

Zeit- und raumartige Vertauschungsrelationen
in konformen Quantenfeldtheorien
in höherdimensionaler Raumzeit

Diplomarbeit

vorgelegt von

Jens Timo Neumann

aus Hildesheim

angefertigt im

Institut für theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2002

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	7
0.1	Ausgangspunkt: Die “fundamentale Struktur” der $1 + 1$ -dimensionalen konformen Quantenfeldtheorie	7
0.1.1	Chirale Faktorisierung und Zopfgruppen-VR	7
0.1.2	Darstellungen der Zopfgruppe in der DHR-Theorie	9
0.2	Erwartungen an den höherdimensionalen Fall	10
0.3	Aufbau der Arbeit	12
I	Hintergrund	15
1	Darstellungen der Zopfgruppe in der DHR-Theorie	17
1.1	Präliminarien aus der DHR-Theorie	17
1.1.1	Voraussetzungen	18
1.1.2	Endomorphismen	19
1.1.3	Intertwiner	19
1.1.4	Statistikoperatoren	20
1.1.5	Konjugierte Endomorphismen	21
1.2	Zelluläre Darstellung der Zopf- bzw. der Permutationsgruppe	21
1.2.1	Reduzierter Hilbertraum	21
1.2.2	Reduziertes Feldbündel	22
1.2.3	Pfade und Pfadintertwiner	23
1.2.4	Quadratische VR der Elemente von \mathcal{F}_{red}	23
1.2.5	Zelluläre Darstellungen	24
1.3	Besonderheit im Permutationsfall: Das DR-Rekonstruktionstheorem und seine Folgen	25
1.3.1	Das DR-Rekonstruktionstheorem	26
1.3.2	Feldalgebra und Eichgruppe	26
1.3.3	Zerlegung von \mathcal{H} in Darstellungsräume von \mathfrak{A}	27
1.3.4	Eichmultipletts	28
1.3.5	Intertwiner	29
1.3.6	Berechnung der R -Matrizen	30
2	Tensorielle Kategorien	31
2.1	Definitionen und Begriffe	31
2.2	Graphische Notation	33
2.3	Statistische Dimension	34

2.3.1	Definition der statistischen Dimension und der statistischen Phase . . .	34
2.3.2	Statistische Dimension in symmetrischen und in gezopften tensoriellen Kategorien	36
2.3.3	Konsequenzen von Lemma 2.3.4	36
II	Die Gruppe \mathcal{BP}_n	39
3	Abstraktion der Gruppenrelationen	41
3.1	Eine Konsequenz der konformen Kovarianz	41
3.2	Zelluläre Darstellung der Vertauschungsgruppe	42
3.3	Abstraktion der Gruppe \mathcal{BP}_n	42
4	Erzeugung der \mathcal{BP}_n aus einer ihrer Untergruppen \mathcal{P}_n oder \mathcal{B}_n	45
4.1	Erzeugung von \mathcal{BP}_n aus \mathcal{P}_n	45
4.1.1	Eine Rekursionsformel für die Produkte $b_i t_i$	45
4.1.2	Definition der \mathcal{BP}_n durch t_i, m_i	46
4.1.3	Erzeugung der \mathcal{BP}_n aus der \mathcal{P}_n durch Hinzufügen eines weiteren Erzeugers	46
4.2	Erzeugung von \mathcal{BP}_n aus dem Zopfanteil	47
4.2.1	Zwei Rekursionsformeln für die m_i	47
4.2.2	Definition der \mathcal{BP}_n durch b_i, m_i	47
4.2.3	Erzeugung der \mathcal{BP}_n aus der \mathcal{B}_n durch Hinzufügen eines weiteren Erzeugers	48
5	Anwendung des in Kapitel 4 entwickelten Verfahrens auf eine konkrete Zopfgruppendarstellung	51
5.1	Eine tensorielle Kategorie	51
5.1.1	Definition der Kategorie	51
5.1.2	Eine Basis des Intertwinerraumes $(\sigma^2 \sigma^2)$	52
5.1.3	Wirkung von σ . Statistikoperator $\beta(\sigma, \sigma)$	52
5.2	Eine Darstellung der Zopfgruppe	53
5.2.1	Selbstintertwiner von ϱ^2	53
5.2.2	Darstellung der \mathcal{B}_n	54
5.2.3	Explizite Angabe der Darsteller von b_1 und b_2^2	55
5.2.4	Strategie zur Erweiterung der Darstellung	55
5.3	Auswertung der Relationen aus Theorem 4.2.6	56
III	Konformes verallgemeinertes freies Feld	59
6	Natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_{2n}	63
6.1	Das konform invariante verallgemeinerte freie Feld	63
6.1.1	Definition des Feldes	63
6.1.2	Zweipunktfunktion	65
6.2	Natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_{2n}	66
6.3	Natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_4	67
6.3.1	Zerlegung der Vierpunktfunktion	67
6.3.2	Natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_4	67
6.3.3	Nicht-Zellularität in der natürlichen Basis	68

