Regularitätseigenschaften des Hartle-Hawking-Zustandes für das Klein-Gordon-Feld

Diplomarbeit

vorgelegt von Hanno Sahlmann aus Hamburg

angefertigt am Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

1999

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Hintergrund und Ziel der Arbeit

Die heutige Physik kennt zwei fundamentale Beschreibungsweisen der Natur, die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins einerseits und die Quantenfeldtheorie andererseits. Wegen der konzeptionellen Verschiedenheit beider Theorien scheinen alle Versuche ihrer Vereinigung auf absehbare Zeit zum Scheitern verurteilt zu sein. Trotzdem kann die Untersuchung von Vorstufen einer solchen vereinheitlichten Theorie wichtige Einsichten in das Zusammenspiel von Gravitation und Quantenfeldtheorie liefern.
Eine solche Vorstufe stellt die sogenannte Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten dar, in deren Rahmen auch die vorliegende Arbeit angesiedelt ist. Es handelt sich dabei um die semiklassische Theorie der *Quanten*felder auf einem *klassisch* beschriebenen Raumzeit-Hintergrund. Ihr spektakulärster Erfolg war die Voraussage einer duch Quanteneffekte bedingten Temperaturstrahlung schwarzer Löcher durch Hawking [9] (vergleiche auch die Monographie [34]).
Um eine Basis für die mathematisch rigorose Untersuchung dieses Effektes zu liefern, wurden von B. Kay in den Arbeiten [15], [16], [17] Grund- und Temperaturzustände für das freie skalare Feld auf bestimmten Keilregionen der Schwarzschild-Kruskal-Raumzeit (im folgenden kurz SK-Raumzeit genannt) konstruiert.

Ein schwieriges Problem im Rahmen der Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit stellt die Auswahl physikalischer Zustände des Quantenfeldes dar. Während im Minkowskiraum unter Zuhilfenahme seiner Symmetrie ein eindeutiger Vakuumzustand ausgezeichnet werden kann, lässt eine generische Raumzeit wegen des Fehlens von Symmetrien ein solches Vorgehen nicht zu.
Ein Vorschlag für ein Kriterium zur Auswahl physikalischer Zustände, welches auf freie Theorien auf allgemeinen Raumzeiten angewandt werden kann, ist die sogenannte Hadamard-Bedingung. Dabei handelt es sich um eine Bedingung an das Kurzabstands- bzw. Hochenergieverhalten des Zustandes.
Die Hadamard-Bedingung ist inzwischen relativ gut untersucht und verstanden ([23], [19], [28], [14]) und es gibt weitreichende Vorschläge zu ihrer Verallgemeinerung ([30], [1]). Als notwendiges Kriterium für physikalische Zustände ist sie bzw. geeignete Verallgemeinerungen nunmehr unumstritten.

Motivierend für die vorliegende Arbeit war die Beobachtung, daß die Hadamard-Bedingung für die zuvor erwähnten Zustände auf der Schwarzschild-Kruskal-Raumzeit bisher nicht

bewiesen wurde. Zwar geben einem die Arbeiten [5] und [14] Werkzeuge in die Hand, die zur Überprüfung der Hadamard-Eigenschaft in konkreten Situationen verwendet werden können. Diese sind jedoch nicht auf die SK-Raumzeit anwendbar: Der in [5] gegebene Beweis der Hadamard-Bedingung für Grundzustände des freien Skalarfeldes auf statischen Raumzeiten verwendet eine Bedingung an die Metrik, die auf der Schwarzschild-Raumzeit nicht erfüllt ist, weil deren Killing-Vektorfeld am Schwarzschild-Radius lichtartig wird, dessen Norm also nicht echt positiv von unten beschränkt ist.
Die in der Arbeit [14] gegebenen allgemeineren Methoden sind ohne weiteres nur auf Raumzeiten anwendbar, die eine kompakte Cauchy-Fläche besitzen, denn sie benötigen ein Resultat aus der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren, das – soweit uns nach intensiver Literaturrecherche bekannt ist – nur für den Fall einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit in der mathematischen Literatur bewiesen wurde. Es handelt sich dabei um die Aussage, daß der Operator

$$(-\Delta + V)^{-1/2}$$

(Δ ist der Laplace-Beltrami-Operator, V aus einer bestimmten Klasse skalarer Potentiale) ein Pseudodifferentialoperator ist.
Da die Cauchy-Flächen der SK-Raumzeit nicht kompakt sind, ist die Verwendung der Resultate aus [14] also zunächst ebenfalls nicht möglich.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, Sätze über das Vorliegen der Hadamard-Eigenschaft zu beweisen, die auch in der oben geschilderten Situation anwendbar sind. Dazu werden wir zwei verschiedene Wege beschreiten:
Im ersten Teil der Arbeit werden wir versuchen, das besagte, zur Anwendung der Methoden aus [14] auf Raumzeiten mit nichtkompakten Cauchy-Flächen fehlende mathematische Resultat zu etablieren. Dies gelingt uns unter bestimmten Zusatzannahmen, die jedoch im Fall der SK-Raumzeit aufgrund der Ergebnisse aus [17] erfüllt sind. Allerdings haben wir bei der Beschäftigung mit diesen Fragen in der Beweisführung aus [14], wiederum im Zusammenhang mit dem Vorliegen einer nichtkompakten Cauchy-Fläche, eine Lücke festgestellt, so daß deren Anwendbarkeit in dem uns interessierenden Fall weiterhin nicht geklärt ist.
In einem zweiten Teil der Arbeit werden wir einen sehr viel direkteren Zugang wählen: Wir verwenden unter Zuhilfenahme starker Resultate aus der mikrolokalen Analysis die physikalischen Grundlagen der Theorie und beweisen so, im Vergleich zum ersten Ansatz mühelos, die Hadamard-Eigenschaft für Grundzustände des freien Skalarfeldes auf stationären Raumzeiten ohne weitere Zusatzannahmen.
Im letzten Teil zeigen wir, wie sich die zuvor entwickelten Methoden auf die Zustände auf der SK-Raumzeit anwenden lassen. Wir beweisen dabei die Hadamard-Eigenschaft sowohl für den Grund- als auch für die Temperaturzustände aus [17].

1.2. Geometrische Grundlagen

Da wir es in dieser Arbeit häufig mit Mannigfaltigkeiten zu tun haben werden, wollen wir in diesem Abschnitt einige der damit verbundenen Konventionen, Definitionen und Werkzeuge in Erinnerung rufen. Gleichzeitig dient dieser Abschnitt dazu, die in diesem Zusammenhang von uns verwendete Notation zu fixieren.

Mannigfaltigkeiten: Die Definition einer Mannigfaltigkeit soll hier nicht wiederholt werden. Wir verweisen dazu auf die Standardliteratur. Alle im Text auftauchenden Mannigfaltigkeiten sollen zusammenhängend, parakompakt (s.u.) und C^∞ sein. Raumzeiten haben die Dimension $s+1$, wir versehen sie mit der Signatur $1-s$, bezeichnen sie mit $\mathcal{M}$ und ihre Metriken mit g. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Mannigfaltigkeiten ohne Metrik werden von uns mit Σ, ihre Dimension mit n und ihre Metriken gegebenenfalls mit γ bezeichnet.
Eine Karte einer Mannigfaltigkeit Σ bezeichnen wir mit (U,π), dabei ist $U \subset \Sigma$ und $\pi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$.

Differenzierbare Abbildungen: Sei Σ eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine Funktion $f : \Sigma \to \mathbb{C}$ heißt C^r, wenn für beliebige Karten (U,π) die Funktionen $f(\pi^{-1}\cdot)$ in $C^r(\pi U)$ liegen. Entsprechend nennen wir sie glatt (C^∞), wenn sie in allen Karten glatt ist.
Durch analogen Rückgriff auf die Karten wird auch allgemeiner die Differenzierbarkeit für Abbildungen zwischen zwei beliebigen Mannigfaltigkeiten definiert.

Zerlegung der Eins: Ein topologischer Raum T heißt *parakompakt*, wenn jede Überdeckung (U_i) von T eine Verfeinerung $\tilde{U}_j$ besitzt, die lokal endlich ist, d.h. zu jedem $K \Subset T$[i] gilt $K \cap \tilde{U}_i \neq \emptyset$ nur für endlich viele Indices i.
Sei Σ eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine *Zerlegung der Eins* auf Σ ist eine Familie (ϕ_i) von Funktionen $\phi_i \in C_0^\infty(\Sigma)$ auf Σ, so daß

$$0 \leq \phi_i \leq 1, \qquad \sum_i \phi_i = 1.$$

Ist eine offene Überdeckung (U_j) von Σ gegeben, so heißt (ϕ_i) der Überdeckung untergeordnet, wenn es zu jedem Index i einen Index j gibt, so daß $\operatorname{supp}\phi_i \subset U_j$ ist. Zu gegebenem (U_j) kann eine solche Zerlegung der Eins immer gefunden werden.
Ist (U_j) lokal endlich und sind die einzelnen U_i relativ kompakt, so findet man sogar eine untergeordnete Zerlegung der Eins (ϕ_j) derart, daß zu jedem Index j $\operatorname{supp}\phi_j \subset U_j$ gilt.
Alle im folgenden auftretenden Mannigfaltigkeiten werden als parakompakt angenommen, und wenn wir von einer untergeordneten Zerlegung der Eins sprechen, dann meinen wir immer eine in dem eben erläuterten speziellen Sinn.

Pullback und Tangentialabbildung: Seien Σ, Σ' C^∞-Mannigfaltigkeiten, $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ eine invertierbare Abbildung zwischen ihnen und f eine Funktion auf Σ'. Dann bezeichen

[i] '$\Subset$' meint 'kompakte Teilmenge von'.

wir mit $\phi^* f$ den Pullback

$$\phi^* f(p) := f(\phi(p)), \qquad p \in \Sigma$$

von f nach Σ. Den 'inversen Pullback' $(\phi^{-1})^*$ notieren wir als ϕ_*.

Ist ϕ differenzierbar, so erhalten wir die von uns ebenfalls mit ϕ_* bezeichnete Tangentialabbildung $\phi_* : T\Sigma \to T\Sigma'$ vermöge

$$\phi_*(p, X) := (\phi(p), X') \text{ mit } X'(f) := X(\phi^* f), \qquad X \in T_p\Sigma,\ f \text{ differenzierbar.}$$

Die inverse Abbildung $(\phi^{-1})_*$ bezeichnen wir wiederum mit ϕ^*.
Indem wir die Dualität zwischen Tangential- und Kotangentialraum ausnutzen, gewinnen wir auch eine Abbildung $\phi^* : T^*\Sigma' \to T^*\Sigma$, indem wir für alle Vektorfelder X auf Σ und alle 1-Formen A auf Σ'

$$(\phi^* A)(X) := A(\phi_* X) \tag{1.1}$$

setzen. Auch hier bezeichnen wir wieder die Inverse mit ϕ_*.
Wir hoffen, daß die *gleichen* Bezeichnungen für *verschiedene* Abbildungen nicht zu Verwirrung führen. Diese Notation hat den Vorteil, daß die Position des $*$ immer die *Richtung* der betreffenden Abbildung angibt. Welche Objekte abgebildet werden, sollte aus dem Zusammenhang ersichtlich sein.

Integration: Ein konsistentes, koordinatenunabhängiges Lebesgue-Integral auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist für n-Formen gegeben. Sollen Funktionen integriert werden, müssen diese also zuvor mit einer n-Form multipliziert werden.
Es besteht eine eindeutige Abbildung zwischen n-Formen und skalaren Dichten vom Gewicht $+1$. Daher ist auch durch eine solche Dichte ein Integralbegriff für Funktionen gegeben.
Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (Σ, γ) existiert eine ausgezeichnete n-Form, die sogenannte Volumenform. Diese bezeichnen wir als dVol_γ und schreiben das betreffende Integral für eine Funktion f als $\int f \, \mathrm{dVol}_\gamma$ oder $\int f(p) \, \mathrm{dVol}_\gamma(p)$ um die Integrationsvariable zu kennzeichnen.
Hat f Träger unter einer Karte (U, π) und sind $\gamma_{ij}(x)$ die Komponenten von γ in den betreffenden Koordinaten, so ist

$$\int f \, \mathrm{dVol}_\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} \pi_* f(x) \, |\det(\gamma_{ij})(x)|^{1/2} \, \mathrm{d}^n x,$$

dabei ist $\int_{\mathbb{R}^n}$ das gewöhnliche Lebesgue-Integral auf dem $\mathbb{R}^n$.

Normale Umgebungen, geodätischer Abstand: Sei Σ eine (Pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition 1.2.1. Eine zusammenhängende offene Menge $U \subset \Sigma$ heißt *normale Umgebung*, sofern es zu irgend zwei Punkten p, q aus U genau eine ganz in U liegende, p und q verbindende Geodäte gibt.
Für zwei Punkte p, q aus einer normalen Umgebung definieren wir den *geodätischen Abstand* $r(p,q)$ zwischen p und q als die Länge der in U liegenden eindeutigen, p und q verbindenden Geodäte.

Wichtig ist das folgende Ergebnis von Whitehead (zitiert nach [4], Sec. 1.2)

Satz 1.2.2. *Jeder Punkt einer (Pseudo-)Riemannschen C^∞-Mannigfaltigkeit besitzt eine normale Umgebung.*

Für unsere späteren Rechnungen erweist es sich auch noch als praktisch, die (im Gegensatz zum geodätischen Abstand r glatte) Funktion $\sigma := \frac{1}{2}r^2$ einzuführen.

Die Räume $C_0^\infty(\Sigma), C^\infty(\Sigma)$: Wir wollen die Mengen der glatten Funktionen bzw. der glatten Funktionen mit kompaktem Träger auf einer Mannigfaltigkeit Σ als lokalkonvexe Räume definieren. Dies ist ohne weiteres und in kompletter Analogie zum $\mathbb{R}^n$ möglich:
Wir fixieren dazu eine Überdeckung U_i von Σ durch Kartenumgebungen von Karten (U_i, π_i) und eine zugehörige, der Überdeckung untergeordnete Zerlegung ξ_i der Eins. Mit deren Hilfe definieren wir jetzt die Schar[ii]

$$|f|_{k,K} := \sum_i \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{U_i \cap K} |\partial^\alpha \pi_*(\chi_i f)| \tag{1.2}$$

von Halbnormen für glatte Funktionen f und $k \in \mathbb{N}$, $K \Subset \Sigma$. Wählt man eine andere Überdeckung und Zerlegung der Eins, so erhält man eine andere Schar von Halbnormen $|\cdot|'_{k,K}$. Diese sind jedoch äquivalent zu den urspünglichen (siehe dazu z.B. [4]), d.h. zu jedem k, K gibt es Konstanten c, c', so daß

$$|f|_{k,K} \leq c\,|f|'_{k,K} \leq c'\,|f|_{k,K} \qquad \forall f \in C_0^\infty(\Sigma)$$

gilt. Die beiden verschiedenen Halbnormensysteme generieren also die gleichen Topologien. Deshalb unterscheiden wir die verschiedenen Halbnormensysteme im folgenden auch nicht in der Notation.
Konvergenz in $C^\infty(\Sigma)$ wird nun definiert als Konvergenz in allen obigen Halbnormen.
*Folgen*konvergenz in $C_0^\infty(\Sigma)$ wird definiert als Konvergenz bezüglich aller Halbnormen wie oben, wobei zusätzlich alle Folgenglieder ihren Träger in *einem gemeinsamen* Kompaktum haben müssen. Die volle Definition der Topologie ist in diesem Fall etwas komplizierter

[ii] Hier und im folgenden bezeichnen $\alpha, \beta, \ldots$ Multiindices, d.h Elemente aus $\mathbb{N}_0^n$. Wir setzen für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und ein beliebiges n-komponentiges Objekt $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k, \qquad x^\alpha := \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}.$$

('induktiver Limes'), wird aber von uns im folgenden nicht benötigt und soll deswegen auch hier nicht genauer besprochen werden.

Die Räume $\mathcal{D}'(\Sigma), \mathcal{E}'(\Sigma)$: Wir definieren nun die Räume $\mathcal{D}'(\Sigma)$ und $\mathcal{E}'(\Sigma)$ als Räume der stetigen linearen Funktionale über $C_0^\infty(\Sigma)$ bzw. $C^\infty(\Sigma)$.[iii]
Wir wollen noch unsere Notation abrunden. Seien dazu Σ und Σ' Mannigfaltigkeiten und $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ eine invertierbare Abbildung. Dann erklären wir

$$\phi_* : \mathcal{D}'(\Sigma) \to \mathcal{D}'(\Sigma'), \qquad \phi_* u(\cdot) := u(\phi^* \cdot)$$

und $\phi^* := (\phi_*)^{-1}$.

Weitere Konventionen:

- Auf einer (Pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (Σ, γ) induziert die Metrik γ einen Isomorphismus zwischen $T^*\Sigma$ und $T\Sigma$. Insbesondere definieren wir zu $\xi \in T_p^*\Sigma$ ein Element $\xi^\sharp \in T_p\Sigma$ gemäß

$$\xi = \gamma_p(\xi^\sharp, \cdot).$$

- Zwei Punkte p, q einer Raumzeit $\mathcal{M}$ heißen akausal, sofern es keine kausale (d.h. zeit- oder lichtartige) glatte Kurve in $\mathcal{M}$ gibt, die p und q verbindet. Wir notieren das als $p \bigtimes q$.
  Sei $\mathcal{M}$ zeitorientierbar und $V \subset \mathcal{M}$. Mit $J^+(V)$, $J^-(V)$ bezeichnen wir die kausale Zukunft bzw. Vergangenheit von V d.h. alle Punkte, die durch zukunftsgerichtete bzw. vergangenheitsgerichtete kausale glatte Kurven mit einem Punkt aus V verbunden werden können. Wir setzen $J(V) := J^+(V) \cup J^-(V)$.

Um den Umgang mit den Karten einer Mannigfaltigkeit Σ etwas zu vereinfachen, wollen wir noch einige Vereinbarungen bezüglich der Notation treffen:

- Die Buchstaben p, q bezeichnen Punkte der Mannigfaltigkeit Σ. Mit x, y bezeichnen wir hingegen Punkte im $\mathbb{R}^n$.

- Sprechen wir über eine Funktion f auf Σ und wollen ihren Wert an einem bestimmten Punkt p der Mannigfaltigkeit angeben, so schreiben wir $f(p)$. Betrachten wir f hingegen in den Koordinaten einer lokalen Karte (U, π), so schreiben wir gelegentlich $f(x)$ mit $x \in \pi U$ und meinen *eigentlich* $\pi_* f(x)$.

[iii] Wir weisen darauf hin, daß wir damit nicht der gebräuchlichen Konvention folgen. Üblicherweise werden die stetigen linearen Funktionale über obigen Räumen als Distributions*dichten* bezeichnet und deren Räume anders notiert. Distributionen sind dann Objekte, die erst noch mit einer Dichte multipliziert werden müssen, um Funktionale zu werden.

1.3. QFT auf stationären und statischen Raumzeiten

1.3.1. Stationäre und statische Raumzeiten

Möchte man Quantenfeldtheorie auf generischen Raumzeiten betreiben, so stößt man auf schwerwiegende Probleme, die durch die möglicherweise komplizierte Raumzeit-Geometrie und -Topologie verursacht werden:
Einerseits ist die Formulierung der Kinematik für quantenfeldtheoretische Modelle schwierig, denn eine möglicherweise 'zerrissene' oder 'durchlöcherte' kausale Struktur der Raumzeit macht wohlgestellte Anfangswertprobleme für Feldgleichungen unmöglich.
Andererseits ist, wie oben schon geschildert, wegen fehlender Symmetrien die Charakterisierung *physikalischer* Zustände schwierig.
In der vorliegenden Arbeit entschärfen wir beide Probleme, indem wir zusätzliche Annahmen über die Raumzeiten machen, mit denen wir arbeiten. Diese Annahmen sind gegenüber der Situation auf generischen Raumzeiten starke Einschränkungen. Es wird sich jedoch zeigen, daß sie trotzdem viele physikalisch interessante Modelle einschließen.

Globale Hyperbolizität: Als Forderung an die kausale Struktur der Raumzeit stellen wir die der *globalen Hyperbolizität*:

Definition 1.3.1. Eine Raumzeit $\mathcal{M}$ heißt *global hyperbolisch*, sofern sie eine sogenannte *Cauchy-Fläche* besitzt, d.h. eine glatte Hyperfläche $\Sigma \subset \mathcal{M}$, so daß jede kausale Kurve ohne Endpunkte Σ genau einmal schneidet.

Eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ hat eine relativ einfache kausale Struktur: Es gibt keine geschlossenen kausalen Kurven und solche treten auch nicht bei kleinen Deformationen von $\mathcal{M}$ auf. Globale Hyperbolizität hat weitere Konsequenzen, die für uns von Interesse sind:
Ist $\mathcal{M}$ global hyperbolisch, so ist die Topologie von $\mathcal{M}$ relativ einfach. Ist Σ eine Cauchy-Fläche von $\mathcal{M}$, so gilt $\mathcal{M} \simeq \mathbb{R} \times \Sigma$. Insbesondere liegt also jeder Punkt von $\mathcal{M}$ auf einer zu Σ homöomorphen Cauchy-Fläche.
Zum anderen sind Anfangswertprobleme für hyperbolische Differentialgleichungen mit Anfangswerten auf einer Cauchy-Fläche wohlgestellt (siehe z.B. [3]). Dies wollen wir für den Fall der Klein-Gordon-Gleichung etwas konkreter fassen: Seien dazu die Abbildungen

$$\begin{aligned} \rho_0 : C^\infty(\mathcal{M}) &\longrightarrow C^\infty(\Sigma), \quad F \longmapsto F|_\Sigma \\ \rho_1 : C^\infty(\mathcal{M}) &\longrightarrow C^\infty(\Sigma), \quad F \longmapsto (n^a \partial_a F)|_\Sigma \end{aligned} \tag{1.3}$$

einer Funktion auf einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$ auf ihre Anfangsdaten auf einer Cauchy-Fläche Σ gegeben. n bezeichnet dabei das Normalenvektorfeld von Σ und $n^a \partial_a$ mithin die Normalenableitung. Mit ρ_0', ρ_1' bezeichnen wir die jeweiligen Adjungierten, die $\mathcal{E}'(\Sigma)$ in $\mathcal{E}'(\mathcal{M})$ abbilden. Es gibt nun eine Abbildung E, die wir (wie die analoge Abbildung auf dem Minkowski-Raum) als Propagator für die KG-Gleichung bezeichnen, denn sie hat die folgenden Eigenschaften:

Satz 1.3.2 ([3], vergleiche auch [14]). $\mathrm{E} : C_0^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ *ist linear, stetig und es gilt*

$$\mathrm{E}(\Box_g + m^2)F = (\Box_g + m^2)\,\mathrm{E}\,F = 0, \quad \operatorname{supp}\mathrm{E}\,F \subset J(\operatorname{supp}F).$$

Weiterhin ist

$$\psi = \mathrm{E}\,\rho_0' f_1 - \mathrm{E}\,\rho_1' f_0$$

die (eindeutige) glatte Lösung der KG-Gleichung zu den Cauchy-Daten $f_0 = \rho_0\psi, f_1 = \rho_1\psi \in C_0^\infty(\Sigma)$.

Die letzte Gleichung wollen wir noch in einer etwas anderen Form schreiben: Offensichtlich ist

$$\begin{array}{ll} \rho_0\,\mathrm{E}\,\rho_0' = 0 & \rho_0\,\mathrm{E}\,\rho_1' = -1 \\ \rho_1\,\mathrm{E}\,\rho_0' = 1 & \rho_1\,\mathrm{E}\,\rho_1' = 0. \end{array} \tag{1.4}$$

Stationarität: Weiterhin wollen wir unsere Betrachtungen auf stationäre Raumzeiten einschränken, das sind solche, die bezüglich einer bestimmten Zeitkoordinate eine zeitinvariante Geometrie besitzen. Präziser und koordinatenfrei ist eine stationäre Raumzeit definiert als eine Raumzeit, auf der ein *zeitartiges Killing-Vektorfeld* existiert, d.h. ein zeitartiges Vektorfeld v, so daß

$$\nabla_a v_b - \nabla_b v_a = 0$$

gilt. Gibt es ein Vektorfeld, welches diese Gleichung erfüllt, so kann lokal immer ein Koordinatensystem gewählt werden, in dem die Metrik g_{ab} unabhängig von der Zeitkoordinate ist. Auf einer global hyperbolischen, stationären Raumzeit $\mathcal{M}$ gibt es auch global eine derart ausgezeichnete Zeitkordinate, die einem die folgende Darstellung von $\mathcal{M}$ ermöglicht [18]: Sei Σ Cauchy-Fläche von $\mathcal{M}$. Man erhält dann eine Isometrie $\iota = (t, \underline{\iota}) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}\times\Sigma$, wobei die Metrik auf $\mathbb{R}\times\Sigma$ (in lokalen Koordinaten) die Form

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 - \gamma(\underline{\beta}, \underline{\beta}) & \underline{\beta}^t \\ \underline{\beta} & \gamma \end{pmatrix}$$

besitzt und das Killing-Vektorfeld v durch ∂_t gegeben ist. Dabei ist α eine glatte Funktion, $\underline{\beta}$ ein glattes Vektorfeld auf Σ und γ die durch g auf Σ induzierte Riemannsche Metrik, die letzteren jeweils in beliebigen Koordinaten von Σ. $\underline{\beta}^t$ bezeichnet den transponierten Vektor zu $\underline{\beta}$.
Die Translationen in der ausgezeichneten Zeitkoordinate t ergeben eine einparametrige Gruppe $\tau_a,\ a \in \mathbb{R}$ von Isometrien $\tau_a(p) := \iota^{-1}(t(p) + a, \underline{\iota}(p))$.

1.3.2. Das Klein-Gordon-Feld

Als Beispiel einer Quantenfeldtheorie auf einem gekrümmten Raumzeit-Hintergrund wollen wir die Theorie des neutralen Klein-Gordon-Feldes (im Folgenden kurz KG-Feld) auf einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$ betrachten.

Feldalgebra, Zustände des Feldes: In Analogie zur Formulierung der Theorie auf dem Minkowskiraum würde man versuchen, das KG-Feld ϕ als eine lineare, stetige Abbildung ('operatorwertige Distribution')

$$\phi : C_0^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{ lin. Operatoren über } \mathcal{H}$$

mit einem geeigneten Hilbertraum $\mathcal{H}$ zu konstruieren, die die Eigenschaften

1. ϕ erfüllt die KG-Gleichung in dem Sinne, daß
$$\phi((\Box_g + m^2)f) = 0 \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathcal{M}).$$
2. ϕ erfüllt (bezüglich geeigneter Definitionsbereiche) die Vertauschungsrelationen
$$[\phi(f), \phi(g)] = \langle f, \mathrm{E}\, g\rangle \mathbb{1}.$$
Dabei ist $\langle , \rangle$ das Skalarprodukt bezüglich des kanonischen Volumenelementes von $\mathcal{M}$.
3. Für reelle Funktionen f ist $\phi(f)$ bezüglich geeigneter Definitionsbereiche selbstadjungiert, d.h. $\phi(f)^\dagger = \phi(f)$. Allgemein gilt $\phi(f)^\dagger = \phi(\overline{f})$.

besitzt.
Die Wahl des Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ und der Abbildungsvorschrift ϕ entspricht der Auswahl einer Klasse von Zuständen mit jeweils ähnlicher globaler Struktur. Diese ist physikalisch sehr bedeutsam und speziell auf gekümmten Raumzeiten in vielen Fällen nicht einfach zu treffen. Daher legen wir uns zunächst nicht auf einen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ fest, sondern behandeln die Operatoren $\phi(f)$ als Elemente einer abstrakt definierten $*$-Algebra $\mathfrak{A}$, der sogenannten Feldalgebra:
Wir definieren also $\mathfrak{A}$ als die von in $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ linearen Objekten $\phi(f)$ mit den obigen Eigenschaften 1 und 2 sowie der $\mathbb{1}$ komplex erzeugte Algebra, versehen mit der aus Bedingung 3 resultierenden $*$-Struktur.[iv]

Ist $\mathcal{M}$ zusätzlich stationär, so gibt es wie im letzten Abschnitt gesehen eine einparametrige Gruppe τ_t von Isometrien, die als Zeittranslationen aufgefasst werden können. Diese induzieren eine einparametrige Gruppe von Automorphismen α_t auf $\mathfrak{A}$ durch

$$\alpha_t(\phi(f)) := \phi((\tau_t)_* f)$$

[iv] Eine mathematisch präzise Definition von $\mathfrak{A}$ kann leicht erreicht werden, indem man von der Tensoralgebra über $C_0^\infty(\mathcal{M})$ ausgeht und duch der Linearität und den Eigenschaften 1,2 und 3 entsprechende Ideale teilt.

und Fortsetzung auf ganz $\mathfrak{A}$ als Automorphismus.

Der physikalische Zustand des Quantenfeldes kann nun durch ein Zustandsfunktional beschrieben werden: Ein lineares Funktional ω auf $\mathfrak{A}$ mit den zusätzlichen Eigenschaften $\omega(A^*A) \geq 0$ für A aus $\mathfrak{A}$ (Positivität) und $\omega(\mathbb{1}) = 1$ (Normierung) heißt Zustand (über $\mathfrak{A}$).

Die eben gegebene Beschreibung einer Quantenfeldtheorie durch eine Algebra und einen Zustand ist einer der Grundgedanken der *algebraischen Quantenfeldtheorie*. Für eine genauere Beschreibung ihrer Prinzipien verweisen wir auf [8]. Für die Behandlung von Quantenfeldtheorien auf gekrümmter Raumzeit erweist sich deren Formulierung im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie als äußerst nützlich.

Hat man einen Zustand über der Feldalgebra gegeben, so ergibt die sogenannte GNS-Konstruktion (nach Gelfand, Naimark, Segal, für eine genaue Beschreibung siehe wiederum [8]) eine Darstellung der Feldalgebra als Algebra von Operatoren auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ im Sinne der Bedingungen 1,2 und 3. Die Beschreibung der Theorie durch Algebra und Zustand enthält also auch die konventionelle Beschreibung des Feldes als operatorwertige Distribution.

Ein Zustand ist vollständig bestimmt durch die multilinearen Funktionale

$$\omega_m(f_1, f_2, \dots f_m) := \omega(\phi(f_1)\phi(f_2)\dots\phi(f_m)) \qquad f_1, f_2, \dots f_m \in C_0^\infty(\mathcal{M}) \qquad m = 1, 2, \dots ,$$

die sogenannten n-Punkt-Funktionen. Wir betrachten im folgenden nur Zustände, deren n-Punkt-Funktionen *stetige* Funktionale sind.
Wir halten an dieser Stelle fest, daß die n-Punkt-Funktionen wegen der Eigenschaft 1 von ϕ Lösungen der KG-Gleichung in allen Argumenten (im Sinne von Distributionen) sind.

Quasifreie Zustände: Wir wollen nun eine besonders einfache Klasse von Zuständen vorstellen, die sogenannten *quasifreien Zustände*. Diese sind vollständig durch ihre jeweilige Zweipunktfunktion ω_2 beschrieben. Ihre n-Punkt-Funktionen lassen sich per Definition auf die folgende Weise durch ω_2 ausdrücken:

$$\omega_m(f_1, \dots f_m) := \begin{cases} 0 & \text{für } m \text{ ungerade} \\ \displaystyle\sum_{\substack{\text{Zerlegungen} \\ \text{von } 1,2,\dots m \\ \text{in Paare } (i,j), i<j}} \prod_{\text{Paare } (i,j)} \omega_2(f_i, f_j) & \text{für } m \text{ gerade} \end{cases} .$$

Quasifreie Zustände haben eine weitere wichtige Eigenschaft: Ihre GNS-Darstellungen kann man explizit angeben. Es handelt sich um Fockraumdarstellungen, d.h. es gibt einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine lineare Abbildung $\mathbf{k} : C_0^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ (mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften), so daß durch

$$\pi(\phi(f)) := a^\dagger(\mathbf{k}(f)) + a(\mathbf{k}(f))$$

eine Darstellung π der Feldalgebra $\mathfrak{A}$ auf dem Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ über $\mathcal{H}$ gegeben ist und

$$\omega(A) = \langle \Omega, \pi(A)\Omega \rangle_{\mathcal{F}(\mathcal{H})}$$

mit dem Fockraum-Vektor $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$. $a^\dagger$ und a sind dabei die üblichen Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.
Den Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ bezeichnet man auch als *Einteilchen-Hilbert-Raum*, das Paar $(\mathbf{k}, \mathcal{H})$ als *Einteilchen-Struktur*. Für eine präzise Definition dieser Begriffe verweisen wir auf [18], für den Beweis der obigen Behauptung auf [19].

