bar{\varphi}_0| \sum_\nu \int |(-ip)^\alpha|\ |\frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^2}|\ |\hat{\psi}_1^\nu(p)|\ d|\omega_{\mu\nu}|(p) \\
& + \sum_{n\ge1} \sum_{\{\mu_k\}} \sum_{\{\nu_l\}} \int \!\cdots\! \int |\bar{\hat{\varphi}}_n^{\nu_1\ldots\nu_n}(p_1,\ldots,p_n)| \cdot \\
& \cdot \int |(-ip)^\alpha|\ |\frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^2}|\ |\hat{\psi}_{n+1}^{\nu\mu_1\ldots\mu_n}(p,p_1,\ldots,p_n)|\ d|\omega_{\mu\nu}|(p) \cdot \\
& \qquad \cdot d|\omega_{\mu_1\nu_1}|(p_1)\ldots d|\omega_{\mu_n\nu_n}|(p_n) \\
\le\ & M_{\varphi,\psi} \in \mathbb{R}, \text{unabhängig von } x, \text{ weil } |e^{-ipx}| = 1.
\end{aligned}
$$

($|\omega_{\mu\nu}|$ ist dabei das positive Maß, für das es $g_{\mu\nu} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ meßbar mit $|g_{\mu\nu}(x)| = 1$ gibt, so daß $d\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\ d|\omega_{\mu\nu}|$.) ■

Der Zusammenhang zwischen b_μ und a_μ ist ersichtlich, denn mit Fubini erhält man unmittelbar $\langle \varphi, b_\mu(f)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \int f(x) \langle \varphi, a_\mu(x)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} dx$.

Man möge sich daher, vielleicht etwas suggestiver, $a_\mu(x) = b_\mu(f \stackrel{?}{=} \delta_x)$ mit der vierdimensionalen Deltafunktion δ_x vorstellen, dies führt zu

Proposition 2.10 Sei $\mu = 0, 1, 2, 3$, dann gilt:

i) Für $x \in \mathbb{R}^4$ ist $a_\mu(x) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(b_\mu)$.

ii) Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ ist $b_\mu(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(a_\mu)$.

Beweis: *i)* Wählt man für $t > 0$, $\delta_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ mit $\delta_t \ge 0$, $\int \delta_t(x)dx = 1$ und $Tr\ \delta_t \subset B_t(y) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x-y| < t\}$, so gilt

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi, b_\mu(\delta_t)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} &= \int \delta_t(x) \langle \varphi, a_\mu(x)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} dx \\
&\xrightarrow{t \searrow 0} \langle \varphi, a_\mu(y)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}.
\end{aligned}
$$

ii) Es seien für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ zwei Folgen $(x_{i,n} \in \mathbb{R}^4)_{i,n\in\mathbb{N}}, (\Delta_{i,n} \in \mathbb{R})_{i,n\in\mathbb{N}}$ so gewählt, daß

$$
\sum_{i=1}^n f(x_{i,n}) \langle \varphi, a_\mu(x_{i,n})\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \Delta_{i,n} \xrightarrow{n\to\infty} \int f(x) \langle \varphi, a_\mu(x)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} dx.
$$

$$
\Rightarrow \quad \langle \varphi, b_\mu(f)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, \underbrace{\sum_{i=1}^n \Delta_{i,n} f(x_{i,n}) a_\mu(x_{i,n})}_{\in \mathcal{A}(a_\mu)} \psi \rangle_{\mathcal{S}_0}.
$$

■

Hat man $\varphi, \varphi' \in \mathcal{S}_0$, so daß für alle $\psi \in \mathcal{S}_0$ gilt: $\langle \varphi', \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \langle \varphi, a_\mu(x)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}$, so folgt $\varphi = \varphi' = 0$, denn wählt man etwa $\psi = [(0, \psi_1, 0, 0, \dots)]$, so ist

$$\langle \varphi, a_\mu(x)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \bar{\varphi}_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_\nu \int e^{-ipx} \hat{\psi}_1^\nu(p) \; d\omega_{\mu\nu}(p),$$

was impliziert, daß $\hat{\varphi}_1'(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \varphi_0 e^{ipx} e_\mu$, e_μ ist hier der μ-te Standardbasisvektor des $\mathbb{C}^4$. Daher muß $\varphi_0 = 0$ gelten, da andernfalls $\varphi_1' \notin \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$. Entsprechend erhält man so für alle $n \in \mathbb{N}$, daß $\varphi_n = 0 \in \mathscr{S}^{(n),sym}$ und $\varphi_{n+1}' = 0 \in \mathscr{S}^{(n+1),sym}$ gilt, wenn man $\psi = [(0, \dots, 0, \psi_n, 0, \dots)]$ wählt. Daß auch $\varphi_0' = 0$ gilt, folgt, wenn man $\psi = (1, 0, 0, \dots)$ wählt.

Dieser Sachverhalt bedeutet, daß $a_\mu(x)$ keinen $\langle .\,, .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierten besitzt.

Definition 2.9 Sei $x \in \mathbb{R}^4$, die Sesquilinearform $A_\mu(x), \mu = 0, 1, 2, 3$, definiert durch

$$\begin{array}{rcl} A_\mu(x) : \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & A_\mu(x)(\varphi, \psi) := \langle a_\mu(x)\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} + \langle \varphi, a_\mu(x)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}, \end{array}$$

heißt die μ-te Komponente des Feldes B am Punkt x.

Mit Fubini erhält man nun:

$$\begin{aligned} \sum_\mu \int f^\mu(x) A_\mu(x)(\varphi, \psi) dx &= \sum_\mu \langle b_\mu(\bar{f}^\mu)\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} + \sum_\mu \langle \varphi, b_\mu(f^\mu)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \\ &= \langle \varphi, B(f)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Definition 2.10 Sei für $x \in \mathbb{R}^n, S(x) : \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0 \to \mathbb{C}$ sesquilinear. Ist dann $X \in End(\mathcal{S}_0)$, so daß für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ gilt:

$$\langle \varphi, X\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \int_{\mathbb{R}^n} S(x)(\varphi, \psi) \; dx,$$

so heißt X das schwache Integral von S und wir schreiben:

$$X = \text{w-}\int S(x) \; dx.$$

Damit gilt also: $B(f) = \sum_\mu \text{w-}\int f^\mu(x) A_\mu(x) \; dx$.

Definition 2.11 Sei $S : \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0 \to \mathbb{C}$ sesquilinear. Das normalgeordnete Produkt von $A_\mu(x)$ mit S ist die Sesquilinearform

$$\begin{array}{rcl} A_\mu(x)S : \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & S(a_\mu(x)\varphi, \psi) + S(\varphi, a_\mu(x)\psi) \end{array}$$

Damit gilt trivialerweise: $A_\mu(x)\langle .\,, .. \rangle_{\mathcal{S}_0} = A_\mu(x)$.

Proposition 2.11 Sei $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine beliebige Permutation. Dann gilt:

$$A_{\mu_1}(x_1)(A_{\mu_2}(x_2)(\dots(A_{\mu_n}(x_n))\dots)) = A_{\mu_{\pi(1)}}(x_{\pi(1)})(A_{\mu_{\pi(2)}}(x_{\pi(2)})(\dots(A_{\mu_{\pi(n)}}(x_{\pi(n)}))\dots)).$$

BEWEIS: Eine Konsequenz aus $[a_\mu(x), a_\nu(y)] = \mathbf{0}$. ■

Im Folgenden lassen wir die Klammern einfach weg und schreiben

$$(\varphi,\psi) \mapsto A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_n}(x_n)(\varphi,\psi).$$

Proposition 2.12 Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^4$, dann gilt:

i) $\{(x_1,\dots,x_n) \mapsto A_{\mu_1}(x_1+v_1)\dots A_{\mu_n}(x_n+v_n)(\varphi,\psi)\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{4n})$.

ii) Die Fouriertransformation der Distribution

$$f \mapsto \int f(x_1,\dots,x_n)A_{\mu_1}(x_1+v_1)\dots A_{\mu_n}(x_n+v_n)(\varphi,\psi)\ d(x_1,\dots,x_n)$$

ist gegeben durch

$$\check{f} \mapsto \sum_{k=1}^{N}\int \check{f}(p_1,\dots,p_n)G_k(p_1,\dots,p_n)\ d\Omega^{(k)}_{\mu_1\dots\mu_n}(p_1,\dots,p_n),$$

für ein $N \in \mathbb{N}$ und $G_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$. Diese sind abhänging von φ, ψ und $v_1, \dots, v_n$ und durch eine Wahl von Repräsentanten von φ, ψ eindeutig bestimmt. Die $\Omega^{(k)}_{\mu_1\dots\mu_n}$ sind polynomial beschränkte, reelle Maße. (Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.)

BEWEIS: Die Verschiebungen um v_k ändern nichts an Beschränktheit oder Differenzierbarkeit der Funktion und bewirken in der Fouriertransformation nur Faktoren $e^{-iv_kp_k}$. Es ist daher hinreichend, den Fall $v_1 = \dots = v_n = 0$ zu behandeln: $A_{\mu_1}(x_1)\dots A_{\mu_n}(x_n)(\varphi,\psi)$ zerfällt in 2^n Summanden der Form

$$\begin{aligned}
&\langle a_{\mu_{s_1}}(x_{s_1})\dots a_{\mu_{s_\alpha}}(x_{s_\alpha})\varphi, a_{\mu_{t_1}}(x_{t_1})\dots a_{\mu_{t_\beta}}(x_{t_\beta})\psi\rangle_{\mathcal{S}_0}\\
= &\sum_{\text{alles außer }\mu}\sqrt{(m+1)\dots(m+\alpha)}\sqrt{(m+1)\dots(m+\beta)}\\
\cdot &\int\!\!\dots\!\!\int d\omega_{\rho_1\lambda_1}(p_1)\dots d\omega_{\rho_n\lambda_m}(p_m)\\
\cdot &\int\!\!\dots\!\!\int \Big(\prod_{a=1}^{\alpha}\frac{e^{-iu_{s_a}x_{s_a}}}{(2\pi)^2}\Big)\hat{\varphi}^{\nu_{s_1}\dots\nu_{s_\alpha}\rho_1\dots\rho_m}_{\alpha+m}(u_{s_1},\dots,u_{s_\alpha},p_1,\dots,p_m)d\omega_{\mu_{s_1}\nu_{s_1}}(u_{s_1})\dots d\omega_{\mu_{s_\alpha}\nu_{s_\alpha}}(u_{s_\alpha})\\
\cdot &\int\!\!\dots\!\!\int \Big(\prod_{b=1}^{\beta}\frac{e^{-iv_{t_b}x_{t_b}}}{(2\pi)^2}\Big)\hat{\psi}^{\kappa_{t_1}\dots\kappa_{t_\beta}\lambda_1\dots\lambda_m}_{\beta+m}(v_{t_1},\dots,v_{t_\alpha},p_1,\dots,p_m)d\omega_{\mu_{t_1}\kappa_{t_1}}(v_{t_1})\dots d\omega_{\mu_{t_\beta}\kappa_{t_\beta}}(v_{t_\beta})
\end{aligned}$$

Wie in Proposition(2.9) folgt *i)* direkt nach Differentiation unter dem Integral. *ii)* folgt mit Fubini, wenn man obigen Ausdruck mit $f = \hat{\check{f}}$ über die x_j integriert, was die e-Faktoren zu Faktoren der Form $\check{f}(\pm p'_1,\dots,\pm p'_n)$ macht, wobei $p'_1,\dots,p'_n$ geeignete Umbenennungen von den Variablen u_j, v_j sind.

Definiert man dann die $\Omega^{(k)}_{\mu_1\dots\mu_n}$ als geeignete Zusammenfassung von den $\omega_{\mu\dots\kappa\dots}$ und von $(\omega_{\mu\dots\kappa\dots})_-$, so erhält man die Behauptung durch geeignete Abzählung der einzelnen Summationen. (Für ein reelles Maß ρ auf $\mathbb{R}^4$ ist $\rho_-(f) := \int f(-x)d\rho(x)$.) ■

2.3 Das normalgeordnete Skalarfeld Φ

Zur Definition des Skalarfeldes Φ, heuristisch $\Phi(x) = \sum \eta^{\mu\nu} \; :B_\mu(x)B_\nu(x):$, werden wir das folgende Lemma heranziehen, dessen Aussage ist, daß man durch „Verschmieren“ einer normalgeordeten Sesqilinearform mit einer Testfunktion einen Operator erhält - eine Verallgemeinerung von

$$B_\mu(f) = \mathrm{w}\text{-}\int f(x)A_\mu(x)\; dx.$$

Das zu B gehörige normalgeordnete Skalarfeld Φ werden wir dann präzise durch die Beziehung

$$\Phi(f) := \sum \eta^{\mu\nu}\, \mathrm{w}\text{-}\int f(x)A_\mu(x)A_\nu(x)\; dx$$

definieren, was die symbolische Schreibweise $\Phi(x) = \sum \eta^{\mu\nu} \; :B_\mu(x)B_\nu(x):$ rechtfertigt. Die Spektrumsbedingung $Tr\ \omega_{\mu\nu} \subset \overline{V}_+$ wird sich dabei als wesentlich erweisen.

Im Beweis des Lemmas und an einigen späteren Stellen werden Funktionen auftreten, die nicht global Schwartzsch sind, dazu definieren wir für $M \subset \mathbb{R}^n$ beliebig:

$$\mathscr{S}(M) := \bigcup_{X \supset M} \{f : X \to \mathbb{C} \mid \exists \tilde{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \tilde{f}|_M = f|_M\}.$$

Lemma 2.1 Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Für $i \in \{1, \ldots, N\}$ sei $n_i \in \mathbb{N}^*$, und zu $i \in \{1, \ldots, N\}$ und $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ sei schließlich $v_{i,j} \in \mathbb{R}^4$ gewählt.

Für $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ erfülle $\omega_{\mu\nu}$ die Spektrumsbedingung $Tr\ \omega_{\mu\nu} \subset \overline{V}_+$. Dann gilt: Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4N})$ existiert genau ein $X(f) \in End(\mathcal{S}_0)$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} X(f) \quad = \quad \mathrm{w}\text{-}\int & f(x_1, \ldots, x_N)A_{\mu_{1,1}}(x_1 + v_{1,1}) \ldots A_{\mu_{1,n_1}}(x_1 + v_{1,n_1}) \\ & A_{\mu_{2,1}}(x_2 + v_{2,1}) \ldots A_{\mu_{2,n_2}}(x_2 + v_{2,n_2}) \\ & \ldots A_{\mu_{N,n_N}}(x_N + v_{N,n_N})\; d(x_1, \ldots, x_N). \end{aligned}$$

Weiter existiert $X(f)^\star$, und es ist $X(f)^\star = X(\bar{f})$.

Beweis: Eindeutigkeit:
Sind $X, Y \in End(\mathcal{S}_0)$ und gilt $\langle \varphi, X\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \langle \varphi, Y\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}$, für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$, so folgt $X = Y$, da $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0}$ nicht degeneriert ist.
Existenz:
Wir nehmen φ, ψ aus $\mathcal{S}_0$ und evaluieren die Sesquilinearform der rechten Seite an der Stelle (φ, ψ), dann zerfällt das Integral in $2^{\sum n_j}$ Summanden der Form

$$
\begin{aligned}
(\star) \quad &= \int \langle a_{\mu_{s_1,t_1}}(x_{s_1}+v_{s_1,t_1}) \ldots a_{\mu_{s_\alpha,t_\alpha}}(x_{s_\alpha}+v_{s_\alpha,t_\alpha})\varphi, \\
&\qquad a_{\mu_{\sigma_1,\tau_1}}(x_{\sigma_1}+v_{\sigma_1,\tau_1}) \ldots a_{\mu_{\sigma_\beta,\tau_\beta}}(x_{\sigma_\beta}+v_{\sigma_\beta,\tau_\beta})\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} f(x_1,\ldots,x_N)\ d(x_1,\ldots,x_N) \\
&\overset{Fubini}{=} \sum_{\substack{versch.\ gest. \\ Indices}} \sum_{M=0}^{\infty} \sqrt{(M+1)\cdot\ldots\cdot(M+\alpha)\cdot(M+1)\cdot\ldots\cdot(M+\beta))} \\
&\qquad \int\int\int \bar{\hat{\varphi}}^{\nu_1\ldots\nu_\alpha\rho_1\ldots\rho_M}_{\alpha+M}(p_1,\ldots,p_\alpha,u_1,\ldots,u_M) \\
&\qquad\quad \cdot \hat{\psi}^{\kappa_1\ldots\kappa_\beta\lambda_1\ldots\lambda_M}_{\beta+M}(q_1,\ldots,q_\beta,u_1,\ldots,u_M) \\
&\qquad\quad \cdot \hat{f}(p_{\gamma_{1,1}}+\ldots+p_{\gamma_{1,k_1}}-q_{\delta_{1,1}}-\ldots-q_{\delta_{1,l_1}}, \\
&\qquad\qquad p_{\gamma_{2,1}}+\ldots+p_{\gamma_{2,k_2}}-q_{\delta_{2,1}}-\ldots-q_{\delta_{2,l_2}}, \\
&\qquad\qquad \ldots) \\
&\qquad\quad \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^2}\right)^{-N+\sum n_j} \left(\prod_j e^{+ip_j v_{s_j,t_j}}\right) \left(\prod_j e^{-iq_j v_{\sigma_j,\tau_j}}\right) \\
&\qquad\quad d\omega_{\mu_{\sigma_1,\tau_1}\kappa_1}(q_1)\ldots d\omega_{\mu_{\sigma_\beta,\tau_\beta}\kappa_\beta}(q_\beta) \\
&\qquad\quad d\omega_{\mu_{s_1,t_1}\nu_1}(p_1)\ldots d\omega_{\mu_{s_\alpha,t_\alpha}\nu_\alpha}(p_\alpha) \\
&\qquad\quad d\omega_{\rho_1\lambda_1}(u_1)\ldots d\omega_{\rho_M\lambda_M}(u_M).
\end{aligned}
$$

Darin ist $\alpha + \beta = \sum_j n_j$ und $\{\gamma_{k',k} \mid k = 1,\ldots,k_{k'}\} = \{j \mid s_j = k'\}$ sowie $\{\delta_{l',l} \mid l = 1,\ldots,l_{l'}\} = \{j \mid \sigma_j = l'\}$. Der Exponent $-N + \sum n_j$ erklärt sich dadurch, daß N Faktoren $1/(2\pi)^2$ für die Fouriertransformation von f benötigt werden.

Es ist nun

$$
\begin{aligned}
\Big\{(p_1,\ldots,p_\alpha,u_1,\ldots u_M) \quad &\mapsto \quad \int \hat{\psi}^{\kappa_1\ldots\kappa_\beta\lambda_1\ldots\lambda_M}_{\beta+M}(q_1,\ldots,q_\beta,u_1,\ldots,u_M) \\
&\qquad \cdot\hat{f}(p_{\gamma_{1,1}}+\ldots+p_{\gamma_{1,k_1}}-q_{\delta_{1,1}}-\ldots-q_{\delta_{1,l_1}}, \\
&\qquad\quad p_{\gamma_{2,1}}+\ldots+p_{\gamma_{2,k_2}}-q_{\delta_{2,1}}-\ldots-q_{\delta_{2,l_2}}, \\
&\qquad\quad \ldots) \\
&\qquad d\omega_{\mu_{\sigma_1,\tau_1}\kappa_1}(q_1)\ldots d\omega_{\mu_{\sigma_\beta,\tau_\beta}\kappa_\beta}(q_\beta)\Big\} \\
&\in \quad \mathscr{S}(\underbrace{\overline{V}_+\times\ldots\times\overline{V}_+}_{\alpha\text{-mal.}}\times\mathbb{R}^{4M})
\end{aligned}
$$

Daher ist $(\star)$ das Skalarprodukt von φ mit einem Vektor $X_m(f,\psi) \in \mathcal{S}_0$: $(\star) = \langle\varphi, X_m(f,\psi)\rangle_{\mathcal{S}_0}$. Der Index m läuft von 1 bis $2^{\sum n_j}$ und ist eine Abzählung der einzelnen Summanden der Form $(\star)$.

Man sieht ein, daß ist $\psi \mapsto X_m(f,\psi)$ linear und stetig ist. $X(f) \in End(\mathcal{S}_0)$ definieren wir nun als die Summe $\sum_{m=1}^{2^{\sum n_j}} X_m(f,.)$.

Daß $X(f)^\star$ existiert und die Beziehung $X(f)^\star = X(\bar{f})$ erfüllt ist, sieht man wie folgt:

Mit jedem Summanden der Form $(\star)$, gibt es auch immer den Summanden, bei dem alle Operaroren $a_{\mu_{\dots}}(x_{\dots}+v_{\dots})$ der linken Seite auf der rechten Seite stehen und umgekehrt. Mit $(\star)$ ist also immer auch

$$(\star\star) \quad = \quad \int \langle a_{\mu_{\sigma_1,\tau_1}}(x_{\sigma_1}+v_{\sigma_1,\tau_1}) \dots a_{\mu_{\sigma_\beta,\tau_\beta}}(x_{\sigma_\beta}+v_{\sigma_\beta,\tau_\beta})\varphi, \\ a_{\mu_{s_1,t_1}}(x_{s_1}+v_{s_1,t_1}) \dots a_{\mu_{s_\alpha,t_\alpha}}(x_{s_\alpha}+v_{s_\alpha,t_\alpha})\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} f(x_1,\dots,x_N)\; d(x_1,\dots,x_N)$$

einer der $2^{\sum n_j}$ Summanden.

Bildet man von $(\star\star)$ das komplex konjugierte, so folgt $(\star\star) = \overline{\langle\psi, X_m(\bar{f},\varphi)\rangle_{\mathcal{S}_0}}$, mit demselben Index m, der in $(\star)$ aufgetreten ist. Das impliziert nun seinerseits, daß

$$\begin{aligned}
\langle\varphi, X(f)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} &= \sum_{m=0}^{2^{\sum n_j}} \langle\varphi, X_m(f,\psi)\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
&= \sum_{gewisse\ m} \left(\langle\varphi, X_m(f,\psi)\rangle_{\mathcal{S}_0} + \overline{\langle\psi, X_m(\bar{f},\varphi)\rangle_{\mathcal{S}_0}}\right) \\
&= \overline{\sum_{gewisse\ m} \left(\overline{\langle\varphi, X_m(f,\psi)\rangle_{\mathcal{S}_0}} + \langle\psi, X_m(\bar{f},\varphi)\rangle_{\mathcal{S}_0}\right)} \\
&= \overline{\sum_{m=0}^{2^{\sum n_j}} \langle\psi, X_m(\bar{f},\varphi)\rangle_{\mathcal{S}_0}} \\
&= \overline{\langle\psi, X(\bar{f})\varphi)\rangle_{\mathcal{S}_0}} \\
&= \langle X(\bar{f})\varphi, \psi\rangle_{\mathcal{S}_0}.
\end{aligned}$$

Da $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ beliebig gewählt werden können, ist das Lemma bewiesen. ■

Definition 2.12 Der durch Lemma 2.1 definierte Operator $X(f)$ ist im Folgenden stets mit

$$:[A_{\mu_{1,1}}^{(v_{1,1})} \dots A_{\mu_{1,n_1}}^{(v_{1,n_1})}][\dots] \dots [A_{\mu_{N,1}}^{(v_{N,1})} \dots A_{\mu_{N,n_N}}^{(v_{N,n_N})}]:(f)$$

bezeichnet. Dabei zeigen die Klammern an, daß über dieselbe Variable x_i integriert wurde. Ist ein $v_{i,j} = 0$, so lassen wir den Index an dieser Stelle weg.

Die Schreibweise mit den Doppelpunkten ist gewählt, wegen

Proposition 2.13 Für $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ gilt:

$$:[A_{\mu_1}] \dots [A_{\mu_n}]:(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = :B_{\mu_1}(f_1) \dots B_{\mu_n}(f_n): ,$$

wobei $:\,.\,:$ auf der rechten Seite das Normalordnen in $\mathcal{A}(B)$ ist (Def. 2.8).

Beweis: Es ist zu zeigen, daß

$$\int f_1(x_1) \dots f_n(x_n) A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n)(\varphi,\psi) = \langle\varphi,\ :B_{\mu_1}(f_1) \dots B_{\mu_n}(f_n):\ \psi\rangle_{\mathcal{S}_0}$$

Dies folgt, analog zu (2.12), direkt aus den Definitionen 2.11 und 2.8. ■

Definition 2.13 Das zu B gehörige normalgeordnete Skalarfeld Φ ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4) &\rightarrow End(\mathcal{S}_0)\\ f &\mapsto \sum_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} :[A_\mu A_\nu]: (f) = \sum_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \,\text{w-}\!\!\int f(x) A_\mu(x) A_\nu(x)\, dx.\end{aligned}$$

Korollar 2.1 w-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ ist eine Algebra.

Beweis: Zu jedem $\Phi(f)$ existiert der $\langle .\,, ..\rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierte $(\Phi(f))^\star = \Phi(\bar{f})$. Wegen Proposition 2.3 folgt die Behauptung. ■

Die Konstruktion von Φ hätten wir auch direkt ausgehend von $\mathcal{A}(B)$ machen können. Der Schlüssel dazu ist Proposition 2.13 und die folgende Vorüberlegung:

Sei $\Delta : \mathbb{R}^4 \ni x \mapsto (x, x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ die Diagonalabbildung. Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ bezeichnen wir mit $\Delta_* f$ die Abbildung $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{4+4}) \ni h \mapsto \int f(x) h(\Delta(x)) dx = \int f(x) h(x, x) dx$. Es ist also gemäß Def. 2.13

$$\langle \varphi, \Phi(f)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = \sum \eta^{\mu\nu} \Delta_* f(A_\mu(.)A_\nu(..)(\varphi, \psi))$$

Was wir tun werden ist, eine Folge in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ wählen, so daß, in einem noch zu präzisierenden Sinne, gilt

$$\sum_{n,m=0}^{N} \alpha_{nm} f_n \otimes f_m \overset{?}{\longrightarrow} \Delta_* f, \quad \text{für } N \rightarrow \infty,$$

oder etwas suggestiver

$$\sum_{n,m=0}^{N} \alpha_{nm} f_n(x) f_m(y) \overset{??}{\longrightarrow} \delta(x - y) f(x), \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Dazu beachte man, daß kanonisch $\Delta_* f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4+4})$, und daß die Fouriertransformierte $\widehat{\Delta_* f} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sigma^* \hat{f}$ ist, mit $\sigma : (p, q) \mapsto p + q$ (siehe Lemma B.1).

Eine alternative Definition von Φ liefert dann das nächste Lemma.

Lemma 2.2 Seien $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, und zu jedem $f^{(j)}$ seien Folgen $(f_k^{(j)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $(\alpha_{k,l}^{(j)})_{k,l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ so gewählt, daß gilt:

i) Für alle $j = 1, \ldots, n$ und $(p, q) \in \mathbb{R}^{4+4}$ gilt :

$$\sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl}^{(j)} \hat{f}_k^{(j)}(p) \hat{f}_l^{(j)}(q) \overset{N\rightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^2} \hat{f}^{(j)}(p + q) \text{ (punktweise).}$$

ii) Für alle j gibt es $M_j > 0$, so daß für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt :

$$\left\| \sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl}^{(j)} \hat{f}_k^{(j)} \otimes \hat{f}_l^{(j)} \right\|_\infty < M_j. \quad (\|.\|_\infty = \text{Supremumsnorm auf } \mathbb{R}^{4+4})$$

Dann gilt für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ beliebig:

$$
\begin{aligned}
& \langle \varphi, \ :[A_{\mu_1} A_{\nu_1}] \dots [A_{\mu_n} A_{\nu_n}]: (f^{(1)} \dots f^{(n)}) \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \\
= \quad & \lim_{N_1 \to \infty} \cdots \lim_{N_n \to \infty} \sum_{k_1, l_1 = 0}^{N_1} \cdots \sum_{k_n, l_n = 0}^{N_n} \alpha^{(1)}_{k_1 l_1} \dots \alpha^{(n)}_{k_n l_n} \\
& \qquad \langle \varphi, \ :B_{\mu_1}(f^{(1)}_{k_1}) B_{\nu_1}(f^{(1)}_{l_1}) \dots B_{\mu_n}(f^{(n)}_{k_n}) B_{\nu_1}(f^{(n)}_{l_n}): \ \psi \rangle_{\mathcal{S}_0}.
\end{aligned}
$$

Es ist also insbesondere

$$
\Phi(f) = \text{w-lim} \sum \alpha_{kl} \ \eta^{\mu\nu} \ :B_\mu(f_k) B_\nu(f_l): \in \text{w-lim}\, \mathcal{A}(B(.)B(..)) \subset \text{w-lim}\, \mathcal{A}(B). \tag{2.13}
$$

Beweis: Setze $F^{(j)}_N := \sum_{n,m=0}^N \alpha^{(j)}_{nm} f^{(j)}_n \otimes f^{(j)}_m$. Die rechte Seite ist dann mit Proposition 2.13 gleich

$$
\begin{aligned}
& \lim_{N_1 \to \infty} \cdots \lim_{N_n \to \infty} \langle \varphi, \ :[A_{\mu_1}][A_{\nu_1}] \dots [A_{\mu_n}][A_{\nu_n}]: (F^{(1)}_{N_1} \otimes \dots \otimes F^{(n)}_{N_n}) \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \\
= \quad & \lim_{N_1 \to \infty} \cdots \lim_{N_n \to \infty} \int A_{\mu_1}(x_1) A_{\nu_1}(y_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) A_{\nu_n}(y_n)(\varphi, \psi) \\
& \qquad F^{(1)}_{N_1}(x_1, y_1) \dots F^{(n)}_{N_n}(x_n, y_n) \ d(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n).
\end{aligned}
$$

Mit Proposition 2.12 *ii)* ist dieses Integral gleich

$$
\begin{aligned}
& \lim_{N_1 \to \infty} \cdots \lim_{N_n \to \infty} \sum_k \int \hat{F}^{(1)}_{N_1}(p_1, q_1) \dots \hat{F}^{(n)}_{N_n}(p_n, q_n) \\
& \qquad G^{(\varphi,\psi)}_k(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \ d\Omega^{(k)}_{\mu_1\nu_1 \dots \mu_n\nu_n}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n),
\end{aligned}
$$

mit geeigneten $G^{(\varphi,\psi)}_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4 \cdot 2n})$ und $\Omega^{(k)}_{\mu_1\nu_1 \dots \mu_n\nu_n}$ polynomial beschränkten, reellen Maßen. Damit ist $M_1 M_2 \dots M_n |G^{(\varphi,\psi)}_k|$, wegen *ii)*, eine integrierbare Majorante für den k-ten Integranden bzgl. des positiven Maßes $|\Omega^{(k)}_{\mu_1\nu_1 \dots \mu_n\nu_n}|$. Wegen $i), ii)$ darf man also den Grenzwert unter dem Integral ausführen und erhält

$$
\begin{aligned}
& \sum_k \int \frac{1}{(2\pi)^{2n}} (\hat{f}^{(1)} \circ \sigma \otimes \dots \otimes \hat{f}^{(n)} \circ \sigma) G^{(\varphi,\psi)}_k \ d\Omega^{(k)}_{\mu_1\nu_1 \dots \mu_n\nu_n} \\
\overset{Fubini}{=} \quad & \int f^{(1)}(x_1) \dots f^{(n)}(x_n) (A_{\mu_1}(x_1) A_{\nu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) A_{\nu_n}(x_n)(\varphi, \psi)) \\
& \qquad d(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned}
$$

was zu beweisen war. ■

Wir formulieren diese Aussage mit etwas anderen Voraussetzungen, die wir in Abschnitt 3.2 weiter untersuchen werden. Der Beweis bleibt von der Umformulierung unbetroffen:

Lemma 2.3 Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, und zu f seien Folgen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$, $f_k = (f^\mu_k)_{\mu=0,\dots,3}$ und $(\alpha_{k,l})_{k,l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ gewählt, so daß die folgenden acht Bedingungen gelten:

$i) - iv)$ $\quad \sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl} \hat{f}_k(\pm\ .\ ) \otimes \hat{f}_l(\pm\ ..\ ) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^2} \hat{f} \circ \sigma(\pm\ .\ , \pm\ ..\ )\ \eta$

ω-fast überall, d.h. in jeder Komponente für jedes der Maße $\omega_{\kappa\lambda}$.

$v) - iix)$ Für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ gilt :

$$\left| \sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl} \hat{f}_k^{\mu}(\pm\ .\ ) \otimes \hat{f}_l^{\nu}(\pm\ .\ ) \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\ |\hat{f} \circ \sigma(\pm\ .\ , \pm\ ..\ )|$$

ω-fast überall.

Dann gilt:

$$\Phi(f) = \text{w-lim} \sum \alpha_{kl}\ :B(f_k)B(f_l): \in \text{w-lim}\, \mathcal{A}(B(.)B(..)) \subset \text{w-lim}\, \mathcal{A}(B). \quad (2.14)$$

Da gilt

$$:B(f_k)B(f_l): = b^{\dagger}(f_k)b^{\dagger}(f_l) + b^{\dagger}(f_k)b(f_l) + b^{\dagger}(f_l)b(f_k) + b(f_k)b(f_l)$$

folgt somit für das Vakuum $\Omega = (1, 0, 0, 0, \dots)$:

$$\Phi(f)\Omega = [\ (0, 0, \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}}\ 2\ \tilde{f} \otimes \eta, 0, 0, \dots)\ ]. \quad (2.15)$$

Wobei $\tilde{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ so ist, daß $\hat{\tilde{f}}(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \hat{f}(p+q)$, falls $(p,q) \in \overline{V}_+ \times \overline{V}_+$. (Der Faktor 2 in (2.15) kommt durch das Symmetrisieren des Erzeugers.)

2.4 Zur Positivität

Definition 2.14 Sei I eine Indexmenge, eine Familie $X(.) = \{X(i)\}_{i \in I}$ von Operatoren aus $End(\mathcal{S}_0)$ heißt positiv, falls für alle $Y \in \mathcal{A}(X)$ und das Vakuum Ω gilt:

$$\|Y\Omega\|_{\mathcal{S}_0}^2 = \langle Y\Omega, Y\Omega \rangle_{\mathcal{S}_0} \geq 0.$$

Wegen Proposition 2.2 $iii)$ ist das Vektorfeld B genau dann positiv, wenn $\langle .\ , .. \rangle_1$ ein positiv (semi-) definites Skalarprodukt ist.

Im Fall $d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu}\ dH_+ + 2 id_\mu id_\nu\ dH_0)$ ist B nicht positiv. Es folgt aber wegen (2.15), daß

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)\Omega\|_{\mathcal{S}_0}^2 &= \frac{2}{(2\pi)^4} \sum \int \bar{\hat{f}}(p+q) \eta^{\mu\nu} \hat{f}(p+q) \eta^{\kappa\lambda}\ d\omega_{\mu\kappa}(p)\ d\omega_{\nu\lambda}(q) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^4}\ 4\ \pi^6 \Big(\int |\hat{f}(p+q)|^2 dH_+(p)\ dH_+(q) \\ &\qquad + \int |\hat{f}(p+q)|^2 (pq)^2 dH_0(p)\ dH_0(q) \Big) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

etwas anders gesprochen gilt also:

Für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ ist $W_{\Phi,2}(\bar{f} \otimes f) \geq 0$, mit der Zweipunktfunktion $W_{\Phi,2} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4\cdot 2})$ des Feldes Φ definiert durch

$$(f \otimes g) \mapsto \langle \Omega, \Phi(f)\Phi(g)\Omega \rangle_{\mathbb{S}_0}.$$

Tatsächlich ist auch die Vierpunktfunktion positiv[2], d.h. die Distribution $W_{\Phi,4} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4\cdot 4})$ definiert durch

$$(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f_4) \mapsto \langle \Omega, \Phi(f_1)\Phi(f_2)\Phi(f_3)\Phi(f_4)\Omega \rangle_{\mathbb{S}_0}$$

erfüllt $W_{\Phi,4}(\tilde{F} \otimes F) \geq 0$ mit $\tilde{F}(x,y) := \overline{F(y,x)}$, für alle[3] $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$.