7	Austausch-Komponenten und quadratische VR	69
7.1	Voraussetzungen	69
7.1.1	Erweiterter Hilbertraum. Erzeuger und Vernichter	69
7.1.2	Gruppenring \mathcal{R}_N der Permutationsgruppe \mathcal{P}_N	70
7.2	Zerlegung von \mathcal{H} in Darstellungsräume von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$	71
7.2.1	Die Mengen $Q \left(T_N^{(2)} \right) \mathcal{R}_N Q \left(T_N^{(1)} \right)$	72
7.2.2	Definition der W_{T_N}	72
7.2.3	Transformationsverhalten der W_{T_N} unter der Permutationsgruppe	73
7.2.4	Zerlegung von \mathcal{H}	74
7.3	Der reduzierte Hilbertraum \mathcal{H}_{red}	76
7.3.1	Definition des reduzierten Hilbertraumes	76
7.3.2	Die interpolierenden Felder $W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N}$ und $W_{T_N}^* a(f) W_{T_{N+1}}$	76
7.4	Austauschkomponenten	77
7.5	Die Induktionsmatrix $C^{(Y_{N+1}, Y_N)}$	79
7.6	Quadratische VR. R -Matrizen	80
7.6.1	$(Y_{N+1} g Y_N)(Y_N f Y_{N-1})$ und $(Y_{N-1} g Y_N)(Y_N f Y_{N+1})$	80
7.6.2	$(Y'_N g Y_{N-1})(Y_{N-1} f Y_N)$	82
7.7	Quadratische VR für $(Y'_N g Y_{N+1})(Y_{N+1} f Y_N)$	84
7.7.1	Unterschied zu den vorhergehenden Fällen	84
7.7.2	Modifikation des Ansatzpunktes	85
7.7.3	Eine spezielle Wahl der Referenztableaux	87
7.7.4	Wahl einer Darstellung von \mathcal{R}_N	88
7.7.5	Nichtverschwinden der $6j$ -Symbole der Form (7.62)	91
7.7.6	Quadratische VR für $(Y'_N g Y_{N+1})(Y_{N+1} f Y_N)$	93
8	Äquivalenz der natürlichen und der zellulären Darstellung der \mathcal{BP}_{2n}	97
8.1	Ketten von Austauschkomponenten	97
8.2	Äquivalenz der natürlichen und der zellulären Darstellung	98
8.3	Beispiel: Ketten der Länge 4	99
8.3.1	Ketten der Länge 4	99
8.3.2	Darstellungsmatrizen der zellulären Darstellung der \mathcal{BP}_4	100
8.3.3	Zellularität der Darstellung	100
8.4	Beispiel: Ketten der Länge 6	101
8.4.1	Die natürliche Basis der natürlichen Darstellung der \mathcal{BP}_6	101
8.4.2	Strategie	102
8.4.3	$\langle AA^+ AA^+ AA^+ \rangle$; $\text{span} \{e_1\}$	102
8.4.4	$\langle AA^+ AAA^+ A^+ \rangle$; $\text{span} \{e_2, e_3\}$	102
8.4.5	$\langle AAA^+ A^+ AA^+ \rangle$; $\text{span} \{e_4, e_5\}$	102
8.4.6	$\langle AAA^+ AA^+ A^+ \rangle$; $\text{span} \{e_6, e_7, e_8, e_9\}$	103
8.4.7	$\langle AAAA^+ A^+ A^+ \rangle$; $\text{span} \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$	103
9	Analogien zum DHR-Fall bei Anwesenheit einer Eichsymmetrie	107
9.1	Hilbertraum und "Feldalgebra"	107
9.2	Zerlegung des Hilbertraums. Analogon zur Eichgruppe	107
9.3	Wegelemente und Pfade	108
9.4	"Eichinvariante"	108