Quasifreie Grundzustände: Der Grundzustand eines physikalischen Systems ist der Zustand mit der niedrigsten Gesamtenergie. In der Quantenfeldtheorie auf dem Minkowskiraum wird der Vakuumzustand daher dadurch charakterisiert, daß der Generator der Zeittranslationen (der Hamilton-Operator des Systems) auf dem GNS-Hilbert-Raum des Vakuumzustands positives Spektrum hat ('Spektrumsbedingung') und den Vakuumvektor vernichtet.
Auf stationären Raumzeiten kann man wegen der Zeittranslations-Symmetrie ähnlich vorgehen: Im Falle des KG-Feldes wird definiert

Definition 1.3.3 (siehe dazu z.B. [18]). Ein quasifreier Grundzustand für das KG-Feld ist ein quasifreier Zustand mit Einteilchen-Struktur $(\mathbf{k}, \mathcal{H})$, so daß es einen positiven selbstadjungierten Operator h ('Einteilchen-Hamiltonoperator') auf $\mathcal{H}$ gibt, mit $\mathbf{k} \circ \tau_t = \exp(-ith)\mathbf{k}$.

Man sieht, wie die Positivitätsforderung in die Definition eingeht. Daß der Hamilton-Operator $H = \mathrm{d}\Gamma(h)$ [v] das Fock-Vakuum Ω vernichtet, folgt schon aus den Definitionen von $\mathrm{d}\Gamma$ und Ω.
Es zeigt sich, daß ein quasifreier Grundzustand des KG-Feldes auf einer gegebenen stationären global hyperbolischen Raumzeit eindeutig ist [15].

KMS-Zustände: Bei den sogenannten KMS-Zuständen handelt es sich um Zustände, die das thermische Gleichgewicht bei einer bestimmten Temperatur beschreiben. Definiert werden sie über die Analytizitätseigenschaften der Funktionen $\omega(A\alpha_t(B))$ für bestimmte A, B aus $\mathfrak{A}$.
KMS-Zustände für das KG-Feld die quasifrei sind, kann man alternativ über Eigenschaften ihrer Einteilchen-Struktur charakterisieren [15]. Sie sind, wie die quasifreien Grundzustände, eindeutig [15].

1.4. Die Hadamard-Bedingung

1.4.1. Einführung

Die Menge der positiven linearen Funktionale über der Feldalgebra ist sehr groß. Nur äußerst wenige dieser Zustände beschreiben jedoch Situationen, die unter physikalischen

[v] $\mathrm{d}\Gamma$ meint die 'zweite Quantisierung' für selbstadjungierte Operatoren, siehe [24].

Gesichtspunkten zulässig und sinnvoll sind (d.h. sie weisen z.B. keine singulären Energieverteilungen oder ähnliches auf).
Selbst die recht eingeschränkte Klasse der quasifreien Zustände enthält noch viele, die als unphysikalisch betrachtet werden. Daher sind weitere Kriterien erforderlich, um die physikalisch sinnvollen Zustände auszuzeichnen. Ein solches Kriterium stellt die Hadamard-Bedingung dar. Entstanden ist sie aus der Forderung, daß in physikalisch akzeptablen Zuständen der Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors T_{ab} in zufriedenstellender Weise als glatte Funktion auf $\mathcal{M}$ definierbar sein soll. [vi] Hadamard-Zustände sind nun quasifreie Zustände, deren Zweipunktfunktion eine bestimmte zustandsunabhängige Singularitätenstruktur aufweist. Grob gesprochen muß sie von der Form

$$\omega_2(p,q) = \frac{U(p,q)}{r(p,q)} + V(p,q)\ln(r(p,q)) + W(p,q)$$

sein. Dabei bezeichnet r den geodätischen Abstand (bezüglich g), U, V und W sind glatte Funktionen und U und V hängen (auf eine genau definierte und lokale Weise) ausschließlich von der Metrik g und ihren Ableitungen ab.[vii] Anders ausgedrückt stellt die Hadamard-Bedingung also eine Einschränkung des Kurzabstands- bzw. Hochenergieverhaltens der betreffenden Zustände dar.[viii]
Die mathematische Präzisierung obiger Definition erfordert erheblichen Aufwand. Sie wurde zuerst in [19] erreicht.

Hadamard-Zustände haben Eigenschaften, die sie zu guten Kandidaten für physikalische Zustände machen: Zunächst lässt sich für sie tatsächlich eine zufriedenstellende Definition des Erwartungswertes von T_{ab} geben [32]. Weiterhin haben sie die Eigenschaften, die man im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie für das Folium der physikalischen Zustände fordert [28], [29].

Ein Durchbruch im Verständnis der Hadamard-Bedingung gelang mit ihrer Formulierung im Rahmen der mikrolokalen Analysis durch Radzikowski [23]. Diese Umformulierung ist zunächst technisch sehr hilfreich denn sich macht die in der mikrolokalen Analysis entwickelten mathematischen Werkzuge anwendbar. Sie ist jedoch auch konzeptionell wichtig, denn sie hat gezeigt, daß die Hadamard-Bedingung als Ersatz der Spektrumsbedingung aus der Minkowskiraumtheorie auf gekrümmten Raumzeiten betrachtet werden kann. Außerdem hat sie die Verallgemeinerungen der Hadamard-Bedingung auf beliebige Zustände [1]

[vi] Im allgemeinen ist dies nicht gewährleistet, denn die naive Definition von T_{ab} als quadratischer Ausdruck in den Feldern enthält Produkte von Distributionen am selben Raum-Zeit-Punkt, ist also (und mit ihm auch sein Erwartungswert) zunächst nicht einmal als Distribution wohldefiniert.
Das Verfahren der Normalordnung, mit dem man dieses Problem auf dem Minkowski-Raum löst, ist auf gekrümmten Raumzeiten nicht problemlos einsetzbar, denn es ist abhängig von der Wahl eines ausgezeicheten Referenzzustandes.

[vii] Eine solche Singularitätenstruktur weisen auch die zuerst von Hadamard konstruierten Lösungen hyperbolischer DGL auf beliebigen Mannigfaltigkeiten auf. Daher stammt die Bezeichnung *Hadamard-Bedingung*.

[viii] Der Begriff 'Kurzabstandsverhalten' ist hier bezüglich der Topologie auf $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ zu verstehen. Die Hadamard-Bedingung betrifft durchaus auch das Verhalten an auf $\mathcal{M}$ weit voneinander entfernten Punkten!

und in den Rahmen der algebraischen Quantefeldtheorie [30] ermöglicht.
Diese Umformulierung sowie die für sie benötigten mathematischen Begriffe werden wir im nächsten Abschnitt vorstellen.

1.4.2. Wellenfrontmengen und Hadamard-Bedingung

Wir wollen zunächst die sogenannten *Wellenfrontmengen* als ein mathematisches Hilfsmittel zur Beschreibung der Singularitäten von Distributionen vorstellen. Diese wurden von Radzikowski bei der Umformulierung der Hadamard-Bedingung herangezogen. Im Anschluß an deren Beschreibung werden wir das Resultat von Radzikowski vorstellen.
Eine detailliertere Einführung in die Theorie der Wellenfrontmengen sowie weitergehende Resultate findet man z.B. in [12].

Wir wollen die Beschreibung der Wellenfrontmengen damit beginnen, daß wir sagen, was eine Singularität einer Distribution ist:

Definition 1.4.1. Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$. Dann definieren wir die Menge R der regulären Punkte von u als

$$\mathrm{R}(u) := \Big\{ p \in \mathcal{M} \;\Big|\; \exists \text{ Umgebung } V \text{ von } p,\ h \in C^\infty(V), \\ u(f) = \int hf \,\mathrm{dVol} \qquad \forall f \in C_0^\infty(V) \Big\}.$$

Der singuläre Träger von u ist die Menge

$$\operatorname{singsupp} u := \mathcal{M} \setminus \mathrm{R}(u).$$

Anders ausgedrückt liegt immer dann eine Singularität vor, wenn die Distribution nicht durch eine glatte Funktion gegeben ist.
Solche Singularitäten werden nun durch den Begriff der Wellenfrontmengen genauer klassifiziert. Dabei wird verwendet, daß sich die lokale Regularität einer Funktion bzw. Distribution mit kompaktem Träger auf dem $\mathbb{R}^n$ im asymptotischen Verhalten ihrer Fourier-Transformierten[ix] (im folgenden kurz F-Transformierten) wiederspiegelt: So besagt das Theorem von Paley, Wiener und Schwartz (siehe z.B. [25] Thm. IX.11, IX.12), daß die F-Transformierte einer solchen Distribution höchstens polynomial ansteigt und schnell abfällt, sofern die Distribution durch eine glatte Funktion gegeben ist.

[ix] Zur Fixierung der verwendeten Konventionen notieren wir die Definition der Fourier-Transformierten und ihrer Inversen für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$\hat{f}(\xi) \equiv \mathcal{F}(f)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x,$$
$$\check{f}(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int f(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi.$$

Allerdings verliert man durch F-Transformation die Ortsauflösung der Singularitäten: Um aus dem asymptotischen Verhalten der F-Transformation Informationen über das Verhalten der Distribution *ausschließlich* an *einem* Punkt zu erhalten, muß man diese vorher möglichst gut um diesen Punkt lokalisieren.
Die Definition, die diese beiden Gedanken, zunächst für Distributionen auf dem $\mathbb{R}^n$, zusammenfasst, lautet

Definition 1.4.2. Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Die Menge der regulären Richtungen am Punkt x wird definiert als

$$\mathrm{R}_x(u) := \Big\{ \xi \in \mathbb{R}^n \ \Big| \ \exists h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ mit } h(x) \neq 0, \ \exists \text{ Umgebung } V \text{ von } \xi, \text{ so daß } \forall N \in \mathbb{N}\ \exists c_N \text{ mit } \left|\widehat{hu}(\lambda\xi')\right| \leq c_N (1+\lambda)^{-N} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall \xi' \in V \Big\}.$$

Weiterhin wird definiert

$$\begin{aligned} \mathrm{WF}_x(u) &:= \mathbb{R}^n \setminus (\mathrm{R}_x(u) \cup \{0\}) \,, \\ \mathrm{WF}(u) &:= \left\{ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \xi \in \mathrm{WF}_x(u) \right\} . \end{aligned}$$

Wir wollen einige grundlegende Eigenschaften von WF notieren: Mit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ist

- $\mathrm{WF}_x(u)$ ein Kegel.
- $\mathrm{WF}_x(hu) \subset \mathrm{WF}_x(u)$ sofern $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Gleichheit, wenn außerdem $h(x) \neq 0$.
- $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{WF}_x(u) \neq \emptyset\} = \operatorname{singsupp} u$.

Der erste Punkt besagt, daß wir es bei der Wellenfrontmenge mit einer 'Menge von Richtungen' zu tun haben. Der zweite zeigt, daß die Definition von WF_x nur das lokale Verhalten der Distribution bei x betrifft. Der letzte Punkt zeigt, daß mit WF tatsächlich eine feinere Klassifikation der Singularitäten aus Definition 1.4.1 erreicht wird.
Als nächstes betrachten wir das Transformationsverhalten der Wellenfrontmenge unter Diffeomorphismen:

Satz 1.4.3 ([25] Thm. IX.44). [x] *Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\mathrm{WF}(\phi_* u) = \left\{ (\phi(x), (d\phi^{-1})^t \xi \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid (x,\xi) \in \mathrm{WF}(u) \right\} .$$

Dabei meint $(d\phi^{-1})^t$ die Transponierte der Jakobimatrix $(d\phi^{-1})_{ij} = \frac{\partial \phi_i^{-1}}{\partial x_j}$ von ϕ^{-1}.

[x] In [25] gibt es bei der Formulierung des Satzes einen Druckfehler. Dieser wurde in obiger Wiedergabe korrigiert.

Mit anderen Worten, WF transformiert sich wie eine Teilmenge des Kotangentialbündels $T^*\mathbb{R}^n$. Dieses Transformationsverhalten ermöglicht uns, die Wellenfrontmenge auch für Distributionen auf Mannigfaltigkeiten zu definieren:

Definition 1.4.4. Sei $u \in \mathcal{D}'(\Sigma)$. Mit Hilfe einer lokalendlichen Überdeckung (U_i) von Σ durch Kartenumgebungen und einer untergeordneten Zerlegung χ_i der Eins definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{WF}(u) &:= \bigcup_i \pi^* \,\mathrm{WF}(\pi_*(\chi_i u)), \\ \mathrm{WF}_p(u) &:= \left\{\xi \in T^*_p\Sigma \mid (p,\xi) \in \mathrm{WF}(u)\right\} \end{aligned}$$

für $p \in \Sigma$.

Diese Menge ist offensichtlich wohldefiniert und unabhängig von der Wahl der Überdeckung (U_i).

Diese Definition der Wellenfrontmenge steht am Anfang einer ganzen mathematischen Theorie, der sogenannten mikrolokalen Analysis (z.B. [12],[7]). Diese widmet sich dem Studium partieller Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von Objekten auf dem Kotangentialbündel. Sie hat sehr mächtige Resultate vorzuweisen, die auch in der Physik zunehmend Anwendung finden.

Radzikowski beweist nun in [23], daß die Hadamard-Bedingung als eine Bedingung an die Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion geschrieben werden kann.
Um dieses Resultat zu formulieren, schicken wir einige Definitionen voraus. Sei $\mathcal{M}$ eine zeitorientierbare Raumzeit. Wir erklären eine Relation $\sim$ auf $T^*\mathcal{M}$ durch

$$(p_1,\xi_1) \sim (p_2,\xi_2) \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} \exists \text{ affin parametrisierte Nullgeodäte } \nu, \exists s_1, s_2, \\ \text{so daß } \nu(s_i) = p_i, \quad \dfrac{d}{ds}\nu\Big|_{s_i} = \xi_i^\sharp, \quad i = 1,2 \end{cases}$$

und definieren die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{p_1,p_2} &:= \left\{(\xi_1,\xi_2) \in T^*_{p_1,p_2}(\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \mid (p_1,\xi_1) \sim (p_2,-\xi_2),\ \xi_1^\sharp \text{ zukunftsgerichtet}\right\}, \\ \mathcal{W} &:= \{(p_1,\xi_1,p_2,\xi_2) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \mid (\xi_1,\xi_2) \in \mathcal{W}_{p_1,p_2}\}. \end{aligned}$$

Damit lautet Radzikowskis Resultat

Satz 1.4.5 ([23]). *Sei $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}\times\mathcal{M})$ die Zweipunktfunktion eines quasifreien Zustandes ω des KG-Feldes auf einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$. ω ist genau dann ein Hadamard-Zustand, wenn $\mathrm{WF}(\Lambda) = \mathcal{W}$.*

Die Asymmetrie in der Definition von $\mathcal{W}$ (der erste Kotangentialvektor muß zukunfts- der zweite vergangenheitsgerichtet sein, die umgekehrte Konstellation ist nicht möglich) kann man als eine schwache Form der Spektrumsbedingung interpretieren. Die Hadamard-Bedingung wird in ihrer mikrolokalen Fassung daher auch als 'wave-front-set spectral condition' bezeichnet [23].

2. Erster Zugang

In diesem Kapitel wollen wir einen ersten Weg vorstellen, die Hadamard-Eigenschaft für Zustände auf statischen Raumzeiten nachzuweisen.
In diesem Zugang spielt ein Theorem von Junker [14] die zentrale Rolle. Dieses wird im Abschnitt 2.2 vorgestellt. Um allerdings die Voraussetzungen für die Anwendung dieses Theorems zu schaffen, sind umfangreiche mathematische Vorarbeiten notwendig, betreffend Funktionen bestimmter elliptischer Differentialoperatoren. Diese bringen weniger physikalische als vielmehr mathematische Einsichten. Das von uns in diesem Zusammenhang erzielte Resultat (Satz 2.3.4) scheint neu zu sein [i], deshalb werden wir es hier ausführlich vorstellen.
Um unser Resultat anzuwenden und damit die Voraussetzungen für die Anwendung der Methoden aus [14] auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten zu schaffen, müssen wiederum Voraussetzungen überprüft werden. Außerdem besteht die erwähnte Lücke im Beweis aus [14]. Daher stellt sich dieser Ansatz als nicht besonders effektiv zur Bearbeitung unserer konkreten physikalischen Fragestellung heraus.
Allerdings sollte er, sofern die Lücke in [14] behoben werden kann, in relativ allgemeinen Situationen einsetzbar sein.

2.1. Mathematische Vorbemerkungen

2.1.1. Pseudodifferentialoperatoren

In diesem Abschnitt wollen wir die sogenannten Pseudodifferentialoperatoren, im folgenden kurz ψDO genannt, einführen. Dabei handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Differentialoperatoren, im folgenden kurz DO.
ψDO haben viele Eigenschaften, die sie in der Mathematik, namentlich in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, zu einem häufig verwendeten Werkzeug machen. Anstoß für die Entwicklung der Theorie war z.B., daß elliptische DO Parametrices, d.h. 'Inverse bis auf C^∞-Terme', besitzen, die ψDO sind. Solche Parametrices stellen wiederum den Ausgangspunkt für die Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen dar.
Zur Nützlichkeit der ψDO trägt bei, daß wesentliche Resultate über DO ohne oder nur mit

[i] Jedenfalls hat intensive Suche in der mathematischen Literatur, abgesehen von einigen Bemerkungen, daß derartige Verallgemeinerungen möglich sein sollten, kein Ergebnis gebracht.

leichten Veränderungen auch für ψDO gelten. Viele Eigenschaften der Differentialoperatoren haben Entsprechungen im Verhalten der Pseudodifferentialoperatoren, gerade auch was den Bereich der mikrolokalen Analysis angeht.
In unserem Zusammenhang spielen ψDO eine Rolle, weil sie bei Anwendung auf Distributionen deren Wellenfrontmenge nicht vergrößern, sondern in kontrollierbarer Weise verkleinern.

Allerdings müssen wir betonen, daß der Begriff ψDO eigentlich eine ganze Reihe von verschiedenen Operatorklassen umfaßt. Allen gemeinsam ist die Art und Weise der Verallgemeinerung der DO, sie unterscheiden sich jedoch in der technischen Ausgestaltung, namentlich der Definition der sogenannten Symbolklassen. Wir werden weiter unten eine spezielle solche Klasse einführen. Diese geht auf Hörmander zurück und wird auch in der für uns wichtigen Arbeit [14] verwendet. Wesentlich ist, daß über diese Klasse eine Fülle von Resultaten vorliegt.
Wir wollen nun die eigentliche Einführung der ψDO mit ein paar Worten über DO beginnen:

Eine Schar von glatten Funktionen $\{a_\alpha(x) \,|\, |\alpha| \leq m\}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ charakterisiert einen DO P der Ordnung m auf dem $\mathbb{R}^n$, indem wir für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$Pf = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-i\partial_x)^\alpha f.$$

setzen. Führen wir jetzt die Fouriertransformation $\hat{f}$ von f ein, so können wir obige Gleichung umschreiben in

$$Pf(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi \rangle} \, d\xi \tag{2.1}$$

mit

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{2.2}$$

Die Funktion a nennt man *Symbol* des DO P. Es charakterisiert also die Wirkung des betreffenden Operators im 'Impulsraum'. ψDO sind nun Operatoren, deren Wirkung ebenfalls in die Form (2.1) gebracht werden kann, bei denen jedoch a nicht notwendig die Gestalt (2.2) hat.
Es ist nicht sinnvoll, beliebige Funktionen $a(x,\xi)$ als Symbole zuzulassen: Damit die ψDO gute Eigenschaften bekommen, insbesondere $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig nach $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ abbilden, müssen an die zulässigen Funktionen a bestimmte Bedingungen gestellt werden. Eine mögliche Wahl solcher Bedingungen wird in der folgenden Definition getroffen:

Definition 2.1.1 ([11]). Sei $m \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann bezeichnen wir mit $S^m(\Omega)$ die Menge aller $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, so daß zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ und zu beliebigen Multiindices α, β eine Konstante $C_{\alpha,\beta,K}$ existiert, für die gilt

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta,K} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}, \quad \forall x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Durch $a \in S^m(\Omega)$ ist ein Operator P_a

$$P_a : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega), \quad (P_a f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi$$

definiert. Diese Operatoren sind nun im wesentlichen die von uns zugrundegelegten ψDO . Allerdings ist es sinnvoll, diese Menge noch etwas zu erweitern, und zwar um die Glättungsoperatoren [ii]. Die Definition, die dies erreicht, lautet

Definition 2.1.2. Wir bezeichnen mit $\Psi^m(\Omega)$ die Menge der linearen Abbildungen $P : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$, für die zu jedem $f \in C_0^\infty(\Omega)$ ein Symbol $a_f \in S^m(\Omega)$ existiert, so daß[iii]

$$PM_f g = P_{a_f} g \quad \forall g \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir nennen die Operatoren aus $\Psi^m(\Omega)$ ψDO der Ordnung m.
Findet man für $P \in \Psi^m(\Omega)$ zu jedem $K \Subset \Omega$ ein $K' \Subset \Omega$ mit

$$\operatorname{supp} f \subset K \;\Rightarrow\; \operatorname{supp} Pf \subset K', \qquad Pf|_{K'} = 0 \;\Rightarrow\; f|_K = 0,$$

so bezeichnen wir P als *vom eigentlichen Typ*.

Mit diesen Definitionen gilt nämlich:

Lemma 2.1.3 ([11]). *Jedes $P \in \Psi^m(\Omega)$ kann als Summe $P = P' + P''$ geschrieben werden, wobei P' einen glatten Kern hat, P'' vom eigentlichen Typ ist und für ein bestimmtes $a \in S^m(\Omega)$ $P'' = P_a$ gilt.*

Die Lokalisierung in obiger Definition ermöglicht gleichzeitig eine Erweiterung auf Mannigfaltigkeiten:

Definition 2.1.4. Sei Σ eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $\Psi^m(\Sigma)$ die Menge der Operatoren $P : C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$, für die gilt: Für jede Karte (U,π) von Σ liegt $\pi_* P \pi^*$ in $\Psi^m(\pi U)$.

Zur Charakterisierung von Pseudodifferentialoperatoren werden wir das folgende Lemma verwenden, welches Aussagen aus [11], S. 148, 153 zusammenfaßt.

Lemma 2.1.5. *Sei $P : C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ ein stetiger linearer Operator, dessen Kern abseits der Diagonalen glatt ist. Weiterhin gebe es eine Überdeckung (U_j) von Σ durch Kartenumgebungen, so daß mit $e_\xi(x) := e^{i\langle\xi,x\rangle}$*

$$a_{\pi_j,\chi,\chi'}(x,\xi) := M_\chi e_{-\xi}(x) \cdot (\pi_{j*} P \pi_j^* M_{\chi'} e_\xi)(x) \;\in\; S^m(\pi_i U_i) \quad \forall \chi,\chi' \in C_0^\infty(\pi_j U_j)$$

für alle j gilt. Dann ist $P \in \Psi^m(\Sigma)$.

[ii] Glättungsoperatoren sind Integralkern-Operatoren mit einem glatten Integralkern.

[iii] Hier und im weiteren unterscheiden wir zwischen der *Funktion* $\chi \in C_0^\infty(\Sigma)$ und dem durch sie gegebenen *Multiplikationsoperator*, welchen wir als M_χ schreiben.

Die im obigen Lemma definierten Funktionen $a_{j,\chi,\chi'}$ kann man als 'lokale Symbole' des Operators P auffassen. Ein global definiertes Symbol für einen ψDO P auf einer Mannigfaltigkeit gibt es nicht mehr, allerdings lassen sich immer noch sogenannte *Hauptsymbole* von P finden. Dabei handelt es sich um Funktionen $a \in C^\infty(T^*\Sigma)$, so daß für jede Karte (U, π) und Funktionen $\chi, \chi' \in C_0^\infty(\pi U)$

$$(a_{\pi,\chi,\chi'}(x,\xi) - \chi\chi'\pi_* a) \ \in \ S^{m-1}(\pi U)$$

gilt. Die Hauptsymbole von P beschreiben also das Verhalten von P in der höchsten Ordnung in ξ, d.h. 'im höchsten Differentiationsgrad'.
Mit Hilfe der Hauptsymbole können wir nun bestimmte ψDO besonders auszeichnen:

Definition 2.1.6. Ein Operator $P \in \Psi^m(\Sigma)$ heißt *elliptisch*, sofern er ein Hauptsymbol a besitzt, für das in jeder Karte (U, π) für jedes Kompaktum $K \subset \pi U$ Konstanten c, c' existieren, so daß die Abschätzung

$$|\xi|^m \leq c\,|(\pi_* a)(x,\xi)| \qquad \forall x \in K,\ \forall \xi : |\xi| > c'$$

gilt.

Angesichts der etwas umständlichen Definition des Hauptsymbols wollen wir hier ein einfaches und wichtiges Beispiel geben: Für den Laplace-Beltrami-Operator Δ_γ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist $\gamma_p(\xi^\sharp, \xi^\sharp)$ ein Hauptsymbol. Δ_γ ist elliptisch. In den folgenden Abschnitten werden wir einige wichtige Eigenschaften der elliptischen DO näher untersuchen.
Wir wollen zum Schluß dieses Abschnitts noch den folgenden wichtigen Satz über das Produkt zweier ψDO angeben:

Satz 2.1.7 (Konsequenz aus [13], Prop. 18.1.22, Thm.18.1.23). *Seien $P_1 \in \Psi^{m_1}(\Sigma)$ und $P_2 \in \Psi^{m_2}(\Sigma)$ zwei ψDO , von denen mindestens einer vom eigentlichen Typ ist. Dann ist das Produkt P_1P_2 ein ψDO aus $\Psi^{m_1+m_2}(\Sigma)$. Haben P_1 und P_2 Hauptsymbole a_1 bzw. a_2, so ist a_1a_2 Hauptsymbol von P_1P_2.*

2.1.2. Elliptische Regularität

Ein wichtiges Hilfsmittel für die weiteren Rechnungen wollen wir in diesem Abschnitt vorstellen und in die von uns benötigte Form bringen. Dabei handelt es sich um die Tatsache, daß Funktionen aus dem Definitionsbereich elliptischer DO gute Regularitätseigenschaften haben.
Die Idee, diese Techniken im Zusammenhang mit der Wärmeleitungskernentwicklung anzuwenden, stammt von R. Wald [33]. Entsprechend orientieren sich viele der in diesem Abschnitt ausgeführten Rechnungen sehr stark an [33].

Wir beginnen mit einem technischen Lemma über bestimmte Differentialoperatoren:

Lemma 2.1.8. *Sei (Σ, γ) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $A = -\Delta_\gamma + V$ wobei V eine glatte und von unten beschränkte Funktion ist.*[iv] *Sei A w.s.a. auf $C_0^\infty(\Sigma)$, ebenso alle Potenzen $A^l, l \in \mathbb{N}$.*
Dann gibt es zu jedem $\chi \in C_0^\infty(\Sigma)$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c_{\chi,N,V}$, so daß

$$\left\|A^N \chi f\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq c_{\chi,N,V} \sum_{l=0}^{N} \left\|A^l f\right\|_{\mathrm{L}^2} \qquad \forall f \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \operatorname{dom}\left(A^l\right).$$

Der Beweis beruht auf einer Idee, die in [33] im Zusammenhang mit einem ähnlichen Lemma angegeben wurde. Er besteht im wesentlichen in einer relativ mühsamen Rechnung, weshalb wir ihn nicht an dieser Stelle, sondern im Anhang A durchführen.

Nun führen wir als Maß für die Regularität einer Funktion die sogenannten *Sobolev-Räume* mit ihren Normen ein. Ähnlich wie bei den Wellenfrontmengen wird dabei das asymptotische Verhalten der Fouriertransformation ausgenutzt:

Definition 2.1.9. Für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$ als den Raum der Elemente $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$[v], für die die Sobolev-Norm

$$\|u\|_s := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}^n\xi \right)^{1/2} < \infty$$

ist.

Als erstes bemerken wir, daß $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2}$ die gewöhnliche L^2-Norm ist.[vi] Allgemeiner kann man zeigen, daß alle Sobolev-Normen tatsächlich *Normen* sind. Sie stammen sogar von Skalarprodukten, aber die Hilbertraumstruktur der H^s ist für uns nicht so wichtig. Vielmehr wollen wir den Zusammenhang zwischen Sobolev-Norm einer Funktion und ihrer Glattheit genauer fassen. Dazu bemerken wir zunächst, daß es für $m \in \mathbb{N}$ positive Konstanten c, c' gibt, so daß

$$c \|u\|_m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_0 \leq c' \|u\|_m \qquad \forall u \in \mathrm{H}^m(\mathbb{R}^n)$$

ist. Elemente aus H^m haben also quadratintegrable m-te Ableitungen. Ein weitergehendes Resultat in dieser Richtung ist das sogenannte Sobolev-Lemma. Es zeigt, daß die Sobolev-Normen im wesentlichen die gleiche Regularität messen, wie die Halbnormen (1.2):

[iv] Wie man am Beweis dieses Lemmas in Anhang A sehen kann, ließe sich die Voraussetzung, daß V von unten beschränkt ist, ersetzen durch die Bedingung

$$(\kappa_V - 1)V \leq \not{c}(-\Delta_g).$$

Dabei meint κ_V die charakteristische Funktion von $\{p | V(p) \geq 0\}$. Das Lemma gilt daher auch für gewisse nicht von unten beschränkte Potentiale.

[v] $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: Der Raum der temperierten Distributionen

[vi] Im folgenden schreiben wir manchmal auch abkürzend $\|\cdot\|_0$ für $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathrm{dVol})}$.

Lemma 2.1.10 ([6], Lemma 1.1.4). *Sei $k \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}$ so, daß $s > k + n/2$. Dann ist $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ stetig eingebettet, d.h. es gibt zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Konstante c, so daß*

$$|f|_{k,K} \leq c \|f\|_s \quad \forall f \in \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$$

gilt.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun mit dem eigentlichen Thema dieses Abschnitts beginnen: Die Ungleichung, die das Prinzip der elliptischen Regularität in unserem Zusammenhang ausdrückt, ist die sogenannte Gårding-Ungleichung. Von dieser Ungleichung existieren viele Variationen und Verallgemeinerungen. Wir geben hier einen Spezialfall von [31], S. 55, Thm. 8.1 wieder:

Satz 2.1.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \Subset \Omega$ und P ein elliptischer DO von der Ordnung m auf Ω. Dann gibt es eine Konstante $c_{K,P}$, so daß*

$$\|f\|_m \leq c_{K,P} \left(\|f\|_0 + \|Pf\|_0\right) \qquad \forall f \in C_0^\infty(K)$$

gilt.

Im folgenden wollen wir jedoch die Differenzierbarkeit der betrachteten Funktionen nicht wie im obigen Satz voraussetzen, sondern ableiten. Dazu müssen wir vom Operator P etwas mehr verlangen. Außerdem wollen wir Operatoren auf Mannigfaltigkeiten betrachten. Wir notieren deshalb folgendes

Korollar 2.1.12. *Sei Σ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, (U, π) eine Karte von Σ, $K \Subset U$ und $A = -\Delta_\gamma + V$ wie in Lemma 2.1.8. Dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Konstante c (abhängig von K, m, γ), so daß* [vii]

$$\|\pi_* f\|_m \leq c \left(\|\pi_* f\|_0 + \left\|\pi_* A^{\lceil m/2 \rceil} f\right\|_0\right) \qquad \forall f: \ f \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \operatorname{dom}\left(A^l\right) \ \textit{und} \ \operatorname{supp} f \subset K$$

ist.