Man darf daher genug Anlaß zur Frage sehen, ob Φ positiv oder nicht positiv ist.

Ist etwa das Bifeld $(f,g) \mapsto B(f)B(g)$ positiv, so ist wegen (2.14) automatisch auch Φ positiv, denn $\mathcal{A}(B(.)B(..))$ angewandt auf Ω liefert eine dichte Teilmenge in den gradzahligen Teilchenräumen. (Das Bifeld ist positiv, wenn $\langle . , .. \rangle_1 = -\langle . , .. \rangle_+$ ist, und $\langle . , .. \rangle_+$ ein positiv definites Skalarprodukt ist.)

Lemma 2.4 Im Falle von $d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu}\, dH_+ + 2id_\mu id_\nu\, dH_0)$, für $\mu, \nu = 0,1,2,3$, ist $B(.)B(..)$ nicht positiv.

Beweis: Wähle $f = (h,0,0,0), g = (0,h,0,0) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ mit $Tr\ \hat{h} \subset V_+ = \{p \mid p^0 > 0, (p)^2 > 0\}$. Damit ist $\langle f, g \rangle_1 = 0$ und weiter

$$\begin{aligned} \|B(f)B(g)\Omega\|^2_{\mathbb{S}_0} &= \|[\ (\langle \bar{f}, g \rangle_1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}(f \otimes g + g \otimes f), 0, 0, \dots)\ ]\|^2_{\mathbb{S}_0} \\ &= \langle f, f \rangle_1 \langle g, g \rangle_1 \\ &= \pi^6\Big(-\int |\hat{h}|^2 dH_+\Big)\Big(\int |\hat{h}|^2 dH_+\Big) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Offenbar ist dies echt kleiner Null, wenn man $h \neq 0$ wählt. ∎

Hat man aber, daß $B(.)B(..)$ nicht positiv ist, und weiß man weiter, daß $B(f)B(g) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$, für alle $f,g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$, so folgt daraus gemäß (2.10), daß auch Φ nicht positiv ist.

Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß dies im Falle von $d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu}\, dH_+ + 2id_\mu id_\nu\, dH_0)$ der Fall ist (Satz 4.8).

Tatsächlich sind für den Schluß der Indefinitheit von Φ bereits die Überlegungen zu den schwachen Limiten in Abschnitt 4.2 in etwas modifizierter Form ausreichend.

Um dies einzusehen benötigen wir den Hilbertraumformalismus, den wir im nächsten Kapitel entwickeln. Sodann wird sich die Indefinitheit von Φ durch den Umstand ergeben, daß in Hilberträumen schwach konvergente Folgen bereits beschränkte Folgen sind.

Wir führen diese Diskussion am Ende von Abschnnitt 4.2 weiter.

[2] Dies ist eine Folgerung aus [NRT]; die Koeffizienten der Partialwellenentwicklung der Vierpunktfunktion sind alle positiv, was gleichbedeutend mit der Positivität der Vierpunktfunktion ist.

[3] Man beachte, daß dies eine wesentlich stärkere Aussage ist, als etwa nur $W_{\Phi,4}(\bar{f}_4 \otimes \bar{f}_3 \otimes f_3 \otimes f_4) \geq 0$, für alle $f_3, f_4 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$.

Kapitel 3

Eine hinreichende Bedingung für die Positivität quadratischer Felder

In diesem Kapitel werden wir sehen, daß die Struktur des Einteilchenprodukts (2.1) so ist, daß man immer einen Hilbertraum bzw. einen Kreinraum $\mathcal{K}_0$ (siehe Def. 3.1) zusammen mit einer Einbettung $\iota_0 : \mathcal{S}_0 \hookrightarrow \mathcal{K}_0$ konstruieren kann, so daß eine Reihe wünschenswerter Eigenschaften erfüllt sind (Satz 3.2).

In diesem Kontext findet man stets eine hinreichende Bedingung für die Positivität eines in B quadratischen Feldes (Satz 3.3). (In der speziellen Situation, in der Φ ausgehend von $d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu}\ dH_+ + 2id_\mu id_\nu\ dH_0)$ konstruiert ist, ist diese Bedingung jedoch nicht erfüllt.)

3.1 Ein Hilbertraum für B und Φ

Im Folgenden sei $\omega = (\omega_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ eine Familie polynomial beschränkter, reeller Maße auf $\mathbb{R}^m$, so daß $\omega_{kl} = \omega_{lk}$. Es sei $d\omega_{kl} = g_{kl}\ d|\omega_{kl}|$ mit meßbaren $g_{kl} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $|g_{kl}(x)| = 1$ und positiven Maßen $|\omega_{kl}|$, und weiter sei $|\omega| := (|\omega_{kl}|)_{k,l=1,\ldots,n}$.

ω heiße diagonal, falls $\omega_{kl} = 0$, für $k \neq l$.

Wir erklären eine Sesquilinearform durch

$$\langle f, g \rangle_1 := \sum_{k,l=1}^{n} \int \bar{\hat{f}}_k \hat{g}_l\ d\omega_{kl}, \quad f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n).$$

Dann bekommt man durch

$$f \overset{\mathscr{L}}{\sim} g :\Leftrightarrow \langle f - g, .\ \rangle_1 = 0 : \mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$$

eine Äquivalenzrelation, und wir setzen $\mathscr{N}^{(1)} := \{f \overset{\mathscr{L}}{\sim} 0\}$, sowie

$$\mathcal{S}^{(1)} := \mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)/\mathscr{N}^{(1)}. \tag{3.1}$$

Weiter sei für $[f],[g] \in \mathcal{S}^{(1)} : \langle [f],[g] \rangle_{\mathcal{S}^{(1)}} := \langle f,g \rangle_1$, wenn f,g Rerpäsentanten von $[f],[g]$ sind. $\langle .\, ,..\rangle_{\mathcal{S}^{(1)}}$ ist dann eine wohldefinierte Sesquilinearform auf $\mathcal{S}^{(1)}$.

Für diagonale ω läßt sich leicht ein L^2-Formalismus[1] entwickeln:
Es sei $\omega^* = (\omega^*_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ diagonal, dann definieren wir

$$\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*) := \{f = (f_1, \ldots, f_n) \mid \forall k : f_k \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, |\omega^*_{kk}|)\}. \tag{3.2}$$

Mit dieser Definition von $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$ ist

$$\langle f,g \rangle_{\omega^*} := \sum_{k=1}^{n} \int \bar{f}_k g_k \; d\omega^*_{kk},$$

für $f,g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$ wohldefiniert. Es ist

$$f \overset{\mathscr{L}^2}{\sim} g :\Leftrightarrow \langle f-g, .\,\rangle_{\omega^*} = 0 : \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*) \to \mathbb{C}$$

eine Äquivalenzrelation. Dazu definieren wir

$$\mathscr{N}_{\mathscr{L}^2} := \{f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*) \mid f \overset{\mathscr{L}^2}{\sim} 0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)\},$$

und setzen

$$L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*) := \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)/\mathscr{N}_{\mathscr{L}^2}. \tag{3.3}$$

Für $[f],[g] \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$ sei $\langle [f],[g] \rangle_{L^2(\omega^*)} := \langle f,g \rangle_{\omega^*}$, wenn f,g Repräsentanten von $[f],[g]$ sind. $\langle .\, ,..\rangle_{L^2(\omega^*)}$ ist dann eine wohldefinierte Sesquilinearform auf $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$.

Lemma 3.1 Sei ω^* diagonal, dann gilt:

i) $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*) \cong L^2(\mathbb{R}^m, |\omega^*_{00}|) \oplus \ \ldots \ \oplus L^2(\mathbb{R}^m, |\omega^*_{n-1\ n-1}|)$.

ii) Ist ω^* positiv, d.h. $\omega^* = |\omega^*|$, so ist $(L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*), \langle .\, ,..\rangle_{L^2(\omega^*)})$ ein Hilbertraum.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß für $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$ gilt:

$$\langle [f],[f] \rangle_{L^2(|\omega^*|)} = 0 \Leftrightarrow f \overset{\mathscr{L}^2}{\sim} 0$$

„ $\Rightarrow$ “: Wegen der Positivität von $|\omega^*|$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, also

$$g \mapsto |\langle f,g \rangle_{\omega^*}| \le \langle |f|,|g| \rangle_{|\omega^*|} \le \langle f,f \rangle_{|\omega^*|} \langle g,g \rangle_{|\omega^*|} = \langle [f],[f] \rangle_{L^2(|\omega^*|)} \langle [g],[g] \rangle_{L^2(|\omega^*|)} = 0.$$

Also ist $f \overset{\mathscr{L}^2}{\sim} 0$.
„ $\Leftarrow$ “: Sei $d\omega^*_{kl} = g_{kl} \; d|\omega^*_{kl}|$, mit meßbaren $g_{kl} : \mathbb{R}^m \to \{-1,1\}$. Dann ist insbesondere $h := (g_{11}f_1, \ldots, g_{nn}f_n) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$, also

$$0 = \langle f,h \rangle_{\omega^*} = \langle f,f \rangle_{|\omega^*|} = \langle [f],[f] \rangle_{L^2(|\omega^*|)}.$$

■

[1] Mit $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, \mu)$ bezeichnen wir für ein (positives) Maß μ die Menge der Funktionen $\{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C} \mid f$ meßbar und $\int |f|^p \; d\mu < \infty\}$, und mit $L^p(\mathbb{R}^m, \mu)$ bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen, $f \sim g :\Leftrightarrow \int |f-g|^p \; d\mu = 0$.

Neben den bisherigen Definitionen, wird sich der Begriff des Kreinraumes als sehr fruchtbar erweisen:

Definition 3.1 Es sei $\mathcal{K}$ ein $\mathbb{C}-$Vektorraum und $\langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ sesquilinear. Gibt es ein $J : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ linear und invertierbar, so daß

i) $J = J^{-1}$ (J ist involutiv.),

ii) $J = J^{\star}$ (J ist symmetrisch, d.h. $\langle x, Jy \rangle_{\mathcal{K}} = \langle Jx, y \rangle_{\mathcal{K}}$, für alle $x, y \in \mathcal{K}$.),

iii) $\langle . \,, .. \rangle_{+} := \langle . \,, J.. \rangle_{\mathcal{K}}$ positiv definit ist,

iv) $(\mathcal{K}, \langle . \,, .. \rangle_{+})$ ein Hilbertraum ist,

so heißt $(\mathcal{K}, J, \langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}})$ Kreinraum[2].

Ist $(\mathcal{K}, J, \langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}})$ ein Kreinraum, so ist J auch bezüglich $\langle . \,, J.. \rangle_{\mathcal{K}}$ symmetrisch, also selbstadjungiert. J ist dann wegen *i)* auch unitär bzgl. $\langle . \,, J.. \rangle_{\mathcal{K}}$, also ist das Spektrum von J enthalten in $\{-1, 1\}$, und $\mathcal{K}$ zerfällt bezüglich beider Skalarprodukte in die orthogonale Summe der Eigenräume von J:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{[+]} \textcircled{\perp} \mathcal{K}^{[-]} \quad \text{und} \quad J = P_{+} - P_{-}, \text{ mit Projektoren } P_{\pm} \text{ auf } \mathcal{K}^{[\pm]}. \tag{3.4}$$

Dies hat zur Folge, daß $(\mathcal{K}^{[+]}, \langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}} |_{\mathcal{K}^{[+]} \times \mathcal{K}^{[+]}})$ ein Hilbertraum ist, denn für $x \in \mathcal{K}^{[+]}$ gilt:

$$\langle x, x \rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, Jx \rangle_{\mathcal{K}} =: \langle x, x \rangle_{+} \geq 0$$

Die Nützlichkeit der Kreinraumstruktur zur Untersuchung der mutmaßlichen Positivität von Φ aus Gleichung (2.13) ist, wie sich zeigen wird, im wesentlichen der folgende Zusammenhang:

Proposition 3.1 Sei $\mathcal{K}^{(2)} := \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ das Hilbertraumtensorprodukt von $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K}$ bezüglich $\langle . \,, J.. \rangle_{\mathcal{K}}$, und seien $\langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}^{(2)}}$ sowie $J^{(2)} = J \otimes J$ kanonisch durch $\langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}}$ und J gegeben. Dann gilt:
Auch $(\mathcal{K}^{(2)}, J^{(2)}, \langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}^{(2)}})$ ist ein Kreinraum, und $\mathcal{K}^{(2)}$ zerfällt in

$$\mathcal{K}^{(2)} \cong \mathcal{K}^{[+]} \otimes \mathcal{K}^{[+]} \textcircled{\perp} \mathcal{K}^{[+]} \otimes \mathcal{K}^{[-]} \textcircled{\perp} \mathcal{K}^{[-]} \otimes \mathcal{K}^{[+]} \textcircled{\perp} \mathcal{K}^{[-]} \otimes \mathcal{K}^{[-]}, \tag{3.5}$$

und es gilt

$$\mathcal{K}^{(2),[+]} := \mathcal{K}^{[+]} \otimes \mathcal{K}^{[+]} \textcircled{\perp} \mathcal{K}^{[-]} \otimes \mathcal{K}^{[-]}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{K}^{(2),[-]} := \mathcal{K}^{[+]} \otimes \mathcal{K}^{[-]} \textcircled{\perp} \mathcal{K}^{[-]} \otimes \mathcal{K}^{[+]}, \tag{3.7}$$

sind die Eigenräume zu den Eigenwerten $+1$ und -1 von $J^{(2)}$, insbesondere ist also $\mathcal{K}^{(2),[+]}$ unter

$$\langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}^{(2)}} |_{\mathcal{K}^{(2),[+]} \times \mathcal{K}^{(2),[+]}}$$

ein Hilbertraum.

Beweis: Daß $(\mathcal{K}^{(2)}, J^{(2)}, \langle . \,, .. \rangle_{\mathcal{K}^{(2)}})$ ein Kreinraum ist, und daß $\mathcal{K}^{(2)}$ gemäß (3.5) zerfällt, ist unmittelbar klar. Sei $x \in \mathcal{K}^{(2),[+]}$, also

$$x = \lim \sum \alpha_{ij} u_i \otimes u_j + \lim \sum \beta_{kl} v_k \otimes v_l,$$

[2] Die allgemeine Theorie von Kreinräumen findet man etwa in [Bo].

mit $u_k \in \mathcal{K}^{[+]}, v_i \in \mathcal{K}^{[-]}$. Weil $J^{(2)}$ stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} J^{(2)}x &= \lim \sum \alpha_{ij} Ju_i \otimes Ju_j + \lim \sum \beta_{kl} Jv_k \otimes Jv_l \\ &= \lim \sum \alpha_{ij} u_i \otimes u_j + \lim \sum \beta_{kl}(-1)(-1) v_k \otimes v_l \\ &= x. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich $J^{(2)}y = -y$ für $y \in \mathcal{K}^{(2),[-]}$. ■

Für diagonale ω^* haben wir oben $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$ definiert. Ist $g_{kk} : \mathbb{R}^m \to \{-1, 1\}$ so, daß die Beziehung $d\omega^*_{kk} = g_{kk}\ d|\omega^*_{kk}|$ erfüllt ist, so macht die Abbildung

$$J : f = (f_1, \ldots, f_n) \mapsto (g_{11} f_1, \ldots, g_{nn} f_n)$$

$(L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*), J, \langle .\ , ..\rangle_{L^2(\omega^*)})$ offenbar zu einem Kreinraum, wie bereits im Beweis von Lemma 3.1 beobachtet.

Um das Skalarfeld Φ auf Positivität zu untersuchen, wird es sich als zweckmäßig erweisen, $\mathcal{S}_0$ aus Gleichung (2.3) als Untervektorraum eines Kreinraums $\mathcal{K}_0$ aufzufassen.

Technische Schwierigkeiten bereitet nun, daß $d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu}\ dH_+ + 2id_\mu id_\nu\ dH_0)$ nicht diagonal ist. Ersetzt man in $\omega_{\mu\nu}$ das indefinite $-\eta_{\mu\nu}$ durch Kronecker-$\delta_{\mu\nu}$, also

$$d\omega^+_{\mu\nu} := \pi^3(\delta_{\mu\nu}\ dH_+ + 2id_\mu id_\nu\ dH_0),$$

so wird das dazugehörige Skalarprodukt positiv definit (Die Matrix $(p_\mu p_\nu)_{\mu,\nu=0,\ldots,3}$ ist positiv definit.). Daher wollen wir etwas definieren wie

$$\begin{aligned} J : (\mathcal{S}^{(1)} \subset ?\ ) &\to\ ?? \\ (f^0, \vec{f}\ ) &\mapsto\ \tilde{f} := (\hat{f}^0\ (\chi_{V_0^+} - \chi_{V_+}), \hat{\vec{f}}\ ), \end{aligned} \tag{3.8}$$

wobei $\chi_{V_0^+}, \chi_{V_+}$ die charakteristischen Funktionen von V_0^+ und V_+ sind, denn dann ist

$$\langle f, Jf\rangle_{???} = \sum \int \bar{\hat{f}}^\mu\ \tilde{f}^\nu\ d\omega_{\mu\nu} = \sum \int \bar{\hat{f}}^\mu \hat{f}^\nu\ d\omega^+_{\mu\nu} \geq 0.$$

Im folgenden Satz werden wir diesen Gedanken verfolgen. Das Vorgehen ist dabei jedoch nicht an den konkreten Fall $d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu}\ dH_+ + 2id_\mu id_\nu\ dH_0)$ gebunden, weswegen wir den Satz für den allgemeinen Fall formulieren:

Satz 3.1 Sei $(\mathcal{S}^{(1)}, \langle .\ , ..\rangle_{\mathcal{S}^{(1)}})$ wie in (3.1), durch eine beliebige Familie reeller, polynomial beschränkter Maße $(\omega_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ mit $\omega_{kl} = \omega_{lk}$ gegeben. Dann gibt es einen Kreinraum $(\mathcal{K}, J, \langle .\ , ..\rangle_{\mathcal{K}})$, und eine dichte lineare Einbettung $\iota : \mathcal{S}^{(1)} \hookrightarrow \mathcal{K}$, so daß

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{S}^{(1)}} = \langle \iota f, \iota g\rangle_{\mathcal{K}}, \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{S}^{(1)}.$$

(Die Dichtheit bezieht sich auf die von $\langle .\ , J..\rangle_{\mathcal{K}}$ erzeugte Hilbertraumtopologie.)

Beweis: Wir führen den Beweis in fünf Schritten:
1. Ein Diagonalisierungsprozeß für ω,
2.-4. Etablierung der Kreinraumstruktur,
5. Konstruktion der Einbettungsabbildung.

1. Schritt: Diagonalisierung von ω:
Ziel ist es, die Beziehung $d\omega(p) = h(p)\ d\rho(p)$ mit einer matrixwertigen Funktion h und einem (positiven) Maß ρ zu etablieren, denn dann läßt sich h ρ-fast überall diagonalisieren, also $d\omega(p) = U^{-1}(p)\lambda(p)U(p)\ d\rho(p)$, für Diagonalmatrizen $\lambda(p)$. Etwas suggestiver geschrieben heißt das $d\omega(p) = U^{-1}(p)\ d\omega^*(p)\ U(p)$, für für eine diagonale Familie reeller Maße ω^*.

Wir haben die reellen Maße $d\omega_{kl} = g_{kl}\ d|\omega_{kl}|$, mit (positiven) Maßen $|\omega_{kl}|$ und meßbaren $g_{kl} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $|g_{kl}(p)| = 1$.

Setze $\rho^{(1)} := |\omega_{11}|$. Nach dem Lebesgueschen Zerlegungssatz zerlegen wir ω_{kl} in einen bzgl. $\rho^{(1)}$ absolut stetigen Anteil und einen zu $\rho^{(1)}$ gegenseitig singulären Anteil: $d|\omega_{kl}| = d|\widetilde{\omega_{kl}}| + s_{kl}\ d\rho^{(1)}$, wobei $|\widetilde{\omega_{kl}}|$ und $\rho^{(1)}$ gegenseitig singulär und die $s_{kl} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ meßbar sind. Also

$$d\omega_{11} = g_{11}\ d\rho^{(1)} \quad \text{und} \quad d\omega_{kl} = g_{kl}\ d|\widetilde{\omega_{kl}}| + g_{kl}s_{kl}\ d\rho^{(1)}, \quad \text{für } (k,l) \neq (1,1).$$

Wir fassen $g_{kl}s_{kl} =: h_{kl}^{(1)}$ zusammen. $|\widetilde{\omega_{kl}}|$ und $\rho^{(1)}$ sind gegenseitig singulär, d.h. es gibt meßbare $M_{kl} \subset \mathbb{R}^m$, so daß $\rho^{(1)}(M_{kl}) = 0$ und $|\widetilde{\omega_{kl}}|(\mathbb{R}^m \setminus M_{kl}) = 0$. Es sei nun $M^{(1)} := \bigcup_{\kappa\lambda} M_{\kappa\lambda}$, dann ist

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)}(M^{(1)}) &\leq \sum \rho^{(1)}(M_{kl}) = 0 \quad \text{und} \\
|\widetilde{\omega_{kl}}|(\mathbb{R}^m \setminus M^{(1)}) &= |\widetilde{\omega_{kl}}|(\mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\kappa\lambda} M_{\kappa\lambda}) = |\widetilde{\omega_{kl}}|(\bigcap_{\kappa\lambda}(\mathbb{R}^m \setminus M_{\kappa\lambda})) \\
&\leq |\widetilde{\omega_{kl}}|(\mathbb{R}^m \setminus M_{kl}) = 0.
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: $M^{(1)}$ ist eine Nullmenge für $\rho^{(1)}$, und $\mathbb{R}^m \setminus M^{(1)}$ ist eine Nullmenge für alle $|\widetilde{\omega_{kl}}|$, für $(k,l) \neq (1,1)$.

Es ist deswegen also[3]

$$d\omega_{kl} = g_{kl}\chi_{M^{(1)}} d|\widetilde{\omega_{kl}}| + h_{kl}^{(1)}\chi_{\mathbb{R}^m\setminus M^{(1)}}\ d\rho^{(1)}.$$

oder, wenn wir für $(k,l) \neq (1,1)$ $d\omega_{kl}^{(1)} := \chi_{M^{(1)}} d|\widetilde{\omega_{kl}}|$, definieren,

$$d\omega_{kl} = g_{kl}\chi_{M^{(1)}} d\omega_{kl}^{(1)} + h_{kl}^{(1)}\chi_{\mathbb{R}^m\setminus M^{(1)}}\ d\rho^{(1)}.$$

Mit den Maßen $\omega_{kl}^{(1)}$ gehen wir nun genauso vor wie gerade mit den ω_{kl}:
Wir setzen $\rho^{(2)} := \omega_{12}^{(1)}$, und zerlegen die restlichen $\omega_{kl}^{(1)}, (k,l) \neq (1,1), (1,2)$ wieder in ihre singulären und absolut stetigen Bestandteile bzgl. $\rho^{(2)}$:

$$d\omega_{kl}^{(1)} = t_{kl}\ d\rho^{(2)} + d\widetilde{\omega_{kl}^{(1)}},$$

und wir fassen wieder $g_{kl}t_{kl} =: h_{kl}^{(2)}$ zusammen. Mit demselben Argument wie für $M^{(1)}$ schließen wir, daß es $M^{(2)} \subset M^{(1)}$ gibt, so daß

$$d\omega_{kl} = g_{kl}\chi_{M^{(2)}} d\widetilde{\omega_{kl}^{(1)}} + h_{kl}^{(2)}\chi_{M^{(1)}\setminus M^{(2)}}\ d\rho^{(2)} + h_{kl}^{(1)}\chi_{\mathbb{R}^m\setminus M^{(1)}}\ d\rho^{(1)}.$$

[3] χ_A ist die charakteristische Funktion von $A \subset \mathbb{R}^m$.

In dieser Art gehen wir iterativ weiter vor. Nach $n(n+1)/2$ Schritten erhalten wir[4]:

$$\begin{aligned} d\omega_{kl} &= h_{kl}^{(1)} \chi_{\mathbb{R}^m \setminus M^{(1)}} d\rho^{(1)} + h_{kl}^{(2)} \chi_{M^{(1)} \setminus M^{(2)}} d\rho^{(2)} + \\ & \quad \ldots + h_{kl}^{(n(n+1)/2)} \chi_{M^{(n(n+1)/2-1)}} d\rho^{(n(n+1)/2)}, \end{aligned}$$

mit meßbaren $h_{kl}^{(i)} = h_{kl}^{(i)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und positiven Maßen $\rho^{(i)}$. Dann sind $h^{(i)}(p) := (h_{kl}^{(i)}(p))_{k,l=1,\ldots n}$ somit symmetrische Matrizen. Wir identifizieren noch $M^{(0)} := \mathbb{R}^m$ und $M^{(n(n+1)/2)} := \emptyset$. Damit können wir definieren

$$\mathbb{R}^m \ni p \mapsto \lambda(p) := U^{(i)}(p) h^{(i)}(p) (U^{(i)}(p))^{-1}, \text{wenn } p \in M^{(i)} \setminus M^{(i+1)},$$

wobei $U^{(i)}(p)$ orthogonal und so gewählt sind, daß $\lambda(p)$, für alle $p \in \mathbb{R}^m$, diagonal ist. Um den Index i loszuwerden notieren wir $\mathbb{R}^m \ni p \mapsto U(p) := U^{(i)}(p)$, für $p \in M^{(i)} \setminus M^{(i+1)}$, sowie $\mathbb{R}^m \ni p \mapsto h(p) := h^{(i)}(p)$, für $p \in M^{(i)} \setminus M^{(i+1)}$. Dann ist also $\lambda(p) = U(p)h(p)(U(p))^{-1}$ für $p \in \mathbb{R}^m$.

Man sieht ein, daß $p \mapsto \lambda(p)$ und $p \mapsto U(p)$ selber wieder meßbare Abbildungen sind.

Fassen wir noch etwas weiter zusammen:

$$d\rho \quad := \quad \chi_{\mathbb{R}^m \setminus M^{(1)}} d\rho^{(1)} + \chi_{M^{(1)} \setminus M^{(2)}} d\rho^{(2)} + \ldots + \chi_{M^{(n(n+1)/2-1)}} d\rho^{(n(n+1)/2)}.$$

Wir erhalten so

$$d\omega = h \ d\rho = U^{-1} \ \lambda \ U \ d\rho$$

und setzen schließlich

$$d\omega_{kl}^* \quad := \quad \lambda_{kl} \ d\rho, \quad \text{für } k,l = 1,\ldots,n.$$

Damit ist ω^* diagonal, also ist $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$ wohldefiniert, und es ist

$$\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*) = \{ f \mid \{ p \mapsto \langle f(p), |\lambda|(p) f(p) \rangle_{\mathbb{C}^n} \} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m, \rho) \}.$$

2. Schritt: Definition von $\mathcal{K}$:

Wir setzen

$$\mathscr{K} := \{ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}^n \mid \{ p \mapsto U(p) f(p) \} = Uf \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*) \}. \tag{3.9}$$

Daraus ergibt sich, daß für $f, g \in \mathscr{K}$

$$\langle f, g \rangle_{\mathscr{K}} := \langle Uf, Ug \rangle_{\omega^*} = \sum_k \int \overline{(Uf)}_k (Ug)_k \ d\omega_{kk}^*$$

wohldefiniert ist.

Auf $\mathscr{K}$ erklären wir eine Äquivalenzrelation durch:

$$f \overset{\mathscr{K}}{\sim} g \ :\Leftrightarrow \ Uf \overset{\mathscr{L}^2}{\sim} Ug.$$

[4]Daß $n(n+1)/2$ Summanden auftreten, ergibt sich aus der Symmetrie $\omega_{kl} = \omega_{kl}$. Es ist dabei durchaus auch möglich, daß weniger Summanden auftreten, bzw. daß gewisse Maße $\rho^{(k)}$ das Nullmaß sind.

Dann sei $\mathscr{N}_{\mathscr{K}} := \{f \in \mathscr{K} \mid f \overset{\mathscr{K}}{\sim} 0\}$ und schließlich:

$$\mathcal{K} := \mathscr{K} / \mathscr{N}_{\mathscr{K}} \tag{3.10}$$

Per constructionem haben wir so

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{K} & \cong & L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*) \\ [f]_{\underset{\sim}{\mathscr{K}}} & \mapsto & [U(.)f(.)]_{\underset{\sim}{\mathscr{L}^2}}, \end{array} \tag{3.11}$$

und es ist für $[f], [g] \in \mathcal{K}$

$$\langle [f], [g] \rangle_{\mathcal{K}} := \langle f, g \rangle_{\mathscr{K}} = \sum_k \int \overline{(Uf)}_k (Ug)_k \; d\omega^*_{kk} \tag{3.12}$$

wohldefiniert.

3.Schritt: Definition von J:
Es sei $x \mapsto S(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl} S_{kl}(p) & := & 0, \text{ falls } k \neq l, \\ S_{kk}(p) & := & 1, \text{ falls } \lambda_{kk}(p) \geq 0, \\ S_{kk}(p) & := & -1, \text{ falls } \lambda_{kk}(p) < 0, \end{array}$$

woraus sich $S(p) = (S(p))^{-1} = (S(p))^T$ ergibt (^{T} bedeutet Transposition der Matrix). Außerdem ist $S(p)\lambda(p) = \lambda(p)S(p) = |\lambda|(p)$, wenn $|\lambda|(p) := (|\lambda_{kl}(p)|)_{k,l=1,\dots,n}$. Definiere nun

$$\begin{array}{rcl} J : \mathcal{K} & \rightarrow & \mathcal{K} \\ [f] & \mapsto & [(U(.))^T S(.) U(.) f(.)]. \end{array} \tag{3.13}$$

J ist wohldefiniert.

4.Schritt: $(\mathcal{K}, J, \langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}})$ ist ein Kreinraum.

Beweis: $J = J^{-1}$ folgt direkt aus $S(p) = (S(p))^{-1}$.
$J = J^\star$ folgt wegen $S(p) = S(p)^T$ und $S(p)\lambda(p) = \lambda(p)S(p)$.
$\langle . \, , J.. \rangle_{\mathcal{K}}$ ist positiv, weil $\lambda(p)S(p) = |\lambda|(p)$ gilt, und es gilt insbesondere

$$\langle [f]_{\underset{\sim}{\mathscr{K}}}, J[g]_{\underset{\sim}{\mathscr{K}}} \rangle_{\mathcal{K}} = \langle [Uf]_{\underset{\sim}{\mathscr{L}^2}} \, , [Ug]_{\underset{\sim}{\mathscr{L}^2}} \rangle_{L^2(|\omega^*|)}$$

Da $(L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, |\omega^*|)$ ein Hilbertraum ist, folgt, weil $[f] \mapsto [Uf]$ ein Isomorphismus ist, daß $(\mathcal{K}, \langle . \, , J.. \rangle_{\mathcal{K}})$ ein Hilbertraum ist. ■

5.Schritt: Die Einbettung:
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathcal{S}^{(1)} & \rightarrow & \mathcal{K} \\ [f]_{\underset{\sim}{\mathscr{S}}} & \mapsto & [\hat{f}]_{\underset{\sim}{\mathscr{K}}} \end{array} \tag{3.14}$$

ist wohldefiniert, injektiv, $Bild(\iota)$ liegt dicht in $\mathcal{K}$ bzgl. $\langle . \, , J.. \rangle_{\mathcal{K}}$, und es gilt

$$\langle [f]_{\underset{\sim}{\mathscr{S}}}, [f]_{\underset{\sim}{\mathscr{S}}} \rangle_{\mathcal{S}^{(1)}} = \langle \iota [f]_{\underset{\sim}{\mathscr{S}}}, \iota [f]_{\underset{\sim}{\mathscr{S}}} \rangle_{\mathcal{K}}$$

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, daß $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n) \subset \mathscr{K}$:

Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$, wir müssen zeigen, daß $Uf \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n, \omega^*)$. Es ist:

$$\langle Uf, Uf\rangle_{|\omega^*|} = \sum_k \int |(Uf)_k|^2 \; d|\omega^*_{kk}|$$

Weil $U(x)$ orthogonal ist, sind die Einträge in $U(x)$ kleiner gleich 1, daher

$$|(Uf)_k| = |\sum_l U_{kl} f_l| \leq \sum_l |f_l|,$$

und $\sum_k \sum_l \int |f_l| \; d|\omega^*_{kk}|$ existiert, weil die $|\omega^*_{kk}|$ polynomial beschränkt sind. Damit ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n) \subset \mathscr{K}$.