IV	Schluß	111
10	Zusammenfassung und Ausblick	113
10.1	Zusammenfassung	113
10.2	Offene Fragen	113
V	Anhänge	115
A	Beweise der Aussagen aus Teil II	117
A.1	Beweis von Theorem 3.3.1	117
A.2	Beweis des Lemmas 4.1.3	120
A.3	Beweis des Lemmas 4.1.5	122
A.4	Beweis des Lemmas 4.2.2	124
A.5	Beweis des Lemmas 4.2.4	127
B	Youngdiagramme und irreduzible Darstellungen der unitären Gruppe	131
B.1	Youngdiagramme	131
B.1.1	Vorbemerkungen aus der allgemeinen Darstellungstheorie	131
B.1.2	Youngdiagramme	132
B.2	Tensordarstellungen der unitären Gruppe	136

Kapitel 0

Einführung

Buchholz und Haag berichten, daß in den frühen sechziger Jahren der Spruch kursierte “The contribution of axiomatic quantum field theory to physics is smaller than any preassigned positive number ε ” [1]. Ein Grund für diese ausgesprochen negative Einschätzung der Bedeutung des axiomatischen und auch des algebraischen Zugangs zur Quantenfeldtheorie damals wie heute ist sicher darin zu sehen, daß allen zweifelsohne erreichten Erfolgen das noch immer ungelöste Problem gegenübersteht, mathematisch kontrollierbare und nicht-triviale, d.h. wechselwirkende Modelle im $1 + 3$ -dimensionalen Minkowskiraum zu formulieren. Bislang führte dieses Unterfangen nur im Fall von integrierbaren oder von konform-invarianten Modellen in $1 + 1$ -dimensionaler Raumzeit (*niederdimensionaler Fall*) zum Erfolg. Die vorliegende Arbeit stellt einen ersten Schritt dar in einem auf Ideen Bert Schroers [2, 3, 4] zurückgehenden Ansatz, im Fall der letzteren erfolgreiche Methoden in den höherdimensionalen Fall zu übertragen.

0.1 Ausgangspunkt: Die “fundamentale Struktur” der $1 + 1$ -dimensionalen konformen Quantenfeldtheorie

0.1.1 Chirale Faktorisierung und Zopfgruppen-VR

Als fundamentale Struktur in den lösbaren konformen Modellen im niederdimensionalen Fall haben sich *quadratische Vertauschungsrelationen chiraler Austauschkomponenten* erwiesen, aus denen *zelluläre Darstellungen* der Zopfgruppe aufgebaut werden können. Wir wollen dies etwas näher erläutern.