Beweis. Seien $(U, \pi), K, f, m$ wie oben. Das Lemma A.1.2 aus dem Anhang zeigt, daß es eine Folge (f_i) von Funktionen aus $C_0^\infty(\Sigma)$ gibt, für die $A^k f_i \to Pf,\ k = 0, 1, \ldots, \lceil m/2 \rceil$ für $i \to \infty$.
Sei $\chi \in C_0^\infty(U)$, $\chi|_K = 1$. Wegen Lemma 2.1.8 ist $A^{\lceil m/2 \rceil} M_\chi f_i$ eine Cauchy-Folge. Wegen der Abgeschlossenheit von $A^{\lceil m/2 \rceil}$ konvergiert sie gegen $A^{\lceil m/2 \rceil} M_\chi f$.
Jetzt wenden wir die Gårding-Ungleichung an: Es gibt c, so daß

$$\|\pi_* M_\chi (f_i - f_j)\|_m \leq c \left(\|\pi_* M_\chi (f_i - f_j)\|_0 + \|\pi_* P M_\chi (f_i - f_j)\|_0\right)$$

[vii] $\lceil m/2 \rceil$ bezeichnet dabei die zu $m/2$ nächstgrößere ganze Zahl.

gilt. Wir stellen also fest, daß die Folge $(\pi_* M_\chi f_i)$ Cauchy-Folge in der m-Norm ist. Da H^m vollständig und χ als Multiplikationsoperator stetig ist, liegt $\pi_* M_\chi f$ ebenfalls in H^m. Indem wir nun in

$$\|\pi_* M_\chi f_i\|_m \leq c \left(\|\pi_* M_\chi f_i\|_0 + \|\pi_* P M_\chi f_i\|_0\right)$$

auf beiden Seiten den Grenzwert bilden, erhalten wir das gewünschte Ergebnis. □

Die Schlagkräftigkeit der Gårding-Ungleichung zeigt sich jetzt in Verbindung mit dem Sobolev-Lemma. Wir erhalten das für unser weiteres Vorgehen wichtige Resultat

Satz 2.1.13. *Sei A wie in Lemma 2.1.8, $K \Subset \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$ und bezeichne $|\cdot|_{k,K}$ die Halbnorm* (1.2) *(bezüglich einer beliebigen Zerlegung der Eins). Dann gibt es eine Konstante c (abhängig von K, k und der Zerlegung der Eins), so daß*

$$|f|_{K,k} \leq c \sum_{l=0}^{\lceil s/2 \rceil} \left\|A^l f\right\|_0 \quad \forall f \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \operatorname{dom}\left(A^l\right)$$

für $s > k + n/2$ gilt.

Beweis. Seien A, Σ, K, k wie in den Voraussetzungen der obigen Behauptung. Da Σ parakompakt ist, gibt es eine *endliche* Überdeckung (U_i) von K durch Kartenumgebungen. Wir ergänzen diese zu einer Überdeckung von Σ und wählen eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins (χ_i). Wir bezeichnen die Halbnorm bezüglich *dieser* Zerlegung der Eins mit $|\cdot|'_{k,K}$ und schätzen für beliebiges $f \in \bigcap_{l \leq N} \operatorname{dom}\left(A^l\right)$ ab:[viii]

$$\begin{aligned}
|f|'_{K,k} &= \sum_i \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{U_i \cap K} |\partial^\alpha \pi_{i*}(M_{\chi_i} f)| \\
&\leq \not{c} \sum_{i: K \cap U_i \neq \emptyset} \|\pi_{i*}(M_{\chi_i} f)\|_s \quad \text{für } s > k + \frac{n}{2} \text{ (Sobolev-Lemma)} \\
&\leq \not{c} \sum_{i: K \cap U_i \neq \emptyset} \left(\left\|\pi_{i*}\left(A^{\lceil s/2 \rceil} M_{\chi_i} f\right)\right\|_0 + \|\pi_{i*}(M_{\chi_i} f)\|_0\right) \text{ (Korollar 2.1.12)} \\
&\leq \not{c} \sum_{i: K \cap U_i \neq \emptyset} \not{c}_i \sum_{l=0}^{\lceil s/2 \rceil} \left\|A^l f\right\|_0 \quad \text{(Satz 2.1.8)} \\
&\leq \not{c} \sum_{l=0}^{\lceil s/2 \rceil} \left\|A^l f\right\|_0,
\end{aligned}$$

[viii] Dabei verwenden wir das Symbol $\not{c}$, die *Reehsche universelle Konstante*: Die Relation $|X(Y)|_1 \leq \not{c} |Y|_2$ zwischen zwei (Halb-)Normen 1 und 2 und irgendwelchen Objekten X, Y meint, daß es eine positive Konstante c gibt, die möglicherweise von X, nicht jedoch von Y abhängt und für die $|X(Y)|_1 \leq c |Y|_2$ gilt.

da nur endlich viele $K \cap U_i \neq \emptyset$ sind. Da wir die Halbnormen $|\cdot|_{k,K}$ und $|\cdot|'_{k,K}$ gegeneinander abschätzen können, folgt die Behauptung. $\square$

Eine weitere Anwendung des Prinzips der elliptischen Regularität ist der folgende Satz. Sowohl die Idee, ein solches Resultat zu verwenden, als auch dessen Beweis verdanken wir R. Verch.

Satz 2.1.14. *Sei A ein DO, der die Annahmen 1,2 und 3 aus Satz 2.3.4 erfüllt. Ist B eine Sesquilinearform auf $C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$ und gibt es zu beliebigen zwei Kompakta $K_1, K_2 \subset \Sigma$ und beliebigem $N \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $c_{K_1,K_2,N}$, so daß*

$$\left|B(A^N f, A^N g)\right| \leq c_{K_1,K_2,N} \, \|f\|_0 \, \|g\|_0 \qquad \forall f \in C_0^\infty(K_1) \quad \forall f \in C_0^\infty(K_2) \tag{2.4}$$

gilt, so ist B durch einen glatten Kern gegeben.

Beweis. **Strategie**: Wir werden zeigen, daß B einen glatten Integralkern besitzt, indem wir beweisen, daß $\mathrm{WF}(B) = \emptyset$. Dazu werden wir B lokalisieren und alle Rechnungen in Koordinaten durchführen. Durch direkte Rechnung können wir dann das Abfallverhalten der Fouriertransformierten der lokalisierten Bilinearform bestimmen.

Die Fouriertransformierte: Seien U_1, U_2 beliebige, relativkompakte Kartenumgebungen von Karten $(U_1, \pi_1), (U_2, \pi_2)$ der Mannigfaltigkeit Σ und bezeichne $h^{ab}_{(i)}(x)\partial_a\partial_b$, $i = 1,2$ den Term zweiter Ordnung von A in den jeweiligen Koordinaten auf U_i. Nach Voraussetzung an A ist dann $h^{ab}_{(i)}(x)k_a k_b$ eine positiv definite Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$ für alle x aus der Umgebung $\pi_i U_i$.
Wir identifizieren nun $\mathbb{S}^{n-1}$ mit der Einheitssphäre $\{k \in \mathbb{R}^n \mid \|k\| = 1\}$ im $\mathbb{R}^n$ und definieren die Funktionenklassen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &:= \left\{\varphi \in C^\infty(\pi_i U_i \times \mathbb{S}^{n-1}) \mid \operatorname{supp} \varphi(\cdot, v) \Subset \pi_i U_i \ \forall v \in \mathbb{S}^{n-1}\right\} \qquad i = 1,2, \\ \mathcal{B} &:= \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2. \end{aligned}$$

Für $\varphi^{(i)} \in \mathcal{B}_i$ und $v^{(i)} \in \mathbb{S}^{n-1}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} \underline{\varphi} &\equiv \varphi^{(1)} \otimes \varphi^{(2)} \quad \in \quad \mathcal{B} \\ \underline{v} &\equiv (v^{(1)}, v^{(2)}) \quad \in \quad \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \\ \underline{\varphi}_{\underline{v}} &\equiv \varphi^{(1)}_{v^{(1)}}(\cdot) \otimes \varphi^{(2)}_{v^{(2)}}(\cdot) \equiv \varphi^{(1)}(\cdot, v^{(1)}) \otimes \varphi^{(2)}(\cdot, v^{(2)}) \quad \in \quad C^\infty(\pi_1 U_1) \otimes C^\infty(\pi_2 U_2) \\ \underline{e}_{\underline{v}} &\equiv e_{v^{(1)}} \otimes e_{v^{(2)}}. \end{aligned}$$

Wir beweisen jetzt die folgende Aussage über eine Bilinearform B, die die oben angegebenen Voraussetzungen erfüllt:
Seien $N \in \mathbb{N}_0$, $\underline{\varphi} \in \mathcal{B}$, dann gibt es eine Konstante c so, daß

$$\left|\pi_* B(\underline{\varphi}_{\underline{v}} \underline{e}_{\tau \underline{v}})\right| \leq c\tau^{-4N} \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}: \ \tau \geq 1, \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \tag{$*$}$$

gilt. Diese Aussage bedeutet insbesondere, daß die Fouriertransformierte

$$B(\chi^{(1)}e_{k^{(1)}} \otimes \chi^{(2)}e_{k^{(2)}})$$

(mit $\chi^{(i)} \in C_0^\infty(U_i)$ beliebig) der durch die $\chi^{(i)}$ lokalisierten Bilinearform B rasch abfällt. Wir verwenden vollständige Induktion über $\mathbb{N}_0$:

Induktionsanfang $N = 0$: Aufgrund der Vorausetzungen an B können wir abschätzen

$$\left|\pi_* B(\underline{\varphi}_{\underline{v}} e_{\tau\underline{v}})\right| \leq \not{c} \left\|\varphi^{(1)}_{v^{(1)}}\right\|_0 \left\|\varphi^{(2)}_{v^{(2)}}\right\|_0 \leq \not{c}.$$

Im zweiten Schritt haben wir zusätzlich benutzt, daß die $\varphi^{(i)}(v^i, x)$ glatt in beiden Argumenten sind und Träger unter einem Kompaktum haben. Daher kann die auftretende Konstante unabhängig von $\underline{v}$ gewählt werden.
Die Aussage $(*)$ ist also für $N = 0$ richtig.

Induktionsschritt: Angenommen, $(*)$ sei richtig für ein bestimmtes $N \in \mathbb{N}_0$. Sei $\underline{\varphi}$ aus $\mathcal{B}$ beliebig.
Wir beobachten, daß zu $\underline{\varphi}$ und N Funktionen $\underline{\varphi}^{(N,\alpha,\beta)} \in \mathcal{B}$ existieren, so daß

$$\begin{aligned}\pi_*(A^N \otimes A^N)\pi^*(\underline{\varphi}_{\underline{v}'} \underline{e}_{\underline{v}}) =&(h^{ab}_{(1)} v^{(1)}_a v^{(1)}_b \otimes h^{cd}_{(2)} v^{(2)}_c v^{(2)}_d)^N \underline{\varphi}_{\underline{v}'} \underline{e}_{\underline{v}} \\ &+ \sum_{|\alpha|,|\beta|<2N} v^{(1)\alpha} v^{(2)\beta} \underline{\varphi}^{(N,\alpha,\beta)}_{\underline{v}'} \underline{e}_{\underline{v}}\end{aligned}$$

gilt. Insbesondere finden wir für $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\pi_*(A^N \otimes A^N)\pi^*(\underline{\varphi}_{\underline{v}} \underline{e}_{\tau\underline{v}}) =&\tau^{4N}(h^{ab}_{(1)} v^{(1)}_a v^{(1)}_b \otimes h^{cd}_{(2)} v^{(2)}_c v^{(2)}_d)^N \underline{\varphi}_{\underline{v}} \underline{e}_{\tau\underline{v}} \\ &+ \sum_{|\alpha|,|\beta|<2N} \tau^{|\alpha|+|\beta|} \underline{\varphi}^{(N,\alpha,\beta)}_{\underline{v}} \underline{e}_{\tau\underline{v}}\end{aligned} \tag{$\sharp$}$$

mit Funktionen $\underline{\varphi}^{(N,\alpha,\beta)}_{\underline{v}} \in \mathcal{B}$.
Wir definieren nun

$$\underline{\varphi}'_{\underline{v}} := \left((h^{ab}_{(1)} v^{(1)}_a v^{(1)}_b)^{-(N+1)} \varphi^{(1)}_{v^{(1)}}\right) \otimes \left((h^{ab}_{(2)} v^{(2)}_a v^{(2)}_b)^{-(N+1)} \varphi^{(2)}_{v^{(2)}}\right).$$

Da die $h^{(i)}$ positiv definit sind, kann man sich leicht überzeugen, daß auch $\underline{\varphi}'$ in $\mathcal{B}$ liegt. Mit dem gleichen Argument, wie beim Induktionsanfang findet man

$$\left|B\left((A^{N+1} \otimes A^{N+1})\underline{\varphi}'_{\underline{v}} \underline{e}_{\tau\underline{v}}\right)\right| \leq \not{c}$$

unabhängig von τ und $\underline{v}$. Gleichzeitig gibt es jedoch nach $(\sharp)$ Funktionen $\underline{\varphi}'^{(N,\alpha,\beta)}$, so daß

$$\begin{aligned}B\left((A^{N+1} \otimes A^{N+1})\underline{\varphi}'_{\underline{v}} \underline{e}_{\tau\underline{v}}\right) &= \tau^{4(N+1)} B(\underline{\varphi}_{\underline{v}} \underline{e}_{\tau\underline{v}}) \\ &+ \sum_{|\alpha|,|\beta|<2(N+1)} \tau^{|\alpha|+|\beta|} B(\underline{\varphi}'^{(N,\alpha,\beta)}_{\underline{v}} \underline{e}_{\tau\underline{v}})\end{aligned}$$

Damit schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}\left|B(\underline{\varphi_v}\underline{e_{\tau v}})\right| &\leq \tau^{-4(N+1)}\left|B\left((A^{N+1}\otimes A^{N+1})\underline{\varphi'_v}\underline{e_{\tau v}}\right)\right| \\ &\quad + \sum_{|\alpha|,|\beta|<2(N+1)} \tau^{|\alpha|+|\beta|-4(N+1)}\left|B(\underline{\varphi'^{(N,\alpha,\beta)}_v}\underline{e_{\tau v}})\right| \\ &\leq \not{c}\tau^{-4(N+1)} + \not{c}\tau^{-1}\sup_{\underline{v},\alpha,\beta}\left|B(\underline{\varphi'^{(N,\alpha,\beta)}_v}\underline{e_{\tau v}})\right|\end{aligned}$$

für $\tau \geq 1$, und weiter aufgrund der Induktionshypothese

$$\begin{aligned}&\leq \not{c}\tau^{-4(N+1)} + \not{c}\tau^{-4N-1} \\ &\leq \not{c}\tau^{-4N-1}\end{aligned}$$

Damit haben wir die Abschätzung $(*)$ aus der Induktionshypothese um eine Stufe verbessert. Indem wir die obige Abschätzung mit der verbesserten Ungleichung wiederholen, erhalten wir

$$\left|B(\underline{\varphi_v}\underline{e_{\tau v}})\right| \leq \not{c}\tau^{-4N-2} \qquad \forall \tau \geq 1.$$

Die Abschätzung hat sich also wiederum um eine Stufe verbessert. Dieses Vorgehen können wir nun schrittweise solange wiederholen, bis wir zur gewünschten Ungleichung

$$\left|B(\underline{\varphi_v}\underline{e_{\tau v}})\right| \leq \not{c}\tau^{-4(N+1)} \qquad \forall \tau \geq 1.$$

gelangen. (Weiter kann dieses Verfahren auch tatsächlich nicht fortgesetzt werden.)
Damit haben wir also durch vollständige Induktion $(*)$ für alle N bewiesen.

Schluß: Wie wir gesehen haben, können wir B um einen beliebigen Punkt aus $\Sigma \times \Sigma$ so lokalisieren, daß die betreffende Fouriertransformierte rasch abfällt. Daher ist die Wellenfrontmenge von B leer. □

2.2. Das Theorem von W. Junker

Wir stellen nun den für uns im Hinblick auf die Anwendung in Kapitel 4 wichtigen Spezialfall (statische Raumzeit, Grundzustand) eines Theorems aus [14] vor. Leider enthält der Beweis des Theorems eine Lücke, die wir weiter unten näher beschreiben werden.
Sei $\mathcal{M}$ eine statische, global hyperbolische Raumzeit. Wir bezeichnen ihr Killing-Vektorfeld mit ∂_t, dessen Norm mit $\alpha := |\partial_t|$ und mit Σ eine Cauchy-Fläche. Seien ρ_0, ρ_1 die in (1.3) definierten Abbildungen von Funktionen auf ihre Anfangswerte und E der Propagator der KG-Gleichung nach Satz 1.3.2. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir den

Satz 2.2.1 (Spezialfall von [14], Thm. 3.12). *Sei I ein positiver, symmetrischer, invertierbarer, elliptischer ψDO auf Σ, dessen Inverses ebenfalls ein ψDO ist. Es gebe weiterhin einen ψDO Q auf $\mathcal{M}$, so daß*

$$-Q(iI + \alpha^{-1}\partial_t) = \Box_g + m^2. \tag{2.5}$$

Q besitze ein Hauptsymbol q, für das

$$q^{-1}(0) \setminus \{(p, 0) \mid p \in \mathcal{M}\} \subset \{(p, \xi) \in T^*M \mid \xi(\partial_t) > 0\} \tag{2.6}$$

gelte. Dann ist die Wellenfrontmenge der durch

$$\begin{aligned} \Lambda(F, G) = \frac{1}{2} \big(&\langle \rho_0 \,\mathrm{E}\, F, I \rho_0 \,\mathrm{E}\, G \rangle_{\mathrm{L}^2(\Sigma, dVol)} + \langle \rho_1 \,\mathrm{E}\, F, I^{-1} \rho_1 \,\mathrm{E}\, G \rangle_{\mathrm{L}^2(\Sigma, dVol)} \\ &+ i \left(\langle \rho_0 \,\mathrm{E}\, F, \rho_1 \,\mathrm{E}\, G \rangle_{\mathrm{L}^2(\Sigma, dVol)} - \langle \rho_1 \,\mathrm{E}\, F, \rho_0 \,\mathrm{E}\, G \rangle_{\mathrm{L}^2(\Sigma, dVol)} \right) \big) \end{aligned} \tag{2.7}$$

gegebenen Distribution aus $\mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ durch $\mathcal{W}$ gegeben. Ist Λ also Zweipunktfunktion eines quasifreien Zustandes des KG-Feldes, so erfüllt dieser die Hadamard-Bedingung.

Das Resultat aus [14] ist allgemeiner als der hier wiedergegebene Spezialfall, indem es nur eine global hyperbolische Raumzeit voraussetzt und die den Gleichungen 2.5 und 2.7 entsprechenden Formeln allgemeiner sind.
Die Forderung, daß auch I^{-1} ψDO sein soll, wird in [14] nicht explizit gestellt, ist jedoch notwendig. Hingegen haben wir die Annahme aus [14], I sei selbstadjungiert, in die Symmetrieforderung abgeschwächt, denn die Selbstadjungiertheit von I spielt in dem betrachteten Spezialfall keine Rolle im Beweis aus [14].
Der Beweis des Resultats beruht auf der Anwendung von Sätzen aus der mikrolokalen Analysis, betreffend das Verhalten von Wellenfrontmengen unter Komposition der betreffenden Distributionen, deren Einschränkung auf Untermannigfaltigkeiten und der Anwendung von ψDO auf selbige. Die Eigenschaft von I und I^{-1}, ψDO zu sein, geht wesentlich in den Beweis ein.
Wie wir in Kapitel 4 feststellen werden, ist I in der von uns betrachteten Situation im wesentlichen die Quadratwurzel aus einem selbstadjungierten elliptischen DO zweiter Ordnung. Bevor wir obigen Satz anwenden können, müssen wir also untersuchen, ob solche Operatoren (und ihre Inversen) ψDO sind.

Leider enthält der Beweis des Resultats aus [14] eine Lücke in dem Fall, daß die Cauchy-Fläche Σ nicht kompakt ist: Im Beweis zu Lemma 3.13 aus [14] wird die Zweipunktfunktion Λ in eine Summe von Distributionen $I_1, \ldots I_4$ aufgespalten und deren Wellenfrontmengen getrennt betrachtet. Die Distribution I_2 ist dabei gegeben als der Integralkern der Komposition zweier Glättungsoperatoren, die beide nicht notwendig vom eigentlichen Typ sind. Nun wird geschlossen, auch I_2 müsse deswegen durch eine glatte Funktion gegeben sein. Dieser Schluß ist aber nicht zulässig: Eine solche Komposition kann sehr wohl einen Kern haben der nicht glatt ist. [ix]

[ix] Man betrachte z.B. die beiden glatten Funktionen

$$F_1(x, y) := (1 + y^2)^{-1/4} e^{-(xy)^2}, \qquad F_2(y, z) := (1 + y^2)^{-1/4} e^{-(zy)^2}$$

Ist Σ kompakt, tritt dieses Problem jedoch nicht auf: Die beiden Glättungsoperatoren sind dann automatisch vom eigentlichen Typ und deren Komposition besitzt wieder einen glatten Kern.
Vielleicht kann man die Definition der beiden Glättungsoperatoren durch $I, \mathrm{E}, \rho_0, \rho_1$ etc. ausnutzen um zu zeigen daß I_2 tatsächlich *immer* glatt sein muß. Das scheint jedoch nicht ganz einfach zu sein.

2.3. Funktionen von (Pseudo-)Differentialoperatoren

Ist ein selbstadjungierter Operator $A, \mathrm{dom}\,(A)$ auf einem Hilbertraum gegeben, so kann man mit Hilfe des Spektralkalküls Funktionen $F(A)$ (für Borel-Funktionen F) des Operators A definieren. Im allgemeinen werden die so definierten Funktionen natürlich keine Differentialoperatoren mehr sein. Es ist jedoch eine interessante (und wie wir gesehen haben, auch relevante) Frage, ob sie zumindest noch ψDO sind.
In der mathematischen Literatur gibt es zwei Resultate, die, wenn kombiniert, diese Frage für Operatoren auf *kompakten* Mannigfaltigkeiten für eine große Klasse von Funktionen positiv beantworten. Um nicht noch mehr Begriffe einführen zu müssen, geben wir sie hier in einer etwas abgeschwächten Form wieder. (Ein weiteres, vergleichbares Resultat findet sich in [27]). Wir bezeichnen mit Σ eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer nichtverschwindenden Dichte v vom Gewicht $+1$. Das zugehörige Volumenelement bezeichnen wir mit dVol. Selbstadjungiertheit von Operatoren bezieht sich im folgenden also immer auf den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\Sigma, \mathrm{dVol})$.

Satz 2.3.1 ([26]). *Sei Σ kompakt, $P \in \Psi^m(\Sigma)$ ein selbstadjungierter, invertierbarer, elliptischer ψDO mit homogenem Hauptsymbol und $\theta \in \mathbb{C}$. Dann ist $P^\theta \in \Psi^{\mathrm{Re}\,\theta}(\Sigma)$.*

Satz 2.3.2 ([31], XII, Thm. 1.3). *Sei Σ kompakt, $P \in \Psi^1(\Sigma)$ ein selbstadjungierter, elliptischer ψDO mit reellem homogenem Hauptsymbol, $m \in \mathbb{R}$ und F eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}$, so daß zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante c_k existiert, mit der*

$$\left|(\partial_x^k F)(x)\right| \le c_k (1 + |x|)^{m-k} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

gilt, dann ist $F(P)$ ein ψDO aus $\Psi^m(\Sigma)$.

Betrachtet man nur Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten, so lassen diese Resultate nichts zu wünschen übrig. Für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten sind uns jedoch keinerlei vergleichbare Resultate bekannt.
Vermutlich fehlen Resultate über den Fall nichtkompakter Mannigfaltigkeiten, weil dieser weniger elegant gehandhabt werden kann. Insbesondere zeigt sich, daß für Funktionen $F(x)$, die singulär bei $x = 0$ sind, die Möglichkeit von Infrarot-Divergenzen (kurz: IR-Divergenzen) besteht, die die ψDO -Eigenschaft stören, obwohl A invertierbar ist. Es

Deren Komposition $\int F_1(x,y) F_2(y,z)\, \mathrm{d}y$ hat offensichtlich eine Singularität bei $(0,0)$.

scheint daher notwendig zu sein, zusätzliche Forderungen an den betreffenden Operator und die Funktion zu stellen, um dies zu verhindern.
Um das von uns bewiesene Resultat zu formulieren, definieren wir zunächst die folgende Funktionenklasse:

Definition 2.3.3. Für $\mu > 0$ sei $\mathcal{K}_\mu$ die Menge aller Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß es ein lokal integrierbares f gibt, dessen Laplace-Transformierte F ist und für das es Konstanten $\delta, \nu > 0$ gibt, so daß

1. $|f(\tau)|\,\tau^{-\nu}$ integrierbar auf $[0, \delta]$,
2. $|f(\tau)| \leq \not{c}\tau^{\mu-1}$ für $\tau > \delta$ ist.

Weiterhin führen wir noch die folgenden Abkürzungen ein: Sei A ein elliptischer DO zweiter Ordnung. Wie wir in Abschnitt 2.5 demonstrieren werden, transformiert sich die Koeffizientenmatrix a^{ij} des Terms höchster Ordnung von A wie ein Tensor zweiter Stufe under Koordinatentransformationen. $v' := (\det(-a^{ij}))^{-1/2}$ definiert also eine Dichte vom Geicht $+1$ auf $\mathcal{M}$ und $\zeta := (v/v')^{1/2}$ ist somit eine glatte Funktion auf $\mathcal{M}$. Unser Resultat lautet nun:

Satz 2.3.4. *Sei A ein DO auf $\mathcal{H}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *A ist von 2. Ordnung, elliptisch und hat reelle glatte Koeffizienten.*
2. *A und alle seine Potenzen A^k, $k \in \mathbb{N}$ sind wesentlich s.a. auf $C_0^\infty(\Sigma)(\subset \mathcal{H})$.*
3. *Das Spektrum von A ist in $[0, \infty)$ enthalten, A ist invertierbar. ('A ist strikt positiv'.)*
4. *Es gibt ein $\mu > 0$, so daß für beliebige $\chi \in C_0^\infty(\Sigma)$ gilt: $\|A^{-\mu} M_\chi\|_{Op} < \infty$*[x]*.*
5. *Die Funktion $M_\zeta A \zeta^{-1}$ ist von unten beschränkt.*

Sei F eine Funktion aus $\mathcal{K}_\mu$. Dann ist $F(A)$ ein ψDO aus $\Psi^0(\Sigma)$.

Wir wollen einige Bemerkungen zu diesem Resultat machen:
Bedingungen 3 und 4: Das Infrarotverhalten des Spektralmaßes von A wird durch die Bedingungen 3 und 4 kontrolliert. Hat A eine echt positive untere spektrale Schranke, so ist Bedingung 4 trivialerweise erfüllt.[xi]
Um IR-Divergenzen auszuschließen, muß die Funktion F in Abhängigkeit von μ gewählt

[x] $\|\cdot\|_{Op}$ bezeichnet die Operatornorm.

[xi] Wie der Status der Forderung 4 von dem betreffenden Operator abhängen kann, zeigt das Beispiel $A = -\partial_x^2 + V(x)$ mit $V(x) > 0$, jedoch ohne echt positive untere Schranke. Es kann gezeigt werden, daß ausschließlich das asymptotische Verhalten von V entscheidet, wie groß μ gewählt werden kann, so daß Forderung 4 noch erfüllt ist. Fällt V exponentiell ab, so muß μ notwendig kleiner als 3/4 sein. Ist der Abfall schwächer, so sind größere μ möglich [2].

werden. Das Verhalten von $F(x)$ für kleine x hängt mit dem Verhalten der inversen Laplace-Transformierten f von F für große Argumente zusammen. Daher wird im wesentlichen dieses reglementiert. Die Bedingung an das Verhalten von f für kleine τ ist hingegen recht schwach.
Bedingung 5: Wir werden im übernächsten Abschnitt zeigen, daß A auf die Form $-\Delta_\gamma+V$ gebracht werden kann. Die Bedingung 5 garantiert dann, daß V von unten beschränkt ist (was wichtig für die Anwendung von Lemma 2.1.8 ist).

Unser Resultat ist viel weniger allgemein als die oben zitierten Ergebnisse. Allerdings werden zu deren Gewinnung auch recht aufwendige mathematische Methoden bemüht, während unser Beweis weitestgehend elementar geführt wird. Wir wollen zu den einzelnen Einschränkungen unseres Ergebnisses sowie zu etwaigen Verallgemeinerungsmöglichkeiten noch etwas mehr sagen:
Die behandelte Funktionenklasse: Effektiv lassen sich durch unser Ergebnis mehr Funktionen behandeln, als in $\mathcal{K}_\mu$ enthalten sind: Einerseits ist natürlich A selber ein ψDO vom eigentlichen Typ und daher lassen sich unter Zuhilfenahme von Satz 2.1.7 alle Funktionen von A behandeln, die Produkte aus Polynomen und Funktionen aus $\mathcal{K}_\mu$ sind.
Andererseits wird Satz 2.1.14 zeigen, daß $F(A)$ für $F(x)$ beschränkt und für $x \to \infty$ schnell abfallend ebenfalls ψDO sind, deren Addition also auch kein Problem darstellt.
Wie groß die (unter Verwendung der oben gegebenen Hinweise erweiterte) Funktionenklasse ist, die von unserem Ergebnis erfasst wird, ist nicht einfach zu sagen. Wünschenswert wäre auf jeden Fall eine einfachere Charakterisierung dieser Klasse. Dann wäre auch ein besserer Vergleich mit den oben zitierten Ergebnissen aus der Literatur möglich.
Die Anforderungen an A: Die Anforderungen an den betrachteten Operator A sind in unserem Ergebnis viel höher als bei den Ergebnissen aus der Literatur, auch wenn man von der Bedingung 4 absieht, die so oder in ähnlicher Form notwendig zu sein scheint.
Zumindest die Bedingung 2 an A ließe sich jedoch im Rahmen unserer Beweisführung unter Verwendung einer Bemerkung aus [33] ('note added in proof') noch erheblich abschwächen.
Schwieriger scheint es jedoch zu sein, auch Funktionen von ψDO in diesem Rahmen zu behandeln.
Da die Voraussetzungen in Lemma 2.1.8 noch etwas verändert werden können, ließe sich schließlich Bedingung 5 noch etwas abschwächen.

2.4. Die Beweisstrategie

Bevor wir in den nächsten Abschnitten den Beweis von Satz 2.3.4 führen, wollen wir hier ganz kurz die Beweisstrategie schildern:
Zunächst zeigen wir, daß es reicht, Operatoren der Form $A = -\Delta_\gamma + V$ zu betrachten.
Die Grundidee besteht dann darin, die abstrakt definierten Funktionen $F(A)$ durch Objekte auszudrücken, über die man mehr Informationen hat. Wir folgen dabei R. Wald [33] und verwenden dazu die Operatoren $e^{-\tau A}$. Wald beweist (aufbauend auf Arbeiten von Patodi und anderen), daß diese für $A = -\Delta_\gamma$ durch einen glatten Integralkern gegeben sind und

gibt dessen asymptotisches Verhalten für kleine τ an.
Wir verallgemeinern nun dieses Resultat in der von uns benötigten Weise. Mit Hilfe der Laplace-Transformation können wir dann den Integralkern von $F(A)$ durch den Integralkern von $e^{-\tau A}$ ausdrücken. Wir zerlegen daraufhin den Integralkern von $F(A)$ in drei Teile, von denen einer den IR-Anteil und einer den UV-Anteil von $F(A)$ repräsentiert.
Unsere Bedingungen an A garantieren effektiv ein bestimmtes Abfallverhalten des Integralkerns von $e^{-\tau A}$ für große τ. Dies hat wiederum zur Folge, daß der IR-Anteil des Integralkerns von $F(A)$ glatt ist. Von dem UV-Anteil von $F(A)$ können wir durch eine relativ mühsame Rechnung unter Verwendung von Lemma 2.1.5 zeigen, daß es sich um einen ψDO handelt. Der letzte Teil des Integralkerns von $F(A)$ stellt sich wiederum als glatt heraus.