Weiter existiert für Schwartzfunktionen auch

$$\begin{aligned} \langle Uf, Uf\rangle_{|\omega^*|} &= \int \left(\sum_{ij} \bar{f}_i |h_{ij}| f_j \right) \; d\rho \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{ij} \int \bar{f}_i f_j \; d|\omega_{ij}|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Man darf hier Summe und Integral vertauschen, weil $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^2(\mathbb{R}^m, \omega_{ij})$ gilt, für alle $i, j = 1, \ldots, n$. (ω_{ij} ist polynomial beschränkt!) Daher[5] bekommt man für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$

$$\langle f, g\rangle_{\mathscr{K}} = \sum_{kl} \int \bar{f}_k g_l \; d\omega_{kl}, \tag{3.16}$$

und deswegen

$$\langle [f], [g]\rangle_{\mathcal{S}(1)} = \langle f, g\rangle_{1} \stackrel{!}{=} \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{\mathscr{K}} = \langle [\hat{f}], [\hat{g}]\rangle_{\mathcal{K}}. \tag{3.17}$$

Jetzt zeigen wir, daß $[\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)]_{\underset{\sim}{\mathscr{K}}} \subset [\mathscr{K}]_{\underset{\sim}{\mathscr{K}}} = \mathcal{K}$ dicht ist:

Sei dazu $[g] \in \mathcal{K}$ so gewählt, daß $[g] \perp [\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)]$; „senkrecht" bezieht sich dabei auf das positive Skalarprodukt von $\mathcal{K}$, d.h.:

$$\langle [f], J[g]\rangle_{\mathcal{K}} = \langle f, (U(.))^T S(.) U(.) g(.)\rangle_{\mathscr{K}} = 0,$$

[5]Gleichung (3.16) ist im allgemeinen falsch, für $f, g \in \mathscr{K}$, da die Matrizen U die Komponenten verschiedener $\mathscr{L}^2$-Räume, d.h. Funktionen mit unterschiedlichem Abfallverhalten, vermischen. Man möge sich das etwa an folgendem Beispiel deutlich machen:

Wir wählen $d\omega(p) = h(p) \; dp$, mit

$$h(p) := \begin{pmatrix} 1-\chi(p) & 1+\chi(p) \\ 1+\chi(p) & 1-\chi(p) \end{pmatrix}, \text{ sowie } \chi(p) := \begin{cases} 1, & \text{falls } p \in [-1,1] \\ 0, & \text{falls } p \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}.$$

Dann erhält man

$$d\omega^*(p) = \lambda(p) \; dp = U h(p) U^T \; dp = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\chi(p) \end{pmatrix} dp, \quad \text{für } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

was offenbar bedeutet: $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2, \omega^*) = \{f \mid \int_{\mathbb{R}} |f_1(p)|^2 \; dp < \infty, \int_{[-1,1]} |f_2(p)|^2 \; dp < \infty\}$; z.B. ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ mit $g_1 = 0, g_2 = 1$ aus dieser Menge. Dann ist $U^T g(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, und man hat $U^T g =: g' \in \mathscr{K}$. Es folgt nun jedoch, daß $\int \bar{g}'_1 g'_1 \; d\omega_{11} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1-\chi(p)) \; dp = \infty$. Da dies ein Summand aus (3.16) ist, existiert die rechte Seite von (3.16) hier also nicht.

für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$. Also:

$$\int \langle U(p)f(p), |\lambda|(p)U(p)g(p)\rangle_{\mathbb{C}^4} d\rho(p) = 0, \quad \text{für alle } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n).$$

Wählt man $f = (f_1, 0, \ldots, 0)$ so ist

$$\begin{aligned} & \int \bar{f}_1(p)(U(p)^T|\lambda|(p)U(p)g(p))_1 \; d\rho(p) = 0, \quad \text{für alle } f_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m). \\ \Rightarrow \quad & (U(.)^T|\lambda|(.)U(.)g(.))_1 = 0, \quad \rho\text{-fast überall.} \end{aligned}$$

Analog folgt so für alle $k = 1, \ldots, n$:

$$(U(.)^T|\lambda|(.)U(.)g(.))_k = 0, \quad \rho\text{-fast überall.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &= \sum_k \int \bar{g}_k(x) \; (U(x)^T|\lambda|(x)U(x)g(x))_k \; d\rho(x) \\ &= \langle Ug, Ug\rangle_{|\omega^*|} \\ &= \langle [g], J[g]\rangle_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Ist also g aus dem orthogonalen Komplement von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)$, so ist $[g] = 0 \in \mathcal{K}$; $[\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)]_{\underset{\sim}{\mathscr{K}}}$ ist also dicht in $\mathcal{K}$.

Weil die Fouriertransformation $\hat{.}$ ein Isomorphismus ist, bekommen wir also auch, daß $[\widehat{\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)}]_{\underset{\sim}{\mathscr{K}}} \subset \mathcal{K}$ dicht ist.

Die Aussage des Lemmas ist somit bewiesen, wenn wir noch zeigen, daß

$$f \overset{\mathscr{S}}{\sim} 0 \Rightarrow \hat{f} \overset{\mathscr{K}}{\sim} 0, \quad \text{für } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n).$$

Sei also $f \overset{\mathscr{S}}{\sim} 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \langle f, .\rangle_1 = 0 \\ \overset{(3.17)}{\Rightarrow} \quad & \langle \hat{f}, .\rangle_{\mathscr{K}} |_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n)} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle \hat{f}, .\rangle_{\mathscr{K}} = 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Folgerung wegen der Dichtheit und wegen der Stetigkeit von

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^n) \ni g \mapsto \langle \hat{f}, g\rangle_{\mathscr{K}}$$

gilt. Diese Abbildung ist stetig, denn mit Cauchy-Schwarz gilt:

$$\begin{aligned} g \mapsto |\langle \hat{f}, g\rangle_{\mathscr{K}}|^2 &= |\langle U\hat{f}, Ug\rangle_{\omega^*}|^2 \\ &= |\langle U\hat{f}, SUg\rangle_{|\omega^*|}|^2 \\ &\leq \langle U\hat{f}, U\hat{f}\rangle_{|\omega^*|} \langle SUg, SUg\rangle_{|\omega^*|} \\ &= \langle \hat{f}, \hat{f}\rangle_{|\omega^*|} \langle g, g\rangle_{|\omega^*|}, \end{aligned}$$

womit die Aussage des Lemmas gezeigt ist. ■

Damit ist Satz 3.1 bewiesen. ■

Bemerkung:
i) $\mathcal{K}$ ist bis auf unitäre Isomorphie eindeutig:
Erfüllen etwa $\iota' : \mathcal{S}^{(1)} \hookrightarrow \mathcal{K}', (\mathcal{K}', J', \langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}'})$ auch die Behauptung aus Satz 3.1, so wird durch $\iota f \mapsto \iota' f$ ein unitärer Isomorphismus zwischen den Hilberträumen $(\mathcal{K}, \langle . \, , J.. \rangle_{\mathcal{K}})$ und $(\mathcal{K}', \langle . \, , J'.. \rangle_{\mathcal{K}'})$ definiert.
ii) Topologisiert man $\mathcal{S}^{(1)}$ mit der Quotiententopologie, so ist $\iota : \mathcal{S}^{(1)} \to \mathcal{K}$ stetig, weil die Schwartzraumkonvergenz die Konvergenz der Integrale nach sich zieht.
iii) Man beachte, daß $\iota(\mathcal{S}^{(1)})$ im allgemeinen nicht invariant ist unter der Wirkung von J, denn durch das Umklappen der Vorzeichen (Multiplikation mit der Matrix $S(p)$) können Unstetigkeiten entstehen. Im Fall $d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu}\, dH_+ + 2id_\mu id_\nu\, dH_0)$ kann man das etwa in Gleichung (3.8) oder im nächsten Abschnitt, in Gleichung (3.18), beobachten.

Beschränken wir uns wieder auf den vierdimensionalen Fall, d.h.: $m = n = 4$. Die Konstruktion aus Satz 3.1 überträgt sich kanonisch auf $\mathcal{S}_0$ aus Gleichung (2.3):

Satz 3.2 Sei $(\mathcal{S}_0, \langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{S}_0})$ wie in Kapitel 2 gegeben. Dann gibt es einen Kreinraum $(\mathcal{K}_0, J_0, \langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}_0})$, und eine dichte, lineare und stetige Einbettung $\iota_0 : \mathcal{S}_0 \hookrightarrow \mathcal{K}_0$, so daß

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}_0} = \langle \iota_0 f, \iota_0 g \rangle_{\mathcal{K}_0}, \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{S}_0.$$

Beweis: Sei $(\mathcal{K}, J, \langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}})$ aus Satz 3.1 für $m = n = 4$ gegeben. Es sei $\mathcal{K}_0 := Fock(\mathcal{K})$, der bosonische Fockraum[6] über $(\mathcal{K}, \langle . \, , J.. \rangle_{\mathcal{K}})$. $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}_0}$ sei kanonisch definiert durch

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{K}_0} := \bar{\varphi}_0 \psi_0 + \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle_{\mathcal{K}} + \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle_{\mathcal{K}^{(2)}} + \langle \varphi_3, \psi_3 \rangle_{\mathcal{K}^{(3)}} + \dots,$$

wobei $\mathcal{K}^{(n)} := (\mathcal{K} \otimes \cdots \otimes \mathcal{K})^{sym}$ das symmetrische n-fache Hilbertraumtensorprodukt von $(\mathcal{K}, \langle . \, , J.. \rangle_{\mathcal{K}})$ mit sich selbst ist, und $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}^{(n)}}$ darauf kanonisch gegeben ist durch $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}}$. Weiter sei

$$\begin{aligned} J_0 &:= id_{\mathbb{C}} \oplus J \oplus J^{(2)} \oplus J^{(3)} \oplus \dots \\ &:= id_{\mathbb{C}} \oplus J \oplus J \otimes J \oplus J \otimes J \otimes J \oplus \dots \end{aligned}$$

$(\mathcal{K}_0, J_0, \langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}_0})$ ist dann ein Kreinraum, und

$$\begin{aligned} \iota_0 : \mathcal{S}_0 &\hookrightarrow \mathcal{K}_0 \\ [(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)] &\mapsto [(\varphi_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots)] \end{aligned}$$

erfüllt analog zu Satz 3.1 die Behauptung. ■

B und Φ liefern so für reelle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4), g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ symmetrische, dicht[7] definierte Operatoren auf $\mathcal{K}_0$:

$$B(f), \Phi(g) : (\mathcal{S}_0 \hookrightarrow \mathcal{K}_0) \to (\mathcal{S}_0 \hookrightarrow \mathcal{K}_0).$$

[6] Siehe etwa [RS1], Seite 53.
[7] Symmetrisch bzgl. $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{K}_0}$ und dicht bzgl. $\langle . \, , J.. \rangle_{\mathcal{K}_0}$.

3.2 Zur Positivität von Φ

Zerlegen wir $\mathcal{K}_0$ in die Eigenräume von J:

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0^{[+]} \bigoplus \mathcal{K}_0^{[-]}.$$

Offenbar ist $\iota_0(\Omega) \in \mathcal{K}_0^{[+]}$. Kann man nun für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ schließen, daß

$$\iota_0(\Phi(f_1) \ldots \Phi(f_n)\Omega) \in \mathcal{K}_0^{[+]},$$

so ist Φ positiv, denn dann folgt:

$$\begin{aligned} & \forall Y \in \mathcal{A}(\Phi) : \iota_0(Y\Omega) \in \mathcal{K}_0^{[+]} \\ \Rightarrow \quad & \forall Y \in \mathcal{A}(\Phi) : \|Y\Omega\|^2_{\mathcal{S}_0} = \langle \iota_0(Y\Omega), \iota_0(Y\Omega) \rangle_{\mathcal{K}_0} = \langle \iota_0(Y\Omega), J_0\iota_0(Y\Omega) \rangle_{\mathcal{K}_0} \geq 0. \end{aligned}$$

Dies motiviert die folgenden Überlegungen:

In Lemma 2.3 sieht man, daß

$$\Phi(f) = \text{w-lim} \sum \alpha_{kl} \ :B_\mu(f_k)B_\nu(f_l): \ .$$

Die Bedingungen $i) - iix)$ aus Lemma 2.3 leisten jedoch mehr:

Lemma 3.2 Seien $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ beliebig, und zu $f^{(i)}$ seien $(f_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}, \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ und $(\alpha_{k,l}^{(i)})_{k,l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen gewählt, so daß die Bedingungen $i) - iix)$ aus Lemma 2.3 erfüllt sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \iota_0(\Phi(f^{(1)}) \ldots \Phi(f^{(n)})\Omega) \\ = \quad & \lim_{N_1\to\infty} \ldots \lim_{N_n\to\infty} \iota_0(\sum_{k_1,l_1=0}^{N_1} \ldots \sum_{k_n,l_n=0}^{N_n} \alpha^{(1)}_{k_1l_1} \ldots \alpha^{(n)}_{k_nl_n} :B(f^{(1)}_{k_1})B(f^{(1)}_{l_1}): \ldots :B(f^{(n)}_{k_n})B(f^{(n)}_{l_n}): \Omega) \\ & \in \mathcal{K}_0 \end{aligned}$$

(Konvergenz in der Hilbertraumtopologie von $\mathcal{K}_0$)

Beweis: Setze $F := \Phi(f^{(1)}) \ldots \Phi(f^{(n)})\Omega$ und

$$F_{N_1\ldots N_n} := \sum_{k_1,l_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{k_n,l_n=0}^{N_n} \alpha^{(1)}_{k_1l_1} \ldots \alpha^{(n)}_{k_nl_n} \ :B(f^{(1)}_{k_1})B(f^{(1)}_{l_1}): \ \ldots \ :B(f^{(n)}_{k_n})B(f^{(n)}_{l_n}): \ \Omega.$$

Es ist zu zeigen, daß

$$\langle \iota_0(F - F_{N_1\ldots N_n}), J_0\iota_0(F - F_{N_1\ldots N_n}) \rangle_{\mathcal{K}_0} \longrightarrow 0, \quad \text{für } N_n, \ldots, N_1 \to \infty$$

Das Bilden des Skalarproduktes involviert Integrale, das Auftreten von J_0 verändert die Maße die beim Integrieren auftreten. In der Notation aus dem Beweis von Satz 3.1 heißt das einfach, daß man an Stelle von $d\omega = h\ d\rho = U^T\lambda U\ d\rho$ mit $U^T|\lambda|U d\rho$ integriert. Die Bedingungen $v) - iix)$ aus Lemma 2.3 liefern dann integrierbare Majoranten, und man darf wegen $i) - iv)$ Grenzwerte und Integrale vertauschen. ∎

Ist es möglich sich bei der Wahl der f_k in einer gewissen Weise zu beschränken, so kann man, wie der nächste Satz zeigt, daraus die Positivität des Feldes Φ schließen.

Satz 3.3 Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ und $(\alpha_{k,l})_{k,l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen, so daß die Bedingungen $i) - v)$ aus Lemma 2.3 erfüllt sind. Es bezeichne für $g \in \mathscr{K}$, $[g]$ die Äquivalenzklasse in $\mathcal{K}$. Kann man für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ die Folgen (f_k) und (α_{kl}) so wählen, daß zusätzlich

i) für alle k sind $[\hat{f}_k]$ und $[\check{f}_k]$ Eigenvektoren von J,

ii) für alle k haben $[\hat{f}_k]$ und $[\check{f}_k]$ denselben Eigenwert,

iii) $\alpha_{kl} = 0,$ falls $[\hat{f}_k]$ und $[\hat{f}_l]$ verschiedene Eigenwerte haben,

so ist Φ positiv.

Beweis: Es bezeichne $\mathcal{K}_0^{[+]}$ den Eigenraum von J_0 zum Eigenwert $+1$. Wir zeigen zuerst, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\iota_0 \left(\prod_{k=1}^{n} :B(g_k)B(h_k):\ \Omega \right) \in \mathcal{K}_0^{[+]}$$

ist, wenn immer $[\hat{g}_k], [\hat{h}_k], [\check{g}_k], [\check{h}_k]$ Eigenvektoren von J zu demselben Eigenwert sind. Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang:
$(n = 0)$:

$$\iota_0 \left(\prod_{k\in\emptyset} :B(g_k)B(h_k):\ \Omega \right) = \iota_0(\Omega) \in \mathcal{K}_0^{[+]}.$$

$(n = 1)$:

$$\iota_0 \left(\prod_{k=1}^{1} :B(g_k)B(h_k):\ \Omega \right) = \iota_0((0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}(g_1 \otimes h_1 + h_1 \otimes g_1), 0, \dots)) \in \mathcal{K}_0^{[+]}.$$

Induktionsschritt:
Sei

$$\varphi := (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots) := \prod_{k=1}^{n} :B(g_k)B(h_k):\ \Omega, \text{ und } \iota_0\varphi \in \mathcal{K}_0^{[+]}.$$

Sei $\varphi^{(m)} := (0, \dots, 0, \varphi_m, 0, 0, \dots)$ die Projektion von φ auf den m-Teilchenraum. Ausreichend zu zeigen ist somit, daß

$$\iota_0\big(\ :B(g_{n+1})B(h_{n+1}):\ \iota_0^{-1}\iota_0(\varphi^{(m)})\big) \in \mathcal{K}_0^{[+]}.$$

Für $m = 0$ gilt dies, wie im Induktionsanfang $(n = 1)$. Sei also $m \geq 1$.

$\iota^{(m)}\varphi_m \in \mathcal{K}^{(m)} = (\mathcal{K} \otimes \ldots \otimes \mathcal{K})^{sym}$ ($\iota^{(m)}$ kanonisch gegeben) besteht aus Summanden der Form

$$\ldots \otimes [\hat{G}_i] \otimes \ldots \otimes [\hat{G}_j] \otimes \ldots$$

wobei $G_k \in \{g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n\}$. Weil aber $\iota_0 \varphi^{(m)} \in \mathcal{K}_0^{[+]}$, heißt das analog zu Prop. 3.1, daß die Anzahl von Faktoren aus $\mathcal{K}^{[-]}$ gerade sein muß. Wirkt nun

$$\begin{aligned} {:}B(g_{n+1})B(h_{n+1}){:} \quad &= \quad b^\dagger(g_{n+1})b^\dagger(h_{n+1}) + b^\dagger(g_{n+1})b(h_{n+1}) \\ &+ \quad b^\dagger(h_{n+1})b(g_{n+1}) + b(g_{n+1})b(h_{n+1}) \end{aligned}$$

auf $\varphi^{(m)}$, so bewirkt der $b^\dagger(g_{n+1})b^\dagger(h_{n+1})$-Anteil weitere Faktoren $g_{n+1} \otimes h_{n+1}$ plus symmetrisierte Terme. Da jedoch $[\hat{g}_{n+1}]$ und $[\hat{h}_{n+1}]$ denselben Eigenwert haben, ist

$$\iota_0 \left(b^\dagger(g_{n+1})b^\dagger(h_{n+1})\varphi^{(m)} \right) \in \mathcal{K}_0^{[+]}.$$

Wirkt der Vernichtungsoperator $b(g_{n+1})$ auf einen einfachen Tensor, so bedeutet das wegen (3.17):

$$\begin{aligned} G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \quad &\mapsto \quad \sqrt{m}\langle \bar{g}_{n+1}, G_1 \rangle_{\mathcal{S}^{(1)}} G_2 \otimes G_3 \otimes \ldots \\ &= \quad \sqrt{m}\langle [\bar{\breve{g}}_{n+1}], [\hat{G}_1] \rangle_{\mathcal{K}} G_2 \otimes G_3 \otimes \ldots \end{aligned}$$

Nun ist $[\breve{g}_{n+1}]$ Eigenvektor zu J, daraus ergibt sich wegen (3.13):

$$\begin{aligned} J[\bar{\breve{g}}_{n+1}] \quad &= \quad [U^T S U \bar{\breve{g}}_{n+1}] = [\overline{U^T S U \breve{g}_{n+1}}] \\ &= \quad \overline{[U^T S U \breve{g}_{n+1}]} = \pm \overline{[\breve{g}_{n+1}]} \\ &= \quad \pm [\bar{\breve{g}}_{n+1}], \end{aligned}$$

weil $U^T S U$ reell ist. $[\bar{\breve{g}}_{n+1}]$ ist also auch Eigenvektor zum gleichen Eigenwert wie $[\breve{g}_{n+1}]$.
Damit verschwindet $\langle [\bar{\breve{g}}_{n+1}], [\hat{G}_1] \rangle_{\mathcal{K}}$, wenn $[\hat{G}_1]$ nicht den Eigenwert von $[\hat{g}_{n+1}]$ hat. Hat $[\hat{G}_1]$ denselben Eigenwert wie $[\hat{g}_{n+1}]$, so wird durch das weitere Wirken von $b^\dagger(h_{n+1})$ wieder ein Element gleichen Eigenwertes hinzugefügt, plus symmetrische Terme, also

$$\iota_0 \left(b^\dagger(h_{n+1})b(g_{n+1})\varphi^{(m)} \right) \in \mathcal{K}_0^{[+]}.$$

Folgt als zweiter Operator $b(h_{n+1})$, so erhält man

$$\langle [\bar{\breve{g}}_{n+1}], [\hat{G}_1] \rangle_{\mathcal{K}} \langle [\bar{\breve{h}}_{n+1}], [\hat{G}_2] \rangle_{\mathcal{K}} G_3 \otimes G_4 \otimes \ldots,$$

was nur dann verschieden von Null ist, wenn $[\hat{G}_1]$ und $[\hat{G}_2]$ im selben Eigenraum liegen, weil $[\bar{\breve{g}}_{n+1}]$ und $[\bar{\breve{h}}_{n+1}]$ im selben Eigenraum liegen, also

$$\iota_0 \left(b(g_{n+1})b(h_{n+1})\varphi^{(m)} \right) \in \mathcal{K}_0^{[+]}.$$

Damit ist zusammenfassend:

$$\iota_0 \left(\prod_{k=1}^{n+1} {:}B(g_k)B(h_k){:} \ \Omega \right) \in \mathcal{K}_0^{[+]},$$

was zu beweisen war.

Nun seien $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ beliebig, und zu $f^{(i)}$ seien $(f_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}}, \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ und $(\alpha_{k,l}^{(i)})_{k,l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen gewählt, so daß die Bedingungen $i) - iix)$

aus Lemma 2.3 und die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Dann gilt nach Lemma 3.2 und wegen der Stetigkeit von J_0:

$$\begin{aligned}
& J_0\iota_0(\Phi(f^{(1)})\dots\Phi(f^{(n)})\Omega) \\
= \quad & J_0 \lim_{N_1}\dots\lim_{N_n}\iota_0(\sum_{k_1,l_1=0}^{N_1}\dots\sum_{k_n,l_n=0}^{N_n}\alpha^{(1)}_{k_1l_1}\dots\alpha^{(n)}_{k_nl_n} :B(f^{(1)}_{k_1})B(f^{(1)}_{l_1}):\dots :B(f^{(n)}_{k_n})B(f^{(n)}_{l_n}):\Omega) \\
= \quad & \lim_{N_1}\dots\lim_{N_n}J_0\iota_0(\sum_{k_1,l_1=0}^{N_1}\dots\sum_{k_n,l_n=0}^{N_n}\alpha^{(1)}_{k_1l_1}\dots\alpha^{(n)}_{k_nl_n} :B(f^{(1)}_{k_1})B(f^{(1)}_{l_1}):\dots :B(f^{(n)}_{k_n})B(f^{(n)}_{l_n}):\Omega) \\
= \quad & \lim_{N_1}\dots\lim_{N_n}\iota_0(\sum_{k_1,l_1=0}^{N_1}\dots\sum_{k_n,l_n=0}^{N_n}\alpha^{(1)}_{k_1l_1}\dots\alpha^{(n)}_{k_nl_n} :B(f^{(1)}_{k_1})B(f^{(1)}_{l_1}):\dots :B(f^{(n)}_{k_n})B(f^{(n)}_{l_n}):\Omega) \\
= \quad & \iota_0(\Phi(f^{(1)})\dots\Phi(f^{(n)})\Omega).
\end{aligned}$$

Das heißt also, daß $\iota_0(\Phi(f^{(1)})\dots\Phi(f^{(n)})\Omega)$, für beliebiges $n\in\mathbb{N}$ und beliebige $f^{(1)},\dots,f^{(n)}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, Eigenvektor von J_0 zum Eigenwert $+1$ ist. Daraus folgt, daß Φ positiv ist. ■

Betrachten wir

$$d\omega(p) = \pi^3\left[(-\eta\ dH_+(p) + 2(p_\mu p_\nu)_{\mu\nu}dH_0(p)\right],$$

so ist die Diagonalisierung ω^* von ω gegeben durch

$$d\omega^*(p) = \pi^3\left[(-\eta\ dH_+(p) + 2\ E(p)\ dH_0(p)\right],$$

mit

$$E(p) = \begin{pmatrix} |p|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und $J:\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ ergibt sich zu

$$J:[g] = \left[\begin{pmatrix} g^0 \\ \vec{g} \end{pmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} g^0(\chi_{V_0^+} - \chi_{V_+}) \\ \vec{g} \end{pmatrix}\right], \tag{3.18}$$

wobei $\chi_{V_0^+}, \chi_{V_+}$ die charakteristischen Funktionen von V_0^+ und V_+ sind. Die orthogonale Zerlegung von $\mathcal{K}$ gemäß (3.4) ist dann:

$$\mathcal{K}^{[+]} \quad = \quad \{[g] \mid g^0|_{V_+} = 0, H_+\text{-fast überall}\} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{[-]} \quad = \quad & \{[g] \mid \vec{g} = 0, H_0\text{- und } H_+\text{-fast überall} \\ & \text{und } g^0|_{V_0^+} = 0, H_0\text{-fast überall}\}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

In diesem Fall gibt es keine Möglichkeit Folgen zu finden, die die Voraussetzungen aus Satz 3.3 erfüllen, da man $[\hat{f}\circ\sigma\ \eta]$ auf ganz $\overline{V}_+\times\overline{V}_+$ $\omega_{\mu\nu}$-fast überall mit Eigenvektoren $[\hat{f}_k] = [(\hat{f}^0_k,\dots,\hat{f}^3_k)]$ approximieren müßte. Dann darf aber $\hat{f}^0_k(p)$ für $p\in V_0^+$ nicht verschieden von Null sein, denn dann ist $\hat{f}^0_k\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ schon in einer Umgebung von p verschieden von Null, also auch im Innern von V_+. In dieser Situation ist dann aber $[\hat{f}_k]$ kein Eigenvektor. Daher kann man $[\hat{f}\circ\sigma\ (e_0\otimes e_0)]$[8] nicht auf $V_0^+\times V_0^+, V_+\times V_0^+$ und $V_0^+\times V_+$ approximieren.

[8] $\{e_\mu \mid \mu = 0,1,2,3\}$ ist die Standardbasis des $\mathbb{C}^4$.

Wegen der Eindeutigkeit von $\mathcal{K}$ ist es auch nicht möglich, hier ein „besseres“ $J' : \mathcal{S}^{(1)} \hookrightarrow \mathcal{K}'$ zu finden, so daß die Bedingungen von Satz 3.3 erfüllbar sind. Die Frage nach der Positivität von Φ bleibt an dieser Stelle also unbeantwortet.

Im Fall von

$$d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu})dH_+$$

ist ω bereits Diagonal, also $\omega^* = \omega$, und es ist $J[g] = -\eta[g]$.
Φ ist dann positiv, weil $-[\hat{f}_k e_0] \otimes [\hat{f}_l e_0] + [\hat{f}_k e_1] \otimes [\hat{f}_l e_1] + [\hat{f}_k e_2] \otimes [\hat{f}_l e_2] + [\hat{f}_k e_3] \otimes [\hat{f}_l e_3]$ eine Summe von Produkten von jeweils zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert, unabhängig von $\hat{f}_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, ist. Man kann dann $\sum \alpha_{kl} \hat{f}_k \otimes \hat{f}_l \to \hat{f} \circ \sigma$ bezüglich des Lebesguemaßes wählen.

Kapitel 4

Der Beweis, daß Φ indefinit ist

In diesem Kapitel zeigen wir, daß das normalgeordnete Skalarfeld Φ, konstruiert aus dem konform kovarianten, freien Vektorfeld B mit Skalendimension $\delta = 2$, nicht positiv ist.

Aufgrund des Argumentes am Ende von Abschnitt 2.4, genügt es zu zeigen, daß

$$B(f)B(g) \in \text{n-lim}\, \mathcal{A}(\Phi).$$

Wir werden jedoch am Ende von Abschnitt 4.2 sehen, daß man bereits mit einer etwas verschärften Form (der entsprechenden Hilbertraumversion) der Aussage

$$B(f)B(g) \in \text{w-lim}\, \mathcal{A}(\Phi).$$

die Indefinitheit erschließen kann.

Auf einer heuristischen Ebene lassen sich die einzenen Schritte des Beweises wie folgt formulieren:

Wir haben das Feld $\Phi(x) = \sum \eta^{\mu\nu} \ {:}B_\mu(x)B_\nu(x){:}$ und die von Φ erzeugte Algebra gegeben. Mit den Operatoren aus dieser Algebra führen wir gewisse Kurzabstandslimiten durch, das heißt wir betrachten Grenzwerte von Produkten von Operatoren im Limes kleiner Minkowskiabstände.

In einem ersten Schritt konstruieren wir so aus einer Summe von Produkten zweier Feldoperatoren von Φ den Operator ${:}B_\mu(x)B_\nu(x){:}$, wir lösen also die Summation über die Indices auf. Dann verwenden wir Produkte dieser Operatorn, um zu folgern, daß auch ${:}B_\mu(x+\zeta)B_\nu(x){:}$, mit lichtartigem ζ, in der von Φ erzeugten Algebra ist. Durch Iterieren dieses Schrittes finden wir dann, daß auch ${:}B_\mu(x+\zeta+\xi)B_\nu(x){:}$, für ζ und ξ lichtartig, in der Feldalgebra von Φ ist. Da man aus zwei Nullvektoren jeden Vektor $y - x \in \mathbb{R}^4$ linear kombinieren kann, schließen wir, daß bereits ${:}B_\mu(y)B_\nu(x){:}$, für alle $x, y \in \mathbb{R}^4$, in der von Φ erzeugten Algebra ist. Schlußendlich ist somit auch

$$B_\mu(y)B_\nu(x) = {:}B_\mu(y)B_\nu(x){:} \ + W_{\mu\nu}(x,y)\ \mathbf{1}$$

in der von Φ erzeugten Algebra.

In [LS] werden aus dem Wickquadrat $:\phi(x)\phi(x):$ des freien skalaren Feldes mit Masse m die Operatoren $\phi(x)\phi(y)$ rekonstruiert. Dabei ist die Vorgehensweise, Limiten großen Abstandes in lichtartiger Richtung zu betrachten, das Pendant zu den hier durchgeführten Kurzabstandslimiten. In unserer Situation ist neben dem Trennen der Punkte auch das Auflösen der Summation über die Lorentzindices nötig.

4.1 Vorüberlegungen

Einige technische Vorüberlegungen sind in diesem Abschnitt ausgelagert, um die nächsten Abschnitte übersichtlicher zu gestalten.

Betrachten wir die Zweipunktfunktion $W = (W_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\dots,3}$ des Vektorfeldes B zur Skalendimension $\delta = 2$ mit den Komponenten

$$F \mapsto W_{\mu\nu}(F) = \lim_{t\searrow 0} \int \frac{\eta_{\mu\nu}(x-y)^2 - 2(x-y)_\mu(x-y)_\nu}{(-(x^0-y^0-it)^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2)^3} F(x,y)\; d(x,y)$$

und die aus dem Nenner abgeleitete Funktion

$$h : (x,y) \mapsto (-(x^0-y^0)^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2)^3.$$

Weil mit $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ auch $hF \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ ist, ist $hW_{\mu\nu}$ definiert.

Lemma 4.1 $hW_{\mu\nu}$ ist regulär, und es gilt für alle $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$:

$$(hW_{\mu\nu})(F) = W_{\mu\nu}(hF) = \int (\eta_{\mu\nu}(x-y)^2 - 2(x-y)_\mu(x-y)_\nu) F(x,y)\; d(x,y).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
|(-(x^0-it)^2 + |\vec{x}|^2)|^2 &= |(x^0-it+|\vec{x}|)(x^0-it-|\vec{x}|)|^2 \\
&= ((x^0+|\vec{x}|)^2+t^2)\;((x^0-|\vec{x}|)^2+t^2) \\
&\geq (x^0+|\vec{x}|)^2)\;((x^0-|\vec{x}|)^2) \\
&= ((x^0)^2-|\vec{x}|^2)^2.
\end{aligned}$$

Deswegen gilt

$$\left|\frac{(-(x^0-y^0)^2+|\vec{x}-\vec{y}|^2)^3}{(-(x^0-y^0-it)^2+|\vec{x}-\vec{y}|^2)^3}\right| \leq 1,$$

und man darf, mit majorisierender Konvergenz, den Grenzwert unter dem Integral ausführen. ■

An späterer Stelle wollen wir Versionen des Wickschen Theorems verwenden, zu dessen Formulierung man Produkte der Form $W_{\kappa\lambda} \otimes W_{\mu\nu} \otimes W_{\sigma\tau}$ auf Hyperebenen der Form $\gamma : (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1,x_2,x_2,x_3,x_3,x_4)$ einschränken will, d.h. man will die Zurückziehung $\gamma^*(W_{\kappa\lambda} \otimes W_{\mu\nu} \otimes W_{\sigma\tau})$, bzw. Produkte von $W_{\kappa\lambda}$ mit $W_{\mu\nu}$ bilden[1]. Daher benötigen wir

[1]Die allgemeine Theorie zur Multiplikation oder Zurückziehung von Distributionen findet man etwa in [Hö] oder [RS2].

Lemma 4.2 Das Produkt von $W_{\kappa\lambda}$ mit $W_{\mu\nu}$ existiert.

Beweis: Wähle ein $\check{F} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$. Aus $\hat{W}_{\mu\nu}(\check{F}) = \int \check{F}(u,-u)\ d\omega_{\mu\nu}(u)$, folgt, daß $Tr\ \hat{W}_{\mu\nu} \subset K := \overline{V}_+ \times (-\overline{V}_+)$. Dies ist ein Kegel in $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, wir können daher schließen, daß $\check{F} \circ \sigma \in \mathscr{S}(K \times K)$, wobei $\sigma(p,q) := p+q, p, q \in \mathbb{R}^{4+4}$. D.h. es gibt $\tilde{F} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$, so daß $\check{\tilde{F}}|_{K\times K} = \check{F} \circ \sigma|_{K\times K}$, und es ist

$$\begin{aligned}
(W_{\mu\nu} W_{\kappa\lambda})(F) &\equiv (\widehat{W_{\mu\nu} W_{\kappa\lambda}})(\check{F}) \\
&\equiv \frac{1}{(2\pi)^4} (\hat{W}_{\mu\nu} * \hat{W}_{\kappa\lambda})(\check{F}) \\
&\equiv \frac{1}{(2\pi)^4} (\hat{W}_{\mu\nu} \otimes \hat{W}_{\kappa\lambda})(\check{F} \circ \sigma) \\
&:= \frac{1}{(2\pi)^4} (\hat{W}_{\mu\nu} \otimes \hat{W}_{\kappa\lambda})(\check{\tilde{F}})
\end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl von $\tilde{F}$, also wohldefiniert. ■

In den nächsten Schritten geht es darum, spezielle Folgen von Testfunktionen, die den Folgen aus Lemma 2.3 ähnlich sind, zu behandeln, um Produkte bzw. Zurückziehungen von Distributionen zu approximieren.