Belavin, Polyakov und Zamolodchikov (BPZ) gelang es Mitte der achtziger Jahre, konforme Quantenfeldtheorien mit endlich vielen primären Feldern im niederdimensionalen Fall zu klassifizieren und einen Algorithmus anzugeben, um die n -Punktfunktionen prinzipiell als Lösungen einer endlichen Anzahl bestimmter (auf Ward-Identitäten der euklidischen konformen Invarianz aufbauender) Differentialgleichungen zu berechnen, die jeweils nur von einer Lichtkegelkoordinate abhängen [5]. Die n -Punktfunktion eines konformen Feldes Φ in $1 + 1$ Dimensionen hat die Form¹

$$\langle \Phi(x_n, t_n) \cdots \Phi(x_1, t_1) \rangle = \sum_{i=1}^r F_+^{(i)}(x^+) F_-^{(i)}(x^-) \quad (1)$$

¹Die Aussagen von [5] gelten wie gesagt für endlich viele verschiedene primäre Felder; wir konzentrieren uns der Übersichtlichkeit halber aber auf die Vertauschungsrelationen zwischen identischen Feldern.

mit $x^\pm := (x_n \pm t_n, \dots, x_1 \pm t_1)$; die *konformen Blöcke* $F_\pm^{(i)}(x^\pm)$ sind Lösungen der angesprochenen Differentialgleichungen.

Es stellt sich die Frage, wie diese chirale Struktur zusammenpaßt mit der Lokalität der Quantenfelder im Minkowskiraum. Ausgehend von Lehren aus [6, 7] fanden Rehren und Schroer darauf eine Antwort [8, 9, 10]:

Die zweidimensionalen Felder lassen sich zerlegen in Anteile, die zwischen den Sektoren der chiralen Observablen interpolieren. Diese Zerlegung ist eine Verfeinerung der Spektralzerlegung bzgl. des Zentrums der Überdeckenden der konformen Gruppe². Diese Anteile wiederum faktorisieren in chirale *Austauschkomponenten*: Bezeichnen wir die Sektoren der chiralen Observablen mit \mathcal{H}_α^\pm , so ist

$$\Phi(x, t) = \sum_{\substack{\alpha_+, \beta_+ \\ \alpha_-, \beta_-}} \Phi_{\beta_+, \alpha_+}^+(x^+) \otimes \Phi_{\beta_-, \alpha_-}^-(x^-) \quad (2)$$

mit

$$\Phi_{\beta_+, \alpha_+}^+(x^+) : \mathcal{H}_{\alpha_+}^+ \longrightarrow \mathcal{H}_{\beta_+}^+,$$

und jeder konforme Block ist ein Vakuumerwartungswert einer Kette solcher Austauschkomponenten,

$$F_+^{(i)}(x^+) = \left\langle \Phi_{0, \alpha^{(n-1)}}^+(x_n^+) \Phi_{\alpha^{(n-1)}, \alpha^{(n-2)}}^+(x_{n-1}^+) \cdots \Phi_{\alpha^{(2)}, \alpha^{(1)}}^+(x_2^+) \Phi_{\alpha^{(1)}, 0}^+(x_1^+) \right\rangle$$

und entsprechend für den anderen Lichtkegel. Jede dieser Ketten definiert einen *Pfad* durch die Menge der Sektoren der chiralen Observablen. Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber nur noch den Lichtkegel x_+ und unterdrücken den Index bzw. Superscript +; entsprechende Gleichungen gelten jeweils auch für den anderen Lichtkegel.

Aus den Eigenschaften der $F^{(i)}$ in den in [5] betrachteten Modellen folgt für $x_{i+1} > x_i$ ($\alpha = (\alpha^{(n-1)}, \dots, \alpha^{(1)})$, α' entsprechend)

$$\begin{aligned} & \left\langle \Phi_{0, \alpha^{(n-1)}}(x_n) \cdots \Phi_{\alpha^{(i+1)}, \alpha^{(i)}}(x_i) \Phi_{\alpha^{(i)}, \alpha^{(i-1)}}(x_{i+1}) \cdots \Phi_{\alpha^{(1)}, 0}(x_1) \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha'} (D_i)_{\alpha, \alpha'} \cdot \left\langle \Phi_{0, \alpha'^{(n-1)}}(x_n) \cdots \Phi_{\alpha'^{(i+1)}, \alpha'^{(i)}}(x_{i+1}) \Phi_{\alpha'^{(i)}, \alpha'^{(i-1)}}(x_i) \cdots \Phi_{\alpha'^{(1)}, 0}(x_1) \right\rangle \quad (3) \end{aligned}$$