2.5. Rückführung von A auf einfache Gestalt

Der folgende Satz zeigt, daß wir die allgemeine Situation aus Satz 2.3.4 auf einen Spezialfall zurückführen können:

Satz 2.5.1. *Sei P ein elliptischer DO 2. Ordnung mit reellen, glatten Koeffizienten auf einer Mannigfaltigkeit Σ mit skalarer nichtverschwindender Dichte v vom Gewicht +1. Dieser erfülle die Annahmen 2 und 3 aus Satz 2.3.4 bezüglich des durch v induzierten* L^2*-Raums* $\mathrm{L}^2(\Sigma, dVol)$*. Dann gibt es eine Metrik γ, eine glatte Funktion V auf Σ und einen unitären Multiplikationsoperator*

$$U : \mathrm{L}^2(\Sigma, dVol) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\Sigma, dVol_\gamma)$$

induziert durch eine glatte Funktion, so daß

$$UAU^{-1} = -\Delta_\gamma + V$$

und UAU^{-1} die Annahmen 1,2 und 3 aus Satz 2.3.4 bezüglich $\mathrm{L}^2(\Sigma, dVol_\gamma)$ *erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten A in einer Karte (U, π): Der Term höchster Ordnung hat in den entsprechenden Koordinaten x_i (und bezüglich der entsprechenden Basis des Tangential- und des Kotangentialraums) die Form $a^{ij}\partial_i\partial_j$, wobei a o.B.d.A. symmetrisch und wegen der Elliptizität und der Positivität die durch $-a$ induzierte quadratische Form positiv definit ist. a^{ij} ist dabei zunächst nur eine Ansammlung von Funktionen, über die wir noch kein bestimmtes Transformationsverhalten voraussetzen.
Wählen wir eine neue Karte (U', π'), so erhalten wir einen neuen Term höchster Ordnung $a'^{kl}\partial'_k\partial'_l$. Überlappen sich beide Kartengebiete, so können wir im Überlappungsgebiet berechnen

$$\begin{aligned} a^{ij}\partial_i\partial_j &= a^{ij}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\partial'_k\frac{\partial x'^l}{\partial x^j}\partial'_l \\ &= a^{ij}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^l}{\partial x^j}\partial'_k\partial'_l + a^{ij}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\left(\partial'_k\frac{\partial x'^l}{\partial x^j}\right)\partial'_l. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Terme 2. Ordnung erhalten wir

$$a'^{kl} = a^{ij} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j}.$$

Die Matrix a^{ij} transformiert sich also wirklich wie die Komponenten eines Tensors 2. Stufe im Tangentialraum.
Bei der inversen Matrix, die wir mit a_{ij} bezeichnen, handelt es also wegen der Positivität der aus $-a$ resultierenden quadratischen Form um die Komponenten eines metrischen Tensors auf Σ und wir bezeichnen diesen im folgenden mit γ.
Der Multiplikationsoperator

$$U : \mathrm{L}^2(\Sigma, \mathrm{dVol}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\Sigma, \mathrm{dVol}_\gamma), \quad U = M_\zeta, \quad \zeta = \frac{v^{1/2}}{(\det \gamma)^{1/4}}$$

ist, wie man leicht nachrechnet, eine bijektive Isometrie, also eine unitäre Abbildung. UAU^{-1} hat den gleichen Term 2. Ordnung wie A und mithin den gleichen wie $-\Delta_\gamma$. Außerdem erfüllt $UAU^{-1}, U\,\mathrm{dom}\,(A)$ wegen der Unitarität von U und der Eigenschaft $U : C_0^\infty(\Sigma) \to C_0^\infty(\Sigma)$ die Annahmen 1,2 und 3 aus Satz 2.3.4 bezüglich $\mathrm{L}^2(\Sigma, \mathrm{dVol}_\gamma)$.
Insbesondere ist UAU^{-1} symmetrisch auf $C_0^\infty(\Sigma)$. Nun hat aber jeder symmetrische Operator mit reellen Koeffizienten und $-\gamma^{ij}\partial_i\partial_j$ als Term höchster Ordnung die Form

$$-\Delta_\gamma + V,$$

denn wir können keinen Term erster Ordnung mit *reellen* Koeffizienten hinzufügen, ohne daß der entstehende Operator asymmetrisch wird. Terme 0. Ordnung können natürlich hinzugefügt werden, daher das V in der obigen Formel. □

Wissen wir nun, daß $F(\tilde{A})$ mit $\tilde{A} := UAU^{-1}$ ein ψDO ist, so ist auch A ein solcher, denn es gilt

$$F(A) = U^{-1}UF(A)U^{-1}U = U^{-1}F(UAU^{-1})U = U^{-1}F(\tilde{A})U$$

da Funktionalkalkül und unitäre Abbildungen vertauschen. Man kann sich relativ einfach klarmachen, daß die Multiplikation von rechts und links mit glatten Funktionen die ψDO -Eigenschaften nicht stört. Auch $F(A)$ ist also ein ψDO , in der gleichen Klasse wie $F(\tilde{A})$. Eine kurze Rechnung zeigt, daß V gerade durch $M_\zeta A \zeta^{-1}$ gegeben ist. Daher garantiert die Bedingung 5 aus Satz 2.3.4, daß für die durch sie zugelassenen Operatoren V von unten beschränkt ist.
Es reicht also, wenn wir in den folgenden Abschnitten Operatoren der Form $-\Delta_\gamma + V$ mit von unten beschränktem V betrachten, die die Eigenschaften 1,2,3 und 4 aus Satz 2.3.4 erfüllen.

2.6. Der Wärmeleitungskern

Im Allgemeinen sind Funktionen $F(A)$ selbstadjungierter Differentialoperatoren abstrakt definierte Objekte, über die man wenig konkrete Informationen besitzt. Eine für uns wichtige Ausnahme stellen dabei jedoch die Exponentialfunktionen $\exp(-\tau\cdot)$, $\tau \in \mathbb{R}$ dar, mit denen wir uns in diesem Abschnitt näher beschäftigen wollen: Zumindest für bestimmte Klassen von Operatoren A ist über die zugehörige Schar $\exp(-\tau A)$, den sogenannten Wärmeleitungsoperator, eine ganze Menge bekannt.

Die zum Laplace-Operator gehörigen Wärmeleitungsoperatoren sind z.B. für kompakte Mannigfaltigkeiten gut untersucht, zum einen, weil sie Informationen über die Topologie der Mannigfaltigkeit enthalten (Atiyah-Singer-Indexsatz, siehe z.B. [6]), zum anderen, weil sie für das Studium von Diffusionsvorgängen auf Mannigfaltigkeiten von Bedeutung sind.

Ziel dieses Abschnittes ist es demgegenüber, den Wärmeleitungskern für Operatoren auf *nicht notwendig kompakten* Mannigfaltigkeiten zu untersuchen.
Grundlage für alle Überlegungen in diesem Abschnitt sind die Ergebnisse aus einer Arbeit von R. Wald [33]. In dieser wird der Wärmeleitungsoperator für den Fall $A = -\Delta_\gamma + m^2$ konstruiert. Wir werden dieses Ergebnis vorstellen und anschließend auf solche Operatoren mit ortsabhängigem Potential V verallgemeinern, die die Annahmen 1,2,3 und 4 aus Satz 2.3.4 erfüllen.

2.6.1. Parametrices für die Wärmeleitungsgleichung

Um den Kern des Wärmeleitungsoperators zu konstruieren, erweist es sich als wichtig, dessen asymptotisches Verhalten zu kennen. Um dieses soll es im vorliegenden Abschnitt gehen.
Zunächst bemerken wir, daß $\exp(-\tau A)$ Propagator der Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\frac{d}{d\tau} + A\right) h(\tau) = 0, \qquad h(\tau) \in \mathrm{L}^2(\Sigma) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+$$

in dem Sinne ist, daß für $f \in \mathrm{L}^2(\Sigma)$

$$\left(\frac{d}{d\tau} + A\right) e^{-\tau A} f = 0, \qquad e^{-\tau A} f\big|_{\tau=0} = f$$

gilt. Besitzt $\exp(-\tau A)$ einen Integralkern, sollte dieser also eine Propagator-Funktion für die homogene Wärmeleitungsgleichung sein.
Betrachten wir zunächst einen Spezialfall im $\mathbb{R}^n$: Im $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ist $-\Delta + m^2$ ($m^2 = const. \geq 0$) w.s.a. auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Man kann den Kern $H(\tau, x, y)$ von $\exp(-\tau(-\Delta + m^2))$ (und damit die Propagator-Funktion der Wärmeleitungsgleichung) explizit angeben. Er lautet

$$H(\tau, x, y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}} e^{-\tau m^2} e^{\frac{(x-y)^2}{4\tau}}.$$

Wir wollen einige Eigenschaften von H für den späteren Vergleich mit den Resultaten für beliebige Mannigfaltigkeiten und allgemeinere Operatoren festhalten:

Bemerkung 2.6.1.
1. H ist glatt in allen Argumenten für $\tau > 0$.
2. H fällt für $\tau \to 0$ abseits der Diagonalen exponentiell ab, auf der Diagonalen divergiert H wie $\tau^{-n/2}$.
3. Das Verhalten von H für große τ hängt von der Existenz der unteren spektralen Schranke m^2 ab: Für $m = 0$ fällt H wie $\tau^{-n/2}$ ab, für $m \neq 0$ sogar exponentiell.

Allgemeiner sollte man vermuten, daß das Verhalten von H für kleine τ von dem UV-Verhalten des Spektralmaßes von A abhängt, während sich das Verhalten für große τ aus dem IR-Verhalten des Spektralmaßes ergibt. Zumindest letztere Vermutung findet man im obigen Beispiel auch klar bestätigt.
Wesentlich ist nun, daß das UV-Verhalten, etwa von $-\Delta_\gamma$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (Σ, γ), im Prinzip nicht von den globalen Eigenschaften von Σ abhängt, sondern dem Verhalten von $-\Delta$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gleicht. Insofern erwarten wir, daß das Verhalten von H für kleine τ nicht von der Mannigfaltigkeit abhängt. Dies ist auch tatsächlich der Fall:
In [21] und [22] werden Parametrices $F_N(\tau, p, q)$ für die Wärmeleitungsgleichung (d.h. Lösungen der Wärmeleitung 'bis auf glatte Terme') für $A = -\Delta_\gamma$ konstruiert: Sie haben die Form

$$F_N(\tau, p, q) = \kappa(p, q) \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}} e^{-\frac{\sigma(p,q)}{2\tau}} \sum_{l=0}^{N} U_l(p, q)\tau^l. \tag{2.8}$$

Dabei ist σ der halbe quadratische geodätische Abstand wie in Definition 1.2.1, $\kappa(p, q)$ eine glatte Funktion, die für festes q identisch 1 in einer Umgebung von $p = q$ ist, jedoch außerhalb einer normalen Umgebung von q verschwindet und so dafür sorgt, daß F_N Träger nur dort hat, wo σ wohldefiniert ist.
Die U_l sind wiederum glatte Funktionen. Sie sind als Lösungen bestimmter Differentialgleichungen eindeutig und lokal bestimmt durch die Geometrie von Σ.
Diese F_N sind Parametrices der Wärmeleitungsgleichung in dem Sinne, daß[xii]

$$p_N(\tau, p, q) := ((\partial_\tau + A_2)F_N)(\tau, p, q) \tag{2.9}$$

glatt und in (p, q) gleichmäßig durch τ^N beschränkt ist.

Diese Parametrices sind nun wichtig für die Konstruktion des Wärmeleitungskerns von $-\Delta_\gamma$, insofern dieser ja Propagator für die Wärmeleitungsgleichung sein soll. Um diese Konstruktion auf Operatoren $A = -\Delta_\gamma + V$ übertragen zu können, werden wir auch Parametrices für die Wärmeleitungsgleichung mit $A = -\Delta_\gamma + V$ benötigen. Diese erhalten wir leicht unter Verwendung der in [21] und [22] angegebenen Konstruktionsvorschrift:

[xii] A_2 meint, daß A hier auf das zweite Argument (d.h. auf p) wirkt.

Satz 2.6.2. *Auch für $A = -\Delta_\gamma + V$ mit $V \in C^\infty(\Sigma)$ gibt es glatte Funktionen $U_l(p,q)$, so daß (mit $\kappa(p,q)$ wie oben)*

$$F_N(\tau,p,q) := \kappa(p,q)\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}e^{-\frac{\sigma(p,q)}{2\tau}}\sum_{l=0}^{N}U_l(p,q)\tau^l$$

Parametrices der Wärmeleitungsgleichung im Sinne von (2.9) *sind.*

Beweis. In [21] und [22] werden die Parametrices bezüglich $A = -\Delta_\gamma$ konstruiert, indem ein Ansatz der Form (2.8) (mit $\kappa \equiv 1$) in die Wärmeleitungsgleichung eingesetzt und daraus Gleichungen für die U_l abgeleitet werden. Diese lauten (p, q in einer normalen Umgebung, ν die in der betreffenden Umgebung liegende p und q verbindende Geodäte)

$$\begin{aligned}
U_0(p,q) &= \left(\frac{\det\gamma(p)}{\det\gamma(q)}\right)^{1/4}\\
U_i(p,q) &= \frac{1}{(2\sigma(p,q))^{i/2}\det\gamma(q)^{1/4}}\\
&\quad\times\int_0^{\sqrt{2\sigma(p,q)}} ds\, s^{i-1}\det\gamma(\nu(s))\left(-\Delta_\gamma U_{i-1}\right)(p,\nu(s)) \quad i = 1,2,\dots
\end{aligned}$$

Setzen wir nun stattdessen $A = -\Delta_\gamma + V(p)$ an und spielen die Konstruktionsvorschrift durch, so kommen wir zu ganz ähnlichen Ergebnissen: Die Gleichung für U_0 ändert sich nicht, und in den Gleichungen für die restlichen U_i müssen wir nur $-\Delta_\gamma$ durch $-\Delta_\gamma + V(p)$ ersetzen. Die erhaltenen U_i sind also wieder wohldefiniert und glatt. □

Nun wollen wir die für uns wichtigen Ergebnisse aus [33] vorstellen.
Wald betrachtet den Fall, daß $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\Sigma, \mathrm{dVol}_\gamma)$ und $A = -\Delta_\gamma$ und alle natürlichen Potentzen A^N, $N \in \mathbb{N}$ w.s.a auf $C_0^\infty(\Sigma)$ sind. Er beweist den folgenden

Satz 2.6.3. $\exp(-\tau A)$ *besitzt für $\tau > 0$ einen glatten Integralkern $H(\tau,p,q)$. Sein asymptotisches Verhalten für kleine τ ist durch die F_N aus* (2.8) *gegeben, in dem Sinne, daß es zu $N \in \mathbb{N}_0$ ein $k(N) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß $Q_N := H - F_{k(N)}$ folgendes Verhalten zeigt:*
Zu jedem Kompaktum $K \subset \Sigma\times\Sigma$ gibt es $c_{N,K}$ derart, daß

$$|Q_N(\tau,p,q)| \le c_{N,K}\tau^N \quad \forall (p,q) \in K$$

für hinreichend kleine τ ist.

Zunächst wollen wir bemerken, daß dieses Ergebnis in vieler Hinsicht ähnlich dem für den flachen Raum ist (vergleiche Bemerkung 2.6.1): Der Wärmeleitungskern ist glatt und die Asymptotik für kleine τ ist die gleiche.
Zum Beweis des Satzes nutzt Wald zum einen die Parametrices aus [21],[22], zum anderen Lokalisation und Gårding-Ungleichung (siehe Abschnitt 2.1.2).
Diesen Beweis wollen wir im folgenden Abschnitt auf den den Fall $A = -\Delta_\gamma + V$ verallgemeinern.

2.6.2. Der Wärmeleitungskern für $-\Delta_\gamma$+Potential

Satz 2.6.4. *Sei $A = -\Delta_\gamma + V(p)$ mit einer glatten und von unten beschränkten Funktion V und erfülle bezüglich eines gewissen Definitionsbereiches* $\operatorname{dom}(A) \subset \mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\Sigma, dVol)$ *die Annahme 3 aus Satz 2.3.4. Dann besitzt* $\exp(-\tau A)$ *für $\tau > 0$ einen glatten Integralkern $H(\tau, p, q)$. Auch in diesem Fall gibt es zu $K \Subset \Sigma \times \Sigma$ eine Konstante $c_{N,K}$, so daß mit $Q_N := H - F_{k(N)}$*

$$|Q_N(\tau, p, q)| \leq c_{N,K}\tau^N \quad \forall (p, q) \in K$$

gilt. Dabei sind die F_k die Parametrices der Wärmeleitungsgleichung bezüglich A (Satz 2.6.2).
Zusätzlich vermerken wir, daß in jeder beliebigen Karte $(U_1 \times U_2, \pi_1 \times \pi_2)$ für beliebige Multiindices α, β

$$\lim_{\tau \to 0} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta Q_N(\tau, x, y) = 0 \tag{2.10}$$

gilt.

Beweis. Wie schon weiter oben bemerkt, beruht der Beweis von Wald für Satz 2.6.3 zum einen auf der Parametrix-Konstruktion aus [21], [22], zum anderen auf der Lokalisation zur Verwendung der elliptischen Theorie.
Um nun auch den Fall allgemeiner $V(p)$ zu behandeln, müssen diese beiden Werkzeuge angepasst werden. Der eigentliche Beweis kann dann unverändert übernommen werden.

Parametrix-Konstruktion: Wie wir gesehen haben, kann man die Parametrixkonstruktion aus [21] und [22] problemlos auf den Fall eines Potentials $V(p)$ übertragen und erhält Parametrices mit den Eigenschaften, die für das Argument von Wald gebraucht werden (Satz 2.6.2).

Lokalisierung: Um lokal die elliptische Theorie anwenden zu können, benutzt Wald die folgende Aussage:

Lemma 2.6.5 ([33], Teilaussage von 'Lemma'). *$A = -\Delta_\gamma$ erfülle die Annahme 2 aus Satz 2.3.4. Dann gibt es zu jedem $\chi \in C_0^\infty(\Sigma)$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c_{\chi,N}$, so daß*

$$\left\|A^N M_\chi f\right\|_0 \leq c_{\chi,N}\left(\|f\|_0 + \left\|A^N f\right\|_0\right) \quad \forall f \in \operatorname{dom}\left(A^N\right)$$

ist.

Diese müssen wir durch eine analoge Aussage für $A = -\Delta_\gamma + V$ mit variablem (glatten, von unten beschränkten) V ersetzen. Eine solche haben wir jedoch schon in Lemma 2.1.8 formuliert.
Allerdings ist Lemma 2.1.8 offensichtlich schwächer als die Aussage von Wald und zwar in

zwei Punkten: Erstens macht es nur Aussagen für eine eingeschränktere Klasse von Vektoren f. Zweitens stehen auf der rechten Seite unserer Ungleichung mehr Terme als bei der von Wald.
Diese beiden Abschwächungen machen aber für die Anwendung im Beweis aus [33] nichts aus, denn erstens wird die Ungleichung nur auf Vektoren f angewandt, die in den Definitionsbereichen *aller* $A^k, k \in \mathbb{N}$ liegen, weshalb die erste Einschränkung ohne Belang ist.
Zweitens verhalten sich alle $\left\|A^k f\right\|_0, k \in \mathbb{N}$ ähnlich, weshalb der Unterschied der beiden rechten Seiten nichts ausmacht.

Die Zusatzaussage (2.10): Gleichung (2.10) ist schon implizit in dem Beweis von 2.6.3 in [33] enthalten: Wald zeigt, daß

$$Q_k(\tau, p, q) = \int\limits_0^\tau g(\tau, \tau', p, q)\ d\tau'$$

ist, wobei g für $\tau \geq \tau' \geq 0$ eine glatte Funktion in allen Argumenten ist. Bezeichne $G(\tau, \tau', p, q)$ die Stammfunktion in τ' von g. G ist natürlich ebenfalls glatt. Gehen wir in eine Karte $(U_1 \times U_2, \pi_1 \times \pi_2)$, so sind auch alle Ableitungen

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G(\tau, \tau', x, y)$$

glatt und es gilt somit tatsächlich:

$$\lim_{\tau \to 0} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta Q_k(\tau, x, y) = \lim_{\tau \to 0} \left[(\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G)(\tau, \tau, x, y) - (\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G)(\tau, 0, x, y) \right] = 0.$$

□

2.7. Die Operatoren $F(A)$

Wir wollen nun beweisen, daß die Funktionen $F(A)$ eines elliptischen Differentialoperators (mit den in Satz 2.3.4 vorausgesetzten Eigenschaften) ψDO sind. Dazu werden wir deren Integralkerne mit Hilfe der Laplace-Transformation durch den Wärmeleitungskern H von A ausdrücken und dann genauer untersuchen.
Dabei wird sich die Annahme 4 aus Satz 2.3.4 als wichtig erweisen.

2.7.1. Die Laplace-Transformation

Wir wollen zunächst an die Definition der Laplace-Transformierten

$$F(x) = \mathcal{L}(f)(x) := \int\limits_0^\infty d\tau\ f(\tau) e^{-\tau x}, \qquad x > 0$$

einer (exponentiell beschränkten) Funktion f erinnern. Als ein Beispiel notieren wir die folgende, von uns im weiteren verschiedentlich benutzte Laplace-Transformation: Für $x, \lambda > 0$ und $f(\tau) = \Gamma(\lambda)^{-1}\tau^{\lambda-1}$ ist

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^\infty \tau^{\lambda-1} e^{-\tau x}\, d\tau = x^{-\lambda}. \tag{2.11}$$

Für den späteren Gebrauch notieren wir nun die folgenden Aussagen:

Lemma 2.7.1. *Sei $F = \mathcal{L}f$ eine Funktion aus $\mathcal{K}_\mu$ (Definition 2.3.3). Dann gilt:*

1. *Es gibt eine Konstante c_F, so daß für alle $x > 0$ die Ungleichung*
$$|F(x)| \leq c_F(1 + x^{-\mu})$$
gilt.

2. *Für $a > 0$ und $\tau > 0$ ist*
$$\int\limits_0^\delta d\tau\ |f(\tau)|\, \tau^t e^{-\frac{a}{\tau}} \leq \begin{cases} \not{c} a^{t+\nu} & \text{für } t + \nu < 0 \\ \not{c} & \text{für } t + \nu \geq 0. \end{cases}$$

Beweis. **Erste Aussage des Lemmas**: Einfache Rechnung liefert

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \int\limits_0^\infty d\tau\ |f(\tau)|\, e^{-\tau x} \leq \int\limits_0^\delta d\tau\ |f(\tau)| + \not{c} \int\limits_\delta^\infty d\tau\ e^{-\tau x}\tau^{\mu-1} \\ &\leq \not{c} + \not{c} \int\limits_0^\infty d\tau\ e^{-\tau x}\tau^{\mu-1} \\ &\leq \not{c}_F(1 + x^{-\mu}) \quad \text{nach (2.11)}. \end{aligned}$$

Zweite Aussage des Lemmas: Setze $h(\tau) := |f(\tau)|\, \tau^{-\nu}$. h ist nach Voraussetzung integrierbar auf $[0, \delta]$ und es ist

$$\int\limits_0^\delta \mathrm{d}\tau\ |f(\tau)|\, \tau^t e^{-\frac{a}{\tau}} = \int\limits_0^\delta \mathrm{d}\tau\ h(\tau)\tau^{t+\nu} e^{-\frac{a}{\tau}}.$$

Der Fall $t + \nu \geq 0$: $\tau^{t+\epsilon} e^{-\frac{a}{\tau}} \leq \not{c}_\delta$ auf $[0, \delta]$. Damit folgt die Behauptung.
Der Fall $t + \nu < 0$: Die Funktion $\tau^{t+\nu} e^{-\frac{a}{\tau}}$ nimmt bei $-a/(t + \nu)$ ihr Maximum an. Wir können daher abschätzen:

$$\int\limits_0^\delta \mathrm{d}\tau\ h(\tau)\tau^{t+\nu} e^{-\frac{a}{\tau}} \leq \not{c} a^{t+\nu} \int\limits_0^\delta \mathrm{d}\tau\ h(\tau) \leq \not{c} a^{t+\nu},$$

da h integrierbar ist. □

2.7.2. Der Integralkern von $F(A)$

In diesem und dem nächsten Abschnitt werden wir Funktionen $F(A)$ von Operatoren A betrachten. Wir nehmen dazu an:

Annahme 2.7.2. Seien A und $\mu > 0$, so daß die Annahmen 1,2,3,4 und 5 aus Satz 2.3.4 gelten. Weiterhin sei F eine Funktion aus $\mathcal{K}_\mu$. Wir bezeichnen mit f die Funktion $\mathcal{L}^{-1}(F)$ und mit ν, δ die Konstanten aus den Abschätzungen aus Definition 2.3.3.

Satz 2.7.3. *Für den Operator $F(A)$ gilt:*

1. $\forall \chi \in C_0^\infty(\Sigma) : \ \|F(A)M_\chi\|_{Op} < \infty.$
2. $F(A) : C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ *ist stetig.*

Beweis. **Aussage 1**: Seien $\chi, g \in C_0^\infty(\Sigma)$. Wir bezeichnen mit E_λ die Spektralschar von A. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|F(A)M_\chi g\|_0^2 &= \int_0^\infty F^2(\lambda)\ d\langle M_\chi g, E_\lambda M_\chi g\rangle \\
&\le \not{c}_F \int_0^\infty (\lambda^{-2\mu} + \lambda^{-\mu} + 1)\ d\langle M_\chi g, E_\lambda M_\chi g\rangle \quad \text{nach Lemma 2.7.1} \\
&\le \not{c}_F \int_0^\infty (\lambda^{-2\mu} + 1))\ d\langle M_\chi g, E_\lambda M_\chi g\rangle \quad \text{da } \lambda^{-\mu} \le \not{c}\,(\lambda^{-2\mu} + 1) \\
&= \not{c}_F \left(\left\|A^{-\mu} M_\chi g\right\|_0^2 + \|M_\chi g\|_0^2\right) \\
&\le \|g\|_0^2
\end{aligned}$$

Da $C_0^\infty(\Sigma)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt die Aussage.
Aussage 2: Sei $K \Subset \Sigma$, $K' \Subset \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$. Wir wählen ein $\chi \in C_0^\infty(\Sigma)$, so daß $\chi|_{K'} = 1$ ist. Dann können wir für beliebiges $g \in C_0^\infty(K')$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
|F(A)g|_{K,k} = |F(A)M_\chi g|_{K,k} &\le \not{c} \sum_{l=0}^{\lceil s/2 \rceil} \left\|A^l F(A) M_\chi g\right\|_0 \quad \text{(Satz 2.1.13 mit } s > k + \frac{n}{2}) \\
&= \not{c} \sum_{l=0}^{\lceil s/2 \rceil} \left\|F(A) M_{\chi'} A^l M_\chi g\right\|_0 \quad \text{für } \chi' \in C_0^\infty(\Sigma), \chi'|_{\operatorname{supp}\chi} = 1 \\
&\le \not{c} \sum_{l=0}^{\lceil s/2 \rceil} \left\|A^l M_\chi g\right\|_0 \quad \text{wg. Beschränktheit von } F(A)M_{\chi'} \text{ nach Teil 1,} \\
&= \not{c}_{\operatorname{supp}\chi}\, |g|_{s,\operatorname{supp}\chi}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Glattheit von $F(A)f$ und die Stetigkeit von $F(A)$ bewiesen. □

Wir berechnen nun den Integralkern des Operators $F(A)$, aufgefaßt als Abbildung $C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$. Dazu drücken wir $F(A)$ in geeigneter Weise durch den Wärmeleitungskern aus: Wir berechnen für $g, h \in C_0^\infty(\Sigma)$:

$$\langle g, F(A)h\rangle = \int_0^\infty F(\lambda)\, d\langle g, E_\lambda h\rangle \overset{(2.11)}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau\lambda}\, d\tau\, d\langle g, E_\lambda h\rangle.$$

Um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen, wollen wir den Satz von Fubini anwenden. Da das Maß $d\langle \dots, \dots\rangle$ nicht positiv ist, müssen wir zuvor die Polarisationsidentität anwenden. Diese zerlegt $d\langle \dots, \dots\rangle$ in eine Linearkombination positiver Maße, auf die wir einzeln den Satz von Fubini anwenden können. So ist z.B.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty \left| f(\tau) e^{-\tau\lambda} \right| \, d\tau\, d\langle g+h, E_\lambda (g+h)\rangle \;&\leq \int_0^\infty (\not{c}_F + \lambda^{-\mu})\, d\langle g+h, E_\lambda g+h\rangle \\ &= \langle g+h, (\not{c}_F + A^{-\mu})(g+h)\rangle \quad < \infty,\end{aligned}$$

wie im Beweis zu Lemma 2.7.1. Wir setzen alles wieder zusammen und erhalten

$$\begin{aligned}\langle g, F(A)h\rangle &= \int_0^\infty f(\tau) \langle g, e^{-\tau A} h\rangle\, d\tau \\ &=: I_1(g,h) + I_2(g,h) + I_3(g,h)\end{aligned}$$

mit

$$I_1(g,h) = \int_0^\delta f(\tau) \iint g(p) F_{k(0)}(\tau, p, q) h(q)\, \mathrm{dVol}(p)\, \mathrm{dVol}(q)\, \mathrm{d}\tau, \tag{2.12a}$$

$$I_2(g,h) = \int_0^\delta f(\tau) \iint g(p) Q_0(\tau, p, q) h(q)\, \mathrm{dVol}(p)\, \mathrm{dVol}(q)\, \mathrm{d}\tau, \tag{2.12b}$$

$$I_3(g,h) = \int_\delta^\infty f(\tau) \langle g, e^{-\tau A} h\rangle\, \mathrm{d}\tau \tag{2.12c}$$

für $g, h \in C_0^\infty(\Sigma)$. I_1 ist eine Art UV-Anteil, I_3 eine Art IR-Anteil von $F(A)$. Wir untersuchen jetzt die einzelnen quadratischen Formen genauer:

Satz 2.7.4. *Die quadratischen Formen I_2 und I_3 haben C^∞-Integralkerne K_2 bzw. K_3. I_1 hat den Integralkern*

$$K_1(p,q) = \int_0^\delta d\tau\, F_{k(0)}(\tau, p, q) f(\tau)$$

Dieser ist C^∞ abseits der Diagonalen.

Beweis. **Der Kern von** I_2: In I_2 wird in allen Variablen nur über kompakte Bereiche integriert. Der Integrand ist eine in p, q glatte Funktion. In τ ist sein Betrag integrierbar auf $[0, \delta]$, denn dieses gilt für f, und Q ist glatt in τ auf $(0, \delta]$ und nach (2.6.4) beschränkt für $\tau \to 0$.
Wir sehen also, daß die Integrale in I_2 absolut konvergieren, wir können die Integrationsreihenfolge verändern und erhalten

$$I_2(g,h) = c_\mu \iint g(p)h(q) \underbrace{\int_0^\delta f(\tau)Q_0(\tau,p,q)\, d\tau}_{=:K_2(p,q)} \,\mathrm{dVol}(p)\,\mathrm{dVol}(q).$$

$K_2(p,q)$ ist auch glatt: Ein Standardresultat besagt, daß Differentiation nach einem Parameter und Integration vertauscht werden dürfen, wenn die Ableitung des Integranden nach dem Parameter unabhängig von diesem integrabel majorisiert werden kann.
Q_0 ist nach Satz 2.6.4 glatt in p, q und τ. Die Ableitungen nach p und q sind also lokal beschränkt. Wegen der Integrierbarkeit von $|f|$ auf $[0, \delta]$ sind also die Ableitungen des Integranden alle (lokal in p und q) integrabel majorisierbar und wir dürfen beliebige partielle Ableitungen unter das Integral ziehen. K_2 ist also tatsächlich glatt.

Der Kern von I_3: Um zu beweisen, daß I_3 einen glatten Kern besitzt, wollen wir den Satz 2.1.14 anwenden. Dazu müssen wir zunächst die Voraussetzungen schaffen.
Gegeben zwei beliebige Kompakta $K_1, K_2 \subset \Sigma$ und $M \in \mathbb{N}_0$: Seien $h_1 \in C_0^\infty(K_1), h_2 \in C_0^\infty(K_2)$. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}\left|\langle h_1, A^{2M} e^{-\tau A} h_1\rangle\right| &= \left|\langle A^{-\mu} h_1, A^{2(M+\mu)} e^{-\tau A} A^{-\mu} h_1\rangle\right| \\ &= \int_0^\infty \underbrace{\lambda^{2(\mu+M)} e^{-\tau\lambda}}_{=:g(\tau,\lambda)} \,\mathrm{d}\langle A^{-\mu} h_1, E_\lambda A^{-\mu} h_1\rangle\end{aligned}$$

Die Funktion $g(\tau, \lambda)$ hat für festes $\tau > 0$ das einzige Maximum bei $\lambda_{\max} = 2(\mu + M)/\tau$, es ist somit $f(\tau, \lambda) \leq f(\tau, \lambda_{\max}) \leq \cancel{c}_\mu \tau^{-2(\mu+M)}$. Damit können wir weiter abschätzen

$$\begin{aligned}&\leq \cancel{c}_\mu \tau^{-2(\mu+M)} \int_0^\infty \mathrm{d}\langle A^{-\mu} h_1, E_\lambda A^{-\mu} h_1\rangle \\ &= \cancel{c}_\mu \tau^{-2(\mu+M)} \left\|A^{-\mu} h_1\right\|_0^2 \\ &\leq \cancel{c}_{\mu,M,K_1} \tau^{-2(\mu+M)} \left\|h_1\right\|_0^2\end{aligned}$$

nach Voraussetzung an A, μ. Eine analoge Abschätzung gilt natürlich für $\left|\langle h_2, A^{2M} e^{-\tau A} h_2\rangle\right|$.