Es sei $v \in \mathbb{R}^4$, für $t > 0$ sei $\delta_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, so daß $\delta_t \geq 0$, $\int \delta_t(x)\ dx = 1$ und $Tr\ \delta_t \subset \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| < t\}$. Nun wähle $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $(\alpha_{kl}^{(t)})_{k,l\in\mathbb{N},t>0} \subset \mathbb{C}$, so daß für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl}^{(t)} f_k \otimes f_l \xrightarrow{\mathscr{S}} \delta_t(\ .-..-v) f(\ .-v) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}), \quad \text{für } N \to \infty, \tag{4.1}$$

gilt. (Man möge als $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ etwa die Hermitefunktionen wählen.)
Nun sei $\Delta_v : \mathbb{R}^4 \ni y \mapsto (y+v, y) \in \mathbb{R}^{4+4}$ die verschobene Diagonalabbildung und $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4+4})$ gegeben durch eine glatte Funktion F. Die Zurückziehung $\Delta_v^* T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ existiert dann und ist gegeben durch $F \circ \Delta_v$. Es ergibt sich dann unmittelbar

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl}^{(t)}\ T(f_k \otimes f_l) &\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} T(\delta_t(\ .-..-v) f(\ .-v)) \\
&= \int F(x,y)\ \delta_t(x-y-v)\ f(x-v)\ d(x,y) \\
&\overset{t\searrow 0}{\longrightarrow} \int F(y+v,y)\ f(y)\ dy \\
&= (\Delta_v^* T)(f).
\end{aligned}$$

Selbiges gilt auch, wenn $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4+4})$ die Eigenschaft hat, daß $\hat{T}(\check{g}) = \int \check{g}(p,q)\ d\rho(p,q)$ gilt, wobei ρ ein reelles Maß ist, das die Eigenschaft hat, daß $h \circ \sigma \in L^1(\mathbb{R}^{4+4}, |\rho|)$, für alle $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ (σ ist die Summenabbildung $(p,q) \mapsto p+q$.). Um dies einzusehen, beachte man, daß die Fouriertransformation von $\delta_t(\ .-..-v) f(\ .-v)$ gegeben ist durch $(p,q) \mapsto \hat{\delta}_t(-q)\hat{f}(p+q)e^{ipv}$, und daß $|\hat{\delta}_t(p)| \leq \frac{1}{(2\pi)^2}$, für alle t, p, sowie daß $\hat{\delta}_t \to \frac{1}{(2\pi)^2}$, punktweise für $t \searrow 0$ (sogar gleichmäßig auf allen

Kompakta). Dann folgt mit majorisierender Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl}^{(t)}\ T(f_k \otimes f_l) &\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} T(\delta_t(\ .-..-v)f(\ .-v)) \\
&= \int \check{\delta}_t(-q)\check{f}(p+q)e^{-ipv}\ d\rho(p,q) \\
&\overset{t\searrow 0}{\longrightarrow} \int \frac{1}{(2\pi)^2}e^{-ipv}(\check{f}\circ\sigma)(p,q)\ d\rho(p,q) \\
&= (\Delta_v^* T)(f).
\end{aligned}$$

Dieses Verhalten überträgt sich dann für beliebige $n > 4$ auf $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, wenn $\hat{T}$ in je zwei Komponenten durch solche Maße ρ_1, ρ_2 gegeben ist, d.h. es gibt $S \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n-16})$, so daß für alle $g^{(1)}, \ldots, g^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ gilt

$$\begin{aligned}
\hat{T}(g^{(1)} \otimes \ldots \otimes g^{(n)}) &= \int g^{(a)}(p)g^{(b)}(q)\ d\rho_1(p,q) \int g^{(c)}(p)g^{(d)}(q)\ d\rho_2(p,q)\ \cdot \\
&\quad \cdot S(g^{(1)} \otimes \ldots g^{(a-1)} \otimes g^{(a+1)} \otimes \ldots).
\end{aligned}$$

Dann gilt (wenn n=4):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=0}^{M} \alpha_{ij}^{(s)} \sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl}^{(t)}\ T(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l) \\
\overset{M,N\to\infty}{\longrightarrow}\ & T(\delta_s(\ .-..-v)f(\ .-v) \otimes \delta_t(\ .-..-v)f(\ .-v)) \\
\overset{s,t\searrow 0}{\longrightarrow}\ & ((\Delta_v \oplus \Delta_v)^* T)(f \otimes f),
\end{aligned}$$

wobei $\Delta_v \oplus \Delta_v : (x,y) \mapsto (x+v, x, y+v, y)$ ist, und man sieht ein, daß die Grenzwerte jeweils in beliebiger Reihenfolge durchführbar sind: $\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}$ oder $\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}$ oder $\lim_{M=N\to\infty}$, analog für s, t.

Diese Überlegungen sind für uns deshalb von Interesse, da, wegen Proposition 2.12 und wegen $Tr\ \omega_{\mu\nu} \subset \overline{V}_+$, beliebige Tensorprodukte T von $W_{\mu\nu} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4+4})$ und $(A_{\kappa_1}(.)A_{\kappa_2}(..)A_{\kappa_3}(...)\ldots)(\varphi,\psi)$ (als reguläre Distribution) jeweils obige Eigenschaft haben (so lange man nicht etwa versucht $\Delta_v^* W_{\mu\nu}$ zu bilden).

Man beachte noch, daß für $S, T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt: $(S \otimes T)(g(.-..)f(.)) = S((T * g)(.)f(.))$, was wohldefiniert ist, weil die Faltung $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) * \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\beta f$ polynomial beschränkt, für alle $\beta \in \mathbb{N}^n\}$ erfüllt.

Wir werden diese Zusammenhänge im Folgenden ohne jeden weiteren Kommentar benutzen.

Notieren wir für den Moment mit δ_ξ die vierdimensionale Deltafunktion : $f \mapsto f(\xi)$. Wir setzen dann $W_{\mu\nu}^{(\xi)} := (\delta_\xi \otimes \delta_0) * W_{\mu\nu}$, was für $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ bedeutet:

$$W_{\mu\nu}^{(\xi)}(F) = \lim_{t\searrow 0} \int \frac{\eta_{\mu\nu}(x+\xi-y)^2 - 2(x+\xi-y)_\mu(x+\xi-y)_\nu}{(-(x^0+\xi^0-y^0-it)^2 + |\vec{x}+\vec{\xi}-\vec{y}|^2)^3} F(x,y)\ d(x,y)$$

bzw.

$$\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}}(\check{F}) = \pi^3 \int \check{F}(p,-p)e^{-i\xi p}(-\eta_{\mu\nu}\ dH_+(p) + 2p_\mu p_\nu\ dH_0(p)).$$

Weil der in der Fouriertransformation zusätzlich auftretende Exponentialfaktor nichts am Träger der Fouriertransformierten ändert, existieren auch die Produkte $W^{(\xi_1)}_{\mu\nu} W^{(\xi_2)}_{\kappa\lambda}$; der Beweis ist der gleiche wie für Lemma 4.2.

Zum Beweis der folgende Aussage läßt sich auch die spezielle Folge aus Gleichung (4.1) verwenden, wenn man die Grenzübergänge $N \to \infty, t \searrow 0$ an geeigneter Stelle mit einem $\varepsilon/2$-Argument zusammenfaßt. Wir jedoch führen den Beweis direkt:

Lemma 4.3 Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0, F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}), v_1, v_2, \xi \in \mathbb{R}^4$. Dann existiert eine Folge $\{X_R \mid R \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}(\ :[A^{(v_1)}_\kappa][A^{(v_2)}_\lambda]:\ )$, so daß

$$((A_\kappa(\ .\ + v_1)A_\lambda(\ ..\ + v_2)(\varphi,\psi))W^{(\xi)}_{\mu\nu})(F) = \lim_{R\to\infty} \langle \varphi, X_R \psi \rangle_{\mathcal{S}_0}.$$

Beweis: Die Funktion $\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F}$ und ihre Ableitungen sind aus $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{4+4})$ und polynomial beschränkt. Wir wählen, für $R \in \mathbb{N}$, Abschneidefunktionen $\check{\chi}_R \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$, so daß $0 \le \check{\chi}_R \le 1$ und $\check{\chi}_R|_{B_R} = 1$, wobei $B_R := \{u \in \mathbb{R}^{4+4} \mid |u| \le R\}$. Dann definiert

$$\check{F}_R(p,q) := \frac{1}{(2\pi)^4}\check{\chi}_R(p,q)(\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F})(p,q)$$

eine Schwartzfunktion $F_R := \hat{\check{F}}_R \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$. (Im Ortsraum wird die Multiplikation von $\check{\chi}_R$ zu einer Faltung mit χ_R, d.h. F_R ist eine Glättung der Distribution $\widehat{(\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F})}$.)

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi,\ :[A^{(v_1)}_\kappa][A^{(v_2)}_\lambda]:(F_R)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
\overset{Def.2.12}{=}\ & \int F_R(x,y)A_\kappa(x+v_1)A_\lambda(y+v_2)(\varphi,\psi)\ d(x,y) \\
\overset{Prop.2.12}{=}\ & \sum_i \int \check{F}_R\ G_i\ d\Omega^{(i)}_{\kappa\lambda} \\
=\ & \sum_i \int \frac{1}{(2\pi)^4}\check{\chi}_R\ (\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F})\ G_i\ d\Omega^{(i)}_{\kappa\lambda} \\
\overset{R\to\infty}{\longrightarrow}\ & \sum_i \int \frac{1}{(2\pi)^4}(\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F})\ G_i\ d\Omega^{(i)}_{\kappa\lambda} =: \clubsuit.
\end{aligned}$$

Den Grenzwert darf man unter dem Integral ausführen, weil $(\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F})G_i \in$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ vom Betrag her eine integrierbare Majorante für $|\Omega^{(i)}_{\kappa\lambda}|$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\clubsuit \quad &= \frac{1}{(2\pi)^4}\sum_i \int\int \check{F}(p+u,q-u)e^{-i\xi u}\; d\omega_{\mu\nu}(u)\; G_i(p,q)\; d\Omega^{(i)}_{\kappa\lambda}(p,q) \\
&\overset{Fubini}{=} \frac{1}{(2\pi)^4}\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}}(\; (A_\kappa(.+v_1)A_\lambda(..+v_2)(\varphi,\psi))\check{} * \check{F}\;) \\
&= \widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}}(A_\kappa(.+v_1)A_\lambda(..+v_2)(\varphi,\psi)F) \\
&= ((A_\kappa(.+v_1)A_\lambda(..+v_2)(\varphi,\psi))W^{(\xi)}_{\mu\nu})(F).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, daß die Folge $(X_R)_{R\in\mathbb{N}}$ mit $X_R := :[A^{(v_1)}_\kappa][A^{(v_2)}_\lambda]:(F_R)$ die Behauptung erfüllt. ■

Es gilt sogar:

Lemma 4.4 Die in Lemma 4.3 definierte Folge $(X_R)_{R\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen ein $X \in End(\mathcal{S}_0)$.

Beweis: Die Behauptung folgt, wenn man die Form der G_i und $\Omega^{(i)}_{\kappa\lambda}$ explizit ausschreibt, d.h.

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi,\; :[A^{(v_1)}_\kappa][A^{(v_2)}_\lambda]:(F_R)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
= &\int (\langle a_\kappa(x+v_1)a_\lambda(y+v_2)\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} + \langle a_\kappa(x+v_1)\varphi, a_\lambda(y+v_2)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
&\quad +\langle a_\lambda(y+v_2)\varphi, a_\kappa(x+v_1)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} + \langle\varphi, a_\kappa(x+v_1)a_\lambda(y+v_2)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0})F_R(x,y)\; d(x,y) \\
\overset{Fubini}{=} &\sqrt{1\cdot 2}\int \bar{\hat{\varphi}}^{\mu\nu}_2(p,q)e^{iv_1p}e^{iv_2q}\;\hat{F}_R(p,q)\psi_0\; d\omega_{\kappa\mu}(p)\; d\omega_{\lambda\nu}(q) + \sqrt{2\cdot 3}\int \ldots + \ldots \\
+ &\sqrt{1\cdot 1}\int \bar{\hat{\varphi}}^{\mu}_1(p)e^{iv_1p}\;\hat{F}_R(p,-q)\hat{\psi}^{\nu}_1(q)e^{-iv_2q}\; d\omega_{\kappa\mu}(p)\; d\omega_{\lambda\nu}(q) + \sqrt{2\cdot 2}\int \ldots + \ldots \\
+ &\sqrt{1\cdot 1}\int \bar{\hat{\varphi}}^{\nu}_1(q)e^{iv_2q}\;\hat{F}_R(q,-p)\hat{\psi}^{\mu}_1(p)e^{-iv_1p}\; d\omega_{\kappa\mu}(p)\; d\omega_{\lambda\nu}(q) + \sqrt{2\cdot 2}\int \ldots + \ldots \\
+ &\sqrt{2\cdot 1}\int \bar{\varphi}_0\;\hat{F}_R(-p,-q)\hat{\psi}^{\nu\mu}_2(q,p)e^{-iv_1p}e^{-iv_2q}\; d\omega_{\kappa\mu}(p)\; d\omega_{\lambda\nu}(q) + \sqrt{3\cdot 2}\int \ldots + \ldots \\
\xrightarrow{R\to\infty} &\sqrt{1\cdot 2}\int \bar{\hat{\varphi}}^{\mu\nu}_2(p,q)e^{iv_1p}e^{iv_2q}\;(\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F})(-p,-q)\psi_0\; d\omega_{\kappa\mu}(p)\; d\omega_{\lambda\nu}(q) + \sqrt{2\cdot 3}\int \ldots + \ldots \\
+ &\sqrt{1\cdot 1}\int \bar{\hat{\varphi}}^{\mu}_1(p)e^{iv_1p}\;(\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F})(-p,q)\hat{\psi}^{\nu}_1(q)e^{-iv_2q}\; d\omega_{\kappa\mu}(p)\; d\omega_{\lambda\nu}(q) + \sqrt{2\cdot 2}\int \ldots + \ldots \\
+ &\sqrt{1\cdot 1}\int \bar{\hat{\varphi}}^{\nu}_1(q)e^{iv_2q}\;(\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu}} * \check{F})(-q,p)\hat{\psi}^{\mu}_1(p)e^{-iv_1p}\; d\omega_{\kappa\mu}(p)\; d\omega_{\lambda\nu}(q) + \sqrt{2\cdot 2}\int \ldots + \ldots \\
+ &\sqrt{2\cdot 1}\int \bar{\varphi}_0\;(\widehat{W^{(\xi)}}_{\mu\nu} * \check{F})(p,q)\hat{\psi}^{\nu\mu}_2(q,p)e^{-iv_1p}e^{-iv_2q}\; d\omega_{\kappa\mu}(p)\; d\omega_{\lambda\nu}(q) + \sqrt{3\cdot 2}\int \ldots + \ldots
\end{aligned}$$

Diese Integrale sind nun das Skalarprodukt von φ und einem zweiten Vektor

$X(\psi) \in \mathcal{S}_0$, weil aus $Tr\ \omega_{\mu\nu} \subset \overline{V}_+$ folgt:

$$
\begin{array}{ll}
i) & \{(p,q) \mapsto (\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu} * \check{F}})(-p,-q)e^{iv_1p}e^{iv_2q}\} \in \mathscr{S}(\overline{V}_+ \times \overline{V}_+), \\
ii) & \{p \mapsto \int (\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu} * \check{F}})(-p,q)e^{iv_1p}e^{-iv_2q}\hat{\psi}^\nu_1(q)\ d\omega_{\lambda\nu}(q)\} \in \mathscr{S}(\overline{V}_+), \\
iii) & \{p \mapsto \int (\widehat{W^{(\xi)}_{\mu\nu} * \check{F}})(-q,p)e^{-iv_1p}e^{iv_2q}\hat{\psi}^\mu_1(p)\ d\omega_{\lambda\mu}(p)\} \in \mathscr{S}(\overline{V}_+), \\
iv) & \int (\widehat{W^{(\xi)}}_{\mu\nu} * \check{F})(p,q)e^{-iv_1p}e^{-iv_2q}\hat{\psi}^{\nu\mu}_2(q,p)\ d\omega_{\kappa\mu}(p)\ d\omega_{\lambda\nu}(q) \in \mathbb{C},
\end{array}
$$

und entsprechend für die weiteren Summanden. Man sieht ein, daß die so gewonnene Abbildung $\psi \mapsto X(\psi)$ linear und stetig (bzgl. der Quotiententopologie auf $\mathcal{S}_0$) ist. ■

Definition 4.1 Den durch Lemma 4.4 definierten Operator bezeichnen wir mit

$$(:[A^{(v_1)}_\kappa][A^{(v_2)}_\lambda]:W^{(\xi)}_{\mu\nu})(F), \quad F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$$

Zusammenfassend gilt demnach

Lemma 4.5 Sei $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$, dann gilt für alle $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$:

$$
\begin{array}{ll}
i) & (:[A^{(v_1)}_\kappa][A^{(v_2)}_\lambda]:W^{(\xi)}_{\mu\nu})(F) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\ :[A^{(v_1)}_\kappa][A^{(v_2)}_\lambda]:\ ), \\
ii) & \langle\varphi, (:[A^{(v_1)}_\kappa][A^{(v_2)}_\lambda]:W^{(\xi)}_{\mu\nu})(F)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} = ((A_\kappa(.+v_1)A_\lambda(..+v_2)(\varphi,\psi))W^{(\xi)}_{\mu\nu})(F).
\end{array}
$$

Nun können wir die erste einfache Version des Wickschen Theorems beweisen:

Lemma 4.6 (Wicksches Theorem 2) Seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4), v_1, v_3 \in \mathbb{R}^4$ und $\mathbf{1} : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$ die Identität, dann gilt:

$$
\begin{array}{ll}
 & :[A^{(v_1)}_\mu A_\nu]:(f)\ :[A^{(v_3)}_\kappa A_\lambda]:(g) \\
- & (W^{(v_1-v_3)}_{\mu\kappa}W_{\nu\lambda})(f\otimes g)\ \mathbf{1} - (W^{(v_1)}_{\mu\lambda}W^{(-v_3)}_{\nu\kappa})(f\otimes g)\ \mathbf{1} \\
= & :[A^{(v_1)}_\mu A_\nu][A^{(v_3)}_\kappa A_\lambda]:(f\otimes g) \\
+ & (:[A^{(v_1)}_\mu][A^{(v_3)}_\kappa]:W_{\nu\lambda})(f\otimes g) + (:[A^{(v_1)}_\mu][A_\lambda]:W^{(-v_3)}_{\nu\kappa})(f\otimes g) \\
+ & (:[A_\nu][A^{(v_3)}_\kappa]:W^{(v_1)}_{\mu\lambda})(f\otimes g) + (:[A_\nu][A_\lambda]:W^{(v_1-v_3)}_{\mu\kappa})(f\otimes g).
\end{array}
$$

Beweis: Wir beginnen mit Operatoren der Form

$$:B_\mu(f_i)B_\nu(f_j):\ \ :B_\kappa(g_k)B_\lambda(g_l):\ ,$$

mit zwei Folgen $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, die wir jeweils gemäß Gleichung (4.1) wählen:

$$\sum_{i,j=0}^{N} \alpha^{(t)}_{ij} f_i \otimes f_j \xrightarrow{\mathscr{S}} \delta_t(\ .-..-v_1)f(\ .-v_1) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}), \quad \text{für } N \to \infty,$$

und

$$\sum_{k,l=0}^{M} \beta_{kl}^{(s)} g_k \otimes g_l \xrightarrow{\mathscr{S}} \delta_s(\ .-..-v_3)g(\ .-v_3) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}), \quad \text{für } M \to \infty,$$

für gewählte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$.

Wegen der kanonischen Vertauschungsrelationen $[b_\mu(f), b_\nu^\dagger(g)] = W_{\mu\nu}(f \otimes g)$ (oder auch Prop. 2.8) findet man unmittelbar:

$$\begin{aligned}
{:}B_\mu(f_i)B_\nu(f_j){:}\ \ {:}B_\kappa(g_k)B_\lambda(g_l){:} \quad = &\quad {:}B_\mu(f_i)B_\nu(f_j)B_\kappa(g_k)B_\lambda(g_l){:} \\
+ &\quad {:}B_\nu(f_j)B_\lambda(g_l){:}\ \ W_{\mu\kappa}(f_i \otimes g_k) \\
+ &\quad {:}B_\nu(f_j)B_\kappa(g_k){:}\ \ W_{\mu\lambda}(f_i \otimes g_l) \\
+ &\quad {:}B_\mu(f_i)B_\lambda(g_l){:}\ \ W_{\nu\kappa}(f_j \otimes g_k) \\
+ &\quad {:}B_\mu(f_i)B_\kappa(g_k){:}\ \ W_{\nu\lambda}(f_j \otimes g_l) \\
+ &\quad W_{\mu\kappa}(f_i \otimes g_k)W_{\nu\lambda}(f_j \otimes g_l)\mathbf{1} \\
+ &\quad W_{\mu\lambda}(f_i \otimes g_l)W_{\nu\kappa}(f_j \otimes g_k)\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Wir bilden nun auf beiden Seiten die entsprechenden Summen und führen die Grenzübergänge $M \to \infty, N \to \infty, s \searrow 0, t \searrow 0$ durch, um das gewünschte Resultat zu erhalten:

Wähle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$, dann bekommt man für die linke Seite

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=0}^{N} \alpha_{ij}^{(t)} \sum_{k,l=0}^{M} \beta_{kl}^{(s)} \langle \varphi,\ {:}B_\mu(f_i)B_\nu(f_j){:}\ \ {:}B_\kappa(g_k)B_\lambda(g_l){:}\ \ \psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
\xrightarrow{M\to\infty} \\
& \sum_{i,j=0}^{N} \alpha_{ij}^{(t)} \langle \varphi,\ {:}B_\mu(f_i)B_\nu(f_j){:}\ \ {:}[A_\kappa][A_\lambda]{:}(\delta_s(.-..-v_3)g(.-v_3))\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
\xrightarrow{N\to\infty} \\
& \langle \varphi,\ {:}[A_\mu][A_\nu]{:}(\delta_t(.-..-v_1)f(.-v_1))\ \ {:}[A_\kappa][A_\lambda]{:}(\delta_s(.-..-v_3)g(.-v_3))\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
\xrightarrow{s\searrow 0} \\
& \langle \varphi,\ {:}[A_\mu][A_\nu]{:}(\delta_t(.-..-v_1)f(.-v_1))\ \ {:}[A_\kappa^{(v_3)}A_\lambda]{:}(g(.))\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
\xrightarrow{t\searrow 0} \\
& \langle \varphi,\ {:}[A_\mu^{(v_1)}A_\nu]{:}(f(.))\ \ {:}[A_\kappa^{(v_3)}A_\lambda]{:}(g(.))\psi\rangle_{\mathcal{S}_0}.
\end{aligned}$$

Daß die jeweiligen Grenzprozesse die angegebenen Ergebnisse liefern, sieht man ein, wenn man jeweils den Operator X, an dem man nichts manipuliert, mit φ oder ψ zu einem neuen $\varphi' := X^\star\varphi$, oder $\psi'' := X\psi$ zusammenfaßt und dann den anderen Operator als schwaches Integral, ausgewertet in (φ', ψ) bzw. (φ, ψ''), ausschreibt.

Die sechs Terme auf der rechten Seite werden zu

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=0}^{N} \alpha_{ij}^{(t)} \sum_{k,l=0}^{M} \beta_{kl}^{(s)} \Big(& \langle \varphi,\ {:}B_\mu(f_i)B_\nu(f_j)B_\kappa(g_k)B_\lambda(g_l){:}\ \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \\
+ \quad & \langle \varphi,\ {:}B_\nu(f_j)B_\lambda(g_l){:}\ \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} W_{\mu\kappa}(f_i \otimes g_k) \\
+ \quad & \langle \varphi,\ {:}B_\nu(f_j)B_\kappa(g_k){:}\ \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} W_{\mu\lambda}(f_i \otimes g_l) \\
+ \quad & \langle \varphi,\ {:}B_\mu(f_i)B_\lambda(g_l){:}\ \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} W_{\nu\kappa}(f_j \otimes g_k) \\
+ \quad & \langle \varphi,\ {:}B_\mu(f_i)B_\kappa(g_k){:}\ \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} W_{\nu\lambda}(f_j \otimes g_l) \\
+ \quad & W_{\mu\kappa}(f_i \otimes g_k) W_{\nu\lambda}(f_j \otimes g_l) \langle \varphi, \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \\
+ \quad & W_{\mu\lambda}(f_i \otimes g_l) W_{\nu\kappa}(f_j \otimes g_k) \langle \varphi, \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \Big).
\end{aligned}$$

Wenn wir diese Ausdrücke als ihre jeweiligen schwachen Integrale schreiben, so folgt, daß dies gleich

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=0}^{N} \alpha_{ij}^{(t)} \sum_{k,l=0}^{M} \beta_{kl}^{(s)} \Big(\\
& \quad \int \big(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)A_\kappa(y_1)A_\lambda(y_2)(\varphi,\psi)\big) f_i(x_1)f_j(x_2)g_k(y_1)g_l(y_2)\ d(x_1,x_2,y_1,y_2) \\
& + \int \big(A_\nu(x_2)A_\lambda(y_2)(\varphi,\psi)\big) f_j(x_2)g_l(y_2)\ d(x_1,y_2)\ W_{\mu\kappa}(f_i \otimes g_k) \\
& + \int \big(A_\nu(x_2)A_\kappa(y_1)(\varphi,\psi)\big) f_j(x_2)g_k(y_1)\ d(x_1,y_1)\ W_{\mu\lambda}(f_i \otimes g_l) \\
& + \int \big(A_\mu(x_1)A_\lambda(y_2)(\varphi,\psi)\big) f_i(x_1)g_l(y_2)\ d(x_1,y_2) W_{\nu\kappa}(f_j \otimes g_k) \\
& + \int \big(A_\mu(x_1)A_\kappa(y_1)(\varphi,\psi)\big) f_i(x_1)g_k(y_1)\ d(x_1,y_1) W_{\nu\lambda}(f_j \otimes g_l) \\
& + W_{\mu\kappa}(f_i \otimes g_k) W_{\nu\lambda}(f_j \otimes g_l) \langle \varphi, \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \\
& + W_{\mu\lambda}(f_i \otimes g_l) W_{\nu\kappa}(f_j \otimes g_k) \langle \varphi, \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \Big)
\end{aligned}$$

ist. Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein nuklearer Raum ist, sind dies nun gerade solche Distributionen in der Variablen $f_i \otimes f_j \otimes g_k \otimes g_l$, wie wir sie im Anschluß an Gleichung (4.1) diskutiert haben. Das bedeutet, daß man nach den Grenzprozessen $M \to \infty, N \to \infty, s \searrow 0, t \searrow 0$ erhält:

$$\begin{aligned}
& \int \big(A_\mu(x_2+v_1)A_\nu(x_2)A_\kappa(y_2+v_3)A_\lambda(y_2)(\varphi,\psi)\big) f(x_2)g(y_2)\ d(x_2,y_2) \\
+ \quad & \big(A_\nu(.)A_\lambda(..)(\varphi,\psi)W_{\mu\kappa}^{(v_1-v_3)}\big)(f \otimes g) \\
+ \quad & \big(A_\nu(.)A_\kappa(.+v_3)(\varphi,\psi)W_{\mu\lambda}\big)(f \otimes g) \\
+ \quad & \big(A_\mu(.+v_1)A_\lambda(.)(\varphi,\psi)W_{\nu\kappa}^{(-v_3)}\big)(f \otimes g) \\
+ \quad & \big(A_\mu(.+v_1)A_\kappa(..+v_2)(\varphi,\psi)W_{\nu\lambda}\big)(f \otimes g) \\
+ \quad & \big(W_{\mu\kappa}^{(v_1-v_3)}W_{\nu\lambda}\big)(f \otimes g)\langle \varphi, \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \\
+ \quad & \big(W_{\mu\lambda}^{(v_1)}(f_i \otimes g_l)W_{\nu\kappa}^{(-v_3)}\big)(f \otimes g)\langle \varphi, \psi\rangle_{\mathfrak{s}_0}
\end{aligned}$$

In Lemma 4.5 haben wir gesehen haben, daß die mittleren Summanden bereits durch Skalarprodukte mit den behaupteten Operatoren $\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$ geschrieben werden können. Damit ist das Lemma gezeigt. ∎

Wir schließen die Vorüberlegungen mit zwei Hilfssätzen linear algebraischen Inhalts:

Betrachten wir die folgenden neun Vektoren:

$$\begin{array}{lll} \zeta_1 := (1,1,0,0) & \zeta_4 := (1,0,-1,0) & \zeta_7 := (\sqrt{2},1,1,0) \\ \zeta_2 := (1,-1,0,0) & \zeta_5 := (1,0,0,1) & \zeta_8 := (\sqrt{2},1,0,1) \\ \zeta_3 := (1,0,1,0) & \zeta_6 := (1,0,0,-1) & \zeta_9 := (\sqrt{2},0,1,1) \end{array}$$

$\zeta_1,\ldots,\zeta_9$ sind alle lichtartig, d.h. $(\zeta_k)^2 = \sum \eta_{\mu\nu}\zeta_k^\mu\zeta_k^\nu = 0$, und ihre Tensoren $\zeta_k \otimes \zeta_k$ sind symmetrisch und linear unabhängig; letzteres, sieht man beim Betrachten der Komponentenmatrizen $(\zeta_k^\mu\zeta_k^\nu)_{\mu,\nu=0,\ldots,3}$ rasch ein. Nun ist auch η symmetrisch, und es gilt $\sum \eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = 4 \neq 0$. Daher ist η keine Linearkombination der anderen Tensoren, weil $\sum \eta_{\mu\nu}\zeta_k^\mu\zeta_k^\nu = 0$ gilt. Also ist $\{\eta, \zeta_1\otimes\zeta_1,\ldots,\zeta_9\otimes\zeta_9\}$ eine Basis von $(\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4)^{sym}$, das heißt es gilt

Lemma 4.7 Sei $M = (M_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\ldots,3}$ eine beliebige symmetrische Matrix, mit Komponenten in einem beliebigen komplexen Vektorraum. Dann kann man, durch Bilden einer Summe von Kontraktionen von M mit obiger Basis, jede Komponente von M linear kombinieren. D.h. für alle $\kappa,\lambda \in \{0,1,2,3\}$ gibt es komplexe Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_9 \in \mathbb{C}$, so daß

$$M_{\kappa\lambda} = a_0 \sum_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \sum_k a_k \sum_{\mu\nu} \zeta_k^\mu \zeta_k^\nu M_{\mu\nu}.$$

Das nächste Lemma ist eine ähnliche Aussage:

Lemma 4.8 Sei $M = (M_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\ldots 3}$ eine beliebige Matrix, mit Komponenten in einem komplexen Vektorraum. Sei $0 \neq \xi = (\xi^\mu)_{\mu=0,\ldots,3} \in \mathbb{R}^4$ beliebig und $\kappa,\lambda \in \{0,\ldots,3\}$. Dann gibt es symmetrische Matrizen $E_k = (E_k^{\mu\nu})_{\mu\nu=0,\ldots,3} \in \mathbb{C}^{4\times4}, k = 1,\ldots,16$, so daß

$$M_{\kappa\lambda} = \sum_{k,l} \sum_{\mu,\nu,\sigma,\tau} E_k^{\mu\nu} E_l^{\sigma\tau} \xi_\mu \xi_\sigma M_{\nu\tau}.$$

Beweis: Da $\xi \neq 0$ ist auch $\eta\xi = (\xi_\mu)_{\mu=0,\ldots,3} \neq 0$. Daher gibt es $v_1,\ldots,v_4 \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig, so daß $v_k\xi = \langle v_k, \eta\xi\rangle_{\mathbb{R}^4} \neq 0$, für $k = 1,\ldots,4$. Wegen der linearen Unabhängigkeit ist $\{v_k \otimes v_l \mid k,l = 1,\ldots,4\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4$. Setze $F_k := v_k \otimes v_k$, dann ist

$$\sum_{k,l} \sum_{\mu,\nu,\sigma,\tau} F_k^{\mu\nu} F_l^{\sigma\tau} \xi_\mu \xi_\sigma M_{\nu\tau} = \sum_{k,l} \sum_{\nu,\tau} \underbrace{(v_k\xi)(v_l\xi)}_{\neq 0} \underbrace{(v_k \otimes v_l)}_{\text{Basis}}{}^{\nu\tau} M_{\nu\tau}.$$

Somit gibt es komplexe Zahlen $a_{kl}, k,l = 1,\ldots,4$, so daß $E_{n_{kl}} := a_{kl}F_k$ mit $n_{kl} := l + 4(k-1)$ die Behauptung erfüllt. ∎

4.2 Der Beweis, daß $B(f)B(g) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$

Bemerkung:
Für den Rest dieses Kapitels verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. bei Summationen über verschieden gestellte Indices lassen wir, um die Gleichungen kürzer zu halten, das Summenzeichen weg (etwa: $x_\mu x^\mu = \sum_\mu x_\mu x^\mu$).

Wir wollen der Reihe nach die Aussagen Satz 4.1 (Indices trennen), Satz 4.2 und Satz 4.3 (Punkte trennen) und schließlich Satz 4.4 zeigen.

Wenden wir Lemma 4.6 auf $\Phi = \eta^{\mu\nu} :[A_\mu A_\nu]: = :[A_\mu A^\mu]:$ an, so folgt für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$:

$$\Phi(f)\Phi(g) - 2(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu})(f\otimes g)\ \mathbf{1} = :[A_\mu A^\mu][A_\nu A^\nu]:(f\otimes g) + 4(:[A_\mu][A_\nu]:W^{\mu\nu})(f\otimes g).$$

Das heißt, daß

$$:[A_\mu A^\mu][A_\nu A^\nu]:(f\otimes g) + 4(:[A_\mu][A_\nu]:W^{\mu\nu})(f\otimes g) \in \mathcal{A}(\Phi)$$

ist. Nun sei $h : (x,y) \mapsto (-(x-y)^2)^3$, dann ist $h(f\otimes g)$ eine endliche Linearkombination von Testfunktionen, also ist auch

$$\begin{aligned} L(f\otimes g) &:= :[A_\mu A^\mu][A_\nu A^\nu]:(h(f\otimes g)) + 4(:[A_\mu][A_\nu]:W^{\mu\nu})(h(f\otimes g)) \\ &\in \mathcal{A}(\Phi). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Man nehme zur Kenntnis, daß $L(f\otimes g)$ in den Feldoperatoren von Φ quadratisch ist.

Satz 4.1 Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Dann gilt für $\mu,\nu = 0,1,2,3$:

$$:[A_\mu A_\nu]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi). \tag{4.3}$$

Beweis: Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ zunächst eine beliebige Folge. $L(f_k\otimes f_l)$ aus Gleichung (4.2) ist aus $\mathcal{A}(\Phi)$. Seien $\varphi,\psi \in \mathcal{S}_0$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \langle\varphi, L(f_k\otimes f_l)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\ \overset{Lem.4.5}{=} & \int A_\mu(x)A^\mu(x)A_\nu(y)A^\nu(y)(\varphi,\psi)\ h(x,y)f_k(x)f_l(y)\ d(x,y) \\ & +4\ ((A_\mu(.)A_\nu(..)(\varphi,\psi))W^{\mu\nu})(h(f_k\otimes f_l)) \\ \overset{Lem.4.1}{=} & \int A_\mu(x)A^\mu(x)A_\nu(y)A^\nu(y)(\varphi,\psi)\ (-(x-y)^2)^3 f_k(x)f_l(y)\ d(x,y) \\ & +4\int A_\mu(x)A_\nu(y)(\varphi,\psi)\ (\eta^{\mu\nu}(x-y)^2 - 2(x-y)^\mu(x-y)^\nu)\ f_k(x)f_l(y)\ d(x,y) \\ =: & \spadesuit_{kl}. \end{aligned}$$

Spezifizieren wir die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$:
Es sei $s > 0$, $\zeta \in \mathbb{R}^4$ lichtartig, d.h. $\zeta_\mu\zeta^\mu = (\zeta)^2 = 0$. Für $t > 0$ sei $\delta_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, so daß $\delta_t \geq 0, \int \delta_t(x)\ dx = 1$ und $Tr\ \delta_t \subset \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| < t\}$. Nun wähle für $k,l \in \mathbb{N}$ Schwartzfunktionen f_k und komplexe Zahlen $\alpha_{kl}^{st} := \frac{1}{s^2}\alpha_{kl}^{(t)}$ gemäß (4.1), die für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl}^{st} f_k \otimes f_l \xrightarrow{\mathscr{S}} \frac{1}{s^2}\delta_t(\,.-..-s\zeta)f(\,.-s\zeta) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}), \quad \text{für } N \to \infty, \tag{4.4}$$

erfüllen. Wir wollen

$$\lim_{s\searrow 0}\lim_{t\searrow 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k,l=0}^{N}\alpha_{kl}^{st}\ \spadesuit_{kl}$$

bilden. Es ergibt sich wegen $(\zeta)^2 = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=0}^{N}\alpha_{kl}^{st}\ \spadesuit_{kl} \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} & \quad \int [A_\mu(x+v)A^\mu(x)A_\nu(y)A^\nu(y)(\varphi,\psi)\ (-(x-y)^2)^3 \\
& +4A_\mu(x+v)A_\nu(y)(\varphi,\psi)\ (\eta^{\mu\nu}(x-y)^2 - 2(x-y)^\mu(x-y)^\nu)] \\
& \frac{1}{s^2}\delta_t(x-y-s\zeta)f(x-s\zeta)\ d(x,y) \qquad (4.5)\\
\overset{t\searrow 0}{\longrightarrow} & \quad 4\int (A_\mu(y+s\zeta)A_\nu(y))(\varphi,\psi)(-2)\zeta^\mu\zeta^\nu f(y)\ dy \qquad (4.6)\\
\overset{s\searrow 0}{\longrightarrow} & \quad -8\int (A_\mu(y)A_\nu(y))(\varphi,\psi)\zeta^\mu\zeta^\nu f(y)\ dy \\
= & \quad -8\ \langle\varphi,\ :[A_\mu A_\nu]:(f)\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0}\zeta^\mu\zeta^\nu. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Den Grenzwert $s \searrow 0$ darf man mit dem Integral vertauschen, weil etwa

$$(A_\mu(\ .+s\zeta)A_\nu(.))(\varphi,\psi)\ f(.) \xrightarrow{\mathscr{S}} (A_\mu(.)A_\nu(.))(\varphi,\psi)\ f(.), \quad \text{für } s\searrow 0.$$

Es folgt, daß für alle Nullvektoren ζ gilt: $\zeta^\mu\zeta^\nu{:}[A_\mu A_\nu]{:}(f) \in$ w-lim $\mathcal{A}(\Phi)$. Da aber auch $\Phi(f) = \eta^{\mu\nu}\ {:}[A_\mu A_\nu]{:}(f) \in$ w-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ folgt, wenn wir $M_{\mu\nu} := {:}[A_\mu A_\nu]{:}(f)$ setzen, wegen Lemma 4.7 schon

$${:}[A_\mu A_\nu]{:}(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi), \quad \text{für alle } \mu,\nu = 0,1,2,3.$$

Man beachte, daß dies nur deshalb folgt, weil die Integralausdrücke, nach jedem einzelnen Grenzübergang, durch Operatoren definierte Sesquilinearformen in φ und ψ sind (s. Lemma 2.1).