mit

$$(D_i)_{\alpha, \alpha'} := \delta_{\alpha^{(n-1)}, \alpha'^{(n-1)}} \cdots \delta_{\alpha^{(i+1)}, \alpha'^{(i+1)}} \cdot R_{\alpha^{(i)}, \alpha'^{(i)}}^{(\alpha^{(i+1)}, \alpha^{(i-1)})} \cdot \delta_{\alpha^{(i-1)}, \alpha'^{(i-1)}} \cdots \delta_{\alpha^{(1)}, \alpha'^{(1)}} \quad (4)$$

bzw. für $x_{i+1} < x_i$

$$\begin{aligned} & \left\langle \Phi_{0, \alpha^{(n-1)}}(x_n) \cdots \Phi_{\alpha^{(i+1)}, \alpha^{(i)}}(x_i) \Phi_{\alpha^{(i)}, \alpha^{(i-1)}}(x_{i+1}) \cdots \Phi_{\alpha^{(1)}, 0}(x_1) \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha'} (D_i^{(-1)})_{\alpha, \alpha'} \cdot \left\langle \Phi_{0, \alpha'^{(n-1)}}(x_n) \cdots \Phi_{\alpha'^{(i+1)}, \alpha'^{(i)}}(x_{i+1}) \Phi_{\alpha'^{(i)}, \alpha'^{(i-1)}}(x_i) \cdots \Phi_{\alpha'^{(1)}, 0}(x_1) \right\rangle. \quad (5) \end{aligned}$$

Die Lokalität der unzerlegten Quantenfelder ist nun gleichbedeutend mit Constraints an die R -Matrizen in (4): Damit die unzerlegten Felder $\Phi(x, t)$ (s. (2)) lokal sind, müssen die Matrizen der Vertauschungen der beiden Lichtkegelkomponenten sich geeignet kompensieren;

²Die ersten Veröffentlichungen zu diesem Thema arbeiten nur mit der Spektralzerlegung; später zeigte sich aber, daß diese i.a. zu grob ist.

im Fall eines hermiteschen, skalaren Feldes Φ beispielsweise³ ist dies äquivalent zur Unitarität der R .

Aus (3) und (4) folgert man die *quadratische Vertauschungsrelation* (VR)

$$\Phi_{\gamma,\beta}(x)\Phi_{\beta,\alpha}(y) = \sum_{\beta'} R_{\beta,\beta'}^{(\gamma,\alpha)} \cdot \Phi_{\gamma,\beta'}(y)\Phi_{\beta',\alpha}(x), \quad y > x. \quad (6)$$

In diesem Sinn sind die *Austauschmatrizen* D_i aufgebaut aus den R -Matrizen quadratischer VR der Austauschkomponenten. Darstellungen dieser Art nennen wir im folgenden *zellulär* (s.a. Definition 1.2.4).

Die aus den R -Matrizen aufgebauten Austauschmatrizen $D_i, i = 1, \dots, n - 1$ bilden eine Darstellung von *Artins Zopfgruppe* [11]: Die Reihenfolge dreier benachbarter chiraler Koordinaten kann durch $D_i D_{i+1} D_i$ oder $D_{i+1} D_i D_{i+1}$ umgekehrt werden; für die Eindeutigkeit dieser Operation ist es notwendig und hinreichend, daß