Damit können wir uns nun an die eigentliche Abschätzung machen:

$$
\begin{aligned}
\left|I_3(A^M h_1, A^M h_2)\right| &= \left|\int_\delta^\infty f(\tau)\langle h_1, A^{2M} e^{-\tau A} h_2\rangle \, \mathrm{d}\tau\right| \\
&\leq \not{c} \int_\delta^\infty \tau^{\mu-1} \left|\langle h_1, A^{2M} e^{-\tau A} h_2\rangle\right| \, \mathrm{d}\tau \\
&\leq \not{c} \int_\delta^\infty \tau^{\mu-1} \left|\langle h_1, A^{2M} e^{-\tau A} h_1\rangle\right|^{1/2} \left|\langle h_2, A^{2M} e^{-\tau A} h_2\rangle\right|^{1/2} \, \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

indem wir die CS-Ungleichung auf die positive Form $\langle \cdot, A^{2M} e^{-\tau A} \cdot\rangle$ angewendet haben,

$$
\begin{aligned}
&\leq \not{c}_{\mu,M,K_1,K_2} \|h_1\|_0 \|h_2\|_0 \int_\delta^\infty \tau^{-(1+\mu+2M)} \, \mathrm{d}\tau \text{ nach obiger Absch.} \\
&\leq \not{c}_{\mu,M,K_1,K_2} \|h_1\|_0 \|h_2\|_0 \,,
\end{aligned}
$$

da $1+\mu+2M > 1$ und das letzte Integral somit konvergent ist. Durch diese Abschätzung sind die Voraussetzungen zur Anwendung von Satz 2.1.14 geschaffen. Wir erhalten also tatsächlich das Resultat, daß I_3 einen glatten Kern besitzt.

Der Kern von I_1: Um den Integralkern von I_1 zu erhalten, müssen wir die Integrationsreihenfolge in (2.12a) verändern. Dazu schätzen wir mit Hilfe des zweiten Teils von Lemma 2.7.1 ab:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\delta \left|f(\tau) g(p) F_{k(0)}(\tau, p, q) h(q)\right| \, d\tau \\
&\qquad \leq |\kappa(p,q) g(p) h(q)| \sum_{l=0}^{k(0)} \int_0^\delta \left|f(\tau)\tau^{-n/2+l} U_l(p,q)\right| e^{-\frac{\sigma(p,q)}{2\tau}} \, \mathrm{d}\tau \\
&\qquad \leq |\kappa(p,q) g(p) h(q)| \sum_{l=0}^{k(0)} |U_l(p,q)| \begin{cases} \sigma(p,q)^{\nu+l-n/2} & \text{für } \nu + l - n/2 < 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite ist nun aber in $y(=\pi q)$ integrierbar, wie man sich in lokalen Koordinaten aus der Abschätzung aus Lemma B.1.3, Teil 1 und der Tatsache, daß

$$\nu > 0 \;\Rightarrow\; 2(\nu - n/2) > -n,$$

überzeugen kann.
Also können wir die Integrationsreihenfolge in (2.12a) verändern und erhalten den angegebenen Integralkern.

Glattheit: Gegeben $p, q \in \Sigma, p \neq q$. Liegt p nicht in einer normalen Umgebung von q, so ist $K_1(\tau, p, q) = 0$ und wir haben nichts zu beweisen. Anderenfalls verwenden wir eine Karte (U, π), die diese normale Umgebung überdeckt und setzen $x := \pi p, y := \pi q$: Jede partielle Ableitung, die auf $\pi_* \exp(-\frac{\sigma}{2\tau})(x, y)$ wirkt, erzeugt einen Faktor τ^{-1}. Wir schätzen wie oben ab:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^\delta \left|\partial^\alpha f(\tau) g(x) F_{k(0)}(\tau, x, y) h(y)\right| \, d\tau \\
&\qquad\qquad \leq \not{c} \sum_{l=0}^{k(0)} \begin{cases} \sigma(x, y)^{\mu + l - n/2 - |\alpha|} & \text{für } \mu + l - n/2 - |\alpha| < 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\
&\qquad\qquad < \infty
\end{aligned}
$$

nach Voraussetzung. Daher können wir den Satz von Lebesgue anwenden, um beliebige partielle Ableitungen durch die τ-Integration zu ziehen. $\square$

Setzen wir jetzt $K := K_1 + K_2 + K_3$ und bezeichnen mit I den Operator

$$C_0^\infty(\Sigma) \ni g \longmapsto Ig := \int_\Sigma K(\cdot, q) g(q) \, \mathrm{dVol}(q),$$

so stellen wir zusammenfassend fest, daß

$$\langle f, F(A) g \rangle \;=\; \langle f, Ig \rangle \qquad \forall f, g \in C_0^\infty(\Sigma)$$

gilt und wegen der Dichtheit von $C_0^\infty(\Sigma)$ sogar

$$F(A) g = Ig \qquad \forall g \in C_0^\infty(\Sigma)$$

ist. $F(A)$ und I stimmen also als Operatoren $C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ überein. Das ist entscheidend für alles folgende, denn für die ψDO -Eigenschaft von $F(A)$ spielt nur dessen Einschränkung auf $C_0^\infty(\Sigma)$ eine Rolle.

Wie oben für K vorgeführt, können wir auch den einzelnen K_i Operatoren $C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ zuordnen, die wir der Einfachheit halber wie die zugehörigen Formen mit I_i bezeichnen.
Da I_2 und I_3 C^∞-Integralkerne haben, also stetig $C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ sind und $F(A) = I_1 + I_2 + I_3$ nach Satz 2.7.3 als Operator $C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ ebenfalls stetig ist, können wir noch das folgende Korollar festhalten:

Korollar 2.7.5. $I_1 : C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ *ist stetig.*

Da I_2 und I_3 einen glatten Kern haben und somit schon als ψDO erkannt sind, bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß I_1 ebenfalls ψDO ist.

Ein Weg, dies zu zeigen, wäre die Verwendung der schon bekannten Resultate über Funktionen von (Pseudo-)Differentialoperatoren auf *kompakten* Mannigfaltigkeiten ([31], [26], [27], siehe Abschnitt 2.3) nach dem folgenden Schema:
Der Integralkern von I_1 an einem Punkt $(p_1, p_2) \in \Sigma \times \Sigma$ hängt nach den im Beweis zu Satz 2.6.2 angegebenen Formeln für die Parametrix von A nur von der Geometrie in einer beliebig kleinen Umgebung von (p_1, p_2) ab. Konstruiert man also eine *kompakte* Mannigfaltigkeit $\tilde{\Sigma}$, so daß Umgebungen U_i von p_i durch Abbildungen ι_i isometrisch in $\tilde{\Sigma}$ eingebettet werden und definiert man einen *DO* $\tilde{A}$ auf $\tilde{\Sigma}$, der auf $\iota_i U_i$ wie $\iota_{i*} A \iota_i^*$ wirkt, so sollte $F(\tilde{A})$ einerseits ψDO sein (sofern $\tilde{A}$ die Anwendung einer Kombination der Ergebnisse aus [31] und [26] bzw. aus [27] zuläßt), andererseits sollte sein Integralkern auf $\iota_1 U_1 \times \iota_2 U_2$ gleich $\iota_1^* \times \iota_2^* K_1$ bis auf C^∞-Funktionen sein.
Da die Eigenschaft, ψDO zu sein, *lokal* getestet werden kann (Lemma 2.1.5), wäre damit auch I_1 als ψDO erkannt.
Wir wählen jedoch einen anderen Weg, indem wir die ψDO -Eigenschaft von I_1 direkt aus der expliziten Darstellung des Integralkernes K_1 (Satz 2.7.4) beweisen. Das hat den Vorteil, daß wir unabhängig von den Ergebnissen aus [31], [26], [27] sind und uns mithin auch keine Gedanken darüber machen müssen, ob man $\tilde{A}$ so konstruieren kann, daß es die nötigen Vorausetzungen (Selbstadjungiertheit, Invertierbarkeit) erfüllt.
Der Nachteil unserer direkten Rechnung ist, daß sie relativ langwierig ist. Daher haben wir sie in den Anhang B verschoben und bringen hier nur das Ergebnis:

Satz 2.7.6. *I_1 ist ein ψDO aus $\Psi^0(\Sigma)$.*

Daraus ergibt sich nun sofort der Satz 2.3.4.

3. Zweiter Zugang

In diesem Kapitel wollen wir einen zweiten Weg beschreiben, die Hadamard-Eigenschaft für quasifreie Grundzustände zu beweisen. Dieser wird sich als erfolgreicher herausstellen als der im letzten Kapitel besprochene, denn er ist sehr viel einfacher und führt auf stationären Raumzeiten zum Ziel. Alle wesentlichen Ideen, die in diesem Zugang verwendet werden, verdanken wir R. Verch.
Bei diesem Zugang gehen wir nicht von einer konkreten Darstellung der Zweipunktfunktion Λ aus, sondern versuchen vielmehr, die allgemeinen Eigenschaften von Λ, die aus Eigenschaften des Feldes und des Zustands folgen, auszunutzen.
Namentlich werden wir die Grundzustandseigenschaft (Invarianz und Spektrumsbedingung) auf Seiten des Zustandes sowie Lokalität und Feldgleichung auf Seiten des Feldes verwenden. Aus jeder dieser Eigenschaften leiten wir Einschränkungen an die Wellenfrontmenge von Λ her. Zusammengenommen spezifizieren sie $\mathrm{WF}(\Lambda)$ vollständig.
Um aus den oben genannten Eigenschaften der Theorie die Einschränkungen an $\mathrm{WF}(\Lambda)$ zu erhalten, sind mathematische Hilfsmittel vonnöten: Um die Grundzustandseigenschaft auszunutzen, verwenden wir einen in [12] gegebenen Zusammenhang zwischen Fouriertransformierten und Wellenfrontmenge von Elementen aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dazu setzen wir Λ lokal zu einer temperierten Distribution fort.
Die Feldgleichung läßt sich ausnutzen, indem Sätze aus der mikrolokalen Analysis über die Ausbreitung von Singularitäten angewendet werden.

3.1. Mathematische Hilfsmittel

Um die Notation zu fixieren, definieren wir zunächst die die Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konstituierenden Halbnormen:

Definition 3.1.1. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $j, k \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die Halbnormen

$$|f|_{j,k} := \sum_{\substack{|\alpha| \leq j \\ |\beta| \leq k}} \sup \left| x^\beta \partial_x^\alpha f(x) \right|$$

und

$$|f|_j := |f|_{j,0} \, .$$

Wir bezeichnen mit τ_a für $a \in \mathbb{R}^n$ die Translationen $\tau_a f(x) := f(x-a)$ und halten folgende einfache Eigenschaften der Halbnormen $|\cdot|_j$ fest:

Lemma 3.1.2. *Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

1. $|\tau_a f|_j = |f|_j \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$.
2. $|fg|_j \leq |f|_j\, |g|_j$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ den Raum der temperierten Distributionen und verwenden im folgenden häufig (und ohne expliziten Hinweis) die folgende Tatsache ('Satz vom Kern', z.B. [24] Thm. V.12):

Satz 3.1.3. *Zu jedem bilinearen, in beiden Einträgen getrennt stetigen Funktional $T(\cdot,\cdot)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gibt es $\tilde{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, so daß $T(f,g) = \tilde{T}(f \otimes g)$ ist.*

In [12] wird ein Zusammenhang zwischen asymptotischem Verhalten von Fouriertransformierter und der Wellenfrontmenge einer temperierten Distribution gegeben. Dieser benötigt folgende

Definition 3.1.4. Sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$. Dann definiert

$$\Gamma(\mathcal{G}) := \left\{ k \in \mathbb{R}^n \mid k = \lim_{j\to\infty} c_j k_j \text{ mit } k_j \in \mathcal{G}, c_j \in \mathbb{R}_+, \lim_{j\to\infty} c_j = 0 \right\}$$

den sogenannten *Grenzkegel* von $\mathcal{G}$.[i]

Damit können wir die betreffende Aussage formulieren:

Satz 3.1.5 ([12], Lemma 8.1.7). *Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{G} := \operatorname{supp} \hat{u}$. Dann ist* $\mathrm{WF}(u) \subset \mathbb{R}^n \times \Gamma(\mathcal{G})$.

3.2. Bedingungen an WF(Λ)

In diesem Abschnitt wollen wir die verschiedenen physikalischen Eigenschaften der Theorie dazu nutzen, Aussagen über die Wellenfrontmenge zu machen. Wie sich dann im nächsten Abschnitt zeigen wird, reichen diese tatsächlich aus, um die Hadamard-Eigenschaft nachzuweisen.
Dazu nehmen wir die folgende Situation als gegeben an:

Annahme 3.2.1. $(\mathcal{M}, g)$ sei eine stationäre, global hyperbolische, $s+1$-dimensionale Raumzeit. $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ sei die Zweipunktfunktion des eindeutigen, quasifreien Grundzustandes des KG-Feldes auf $\mathcal{M}$.

[i] Wie man leicht einsehen kann, ist $\Gamma(\mathcal{G})$ tatsächlich ein Kegel.

Insbesondere gibt es also, wie in Abschnitt 1.3.1 ausgeführt, eine Isometrie $(t, \underline{\iota}) : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \times \Sigma$.
Wir versehen $\mathcal{M}$ mit der durch die ausgezeichnete Zeitkoordinate t gegebenen Zeitorientierung, d.h.

$$T_p\mathcal{M} \ni v \text{ mit } g_p(v,v) \geq 0 \text{ ist zukunftsgerichtet } :\Leftrightarrow g_p(v, \partial_t) > 0.$$

3.2.1. Positivität und Invarianz

Zunächst nutzen wir die Positivität und Zeitinvarianz aus: Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{p_1,p_2} &:= \left\{(\xi_1,\xi_2) \in T^*_{p_1,p_2}(\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \mid \xi_1(\partial_t) > 0, \quad \xi_1(\partial_t) = -\xi_2(\partial_t)\right\} \qquad p_1, p_2 \in \mathcal{M}, \\ \mathcal{G} &:= \{(p_1,\xi_1,p_2,\xi_2) \in T^*(\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \mid (\xi_1,\xi_2) \in \mathcal{G}_{p_1,p_2}\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

Satz 3.2.2. $\mathrm{WF}(\Lambda) \subset \mathcal{G}$.

Beweis. **Räumliche Lokalisierung**: zunächst werden wir Λ in den räumlichen Variablen lokalisieren und als Distribution auf dem $\mathbb{R}^n$ schreiben: Seien $p_1, p_2 \in \mathcal{M}$. Wir setzen

$$\underline{p}_i := \underline{\iota} p_i \in \Sigma, \quad i = 1, 2$$

Dann gibt es Karten (U_i, π_i) von Σ mit $p_i \in U_i$ und darauf aufbauend Karten

$$(\tilde{U}_i, \tilde{\pi}_i) := (\iota^{-1}(\mathbb{R}\times U_i), t \times \pi_i \circ \underline{\iota}), \qquad i = 1, 2$$

von $\mathcal{M}$. Wir notieren die Eigenschaft

$$\tilde{\pi}_{i*}\partial_t = (1, \underline{0}). \tag{3.1}$$

Seien nun

$$\chi_i \in C_0^\infty(\Sigma), \quad \operatorname{supp}\chi_i \subset U_i, \quad \chi_i(p_i) \neq 0, \qquad i = 1, 2.$$

Wir definieren nun $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2(s+1)})$ durch

$$\varphi(F) := \Lambda(\chi_1 \otimes \chi_2(\tilde{\pi}_1 \otimes \tilde{\pi}_2)^* F), \quad F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2(s+1)}).$$

Indem wir das Transformationsverhalten der Wellenfrontmenge als Teilmenge des Kotangentialraums verwenden, finden wir aufgrund der Konstruktion von φ

$$\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) = (\tilde{\pi}_1 \otimes \tilde{\pi}_2)^* \, \mathrm{WF}_{\tilde{\pi}_1(p_1),\tilde{\pi}_2(p_2)}(\varphi). \tag{3.2}$$

φ als temperierte Distribution: Jetzt werden wir zeigen, daß φ zu einer temperierten Distribution fortgesetzt werden kann. Zunächst konstruieren wir dazu eine spezielle Zerlegung der Eins auf $\mathbb{R}$: Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ und $\tilde{\kappa} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ so, daß

$$\tilde{\kappa}|_{[-1/2+\epsilon,0]} \equiv 1, \quad \tilde{\kappa}|_{[-1,-1/2-\epsilon]} \equiv 0 \tag{3.3}$$

ist. Wir setzen jetzt

$$\kappa(x) = \begin{cases} \tilde{\kappa}(x) & \text{für } x \in [-1,0] \\ 1 - \tilde{\kappa}(x-1) & \text{für } x \in (0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Damit ist κ in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ und hat die Eigenschaften

$$\kappa|_{[-1/2+\epsilon,1/2-\epsilon]} \equiv 1, \quad \kappa|_{\mathbb{R}\setminus[-1/2-\epsilon,1/2+\epsilon]} \equiv 0.$$

Zusätzlich gilt

$$\left(\sum_{n=-N}^{N} \kappa(x-n)\right)\Bigg|_{[-N+\epsilon,N-\epsilon]} \equiv 1.$$

Wir führen die Abkürzung $\kappa_n(x) := \kappa(x-n)$ ein und definieren für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$

$$\bar{\varphi}(f,g) := \lim_{M,N\longrightarrow\infty} \sum_{\substack{n=-N,\dots,N \\ m=-M,\dots,M}} \varphi(\kappa_m f, \kappa_n g). \tag{3.4}$$

Nun folgen zwei Hilfssätze über $\bar{\varphi}(f,g)$:

Lemma 3.2.3. *Der Grenzwert in* (3.4) *existiert und es gilt*

1. $\bar{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2(s+1)})$
2. $\bar{\varphi}(\tau_y f, \tau_y g) = \varphi(f,g) \quad \forall f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1}),\ y \in \mathbb{R}.$

Dabei meint τ_y jetzt eine 'Zeittranslation' $\tau_y f(x_0, \dots x_s) := f(x_0 - y, x_1, \dots x_s)$.

Beweis. **Teil 1**: Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$. Zunächst können wir abschätzen

$$\begin{aligned} |\bar{\varphi}(\kappa_m f, \kappa_n g)| &= |\Lambda(\chi_1\kappa_m f, \chi_2\kappa_n g)| \\ &\le |\Lambda(\chi_1\kappa_m f, \chi_1\kappa_m f)|^{1/2}\, |\Lambda(\chi_2\kappa_n g, \chi_2\kappa_n g)|^{1/2}, \end{aligned} \tag{$*$}$$

da Λ eine positive Bilinearform ist, auf welche wir die CS-Ungleichung anwenden können. Weiterhin ist $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$, weshalb zu $K \Subset \mathcal{M}$ ein $j_K \in \mathbb{N}$ und eine Konstante c_K existiert, so daß für alle f aus $C_0^\infty(K)$

$$\begin{aligned}\Lambda(f,f) \leq\ & c_K\, |f \otimes f|_{j_K} = |f \otimes 1 \cdot 1 \otimes f|_{j_K} \\ &\leq \not{c}_K\, |1 \otimes f|_{j_K}^2 \quad \text{(Lemma 3.1.2, Teil 2)} \\ &= \not{c}_K\, |f|_{j_K}^2 \,.\end{aligned}$$

Wir wählen nun $K \Subset \mathcal{M}$, so daß $\operatorname{supp} \chi_1 \kappa \subset K$. Seien j, c die zu K gehörenden Konstanten aus der obigen Abschätzung. Dann können wir berechnen:

$$|\Lambda(\chi_1 \kappa_m f, \chi_1 \kappa_m f)|^{1/2} = |\Lambda(\chi_1 \kappa \tau_{-m} f, \chi_1 \kappa \tau_{-m} f)|^{1/2}$$

wegen $[M_{\chi_i}, \tau_y] = 0$ (die χ_i hängen nur von den räumlichen Koordinaten ab) und Zeitinvarianz von Λ,

$$\begin{aligned}&\leq \not{c}\, |\chi_1 \kappa \tau_{-m} f|_j \quad \text{nach obiger Absch.} \\ &= \not{c}\, \left|\chi_1 \kappa \tau_{-m} \left[(1+t^2)^{-p}(1+t^2)^p f\right]\right|_j \\ &= \not{c}\, \left|\chi_1 \kappa \left[\tau_{-m}(1+t^2)^{-p}\right] \tau_{-m} \left[(1+t^2)^p f\right]\right|_j \\ &\leq \not{c}\, \left|\chi_1 \kappa \tau_{-m}(1+t^2)^{-p}\right|_j \left|\tau_{-m}(1+t^2)^p f\right|_j \quad \text{Lemma 3.1.2, Teil 2} \\ &\leq \not{c}\, (1+|m|)^{-p} \left|(1+t^2)^p f\right|_j \quad \text{wg. } \operatorname{supp}\kappa \text{ komp. und 3.1.2, Teil 1} \\ &\leq \not{c}\, (1+|m|)^{-p}\, |f|_{j,2p} \,.\end{aligned}$$

Dabei ist $p \in \mathbb{N}$ beliebig. Eine analoge Ungleichung ergibt sich für $\Lambda(\chi_2 \kappa_n g, \chi_2 \kappa_n g)$. Wenden wir die so erhaltenen Ungleichungen zusammen mit $(*)$ an, so ergibt sich

$$|\bar{\varphi}(\kappa_m f, \kappa_n g)| \leq \not{c}\, (|m|+1)^{-p}\, (|n|+1)^{-p}\, |f|_{j,2p}\, |g|_{j',2p} \,. \tag{$**$}$$

Wählen wir nun $p > 1$ so werden die Folgen $(|m|+1)^{-p}$ und $(|n|+1)^{-p}$ summierbar und wir erhalten

$$|\bar{\varphi}(f,g)| \leq \not{c}_p\, |f|_{j,2p}\, |g|_{j',2p}$$

Damit ist Teil 1 gezeigt.

Teil 2: Wir schätzen ab:[ii]

$$\begin{aligned}&|\bar{\varphi}(f,g) - \bar{\varphi}(\tau_a f, \tau_a g)| \\ &\quad \leq \lim_{M,N\to\infty} \Bigg(\sum_{n=N-\lceil a\rceil}^{N} \sum_{m=-\lceil M+a\rceil}^{\lceil M+a\rceil} |\varphi(\kappa_m f, \kappa_n g)| + \big(N \longrightarrow -N\big) \\ &\qquad + \sum_{m=M-\lceil a\rceil}^{M} \sum_{n=-\lceil N+a\rceil}^{\lceil N-a\rceil} |\varphi(\kappa_m f, \kappa_n g)| + \big(M \longrightarrow -M\big) \Bigg)\end{aligned}$$

[ii]Dabei bezeichnet $\lceil\cdot\rceil$ die nächstgrößere ganze Zahl.

und indem wir (∗∗) benutzen und die Grenzwerte für die inneren Summen bilden

$$
\begin{aligned}
&\leq \not{c}_{f,g,p} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=N-\lceil a\rceil}^{N} (|n|+1)^{-p} + \big(N \longrightarrow -N\big) \right) \\
&\qquad + \not{c}_{f,g,p} \left(\lim_{M\to\infty} \sum_{m=M-\lceil a\rceil}^{M} (|m|+1)^{-p} + \big(M \longrightarrow -M\big) \right) \\
&\leq \not{c}_{f,g,p,a} \lim_{N\to\infty} (|N| - |\lceil a\rceil| + 1)^{-p} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist auch der 2. Teil des Lemmas gezeigt. □

Da $\bar{\varphi}$ eine Erweiterung von φ ist, können wir im folgenden deren Unterscheidung gefahrlos fallen lassen und bezeichnen die Erweiterung ebenfalls mit φ.

Fourierspektrum von $\boldsymbol{\varphi}$: Jetzt berechnen wir das Fourierspektrum von φ: Dazu definieren wir die Mengen

$$
\mathcal{G}_1 := \left\{ (\xi,\xi') \in \mathbb{R}^{2(s+1)} \mid \xi_0 = -\xi'_0 \right\}, \quad \mathcal{G}_2 := \left\{ (\xi,\xi') \in \mathbb{R}^{2(s+1)} \mid \xi_0 \geq 0 \right\}.
$$

Wir behaupten

Lemma 3.2.4. $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

Beweis. **$\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \subset \boldsymbol{\mathcal{G}_1}$**: Für diese Aussage verwenden wir die Translationsinvarianz, indem wir ein Standardargument leicht abwandeln: Wir müssen nach Definition des Trägers einer Distribution zeigen, daß $\hat{\varphi} = 0$ auf der Menge $K := C_0^\infty(\mathbb{R}^{2(s+1)} \setminus \mathcal{G}_1)$ ist.
Sei dazu I eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_I &:= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{s+1} \mid \xi_0 \in I \right\} \\
\tilde{K} &:= \left\{ f_1 \otimes f_2 \mid f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1}),\ \exists I_i \subset \mathbb{R}:\ \operatorname{supp} f_i \subset \mathcal{V}_{I_i}\ I_1 \cap -I_2 = \emptyset \right\}.
\end{aligned} \tag{$*$}
$$

Man kann nun relativ einfach zeigen, daß die Menge der endlichen Linearkombinationen von Elementen aus $\tilde{K}$ dicht ist in K. [iii] Es reicht also, wenn wir zeigen, daß $\hat{\varphi} = 0$ auf $\tilde{K}$.
Betrachten wir also $f \otimes g \in \tilde{K}$:

[iii] Sei $F \in K$: Da $\mathbb{R}^{2(s+1)} \setminus \mathcal{G}_1$ offen ist, findet man eine Überdeckung $\mathcal{V}_{I_1^{(k)}} \times \mathcal{V}_{I_2^{(k)}}$ von $\operatorname{supp} F$, für die $I_1^{(k)} \cap -I_2^{(k)} = \emptyset$ für alle k. Da $\operatorname{supp} F$ kompakt ist, finden wir eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{V}_{I_1^{(\tilde{k})}} \times \mathcal{V}_{I_2^{(\tilde{k})}}$.Sei (F_l) eine Folge aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1}) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1})$, die gegen F konvergiert. Man kann nun jedes F_l mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins auf den $\mathcal{V}_{I_1^{(\tilde{k})}} \times \mathcal{V}_{I_2^{(\tilde{k})}}$ als Summe von Elementen aus $\tilde{K}$ schreiben.

Wegen der Translationsinvarianz gibt es $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2(s+1)-1})$, so daß (mit der Schreibweise $g_t(\underline{x}) := g(t, \underline{x})$)

$$\varphi(f, g) = \int_{\mathbb{R}} w(\tau_{-t} f \otimes g_t)\, dt$$

ist (siehe dazu z.B. [25], S.66). Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(f \otimes g) &= \varphi(\hat{f}, \hat{g}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} w(\tau_{-t} \hat{f} \otimes \hat{g}_t)\, dt \\
&= w\Big(\int_{\mathbb{R}} \tau_{-t} \hat{f} \otimes \hat{g}_t\, dt \Big) \\
&= w(\hat{f} *_0 \tilde{\hat{g}})
\end{aligned}$$

mit $\tilde{h}(t, \underline{x}) := h(-t, \underline{x})$ und $*_0$ der Faltung in der Nullkomponente

$$\begin{aligned}
&= w(\widehat{(f\tilde{g})_0}) \quad \text{mit } (f\tilde{g})_0(t, \underline{x}, \underline{y}) = f(t, \underline{x}) g(-t, \underline{y}) \\
&= w(0) = 0
\end{aligned}$$

wegen der Trägereigenschaften aus $(*)$ von f und g. Damit ist $\hat{\varphi} = 0$ auf $\tilde{K}$ und mithin auch auf K. Wir haben also gezeigt, daß $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset \mathcal{G}_1$ gilt.

supp $\hat{\varphi} \subset \mathcal{G}_2$: Wiederum mit einem Standard-Argument zeigen wir die Asymmetrie des Fourierspektrums. Dazu müssen wir die Grundzustandseigenschaft ausnutzen: Λ ist als Skalarprodukt auf einem Einteilchen-Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ gegeben, auf welchem die Zeittranslationen durch einen unitären Operator mit positivem Generator h implementiert sind (Definition 1.3.3).
Nach Definition des Trägers müssen wir zeigen, daß

$$\hat{\varphi}(F) = 0 \text{ für alle } F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2(s+1)}) \text{ mit } \operatorname{supp} F \subset \Big\{ (\xi, \xi') \in \mathbb{R}^{2(n+1)} \mid \xi'_0 \geq 0 \Big\} \qquad (\sharp)$$

gilt. Seien dazu $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1})$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\varphi(f, \tau_t g) &= \Lambda(\chi_1 f, \tau_t \chi_2 g) \\
&= \langle \mathbf{k}[\chi_1 f], \mathbf{k}[\tau_t \chi_2 g] \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \mathbf{k}[\chi_1 f], e^{-iht} \mathbf{k}[\chi_2 g] \rangle_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Sei nun zusätzlich $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Wir betrachten das Integral (welches existiert, da $\varphi(f, \tau_t g)$

beschränkt ist):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(f,\tau_t g)\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} h(t)\langle \mathbf{k}[\chi_1 f], e^{-iht}\mathbf{k}[\chi_2 g]\rangle_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t)\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t}\, d\langle \mathbf{k}[\chi_1 f], E_\lambda \mathbf{k}[\chi_2 g]\rangle_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}t \\ &= \not c \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\lambda)\, d\langle \mathbf{k}[\chi_1 f], E_\lambda \mathbf{k}[\chi_2 g]\rangle_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}t \\ &= 0, \quad \text{falls } \operatorname{supp}\hat{h}\subset \mathbb{R}_-\,.\end{aligned}$$

Die Vertauschung des t- und des λ-Integrals ist dabei erlaubt: Um den Satz von Fubini direkt anwenden zu können, muß nur noch das Maß $d\langle\ldots,\ldots\rangle$ per Polarisation des Skalarproduktes in eine Linearkombination positiver Maße zerlegt werden.

Andererseits berechnen wir (unter Verwendung der Notation $e_x(\xi) := e^{i\langle \xi, x\rangle}$):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(f,\tau_t g)\,dt &= \int_{\mathbb{R}} h(t)\hat{\varphi}(\check{f}\otimes \check{\tau_t g})\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t)\hat{\varphi}(\check{f}\otimes e_{(t,\underline{0})}\check{g})\,dt \\ &= \hat{\varphi}(\check{f}\otimes \check{g}\int_{\mathbb{R}} e_{(t,\underline{0})}h(t)\,dt) \\ &= \not c\,\hat{\varphi}(\check{f}\otimes \check{g}\hat{h}) \\ &= \not c\,\hat{\varphi}(\check{f}\otimes \check{g}\tilde{\hat{h}}),\end{aligned}$$

wobei $\tilde{\hat{h}}(t)$ $\hat{h}(-t)$ meint. Wir finden also

$$\hat{\varphi}(f\otimes gh) = 0 \quad \text{für} \quad f,g\in \mathcal{F}C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1}),\ h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{mit } \operatorname{supp} h\subset\mathbb{R}_+.$$

Das können wir jedoch verallgemeinern zu

$$\hat{\varphi}(F\cdot h) = 0 \quad \text{für} \quad F\in\mathcal{S}(R^{2(s+1)}),\ h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ mit } \operatorname{supp} h\subset\mathbb{R}_+,$$

denn wie eine kurze Rechnung zeigt, ist mit $C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1})\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1})$ auch $\mathcal{F}C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1})\otimes \mathcal{F}C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1})$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2(s+1)})$.
Damit haben wir jedoch ($\sharp$) gezeigt, denn jedes $F'\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2(s+1)})$ mit

$$\operatorname{supp} F'\subset\left\{(\xi,\xi')\in\mathbb{R}^{2(n+1)}\mid \xi'_1\geq 0\right\}$$

läßt sich als Produkt $F' = Fh$ schreiben mit $F\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2(s+1)})$ und $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} h\subset\mathbb{R}_+$.