Satz 4.1 ist somit bewiesen. ■

Fahren wir, ähnlich zu den gerade gemachten Gedanken, fort:
Wir wissen, daß ${:}[A_\mu A_\nu]{:}(f) \in$ w-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ gilt. Mit Lemma 4.6 folgt damit, daß für beliebige, symmetrische Matrizen $E = (E^{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\dots,3}, F = (F^{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\dots,3}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}\ {:}[A_\mu A_\nu]{:}(f)\ {:}[A_\kappa A_\lambda]{:}(g) - 2E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}(W_{\mu\kappa}W_{\nu\lambda})(f\otimes g)\ \mathbf{1} \\
= \ & E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}\ {:}[A_\mu A_\nu][A_\kappa A_\lambda]{:}(f\otimes g) + 4E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}({:}[A_\mu][A_\kappa]{:}W_{\nu\lambda})(f\otimes g) \\
& \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi). \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Man beachte, daß die linke Seite wieder in w-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ ist, weil w-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ eine Algebra ist (siehe Korollar 2.1).

Es sei wie oben $h : (x,y) \mapsto (-(x-y)^2)^3$, dann ist auch

$$\begin{aligned}
M(f\otimes g) \ := \ & E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}[\ {:}[A_\mu A_\nu][A_\kappa A_\lambda]{:}(h(f\otimes g)) + 4({:}[A_\mu][A_\kappa]{:}W_{\nu\lambda})(h(f\otimes g))] \\
& \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi). \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Mit den Operatoren $L(f\otimes g)$ ist auch der durch Summen gebildete Grenzwert ${:}[A_\mu A_\nu]{:}(f)$ quadratisch mit Feldoperatoren von Φ zu approximieren. Damit ist wegen (4.8) $M(f\otimes g)$ von vierter Potenz in den Operatoren von Φ.

Satz 4.2 Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $\zeta \in \mathbb{R}^4$ lichtartig. Dann gilt für $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$:

$$:[A_\mu^{(\zeta)} A_\nu]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi). \tag{4.10}$$

Beweis: Sei $\zeta \in \mathbb{R}^4$, beliebig, mit $(\zeta)^2 = 0$. Für $\zeta = 0$ ist die Aussage des Satzes gerade Satz 4.1, also schon bewiesen, sei also $\zeta \neq 0$:

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$. Zu $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $0 \neq \zeta \in \mathbb{R}^4$, lichtartig, seien $\{\alpha_{kl}^{(t)} \mid k, l \in \mathbb{N}, t > 0\}$ und $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ so gewählt, daß (4.1) mit $v := \zeta$ gilt. Wie oben definiert, ist $M(f_k \otimes f_l) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \langle \varphi, M(f_k \otimes f_l)\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \\
= \quad & E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} \int A_\mu(x) A_\nu(x) A_\kappa(y) A_\lambda(y)(\varphi, \psi)\ h(x,y) f_k(x) f_l(y)\ d(x,y) \\
& +4 E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda}\ ((A_\mu(.) A_\kappa(..)(\varphi, \psi)) W_{\nu\lambda})(h(f_k \otimes f_l)) \\
\overset{Lem. 4.1}{=} \quad & E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} \int [\ A_\mu(x) A_\nu(x) A_\kappa(y) A_\lambda(y)(\varphi, \psi)\ (-(x-y)^2)^3 \\
& +4 A_\mu(x) A_\kappa(y)(\varphi, \psi)\ (\eta_{\nu\lambda}(x-y)^2 - 2(x-y)_\nu (x-y)_\lambda)\ ]\ f_k(x) f_l(y)\ d(x,y) \\
=: \quad & \heartsuit_{kl},
\end{aligned}$$

und es folgt, daß

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{kl}^{(t)}\ \heartsuit_{kl} \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad & E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} \int [\ A_\mu(x) A_\nu(x) A_\kappa(y) A_\lambda(y)(\varphi, \psi)\ (-(x-y)^2)^3 \\
& +4 A_\mu(x) A_\kappa(y)(\varphi, \psi)\ (\eta_{\nu\lambda}(x-y)^2 - 2(x-y)_\nu (x-y)_\lambda)\ ] \\
& \delta_t(x-y-\zeta) f(x-\zeta)\ d(x,y) \\
\overset{t\searrow 0}{\longrightarrow} \quad & E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} 4 \int A_\mu(y+\zeta) A_\kappa(y)(\varphi, \psi)(-2)\zeta_\nu \zeta_\lambda f(y)\ dy \\
= \quad & -8 E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} \zeta_\nu \zeta_\lambda\ \ :[A_\mu^{(\zeta)} A_\kappa]:(f)
\end{aligned}$$

Weil auch nach dem Grenzprozeß $\lim_{N\to\infty}$ der behandelte Integralausdruck eine durch einen Operator definierte Sesquilinearform in φ und ψ ist, folgt so, daß

$$E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} \zeta_\nu \zeta_\lambda\ \ :[A_\mu^{(\zeta)} A_\kappa]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).$$

Lemma 4.8 sichert nun, wenn wir $M_{\mu\kappa} := :[A_\mu^{(\zeta)} A_\kappa]:(f)$ notieren, daß bereits

$$:[A_\mu^{(\zeta)} A_\kappa]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi), \quad \text{für alle } \mu, \kappa = 0, 1, 2, 3.$$

■

Den in Satz 4.1 und Satz 4.2 gegangenen Weg werden wir nun noch einmal wiederholen:

Satz 4.2 sagt, daß für alle lichtartigen $\xi \in \mathbb{R}^4$ $\ :[A_\mu^{(\xi)} A_\nu]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$ ist. Nach Lemma 4.6 wissen wir dann, daß für beliebige, symmetrische Matrizen E, F gilt:

$$\begin{aligned}
& E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda}\ \ :[A_\mu^{(\xi)} A_\nu]:(f)\ \ :[A_\kappa A_\lambda]:(g) - 2 E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} (W_{\mu\kappa}^{(\xi)} W_{\nu\lambda})(f \otimes g)\ \mathbf{1} \\
= \quad & E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda}\ \ :[A_\mu^{(\xi)} A_\nu][A_\kappa A_\lambda]:(f \otimes g) \\
+ \quad & 2 E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} (:[A_\nu][A_\kappa]: W_{\mu\lambda}^{(\xi)})(f \otimes g) + 2 E^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} (:[A_\mu^{(\xi)}][A_\kappa]: W_{\nu\lambda})(f \otimes g).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Die linke Seite von (4.11) ist dann aus w-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ und somit auch die rechte Seite. Daher ist für $h : (x,y) \mapsto (-(x-y)^2)^3$ und $h^{(\xi)} : (x,y) \mapsto (-(x+\xi-y)^2)^3$

$$\begin{aligned} N^{(\xi)}(f\otimes g) \quad := \quad & E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}[\ :[A_\mu^{(\xi)}A_\nu][A_\kappa A_\lambda]:(hh^{(\xi)}(f\otimes g)) \\ & +2(:[A_\nu][A_\kappa]:W_{\mu\lambda}^{(\xi)})(hh^{(\xi)}(f\otimes g)) \\ & +2(:[A_\mu^{(\xi)}][A_\kappa]:W_{\nu\lambda})(hh^{(\xi)}(f\otimes g))\ ] \\ & \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi), \end{aligned} \tag{4.12}$$

weil $hh^{(\xi)}(f\otimes g) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)\otimes\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ eine endliche Linearkombination ist.

Der Operator $N^{(\xi)}(f\otimes g)$ ist nach (4.11) von sechster Potenz in den Feldoperatoren von Φ, da $:[A_\mu^{(\xi)}A_\nu]:(f)$ von vierter und $:[A_\kappa A_\lambda]:(g)$ von zweiter Potenz in Φ ist.

Satz 4.3 Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $u \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Dann gilt für $\mu,\nu = 0,1,2,3$:

$$:[A_\mu^{(u)}A_\nu]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi). \tag{4.13}$$

Beweis: Seien $\varphi,\psi \in \mathcal{S}_0$. Zu $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $0 \neq \zeta =: v \in \mathbb{R}^4$, lichtartig, seien $\{\alpha_{kl}^{(t)} \mid k,l \in \mathbb{N}, t>0\}$ und $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ so gewählt, daß (4.1) gilt. Nach (4.12) ist $N^{(\xi)}(f_k\otimes f_l) \in$ w-lim $\mathcal{A}(\Phi)$, für alle lichtartigen $\xi \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} & \langle\varphi, N^{(\xi)}(f_k\otimes f_l)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\ = \quad & E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}\int A_\mu^{(\xi)}(x)A_\nu(x)A_\kappa(y)A_\lambda(y)(\varphi,\psi)\ h(x,y)h^{(\xi)}(x,y)f_k(x)f_l(y)\ d(x,y) \\ & +2E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}\ ((A_\nu(.)A_\kappa(..)(\varphi,\psi))W_{\mu\lambda}^{(\xi)})(hh^{(\xi)}(f_k\otimes f_l)) \\ & +2E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}\ ((A_\mu(\ .+\xi)A_\kappa(..)(\varphi,\psi))W_{\nu\lambda})(hh^{(\xi)}(f_k\otimes f_l)) \\ \overset{Lem. 4.1}{=} \quad & E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}\int[\ A_\mu(x)A_\nu(x)A_\kappa(y)A_\lambda(y)(\varphi,\psi)\ h(x,y)h^{(\xi)}(x,y) \\ & +2A_\nu(x)A_\kappa(y)(\varphi,\psi)\ (\eta_{\mu\lambda}(x+\xi-y)^2 - 2(x+\xi-y)_\mu(x+\xi-y)_\lambda)h(x,y) \\ & +2A_\mu(x+\xi)A_\kappa(y)(\varphi,\psi)\ (\eta_{\nu\lambda}(x-y)^2 - 2(x-y)_\nu(x-y)_\lambda)h^{(\xi)}(x,y)\ ] \\ & f_k(x)f_l(y)\ d(x,y) \\ =: \quad & \Diamond_{kl}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß neben Lemma 4.1 eine analoge Aussage in der um ξ verschobenen Situation „$W_{\mu\lambda}^{(\xi)}h^{(\xi)}$“ gilt.

So ergibt sich wie zuvor, wegen $(\zeta)^2 = 0$:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k,l=0}^{n} \alpha_{kl}^{(t)} \ \Diamond_{kl} \\
\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad & E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} \int [\ A_\mu(x)A_\nu(x)A_\kappa(y)A_\lambda(y)(\varphi,\psi)\ (-(x-y)^2)^3(-(x+\xi-y)^2)^3 \\
& +2A_\nu(x)A_\kappa(y)(\varphi,\psi) \\
& \quad (\eta_{\mu\lambda}(x+\xi-y)^2 - 2(x+\xi-y)_\nu(x+\xi-y)_\lambda)(-(x-y)^2)^3 \\
& +2A_\mu(x+\xi)A_\kappa(y)(\varphi,\psi) \\
& \quad (\eta_{\nu\lambda}(x-y)^2 - 2(x-y)_\nu(x-y)_\lambda)(-(x+\xi-y)^2)^3\ ] \\
& \delta_t(x-y-\zeta)f(x-\zeta)\ d(x,y) \qquad (4.14) \\
\overset{t\searrow 0}{\longrightarrow} \quad & E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}2 \int A_\mu(y+\xi+\zeta)A_\kappa(y)(\varphi,\psi)(-2)\zeta_\nu\zeta_\lambda(-(\zeta+\xi)^2)^3 f(y)\ dy \\
= \quad & -4E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}\zeta_\nu\zeta_\lambda\ (-2\zeta\xi)^3\ \ :[A_\mu^{(\xi+\zeta)}A_\kappa]:(f), \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

und es folgt so, daß

$$E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}\zeta_\nu\zeta_\lambda(\zeta\xi)^3\ \ :[A_\mu^{(\zeta+\xi)}A_\kappa]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).$$

Lemma 4.8 sichert wieder, daß bereits

$$(\zeta\xi)^3\ \ :[A_\mu^{(\xi+\zeta)}A_\kappa]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi), \quad \text{für alle } \mu,\kappa = 0,1,2,3.$$

Ist nun $u \in \mathbb{R}^4$ so, daß $(u)^2 \neq 0$, so läßt sich u zerlegen in die Summe zweier lichtartiger Vektoren ζ,ξ mit $\zeta\xi \neq 0$. So folgt für alle $u \in \mathbb{R}^4$ mit $(u)^2 \neq 0$, daß

$$:[A_\mu^{(u)}A_\kappa]:(f) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi), \quad \text{für alle } \mu,\kappa = 0,1,2,3.$$

Da wir aus Satz 4.2 bereits wissen, daß die Aussage für u mit $(u)^2 = 0$ gilt, ist der Satz bewiesen. ■

Wir haben jetzt alles beisammen, um die Kernaussage dieses Abschnittes formulieren zu können.

Satz 4.4 Es seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$. Dann gilt

$$B(f)B(g) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi). \qquad (4.16)$$

Beweis: Für $\mu,\nu = 0,1,2,3$ seien f^μ, g^ν die Komponenten von f, g. Ist $y \in \mathbb{R}^4$ beliebig gewählt, so ist

$$\{x \mapsto f^\mu(x+y)g^\nu(x)\} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4).$$

Mit Satz 4.3 ist daher

$$:[A_\mu^{(y)}A_\nu]:(f^\mu(\ .+y)g^\nu(\ .\ )) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi),$$

und es gilt

$$:[A_\mu^{(y)}A_\nu]:(f^\mu(\ .+y)g^\nu(.)) = \text{w-}\int A_\mu(x+y)A_\nu(x)f^\mu(x+y)g^\nu(x)\ dx.$$

Für $i,k \in \mathbb{N}$ sei $y_{ik} \in \mathbb{R}^4$ und $\Delta_{ik} \in \mathbb{R}$, dann ist auch

$$\sum_{i=0}^{k} :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\nu]: (f^\mu(\,.+y_{ik})g^\nu(\,.\,))\Delta_{ik} \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi),$$

und man hat für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{k} \langle \varphi,\ :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\nu]: (f^\mu(\,.+y_{ik})g^\nu(\,.\,))\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \Delta_{ik} \\
= & \sum_{i=0}^{k} \int A_\mu(x+y_{ik})A_\nu(x)(\varphi,\psi) f^\mu(x+y_{ik})g^\nu(x)\ dx\ \Delta_{ik}
\end{aligned}$$

Da die Abbildung $\{(x,y) \mapsto A_\mu(x+y)A_\nu(x)(\varphi,\psi)f^\mu(x+y)g^\nu(x)\} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ ist, ist auch $\{y \mapsto \int A_\mu(x+y)A_\nu(x)(\varphi,\psi)f^\mu(x+y)g^\nu(x)\ dx\} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, so daß man Folgen $(y_{ik})_{i,k\in\mathbb{N}}, (\Delta_{ik})_{i,k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^4$ bzw. in $\mathbb{R}$ findet, daß obige Summe gegen das Integral konvergiert, also daß gilt:

$$\begin{aligned}
& \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \langle \varphi,\ :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\nu]: (f^\mu(\,.+y_{ik})g^\nu(\,.\,))\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \Delta_{ik} \\
= & \int\int A_\mu(x+y)A_\nu(x)(\varphi,\psi)f^\mu(x+y)g^\nu(x)\ dx\ dy \\
= & \int\int A_\mu(x+y)A_\nu(x)(\varphi,\psi)f^\mu(x+y)g^\nu(x)\ dy\ dx \\
= & \int\int A_\mu(z)A_\nu(x)(\varphi,\psi)f^\mu(z)g^\nu(x)\ dz\ dx \\
= & \langle \varphi,\ :[A_\mu][A_\nu]: (f^\mu \otimes g^\nu)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
= & \langle \varphi,\ :B_\mu(f^\mu)B_\nu(g^\nu):\ \psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
= & \langle \varphi, \underbrace{(B_\mu(f^\mu)B_\nu(g^\nu) - W_{\mu\nu}(f^\mu \otimes g^\nu)\mathbf{1})}_{\in\ \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)} \psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\
\Rightarrow\ & B(f)B(g) = B_\mu(f^\mu)B_\nu(g^\nu) \in \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).
\end{aligned}$$

■

Tatsächlich ist bei den einzelnen Schritten dieses Abschnittes die Wahl $\delta = 2$ der Skalendimension des Vektorfeldes nur unwesentlich eingegangen. Sie manifestierte sich in Lemma 4.1 in der Potenz des Nennerpolynoms $h : (x,y) \mapsto (-(x-y)^2)^{\delta+1}$ der Zweipunktfunktion. Man erkennt aber unmittelbar, daß die einzelnen Schritte dieses Abschnittes ihre Gültigkeit behalten, wenn wir die Fälle mit Skalendimension $\delta = 3,4,5,\ldots$ betrachten, wenn also die Unitaritätsschranke $\delta \geq 3$ nicht unterschritten ist. Die Fälle mit nicht ganzzahliger Skalendimension sind technisch aufwändiger, wegen der dann nicht mehr gegebenen Differenzierbarkeit von h. Siehe dazu die Bemerkungen in Abschnitt 4.5.

Durch Gleichung (2.13) haben wir bereits die (triviale) Inklusion $\mathcal{A}(\Phi) \subset \text{w-lim}\,\mathcal{A}(B(.)B(..))$ gesichert. Der letzte Satz ergibt nun $\mathcal{A}(B(.)B(..)) \subset \text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$, so daß wir die Gleichheit der Algebren

$$\text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi) = \text{w-lim}\,\mathcal{A}(B(.)B(..))$$

erhalten.

Befassen wir uns nun mit der Frage der Indefinitheit von Φ:

Wir haben gesehen, daß es eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\Phi)$ gibt, so daß $\lim_{n\to\infty}\langle\varphi, X_n\Omega\rangle_{\mathcal{S}_0} = \langle\varphi, B(f)B(g)\Omega\rangle_{\mathcal{S}_0}$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}_0$ erfüllt ist.

Machen wir für den Moment die Annahme, daß es eine Konstante $K > 0$ gibt so, daß für $\psi_n := X_n\Omega - B(f)B(g)\Omega \in \mathcal{S}_0$ gilt $|\langle\psi_n, \psi_n\rangle_{\mathcal{S}_0}| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das folgende Lemma zeigt, daß dann die Positivität von Φ verletzt sein muß:

Lemma 4.9 Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\langle . \, , .. \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform auf V und $x \in V$. Ist dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &i) \quad \lim_{n\to\infty}\langle y, x_n\rangle = 0, \qquad \text{für alle } y \in V \\ &ii) \quad \langle x_n, x_n\rangle \leq K, \qquad \text{für ein } K > 0 \text{ und alle } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

dann gilt: Es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$, so daß $y_m := \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x_{n_k}$

$$\lim_{m\to\infty}\langle y_m, y_m\rangle = 0$$

erfüllt.

Beweis: Setze $x_{n_1} := x_1$. Wähle nach $i)$ für x_{n_1} ein n_2, so daß $|\langle x_{n_1}, x_{n_2}\rangle| \leq 2^{-2}$. Induktiv wählen wir nun zu $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ ein n_{k+1}, so daß $|\langle x_{n_j}, x_{n_{k+1}}\rangle| \leq 2^{-(k+1)}$, für alle $j < k+1$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} |\langle y_m, y_m\rangle| &\leq \frac{1}{m^2}\sum_{k,l=1}^m |\langle x_{n_k}, x_{n_l}\rangle| \\ &= \frac{1}{m^2}\Big(\sum_{k<l}|\langle x_{n_k}, x_{n_l}\rangle| + \sum_{k=1}^m |\langle x_{n_k}, x_{n_k}\rangle| + \sum_{k>l}|\langle x_{n_k}, x_{n_l}\rangle|\Big) \\ &\leq \frac{1}{m^2}\Big(\sum_{k<l}2^{-l} + mK + \sum_{k>l}2^{-k}\Big) \\ &\leq \frac{1}{m^2}\Big(m\sum_{l=2}^m 2^{-l} + mK + m\sum_{k=2}^m 2^{-k}\Big) \\ &\leq \frac{1}{m}\Big(2 + K + 2\Big) \longrightarrow 0, \quad \text{für } m \to \infty. \end{aligned}$$

∎

Betrachten wir nun mit diesem Lemma oben definiertes ψ_n, so erhalten wir eine gemittelte Folge $\big(Y_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m X_{n_k}\big)_{m\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}(\Phi)$, die

$$\begin{aligned} \|Y_m\Omega - B(f)B(g)\Omega\|^2_{\mathcal{S}_0} &= \|Y_m\Omega\|^2_{\mathcal{S}_0} + \|B(f)B(g)\Omega\|^2_{\mathcal{S}_0} \\ &\quad -\langle Y_m\Omega, B(f)B(g)\Omega\rangle_{\mathcal{S}_0} - \langle B(f)B(g)\Omega, Y_m\Omega\rangle_{\mathcal{S}_0} \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{für } m \to \infty \end{aligned} \tag{4.17}$$

erfüllt. Die gemittelte Folge $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ konvergiert aber automatisch auch schwach gegen $B(f)B(g)$, denn für jede Nullfolge $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein

$k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|\nu_i| \leq \varepsilon/2$ für $i > k_0$. Damit ist

$$\Big|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\nu_k\Big| < \frac{\max\{\nu_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cdot k_0}{m} + \frac{\frac{\varepsilon}{2} \cdot (m - k_0)}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

für hinreichend großes m. (Das heißt also, daß auch die gemittelten Matrixelemente gegen die ursprünglichen Grenzwerte konvergieren.)

Aus Gleichung (4.17) folgt dann, daß bereits

$$\|Y_m\Omega\|_{\mathcal{S}_0}^2 \longrightarrow \|B(f)B(g)\Omega\|_{\mathcal{S}_0}^2, \quad \text{für } m \to \infty.$$

Da die rechte Seite kleiner Null sein kann ist Φ somit nicht positiv.

Es bleibt also noch die Annahme, der gleichmäßigen Beschränktheit, d.h. $|\langle\psi_n, \psi_n\rangle_{\mathcal{S}_0}| \leq K$, zu begründen. Dies kann unter Zuhilfenahme des im vorigen Kapitel konstruierten Kreinraumes $\mathcal{K}_0 \hookleftarrow \mathcal{S}_0$ geschehen: Wir wissen um die Konvergenz

$$\langle\varphi, \psi_n\rangle_{\mathcal{S}_0} \to 0, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}_0.$$

Können wir die verschärfte Version

$$\langle\phi, \iota_0(\psi_n)\rangle_{\mathcal{K}_0} \to 0, \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{K}_0 \tag{4.18}$$

etablieren, so folgt insbesondere auch die Konvergenz

$$\langle J_0\phi, \iota_0(\psi_n)\rangle_{\mathcal{K}_0} = \langle\phi, J_0\iota_0(\psi_n)\rangle_{\mathcal{K}_0} \to 0, \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{K}_0,$$

was die Folge $\big(\iota_0(\psi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer schwach konvergenten Folge im Hilbertraum $(\mathcal{K}_0, \langle.\, J_0..\rangle_{\mathcal{K}_0})$ macht. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschräktheit für Vektoren in einem Hilbertraum[2] folgert man aber, daß jede schwach konvergente Folge in einem Hilbertraum gleichmäßig in ihrer Norm beschränkt ist. Also etwa

$$\langle\iota_0(\psi_n), J_0\iota_0(\psi_n)\rangle_{\mathcal{K}_0} \leq \sqrt{K}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

daher ergibt die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung

$$|\langle\psi_n, \psi_n\rangle_{\mathcal{S}_0}| = |\langle\iota_0(\psi_n), \iota_0(\psi_n)\rangle_{\mathcal{K}_0}| = |\langle\iota_0(\psi_n), J_0(J_0\iota_0(\psi_n))\rangle_{\mathcal{K}_0}| \leq \sqrt{K}\sqrt{K} = K.$$

Letztlich muß man sich also nur von der Gültigkeit von (4.18) überzeugen, um die Indefinitheit von Φ zu schließen.

Man muß also in den einzelnen Zwischenschritten dieses Abschnittes jeweils die schwache Konvergenz in $\mathcal{S}_0$ durch die schwache Konvergenz in $\mathcal{K}_0$ ersetzen. Wir führen hier die Details nicht weiter auf, da wir im übernächsten Abschnitt die Konvergenz der Normen in $\mathcal{S}_0$ ganz explizit sehen werden. Es sei aber darauf hingewiesen, daß man innerhalb der jeweiligen Beweise etwas andere Formulierungen wählen muß, die sich daraus ergeben, daß die Operatoren $a_\mu(x)$ sich nicht auf $\mathcal{K}_0$ definieren lassen, weil die rechte Seite von

$$(w_{\mu\nu} * \varphi_1^\nu)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-ipx}\hat{\varphi}_1^\nu(p)\; d\omega_{\mu\nu}(p),$$

die in der Definition von $a_\mu(x)$ auftritt, offenbar nur für $\hat{\varphi}_1^\nu \in L^1(\mathbb{R}^4, \omega_{\mu\nu})$ und nicht für $\hat{\varphi}_1^\nu \in L^2(\mathbb{R}^4, \omega_{\mu\nu})$ sinnvoll ist. Daher sind die Formulierungen, die

[2] Siehe etwa [Ha], Seite 13.

explizit Integrale der Art $\int A_\mu(x)A_\nu(x)(\varphi,\psi)f(x)\,dx$ verwenden, nicht wohldefiniert.

Es handelt sich dabei aber tatsächlich nur um die Notwendigkeit einer anderen Formulierung, denn die Skalarprodukte in $\mathcal{K}_0$, d.h. im Impulsraum, sind als Integrale über die Fouriertransformierten der Testfunktionen f natürlich wohldefiniert. - Man darf eben nur nicht wie im Falle von $\mathcal{S}_0$ die Integrale von Fouriertransformation und Skalarprodukt vertauschen.

4.3 Zwischenüberlegungen

In diesem Abschnitt geht es darum, noch einige weitere technische Überlegungen zu machen, die wir dann im folgenden Abschnitt benötigen, um die bisher formulierten Aussagen über schwache Grenzwerte auf natürliche Grenzwerte auszudehnen.

Hat man ein $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4+4})$ so gewählt, daß $\hat{T}$ gegeben ist durch ein reelles Maß ρ, das die Eigenschaft $\check{g} \circ \sigma \in L^1(\mathbb{R}^{4+4}, |\rho|)$, für alle $\check{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, besitzt, so haben wir in Abschnitt 4.1 gesehen, daß dann $T(\delta_t(.-..-v)f(.-v)) \to (\Delta_v^* T)(f)$ für $t \searrow 0$. Mit $\delta_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ wie in (4.1).

Falls $\tilde{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ regulär und weiter $P \in \{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^4) \mid \partial^\beta g$ ist polynomial beschränkt, für alle $\beta \in \mathbb{N}^4\}$ ist, so haben wir in den Beweisen der Sätze 4.1, 4.2 und 4.3, benutzt, daß, für $S : (x,y) \mapsto P(x-y)$ auch

$$(\tilde{T}S)(\delta_t(.-..-v)f(.-v)) \xrightarrow{t\searrow 0} (\Delta_v^*(\tilde{T}S)(f) = P(v)(\Delta_v^*\tilde{T})(f)$$

gilt.

Dieses Verhalten gilt auch für das durch ρ gegebene T:
Setze $\varepsilon_t : z \mapsto P(z)\delta_t(z-v)$, dann erhält man für die Fouriertransformierte von $\varepsilon_t(.-..)f(.-v) : (p,q) \mapsto \hat{\varepsilon}_t(-q)\hat{f}(p+q)e^{i(p+q)v}$. Weiter gilt für alle $p \in \mathbb{R}^4$, daß

$$\hat{\varepsilon}_t(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int P(z)\delta_t(z-v)e^{ipz}\,dz \xrightarrow{t\searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2}P(v)e^{ipv}$$

und für $t < 1$ folgt, wegen $Tr\ \delta_t \subset \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \le t\}$:

$$|\hat{\varepsilon}_t(p)| \le \frac{1}{(2\pi)^2}\int |P(z)|\,|\delta_t(z-v)|\,dz \le \frac{1}{(2\pi)^2}M\int |\delta_t(z-v)|\,dz = \frac{1}{(2\pi)^2}M,$$

wobei $M := \max_{x\in B(v)}\{P(x)\}$, mit $B(v) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x-v| \le 1\}$. Also ergibt sich mit majorisierender Konvergenz:

$$\begin{aligned}
(TS)(\delta_t(.-..-\zeta)f(.-v)) &= T(\varepsilon_t(.-..)f(.-v)) = \hat{T}(\check{\varepsilon}_t(-..)\check{f}(.+..)e^{-i(.+..)v}) \\
&= \int \check{\varepsilon}_t(-q)\check{f}(p+q)e^{-i(p+q)v}\,d\rho(p,q) \\
&\xrightarrow{t\searrow 0} \int \frac{1}{(2\pi)^2}P(v)e^{-ipv}\check{f}(p+q)\,d\rho(p,q) \\
&= P(v)(\Delta_v^* T)(f).
\end{aligned}$$

Wir werden auch eine allgemeine Versionen des Wickschen Theorems für unser weiteres Vorgehen benötigen. Wir geben hier keinen Beweis, der für den allgemeinen Fall ähnlich zum Beweis von Lemma 4.6 durchführbar ist. Um das Wicksche Theorem hinreichend straff formulieren zu können, benötigen wir den Begriff einer Kontraktion, dessen Wohldefiniertheit das nächste Lemma sicherstellt. Es ist eine Verallgemeinerung von Lemma 4.5, und wir führen hier auch diesen Beweis nicht.

Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4+4})$ definieren wir $(T)^{\{k,l\}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n}), n \geq 2, k \neq l, k, l \leq n$ durch die Beziehung

$$\begin{aligned}(T)^{\{k,l\}}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) \quad := \quad & T(f_k \otimes f_l) \\ & \int \ldots f_{k-1}(x_{k-1}) f_{k+1}(x_{k+1}) \ldots f_{l-1}(x_{l-1}) f_{l+1}(x_{l+1}) \ldots \\ & \qquad d(\ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots),\end{aligned}$$

das heißt z.B.: $(T)^{\{1,2\}} = T \otimes 1$, oder $(T)^{\{n-1,n\}} = 1 \otimes T$.

Lemma 4.10 Für $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ seien $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, und es seien $v_{i,j} \in \mathbb{R}^4$, für $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m_k\}$.
Für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ sei $\tilde{A}(\varphi, \psi) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ definiert als die zur Funktion

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) \quad \mapsto \quad & A_{\mu_{1,1}}(x_1 + v_{1,1}) \ldots A_{\mu_{1,m_1}}(x_1 + v_{1,m_1}) \\ & \ldots A_{\mu_{n,1}}(x_n + v_{n,1}) \ldots A_{\mu_{n,m_n}}(x_n + v_{n,m_n})(\varphi, \psi),\end{aligned}$$

gehörige Distribution[3]. Dann gilt für jede Testfunktion $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$: Die Sesquilinearform

$$(\varphi, \psi) \mapsto \big(\tilde{A}(\varphi, \psi) \prod_{i=1}^{N} (W^{(u_i)}_{\kappa_i \lambda_i})^{\{k_i, l_i\}}\big)(F), \tag{4.19}$$

(mit $N \in \mathbb{N}$ beliebig, $k_i \neq l_i, k_i, l_i \leq n, u_i \in \mathbb{R}^4$) ist gegeben durch einen Operator $X : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0$, also durch $(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi, X\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}$.

Zur Verdeutlichung möge man beispielsweise die folgenden beiden Fälle betrachten:
a) $n = 2, m_1 = 1, m_2 = 0, v_{1,1} = 0, N = 1, F = f \otimes g$.
Das bedeutet einfach:

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) \quad \mapsto \quad & ((A_\mu(.)(\varphi, \psi) \otimes 1) W_{\kappa\lambda})(f \otimes g) \\ & = \int (A_\mu(x)(\varphi, \psi) f(x) (w_{\kappa\lambda} * g)(x) \; dx \\ & = \langle \varphi, B_\mu(\underbrace{f \cdot (w_{\kappa\lambda} * g)}_{\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)}) \psi \rangle_{\mathcal{S}_0}.\end{aligned}$$

b) Lemma 4.5 *ii)*.