$$D_i D_{i+1} D_i = D_{i+1} D_i D_{i+1} \quad (7)$$

gilt. Desweiteren sieht man leicht, daß

$$D_i D_j = D_j D_i \quad \text{falls } |i - j| \geq 2. \quad (8)$$

Die Austauschalgebra (6) leistet aber noch wesentlich mehr, als nur die chirale Struktur (1) mit der Lokalität zu “versöhnen”. In der Tat erweist sie sich als wichtiges Instrument zur Bestimmung von n -Punktfunktionen in konformen niederdimensionalen Quantenfeldtheorien; während sich die aus den Ward-Identitäten gewonnenen Differentialgleichungen für $n > 4$ i.a. nicht mehr lösen lassen, legt eine gegebene zelluläre Darstellung der Zopfgruppe im besten Fall die Korrelationsfunktionen der zugehörigen Theorie fest [8]. Aber auch schon die abstrakten Relationen (7) und (8) zusammen mit den sich aus der Lokalität der unzerlegten Felder ergebenden Constraints stellen Restriktionen an die möglichen aus R -Matrizen gebildeten Darstellungen und damit an die möglichen Skalendimensionen und Fusionsregeln [9, 10]. In diesem Sinn gilt, “the exchange algebra [(6)] is the most fundamental structure inherent in two-dimensional conformal quantum field theory” [9].

Die in der vorliegenden Arbeit aufgegriffene Idee Schroers besteht im wesentlichen darin, ein Pendant dieser fundamentalen Struktur in höherdimensionalen konformen Quantenfeldtheorien zu etablieren. Bevor wir dies näher erläutern, machen wir noch eine Bemerkung zur “Herkunft” der zellulären Zopfgruppendarstellungen.

0.1.2 Darstellungen der Zopfgruppe in der DHR-Theorie

Der Ansatz von BPZ, der den Startpunkt der obigen Diskussion bildet, baut auf bestimmten (Ladungs-, Virasoro-, W-) Algebren der konformen chiralen QFT und ihren positive-Energie-Darstellungen auf und ist somit auf die niederdimensionale Quantenfeldtheorie beschränkt. Die Struktur der quadratischen VR interpolierender Felder und der daraus aufgebauten zellulären Zopfgruppendarstellungen aber erweist sich als ein Sonderfall der DHR-Theorie der Statistik [12, 13], was eine Verallgemeinerung zum höherdimensionalen Fall hin möglich erscheinen läßt.

³Hier stimmen $F_+^{(i)}(x_+)$ und $F_-^{(i)}(x_-)$ in der *geordneten Region* $x_{\pm}^{(i+1)} > x_{\pm}^{(i)}$ ihrer Argumente überein, “leben” aber außerhalb der geordneten Region aufgrund unterschiedlicher $i\varepsilon$ -Vorschriften auf verschiedenen Riemann-Flächen; daher ist in diesem einfachsten Fall $R^{(+)} = R^{(-)} \equiv R$.

Im höherdimensionalen Fall liefert die DHR-Theorie [14, 15, 16, 17] eine Beschreibung der Superauswahlsektoren der Theorie und eine intrinsische Definition der *Statistik* eines Sektors — mit jedem Sektor ist eine (bis auf Äquivalenz) eindeutige Darstellung der Permutationsgruppe \mathcal{P}_n assoziiert. Fredenhagen, Rehren und Schroer zeigen, daß sich die DHR-Theorie prinzipiell auch auf den niederdimensionalen Fall anwenden läßt; nur ist die Permutationsgruppe in diesem Fall durch die Zopfgruppe \mathcal{B}_n zu ersetzen [12, 13], s.a. z.B. [18]. Das Doplicher-Roberts-Theorem [19, 20] gilt dann nicht mehr.