Die beiden vorangegangenen Argumente liefern nun zusammen die Aussage des Lemmas. □

Um den Beweis des Satzes abzuschließen, müssen wir noch $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ in Zusammenang bringen.
Zunächst haben wir durch Satz 3.1.5 und die Tatsache, daß $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ ein Kegel ist

$$\mathrm{WF}(\varphi) \subset (\tilde{\pi}_1 \tilde{U}_1 \times \tilde{\pi}_2 \tilde{U}_2) \times \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \quad \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^{2(s+1)}. \tag{$*$}$$

Sei $q \in \tilde{U}_i$ und ξ ein Kovektor $\xi \in T^*_{\tilde{\pi}_i q}\mathbb{R}^{s+1}$ für $i = 1$ oder 2. Dann ist

$$(\tilde{\pi}_i^* \xi)(\partial_t) \overset{(1.1)}{=} \xi(\tilde{\pi}_{i*}\partial_t) \overset{(3.1)}{=} \xi_0.$$

Wir finden also für $\xi_i \in T^*_{\tilde{\pi}_i q_i}\mathbb{R}^{s+1}$, $q_i \in \tilde{U}_i$,$i = 1, 2$

- $(\tilde{\pi}_2^* \xi_2)(\partial_t) < 0 \;\Leftrightarrow\; (\xi_2)_0 < 0$,
- $(\tilde{\pi}_1^* \xi_1)(\partial_t) = -(\tilde{\pi}_2^* \xi_2)(\partial_t) \;\Leftrightarrow\; (\xi_1)_0 = -(\xi_2)_0$.

Mit anderen Worten ist

$$\tilde{\pi}^* \Big[(\tilde{\pi}_1 \tilde{U}_1 \times \tilde{\pi}_2 \tilde{U}_2) \times \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \Big] \subset \mathcal{G}. \tag{$**$}$$

Insbesondere erhalten wir für p_1, p_2

$$\begin{aligned} \mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) &\overset{(3.2)}{=} \tilde{\pi}^* \, \mathrm{WF}_{\pi p_1, \pi p_2}(\varphi) \\ &\overset{(*)}{\subset} \tilde{\pi}^* \Big[(\tilde{\pi}_1 p_1 \times \tilde{\pi}_2 p_2) \times \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \Big] \\ &\overset{(**)}{\subset} \mathcal{G}_{p_1,p_2}. \end{aligned}$$

Da p_1, p_2 bei der Konstruktion von φ beliebig gewählt werden können, ist damit der Satz bewiesen. □

3.2.2. Lokalität

Sei ι der 'Flip'

$$\iota : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}, \quad \iota(p, q) = (q, p).$$

Damit formulieren wir die Aussage

Lemma 3.2.5. *Seien $p_1, p_2 \in \mathcal{M}$, $p_1 \bigtimes p_2$. Dann gilt*

$$\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) = \iota^* \, \mathrm{WF}_{p_2,p_1}(\Lambda).$$

Beweis. Seien $p_1, p_2 \in \mathcal{M}$, $p_1 \times p_2$ gegeben. Da die Menge der akausal gelegenen Punkte offen ist, finden wir χ_1, χ_2 mit $\chi_i(p_i) \neq 0$, $i = 1, 2$ und $\operatorname{supp}\chi_1 \times \operatorname{supp}\chi_2$.

Sei $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2(s+1)})$. Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1}) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1})$ dicht in $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2(s+1)})$ ist, gibt es Folgen $(f_k^{(1)}), (f_k^{(2)})$ von Funktionen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^{s+1})$, so daß

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f_k^{(1)} \otimes f_k^{(2)} = F \text{ in } C_0^\infty(\mathbb{R}^{2(s+1)})$$

ist. Wir berechnen damit

$$\begin{aligned}
\Lambda(\chi_1 \otimes \chi_2 F) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Lambda(\chi_1 f_k^{(1)} \otimes \chi_2 f_k^{(2)}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Lambda(\chi_2 f_k^{(2)} \otimes \chi_1 f_k^{(1)}), \quad \text{wegen der Lokalität,} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Lambda\left((\chi_2 \otimes \chi_1)\iota^*(f_k^{(1)} \otimes f_k^{(2)})\right) \\
&= \Lambda(\chi_2 \otimes \chi_1 \iota^* F).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Transformationsverhaltens der Wellenfrontmenge ist also tatsächlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) &= \mathrm{WF}_{p_1,p_2}\left(\Lambda((\chi_1 \otimes \chi_2)\cdot)\right) \\
&= \mathrm{WF}_{p_1,p_2}\left(\Lambda((\chi_2 \otimes \chi_1)\iota^*\cdot)\right), \text{ nach obiger Rechnung,} \\
&= \iota^* \,\mathrm{WF}_{p_2,p_1}\left(\Lambda((\chi_2 \otimes \chi_1)\cdot)\right), \text{ wg. Trafoverhalten von WF,} \\
&= \iota^* \,\mathrm{WF}_{p_2,p_1}(\Lambda).
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

3.2.3. Feldgleichung

Die Zweipunktfunktion Λ des KG-Feldes ist per Konstruktion eine Lösung der KG-Gleichung in beiden Argumenten. Dies wollen wir zur Bestimmung ihrer Wellenfrontmenge ausnutzen.

Ist eine Distribution Lösung einer partiellen Differentialgleichung, so hat das erhebliche Auswirkungen auf die Struktur ihrer Wellenfrontmenge:

Einerseits können nur bestimmte Strahlen aus den Kotangentialräumen in der Wellenfrontmenge auftreten. Andererseits bedingt das Auftreten eines Elements in der Wellenfrontmenge auch das Auftreten von anderen – die Singularitäten 'breiten sich aus'.

Die mikrolokale Analysis stellt sehr allgemeine Sätze zur Verfügung, die diese Phänomene beschreiben. Da diese Sätze und ihre Anwendung auf den für uns interessanten Fall aber an anderer Stelle (siehe z.B. [14]) sehr eingehend beschrieben wurden, wollen wir sie hier nicht detailliert vorstellen, sondern nur die Ergebnisse zitieren. Dazu definieren wir zunächst das Unterbündel

$$\mathcal{N} := \Big\{(p,\xi) \in T^*\mathcal{M} \mid g_p(\xi^\sharp,\xi^\sharp) = 0\Big\}$$

des Kotangtentialbündels. Damit lautete das benötigte Resultat:

Satz 3.2.6. *Für eine Lösung $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}\times\mathcal{M})$ der KG-Gleichung in beiden Argumenten ist* $\mathrm{WF}(\Lambda) \subset \mathcal{N}\times\mathcal{N}$. *Weiterhin gilt*

$$(p_1,\xi_1,p_2,\xi_2) \in \mathrm{WF}(\Lambda) \;\; \textit{und} \;\; (p_1,\xi_1) \sim (p_1',\xi_1') \Rightarrow (p_1',\xi_1',p_2,\xi_2) \in \mathrm{WF}(\Lambda)$$

und ebenso

$$(p_1,\xi_1,p_2,\xi_2) \in \mathrm{WF}(\Lambda) \;\; \textit{und} \;\; (p_2,\xi_2) \sim (p_2',\xi_2') \Rightarrow (p_1,\xi_1,p_2',\xi_2') \in \mathrm{WF}(\Lambda).$$

3.3. Berechnung von $\mathrm{WF}(\Lambda)$

Jetzt wollen wir $\mathrm{WF}(\Lambda)$ tatsächlich berechnen. Wir verwenden dazu Argumente, wie sie auch schon in [14] benutzt wurden.

Nehmen wir Satz 3.2.2 und den ersten Teil von Satz 3.2.6 zusammen, so wissen wir

$$\mathrm{WF}(\Lambda) \subset \mathcal{G}_\mathcal{N} := \mathcal{G} \cap (\mathcal{N}\times\mathcal{N}).$$

Wir betrachten jetzt wieder zwei Punkte $p_1,p_2 \in \mathcal{M}$ und wollen Bedingungen an $\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda)$ erhalten. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung bezüglich der Lage von p_1 und p_2 zueinander:

$\boldsymbol{p_1,p_2}$ **akausal**: Einerseits ist $\mathcal{G}_\mathcal{N} \cap \iota^*\mathcal{G}_\mathcal{N} = \{0\}$ wegen der Asymmetrie von $\mathcal{G}$. Andererseits gilt für $p_1 \times p_2$ wegen Lemma 3.2.5:

$$\mathcal{G}_\mathcal{N} \supset (p_1,p_2,\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda)) = (p_2,p_1,\iota_*\,\mathrm{WF}_{p_2,p_1}(\Lambda)) \subset \iota_*\mathcal{G}_\mathcal{N}.$$

Damit ist

$$\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) = \emptyset \quad \text{für} \quad p_1 \times p_2.$$

Auf der Diagonalen: Angenommen $(p,\xi_1,p,\xi_2) \in \mathrm{WF}(\Lambda)$ und $\xi_1 \nparallel \xi_2$. Dann finden wir (p_1',ξ_1') und (p_2',ξ_2') mit

$$(p_1',\xi_1') \sim (p,\xi_1) \quad \text{und} \quad (p_2',\xi_2') \sim (p,\xi_2)$$

und so, daß p_1' und p_2' auf einer gemeinsamen Cauchy-Fläche liegen (globale Hyperbolizität). In einer gewissen Umgebung von p haben die betreffenden Nullgeodäten keine konjugierten Punkte, so daß wir zusätzlich $p_1' \neq p_2'$ annehmen können. Damit führt aber $(p_1', \xi_1', p_2', \xi_2') \in \mathrm{WF}(\Lambda)$ zum Widerspruch mit der Überlegung bezüglich akausal gelegener Punkte. Also muß $\xi_1 \| \xi_2$ gelten. Wir wissen also $\xi_1 = \lambda \xi_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Außerdem muß aber $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{G}$, also $\xi_1(\partial_t) = -\xi_2(\partial_t)$ gelten. Damit folgt $\lambda = -1$ und insgesamt

$$\mathrm{WF}_{p,p}(\Lambda) \subset \left\{ (\xi, \xi') \mid g(\xi^\sharp, \xi^\sharp) = 0, \quad \xi(\partial_t) > 0, \quad \xi = -\xi' \right\}. \tag{3.5}$$

$\boldsymbol{p_1, p_2}$ **kausal, nicht durch Nullgeodäte verbunden**: Angenommen $(p_1, \xi_1, p_2, \xi_2) \in \mathrm{WF}(\Lambda)$. Dann finden wir wegen der globalen Hyperbolizität (p_2', ξ_2') mit p_2' auf der gleichen Cauchy-Fläche wie p_1 und $(p_2', \xi_2') \sim (p_2, \xi_2)$. Nach Voraussetzung ist $p_1 \neq p_2'$, somit $p_1 \bigtimes p_2'$ und nach dem vorherigen Abschnitt $\mathrm{WF}_{p_1, p_2'}(\Lambda) = \emptyset$. Daher muß auch

$$\mathrm{WF}_{p_1, p_2}(\Lambda) = \emptyset$$

sein.

$\boldsymbol{p_1, p_2}$ **durch mindestens eine Nullgeodäte verbunden**: Angenommen $(p_1, \xi_1, p_2, \xi_2) \in \mathrm{WF}(\Lambda)$. Zunächst nehmen wir zusätzlich an, daß $\xi_1^\sharp$ nicht tangential zu einer der p_1 und p_2 verbindenden Nullgeodäten ist. Dann finden wir (p_1', ξ_1') mit p_1' in der Cauchy-Fläche von p_2, jedoch von p_2 verschieden, so daß $(p_1, \xi_1) \sim (p_1', \xi_1')$ gilt. Da $p_2 \bigtimes p_1'$ führt das zum Widerspruch. $\xi_1^\sharp$ ist tangential zu einer bestimmten, p_1 und p_2 verbindenden Nullgeodäte ν.

Somit finden wir ξ_1', so daß $(p_1, \xi_1) \sim (p_2, \xi_1')$ gilt. Nach (3.5) muß $\xi_1' = -\xi_2$ sein, es gilt also $(p_1, \xi_1) \sim (p_2, -\xi_2)$. Außerdem muß $\xi_1'(\partial_t) > 0$ sein, daher erhalten wir auch $\xi_1(\partial_t) > 0$, denn diese Größe ändert sich beim Transport des (Ko-)Vektors entlang der Geodäten nicht. Wir haben also gefunden, daß

$$\mathrm{WF}_{p_1, p_2}(\Lambda) \subset \{(\xi_1, \xi_2) \mid (p_1, \xi_1) \sim (p_2, -\xi_2), \ \xi_1(\partial_t) > 0\}$$

ist.

Ergebnisse der Fallunterscheidung: Wenn wir die Ergebnisse der Fallunterscheidung zusammenfassen und uns erinnern, daß für $\xi \in T^*\mathcal{M}$

$$\xi(\partial_t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(\xi^\sharp, \partial_t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi^\sharp \text{ ist zukunftsgerichtet,}$$

erhalten wir

$$\mathrm{WF}(\Lambda) \subset \mathcal{W}. \tag{3.6}$$

($\mathcal{W}$ wurde in Abschnitt 1.4.2 definiert.) Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß tatsächlich Gleichheit der beiden Mengen gilt. Dazu verwenden wir, daß die Wellenfrontmenge des Propagators E der KG-Gleichung bekannt ist. Wir benötigen nicht die genaue Struktur dieser Menge, sondern lediglich den singulären Träger von E:

Satz 3.3.1 (Korollar von Thm. 2.32 aus [14]). *Es gilt*

$$\operatorname{singsupp} E = \{(p_1, p_2) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mid \exists \textit{ Nullgeodäte, die } p_1 \textit{ und } p_2 \textit{ verbindet}\}.$$

E ist der Imaginärteil von Λ. Daher ist

$$\operatorname{singsupp} \Lambda \supset \operatorname{singsupp} \mathrm{E}$$

und somit $\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) \neq \emptyset$, sofern p_1 und p_2 durch eine Nullgeodäte verbunden sind. Sind p_1 und p_2 durch *genau* eine Nullgeodäte verbunden, so ist also auf jeden Fall $\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) = \mathcal{W}_{p_1,p_2}$.

Wir betrachten nun den Fall, daß p_1 und p_2 durch mehrere Nullgeodäten verbunden sind. Sei $\nu(s)$ eine davon. Auf ν gibt es nun aber auf jeden Fall einen Punkt $p_3 \neq p_1$, der *nur* durch ν mit p_1 verbunden ist. Nach obiger Überlegung ist also $\mathrm{WF}_{p_1,p_3}(\Lambda) = \mathcal{W}_{p_1,p_3}$. Wenden wir nun den Satz 3.2.6 an, so ergibt sich tatsächlich auch

$$\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) \supset \left\{(\xi_1, \xi_2) \in T^*_{p_1,p_2}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \mid \xi_2 \text{ Paralleltr. von } \xi_2 \text{ entl. } \nu,\ \xi_1(\partial_t) > 0\right\}.$$

Ähnliche Relationen erhalten wir auch für alle anderen Nullgeodäten, die p_1 und p_2 verbinden. Damit ist tatsächlich $\mathrm{WF}_{p_1,p_2}(\Lambda) = \mathcal{W}_{p_1,p_2}$ und wir finden schließlich

Satz 3.3.2. *Sei Λ die Zweipunktfunktion eines quasifreien Grundzustandes des KG-Feldes auf einer global hyperbolischen stationären Raumzeit $\mathcal{M}$. Dann gilt*

$$\mathrm{WF}(\Lambda) = \mathcal{W},$$

d.h. der Zustand ist ein Hadamard-Zustand.

4. Das Modell

In diesem Kapitel besprechen wir eine Anwendung der in den letzten Kapiteln bereitgestellten Techniken auf eine konkrete Situation: Wir wollen die Hadamard-Eigenschaft für die in [17] auf bestimmten Teilgebieten der Schwarzschild-Kruskal-Raumzeit definierten Zustände nachweisen. Diese Anwendung war eine wesentliche Motivation für die gesamte Arbeit. Zunächst stellen wir die Schwarzschild-Kruskal-Raumzeit vor:

4.1. Die Schwarzschild-Kruskal-Raumzeit

Die Schwarzschild-Kruskal-Raumzeit (im Folgenden immer SK-Raumzeit genannt) ist eine Erweiterung der bekannten Schwarzschild-Raumzeit. Sie wurde 1959 von Kruskal angegeben [20]. Sie ist nicht weiter analytisch fortsetzbar, in diesem Sinne also eine maximale Erweiterung.
Die im folgenden angegebenen grundlegenden Eigenschaften der SK-Raumzeit findet man z.B. in [10].

4.1.1. Grundlegende Eigenschaften

Die zugrundeliegende topologische Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$, die Metrik lautet in Kruskal-Koordinaten T, X, Θ

$$g = \beta(dT^2 - dX^2) - r^2 d\Omega^2.$$

Dabei ist der Vorfaktor

$$\beta = 32M^3 \frac{1}{r} e^{-r/2M}$$

und r ist implizit durch

$$T^2 - X^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M}$$

gegeben. $\mathrm{d}\Omega^2$ bezeichnet die Metrik auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und T und X durchlaufen den Bereich $T^2 - X^2 < 1$. Die Hyperbeln $T^2 - X^2 = 1$ sind geometrische Singularitäten der Raumzeit. Die auf der $\mathbb{S}^2$ konstanten Kurven $\underline{x}(u)$ mit $T(u) = \pm X(u)$ sind Nullgeodäten.

Als Lösung der Vakuumfeldgleichungen ist die SK-Raumzeit Ricci- und somit auch skalarflach. Außerdem ist sie raumartig asymptotisch flach.

4.1.2. Symmetrien und Kausalitätsstruktur

Die SK-Raumzeit ist sehr symmetrisch: Sie ist kugelsymmetrisch und besitzt ein Killing-Vektorfeld

$$K = X\partial_T - T\partial_X.$$

Der Fluß dieses Vektorfeldes läßt die $\mathbb{S}^2$ Σ_0 bei $T = X = 0$ invariant. An jedem Punkt von Σ_0 gibt es zwei zukunfts- und zwei vergangenheitsgerichtete Nullvektoren. Die Nullgeodäten, die in diese Richtungen von Σ_0 ausgehen sind Integralkurven von K und bilden Nullhyperflächen $h^{\pm}_{\mathcal{L}}, h^{\pm}_{\mathcal{R}}$. Nach [19] bezeichnet man eine solche Konfiguration von Hyperflächen als *Bifurkations-Killing-Horizont*. Diese Nullhyperflächen teilen die Raumzeit in vier offene Bereiche, die Keilregionen $\mathcal{R}$ $(X > |T|)$ und $\mathcal{L}$ $(X < -|T|)$ und die Regionen $\mathcal{F}$ $(T > |X|)$ sowie $\mathcal{P}$ $(T < -|X|)$.

In den Bereichen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$ ist K zeitartig, sein Fluß definiert also eine ausgezeichnete Zeitkoordinate für diese Bereiche, in denen die Metrik zumindest manifest stationär wird. Es zeigt sich jedoch, daß die Raumzeit für diese Bereiche sogar statisch ist. Eine möglich Wahl von Koordinaten (t, x), in denen die Metrik explizit statisch wird, ist implizit gegeben durch

$$T = \pm e^{x/4M} \sinh(t/4M), \quad X = \pm e^{x/4M} \cosh(t/4M), \quad x, t \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

für $\mathcal{R}$ resp. $\mathcal{L}$. In den neuen Kordinaten (t, x) wird die Metrik

$$g|_{\mathcal{L},\mathcal{R}} = \alpha^2(dt^2 - dx^2) - r^2 d\Omega^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = (g(K,K))^{1/2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}$$

und r implizit gegeben durch

$$x = 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + r.$$

Neben der Kugelsymmetrie und den durch das Killing-Vektorfeld gegebenen Isometrien gibt es eine weitere Symmetrie, die Spiegelungsisometrie

$$\iota : (T, X, \theta) \longmapsto (-T, -X, \theta), \tag{4.2}$$

wobei θ beliebige Koordinaten auf dem $\mathbb{S}^2$-Anteil bezeichnen.

Die SK-Raumzeit ist global hyperbolisch, die durch $T = 0$ gegebene Hyperfläche Σ ist beispielsweise eine Cauchy-Fläche. Σ zerfällt in Σ_0, $\Sigma_{\mathcal{R}} := \mathcal{R} \cap \Sigma$ und $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cap \Sigma$. Auch $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$ sind global hyperbolisch, $\Sigma_{\mathcal{R}}$ resp. $\Sigma_{\mathcal{L}}$ sind Beispiele für Cauchy-Flächen. Insofern ist also das Cauchy-Problem sowohl für die SK-Raumzeit als Ganzes als auch für $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$ im Sinne von Satz 1.3.2 wohlgestellt [17].

4.2. Das KG-Feld auf der SK-Raumzeit

In [17] realisiert Kay das KG-Feld auf dem Schwarzschild-Teil $\mathcal{R}$ der SK-Raumzeit wie folgt:

Einteilchen-Hilbert-Raum wird der Raum

$$\mathcal{H} := \mathrm{L}^2\left(\Sigma_{\mathcal{R}}, \frac{1}{\alpha r^2}\,\mathrm{dVol}_{\gamma_{\Sigma_{\mathcal{R}}}}\right).$$

Auf diesem Raum und in den Koordinaten (4.1) definiert Kay den DO

$$A := -\partial_x^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}L^2 + \alpha^2\left(\frac{2M}{r^3} + m^2\right).$$

Dabei haben wir mit L^2 den Laplace-Operator auf der Einheitssphäre S^2 (den 'Drehimpulsoperator') bezeichnet. A ist, bis auf Multiplikation mit Funktionen, der $\Sigma_{\mathcal{R}}$-Anteil des KG-Operators:

$$\Box_g + m^2 = \frac{1}{\alpha^2}\partial_t + \frac{1}{r\alpha^2}Ar.$$

Kay zeigt

Satz 4.2.1 ([17], Abschnitt 4).

- *Für alle $N \in \mathbb{N}$ ist $A^N, \mathrm{dom}\left(A^N\right) = C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}}) \subset \mathcal{H}$ wesentlich selbstadjungiert.*
- *Das Spektrum des selbstadjungierten Abschlusses $\overline{A}$ ist enthalten in $[0,\infty)$, $\overline{A}$ ist invertierbar.*
- *Es ist $C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}}) \subset \mathrm{dom}\left(A^{-1/2}\right)$.*

Der Einteilchen-Hamilton-Operator ergibt sich zu

$$h := \overline{A}^{1/2}$$

und die Einteilchen-Abbildung als

$$\mathbf{k} : C_0^\infty(\mathcal{R}) \to \mathcal{H}, \quad \mathbf{k}(F) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h^{1/2} r\rho_0\,\mathrm{E}\,F + ih^{-1/2}\alpha r\rho_1\,\mathrm{E}\,F\right).$$

Dabei ist E der Propagator der KG-Gleichung nach Satz 1.3.2, und ρ_0 und ρ_1 sind die in Gleichung 1.3 definierten Abbildungen (bezüglich $\Sigma_{\mathcal{R}}$). Weiterhin werden die Operatoren

$$S := \left(e^{\beta h} - 1\right)^{-1/2}, \qquad C := \left(1 - e^{-\beta h}\right)^{-1/2}$$

definiert. Man kann sich leicht überzeugen, daß Sh^λ und Ch^λ für $\lambda \geq 1/2$ beschränkte Operatoren sind. In Verbindung mit der Aussage $C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}}) \subset \mathrm{dom}\left(A^{-1/2}\right)$ des oben zitierten

Satzes ergibt sich $\operatorname{ran}\mathbf{k} \subset \operatorname{dom}(S) \cap \operatorname{dom}(C)$. Wir notieren auch noch, daß $C^2 - S^2 = \mathbb{1}$ ist. Aus diesen Elementen konstruiert Kay nun einen quasifreien KMS-Zustand ω_β zur inversen Temperatur β, sowie einen quasifreien Grundzustand ω_∞. Die Zweipunktfunktionen lauten

$$\begin{aligned}\Lambda_\beta(F,G) &= \langle C\mathbf{k}(F), C\mathbf{k}(G)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle S\mathbf{k}(G), S\mathbf{k}(F)\rangle_{\mathcal{H}},\\ \Lambda_\infty(F,G) &= \langle \mathbf{k}(F), \mathbf{k}(G)\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

4.3. Die Hadamard-Eigenschaft für ω_β und ω_∞

Auf die im letzten Abschnitt vorgestellten Zustände wollen wir nun unsere Methoden anwenden. Zunächst betrachten wir ω_∞:

Erster Ansatz: A hat offensichtlich glatte Koeffizienten, ist von zweiter Ordnung und elliptisch. Zusätzlich hat A die in Satz 4.2.1 genannten Eigenschaften. Damit erfüllt A die Annahmen 1,2,3 und 4 aus Satz 2.3.4.
Es ist keine Überraschung, daß auch Annahme 5 erfüllt ist. Eine kleine Rechnung zeigt, daß mit den dort verwendeten Bezeichnungen

$$\zeta = \frac{\alpha}{r}, \qquad M_\zeta(A\zeta^{-1}) = \alpha^2 m^2 - \frac{M^2}{r^4} > -(4M)^{-2}.$$

Wir müssen nun das IR-Verhalten von A charakterisieren. Dazu beweisen wir das folgende Lemma, dessen Aussage implizit schon in der Arbeit von Kay enthalten ist.

Lemma 4.3.1. $\left\|A^{-1/2}M_\chi\right\|_{Op} < \infty$, $\left\|M_\chi A^{-1/2}\right\|_{Op} < \infty$.

Beweis. Wie in [17] bemerkt, ist mit der Funktion $\eta := 2M\alpha^2/r^3$

$$\left\|A^{1/2}f\right\|_0^2 = \langle f, Af\rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle f, M_\eta f\rangle = \left\|M_{\eta^{1/2}}f\right\|_0^2 \qquad \forall f \in C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}}).$$

Da η glatt, positiv und nichtverschwindend ist, findet man zu $\chi \in C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}})$ eine Konstante c_χ, so daß $\|M_\chi f\|_0 \leq c_\chi \left\|M_{\eta^{1/2}}f\right\|_0$ für beliebige f aus $C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}})$ gilt, es folgt

$$\|M_\chi f\|_0 \leq c_\chi \left\|A^{1/2}f\right\| \qquad \forall f \in C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}}).$$

Da auch $A^{1/2}$ wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}})$ ist, gilt obige Abschätzung sogar für alle Elemente aus $\operatorname{dom}\left(A^{1/2}\right)$. Sei jetzt f aus $\operatorname{dom}\left(A^{-1/2}\right)$. Wir können dann abschätzen:

$$\left\|M_\chi A^{-1/2}f\right\|_0 \leq c_\chi \left\|A^{1/2}A^{-1/2}f\right\| = c_\chi \|f\|_0 .$$

Mithin kann man $M_\chi A^{-1/2}$ zu einem beschränkten Operator auf ganz $\mathcal{H}$ fortsetzen.
Man kann nun leicht nachrechnen, daß $(M_\chi A^{-1/2})^\dagger = A^{-1/2}M_\chi$ auf $C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}})$ ist. Daher ist $A^{-1/2}M_\chi$ beschränkt auf $C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}})$ und läßt sich daher ebenfalls beschränkt auf ganz $\mathcal{H}$ fortsetzen. □

Nun können wir unser Resultat 2.3.4 auf die Funktion $F(A) = A^{-1/2}$ anwenden: Wegen (2.11) ist $(\mathcal{L}^{-1}F)(\tau) = \not{c}\tau^{1/2-1} \in \mathcal{K}_{1/2}$, $A^{-1/2}$ ist also tatsächlich ein ψDO .
Da weiterhin A vom eigentlichen Typ ist, ist das Produkt $AA^{-1/2} = A^{1/2}$ ebenfalls ein ψDO . $A^{1/2}$ ist auch elliptisch, denn aufgrund der in Satz 2.1.7 gegebenen Multiplikationsregel für Hauptsymbole ist $\sqrt{\gamma_p(\xi,\xi)}$ ein Hauptsymbol von $A^{1/2}$.
Schreiben wir die Zweipunktfunktion Λ_∞ aus und gehen zu dem von Junker in [14] verwendeten Volumenelement über, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Lambda_\infty(F,G) = &\frac{1}{2}\langle\rho_0\,\mathrm{E}\,F, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}U^{-1}hU\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\rho_0\,\mathrm{E}\,G\rangle_{\mathrm{L}^2(\Sigma_{\mathcal{R}},\mathrm{dVol})}\\ &+\frac{1}{2}\langle\rho_1\,\mathrm{E}\,F, \sqrt{\alpha}U^{-1}h^{-1}U\sqrt{\alpha}\rho_1\,\mathrm{E}\,G\rangle_{\mathrm{L}^2(\Sigma_{\mathcal{R}},\mathrm{dVol})}\\ &+\frac{i}{2}\left(\langle\rho_0\,\mathrm{E}\,F,\rho_1\,\mathrm{E}\,G\rangle_{\mathrm{L}^2(\Sigma_{\mathcal{R}},\mathrm{dVol})} - \langle\rho_1\,\mathrm{E}\,F,\rho_0\,\mathrm{E}\,G\rangle_{\mathrm{L}^2(\Sigma_{\mathcal{R}},\mathrm{dVol})}\right).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet U den unitären Operator $U : \mathrm{L}^2(\mathrm{dVol}) \to \mathcal{H}$, der durch den Multiplikationsoperator $U = M_{\sqrt{\alpha r}}$ gegeben ist.
$I := \alpha^{-1/2}U^{-1}hU\alpha^{-1/2}$ ist ebenfalls ein elliptischer ψDO , denn diese Eigenschaft wird, wie man sich überzeugen kann, durch Multiplikation mit glatten nichtverschwindenden Funktionen nicht gestört. Da er außerdem noch symmetrisch ist, und mit

$$Q = \frac{1}{\alpha}(iI\alpha - \partial_t)$$

ein Q gefunden ist, welches die Forderungen aus Satz 2.2.1 erfüllt,[i] könnten wir Satz 2.2.1 tatsächlich anwenden. Gäbe es also nicht die Lücke im Beweis dieses Satzes, so könnten wir jetzt schließen, daß ω_∞ tatsächlich ein Hadamard-Zustand ist.

Zweiter Ansatz: Der zweite Ansatz führt zum Ziel: Da h strikt positiv ist, ist ω_∞ ein *Grundzustand*. Daher lässt sich Satz 3.3.2 anwenden und wir erhalten

Satz 4.3.2. *ω_∞ ist ein Hadamard-Zustand.*

Nun wollen wir zeigen, daß auch die KMS-Zustände ω_β Hadamard-Zustände sind. Wir verwenden dazu unser Ergebnis über die Hadamard-Eigenschaft des Grundzustandes ω_∞ indem wir zeigen, daß die Differenz zwischen Λ_β und Λ_∞ eine glatte Funktion ist.