[3] Ist ein $m_j = 0$, so bedeutet das, daß $\tilde{A}(\varphi, \psi)$ „in der Variablen x_j" konstant ist. Insbesondere definieren wir, wenn alle $m_j = 0$ sind:

$$\tilde{A}(\varphi, \psi)(F) := \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \cdot \int F(x_1, \ldots, x_n) \; d(x_1, \ldots, x_n).$$

Nun zum Begriff der Kontraktion:
Nimmt man in der Sesquilinearform $(\varphi,\psi)\mapsto \tilde{A}(\varphi,\psi)(F)$ in Lemma 4.10 eine beliebige Anzahl $N=0,1,2,3,\ldots$, von jeweils zwei Faktoren $A_{\mu_{\kappa(i)}}(x_{\nu(i)}+v_{\lambda(i)}), A_{\mu_{\kappa'(i)}}(x_{\nu'(i)}+v_{\lambda'(i)})$ mit $\nu(i)<\nu'(i)$, $i=1,2,\ldots,N$, heraus, so erhält man ein neues $\breve{A}(\varphi,\psi)\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, das definiert ist durch die Funktion

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n) \quad\mapsto\quad & \underbrace{A_{\mu_{1,1}}(x_1+v_{1,1})\ldots A_{\mu_{1,m_1}}(x_1+v_{1,m_1})\ldots \\ & \ldots A_{\mu_{n,1}}(x_n+v_{n,1})\ldots A_{\mu_{n,m_n}}(x_n+v_{n,m_n})}_{\text{ohne die herausgenommenen Paare von Faktoren}}(\varphi,\psi).\end{aligned}$$

Definition 4.2 Der gemäß Lemma 4.10 zur Sesquilinearform

$$(\varphi,\psi)\mapsto\left(\breve{A}(\varphi,\psi)\prod_{i=1}^{N}\left(W^{(v_{\lambda(i)}-v_{\lambda'(i)})}_{\mu_{\kappa(i)},\mu_{\kappa'(i)}}\right)^{\{\nu(i),\nu'(i)\}}\right)(F),\quad F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n}),$$

gehörende Operator heißt die Kontraktion von

$$:[A^{(v_{1,1})}_{\mu_{1,1}}\ldots A^{(v_{1,m_1})}_{\mu_{1,m_1}}]\ldots[A^{(v_{n,1})}_{\mu_{n,1}}\ldots A^{(v_{n,m_n})}_{\mu_{n,m_n}}]:(F)$$

zu den Indexpaaren $[\kappa(1),\kappa'(1)],\ldots,[\kappa(N),\kappa'(N)]$.

Beachte auch den trivialen Fall $N=0$: Der zu $\tilde{A}(\varphi,\psi)(F)$ gehörende Operator ist die triviale Kontraktion, also der Operator

$$:[A^{(v_{1,1})}_{\mu_{1,1}}\ldots A^{(v_{1,m_1})}_{\mu_{1,m_1}}]\ldots[A^{(v_{n,1})}_{\mu_{n,1}}\ldots A^{(v_{n,m_n})}_{\mu_{n,m_n}}]:(F)$$

selbst.

Mit Hilfe dieses Begriffes können wir jetzt eine allgemeinere Version des Wickschen Theorems, als ein weiteres Werkzeug für unser späteres Vorgehen, bereitstellen[4]:

Lemma 4.11 (Wicksches Theorem 3) Zu $n\in\mathbb{N}^*$ seien $m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{N}^*$ und $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^4$ gewählt. Für $j\in\{1,\ldots,n\}$ und $k\in\{1,2,\ldots,m_j\}$ sei dann weiter $l_{j,k}\in\mathbb{N}^*$.

Sind $F_j\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4m_j})$, für $j=1,2,\ldots,n$, so gilt:

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{n}\Bigg(:[A^{(v_j)}_{\mu_{j,1,1}}A_{\mu_{j,1,2}}\ldots A_{\mu_{j,1,l_{j,1}}}][A_{\mu_{j,2,1}}\ldots A_{\mu_{j,2,l_{j,2}}}]\ldots \\ &\qquad\qquad\ldots[A_{\mu_{j,m_j,1}}\ldots A_{\mu_{j,m_j,l_{j,m_j}}}]:\ (F_j)\Bigg) \\ =\ &\text{Summe über alle Kontraktionen von} \\ &:\prod_{j=1}^{n}\Bigg([A^{(v_j)}_{\mu_{j,1,1}}A_{\mu_{j,1,2}}\ldots A_{\mu_{j,1,l_{j,1}}}][A_{\mu_{j,2,1}}\ldots A_{\mu_{j,2,l_{j,2}}}]\ldots \\ &\qquad\qquad\ldots[A_{\mu_{j,m_j,1}}\ldots A_{\mu_{j,m_j,l_{j,m_j}}}]\Bigg):\big(F_1\otimes\ldots\otimes F_n\big) \\ &\text{deren Indexpaare } [(j,k,l),(j',k',l')] \text{ die Beziehung } j<j' \text{ erfüllen.}\end{aligned}$$

[4]Man beachte die unterschiedliche Indexstuktur von Def. 4.2 und Lem. 4.11:
In Def. 4.2 gilt $\kappa(i)=\lambda(i)\in\mathbb{N}^2$ und $\nu(i)$ ist schlicht die erste Komponente von $\kappa(i)$. Im Lemma gilt dies wegen der anderen Art der Abzählung nicht. Wendet man dort die Def. an, so ist $\kappa(i)=(\kappa(i)_1,\kappa(i)_2,\kappa(i)_3)\in\mathbb{N}^3$, und $\nu(i)$ ergibt sich als Summe $\nu(i)=\sum_{r=1}^{(\kappa(i)_1-1)}m_r+\kappa(i)_2$.

4.4 Der Beweis, daß $B(f)B(g) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$

Im vorletzten Abschnitt haben wir Grenzwerte von gewissen Folgen aus $\text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$ untersucht, und erkannt, daß diese jeweils durch gewisse Elemente aus $\text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$ gegeben sind. Wenn wir nun dieselben Folgen nehmen und zeigen, daß die „Normquadrate" ($\|Folge\ \Omega\|^2_{\mathcal{S}_0}$) dieser Folgen gegen die jeweiligen „Normquadrate" ($\|schwacherLimes\ \Omega\|^2_{\mathcal{S}_0}$) der entprechenden schwachen Limiten konvergieren, so folgt dann, daß die Konvergenzen schon natürlich sind (siehe Gl. (2.10)). Die Tatsache, daß $\text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$ jedoch keine Algebra sein muß, verkompliziert unser Vorgehen:
Wissen wir beispielsweise, daß $:[A_\kappa A_\lambda]:(f) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$, so können wir nicht automatisch schließen, daß $M(f \otimes g)$ aus Gleichung (4.9) schon in $\text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$ ist, wie wir es im Falle von $\text{w-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$ tun konnten.

Die einzelnen Ergebnisse des vorletzten Abschnittes finden sich darüberhinaus als Spezialfälle der in diesem Abschnitt formulierten Aussagen wieder.

Unser Ziel sind die Aussagen Korollar 4.2 (Indices trennen), Korollar 4.4 und Korollar 4.6 (Punkte trennen) sowie Satz 4.8, die die natürlichen Varianten von Satz 4.1, Satz 4.2, Satz 4.3 und Satz 4.4 sind.

Wir nehmen $g^{\mu\nu} : (x,y) \mapsto \eta^{\mu\nu}(x-y)^2 - 2(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu)$ die „Zählerfunktion" und, wie bisher, $h : (x,y) \mapsto (-(x-y)^2)^3$ die „Nennerfunktion" der Zweipunktfunktion $W^{\mu\nu}$. Dann ergibt sich L aus Gleichung (4.2) wegen Lemma 4.1 zu

$$L(F) = \ :[A_\mu A^\mu][A_\nu A^\nu]:(hF) + 4\ :[A_\mu][A_\nu]:(g^{\mu\nu}F), \quad F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}), \quad (4.20)$$

und man weiß, daß der $\langle\,.\,,..\rangle_{\mathcal{S}_0}$-Adjungierte $(L(F))^\star$ existiert und gegeben ist durch $(L(F))^\star = L(\bar{F})$ (siehe Lemma 2.1).

Es seien für $\zeta^{(i)} \in \mathbb{R}^4$, lichtartig und $f^{(i)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $\{\alpha_{kl}^{st(i)} \mid k,l \in \mathbb{N}, s,t > 0\} \subset \mathbb{C}$ so gewählt, daß (4.4) gilt, $i = 1,2,3,\ldots,n$. Für L besagt dann Gleichung (4.5), daß

$$\mathcal{A}(\Phi) \ni L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(i)} f_k \otimes f_l) \xrightarrow{\text{w}} L(f_{[st]}^{(i)}), \quad \text{für } N \to \infty, i = 1,2,3,\ldots,n, \quad (4.21)$$

wobei $f_{[st]}^{(i)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ definiert ist durch $f_{[st]}^{(i)}(x,y) := \frac{1}{s^2}\delta_t(x-y-s\zeta^{(i)})f^{(i)}(x-s\zeta^{(i)})$.

Für $\varphi,\psi \in \mathcal{S}_0$ ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}) \ni F \mapsto \langle\varphi, L(F)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0}$ eine temperierte Distribution, also ist die Abbildung $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}) \times \ldots \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}) \ni (F_1,\ldots,F_n) \mapsto \langle\varphi, L(F_1)\ldots L(F_n)\varphi\rangle_{\mathcal{S}_0}$ partiell stetig, also (weil $\mathscr{S}((\mathbb{R}^{4+4})^n)$ ein nuklearer Raum ist) stetig. Demnach gilt[5]:

$$\underset{N\to\infty}{\text{w-lim}}\, L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(n)} f_k \otimes f_l) \ldots L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(1)} f_k \otimes f_l) = L(f_{[st]}^{(n)}) \ldots L(f_{[st]}^{(1)}). \quad (4.22)$$

[5]Gleichung (4.22) dient zur Vorbereitung auf Korollar 4.1, wir benötigen daher min. $n = 8$.

Korollar 4.1 Sei $m \in \{1,2,3,4\}$ beliebig, $f^{(1)}, \dots, f^{(m)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \underset{N\to\infty}{\text{n-lim}}\, L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(m)} f_k \otimes f_l) \dots L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(1)} f_k \otimes f_l) &= L(f_{[st]}^{(m)}) \dots L(f_{[st]}^{(1)}) \\ &\in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi). \end{aligned}$$

Beweis: Wähle in (4.22) $n = 2m$ und setze $f^{(m+i)} := \overline{f^{(m-i+1)}}$, für $i = 1,2,\dots,m$. Dann ist $\overline{\alpha_{kl}^{st(m+i)}} = \alpha_{kl}^{st(m-i+1)}$ (die f_k sind reell!). Es gilt

$$L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(m)} f_k \otimes f_l) \dots L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(1)} f_k \otimes f_l) \in \mathcal{A}(\Phi),$$

und es ergibt sich für $\varphi = \psi \in \mathcal{S}_0$ mit Hilfe von (4.22):

$$\begin{aligned} & \|L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(m)} f_k \otimes f_l) \dots L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(1)} f_k \otimes f_l)\varphi\|_{\mathcal{S}_0}^2 \\ = \quad & \langle \varphi, L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(2m)} f_k \otimes f_l) \dots L(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{st(1)} f_k \otimes f_l)\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\ \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad & \langle \varphi, L(f_{[st]}^{(2m)}) \dots L(f_{[st]}^{(1)})\psi\rangle_{\mathcal{S}_0} \\ = \quad & \|L(f_{[st]}^{(m)}) \dots L(f_{[st]}^{(1)})\varphi\|_{\mathcal{S}_0}^2 . \end{aligned}$$

Da (4.22) auch im Fall $n = m$ gilt, ist das Korollar bewiesen. ■

Die Gleichungen (4.6), (4.7) besagen

$$L(f_{[st]}) \xrightarrow{\text{w}} -8\zeta^\mu\zeta^\nu :[A_\mu^{(s\zeta)} A_\nu]:(f) \xrightarrow{\text{w}} -8\zeta^\mu\zeta^\nu :[A_\mu A_\nu]:(f), \tag{4.23}$$

für $t \searrow 0, s \searrow 0$.

Satz 4.5 Für[6] $n \in \mathbb{N}$ seien $f^{(1)}, \dots, f^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n)}$ lichtartig und $f_{[st]}^{(1)}, \dots, f_{[st]}^{(n)}$ wie oben, dann gilt:

i)
$$\begin{aligned} \underset{t\searrow 0}{\text{w-lim}}\, L(f_{[st]}^{(n)}) \dots L(f_{[st]}^{(1)}) &= -8\zeta^{(n)\mu_n}\zeta^{(n)\nu_n} :[A_{\mu_n}^{(s\zeta^{(n)})} A_{\nu_n}]:(f^{(n)}) \dots \\ & \dots - 8\zeta^{(1)\mu_1}\zeta^{(1)\nu_1} :[A_{\mu_1}^{(s\zeta^{(1)})} A_{\nu_1}]:(f^{(1)}) \end{aligned} \tag{4.24}$$

ii)
$$\begin{aligned} & \underset{s\searrow 0}{\text{w-lim}} -8\zeta^{(n)\mu_n}\zeta^{(n)\nu_n} :[A_{\mu_n}^{(s\zeta^{(n)})} A_{\nu_n}]:(f^{(n)}) \dots - 8\zeta^{(1)\mu_1}\zeta^{(1)\nu_1} :[A_{\mu_1}^{(s\zeta^{(1)})} A_{\nu_1}]:(f^{(1)}) \\ & = -8\zeta^{(n)\mu_n}\zeta^{(n)\nu_n} :[A_{\mu_n} A_{\nu_n}]:(f^{(n)}) \dots - 8\zeta^{(1)\mu_1}\zeta^{(1)\nu_1} :[A_{\mu_1} A_{\nu_1}]:(f^{(1)}). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Beweis: Der Übersicht halber führen wir den Beweis nur für $n = 2$, der allgemeine Fall beweist sich analog und involviert lediglich umfangreichere Versionen des Wickschen Theorems.

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0$ beliebig, dann folgt mit Benützung von (4.20):

[6] Wir werden Satz 4.5 bis zum Fall $n = 8$ benötigen.

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi, L(f^{(2)}_{[st]})L(f^{(1)}_{[st]})\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \\
= \quad &\langle\varphi,\ {:}[A_\mu A^\mu][A_\nu A^\nu]{:}\,(hf^{(2)}_{[st]})\ \ {:}[A_\kappa A^\kappa][A_\lambda A^\lambda]{:}\,(hf^{(1)}_{[st]})\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.26)\\
+ \quad & 4\ \langle\varphi,\ {:}[A_\mu A^\mu][A_\nu A^\nu]{:}\,(hf^{(2)}_{[st]})\ \ {:}[A_\kappa][A_\lambda]{:}\,(g^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]})\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.27)\\
+ \quad & 4\ \langle\varphi,\ {:}[A_\mu][A_\nu]{:}\,(g^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]})\ \ {:}[A_\kappa A^\kappa][A_\lambda A^\lambda]{:}\,(hf^{(1)}_{[st]})\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.28)\\
+ \quad & 16\ \langle\varphi,\ {:}[A_\mu][A_\nu]{:}\,(g^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]})\ \ {:}[A_\kappa][A_\lambda]{:}\,(g^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]})\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0}. && (4.29)
\end{aligned}$$

Die vier Summanden zerfallen nun nach Lemma 4.11, (in der Notation von Abschnitt 4.3) in eine Summe von Produkten von $(W_{\mu\nu})^{\{i,j\}}$ und regulären Distributionen der Art $((A_\kappa(.)A_\lambda(..)\dots)(\varphi,\psi))^{\{k,l\}}$ so, daß die Faktoren $(W_{\mu\nu})^{\{1,2\}}$ oder $(W_{\mu\nu})^{\{3,4\}}$ nicht auftreten. Nach den Überlegungen aus Abschnitt 4.3, zu den Funktionen ε_t, wissen wir damit, daß, wenn wir $\lim_{t\searrow 0}$ bilden, die drei Terme (4.26), (4.27), (4.28) (wegen $(\zeta)^2 = 0$) verschwinden, und daß von (4.29) (wegen Linearität) nur der Teil mit dem Argument $\gamma^{\mu\nu} f_{[st]} \otimes \gamma^{\kappa\lambda} f_{[st]}$ verschieden von Null bleibt, wobei $\gamma^{\mu\nu}(x,y) := -2(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu)$. Es ergibt sich also, mit dem konkreten Gebrauch von Lemma 4.11:

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi, L(f^{(2)}_{[st]})L(f^{(1)}_{[st]})\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \\
= \quad &\lim_{t\searrow 0} 16\ \langle\varphi,\ {:}[A_\mu][A_\nu]{:}\,(\gamma^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]})\ \ {:}[A_\kappa][A_\lambda]{:}\,(\gamma^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]})\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \\
\overset{Lem.4.11}{=} \quad &\lim_{t\searrow 0} 16 \\
&[\ ((W_{\mu\kappa})^{\{1,3\}}(A_\nu(.)A_\lambda(..)(\varphi,\psi))^{\{2,4\}})(\gamma^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]} \otimes \gamma^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]}) \\
&+((W_{\mu\lambda})^{\{1,4\}}(A_\nu(.)A_\kappa(..)(\varphi,\psi))^{\{2,3\}})(\gamma^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]} \otimes \gamma^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]}) \\
&+((W_{\nu\kappa})^{\{2,3\}}(A_\mu(.)A_\lambda(..)(\varphi,\psi))^{\{1,4\}})(\gamma^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]} \otimes \gamma^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]}) \\
&+((W_{\nu\lambda})^{\{2,4\}}(A_\mu(.)A_\kappa(..)(\varphi,\psi))^{\{1,3\}})(\gamma^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]} \otimes \gamma^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]}) \\
&+((W_{\mu\kappa})^{\{1,3\}}(W_{\nu\lambda})^{\{2,4\}})(\gamma^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]} \otimes \gamma^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]}) \\
&+((W_{\mu\lambda})^{\{1,4\}}(W_{\nu\kappa})^{\{2,3\}})(\gamma^{\mu\nu} f^{(2)}_{[st]} \otimes \gamma^{\kappa\lambda} f^{(1)}_{[st]})\ ] \\
= \quad &16\ (-2)(-2)\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2} s^2\zeta^{(2)\mu}\zeta^{(2)\nu}\ s^2\zeta^{(1)\kappa}\zeta^{(1)\lambda} \\
&[\ ((W^{(s\zeta^{(2)}-s\zeta^{(1)})}_{\mu\kappa})(A_\nu(.)A_\lambda(..)(\varphi,\psi)))(f^{(2)}\otimes f^{(1)}) && (4.30)\\
&+((W^{(s\zeta^{(2)})}_{\mu\lambda})(A_\nu(.)A_\kappa(..+\zeta^{(1)})(\varphi,\psi)))(f^{(2)}\otimes f^{(1)}) && (4.31)\\
&+((W^{(-s\zeta^{(1)})}_{\nu\kappa})(A_\mu(.+s\zeta)A_\lambda(..)(\varphi,\psi)))(f^{(2)}\otimes f^{(1)}) && (4.32)\\
&+((W_{\nu\lambda})(A_\mu(.+s\zeta^{(2)})A_\kappa(..+\zeta^{(1)})(\varphi,\psi)))(f^{(2)}\otimes f^{(1)}) && (4.33)\\
&+(W^{(s\zeta^{(2)}-s\zeta^{(1)})}_{\mu\kappa} W_{\nu\lambda})(f^{(2)}\otimes f^{(1)}) && (4.34)\\
&+(W^{(s\zeta^{(2)})}_{\mu\lambda} W^{(-s\zeta^{(1)})}_{\nu\kappa})(f^{(2)}\otimes f^{(1)})\ ] && (4.35)\\
\overset{Lem.4.6}{=} \quad &(-8)(-8)\ \zeta^{(2)\mu}\zeta^{(2)\nu}\zeta^{(1)\kappa}\zeta^{(1)\lambda} \\
&\langle\varphi,\ {:}[A^{(s\zeta^{(2)})}_\mu A_\nu]{:}\,(f^{(2)})\ \ {:}[A^{(s\zeta^{(1)})}_\kappa A_\lambda]{:}\,(f^{(1)})\psi\rangle_{\mathfrak{s}_0}
\end{aligned}$$

Damit ist i) gezeigt. (Im letzten Schritt muß man, im allgemeinen Fall $n \neq 2$, anstatt Lemma 4.6 natürlich auch Lemma 4.11 bemühen.)

Um nun zu sehen, daß der Grenzprozeß $s \searrow 0$ das Gewünschte leistet, betrachten wir, einen Schritt zurückgewandt, (4.30) bis (4.35). Wenn wir die Ausdrücke durch ihre Fouriertransformierten ausdrücken (im Sinne von $T(f^{(2)} \otimes f^{(1)}) = \hat{T}(\check{f}^{(2)} \otimes \check{f}^{(1)})$), so sind diese gegeben durch (konvergente) Integrale, in denen die Verschiebungen um $s\zeta$ zu Multiplikation mit Exponentialfunktionen $p \mapsto \exp(-is\zeta p)$ werden. Weil aber $\exp(-is\zeta.) \to 1$ punktweise, für $s \searrow 0$, und weil $|\exp(-is\zeta.)| \leq 1$, folgt mit dem Satz von der majorisierenden Konvergenz, daß man den Grenzwert unter dem Integral ausführen darf. Nach Fourierrücktransformation, erhält man deswegen

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\searrow 0}(-8)(-8)\ \zeta^{(2)\mu}\zeta^{(2)\nu}\zeta^{(1)\kappa}\zeta^{(1)\lambda}\langle\varphi,\ :[A_\mu^{(s\zeta^{(2)})}A_\nu]:(f^{(2)})\ \ :[A_\kappa^{(s\zeta^{(1)})}A_\lambda]:(f^{(1)})\psi\rangle_{s_0} \\
= \ &(-8)(-8)\ \zeta^{(2)\mu}\zeta^{(2)\nu}\zeta^{(1)\kappa}\zeta^{(1)\lambda}\langle\varphi,\ :[A_\mu A_\nu]:(f^{(2)})\ \ :[A_\kappa A_\lambda]:(f^{(1)})\psi\rangle_{s_0}
\end{aligned}$$

■

Das folgende Korollar sichert, daß sowohl $M(f \otimes g)$ aus Gleichung (4.9), als auch das Produkt $M(f \otimes g)M(f \otimes g)$ aus n-lim$\,\mathcal{A}(\Phi)$ sind.

Korollar 4.2 Sei $m \in \{1,2,3,4\}$. Seien $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m = 0,1,2,3$, dann gilt:

$$:[A_{\mu_m}A_{\nu_m}]:(f^{(m)}) \ldots\ :[A_{\mu_1}A_{\nu_1}]:(f^{(1)}) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).$$

<u>Beweis:</u> Nimm in Satz 4.5 einmal $n = m$ und einmal $n = 2m$, wobei $f^{(m+i)} := \overline{f^{(m-i+1)}}, i = 1, \ldots, m$, was beweist, daß

$$\begin{aligned}
(-8)\ldots(-8)\ \zeta^{(m)\mu_m}\zeta^{(m)\nu_m}\ldots\zeta^{(1)\mu_1}\zeta^{(1)\nu_1}\ \ :[A_{\mu_m}A_{\nu_m}]:(f^{(m)}) \ldots\ :[A_{\mu_1}A_{\nu_1}]:(f^{(1)}) \\
\in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).
\end{aligned}$$

Nun ist trivialerweise auch

$$\begin{aligned}
\Phi(f^{(m)})\ldots\Phi(f^{(1)}) &= \eta^{\mu_m\nu_m}\ldots\eta^{\mu_1\nu_1}\ \ :[A_{\mu_m}A_{\nu_m}]:(f^{(m)}) \ldots\ :[A_{\mu_1}A_{\nu_1}]:(f^{(1)}) \\
&\in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi),
\end{aligned}$$

so daß sich nach m-maliger Anwendung von Lemma 4.7 ergibt, daß schon

$$:[A_{\mu_m}A_{\nu_m}]:(f^{(m)}) \ldots\ :[A_{\mu_1}A_{\nu_1}]:(f^{(1)}) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi),$$

für alle $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m = 0,1,2,3$. Man beachte, daß hier eingeht, daß n-lim$\,\mathcal{A}(\Phi)$ eine Vektorraumstruktur besitzt (siehe Prop. 2.4). ■

Sind jetzt $E_k = (E_k^{\mu_k\nu_k}), F_k = (F_k^{\mu_k\nu_k})$, für $k = 1,2,3,4$, symmetrische Matrizen, dann setzen wir für $G \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ ($h, g_{\mu\nu}$ wie oben):

$$M_k(G) := E_k^{\mu\nu}F_k^{\kappa\lambda}(\ :[A_\mu A_\nu][A_\kappa A_\lambda]:(hG) + 4\,:[A_\mu][A_\kappa]:(g_{\nu\lambda}G)), \tag{4.36}$$

und aus Korollar 4.2 und Gleichung (4.8) folgt, daß für beliebige $i, j = 1,2,3,4$, und $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ gilt:

$$M_i(f_4 \otimes f_3)M_j(f_2 \otimes f_1) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi),$$

Mit demselben Argument wie für L in (4.22), schließen wir, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt[7]:

$$\underset{N\to\infty}{\text{w-lim}}\, M_n(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{(t)(n)} f_k \otimes f_l) \ldots M_1(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{(t)(1)} f_k \otimes f_l) = M_n(f_{\{t\}}^{(n)}) \ldots M_1(f_{\{t\}}^{(1)}),$$

wobei die Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\alpha_{kl}^{(t)(i)})_{k,l\in\mathbb{N},t>0}$ für $f^{(i)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und lichtartige $\zeta^{(i)}$ so gewählt sind, daß (4.1) gilt, und $f_{\{t\}}^{(i)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ definiert ist durch $f_{\{t\}}^{(i)}(x,y) := \delta_t(x-y-\zeta^{(i)}) f^{(i)}(x-\zeta^{(i)})$, für $i = 1,2,3,4$.

Dies impliziert, analog zu Korollar 4.1:

Korollar 4.3 Seien $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \underset{N\to\infty}{\text{n-lim}}\, M_2(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{(t)(2)} f_k \otimes f_l) M_1(\sum_{kl}^{N} \alpha_{kl}^{(t)(2)} f_k \otimes f_l) &= M_2(f_{\{t\}}^{(2)}) M_1(f_{\{t\}}^{(1)}) \\ &\in \text{n-lim}\, \mathcal{A}(\Phi). \end{aligned}$$

Da M_i gegeben ist durch (4.36), was von gleicher Struktur ist wie L in Gleichung (4.20), erhalten wir den folgenden Satz, dessen Beweis analog ist zu Satz 4.5 für L:

Satz 4.6 Sei[8] $n \in \mathbb{N}$. Seien $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, $\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(n)} \in \mathbb{R}^4$ lichtartig und $f_{\{t\}}^{(1)}, \ldots, f_{\{t\}}^{(n)}$ wie oben, dann gilt:

$$\begin{aligned} \underset{t\searrow 0}{\text{w-lim}}\, M_n(f_{\{t\}}^{(n)}) \ldots M_1(f_{\{t\}}^{(1)}) = -8E_n^{\mu_n\nu_n} F_n^{\kappa_n\lambda_n} \zeta_{\nu_n}^{(n)} \zeta_{\lambda_n}^{(n)} :[A_{\mu_n}^{(\zeta^{(n)})} A_{\kappa_n}]:(f^{(n)}) \ldots \\ \ldots - 8E_1^{\mu_1\nu_1} F_1^{\kappa_1\lambda_1} \zeta_{\nu_1}^{(1)} \zeta_{\lambda_1}^{(1)} :[A_{\mu_1}^{(\zeta^{(1)})} A_{\kappa_1}]:(f^{(1)}). \end{aligned}$$

Aus diesem Satz folgt wie in Korollar 4.2, mit der zweimaligen Hilfe von Lemma 4.8:

Korollar 4.4 Seien $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, $\mu_1, \kappa_1, \mu_2, \kappa_2 = 0,1,2,3$, und $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \in \mathbb{R}^4$, mit $(\zeta^{(1)})^2 = (\zeta^{(2)})^2 = 0$, dann gilt:

$$:[A_{\mu_2}^{(\zeta^{(2)})} A_{\kappa_2}]:(f^{(2)}) \;\; :[A_{\mu_1}^{(\zeta^{(1)})} A_{\kappa_1}]:(f^{(1)}) \in \text{n-lim}\, \mathcal{A}(\Phi).$$

Mit diesem Ergebnis können wir jetzt aus Gleichung (4.11) schließen, daß für lichtartige $\xi \in \mathbb{R}^4$ auch schon $N^{(\xi)}(f \otimes g)$, aus Gleichung (4.12), in n-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ ist. Man beachte, daß man sich für diesen Schluß auf den Fall $\zeta^{(1)} = 0$ beschränken kann. Also ist auch die natürlich Approximation von $N^{(\xi)}(f \otimes g)$ mit sechster Potenz von Feldoperatoren in Φ möglich.

Die schwache Konvergenz

$$\underset{R\to\infty}{\text{w-lim}}\, N^{(\xi)}(\sum_{kl}^{R} \alpha_{kl}^{(t)(1)} f_k \otimes f_l) = N^{(\xi)}(f_{\{t\}}^{(1)})$$

[7] Für Korollar 4.3 benötigen wir nur die Fälle $n = 2$ und $n = 4$.
[8] Für Korollar 4.4 benötigen wir nur die Fälle $n = 2$ und $n = 4$.

haben wir bereits in (4.14) gesehen. Mit dem gleichen Nuklearitätsargument wie für L erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
& \underset{R\to\infty}{\text{w-lim}}\, N^{(\xi)}(\sum_{kl}^{R} \alpha_{kl}^{(t)(2)} f_k \otimes f_l) N^{(\xi)}(\sum_{kl}^{R} \alpha_{kl}^{(t)(1)} f_k \otimes f_l) \\
= \;& N^{(\xi)}(f_{\{t\}}^{(2)}) N^{(\xi)}(f_{\{t\}}^{(1)}),
\end{aligned}$$

wobei die Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\alpha_{kl}^{(t)(i)})_{k,l\in\mathbb{N},t>0}$ für $f^{(i)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und lichtartige $\zeta^{(i)}$ so gewählt sind, daß (4.1) gilt, und $f_{\{t\}}^{(i)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ wie oben definiert ist durch $f_{\{t\}}^{(i)}(x,y) := \delta_t(x-y-\zeta^{(i)}) f^{(i)}(x-\zeta^{(i)})$, für $i = 1,2$.

Man kann also wie Korollar 4.1 folgern:

Korollar 4.5 Sei $f^{(1)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, dann gilt für lichtartiges $\xi \in \mathbb{R}^4$:

$$\underset{R\to\infty}{\text{n-lim}}\, N^{(\xi)}(\sum_{kl}^{R} \alpha_{kl}^{(t)(1)} f_k \otimes f_l) = N^{(\xi)}(f_{\{t\}}^{(1)}) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).$$

Weil die Struktur von $N^{(\xi)}$ dieselbe ist wie die von L, folgt auch, wie in Satz 4.5, daß nach dem Grenzübergang $t \searrow 0$ nur die dritten Terme in $N^{(\xi)}$ gemäß (4.12) von Null verschieden bleiben:

Satz 4.7 Seien $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \in \mathbb{R}^4$ lichtartig und dazu $f_{\{t\}}^{(1)}, f_{\{t\}}^{(2)}$ wie oben, dann gilt für lichtartiges ξ

$$\begin{aligned}
& \underset{t\searrow 0}{\text{w-lim}}\, N^{(\xi)}(f_{\{t\}}^{(2)}) N^{(\xi)}(f_{\{t\}}^{(1)}) \\
= \;& 2E^{\mu_2\nu_2}F^{\kappa_2\lambda_2}(-2)\zeta_{\nu_2}^{(2)}\zeta_{\lambda_2}^{(2)}\,(-(\zeta^{(2)}+\xi)^2)^3 \,{:}[A_{\mu_2}^{(\zeta^{(2)}+\xi)} A_{\kappa_2}]{:}\,(f^{(2)}) \\
& \cdot\, 2E^{\mu_1\nu_1}F^{\kappa_1\lambda_1}(-2)\zeta_{\nu_1}^{(1)}\zeta_{\lambda_1}^{(1)}(-(\zeta^{(1)}+\xi)^2)^3 \,{:}[A_{\mu_1}^{(\zeta^{(1)}+\xi)} A_{\kappa_1}]{:}\,(f^{(1)}).
\end{aligned}$$

Aus diesem Satz ergibt sich das folgende Korollar. Wir nutzen wieder Lemma 4.8, und daß $(-(\zeta+\xi)^2)^3 = -8(\zeta\xi)^3$ gilt:

Korollar 4.6 Es seien $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ und $u \in \mathbb{R}^4$ beliebig gewählt, dann gilt für $\mu, \kappa = 0,1,2,3$:

$${:}[A_\mu^{(u)} A_\kappa]{:}\,(f) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).$$

Beweis: Für lichtartige u erhält man die Aussage aus Satz 4.6 für den Fall $n = 2$ mit $f^{(2)} := \bar{f}$ und $f^{(1)} := f$ (vgl. Korollar 4.4).

Sei jetzt $u \in \mathbb{R}^4$ mit $(u)^2 \neq 0$, dann seien $\zeta, \xi \in \mathbb{R}^4$, so daß $(\zeta)^2 = (\xi)^2 = 0, \zeta\xi \neq 0$ und $u = \zeta + \xi$.

In Satz 4.7 wählen wir $f^{(2)} = \bar{f}, f^{(1)} = f$, $\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta$, woraus sich zusammen mit der schwachen Konvergenz aus Gleichung (4.15) unmittelbar ergibt, daß

$$\underset{t\searrow 0}{\text{n-lim}}\, N^{(\xi)}(f_{\{t\}}) = 2E^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}(-2)\zeta_\nu\zeta_\lambda\,(-(\zeta+\xi)^2)^3 \,{:}[A_\mu^{(\zeta+\xi)} A_\kappa]{:}\,(f) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi),$$

so daß wir aus Lemma 4.8 und $\zeta\xi \neq 0$ schließen können, daß bereits

$${:}[A_\mu^{(\zeta+\xi)} A_\kappa]{:}\,(f) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi), \quad \text{für alle } \mu, \kappa = 0,1,2,3.$$

■

Mit diesem Ergebnis werden wir nun zeigen, daß das Skalarfeld Φ nicht positiv ist.

Satz 4.8 Es seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$. Dann gilt

$$B(f)B(g) \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi). \tag{4.37}$$

Beweis: Wir zeigen, daß die im Beweis von Satz 4.4 betrachtete Folge bereits natürlich gegen $:B(f)B(g):$ konvergiert.