Die *Statistikoperatoren* der DHR-Theorie liefern eine Darstellung der Zopfgruppe oder im höherdimensionalen Fall der Permutationsgruppe auf endlichdimensionalen Intertwinerräumen. Eine natürliche Basis dieser Räume ist durch die *Pfade* durch die Menge der Sektoren indiziert; die Matrixelemente der Darsteller sind wie in (4) durch R -Matrizen gebildet, die tatsächlich als Koeffizienten einer Austauschalgebra (6) gedeutet werden dürfen. Wir stellen diese Ergebnisse in Kapitel 1 zusammen. In diesem Sinn sind die Darstellungsräume der Zopfgruppe im chiralen Fall Pfadräume einer gezopferten DHR-Kategorie [12, 13].

Die niederdimensionalen Felder lassen sich nun entsprechend der so gefundenen Sektorstruktur durch die Sektor-Projektoren der chiralen Observablen-Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^+ \otimes \mathfrak{A}^-$ zerlegen; da die Sektoren infolge des Spin-Statistik-Theorems das Zentrum der Überdeckenden der konformen Gruppe diagonalisieren, ist diese Zerlegung eine Verfeinerung der Zerlegung bzgl. dieses Zentrums [6, 7]. Die zerlegten Felder kommutieren gemäß einem Tensorprodukt zweier Zopfgruppen $\mathcal{B}_n^+ \otimes \mathcal{B}_n^-$ so, daß die unzerlegten Felder bei raumartigen Abständen gerade kommutieren [21].

Die DHR-Theorie liefert somit eine abstrakte Begründung⁴ der zunächst empirisch gefundenen Zerlegung der Felder in chirale Austauschkomponenten mit quadratischen VR, die auf zelluläre Zopfgruppendarstellungen führen.

0.2 Erwartungen an den höherdimensionalen Fall

Im höherdimensionalen (insbesondere im 1+3-dimensionalen) Fall werden wir natürlich keine chirale Faktorisierung erwarten können. Was uns aber in konformen Theorien erhalten bleibt, ist die spektrale Zerlegung der Felder unter dem Zentrum der Überdeckenden der konformen Gruppe [6, 7].

Desweiteren erfüllen die konforme Zwei- und Dreipunktfunktion zeit- und raumartige Vertauschungsrelationen [2, 3, 4]; so gilt etwa für die konforme Zweipunktfunktion

$$\langle F(x)F(y)^* \rangle = e^{2\pi i \delta_F} \langle F(y)^* F(x) \rangle, \quad x > y,$$

wobei δ_F die (anomale) Skalendimension des Feldes F ist und $x > y$ zu verstehen ist als “ x liegt in der Zukunft von y ”.

Ausgehend von diesen Beobachtungen stellt Schroer die folgende Hypothese auf [2, 3, 4]:

Hypothese 0.2.1

Es gibt eine Zerlegung der konformen Felder

$$F(x) = \sum_{\beta, \alpha} F_{\beta, \alpha}(x), \quad F_{\beta, \alpha}(x) := P_\beta F(x) P_\alpha,$$

⁴Um Mißverständnissen vorzubeugen, weisen wir darauf hin, daß die DHR-Theorie älter ist als die chiralen quadratischen VR; diese sind aber erst empirisch gefunden und dann abstrakt mittels der DHR-Theorie begründet worden.

wobei P_α, P_β orthogonale Projektoren sind, so daß die Austauschkomponenten $F_{\beta,\alpha}(x)$ Teil einer Austauschalgebra

$$F_{\gamma,\beta}(x)G_{\beta,\alpha}(y) = \sum_{\beta'} R_{\beta,\beta'}^{(\gamma,\alpha)}(x,y) \cdot G_{\gamma,\beta'}(y)F_{\beta',\alpha}(x), \quad (9)$$

für nichtlichtartige Abstände von x und y , $(x-y)^2 \neq 0$, sind, die ggf. zwischen einer größeren Menge von Feldern gilt als denen, die in der Zerlegung von F vorkommen. Für die beschränkten Operatoren der lokalen Algebren lautet (9)

$$F_{\gamma,\beta}G_{\beta,\alpha} = \sum_{\beta'} R_{\beta,\beta'}^{(\gamma,\alpha)}(\text{supp } F, \text{supp } G) \cdot G_{\gamma,\beta'}F_{\beta',\alpha},$$

wobei $\text{supp } F$ das Lokalisierungsgebiet von F bezeichnet und $\text{supp } F, \text{supp } G$ entweder vollständig zeit- oder vollständig raumartig zueinander sind.