[i]Es ist

$$-Q(iI + \frac{1}{\alpha}\partial_t) = \frac{1}{\alpha}I\alpha I + \frac{1}{\alpha^2}\partial_t^2 = \frac{1}{r\alpha^2}h^2 r + \frac{1}{\alpha^2}\partial_t^2 \overset{(4.2)}{=} \Box + m^2.$$

Ein Hauptsymbol von Q ist gegeben durch $q(p,\xi) = i\sqrt{\gamma_p(\underline{\xi},\underline{\xi})} - i/\alpha\xi_0$. Es gilt also

$$q(p,\xi) = 0,\ \xi \neq 0 \ \Leftrightarrow \xi_0 = \alpha\sqrt{\gamma_p(\underline{\xi},\underline{\xi})} > 0.$$

Zunächst formen wir Λ_β ein wenig um. Wegen $C_0^\infty(\Sigma_\mathcal{R}) \subset \operatorname{dom}\left(Sh^{-1/2}\right) \cap \operatorname{dom}\left(Ch^{-1/2}\right)$ sind alle dabei auftretenden Terme zumindest im Sinne von quadratischen Formen definiert:

$$\begin{aligned}
\Lambda_\beta(F,G) &= \langle C\mathbf{k}(F), C\mathbf{k}(G)\rangle_\mathcal{H} + \langle S\mathbf{k}(G), S\mathbf{k}(F)\rangle_\mathcal{H} \\
&= \langle \mathbf{k}(F), C^2\mathbf{k}(G)\rangle_\mathcal{H} + \langle \mathbf{k}(G), S^2\mathbf{k}(F)\rangle_\mathcal{H} \\
&= \langle \mathbf{k}(F), (\mathbb{1} + S^2)\mathbf{k}(G)\rangle_\mathcal{H} + \langle \mathbf{k}(G), S^2\mathbf{k}(F)\rangle_\mathcal{H} \\
&= \langle \mathbf{k}(F), \mathbf{k}(G)\rangle_\mathcal{H} + 2\,\mathrm{Re}(\langle \mathbf{k}(F), S^2\mathbf{k}(G)\rangle_\mathcal{H}) \\
&= \Lambda_\infty(F,G) + \underbrace{\langle r\rho_0\,\mathrm{E}\,F, hS^2 r\rho_0\,\mathrm{E}\,G\rangle_\mathcal{H} + \langle \alpha r\rho_1\,\mathrm{E}\,F, h^{-1}S^2\alpha r\rho_1\,\mathrm{E}\,G\rangle_\mathcal{H}}_{=:\Lambda_\Delta(F,G)}
\end{aligned}$$

Die Tatsache, daß der Differenzterm Λ_Δ glatt ist, wird sich daraus ergeben, daß Λ_Δ eine Lösung der KG-Gleichung in beiden Argumenten ist, deren Anfangswerte glatt sind. Dazu zitieren wir zunächst ein Ergebnis aus [5], betreffend die Regularität von parameterabhängigen Lösungen der KG-Gleichung:

Satz 4.3.3 (Spezialfall von [5], Prop. A1). *Wir betrachten eine Lösung Γ der KG-Gleichung*

$$(\Box + m^2)_1\Gamma(p,q) = 0$$

auf einer global hyperbolischen Raumzeit $\mathcal{M}$ zu den Anfangswerten

$$u_0(\underline{p},q), \qquad u_1(\underline{p},q), \qquad \underline{p} \in \Sigma,\ q \in \mathcal{M}$$

auf einer Cauchy-Fläche Σ. u_0, u_1 sollen glatt in beiden Argumenten zusammen sein und kompakten Träger in $\underline{p}$ für jedes feste q besitzen.
Dann ist Γ glatt in beiden Argumenten zusammen.

Wir beweisen folgendes, auf die vorliegende Situation zugeschnittenes Korollar:

Korollar 4.3.4. *Sei $\mathcal{M}$ global hyperbolisch und $\Gamma \in C_0^\infty(\mathcal{M}\times\mathcal{M})$ Lösung der KG-Gleichung in beiden Argumenten. Seien die Anfangswerte*

$$(\rho_i \otimes \rho_j\Gamma)(\cdot,\cdot) := \Gamma(\rho_i'\cdot, \rho_j'\cdot) \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2$$

wohldefiniert, glatt und mit kompaktem Träger. Dann ist Γ durch eine glatte Funktion gegeben.

Beweis. Wir fassen $(\rho_i \otimes \rho_0\Gamma)(\cdot,\underline{q})$ für $i = 1,2$ als Anfangswerte für die KG-Gleichung auf. Wegen Satz 1.3.2 gibt es eine eindeutige Lösung $\Gamma_0(p,\underline{q})$ zu diesen Anfangswerten, wegen Satz 4.3.3 ist diese glatt *in beiden Argumenten gemeinsam* [ii] und wegen der Eindeutigkeit

[ii] Daß hier $\rho_i \otimes \rho_0\Gamma$ nur auf $\Sigma\times\Sigma$ und nicht auf $\Sigma\times\mathcal{M}$ definiert ist, ist nicht wesentlich: Man setze einfach glatt auf $\Sigma\times\mathcal{M}$ fort.

gleich $\mathbb{1} \otimes \rho_0 \Gamma$. $\mathbb{1} \otimes \rho_0 \Gamma$ ist also glatt.
Genauso verfährt man nun mit $\rho_i \otimes \rho_1 \Gamma$ und zeigt damit die Glattheit von $\mathbb{1} \otimes \rho_1 \Gamma$.
$\mathbb{1} \otimes \rho_0 \Gamma$ und $\mathbb{1} \otimes \rho_1 \Gamma$ werden nun als Anfangswerte für die KG-Gleichung (im zweiten Argument) aufgefaßt. Man erhält eine nach Satz 1.3.2 eindeutige, nach Satz 4.3.3 in beiden Argumenten gemeinsam glatte Lösung, die wegen der Eindeutigkeit mit Γ übereinstimmt. Daher ist Γ tatsächlich durch eine glatte Funktion gegeben. □

Wir kommen nun zurück zu Λ_Δ: Sei $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(\Sigma_\mathcal{R})$. Wir definieren folgende Modifikation von Λ_Δ:

$$\Lambda_\chi(\cdot,\cdot) := \langle r\rho_0 \,\mathrm{E}\, F, M_{\chi_1} h S^2 M_{\chi_2} r\rho_0 \,\mathrm{E}\, G\rangle_\mathcal{H} + \langle \alpha r \rho_1 \,\mathrm{E}\, F, M_{\chi_1} h^{-1} S^2 M_{\chi_2} \alpha r \rho_1 \,\mathrm{E}\, G\rangle_\mathcal{H}.$$

Die Anfangswerte von Λ_χ sind wohldefiniert: Mit Hilfe der Gleichungen (1.4) berechnen wir:

$$\begin{aligned}
(\rho_0 \otimes \rho_0 \Lambda_\chi)\,(f_1, f_2) =& \langle f_1, M_{\alpha r \chi_1} S^2 h^{-1} M_{\alpha r \chi_2} f_2\rangle_\mathcal{H}\\
(\rho_1 \otimes \rho_0 \Lambda_\chi)\,(f_1, f_2) =& 0\\
(\rho_0 \otimes \rho_1 \Lambda_\chi)\,(f_1, f_2) =& 0\\
(\rho_1 \otimes \rho_1 \Lambda_\chi)\,(f_1, f_2) =& \langle f_1, M_{r\chi_1} S^2 h M_{r\chi_2} f_2\rangle_\mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Der Operator $Sh^{-1/2} M_\kappa = Sh^{1/2} h^{-1} M_\kappa$ ist wegen Lemma 4.3.1 (Beschränktheit von $h^{-1} M_\chi$) und der Beschränktheit von $Sh^{1/2}$ beschränkt für beliebiges $\kappa \in C_0^\infty(\Sigma)$. Gleiches gilt für $A^N Sh^{-1/2} M_\kappa$, $N \in \mathbb{N}$. Seien nun $K_1, K_2 \Subset \Sigma$ gegeben. Wir wählen $\kappa \in C_0^\infty(\Sigma)$, so daß $\kappa|_{K_2} = 1$. Für f_i aus K_i und N aus $\mathbb{N}_0$ gilt also

$$\left|\langle f_1, A^N Sh^{-1/2} f_2\rangle\right| = \left|\langle f_1, A^N Sh^{-1/2} M_\kappa f_2\rangle\right| \leq \not{c} \left\|f_1\right\|_0 \left\|f_2\right\|_0$$

Daher erfüllt die quadratische Form von $Sh^{-1/2}$ die Voraussetzungen von Satz 2.1.14. Sie hat also einen glatten Kern. Gleiches gilt für die quadratische Form von $Sh^{1/2}$. Insofern sind die Anfangswerte von Λ_χ tatsächlich glatt und haben wegen der χ_i auch kompakten Träger. Wir können also das eben bewiesene Korollar anwenden und erhalten, daß Λ_χ durch eine glatte Funktion gegeben ist.
Der Zusammenhang zwischen Λ_χ und Λ_Δ ist nun leicht herzustellen: Seien K_1, K_2 zwei beliebige Kompakta in $\Sigma_\mathcal{R}$. Wählen wir $\chi_1 \in C_0^\infty(\Sigma_\mathcal{R})$ so, daß $\chi_1|_{J(K_1)\cap\Sigma_\mathcal{R}} = 1$ gilt und χ_2 analog mit $\chi_2|_{J(K_2)\cap\Sigma_\mathcal{R}} = 1$, so ist wegen der in Satz 1.3.2 gegebenen Trägereigenschaften von E $\Lambda_\Delta = \Lambda_\chi$ auf $C_0^\infty(K_1) \otimes C_0^\infty(K_2)$. Es folgt wegen der Beliebigkeit von K_1, K_2, daß Λ_Δ *überall* glatt ist. Damit hat Λ_β die gleiche Wellenfrontmenge wie Λ_∞. Wir erhalten

Satz 4.3.5. *ω_β ist ein Hadamard-Zustand.*

4.4. Die Hadamard-Eigenschaft für ω_{HH}

Kay definiert in [17] nun auch noch eine Schar von quasifreien Zuständen $\omega_\beta^\times$ des KG-Feldes auf dem Doppelkeil $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$ in der SK-Raumzeit. Die Einschränkungen dieser Zustände auf eine der Keilregionen ergeben die im letzten Abschnitt vorgestellten Zustände ω_β. Allerdings handelt es sich bei den $\omega_\beta^\times$ *nicht* um Produktzustände: Sie sind rein und es gibt nichttriviale Korrelationen zwischen den beiden Regionen. Wir definieren

$$\Lambda_\times(F,G) := -2\,\mathrm{Re}\left(\langle C\mathbf{k}(F), S\overline{\mathbf{k}(G)}\rangle_{\mathcal{H}}\right) \qquad F,G \in C_0^\infty(\Sigma_{\mathcal{R}}).$$

Die Zweipunktfunktion von $\omega_\beta^\times$ lautet dann

$$\begin{aligned}\Lambda_\beta^\times(F_{\mathcal{R}},F_{\mathcal{L}},G_{\mathcal{R}},G_{\mathcal{L}}) = {} & \Lambda_\beta(F_{\mathcal{R}},G_{\mathcal{R}}) + \Lambda_\beta(\iota^* F_{\mathcal{L}},\iota^* G_{\mathcal{L}}) \\ & + \Lambda_\times(F_{\mathcal{R}},\iota^* G_{\mathcal{L}}) + \Lambda_\times(\iota^* F_{\mathcal{L}},G_{\mathcal{R}}), \qquad (*)\\ & \text{wobei } F_{\mathcal{R}},G_{\mathcal{R}} \in C_0^\infty(\mathcal{R}),\ F_{\mathcal{L}},G_{\mathcal{L}} \in C_0^\infty(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Dabei erinnern wir daran, daß mit ι die Keilspiegelung (4.2) gemeint ist. Eine kurze Rechnung liefert

$$\Lambda_\times(F,G) = \langle \alpha r \rho_1 \,\mathrm{E}\, F, CSh^{-1}\alpha r\rho_1 \,\mathrm{E}\, G\rangle_{\mathcal{H}} - \langle r\rho_0 \,\mathrm{E}\, F, CShr\rho_0 \,\mathrm{E}\, F\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Dabei ist der erste Ausdruck wieder im Sinne quadratischer Formen zu verstehen.
Auch $\Lambda_\times$ ist Lösung der KG-Gleichung in beiden Argumenten. Wiederum können wir die betreffenden Anfangswerte bestimmen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}(\rho_0 \otimes \rho_0 \Lambda_\times)\,(f_1,f_2) &= \langle f_1, M_{\alpha r} CSh^{-1} M_{\alpha r} f_2\rangle_{\mathcal{H}}\\ (\rho_1 \otimes \rho_0 \Lambda_\times)\,(f_1,f_2) &= 0\\ (\rho_0 \otimes \rho_1 \Lambda_\times)\,(f_1,f_2) &= 0\\ (\rho_1 \otimes \rho_1 \Lambda_\times)\,(f_1,f_2) &= \langle f_1, M_r CShM_r f_2\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Sind also CSh^{-1} und CSh durch einen glatten Kern gegeben, so können wir unsere Argumentation aus dem letzten Abschnitt (Modifikation mit χ_1,χ_2, Anwendung von Korollar 4.3.4) auch hier anwenden und erhalten die Glattheit von $\Lambda_\times$.
Nun ist aber wiederum CSh^{-1} als quadratische Form beschränkt auf $C_0^\infty(K_1)\times C_0^\infty(K_2)$ für feste Kompakta K_1,K_2, ebenso natürlich $A^N CSh^{-1}$ und $A^N CSh$ für alle $N\in\mathbb{N}$. Daher kann in beiden Fällen der Satz 2.1.14 angewendet werden: CSh^{-1} und CSh sind tatsächlich durch glatte Funktionen gegeben.
Betrachten wir nun wieder $\Lambda_\beta^\times$ als Ganzes: Da $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$ akausal liegen, ist $\omega_\beta^\times$ genau dann ein Hadamard-Zustand, wenn die Einschränkungen auf $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{L}$ Hadamard-Zustände sind und es keine weiteren Beiträge zur Wellenfrontmenge von $\Lambda_\beta^\times$ gibt.
Die beiden ersten Terme in $(*)$ sorgen dafür, daß die Einschränkungen von $\omega_\beta^\times$ auf $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{L}$ durch ω_β gegeben, mithin Hadamard-Zustände sind. Die durch $\Lambda_\times$ gegebenen 'Mischterme' sind, wie eben gesehen, glatt, tragen also zur Wellenfrontmenge nichts bei. Daher gilt

Satz 4.4.1. *$\omega_\beta^\times$ ist ein Hadamard-Zustand.*

Unser Ergebnis zeigt, daß bezüglich der Hadamard-Eigenschaft kein Wert für β bevorzugt ist. Wir wollen jedoch an dieser Stelle bemerken, daß es Anzeichen dafür gibt, daß der sogenannte Hartle-Hawking-Zustand $\omega_{HH} := \omega^{\times}_{8\pi M}$, also derjenige der obigen Zustände, der gerade Hawking-Temperatur besitzt, gegenüber den übrigen dadurch ausgezeichnet ist, daß er sich als einziger zu einem Hadamard-Zustand auf der *gesamten* SK-Raumzeit fortsetzen lässt. Sicher ist zumindest, daß es höchstens einen Zustand gibt, der auf den Keilen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$ jeweils ein KMS-Zustand und auf der gesamten SK-Raumzeit ein Hadamard-Zustand ist. Dieser muß auf den Regionen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$ mit ω_{HH} übereinstimmen [19].

A. Der Beweis von Lemma 2.1.8

Wir wollen hier den Beweis von Lemma 2.1.8 über die Lokalisierung von Funktionen im Definitionsbereich eines elliptischen DO nachholen. Er beruht auf der in [33] gegebenen Idee.
Wir beginnen ihn mit einem Lemma, das es uns ermöglicht, unsere Betrachtungen auf den Fall $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ zu reduzieren.

Lemma A.1.2. *Sei $N \in \mathbb{N}$ und $f \in \operatorname{dom}\left(A^{2^N}\right)$. Dann gibt es eine Folge $(f_l) \subset C_0^\infty(\Sigma)$, so daß*

$$A^m f_l \to A^m f, \qquad m = 0, 1, \ldots 2^N$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen per Induktion nach N: Sei (f_l) eine Folge, für die $f_l \to f$ und $A^{2^N} f_l \to A^{2^N} f$ gilt. Dann gilt auch

$$A^m f_l \to A^m f, \qquad m = 1, \ldots 2^N. \tag{$*$}$$

Induktionsanfang: $N = 1$, also nichts zu beweisen.
Induktionsschritt: Angenommen, $(*)$ gilt für N. Gegeben sei eine Folge (f_l) mit

$$f_l \to f, \qquad A^{2^{N+1}} f_l \to A^{2^{N+1}} f.$$

Wegen

$$\left\| A^{2^N}(f_l - f) \right\|_0^2 \le \|f_l - f\|_0 \left\| A^{2^{N+1}}(f_l - f) \right\|_0$$
$$\text{folgen} \qquad f \in \operatorname{dom}\left(A^{2^N}\right) \qquad \text{und} \qquad A^{2^N} f_l \to A^{2^N} f.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind also die Gleichungen für $m = 1, \ldots 2^N$ in $(*)$ erfüllt. Wir setzen jetzt $\tilde{f}_l := A^{2^N} f_l$ und $\tilde{f} := A^{2^N} f$. Dann gilt

$$\tilde{f}_l \to \tilde{f}, \qquad A^{2^N} \tilde{f}_l \to A^{2^{N+1}} f = A^{2^N} \tilde{f}.$$

Somit ist auch hier die Induktionsvoraussetzung anwendbar, es folgt

$$A^m \tilde{f}_l \to A^m \tilde{f} \qquad m = 1, \ldots 2^N.$$

Insgesamt haben wir damit $(*)$ für $N+1$ bewiesen.

Schluß: Wir können jetzt die Aussage des Lemmas beweisen: Ist ein bestimmtes N und $f \in \operatorname{dom}\left(A^{2^N}\right)$ vorgegeben, so finden wir aufgrund der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A^{2^N} auf $C_0^\infty(\Sigma)$ eine Folge f_l aus $C_0^\infty(\Sigma)$ mit $f_l \to f$ und $A^{2^N} f_l \to A^{2^N} f$. Für diese gilt $(*)$, womit die gesuchte Folge gefunden ist. $\square$

Wir beweisen jetzt zunächst die gewünschte Ungleichung für $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ per Induktion nach N. Vorab bemerken wir, daß in diesem Fall

$$A\chi f = \chi A f - (\Delta\chi) f - 2\gamma(\nabla\chi, \nabla f) \tag{$**$}$$

ist.

Induktionsanfang: $N = 1$: Nach $(**)$

$$\begin{aligned} \|A\chi f\|_0^2 &\le \left(\|\chi A f\|_0 + \|(\Delta\chi) f\|_0 + 2\,\|\gamma(\nabla\chi, \nabla f)\|_0\right)^2 \\ &\le \not{c}_\chi \left(\|Af\|_0^2 + \|f\|_0^2 + \|\gamma(\nabla\chi, \nabla f)\|_0^2\right). \end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme sind schon von der geforderten Form. Wir schätzen nun den dritten Term ab. Dazu bezeichnen wir mit κ_V die charakteristische Funktion von $\{p \in \Sigma \mid V(p) \ge 0\}$. Nach Voraussetzung ist also $(1-\kappa_V)V$ beschränkt. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \|\gamma(\nabla\chi, \nabla f)\|_0^2 &= \int_\Sigma \gamma(\nabla\chi, \nabla f)\gamma(\nabla\bar{\chi}, \nabla\bar{f})\ \mathrm{dVol}(p) \\ &\le \int_\Sigma \gamma(\nabla\chi, \nabla\bar{\chi})\gamma(\nabla f, \nabla\bar{f})\ \mathrm{dVol}(p), \end{aligned}$$

wobei wir die CS-Ungleichnung auf γ angewendet haben,

$$\begin{aligned} &\le \not{c}_\chi \int_\Sigma \gamma(\nabla f, \nabla\bar{f})\ \mathrm{dVol}(p) \\ &= \not{c}_\chi \langle f, -\Delta f\rangle \\ &\le \not{c}_\chi \langle f, (-\Delta + \kappa_V V) f\rangle \\ &\le \not{c}_\chi \left(\|f\|_0^2 + \|(-\Delta + \kappa_V V) f\|_0^2\right) \\ &= \not{c}_\chi \left(\|f\|_0^2 + \|(A - (1-\kappa_V)V) f\|_0^2\right) \\ &= \not{c}_\chi \left((1 + 2\sup_\Sigma((1-\kappa_V)V))\,\|f\|_0^2 + 2\,\|Af\|_0^2\right) \\ &\le \not{c}_{\chi,V} \left(\|f\|_0^2 + \|Af\|_0^2\right). \end{aligned}$$

Die entsprechende Ungleichung für die Normen selber und nicht für deren Quadrat erhält man sofort aus der obigen.

Induktionsschritt: Angenommen, die Ungleichung gelte für N, d.h. es gibt Konstanten $c_{\chi,V,k}$, $k = 1, \dots N$, so daß

$$\left\| A^k \chi f \right\|_0 \leq c_{\chi,V,k} \sum_{l=0}^{k} \left\| A^l f \right\|_0 , \quad \forall f \in C_0^\infty(\Sigma) \qquad k = 1, \dots N$$

gilt. Seien wiederum $\chi, f \in C_0^\infty(\Sigma)$ vorgegeben. Wir erhalten nach $(**)$

$$\left\| A^{N+1} \chi f \right\|_0^2 \;\leq\; 2 \left(\left\| A^N \chi A f \right\|_0^2 + \left\| A^N (\Delta\chi) f \right\| + 4 \left\| A^N \gamma(\nabla\chi, \nabla f) \right\| \right).$$

Die beiden ersten Terme können mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung abgeschätzt werden. Wir betrachten den Term $A^N \gamma(\nabla\chi, \nabla f)$:
Unter Verwendung der Formeln (abstrakte Indexnotation!)

$$[A, h] = -\Delta h - 2\nabla^a h \nabla_a,$$

$$[A, \nabla_a] T_{b_1 \dots b_m} = - \sum_{j=1}^{m} \left(\nabla_c R^c{}_{ab_j}{}^e + R^c{}_{ab_j}{}^e \nabla_c \right) T_{b_1 \dots b_{j-1} e b_{j+1} \dots b_m}$$
$$- R_{ca}{}^{ce} \nabla_e T_{b_1 \dots b_m} - (\nabla_a V) T_{b_1 \dots b_m},$$

machen wir aus $A^N \gamma(\nabla\chi, \nabla f)$ eine Summe von Termen

$$A^N \gamma(\nabla\chi, \nabla f) = \sum_i F_{(i1)}^{\bullet\bullet\dots} \nabla_\bullet \dots \nabla_\bullet F_{(i2)}^{\bullet\bullet\dots} \nabla_\bullet \dots \nabla_\bullet \dots A^{r_i} f. \qquad (***)$$

Dabei sollen die $\bullet$ Indices andeuten, über die in irgendeiner Weise kontrahiert wird. Die Tensoren $F_{(ij)}$ enthalten den Krümmungstensor und die Funktionen χ und V sowie deren Ableitungen. Weiterhin gilt

- Zu festem i hat mindestens ein $F_{(ij)}$ kompakten Träger, denn in jedem Summanden muß die Funktion χ oder eine ihrer Ableitungen mindestens einmal vorkommen.
- Die Anzahl k_i der (unter anderem) auf f wirkenden kovarianten Ableitungen, die nicht in einem der A^{r_i} enthalten sind, erfüllt die Ungleichung

  $$r_i + k_i \leq N + 1.$$

  Denn: Wir starten mit $A^N \gamma(\nabla\chi, \nabla f)$, also mit einer kovarianten Ableitung und N mal dem Operator A, und die verwendeten Vertauschungsrelationen erhöhen die Summe aus Anzahl der As und Anzahl der auf f wirkenden kovarianten Ableitungen nicht.

Wir formen weiter um: Mittels

$$[f, \nabla_a] = -(\nabla_a f)$$

bringen wir die kovarianten Ableitungen aus $(***)$ nach links und erhalten

$$A^N \gamma(\nabla\chi, \nabla f) = \sum_{i,j} \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_{l_{ij}}} (G_{(ij)}^{a_1 \dots a_{l_{ij}}} A^{r_i} f).$$

Dabei sind die $G_{(ij)}$ wiederum Tensorfelder mit kompaktem Träger und es gilt

$$l_{ij} + r_i \leq N + 1.$$

Diese Terme können wir jetzt unter Verwendung der Gårding-Ungleichung abschätzen. Wir nehmen dazu für den Moment an, $\operatorname{supp}\chi$ läge unter der Koordinatenumgebung U einer Karte (U, π) und schätzen ab:

$$\begin{aligned}
\left\| A^N \gamma(\nabla\chi, \nabla f) \right\|_0^2 &\leq \sum_{i,j} \left\| \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_{l_{ij}}} (G_{(ij)}^{a_1 \dots a_{l_{ij}}} A^{r_i}) \right\|_0^2 \\
&\leq \not{c} \sum_{i,j} \sum_{a_1 \dots a_{l_{ij}}} \left\| \pi_* G^{a_1 \dots a_{l_{ij}}} A^{r_i} f \right\|_{l_{ij}}^2 ,
\end{aligned}$$

indem die Christoffel-Symbole und ihre Ableitungen aus den kovarianten Ableitungen auf $\operatorname{supp}\chi$ abgeschätzt wurden. Da wir wissen, daß der betrachtete Term glatt ist und kompakten Träger hat, können wir jetzt die Gårding-Ungleichung anwenden:

$$\begin{aligned}
&\leq \not{c} \sum_{i,j} \sum_{a_1 \dots a_{l_{ij}}} \left(\left\| \pi_* G^{a_1 \dots a_{l_{ij}}} A^{r_i} f \right\|_0^2 + \left\| \pi_* A^{\lceil l_{ij}/2 \rceil} G^{a_1 \dots a_{l_{ij}}} A^{r_i} f \right\|_0^2 \right) \\
&\leq \not{c} \sum_i \left\| A^{r_i} f \right\|_0^2 + \not{c} \sum_{i,j} \sum_{a_1 \dots a_{l_{ij}}} \underbrace{\left\| A^{\lceil l_{ij}/2 \rceil} G^{a_1 \dots a_{l_{ij}}} A^{r_i} f \right\|_0^2}_{(*)}.
\end{aligned}$$

Sofern nun $\lceil l_{ij}/2 \rceil \leq N$ ist, können wir auf die Terme $(*)$ die Induktionshypothese anwenden und erhalten insgesamt eine Abschätzung der gewünschten Form. (Der Übergang von der Ungleichung für die Quadrate der Normen zur Ungleichung für die Normen selber ist elementar.)
Da $l_{ij} + r_i \leq N + 1 \;\Rightarrow\; l_{ij} \leq N + 1$ gilt, ist tatsächlich $\lceil l_{ij}/2 \rceil \leq N$ für $N \geq 1$, wie man sich leicht überzeugen kann. Insofern haben wir das Gewünschte zumindest schon für den Fall gezeigt, daß $\operatorname{supp}\chi$ unter einer Koordinatenumgebung liegt.
Der allgemeine Fall ist damit jedoch auch nicht mehr schwierig: Da Σ parakompakt ist, können wir uns eine lokal endliche Überdeckung durch Kartenumgebungen (U_i) und eine dieser untergeordneten Teilung (χ_i) der Eins beschaffen. Dann schätzen wir ab:

$$\left\| A^{N+1} \chi f \right\|_0 \leq \sum_i \left\| A^{N+1} \chi_i \chi f \right\|_0 .$$

In der Summe sind nur endlich viele Terme von Null verschieden. Diese können wir jetzt wie oben abschätzen.

Schluß: Bisher haben wir die gewünschte Ungleichung lediglich für $f \in C_0^\infty(\Sigma)$ gezeigt. Der allgemeine Fall ergibt sich daraus jedoch sofort mit Hilfe von Lemma A.1.2:
Sei $f \in \bigcap\limits_{l \leq N} \operatorname{dom}\left(A^l\right)$, $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gibt uns Lemma A.1.2 eine Folge (f_i) von Funktionen aus $C_0^\infty(\Sigma)$ in die Hand, für die

$$A^l f_l \to A^l f, \qquad l = 0, 1, \ldots N$$

gilt. Durch Induktion haben wir gezeigt, daß es eine Konstante $c_{\chi,A,N}$ gibt, so daß

$$\left\|A^N \chi(f_j - f_i)\right\|_0 \leq c_{\chi,P,N} \sum_{l=0}^{N} \left\|A^l (f_j - f_i)\right\|_0$$

ist. An dieser Ungleichung sehen wir, daß $A^N \chi f_i$ eine Cauchy-Folge sein muß, also gegen ein Element aus $\mathrm{L}^2(\Sigma)$ konvergiert. Dieses Element kann aber nur $A^N \chi f$ sein, denn A^N ist selbstadjungiert, der Graph von A^N also abgeschlossen. Insofern können wir in der Ungleichung

$$\left\|A^N \chi f_i\right\|_0 \leq c_{\chi,P,N} \sum_{l=0}^{N} \left\|A^l f_i\right\|_0$$

auf beiden Seiten den Grenzübergang durchführen und erhalten das gewünschte Ergebnis.

B. Der Beweis von Satz 2.7.6

In diesem Anhang wollen wir die ψDO -Eigenschaft für den Operator I_1 aus Abschnitt 2.7.2 nachweisen. Dazu benötigen wir zunächst einige Eigenschaften von σ, dem halben Quadrat des geodätischen Abstandes auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (Σ, γ):
σ erfüllt in Koordinaten in einer normalen Umgebung die folgenden Gleichungen[i]:

$$
\begin{aligned}
[\nabla_{1_i} \nabla_{1_j} \sigma](x) &= \gamma_{ij}(x), && (1)\\
[\partial_i \sigma](x) &= 0, && (2)\\
\sigma(x,y) &= \frac{1}{2} \gamma^{ij}(x) \partial_{x_i} \sigma(x,y) \partial_{x_j} \sigma(x,y). && (3)
\end{aligned}
$$

Des weiteren gelten die folgenden Ungleichungen:

Lemma B.1.3. *Sei K ein Kompaktum in einer normalen Koordinatenumgebung U (zugehörige Kartenabbildung: π) von Σ. Dann gibt es*

1. *Konstanten c_K, c'_K, so daß*
$$|x-y|^2 \leq c_K \sigma(x,y) \leq c'_K |x-y|^2 \quad \forall x, y \in \pi(K)$$
ist.
2. *eine Konstante c''_K, so daß*
$$|\partial_i \sigma(x,y)| \leq c''_K |x-y| \quad \forall x, y \in \pi(K)$$
ist.
3. *zu jedem Multiindex α eine Konstante $c_{\alpha,K}$, so daß*
$$|(\partial_x + \partial_y)^\alpha \sigma(x,y)| \leq c_{\alpha,K} |x-y|^2 \quad \forall x, y \in \pi(K)$$
ist.
4. *zu jedem Multiindex α eine Konstante $c'_{\alpha,K}$, so daß*
$$|(\partial_x + \partial_y)^\alpha \partial_i \sigma(x,y)| \leq c'_{\alpha,K} |x-y| \quad \forall x, y \in \pi(K)$$
ist.

[i] Dabei steht $[f](x)$ für den sogenannten Koinzidenzlimes $f(x,x)$ einer Funktion f auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ und ∂_i ist die partielle Ableitung nach einem der Argumente $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_n$ von σ.

Beweis. **Erste Aussage**: Wir betrachten zunächst Punkte (x,y) abseits der Diagonalen. Dazu definieren wir

$$c_\epsilon^{(1)} := \min_{|x-y|^2\geq\epsilon} \frac{\sigma(x,y)}{|x-y|^2}, \qquad c_\epsilon^{(2)} := \max_{|x-y|^2\geq\epsilon} \frac{\sigma(x,y)}{|x-y|^2}.$$

Wegen $\sigma(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ist $c_\epsilon^{(1)} > 0$ und wegen der Stetigkeit der Quotienten $\sigma/|\cdot|$ auf dem betrachteten Bereich $c_\epsilon^{(2)} < \infty$.
Es gilt

$$|x-y|^2 \leq \frac{1}{c_\epsilon^{(1)}}\sigma(x,y) \leq \frac{c_\epsilon^{(2)}}{c_\epsilon^{(1)}}|x-y|^2 \quad \text{für } |x-y|^2 \geq \epsilon. \tag{4}$$

Jetzt betrachten wir das Verhalten in der Nähe der Diagonalen: Wegen

$$\begin{aligned}\left[\nabla_{1_i}\nabla_{1_j}\sigma\right] &= \left[\nabla_{1_i}\partial_{1_j}\sigma\right] = \left[\partial_{1_i}\partial_{1_j}\sigma + \Gamma_{ij}^k\partial_{1_k}\sigma\right] \\ &= \left[\partial_{1_i}\partial_{1_j}\sigma\right] + \Gamma_{ij}^k[\partial_{1_k}\sigma] \\ &\overset{(2)}{=} \left[\partial_{1_i}\partial_{1_j}\sigma\right]\end{aligned}$$

und (1) gilt

$$[\sigma] = 0, \quad [\partial_{1_k}\sigma] = 0, \quad \left[\partial_{1_i}\partial_{1_j}\sigma\right](y) = \gamma_{ij}(y).$$

Analog gilt

$$[|x-y|^2] = 0, \quad [\partial_{1_i}|x-y|^2] = 0, \quad \left[\partial_{1_i}\partial_{1_j}|x-y|^2\right](y) = \delta_{ij}.$$

Wie zu erwarten, haben also sowohl $\sigma(x,y)$ als auch $|x-y|^2$ für festes y ein lokales Minimum 0 bei $x = y$.
Für zunächst festes y können wir nun die positiv definiten quadratischen Formen $\gamma_{ij}(y)$ und $2\delta_{ij}$ gegeneinander abschätzen: Es gibt positive $c_y^{(1)}, c_y^{(2)}$, so daß

$$\xi^i\xi^j\delta_{ij} < c_y^{(1)}\xi^i\xi^j\gamma_{ij}(y) < c_y^{(2)}\xi^i\xi^j\delta_{ij} \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

gilt. Diese quadratischen Formen geben aber nun die Richtungsableitung – in Richtung ξ – der ersten Ableitung der entsprechenden Funktion wiederum in Richtung ξ an. Daher gibt es zunächst für festes y ein $\epsilon_y > 0$ mit

$$|x-y|^2 \leq c_y^{(1)}\sigma(x,y) \leq c_y^{(2)}|x-y|^2 \quad \text{für } x \text{ mit } |x-y|^2 < \epsilon_y.$$

Da sowohl $c_y^{(1)}, c_y^{(2)}$ als auch ϵ_y stetig von y abhängen, finden wir ein Minimum $\epsilon > 0$ von ϵ_y auf K sowie Konstanten

$$c^{(1)} := \max_K c_y^{(1)} > 0, \quad c^{(2)} := \max_K \frac{c_y^{(2)}}{c_y^{(1)}} < \infty.$$

Damit gilt

$$|x-y|^2 \leq c^{(1)}\sigma(x,y) \leq c^{(1)}c^{(2)}\,|x-y|^2 \quad \text{für } x,y \text{ mit } |x-y|^2 < \epsilon_y.$$

Zusammen mit (4) ergibt das die erste Ungleichung.