Wähle eine Folge $(y_{ik})_{i,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^4$, in geeigneter Weise, als ein mit k immer feiner und größer werdendes Gitter und eine Folge $(\Delta_{ik})_{i,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ als geeignete Gewichte, so daß für stetige (und integrierbare) $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=0}^{k} F(y_{ik}, y_{jk}) \Delta_{ik} \Delta_{jk} = \int F(y,z)\ d(y,z).$$

Weil $\{x \mapsto f^\mu(x+y) g^\nu(x)\} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ ist, wissen wir aus Korollar 4.6, daß wegen der Vektorraumstruktur von $\text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi)$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{k} :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\kappa]:(f^\mu(\,.+y_{ik}) g^\kappa(\,.\,)) \Delta_{ik} \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).$$

Man erhält nun für $\varphi \in \mathcal{S}_0$:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=0}^{k} :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\kappa]:(f^\mu(.+y_{ik}) g^\kappa(.)) \Delta_{ik} \varphi \right\|_{\mathcal{S}_0}^2 \\
= \quad & \sum_{i,j=0}^{k} \Delta_{ik} \Delta_{jk} \\
& \langle\ :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\nu]:(f^\mu(.+y_{ik}) g^\nu(.))\varphi,\ :[A_\kappa^{(y_{jk})} A_\lambda]:(f^\kappa(.+y_{jk}) g^\lambda(.))\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0} \\
=: \quad & \clubsuit_k .
\end{aligned}$$

Betrachten wir für $\varphi \in \mathcal{S}_0$ die Abbildung

$$(y,z) \mapsto \langle\ :[A_\mu^{(y)} A_\nu]:(f^\mu(.+y) g^\nu(.))\varphi,\ :[A_\kappa^{(z)} A_\lambda]:(f^\kappa(.+z) g^\lambda(.))\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0}. \tag{4.38}$$

Diese Abbildung ist für festes y bzw. z in der jeweils anderen Variablen eine Schwartzfunktion (wie im Beweis von Satz 4.4 beobachtet). Wir zeigen nun, daß sie stetig und integrierbar ist, sogar daß sie aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ ist. Wir nehmen erneut das Wicksche Theorem zur Hilfe:

$$\begin{aligned}
\clubsuit_k = \quad & \sum_{i,j=0}^{k} \Delta_{ik}\Delta_{jk} \\
& \langle\varphi,\ :[A_\mu^{(y_{ik})}A_\nu]:(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.))\ \ :[A_\kappa^{(y_{jk})}A_\lambda]:(f^\kappa(.+y_{jk})g^\lambda(.))\varphi\rangle_{\mathfrak{s}_0} \\
\overset{Lem.4.6}{=} \quad & \sum_{i,j=0}^{k} \Delta_{ik}\Delta_{jk} \\
& [\ \langle\varphi,\ :[A_\mu^{(y_{ik})}A_\nu][A_\kappa^{(y_{jk})}A_\lambda]:(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)\otimes f^\kappa(.+y_{jk})g^\lambda(.))\varphi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.39)\\
& +\langle\varphi,(\ :[A_\mu^{(y_{ik})}][A_\kappa^{(y_{jk})}]:W_{\nu\lambda})(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)\otimes f^\kappa(.+y_{jk})g^\lambda(.))\varphi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.40)\\
& +\langle\varphi,(\ :[A_\mu^{(y_{ik})}][A_\lambda]:W_{\nu\kappa}^{(-y_{jk})})(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)\otimes f^\kappa(.+y_{jk})g^\lambda(.))\varphi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.41)\\
& +\langle\varphi,(\ :[A_\nu][A_\kappa^{(y_{jk})}]:W_{\mu\lambda}^{(y_{ik})})(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)\otimes f^\kappa(.+y_{jk})g^\lambda(.))\varphi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.42)\\
& +\langle\varphi,(\ :[A_\nu][A_\lambda]:W_{\mu\kappa}^{(y_{ik}-y_{jk})})(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)\otimes f^\kappa(.+y_{jk})g^\lambda(.))\varphi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.43)\\
& +(W_{\mu\kappa}^{(y_{ik}-y_{jk})}W_{\nu\lambda})(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)\otimes f^\kappa(.+y_{jk})g^\lambda(.))\ \langle\varphi,\varphi\rangle_{\mathfrak{s}_0} && (4.44)\\
& +(W_{\mu\lambda}^{(y_{ik})}W_{\nu\kappa}^{(-y_{jk})})(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)\otimes f^\kappa(.+y_{jk})g^\lambda(.))\ \langle\varphi,\varphi\rangle_{\mathfrak{s}_0}\ ]. && (4.45)
\end{aligned}$$

Die Terme (4.39) bis (4.45) besprechen wir nun gesondert, und zeigen jeweils, daß sie einzeln Elemente aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ definieren:

$$\begin{aligned}
(4.39) \quad = \quad & \int A_\mu(x+y_{ik})A_\nu(x)A_\kappa(\xi+y_{jk})A_\lambda(\xi)(\varphi,\varphi) \\
& \qquad\qquad \bar f^\mu(x+y_{ik})\bar g^\nu(x)f^\kappa(\xi+y_{jk})g^\lambda(\xi)\ d(x,\xi),
\end{aligned}$$

und die Funktion

$$\begin{aligned}
(y,z) \quad \mapsto \quad & \int A_\mu(x+y)A_\nu(x)A_\kappa(\xi+z)A_\lambda(\xi)(\varphi,\varphi) \\
& \qquad\qquad \bar f^\mu(x+y)\bar g^\nu(x)f^\kappa(\xi+z)g^\lambda(\xi)\ d(x,\xi)
\end{aligned}$$

ist aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$, denn ist $\gamma : (\mathbb{R}^4)^4 \ni (x,\xi,y,z) \mapsto (x+y,x,\xi+z,\xi) \in (\mathbb{R}^4)^4$, so ist

$$\begin{aligned}
\gamma^* : \mathscr{S}((\mathbb{R}^4)^4) \quad & \to \quad \mathscr{S}((\mathbb{R}^4)^4) \\
F \quad & \mapsto \quad F\circ\gamma
\end{aligned}$$

stetig, und es ist

$$\{\ (y,z) \mapsto \int (\gamma^*F)(x,\xi,y,z)\ d(x,\xi)\ \}\ \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}).$$

Setzt man $F(x,\xi,y,z) := A_\mu(x)A_\nu(\xi)A_\kappa(y)A_\lambda(\xi)(\varphi,\varphi)\bar f^\mu(x)\bar g^\nu(\xi)f^\kappa(y)g^\lambda(z)$, so folgt die Behauptung.

Die Terme (4.40) bis (4.43) lassen sich ebenso behandeln, exemplarisch nehmen wir

$$\begin{aligned}
(4.41) \quad = \quad & W_{\nu\kappa}^{(-y_{jk})}(A_\mu(.+y_{ik})A_\lambda(..)(\varphi,\varphi)(\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)f^\kappa(..+y_{jk})g^\lambda(..))) \\
= \quad & W_{\nu\kappa}((A_\mu(.+y_{ik})A_\lambda(..-y_{jk})(\varphi,\varphi))\bar f^\mu(.+y_{ik})\bar g^\nu(.)f^\kappa(..)g^\lambda(..-y_{jk}))
\end{aligned}$$

Dazu sei jetzt $\gamma : (\mathbb{R}^4)^4 \ni (x,\xi,y,z) \mapsto (x+y, x, \xi, \xi - z) \in (\mathbb{R}^4)^4$, dann ist

$$\begin{array}{rcl} \gamma^* : \mathscr{S}((\mathbb{R}^4)^4) & \to & \mathscr{S}((\mathbb{R}^4)^4) \\ F & \mapsto & F \circ \gamma \end{array}$$

stetig, und die Abbildung

$$(y,z) \mapsto W_{\nu\kappa}((\gamma^* F)(\ .\ ,\ ..\ , y, z))$$

ist aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$. Wählt man $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ als

$$(x,\xi,y,z) \mapsto (A_\mu(x) A_\lambda(z)(\varphi,\varphi)) \bar{f}^\mu(x) \bar{g}^\nu(\xi) f^\kappa(y) g^\lambda(z),$$

so folgt die Behauptung für (4.41) und analog, mit entsprechend modifizierten γ, für (4.40) bis (4.43).

Die Terme (4.44) und (4.45) behandeln wir mittels ihrer Fouriertransformierten. Dazu seien $H^{\mu\kappa\nu\lambda}, G^{\mu\kappa\nu\lambda} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4} \times \mathbb{R}^{4+4})$ definiert durch $H^{\mu\kappa\nu\lambda}(x,\xi,y,z) := \bar{f}^\mu(x+y)\bar{g}^\nu(x) f^\kappa(\xi+z) g^\lambda(\xi)$ und

$$G^{\mu\kappa\nu\lambda}(p,q,y,z) := \frac{1}{(2\pi)^4} \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{S}_0} \int H^{\mu\kappa\nu\lambda}(x,\xi,y,z) \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-iq\xi}}{(2\pi)^2}\ d(x,\xi).$$

Dann ist

$$\begin{array}{rcl} (4.44) & = & (W_{\mu\kappa}^{(y_{ik}-y_{jk})} W_{\nu\lambda})(H^{\mu\kappa\nu\lambda}(\ .\ ,\ ..\ , y_{ik}, y_{jk}) \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{S}_0} \\ & = & (\hat{W}_{\mu\kappa}^{(y_{ik}-y_{jk})} * \hat{W}_{\nu\lambda})(G^{\mu\kappa\nu\lambda}(\ .\ ,\ ..\ , y_{ik}, y_{jk}) \\ & = & \displaystyle\int\int G^{\mu\kappa\nu\lambda}(u+v, -u-v, y_{ik}, y_{jk}) e^{-iu(y_{ik}-y_{jk})}\ d\omega_{\mu\kappa}(u)\ d\omega_{\nu\lambda}(v), \end{array}$$

und die Funktion

$$(y,z) \mapsto \int\int G^{\mu\kappa\nu\lambda}(u+v, -u-v, y, z) e^{-iu(y-z)}\ d\omega_{\mu\kappa}(u)\ d\omega_{\nu\lambda}(v)$$

ist aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$. Das gleiche Argument findet man für (4.45).

Insgesamt ist also die in (4.38) definierte Funktion aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$, und es gilt somit:

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{k\to\infty} \clubsuit_k & = & \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i,j=0}^{k} \Delta_{ik}\Delta_{jk} \\ & & \langle\ :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\nu]: (f^\mu(.+y_{ik}) g^\nu(.))\varphi,\ :[A_\kappa^{(y_{jk})} A_\lambda]: (f^\kappa(.+y_{jk}) g^\lambda(.))\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0} \\ & = & \displaystyle\int \langle\ :[A_\mu^{(y)} A_\nu]: (f^\mu(.+y) g^\nu(.))\varphi,\ :[A_\kappa^{(z)} A_\lambda]: (f^\kappa(.+z) g^\lambda(.))\varphi \rangle_{\mathcal{S}_0}\ d(y,z) \\ & =: & \spadesuit. \end{array}$$

Zur Abkürzung schreiben wir nun

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}(y) & := & :[A_\mu^{(y)} A_\nu]: (f^\mu(.+y) g^\nu(.))\varphi \in \mathcal{S}_0, \\ \breve{\varphi} & := & :B(f)B(g): \varphi \in \mathcal{S}_0, \end{array}$$

dann ergibt sich mit wiederholtem Gebrauch von Fubini:

$$
\begin{aligned}
\spadesuit \quad &= \int\!\!\int \langle \tilde{\varphi}(y),\ :[A_\kappa^{(z)} A_\lambda]: (f^\kappa(. + z) g^\lambda(.))\varphi\rangle_{\mathbb{S}_0}\ dz\ dy \\
&= \int\!\!\int\!\!\int A_\kappa(\xi + z) A_\lambda(\xi) (\tilde{\varphi}(y), \varphi) f^\kappa(\xi + z) g^\lambda(\xi)\ d\xi\ dz\ dy \\
&= \int\!\!\int\!\!\int A_\kappa(\xi + z) A_\lambda(\xi) (\tilde{\varphi}(y), \varphi) f^\kappa(\xi + z) g^\lambda(x)\ dz\ d\xi\ dy \\
&= \int\!\!\int\!\!\int A_\kappa(z') A_\lambda(\xi) (\tilde{\varphi}(y), \varphi) f^\kappa(z') g^\lambda(\xi)\ dz'\ d\xi\ dy \\
&= \int \langle \tilde{\varphi}(y),\ :[A_\kappa][A_\lambda]: (f^\kappa \otimes g^\lambda)\varphi\rangle_{\mathbb{S}_0} dy \\
&= \int \langle \tilde{\varphi}(y),\ :B(f)B(g):\ \varphi\rangle_{\mathbb{S}_0} dy \\
&= \overline{\int \langle \check{\varphi},\ :[A_\mu^{(y)} A_\nu]: (f^\mu(. + y) g^\nu(.))\varphi\rangle_{\mathbb{S}_0}\ dy} \\
&= \overline{\int\!\!\int A_\mu(x + y) A_\nu(x) (\check{\varphi}, \varphi) f^\mu(x + y) g^\nu(x)\ dx\ dy} \\
&= \overline{\int\!\!\int A_\mu(x + y) A_\nu(x) (\check{\varphi}, \varphi) f^\mu(x + y) g^\nu(x)\ dy\ dx} \\
&= \overline{\int\!\!\int A_\mu(y') A_\nu(x) (\check{\varphi}, \varphi) f^\mu(y') g^\nu(x)\ dy'\ dx} \\
&= \overline{\langle \check{\varphi},\ :[A_\mu][A_\nu]: (f^\mu \otimes g^\nu)\varphi\rangle_{\mathbb{S}_0}} \\
&= \overline{\langle\ :B(f)B(g):\ \varphi,\ :B(f)B(g)\varphi:\ \rangle_{\mathbb{S}_0}} \\
&= \|\ :B(f)B(g):\ \varphi\|^2_{\mathbb{S}_0}.
\end{aligned}
$$

Da wir im Beweis von Satz 4.4 bereits gesehen haben, daß

$$
\underset{k\to\infty}{\text{w-lim}} \sum_{i=0}^{k}\ :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\kappa]: (f^\mu(\ . + y_{ik}) g^\kappa(\ .\ ))\Delta_{ik} = :B(f)B(g):\ ,
$$

ist somit gezeigt, daß

$$
\underset{k\to\infty}{\text{n-lim}} \sum_{i=0}^{k}\ :[A_\mu^{(y_{ik})} A_\kappa]: (f^\mu(\ . + y_{ik}) g^\kappa(\ .\ ))\Delta_{ik} = :B(f)B(g): \in \text{n-lim}\,\mathcal{A}(\Phi).
$$

Weil n-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ unter Addition abgeschlossen ist, folgt so, daß für alle $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ auch

$$
B(f)B(g) = :B(f)B(g): + W_{\mu\nu}(f^\mu \otimes g^\nu)\ \mathbf{1}
$$

in n-lim $\mathcal{A}(\Phi)$ liegt. ■

Dieser Satz sagt also, daß es für beliebige $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\Phi)$ gibt, so daß

$$
\lim_{n\to\infty} \|\phi_n\Omega\|^2_{\mathbb{S}_0} = \|B(f)B(g)\Omega\|^2_{\mathbb{S}_0}.
$$

Aus Lemma 2.4 wissen wir aber, daß man f und g so wählen kann, daß die rechte Seite kleiner Null ist, deswegen gibt es bereits ein $\phi_m \in \mathcal{A}(\Phi)$ so daß $\|\phi_m\Omega\|^2_{\mathbb{S}_0} < 0$. Damit ist also das Skalarfeld Φ nicht positiv.

4.5 Abschließende Bemerkungen

Wir haben in den vorigen Abschnitten gesehen, daß das normalgeordnete Skalarfeld Φ die Positivitätsbedingung aus Definiton 2.14 nicht erfüllt, also nicht positiv ist. Wir haben dabei ganz explizit mit den Opratoren $\Phi(f)$, $:[A_\mu A_\nu]:(f), \ldots$ gearbeitet.

Wie aber äußert sich die Verletzung der Positivität in den n-Punkt-Funktionen

$$W_{\Phi,n} : (f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) \mapsto \langle \Omega, \Phi(f_1) \ldots \Phi(f_n)\Omega \rangle_{\mathcal{S}_0}$$

des Feldes?

Betrachten wir dazu die einzelnen Schritte des letzten Abschnittes: $B(f)B(g)$ bzw. $\|B(f)B(g)\Omega\|^2_{\mathcal{S}_0}$ haben wir durch Operatoren $:[A^{(u)}_\mu A_\nu]:(f)$ und diese durch $N^{(\xi)}(f \otimes g)$ geeignet approximiert. Für $N^{(\xi)}(f \otimes g)$ benötigten wir jedoch ein Produkt von den Operatoren $M(f \otimes g)$ und $L(f \otimes g)$ (Gleichung (4.11)). Für ein solches Produkt wiederum benötigten wir eine dritte Potenz in den Operatoren $L(f \otimes g)$, da M in L quadratisch ist:

$$LLL \rightsquigarrow ML \rightsquigarrow N^{(\xi)} \rightsquigarrow :[A^{(u)}_\mu A_\nu]: \rightsquigarrow BB.$$

Da die Operatoren $L(f \otimes g)$ selber quadratisch in Φ sind, heißt das, daß man eine sechste Potenz des Feldes Φ benötigt, um $B(f)B(g)$ (natürlich) zu approximieren.

Eine Verletzung der Wightmanpositivität erhält man (wegen des nötigen Normbildens) also wird spätestens auf dem Niveau der Zwölfpunktfunktion, d.h. ist $f_0 \in \mathbb{C}$ und sind $f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$, für n=1,...,6, so ist die Bedingung

$$\sum_{m,n=0}^{6} W_{\Phi,n+m}(\tilde{f}_n \otimes f_m) \geq 0$$

nicht für jede Wahl von $f_0, \ldots, f_6$ erfüllt; es ist $\tilde{f}_n(x_1, \ldots, x_n) := \overline{f_n(x_n, \ldots, x_1)}$ gesetzt.

Für unser Vorgehen war wesentlich, daß man durch Multiplikation der Zweipunktfunktion $w_{\mu\nu}$ mit dem Polynom $h : (x, y) \mapsto (-(x-y)^2)^3$ eine reguläre Distribution erhält,

$$W_{\mu\nu}(hf) = \int (\eta_{\mu\nu}(x-y)^2 - 2(x_\mu - y_\mu)(x_\nu - y\nu))f(x,y)\, dx,$$

die wir dann auf lichtartige Ebenen $(x-y)^2 = 0$ einschränken konnten. Daß dabei das gerade das Polynom h auftrat, lag an der Wahl der Skalendimension $\delta = 2$, denn der Nenner von $W_{\mu\nu}$ ist ja gerade durch $(-(x^0-y^0-it)^2+|\vec{x}-\vec{y}|^2)^{\delta+1}$ gegeben.

Man sieht nun unmittelbar ein, daß die gemachten Schritte alle ihre Gültigkeit behalten, wenn man statt $\delta = 2$ die (a priori positiv definiten) Fälle $\delta = 3, 4, 5, \ldots$ betrachtet. Es gilt also insbesondere, wie bereits am Ende von Abschnitt 4.2 bemerkt, die Gleichheit der Algebren

$$\text{w-lim}\, \mathcal{A}(B(.)B(..)) = \text{w-lim}\, \mathcal{A}(\Phi)$$

für alle $\delta = 2, 3, 4, 5, \ldots$. In [LS] ist dieses Resultat für das freie skalare Feld mit Masse m gezeigt; die dabei betrachteten Grenzwerte in lichtartiger Richtung sind in gewisser Weise in einer konform kovarianten Theorie äquivalent zu den hier vorgenommenen Limiten $(x-y)^2 \to 0$. (In einer konform kovarianten Theorie auf dem kompaktifizierten Minkowskiraum $\overline{\mathbb{R}^4}$ hat man kein lichtartiges Unendlich.)

Wollen wir unser Vorgehen nun auch für nicht ganzzahlige Skalendimensionen δ anwenden, etwa für $\delta \in (2,3)$, so findet man zwar auch ein Analogon zu Lemma 4.1, nämlich daß

$$\begin{aligned} &\lim_{t \searrow 0} \int \frac{\eta_{\mu\nu}(x)^2 - 2x_\mu x_\nu}{(-(x^0 - it)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta+1}} (-(x^0)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta+1} f(x)\ dx \\ = &\int (\eta_{\mu\nu}(x)^2 - 2x_\mu x_\nu) f(x)\ dx, \quad \text{für } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4) \end{aligned}$$

gilt. Weil aber $x \mapsto (-(x)^2)^{\delta+1} f(x)$ nicht beliebig differenzierbar ist, für $\delta > 2$, also keine Testfunktion ist, muß man technisch etwas mehr Arbeit leisten, um die jeweiligen Resultate auch für nicht ganzzahlige Skalendimension zu erhalten:

Ein Blick auf Gleichung (4.2) zeigt, was man beachten muß, denn ist $h_\delta(x,y) := (-(x-y)^2)^{\delta+1}$, so ist $:[A_\mu A^\mu][A_\nu A^\nu]:(h_\delta\ f \otimes g)$ in zweierlei Hinsicht zunächst nicht wohldefiniert. Erstens ist $:[A_\mu A^\mu][A_\nu A^\nu]:(F)$ als schwaches Integral zunächst nur für $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$ definiert. Dies ist an sich kein Problem, da das Integral

$$\int A_\mu(x) A^\mu(x) A_\nu(y) A^\nu(y)(\varphi, \psi) F(x,y)\ d(x,y), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}_0,$$

auch für $F = h_\delta f \otimes g$ existiert. Problematischer ist nun das zweite, damit verknüpfte Problem, daß dieses Integral für $F = h_\delta f \otimes g$ kein Skalarprodukt $\langle \varphi, \psi' \rangle_{\mathcal{S}_0}$ von φ mit einem $\psi' \in \mathcal{S}_0$ ist! („Die Operatoren erzeugen das, was man ihnen einsetz.")

Ein naheliegender Ausweg an dieser Stelle ist, auf den, in Kapitel 3 konstruierten, größeren Raum $\mathcal{K}_0 \hookleftarrow \mathcal{S}_0$ zurückzugreifen und den Formalismus geeignet, auf einen größeren Testfunktionenraum $\mathscr{F} \ni h_\delta f \otimes g$ sowie einen größeren, gemeinsamen, invarianten Definitionsbereich $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{K}_0$ der Operatoren, zu erweitern:

$$\mathscr{F} \ni F \mapsto :[A_\mu \ldots][\ldots]:(F) : (\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{K}_0) \to (\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{K}_0).$$

Es zeigt sich dann, daß sich die Resultate analog übertragen lassen; wir führen die Einzelheiten nicht weiter auf.

Insbesondere ist daher das normalgeordnete, skalare Quantenfeld Φ für alle $\delta \in [2,3)$ indefinit.

Anhang A

Zur Zweipunktfunktion

In [Ma] werden alle irreduziblen, unitären Darstellungen der Überlagerungsgruppe $\tilde{G}$ der konformen Gruppe G auf dem kompaktifizierten Minkowskiraum $\overline{\mathbb{R}^4}$ mit positiver Energie angegeben. Positive Energie bedeutet, daß das gemeinsame Spektrum der Generatoren der Untergruppe der Translationen in $\overline{V}_+$ liegt. Diese Darstellungen sind durch ein Tripel (δ, j_1, j_2) charakterisiert. δ ist die sog. Skalendimension[1], und (j_1, j_2), mit $j_1, j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$, korrespondiert mit der Spinordarstellung der Überlagerungsgruppe der Lorentzgruppe $SL(2, \mathbb{C}) \subset \tilde{G}$.

Die Wahl der Skalendimension ist nicht willkürlich, sondern ist, in Abhängigkeit von (j_1, j_2), nach unten beschränkt. Diese Bedingung (Unitaritätsschranke) ergibt sich aus der Bedingung der Positivität der zugrunde liegenden konform invarianten Sesquilinearform (Hilbertraumstruktur). Im Falle von $j_1, j_2 > 0$ muß etwa $\delta \geq j_1 + j_2 + 2$ erfüllt sein. Für die Vektordarstellung, d.h. $(j_1, j_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, zeigen wir in Lemma A.1 explizit, daß die Positivität für $\delta \in [2, 3)$ verletzt und für $\delta \geq 3$ erfüllt ist.

Der Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{H}})$ der Darstellung (δ, j_1, j_2) besteht aus Äquivalenzklassen von Funktionen auf $\overline{\mathbb{R}^4}$ mit Werten im $(2j_1+1)(2j_2+1)$-dimensionalen Darstellungsraum E von $SL(2, \mathbb{C})$, d.h.

$$E \quad = \quad (\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{2j_1\text{-mal}})^{sym} \otimes (\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{2j_2\text{-mal}})^{sym}.$$

Es gibt eine dichte Abbildung $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E) \to \mathcal{H}$ (tatsächlich wird $\mathcal{H}$ aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E)$ konstruiert), und die Einschränkung von $\langle . \, , .. \rangle_{\mathcal{H}}$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E)$ ist gegeben durch[2]

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int \langle f(x), (\Delta * g)(x) \rangle_E \; dx \tag{A.1}$$

mit $(\Delta * g)(x) := \Delta(g(x - .))$ und $\Delta : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, E) \to E$ gegeben durch

$$\Delta(g) = \lim_{t \searrow 0} \int \frac{i^{2j_1 + 2j_2}}{(-(x^0 - it)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta + j_1 + j_2}} D(\tilde{x}) g(x) \; dx. \tag{A.2}$$

[1] In [Ma] wird für die Skalendimension die Bezeichnung d statt δ verwendet.

[2] Die Gleichungen (A.1) und (A.2) sind in [Ma] die Gleichungen (6.23) und (6.22) in leicht anderer Notation und ohne den in (6.22) auftretenden Normierungsfaktor, den wir hier ignorieren.

Darin ist $\tilde{x} := x^0\sigma_0 - x^1\sigma_1 - x^2\sigma_2 - x^3\sigma_3 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit den Paulimatrizen

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und $\mathbb{C}^{2\times 2} \ni M \mapsto D(M) : E \to E$ gegeben durch

$$\begin{aligned} D(M) : E \quad \ni \quad & \sum_{\alpha \in R} c_\alpha \, (e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_{2j_1}}) \otimes (e_{\alpha_{2j_1+1}} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_{2j_1+2j_2}}) \\ \mapsto \quad & \sum_{\alpha \in R} c_\alpha \, (M e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes M e_{\alpha_{2j_1}}) \otimes (\overline{M} e_{\alpha_{2j_1+1}} \otimes \ldots \otimes \overline{M} e_{\alpha_{2j_1+2j_2}}), \end{aligned}$$

mit $R := \{1,2\}^{2j_1+2j_2}, e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beschränken wir uns von nun an ausschließlich auf die Darstellung $(j_1, j_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, was bedeutet, daß $E = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ gilt. Wir wollen jetzt die Gleichungen (A.1) und (A.2) im Hinblick auf die Vektordarstellung der $SL(2,\mathbb{C})$, d.h. $SL(2,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \Lambda(A) : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, mit der zu A gehörenden Lorentztransformation $\Lambda(A)$, in eine etwas andere Form bringen, die den Namen Vektordarstellung für die Konforme Gruppe rechtfertigt:

Wir definieren einen unitären Isomorphismus $\phi : E \to \mathbb{C}^4$, indem wir die folgenden Zuordnungen von Basisvektoren machen[3] :

$$u_{0,0} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \quad \overset{\phi}{\longmapsto} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{1,1} := e_1 \otimes e_2 \overset{\phi}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_{1,0} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) \quad \overset{\phi}{\longmapsto} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_{1,-1} := e_2 \otimes e_1 \overset{\phi}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir ein $v = (v^\mu)_{\mu=0,\ldots,3} \in \mathbb{C}^4$, so finden wir in dieser Basis die Zerlegung[4]

$$v = v^0\phi(u_{0,0}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(v^1 - iv^2)\phi(u_{1,1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(v^1 + iv^2)\phi(u_{1,-1}) + v^3\phi(u_{1,0}).$$

Berechnet man nun schrittweise $\phi^{-1}(v)$, $D(\tilde{x})(\phi^{-1}(v))$ und $\phi(D(\tilde{x})\phi^{-1}(v))$ so ergibt sich nach elementarer Rechnung

$$\phi\big(D(\tilde{x})(\phi^{-1}(v))\big) = K(x)v \in \mathbb{C}^4,$$

mit der Matrix

$$K(x) := \big(-\eta_{\mu\nu}(x)^2 + 2x_\mu x_\nu \big)_{\mu,\nu=0,\ldots,3}.$$

[3]Eine kleine Rechnung im Spinorkalkül zeigt, daß ϕ ein Darstellungsisomorphismus ist, daß also $\phi(D(A)(\phi^{-1}(v))) = \Lambda(A)v$ für $v \in \mathbb{C}^4, A \in SL(2,\mathbb{C})$ gilt. Die Vektoren $u_{s,m}$ bzw. $\phi(u_{s,m})$ sind gemeinsame Eigenvektoren der jeweiligen Generatoren I_3 der Drehung um die z-Achse zum Eigenwert m und Gesamtdrehimpus $I^2_{Ges} := I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$ zum Eigenwert $s(s+1)$.

[4]Die Matrix des Tensors $\phi^{-1}(v)$ ist offenbar gegeben durch $\frac{1}{\sqrt{2}} \sum v^\mu \sigma_\mu$. In der Literatur wird dafür oftmals die Bezeichnung $\underset{\sim}{v} := \sum v^\mu \sigma_\mu$ verwendet.

Die Gleichungen (A.1) und (A.2) lassen sich nun „vektoriell“ formulieren, dazu definieren wir $w : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \to \mathbb{C}^4$ durch

$$w(g) := \phi(\Delta(\phi^{-1} \circ g)),$$

und wir erhalten für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_1 := \langle \phi^{-1} \circ f, \phi^{-1} \circ g \rangle_{\mathcal{H}} &= \int \langle f(x), (w * g)(x) \rangle_{\mathbb{C}^4} \, dx \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \int \bar{f}^\mu(x)(w_{\mu\nu} * g^\nu)(x) \, dx, \end{aligned} \tag{A.3}$$

worin die Komponenten $w_{\mu\nu} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ von w gegeben sind durch

$$w_{\mu\nu}(h) := \lim_{t \searrow 0} \int \frac{\eta_{\mu\nu}(x)^2 - 2x_\mu x_\nu}{(-(x^0 - it)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta+1}} h(x) \, dx, \quad \text{für } h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4). \tag{A.4}$$

In Lemma B.5 ist die Fouriertransformierte $\hat{w}_{\mu\nu}$ von $w_{\mu\nu}$ explizit angegeben. Sie ist gegeben durch ein reelles Maß. Die Sesquilinearform $\langle . \, , .. \rangle_1$ läßt sich dann umschreiben zu

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_1 &= \sum \int \bar{f}^\mu(x) w_{\mu\nu}(g^\nu(x - .)) \, dx \\ &= \sum \int \bar{f}^\mu(x) \hat{w}_{\mu\nu}(\hat{g}^\nu(.) e^{-i \, \cdot \, x}) \, dx \\ &= \sum \int \bar{f}^\mu(x) \int \hat{g}(p) e^{-ipx} \, d\hat{w}_{\mu\nu}(p) \, dx \\ &= \sum \int \bar{\hat{f}}^\mu(p) \hat{g}^\nu(p) \, d\omega_{\mu\nu}(p), \end{aligned} \tag{A.5}$$

worin wir im letzten Schritt $\check{\bar{f}} = \bar{\hat{f}}$ benutzt und $\omega_{\mu\nu} := (2\pi)^2 \hat{w}_{\mu\nu}$ definiert haben. Natürlich hängen $w_{\mu\nu}, \hat{w}_{\mu\nu}$ bzw. $\omega_{\mu\nu}$ von der Skalendimension δ ab; in Betracht ihrer Fouriertransformierten läßt sich nun beantworten, für welche Skalendimensionen δ die Sesquilinearform $\langle . \, , .. \rangle_1 : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \to \mathbb{C}$ ein positiv (semi-)definites Skalarprodukt ist.

Im Fall $\delta = 2$ liefert Lemma B.5

$$d\omega_{\mu\nu} = (2\pi)^2 \vartheta(2)(-\eta_{\mu\nu} \, dH_+ + 2id_\mu id_\nu \, dH_0), \tag{A.6}$$

und man sieht direkt, daß für $0 \neq f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ mit $f = (f^0, 0, 0, 0), Tr \ \hat{f}^0 \subset V_+$ folgt $\langle f, f \rangle_1 < 0$.

Die explizite Evaluation des Faktors $\vartheta(\delta = 2)$ ergibt:

$$\vartheta(2) = \frac{4(2-1)}{\gamma(2)} = \frac{4(2-1)}{\frac{1}{2\pi} 4^2 \Gamma(2+1)\Gamma(2)} = \frac{\pi}{4}.$$

Es gilt also für Skalendimension $\delta = 2$:

$$d\omega_{\mu\nu} = \pi^3(-\eta_{\mu\nu} \, dH_+ + 2id_\mu id_\nu \, dH_0). \tag{A.7}$$

Lemma A.1 Die Sesquilinearform $\langle . \, , .. \rangle_1$ ist für Skalendimension $\delta \geq 3$ ein positiv semidefinites Skalarprodukt, für $\delta \in [2, 3)$ ist $\langle . \, , .. \rangle_1$ indefinit.

Beweis: Für $\delta = 2$ haben wir uns bereits von der Indefinitheit überzeugt.

Wir betrachten nun den Fall $\delta > 2$, dann verschwindet der H_0-Term in Lemma B.5, weil $((\ .\ )^2)^{\delta-2}|_{Tr\ H_0} = 0$ gilt, also

$$d\omega_{\mu\nu}(p) = (2\pi)^2 \vartheta(\delta) M_\delta(p)_{\mu\nu} ((p)^2)^{\delta-2}\ dH_+(p),$$

mit der matrixwertigen (stetigen!) Funktion

$$V_+ \ni p \mapsto M_\delta(p) := \left((\delta-1)(-\eta_{\mu\nu}) + 2(\delta-2)\frac{p_\mu p_\nu}{(p)^2} \right)_{\mu,\nu=0,\ldots,3}.$$

Für $\langle .\ ,..\rangle_1$ bedeutet das

$$\langle f, g\rangle_1 = (2\pi)^2 \vartheta(\delta) \int_{V_+} \langle \hat{f}(p), M_\delta(p)\hat{g}(p)\rangle_{\mathbb{C}^4}\ dp,$$

woraus man ersieht, daß $\langle .\ ,..\rangle_1$ genau dann positiv semidefinit ist, wenn die Matrix $M_\delta(p)$ für alle $p \in V_+$ positiv semidefinit ist[5].

Für $z \in \mathbb{C}^4$ hat man

$$\langle z, M_\delta(p) z\rangle_{\mathbb{C}^4} = (\delta-1)\ \langle z, (-\eta) z\rangle_{\mathbb{C}^4} + 2(\delta-2)\ \frac{1}{(p)^2} \langle z, \eta p\rangle_{\mathbb{C}^4} \langle \eta p, z\rangle_{\mathbb{C}^4}.$$

Zu $p \in V_+$ wählen wir jetzt einen Lorentzschub $\Lambda(p)$, der den Vektor $p' := (\sqrt{(p)^2}, 0, 0, 0)$ nach p überführt: $\Lambda(p)p' = p$. Dann bekommt man wegen $\Lambda(p)^T \eta \Lambda(p) = \eta$

$$\begin{aligned} \langle z, M_\delta(p) z\rangle_{\mathbb{C}^4} &= (\delta-1)\ \langle \Lambda(p)z, (-\eta)\Lambda(p)z\rangle_{\mathbb{C}^4} + 2(\delta-2)\ \langle \Lambda(p)z, \eta e_0\rangle_{\mathbb{C}^4} \langle \eta e_0, \Lambda(p) z\rangle_{\mathbb{C}^4} \\ &= \langle \Lambda(p) z, N_\delta\ \Lambda(p) z\rangle_{\mathbb{C}^4}, \end{aligned}$$

mit der Matix

$$N_\delta := \begin{pmatrix} (\delta-1)(-1) + 2(\delta-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta-1 \end{pmatrix}.$$

Da die 00-Komponente von N_δ genau dann größer oder gleich Null ist, wenn $\delta \geq 3$ ist, folgt, daß $\langle .\ ,..\rangle_1$ für Skalendimension $\delta \geq 3$ positiv semidefinit und für $\delta \in (2,3)$ indefinit ist. ■

[5] Ist $q \in V_+$, so daß $M_\delta(q)$ einen negativen Eigenwert zum Eigenvektor v hat, so findet man eine offene Umgebung $U \ni q$, und eine Funktion $0 \neq f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ mit $Tr\ \hat{f} \subset U$, so daß Funktion $g : x \mapsto v f(x)$ die Beziehung $\langle g, g\rangle_1 < 0$ erfüllt.

Anhang B

Einige Fouriertransformationen

B.1 Die Fouriertransformation von $\Delta_* f$

Sei $\Delta : \mathbb{R}^4 \ni x \mapsto (x,x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ die Diagonalabbildung. Die Einschränkung von Schwartzfunktionen auf die Diagonale ist stetig:

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}) \ni h \mapsto h \circ \Delta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$$

Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ sei

$$\Delta_* T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4}) \ni h \mapsto T(h \circ \Delta),$$

und insbesondere für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$:

$$\Delta_* f : h \mapsto \int f(x) h(x,x) \; dx$$

Es sei $\sigma : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die Summenabbildung, d.h. $\sigma(p,q) = p + q$. Dann existiert die Zurückziehung $\sigma^* : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4+4})$, und für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ ist insbesondere

$$\sigma^* f : h \mapsto \int f(p+q) h(p,q) \; d(p,q)$$

Lemma B.1 Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ ist $\widehat{\Delta_* f} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sigma^* \hat{f}$.

Beweis: Wähle ein $\check{h} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4+4})$, dann erhält man

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_* f}(\check{h}) &= \Delta_* f(\hat{\check{h}}) \\
&= \int f(x) \int \check{h}(p,q) \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^2} \frac{e^{iqx}}{(2\pi)^2} \; d(p,q) \; dx \\
&\overset{Fubini}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int f(x) \frac{e^{i(p+q)x}}{(2\pi)^2} \; dx \; \check{h}(p,q) \; d(p,q) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \hat{f}(p+q) \check{h}(p,q) \; d(p,q) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \sigma^* \hat{f}(\check{h}).
\end{aligned}$$

■

B.2 Die Fouriertransformation der Zweipunktfunktion

In diesem Abschnitt berechnen wir die Fouriertransformation der Zweipunktfunktion $w = (w_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ eines konformen Vektorfeldes mit Skalendimension $\delta \geq 2$. Es ist für $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$:

$$w_{\mu\nu} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^4) \ni f \mapsto \lim_{t \searrow 0} \int \frac{\eta_{\mu\nu}(x)^2 - 2x_\mu x_\nu}{(-(x^0 - it)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta+1}} f(x) \; dx. \tag{B.1}$$

Das abschließende Ergebnis ist in Lemma B.5 angegeben. Lemma B.2, B.3 und B.4 bereiten dieses Ergebnis vor.

Lemma B.2 Es sei ρ ein polynomial beschränktes Maß auf $\mathbb{R}^4$ mit $Tr\ \rho \subset \overline{V}_+$, dann ist die Fourierrücktransformation von ρ gegeben durch

$$f \mapsto \check{\rho}(f) = \lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^4} r(x - ity) f(x) \; dx,$$

wobei $y \in V_+$ beliebig wählbar ist. Weiter ist $r : \mathbb{R}^4 - iV_+ \to \mathbb{C}$ analytisch und gegeben durch[1]

$$r(x - ity) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ip(x-ity)} \; d\rho(p).$$

Beweis: Wählen wir ein beliebiges $y \in V_+$ und $t > 0$. Dann hat man $e^{-tpy} \to 1$, für $t \to 0$, sowie $|e^{-tpy} \check{f}(p)| \leq |\check{f}(p)|$, für $p \in \overline{V}_+$.
Aus $Tr\ \rho \subset \overline{V}_+$ ergibt sich weiter, daß $\{p \mapsto e^{-tpy}\} \in L^1(\mathbb{R}^4, \rho)$.

Wegen dieser beiden Punkte ist die folgende Rechnung legitim:

$$\begin{aligned}
\check{\rho}(f) &= \int \check{f}(p) \; d\rho(p) \\
&\overset{maj.Konv.}{=} \lim_{t \searrow 0} \int e^{-tpy} \check{f}(p) \; d\rho(p) \\
&= \lim_{t \searrow 0} \int \int f(x) e^{-tpy} \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^2} \; dx \; d\rho(p) \\
&\overset{Fubini}{=} \lim_{t \searrow 0} \int \int f(x) e^{-tpy} \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^2} \; d\rho(p) \; dx \\
&= \lim_{t \searrow 0} \int f(x) \left(\int \frac{e^{-ip(x-ity)}}{(2\pi)^2} \; d\rho(p) \right) dx.
\end{aligned}$$

Die Analytizität von r ergibt sich unmittelbar, da man unter dem Integral differenzieren darf. ■

Mit Hilfe dieses Sachverhaltes bestimmen wir nun die Fourierrücktransformation von $d\rho(p) = ((p)^2)^{\delta-1} \; dH_+(p)$, mit dem Maß H_+ definiert in Gleichung (0.1).

[1] Wir setzen die Minkowskibilinerarform bilinear auf $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$ fort: $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2 := \sum \eta_{\mu\nu} z_1^\mu z_2^\nu$; ebenso $\mathbb{C}^4 \ni z \mapsto (z)^2 := zz$.

Lemma B.3 Sei $\delta > 0$, dann gilt für beliebige $x \in \mathbb{R}^4, y \in V_+$:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ip(x-ity)} \, ((p)^2)^{\delta-1} \, dH_+(p) = \gamma(\delta) \, \frac{1}{(-(x-ity)^2)^{\delta+1}}, \tag{B.2}$$

wobei der Faktor $\gamma(\delta) > 0$ gegeben ist durch $\frac{1}{2\pi} \, 4^\delta \, \Gamma(\delta+1)\Gamma(\delta)$, mit der Gammafunktion Γ.

Beweis: Wir nehmen $x \in \mathbb{R}^4$ und $y \in V_+$. Dann sei

$$r(x-iy) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ip(x-iy)} \, ((p)^2)^{\delta-1} \, dH_+(p).$$

$r : \mathbb{R}^4 - iV_+ \to \mathbb{C}$ ist analytisch und offenbar invariant unter allen orthochronen Lorentztransformationen Λ, d.h. $r(z) = r(\Lambda z)$, für alle $z \in \mathbb{R}^4 - iV_+$. Unter diesen Voraussetzungen folgt[2], daß es eine analytische Funktion $\tilde{r} : M \to \mathbb{C}$ gibt, so daß $r(z) = \tilde{r}((z)^2)$, für alle $z \in \mathbb{R}^4 - iV_+$, wobei $M := \{(z)^2 \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{R}^4 - iV_+\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Daher ist es zur Berechnung von $r(x-iy)$ ausreichend, $\tilde{r}((x-iy)^2)$ für x, y mit $\vec{x} = \vec{y} = 0$ zu berechnen, denn es ist $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta = (x^0 - iy^0)^2, x^0 \in \mathbb{R}, y^0 > 0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Sei also $\vec{x} = \vec{y} = 0$, dann bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}((x^0 - iy^0)^2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ip^0(x_0 - iy_0)} \, ((p)^2)^{\delta-1} \, dH_+(p) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_{|\vec{p}| \le p^0} e^{-ip^0(x_0-iy_0)} \, (p_0^2 - |\vec{p}|^2)^{\delta-1} \, d\vec{p} \, dp^0 \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ip^0(x_0-iy_0)} \int_0^{p^0} \left((p_0^2 - k^2)^{\delta-1} k \right) k \, dk \, dp^0 \\
&\overset{part.Int.}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ip^0(x_0-iy_0)} \left(- \int_0^{p^0} \frac{-1}{2\delta} \, (p_0^2 - k^2)^\delta \, dk \right) dp^0 \\
&\overset{q:=k/p^0}{=} \frac{1}{2\pi\delta} \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-ip^0(x_0-iy_0)} \, p_0^{2\delta+1} \, dp^0 \right)}_{\frac{\Gamma(2(\delta+1))}{(-i(x_0-iy_0))^{2(\delta+1)}}} \underbrace{\left(\int_0^1 (1-q^2)^\delta \, dq \right)}_{\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\delta+1)}{2\Gamma(\delta+\frac{3}{2})}}
\end{aligned}$$

Die beiden obigen Integrale findet man etwa in [BS], Formeln (21.23a) und (21.45). Mit den Beziehungen für die Gammafunktionen findet man nun

$$\begin{aligned}
\tilde{r}((x^0 - iy^0)^2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\pi\delta} \, \frac{4^{\delta+1}}{2\sqrt{\pi}} (\Gamma(\delta+1))^2 \frac{1}{(-(x^0 - iy^0)^2)^{\delta+1}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \, 4^\delta \, \Gamma(\delta+1)\Gamma(\delta) \frac{1}{(-(x^0 - iy^0)^2)^{\delta+1}},
\end{aligned}$$

was für beliebige $x \in \mathbb{R}^4, y \in V_+$ impliziert

$$r(x-iy) = \tilde{r}((x-iy)^2) = \gamma(\delta) \, \frac{1}{(-(x-iy)^2)^{\delta+1}}.$$

■

[2]Siehe etwa [BLT], Seite 489, Theorem 18.4.

Man beachte, daß die Fourierrücktransformation in (B.2) gerade den Nenner in (B.1) liefert; der Zähler in (B.1) ist ein Polynom und wird daher nach Fouriertransformation zum (schwachen) Differentialoperator $-\eta_{\mu\nu}\Box + 2\partial_\mu\partial_\nu : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$, mit dem Wellenoperator $\Box = \sum \eta^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\partial_\lambda$.

Wir benötigen daher ein weiteres technisches Lemma:

Lemma B.4 Sei $\delta \geq 2$, dann ist die zweifache partielle Ableitung $\partial_\kappa\partial_\lambda\rho \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ des reellen, polynomial beschränkten Maßes $d\rho = ((\,.\,)^2)^{\delta-1}\, dH_+$ wieder ein reelles, polynomial beschränktes Maß und gegeben durch

$$\begin{aligned}
\partial_\kappa\partial_\lambda\rho &= 4(\delta-1) id_\kappa id_\lambda ((\,.\,)^2)^{\delta-2} H_0 \\
&+ 2(\delta-1)((\,.\,)^2)^{\delta-2}\left(\eta_{\kappa\lambda} + 2(\delta-2)\frac{id_\kappa id_\lambda}{(\,.\,)^2}\right) H_+.
\end{aligned}$$

Darin ist H_0 aus Gleichung (0.2).

Beweis: Zunächst etwas Heuristik:

Es ist $d\rho(p) = ((p)^2)^{\delta-1}\chi_{V_+}(p)\ dp = ((p)^2)^{\delta-1}\theta((p)^2)\theta(p^0)\ dp$, worin θ die Heavisidesche Sprungfunktion ist. Formales Ableiten dieses Ausdrucks führt dann mit der Produktregel zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^\lambda}[((p)^2)^{\delta-1}\theta((p)^2)\theta(p^0)] &= (\delta-1)((p)^2)^{\delta-2}\ 2p_\lambda\ \theta((p)^2)\ \theta(p^0) \\
&\quad +((p)^2)^{\delta-1}\ \delta_0((p)^2)\ 2p_\lambda\ \theta(p^0) \\
&\quad +((p)^2)^{\delta-1}\ \theta((p)^2)\ \delta_0(p^0)\eta^0{}_\lambda,
\end{aligned}$$

mit der eindimensionalen Deltafunktion δ_0. Der mittlere Term verschwindet nun für $\delta \geq 2$ wegen des Produkts $(p)^2\delta_0((p)^2)$. Der dritte Term ist ebenfalls Null, weil $\theta((p)^2)\ \delta_0(p^0)$ nur für $p = 0$ von Null verschieden ist. Man erhält somit weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^\kappa}\frac{\partial}{\partial p^\lambda}[((p)^2)^{\delta-1}\theta((p)^2)\theta(p^0)] &= \frac{\partial}{\partial p^\kappa}[(\delta-1)((p)^2)^{\delta-2}\ 2p_\lambda\ \theta((p)^2)\ \theta(p^0)] \\
&= (\delta-1)(\delta-2)((p)^2)^{\delta-3}\ 2p_\kappa\ 2p_\lambda\ \theta((p)^2)\ \theta(p^0) \\
&\quad +(\delta-1)((p)^2)^{\delta-2}\ \ 2\eta_{\kappa\lambda}\ \theta((p)^2)\ \theta(p^0) \\
&\quad +(\delta-1)((p)^2)^{\delta-2}\ 2p_\lambda\ \delta_0((p)^2)\ 2p_\kappa\ \theta(p^0) \\
&\quad +(\delta-1)((p)^2)^{\delta-2}\ 2p_\lambda\ \theta((p)^2)\ \delta_0(p^0)\eta^0{}_\kappa.
\end{aligned}$$

Der letzte Term ist wieder Null, und eine kleine Umformung zeigt, daß dies das behauptete Resultat ist.

Nun zum Beweis:

Wir berechnen schrittweise erst $\partial_\lambda[((\,.\,)^2)^{\delta-1}\ H_+] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ und daraus dann $\partial_\kappa\partial_\lambda[((\,.\,)^2)^{\delta-1}\ H_+] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$.

Um die schwache Ableitung $\partial_\lambda(((\,.\,)^2)^{\delta-1}\ H_+)$ zu berechnen, machen wir die Fallunterscheidungen $\lambda = 0$ und $\lambda \in \{1, 2, 3\}$:

$\lambda = 0$:

Es sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ beliebig gewählt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
(\partial_0[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+])(f) &= -\int_{V_+} (\partial_0 f)(p)((p)^2)^{\delta-1}\ dp \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\vec{p}|}^{\infty} (\partial_0 f)(p)((p)^2)^{\delta-1}\ dp^0\ d\vec{p} \\
&\overset{\text{part.Int.}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\vec{p}|}^{\infty} f(p)(\delta-1)((p)^2)^{\delta-2}\ 2p_0\ dp^0\ d\vec{p} \\
&= \int_{V_+} f(p) 2p_0(\delta-1)((p)^2)^{\delta-2}\ dp.
\end{aligned}$$

Das bedeutet also

$$\partial_0[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+] = 2(\delta-1) id_0((\ .\ )^2)^{\delta-2}\ H_+.$$

Nun betrachten wir den Fall $\lambda \in \{1,2,3\}$:
Man erhält für beliebige $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$:

$$\begin{aligned}
(\partial_\lambda(((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+))(f) &= -\int_{V_+} (\partial_\lambda f)(p)((p)^2)^{\delta-1}\ dp \\
&= -\int_{V_+} \left(\frac{\partial}{\partial p^\lambda}(f(p)((p)^2)^{\delta-1}) - f(p)2p_\lambda(\delta-1)((p)^2)^{\delta-2} \right) dp \\
&= -\int_0^\infty \int_{|\vec{p}|\leq p^0} \frac{\partial}{\partial p^\lambda}(f(p)((p)^2)^{\delta-1})\ d\vec{p}\ dp^0 \\
&\quad + \int_{V_+} f(p) 2p_\lambda(\delta-1)((p)^2)^{\delta-2}\ dp \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} -\int_0^\infty \int_{|\vec{p}|=p^0} f(p)((p)^2)^{\delta-1}\ n(\vec{p})^\lambda\ dS(\vec{p})\ dp^0 \\
&\quad + 2(\delta-1)(id_\lambda((\ .\ )^2)^{\delta-2}\ H+)(f).
\end{aligned}$$

Darin ist $n(\vec{p}) = (n(\vec{p})^\lambda)_{\lambda=1,2,3} := \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ der Normaleneinheitsvektor in Richtung $\vec{p}$ und dS das Euklidische Oberflächenmaß. Das erste Integral veschwindet nun wegen $\delta - 1 \geq 1$ und $p^0 = |\vec{p}| \Rightarrow (p)^2 = 0$.

Damit haben wir für beliebiges $\lambda = 0, \ldots, 3$ gezeigt, daß

$$\partial_\lambda[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+] = 2(\delta-1) id_\lambda((\ .\ )^2)^{\delta-2}\ H_+.$$

Um nun daraus $\partial_\kappa \partial_\lambda[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+]$ zu berechnen, machen wir wieder die Fallunterscheidung $\kappa = 0$ und $\kappa \in \{1,2,3\}$:

$\kappa = 0:$

$$\begin{aligned}
\partial_0\partial_\lambda \quad & [((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+](f) \\
= \quad & \partial_0(2(\delta-1)id_\lambda((\ .\ )^2)^{\delta-2}\ H+)(f) \\
= \quad & -\int_{V_+}(\partial_0 f)(p)\ 2(\delta-1)p_\lambda((p)^2)^{\delta-2}\ dp \\
= \quad & -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{|\vec{p}|}^{\infty}(\partial_0 f)(p^0,\vec{p})\ 2(\delta-1)p_\lambda(p_0^2-|\vec{p}|^2)^{\delta-2}\ dp^0\ d\vec{p} \\
\overset{\text{part.Int.}}{=} \quad & \int_{\mathbb{R}^3} f(|\vec{p}|,\vec{p})\ 2(\delta-1)p_\lambda((0)^2)^{\delta-2}\ d\vec{p} \\
& +\int_{\mathbb{R}^3}\int_{|\vec{p}|}^{\infty} f(p)\ 2(\delta-1)\Big(\eta_{0\lambda}((p)^2)^{\delta-2}+2p_0p_\lambda(\delta-2)((p)^2)^{\delta-3}\Big)\ dp^0\ d\vec{p}.
\end{aligned}$$

Man beachte, daß der erste Term nur für $\delta = 2$ von Null verschieden ist, sowie daß für $\delta > 2$ der Term $((p)^2)^{\delta-3}$ lokal integrabel ist (siehe etwa die Abschätzung am Ende des Beweises), und daß selbiger für $\delta = 2$ wegen des Faktors $(\delta - 2)$ verschwindet. Multipliziert man im ersten Integral mit $1 = \frac{2|\vec{p}|}{2|\vec{p}|}$, bekommen wir

$$\begin{aligned}
\partial_0\partial_\lambda[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+] \quad = \quad & 4(\delta-1)id_0id_\lambda((\ .\ )^2)^{\delta-2}H_0 \\
+ \quad & 2(\delta-1)((\ .\ )^2)^{\delta-2}\left(\eta_{0\lambda}+2(\delta-2)\frac{id_0id_\lambda}{(\ .\ )^2}\right)H_+.
\end{aligned}$$

Nun zum Fall
$\kappa = 1, 2, 3:$

$$\begin{aligned}
& \partial_\kappa\partial_\lambda[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+](f) \\
& \quad = \quad -\int_{V_+}(\partial_\kappa f)(p)\ 2(\delta-1)p_\lambda((p)^2)^{\delta-2}\ dp \\
& \quad = \quad -\int_0^{\infty}\int_{|\vec{p}|\le p^0} 2(\delta-1)\bigg[\frac{\partial}{\partial p^\kappa}(f(p)\ p_\lambda((p)^2)^{\delta-2}) \\
& \qquad\qquad -f(p)\Big(\eta_{\kappa\lambda}((p)^2)^{\delta-2}+2(\delta-2)p_\kappa p_\lambda((p)^2)^{\delta-3}\Big)\bigg]d\vec{p}\ dp^0 \\
& \quad \overset{\text{Gauß}}{=} \quad -\int_0^{\infty}\int_{|\vec{p}|=p^0} 2(\delta-1)\ f(p)\ p_\lambda((p)^2)^{\delta-2}\ n(\vec{p})^\kappa\ dS(\vec{p})\ dp^0 \\
& \qquad +2(\delta-1)\Big(\big(\eta_{\kappa\lambda}((\ .\ )^2)^{\delta-2}+2(\delta-2)id_\kappa id_\lambda((\ .\ )^2)^{\delta-3}\big)H+\Big)(f).
\end{aligned}$$

Für die weitere Umrechnung des ersten Summanden beachte man, daß $p_\kappa = -|\vec{p}|n(\vec{p})^\kappa$, für $\kappa = 1, 2, 3$ gilt. Erweitern wir nun im ersten Integral wieder mit

$1 = \frac{2|\vec{p}|}{2|\vec{p}|}$, so finden wir

$$
\begin{aligned}
&\partial_0 \partial_\lambda [((\, . \,)^2)^{\delta-1} \; H_+](f) \\
&\quad = \int_0^\infty \int_{|\vec{p}|=p^0} 4(\delta-1) \; f(p) \; p_\kappa p_\lambda ((p)^2)^{\delta-2} \frac{1}{2|\vec{p}|} \; dS(\vec{p}) \; dp^0 \\
&\qquad +2(\delta-1)\Big(((\, . \,)^2)^{\delta-2} \big(\eta_{\kappa\lambda} + 2(\delta-2) \frac{id_\kappa id_\lambda}{(\, . \,)^2} \big) H_+ \Big)(f) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^3} 4(\delta-1) \; f(|\vec{p}|,\vec{p}) \; p_\kappa p_\lambda ((p)^2)^{\delta-2} \frac{1}{2|\vec{p}|} \; d\vec{p} \\
&\qquad +2(\delta-1)\Big(((\, . \,)^2)^{\delta-2} \big(\eta_{\kappa\lambda} + 2(\delta-2) \frac{id_\kappa id_\lambda}{(\, . \,)^2} \big) H_+ \Big)(f) \\
&\quad = \int 4(\delta-1) \; f(p) \; p_\kappa p_\lambda ((p)^2)^{\delta-2} \; dH_0(p) \\
&\qquad +2(\delta-1)\Big(((\, . \,)^2)^{\delta-2} \big(\eta_{\kappa\lambda} + 2(\delta-2) \frac{id_\kappa id_\lambda}{(\, . \,)^2} \big) H_+ \Big)(f).
\end{aligned}
$$

Insgesamt ist somit gezeigt, daß für alle $\kappa, \lambda = 0, \ldots, 3$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\partial_\kappa \partial_\lambda \rho &= 4(\delta-1) id_\kappa id_\lambda ((\, . \,)^2)^{\delta-2} H_0 \\
&+ 2(\delta-1)((\, . \,)^2)^{\delta-2} \left(\eta_{\kappa\lambda} + 2(\delta-2) \frac{id_\kappa id_\lambda}{(\, . \,)^2} \right) H_+,
\end{aligned}
$$

was wieder ein polynomial beschränktes, reelles Maß ist: Die polynomiale Beschränktheit ist für $\delta = 2$ offensichtlich, für $\delta \geq 3$ ebenfalls, denn dann ist $\partial_\kappa \partial_\lambda \rho$ gegeben durch eine polynomial beschränkte stetige Funktion. (Der H_0-Term verschwindet für $\delta > 2$.) Für $\delta \in (2,3)$ ist offenbar der $((\, . \,)^2)^{\delta-3} H_+$-Beitrag der einzige kritische Term. Man hat aber für den vierdimensionalen Ball $B_R := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid |p| \leq R\}$:

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{B_R} ((p)^2)^{\delta-3} \; dH_+(p) \right| &= \left| \int_{B_R \cap V_+} (p_0^2 - |\vec{p}|^2)^{\delta-3} \; dp \right| \\
&\leq \int_0^R \int_0^{p^0} (p_0^2 - k^2)^{\delta-3} \; 4\pi \; k^2 \; dk \; dp^0 \\
&= 4\pi \int_0^R (p_0^2)^{\delta-3} p^0 \; dp^0 \int_0^1 \frac{q^2}{(1-q^2)^{3-\delta}} \; dq \\
&= 4\pi \; \frac{1}{2\delta-4} R^{2\delta-4} \quad \cdot \quad \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\delta-2)}{\Gamma(\delta-1/2)}.
\end{aligned}
$$

Letzteres Integral ist Gleichung (21.45) in [BS]. Da dieser Ausdruck für $\delta \in (2,3)$ in der Variablen R polynonial beschränkt ist, ist das Lemma bewiesen. ∎

Wir können jetzt die Fouriertransformation der Zweipunktfunktion (B.1) explizit angeben.

Lemma B.5 Sei $\delta \geq 2$ und $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$. Die Fouriertransformation $\hat{w}_{\mu\nu} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ von $w_{\mu\nu} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ aus Gleichung (B.1) ist ein polynomial beschränktes, reelles Maß und gegeben durch

$$
\begin{aligned}
d\hat{w}_{\mu\nu}(p) &= \vartheta(\delta) \left((\delta-1)(-\eta_{\mu\nu}) + 2(\delta-2) \frac{p_\mu p_\nu}{(p)^2} \right) ((p)^2)^{\delta-2} \; dH_+(p) \\
&+ 2\vartheta(\delta)((p)^2)^{\delta-2} p_\mu p_\nu \; dH_0(p),
\end{aligned}
$$

worin der Faktor $\vartheta(\delta) > 0$ durch $4(\delta-1)/\gamma(\delta)$ definiert ist, mit $\gamma(\delta)$ aus Lemma B.3.

Beweis: Aus den beiden ersten Lemmata dieses Abschnittes können wir ersehen, wenn wir $y = e_0 = (1,0,0,0) \in V_+$ wählen, daß

$$\hat{w}_{\mu\nu} = \frac{1}{\gamma(\delta)}(-\eta_{\mu\nu}\Box + 2\partial_\mu\partial_\nu)[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+].$$

Zusammen mit Lemma B.4 bekommt man damit nach kurzer Rechnung – in die eingeht, daß, aufgrund von $Tr\ H_0 = V_0^+$, gilt: $((\ .\ )^2)^\epsilon H_0 = 0$, für $\epsilon > 0$ –

$$\begin{aligned}
\hat{w}_{\mu\nu} &= \frac{1}{\gamma(\delta)}\Bigg(-\eta_{\mu\nu}\sum_{\kappa\lambda}\eta^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\partial_\lambda[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+] + 2\partial_\mu\partial_\lambda[((\ .\ )^2)^{\delta-1}\ H_+]\Bigg) \\
&= \frac{1}{\gamma(\delta)}\Bigg[4(\delta-1)\Bigg((\delta-1)(-\eta_{\mu\nu}) + 2(\delta-2)\frac{id_\mu id_\nu}{(\ .\ )^2}\Bigg)((\ .\ )^2)^{\delta-2}H_+ \\
&\qquad +8(\delta-1)((\ .\ )^2)^{\delta-2}H_0\Bigg].
\end{aligned}$$

Dies ist das behauptete Resultat. ■

Anhang C

Zur Kausalität

In diesem Anhang wird begründet, daß die beiden Felder B und Φ kausale Felder sind, d.h. daß der Kommutator zweier Feldoperatoren mit raumartig getrennten Testfunktionen verschwindet.

Der Kommutator von B ergibt sich als Vielfaches der Identität auf $\mathcal{S}_0$:

$$\begin{aligned}[][B(f), B(g)] &= (W(f \otimes g) - W(g \otimes f))\, \mathbf{1} \\ &= \sum (w_{\mu\nu}(f^\mu * g^\nu_-) - w_{\mu\nu}(g^\mu * f^\nu_-))\, \mathbf{1} \\ &= \sum (w_{\mu\nu}(f^\mu * g^\nu_-) - w_{\mu\nu}((f^\nu * g^\mu_-)_-))\, \mathbf{1},\end{aligned}$$

worin der Index $_-$ die Funktion des negativen Argumentes kennzeichnet, also $F_-(x) := F(-x)$, und $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ sind. Wir erhalten nun wegen der Symmetrie $w_{\mu\nu} = w_{\nu\mu}$:

$$[B(f), B(g)] = \eta_{\mu\nu} u(f^\mu * g^\nu_-)\, \mathbf{1} + (id_\mu id_\nu v)(f^\mu * g^\nu_-)\, \mathbf{1}$$

mit den beiden ungeraden, Lorentzinvarianten Distributionen $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, die explizit durch

$$u(F) := \lim_{t \searrow 0} \int \Big(\frac{(x)^2}{(-(x^0 - it)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta+1}} - \frac{(-x)^2}{(-(-x^0 - it)^2 + |-\vec{x}|^2)^{\delta+1}} \Big)\, F(x)\, dx$$

und

$$v(F) := \lim_{t \searrow 0} \int \Big(\frac{-2x}{(-(x^0 - it)^2 + |\vec{x}|^2)^{\delta+1}} - \frac{-2(-x)}{(-(-x^0 - it)^2 + |-\vec{x}|^2)^{\delta+1}} \Big)\, F(x)\, dx$$

gegeben sind. Die explizite Form ist für die Kausalität nicht von belang. Entscheidend ist, daß u und v ungerade und Lorentzinvariant sind, woraus sich ergibt, daß der Träger von u und v in $\overline{V}_+ \cup (-\overline{V}_+) = \{x \mid (x)^2 \geq 0\}$ liegt. (Man muß zeigen, daß sich eine ungerade, Lorentzinvariante Distribution durch ungerade, Lorentzinvariante Funktionen approximieren läßt. Diese haben dann die genannte Trägereigenschaft, weil x und $-x$ durch eine Lorentztransformation ineinander überführt werden können, wenn $(x)^2 < 0$ gilt.)

Sind jetzt f, g kompakt getragen und haben kausal getrennte Träger, also $(x - y)^2 < 0$, für alle $x \in Tr\ f$ und $y \in Tr\ g$, so ist auch $f^\mu * g^\nu_-$ kompakt getragen, und es folgt $Tr\ (f^\mu * g^\nu_-) \subset \{x \mid (x)^2 < 0\}$ und daher

$$[B(f), B(g)] = \mathbf{0}.$$

Um einzusehen, daß auch das normalgeordnete Skalarfeld Φ ein lokales Feld ist, ziehen wir das Wicksche Theorem in Form von Lemma 4.6 heran. Dies besagt für $\Phi = \sum \eta^{\mu\nu}\ :[A_\mu A_\nu]:$, daß für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\begin{aligned}\Phi(f)\Phi(g) = \sum \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda} \quad \Big(\quad & :[A_\mu A_\nu][A_\kappa A_\lambda]: (f \otimes g) \\ + \quad & 4(:[A_\mu][A_\kappa]: W_{\nu\lambda})(f \otimes g) \\ + \quad & 2(W_{\mu\kappa} W_{\nu\lambda})(f \otimes g)\ \mathbf{1} \ \Big)\end{aligned}$$

gilt. Da das Normalordnen kommutativ ist, weil also

$$\sum \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}\ :[A_\mu A_\nu][A_\kappa A_\lambda]: (f \otimes g) = \sum \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}\ :[A_\mu A_\nu][A_\kappa A_\lambda]: (g \otimes f).$$

gilt, folgt nun für den Kommutator:

$$\begin{aligned}[\Phi(f), \Phi(g)] = \sum \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda} \quad \Big(\quad & 4(:[A_\mu][A_\kappa]: W_{\nu\lambda})(f \otimes g) - 4(:[A_\mu][A_\kappa]: W_{\nu\lambda})(g \otimes f) \\ + \quad & 2(W_{\mu\kappa} W_{\nu\lambda})(f \otimes g)\ \mathbf{1} - 2(W_{\mu\kappa} W_{\nu\lambda})(g \otimes f)\ \mathbf{1} \ \Big).\end{aligned}$$

Wir werden nun zeigen, daß alle Matrixelemente $\langle \varphi, [\Phi(f), \Phi(g)]\psi \rangle_{\mathcal{S}_0}$ gleich Null sind, wenn f und g kausal getrennt sind, was offenbar $[\Phi(f), \Phi(g)] = \mathbf{0}$ bedeutet. Es ist nun

$$\begin{aligned} & \langle \varphi, [\Phi(f), \Phi(g)]\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \\ = \quad & \sum \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda} \Big(4W_{\nu\lambda}(A_\mu(.)A_\kappa(..)(\varphi, \psi) f \otimes g) - 4W_{\nu\lambda}(A_\mu(.)A_\kappa(..)(\varphi, \psi) g \otimes f) \\ & +2(W_{\mu\kappa} W_{\nu\lambda})(f \otimes g)\ \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} - 2(W_{\mu\kappa} W_{\nu\lambda})(g \otimes f)\ \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}_0} \Big) \\ = \quad & \sum \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda} \Big(4(\eta_{\nu\lambda} u(F_{\mu\kappa}) - (id_\nu id_\lambda v)(F_{\mu\kappa})) \Big) \\ & +2\tilde{w}(f * g_-)\ \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}_0}, \end{aligned}$$

mit u und v wie oben und den Bezeichnungen

$$F_{\mu\kappa}(x) := \int f(x+y) g(y) A_\mu(x+y) A_\kappa(y)(\varphi, \psi)\ dy,$$

sowie

$$\tilde{w} := \sum \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}(w_{\mu\kappa} w_{\nu\lambda} - (w_{\mu\kappa} w_{\nu\lambda})_-) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4).$$

(Darin bedeutet $T_-(f) := T(f_-)$, für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$. Die Existenz des Produktes $w_{\mu\kappa} w_{\nu\lambda}$ ist wegen der Spektumsbedingung $Tr\ \hat{w}_{\mu\nu} \subset \overline{V}_+$ gesichert.)

Die Situation ist nun ähnlich wie im oben betrachteten Fall, denn sind $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ kompakt getragen, mit kausal getrennten Trägern, so ist sowohl $f * g_-$, als auch $F_{\mu\kappa}$ in $\{x \mid (x)^2 < 0\}$ getragen. Da neben u, v auch $\tilde{w}$ eine Lorentzinvariante und ungerade Distribution ist, erhalten wir, daß $Tr\ u, Tr\ v, Tr\ \tilde{w} \subset \overline{V}_+ \cup (-\overline{V}_+)$. Daher folgt wie für das Vektorfeld B für kausal getrennte f, g, daß

$$\langle \varphi, [\Phi(f), \Phi(g)]\psi \rangle_{\mathcal{S}_0} = 0, \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in \mathcal{S}_0,$$

also

$$[\Phi(f), \Phi(g)] = \mathbf{0}.$$

Literaturverzeichnis

[BLT] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, I. T. Todorov: `Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory`, W. A. Benjamin, Inc. (1975)

[BS] I. N. Bronstein, K. A. Semendjaev: `Taschenbuch der Mathematik`, Harri Deutsch, 5. Auflage (2000)

[Bo] J. Bognar: `Indefinite Inner Product Spaces`, Springer (1974)

[LS] J. Langerholc, B.Schroer: `Can Current-Operators Determine a Conplete Theory?`, Comm. Math. Phys. 4, 123-136 (1967)

[Ma] G. Mack: `All Unitary Ray Representations of the Conformal Group SU(2,2) with Positive Energy`, Comm. Math. Phys. 55, 1-28 (1977)

[Ha] P.R. Halmos: `A Hilbert Space Problem Book`, D.Van Nostrand Company, Inc. (1967)

[Hö] L. Hörmander: `The Analysis of Linear Partial Differential Operators 1`, Springer (1983)

[NRT] N.M. Nikolov, K.-H. Rehren, I.T. Todorov: `Partial Wave Expansion and Wightman Positivity in Conformal Field Theory`, http://www.arxive.org/abs/hep-th/0504146

[RS1] M. Reed, B. Simon: `Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1 Functional Analysis`, Academic Press, revised and enlarged edition (1980)

[RS2] M. Reed, B. Simon: `Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2 Fourier Analysis, Self-Adjointness`, Academic Press, (1975)

[Scho] M. Schottenloher: `A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory`, Lecture Notes in Physics, Springer (1997)

Index

Symbolverzeichnis

Stichwortverzeichnis

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle gilt mein besonderer Dank natürlich Herrn Rehren für *die* Idee und all die andern Ideen und Anregungen, die mich vieles gelehrt haben. Besonderer Dank gilt ihm auch dafür, daß er nie die Geduld verloren hat[1].

Herrn Buchholz danke ich ausdrücklich für *den* Hinweis in letzter Minute, der deutlich gezeigt hat, daß es oft einfacher ist, als man denkt.

Bei Herrn Schlemmer bedanke ich mich für *die* Mühe, die ihren Teil zum Ergebnis beigetragen hat.

[1]Zumindest hat er es sich nicht anmerken lassen.