Zweite Aussage: Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} |\partial_{1_k}\sigma| &\leq \sqrt{\delta^{ij}(\partial_{1_i}\sigma)(\partial_{1_j}\sigma)} \overset{(*)}{\leq} c_K\sqrt{\gamma^{ij}(\partial_{1_i}\sigma)(\partial_{1_j}\sigma)} \\ &\overset{(3)}{=} c_K\sqrt{\sigma} \leq c'_K\,|x-y|\,, \end{aligned}$$

wobei für $(*)$ wieder wie im ersten Teil die quadratischen Formen uniform gegeneinander abgeschätzt wurden und im letzten Schritt ein Ergebnis aus dem ersten Teil verwendet wurde.
Die Ableitungen $\partial_{2_k}\sigma$ können wir mit einer analogen Rechnung abschätzen.

Dritte Aussage: Setzen wir zur Abkürzung

$$f(x,y) := (\partial_1+\partial_2)^\alpha\sigma(x,y).$$

Wie im ersten Teil betrachten wir zunächst Punkte außerhalb der Diagonalen: Mit

$$c_\epsilon := \max_{|x-y|^2\geq\epsilon}\frac{|f(x,y)|}{|x-y|^2} < \infty$$

gilt

$$|f(x,y)| \leq c_\epsilon\,|x-y|^2 \quad \text{für } |x-y|^2 \geq \epsilon. \tag{5}$$

Jetzt untersuchen wir die Situation in der Nähe der Diagonalen:
Zunächst beobachten wir, daß ganz allgemein für eine glatte Funktion $f(x,y)$

$$\begin{aligned} \partial_i[f](x) &= \partial_i f(x,x) = (\partial_{1_i}f)(x,x) + (\partial_{2_i}f)(x,x) \\ &= [(\partial_{1_i}+\partial_{2_i})f](x) \end{aligned} \tag{6}$$

gilt. Mit Hilfe dieser Gleichung berechnen wir nun

$$\begin{aligned} [f] &= \partial^\alpha[\sigma] = 0, \\ [\partial_{1_i}f] &= \partial^\alpha[\partial_{1_i}\sigma] \overset{(2)}{=} 0, \\ \left[\partial_{1_i}\partial_{1_j}f\right] &= \partial^\alpha[\partial_{1_i}\partial_{1_j}\sigma] \overset{(1)}{=} \partial^\alpha g_{ij}. \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß $f(x,y)$ für festes y bei $x=y$ zwar nicht notwendig ein lokales Extremum, jedoch zumindest einen Sattelpunkt besitzt. Analog zum ersten Teil finden wir in dieser Situation zumindet ein c_y, so daß

$$\left|\xi^i\xi^j\partial^\alpha\gamma_{ij}(y)\right| < c_y\xi^i\xi^j\delta_{ij} \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

ist und damit ein ϵ_y mit

$$|f(x,y)| \leq c_y\,|x-y|^2 \quad \text{für } x \text{ mit } |x-y|^2 < \epsilon_y.$$

Wie im ersten Teil kann man sich daher auch Konstanten ϵ, c beschaffen, so daß

$$|f(x,y)| \leq c\,|x-y|^2 \quad \text{für } x,y \text{ mit } |x-y|^2 < \epsilon$$

gilt. Zusammen mit (5) ergibt das die Behauptung.

Vierte Aussage: Da uns kein Analogon der Formel (3) für $D^\alpha\sigma$ zur Verfügung steht, können wir nicht wie im zweiten Teil des Beweises argumentieren, sondern gehen den gleichen Weg wie im dritten Teil:
Wir führen die Abkürzungen

$$D^\alpha := (\partial_1 + \partial_2), \qquad f(x,y) := (D^\alpha \partial_i \sigma)^2$$

ein und setzen

$$c_\epsilon := \max_{|x-y|^2 \geq \epsilon} \frac{|f(x,y)|}{|x-y|^2} < \infty$$

womit

$$|f(x,y)| \leq c_\epsilon\,|x-y|^2 \quad \text{für } |x-y|^2 \geq \epsilon \tag{7}$$

folgt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} [f] = [D^\alpha \partial_i \sigma]^2 &\overset{(6)}{=} (\partial^\alpha [\partial_i \sigma])^2 = 0, \\ [\partial_{1_i} f] &= [2D^\alpha \partial_i \sigma][D^\alpha \partial_{1_i} \partial_j \sigma] = 0. \end{aligned}$$

Die Matrix der zweiten Ableitungen ist auf der Diagonalen wiederum *nicht* positiv definit, f hat also für festes y bei $x = y$ einen Sattelpunkt oder ein lokales Extremum. Wie im dritten Teil schließen wir auf die Existenz von Konstanten ϵ, c, so daß

$$|f(x,y)| \leq c\,|x-y|^2 \quad \text{für } x,y \text{ mit } |x-y|^2 < \epsilon$$

ist. Mit Hilfe von (6) finden wir also eine Konstante $c_{\alpha,K}$ mit

$$|f(x,y)| \leq c_{\alpha,K}\,|x-y|^2\,.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, so ergibt sich die Behauptung. □

Jetzt beweisen wir das folgende Lemma:

Lemma B.1.4. *Sei $K \subset \Sigma$ kompakt und liege unter einer Normalkoordinatenumgebung. Sei $\chi \in C_0^\infty(\Sigma \times \Sigma)$. Seien weiterhin Multiindices α, β, γ mit $|\gamma| \geq |\beta|$ sowie $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es eine Konstante c (abhängig von K, δ und den Multiindices), so daß in lokalen Koordinaten die Ungleichung*

$$\int dy \, \left|(\partial_x + \partial_y)^\alpha \partial_y^\beta \left(\chi(x,y)(y-x)^\gamma e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}\right)\right| \leq c\tau^{\frac{1}{2}(n+|\gamma|-|\beta|)} \quad \forall x \in K \; \forall \tau : 0 < \tau \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. **Strategie**: Wenn man die Ableitungen des Integranden auf der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung ausführt, erhält man i.a. eine Summe von sehr vielen Termen. Wir werden die Integrale dieser Summanden einzeln abschätzen. Dabei wird es darauf ankommen, in geeigneter Weise über die Faktoren in den Summanden Buch zu führen, die das Verhalten für kleine τ beeinflussen:

- Der Faktor τ^{-1}, der beim Ableiten der Exponentialfunktion entsteht, macht einen Summanden bei $\tau = 0$ **singulärer**.
- Faktoren, die auf der Diagonalen verschwinden, machen den betreffenden Summanden bei $\tau = 0$ **regulärer**. Zu diesen Faktoren gehören z.B.

$$(y_i - x_i), \quad \partial_{y_i}\sigma, \quad (\partial_x + \partial_y)^\kappa \partial_{y_i}\sigma.$$

Irrelevant hingegen sind Funktionen, die glatt sind, jedoch auf der Diagonalen nicht notwendig verschwinden. Beispiele hierfür sind $\partial_i\partial_j\sigma$ oder auch χ und alle seine Ableitungen. Diese werden insofern in den folgenden Rechnungen nicht genauer betrachtet werden.

Die Ableitungen ∂_y^β: Wir führen zunächst die Ableitungen ∂_y^β aus:

$$\partial_y^\beta \left(\chi(x,y)(y-x)^\gamma e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}\right) = \sum_i \frac{1}{\tau^{t_{i\beta\gamma}}}(y-x)^{\gamma_{i\beta\gamma}}(\partial_y\sigma)^{\beta_{i\beta\gamma}}(\text{ Irrel. })_{i\beta\gamma} e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}.$$

Dabei numeriert i die entstehenden Terme in irgendeiner Weise durch, $\beta_{i\beta\gamma}, \gamma_{i\beta\gamma}$ sind entsprechend gewählte Multiindices und $(\text{ Irrel. })_{i\beta\gamma}$ enthält die von uns als irrelevant erkannten Terme.
Entscheidend ist nun für uns die folgende Tatsache: Es gilt für alle i, β, γ:

$$2t_{i\beta\gamma} + |\gamma| - |\beta| \leq |\beta_{i\beta\gamma}| + |\gamma_{i\beta\gamma}| \,. \tag{8}$$

Diese Ungleichung beweisen wir per vollständiger Induktion nach $|\beta|$:
Verankerung: Für $|\beta| = 0$ hat die obige Summe nur einen Term. Er werde, sagen wir, durch $i = 0$ gekennzeichnet. Mithin gilt

$$|\beta| = |\beta_{0\beta\gamma}| = 0, \quad |\gamma| = |\gamma_{0\beta\gamma}| \,, \quad t_{0\beta\gamma} = 0$$

und Beziehung (8) ist erfüllt.
Induktionsschritt: Gegeben sei nun der i-Term aus der Summe zu β, γ. Angenommen, er erfüllt (8). Wir leiten diesen Term nach y_j ab. Indem wir die Kettenregel anwenden, erhalten wir eine Summe

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{1}{\tau^{t_{l\beta'\gamma}}} (y-x)^{\gamma_{l\beta'\gamma}} (\partial_y \sigma)^{\beta_{l\beta'\gamma}} (\text{ Irrel. })_{l\beta'\gamma} e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}.$$

Dabei ist $\beta'_j = \beta_j + 1$, $\beta'_k = \beta_k$ für $k \neq j$. Es gilt

l	Ableitung wirkte auf	$t_{l\beta'\gamma}$	$\lvert\beta_{l,\beta'\gamma}\rvert$	$\lvert\gamma_{l,\beta'\gamma}\rvert$
1	$\exp(-\sigma/2\tau)$,	$t_{i\beta\gamma}+1$	$\lvert\beta_{i\beta\gamma}\rvert + 1$	$\lvert\gamma_{i\beta\gamma}\rvert$
2	$(\partial_y)^{\beta_{i\beta\gamma}}$,	$t_{i\beta\gamma}$	$\lvert\beta_{i\beta\gamma}\rvert - 1$	$\lvert\gamma_{i\beta\gamma}\rvert$
3	$(y-x)^{\gamma_{i\beta\gamma}}$,	$t_{i\beta\gamma}$	$\lvert\beta_{i\beta\gamma}\rvert$	$\lvert\gamma_{i\beta\gamma}\rvert - 1$
4	$(\text{ Irrel. })_{i\beta\gamma}$,	$t_{i\beta\gamma}$	$\lvert\beta_{i\beta\gamma}\rvert$	$\lvert\gamma_{i\beta\gamma}\rvert$

Unter Beachtung von $|\beta'| = |\beta| + 1$ und der Induktionshypothese liest man jetzt aus der Tabelle ab, daß für jeden einzelnen Term tatsächlich

$$2t_{l\beta'\gamma} + |\gamma| - \left|\beta'\right| \leq \left|\beta_{l\beta'\gamma}\right| + \left|\gamma_{l\beta'\gamma}\right|$$

gilt, womit (8) gezeigt ist.

Die Ableitungen $(\partial_x + \partial_y)^\alpha$: Jetzt müssen wir die Wirkung der restlichen Ableitungen untersuchen. Wir verwenden die Abkürzungen

$$D^\alpha := (\partial_x + \partial_y)^\alpha \text{ sowie } \beta_{(i)} := \beta_{i\beta\gamma}, \quad \gamma_{(i)} := \gamma_{i\beta\gamma}, \quad \text{etc.}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} &D^\alpha \left(\frac{1}{\tau^{t_i}} (y-x)^{\gamma_{(i)}} (\partial_y \sigma)^{\beta_{(i)}} (\text{ Irrel. })_i e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}} \right) \\ &= (y-x)^{\gamma_{(i)}} \sum_j \frac{1}{\tau^{t_i + k_{ij}}} \left(D^{\beta_{(ij)}} (\partial_y \sigma)^{\beta_{(i)}} \right) \left(D^{\delta_{(ij)}} (D\sigma)^{\kappa_{(ij)}} \right) (\text{ Irrel. })_{ij} e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}. \end{aligned}$$

Dabei numeriert j wiederum die enstehenden Terme durch, $\gamma_{(ij)}$ etc. sind entsprechend gewählte Multiindices, die natürlich auch noch von α, β und γ abhängen.
Die genaue Struktur von $\gamma_{(ij)}, \delta_{(ij)}, \delta_{(ij)}$ ist nicht wichtig, wir halten jedoch fest, daß

$$\left|\kappa_{(ij)}\right| = k_{ij} \tag{9}$$

ist.

Schluß: Wir können jetzt abschätzen:

$$\begin{aligned} &\left| D^\alpha \partial_y^\beta \left(\dots \right) \right| \\ &\leq \not{c}_K \chi_{K \times K} \sum_{ij} \frac{1}{\tau^{t_i + k_{ij}}} |y-x|^{\gamma_{(i)}} \left| D^{\beta_{(ij)}} (\partial_y \sigma)^{\beta_{(i)}} \right| \left| D^{\delta_{(ij)}} (D\sigma)^{\kappa_{(ij)}} \right| e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}, \end{aligned}$$

weil die irrelevanten Terme glatt sind und kompakten Träger in $K\times K$ haben. $\chi_{K\times K}$ meint die charakteristische Funktion von $K\times K$.

$$\leq \not{c}_K \chi_{K\times K} \sum_{ij} \frac{1}{\tau^{t_i+k_{ij}}} \left|y-x\right|^{\left|\gamma_{(i)}\right|+\left|\beta_{(i)}\right|+2\left|\kappa_{(ij)}\right|} e^{-\not{c}_K \frac{|y-x|^2}{2\tau}}$$

wegen Lemma B.1.3.

$$\leq \not{c}_{K,\epsilon} \chi_{K\times K} \sum_{ij} \frac{1}{\tau^{t_i+k_{ij}}} \left|y-x\right|^{2t_i+|\gamma|-|\beta|+2k_{ij}} e^{-\not{c}_K \frac{|y-x|^2}{2\tau}}$$

denn wegen (8) und (9) ist

$$\left|\gamma_{(i)}\right| + \left|\beta_{(i)}\right| + 2\left|\kappa_{(ij)}\right| \geq 2t_i + |\gamma| - |\beta| + 2k_{ij}.$$

Fassen wir das bisher Erreichte zusammen:

$$\int dy \ \left|(\partial_x+\partial_y)^\alpha \partial_y^\beta \Big(\dots\Big)\right| \leq \not{c}_{K,\epsilon} \sum_{ij} \frac{1}{\tau^{b_{ij}}} \int dy \ \left|x-y\right|^{a_{ij}} e^{-\not{c}_K \frac{|y-x|^2}{2\tau}}. \tag{10}$$

Dabei wurden die Abkürzungen

$$a_{ij} = 2t_i + |\gamma| - |\beta| + 2k_{ij} \qquad b_{ij} = t_i + k_{ij}$$

verwendet. Betrachten wir den ij-Term separat:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau^{b_{ij}}} \int dy \ \left|x-y\right|^{a_{ij}} e^{-\not{c}_K \frac{|y-x|^2}{2\tau}} \\
&= \frac{1}{\tau^{b_{ij}}} \int_{\mathbb{R}} dy_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} dy_n \left(\sum_{l=1}^n \left|y_l - x_l\right|^2 \right)^{a_{ij}/2} \exp\left(- \not{c} \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^n \left|y_m - x_m\right|^2 \right) \\
&= \not{c}_n \frac{1}{\tau^{b_{ij}}} \int_0^\infty \sqrt{\tau} ds_1 \cdots \int_0^\infty \sqrt{\tau} ds_n \left(\sum_{l=1}^n \tau s_l^2 \right)^{a_{ij}/2} \exp\left(- \not{c} \sum_{m=1}^n \left|s_m\right|^2 \right)
\end{aligned}$$

via Substitution $s_l = \tau^{-1/2}\left|y_l - x_l\right|$,

$$= \not{c}\, \tau^{\frac{1}{2}(n+a_{ij})-b_{ij}}.$$

Einsetzen in (10) liefert jetzt das Gewünschte:

$$\int dy \ \left|(\partial_x+\partial_y)^\alpha \partial_y^\beta \Big(\dots\Big)\right| \leq \not{c} \sum_{ij} \tau^{\frac{1}{2}(n+a_{ij})-b_{ij}} = \not{c}\, \tau^{\frac{1}{2}(n+|\gamma|-|\beta|)}.$$

□

Jetzt haben wir alle Werkzeuge beisammen, um den entscheidenden Satz zu beweisen:

Satz B.1.5. *I_1 ist ein ψDO aus $\Psi^0(\Sigma)$.*

Beweis. **Strategie**: Wir wollen das in Lemma 2.1.5 angegebene Kriterium für die ψDO -Eigenschaft verwenden. Nach Korollar 2.7.5 ist $I_1 : C_0^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ stetig und hat einen Integralkern, der abseits der Diagonalen glatt ist.
Um das in Lemma 2.1.5 gegebene Kriterium für die ψDO -Eigenschaft anzuwenden, bleibt also nur noch die Abschätzung der für eine geeignete Überdeckung (U_i) definierten Funktionen $a_i(x,\xi)$ auszuführen. Dies wollen wir im folgenden tun:

Die Funktionen $a_i(x,\xi)$: Als Überdeckung von Σ durch Kartenumgebungen verwenden wir eine Überdeckung (U_i) durch konvexe normale Umgebungen (Satz 1.2.2). Aus diesen greifen wir uns eine beliebige Umgebung U heraus und bezeichnen die zugehörige Kartenabbildung mit π. Für χ, χ' aus $C_0^\infty(\pi U)$ definieren wir wie in Lemma 2.1.5

$$\begin{aligned} a(x,\xi) :&= \chi(x) e_{-\xi}(x) \pi_* I_1 \pi^* \chi' e_\xi \\ &= \int_\Sigma dy\; e^{i\xi(y-x)} \int_0^\delta d\tau\; f(\tau) \sum_{l=0}^{k(0)} \tau^{-n/2+l} \chi_l(x,y) e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$\chi_l(x,y) = |\det\gamma|^{1/2}(x)\, |\det\gamma|^{1/2}(y) \chi(x)\chi'(y)\kappa(x,y) U_l(x,y)$$

verwendet. Wir wählen ein beliebiges $k \leq |\beta|$ und schätzen ab:

$$\begin{aligned} &\left|\xi_i^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|, \\ &\leq \left| \xi_i^k \partial_x^\alpha \int_\Sigma dy\; (y-x)^\beta e^{i\xi(y-x)} \int_0^\delta d\tau\; f(\tau) \sum_{l=0}^{k(0)} \tau^{-n/2+l} \chi_l(x,y) e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}} \right|, \end{aligned}$$

denn wir können die ξ-Ableitungen in das Integral hineinziehen, da sich die ξ-Ableitungen des Integranden unabhängig von ξ durch $|\chi|\,\sigma^{\nu-n/2}$ (Lemma 2.7.1) integrabel majorisieren lassen.

$$= \left| \xi_i^k \partial_x^\alpha \int_0^\delta d\tau \int_\Sigma dy\; (y-x)^\beta e^{i\xi(y-x)} f(\tau) \sum_{l=0}^{k(0)} \tau^{-n/2+l} \chi_l(x,y) e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}} \right|,$$

wobei wiederum die Abschätzung aus Lemma 2.7.1 die Integralvertauschung ermöglicht.

$$= \left| \partial_x^\alpha \int_0^\delta d\tau \int_\Sigma dy\; e^{i\xi(y-x)} \partial_{y_i}^k \left(f(\tau) \sum_{l=0}^{k(0)} \tau^{-n/2+l} \chi_l(x,y)(y-x)^\beta e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}} \right) \right|,$$

indem die ξ_i unter das Integral gezogen, als Ableitungen nach y_i von $\exp i\xi(y-x)$ geschrieben und schließlich per partieller Integration auf den Rest des Integranden hinübergewälzt wurden.
Jetzt müssen noch die Ableitungen nach x durch die τ-Integration gezogen werden. Dazu müssen wir die Ableitung des Integranden unabhängig von x integrabel majorisieren. Die wesentliche Arbeit dazu ist schon in Lemma B.1.4 geleistet. Wir berechnen:

$$\left|\partial_x^\alpha \int_\Sigma dy\ e^{i\xi(y-x)}\partial_{y_i}^k\left(f(\tau)\sum_{l=0}^{k(0)}\tau^{-n/2+l}\chi_l(x,y)(y-x)^\beta e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}\right)\right|$$
$$=|f(\tau)|\sum_{l=0}^{k(0)}\tau^{-n/2+l}\left|\int_\Sigma dy\ \partial_x^\alpha\left(e^{i\xi(y-x)}\partial_{y_i}^k\left(\chi_l(x,y)(y-x)^\beta e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}\right)\right)\right|,$$

da der Integrand des y-Integrals glatt mit kompaktem Träger ist,

$$=|f(\tau)|\sum_{l=0}^{k(0)}\tau^{-n/2+l}\left|\int_\Sigma dy\ e^{i\xi(y-x)}(\partial_x+\partial_y)^\alpha\partial_{y_i}^\tau\left(\chi_l(x,y)(y-x)^\beta e^{-\frac{\sigma(x,y)}{2\tau}}\right)\right|,$$

indem $\partial_{x_l}\exp(i\xi(y-x)) = -\partial_{y_l}\exp(i\xi(y-x))$ ausgenutzt und anschließend partiell integriert wurde

$$\leq \not c\,|f(\tau)|\sum_{l=0}^{k(0)}\tau^{\frac{1}{2}(|\beta|+l-k)}$$

wegen Lemma B.1.4. Das ist unabhängig von x und integrabel in τ auf $[0,\delta]$, da $|f(\tau)|$ integrierbar auf $[0,\delta]$ und $k \leq |\beta|$ ist.
Mit dieser Abschätzung haben wir zweierlei gezeigt:

1. $a(x,\xi)$ ist glatt in beiden Argumenten zusammen.
2. $\left|\xi_i^{|\beta|}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq \not c$.

Aus 2. müssen wir jetzt nur noch schließen, daß a tatsächlich die Ungleichungen (2.3) erfüllt. Das ist aber nicht mehr schwierig: Da es eine positive Konstante $\not c$ gibt, so daß

$$|\xi|^{|\beta|} \leq \not c\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{|\beta|}$$

ist, erhalten wir

$$|\xi|^{|\beta|}\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq \not c.$$

Es gilt auch $\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq \not{c}$, womit schlussendlich

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (1+|\xi|)\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|^{\frac{1}{|\beta|}} \leq \not{c} \\ \Rightarrow \quad & \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq \not{c}\,(1+|\xi|)^{-|\beta|}\,. \end{aligned}$$

□

Symbolverzeichnis

$\lceil\cdot\rceil$	Die nächstgrößere ganze Zahl	25
$[\cdot]$	Der Koinzidenzlimes	75
$\lvert\cdot\rvert_{k,K}$	Eine Halbnorm auf einer Mannigfaltigkeit	9
$\lvert\cdot\rvert_{j,k}$	Eine Schwartz-Norm	48
$\lVert\cdot\rVert_m$	Eine Sobolev-Norm	24
$\lVert\cdot\rVert_{Op}$	Die Operator-Norm	
$(\mathcal{M}, g)$	$s+1$-dimensionale Raumzeit	7
(Σ, γ)	n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit	7
(U, π)	Karte einer Mannigfaltigkeit	7
$(\cdot)^*, (\cdot)_*$	Pullback und Push forward	7
$\xi^\sharp$	Der duale Vektor zu ξ	10
$p \times q$	p und q liegen akausal	10
$\mathrm{dom}\,(\cdot)$	Der Definitionsbereich eines Operators	
$\hat{\cdot}$	Die Fourier-Transformation	17
$\check{\cdot}$	Die inverse Fourier-Transformation	17
$\sim$	Die Bicharakteristik-Relation	19
$\not{c}$	Die Reehsche universelle Konstante	26
$C_0^\infty(\Sigma)$	Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger auf Σ	9
$\mathcal{D}'(\Sigma)$	Topologischer Dualraum von $C_0^\infty(\Sigma)$	9
$C^\infty(\Sigma)$	Raum der glatten Funktionen auf Σ	9
$\mathcal{E}'(\Sigma)$	Topologischer Dualraum von $C^\infty(\Sigma)$	9
$e_\xi(x)$	$= e^{i\langle x,\xi\rangle}$	
E	Der Propagator der KG-Gleichung	11
$\mathcal{F}(\cdot)$	Die Fourier-Transformation	17
$J(\cdot)$	Kausale Zukunft und Vergangenheit	10
$\mathbf{k}$	Einteilchen-Abbildung	14
$\mathcal{K}_\mu$	Eine bestimmte Klasse von Funktionen	31
$\mathcal{L}(\cdot)$	Die Laplace-Transformation	40
$\Psi^m(\Sigma)$	Die Klasse der ψDO m-ter Ordnung auf Σ	22
$r(p,q)$	Geodätischer Abstand von p und q	8
ρ_0, ρ_1	Abbildungen auf die Cauchy-Daten	11
$\sigma(p,q)$	$= 1/2r^2(p,q)$	8
$S^m(\Omega)$	Symbolklasse	21
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Die Schwartz-Funktionen auf $\mathbb{R}^n$	
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	Die Schwartz-Distributionen auf $\mathbb{R}^n$	
$\mathbb{S}^n$	Die n-Sphäre	
$\mathrm{WF}(\cdot)$	Die Wellenfrontmenge	18

Literaturverzeichnis

[1] R. Brunetti, K. Fredenhagen, M. Köhler, “The microlocal spectrum condition and the Wick's polynomials of free fields”, *Commun. math. Phys.* **180** (1996), 633

[2] D. Buchholz, Persönliche Mitteilung.

[3] J. Dimock, “Algebras of local observables on a manifold”, *Commun. math. Phys.* **77** (1980), 219-228

[4] F.G. Friedlander, *The Wave-Equation on Curved Space-Time*, Cambridge monographs on mathematical physics 2, Cambridge University Press, Cambridge 1975

[5] S. A. Fulling, F. J. Narcowich, R. M. Wald, “Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved space-time II”, *Annals of Physics* **136** (1981), 243-272

[6] P.B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Mathematics lecture series 11, Publish or Perish, Wilmington (Delaware) 1984

[7] A. Grigis, J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis for Differential Operators*, London Mathematical Society Lecture Note Series 196, Cambridge 1994

[8] R. Haag, *Local Quantum Physics*, Texts and monographs in physics, Springer Verlag, Berlin 1992

[9] S.W. Hawking, “Particle creation by black holes”, *Commun. math. Phys.* **43** (1975), 199-220

[10] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge monographs on mathematical physics 1, Cambridge University Press, Cambridge 1973

[11] L. Hörmander, “Pseudodifferential operators” in *Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math. Vol.* **10**, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island) 1967

[12] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256, Springer Verlag, Berlin 1983

[13] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 274, Springer Verlag, Berlin 1985

[14] W. Junker, "Hadamard States, adiabatic vacua and the construction of physical states for scalar quantum fields on curved spacetime", *Rev. Math. Phys., Vol.* **8** (1996), 1091-1159

[15] B. S. Kay, "A uniqueness result for quasi-free KMS states", *Helv. Phys. Acta, Vol.* **58** (1985), 1017-1029

[16] B. S. Kay, "Purification of KMS states", *Helv. Phys. Acta, Vol.* **58** (1985), 1030-1040

[17] B. S. Kay, "The double-wedge algebra for quantum fields on Schwarzschild and Minkowski spacetimes", *Commun. math. Phys.* **100** (1985), 57-81

[18] B. S. Kay, "Linear spin-zero quantum fields in external gravitational and scalar fields", *Commun. math. Phys.* **62** (1978), 55-70

[19] B.S. Kay, R.M. Wald, "Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate Killing horizon", *Phys. Rep.* **207** (1991), 49-136

[20] M.D. Kruskal, "Maximal Extension of Schwarzschild metric", *Phys. Rev.* **119** *No. 5* (1960), 1743-1745

[21] S. Minakshisundaram, A. Pleijel, "Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds", *Canad. J. Math.* **1**, 242-256 (1949)

[22] V.K. Patodi, "Curvature and the eigenforms of the Laplace operator", *J. Diff. Geo.* **5**, 233-249 (1971)

[23] M.J. Radzikowski, "Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time", *Commun. math. Phys.* **179** (1996), 529-553

[24] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I* Academic Press, San Diego 1975

[25] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II* Academic Press, San Diego 1975

[26] R.T. Seely, "Complex powers of an elliptic operator" in *Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math. Vol.* **10**, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island) 1967

[27] R. Strichartz, "A functional calculus for elliptic pseudo differential operators", *Amer. J. Math.* **94**, 711-722 (1972)

[28] R. Verch, "Local definitness, primarity and quasiequivalence of quasifree Hadamard quantum states in curved spacetime", *Commun. Math. Phys.* **160** (1994), 507-536

[29] R. Verch, "Continuity of symplectically adjoint maps and the algebraic structure of Hadamard vacuum representations for quantum fields on curved spacetime", *Rev. Math. Phys., Vol.* **9** (1997), 635-674

[30] R. Verch, "Wavefront sets in algebraic quantum field theory", *Commun. Math. Phys.* **205** (1999), 337-367

[31] M.E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, Princeton 1981

[32] R. M. Wald, "The back reaction effect in particle creation in curved spacetime", *Commun. math. Phys.* **54** (1977), 1-19

[33] R. M. Wald, "On the Euklidean approach to quantum field theory in curved spacetime", *Commun. math. Phys.* **70** (1979), 221-242

[34] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, University of Chicago Press, Chicago 1984

Danksagung

Viele Menschen haben zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen und ich stehe dafür in ihrer Schuld.
Zu allererst möchte ich mich bei Herrn Dr. R. Verch bedanken, auf dessen Themenvorschlag die Arbeit zurückgeht und ohne dessen große Kompetenz, Intuition und dessen Einsatz und freundliche Geduld bei der Betreuung diese Arbeit nie zustande gekommen wäre.
Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. Buchholz für sein Engagement und die gute Betreuung.
Ohne meinen Schreibtischnachbarn André Grüning wäre die Zeit der Diplomarbeit nicht das gewesen, was sie war – ich danke für Rat und Tat und seine Freundlichkeit. Gleichfalls danke ich den anderen Diplomanden und Doktoranden des Instituts für Freundlichkeit, Hilfsbereitschaft und die vielen interessanten Diskussionen.
Dr. T. Gerlach und meinem Vater danke ich für das Korrekturlesen und die wertvollen Anmerkungen zum Manuskript, Herrn Prof. Dr. H. Goenner für die Übernahme des Korreferats.
Dank geht auch an meine Eltern für die Finanzierung meines Studiums und schließlich, aber nicht zuletzt an meine Familie und meine Freunde dafür, daß ich bin, der ich bin.