Auf Ketten einer gegebenen Länge n dieser Austauschkomponenten operieren Austauschmatrizen $D_i(x_i, x_{i+1})$, die analog zu (4) aus den R -Matrizen der quadratischen VR (9) aufgebaut sind. Da die zeitartige Region in $1 + 3$ Dimensionen dieselbe Topologie hat wie ein Lichtkegel in einer chiralen Theorie (bzgl. eines gegebenen Punktes zerfällt die zeitartige Region in zwei Zusammenhangskomponenten, Zukunft und Vergangenheit), müssen diese Austauschmatrizen für zeitartige Abstände⁵ ($(x_{i+1} - x_i)^2 > 0$) wieder Darstellungen der Zopfgruppe \mathcal{B}_n sein. Gegenüber dem chiralen Fall treten aber neue Constraints an die möglichen Zopfgruppendarstellungen auf: Für raumartige Abstände ($(x_{i+1} - x_i)^2 < 0$) bilden die $D_i(x_i, x_{i+1})$ infolge der Topologie der raumartigen Region bzgl. eines gegebenen Punktes im höherdimensionalen Minkowskiraum eine Darstellung der Permutationsgruppe \mathcal{P}_n ; die Zopf- und die Permutationsgruppendarstellung müssen *kompatibel* sein, d.h. Gleichungen der Form (7) und (8) müssen für beliebige nichtlichtartige relative Abstände der $x_i, i = 1, \dots, n$ erfüllt sein.

Vorbehaltlich der noch ausstehenden Rechtfertigung von Hypothese 0.2.1 besteht ein erster Schritt zur Konstruktion höherdimensionaler Modelle in Analogie zu den im niederdimensionalen Fall erfolgreichen Methoden darin, die Kompatibilität der zeitartigen (Zopf-) mit der raumartigen (Permutations-) Statistik zu untersuchen. Unter der Annahme *quadratischer* VR, d.h. VR der Form (9), müssen wir als Pendant der Zopfgruppe im chiralen Fall die *Vertauschungsgruppe* \mathcal{BP}_n abstrahieren, die von den Austauschmatrizen dargestellt wird; diese wird die Permutations- und die Zopfgruppe als Untergruppe enthalten, die Kompatibilitätsforderung führt zu Restriktionen an die "gemischten" Produkte von Erzeugern der beiden Untergruppen. Diese Gruppe ist in den VR *zellulär* zu realisieren, d.h. die Darstellungsmatrizen der \mathcal{BP}_n sind aus den R -Matrizen der quadratischen VR (9) analog zu (3), (4) und (6) aufzubauen. Dieser erste Schritt ist in der vorliegenden Arbeit ausgearbeitet, s.a. den folgenden Abschnitt.

In einem weiteren Schritt wäre zu überprüfen, wie sehr bereits die abstrakten Relationen der \mathcal{BP}_n wie im chiralen Fall *a priori* Restriktionen an die Skalendimensionen und Fusionsregeln einer Theorie stellen. Die Situation in chiralen Theorien gibt Anlaß zu noch weitergehender Hoffnung: Im günstigsten Fall könnte die Wahl einer Darstellung bereits die n -Punktfunktionen der Theorie fixieren; das auszuarbeiten wäre ein dritter Schritt. Die erfolgreiche Ausarbeitung aller drei Schritte rechtfertigte dann die Hoffnung Schroers "In this

⁵Wir verwenden für den $1 + (d-1)$ -dimensionalen Minkowskiraum die Metrik $g = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbf{1}_{d-1} \end{pmatrix}$.

way I expect 4-dimensional conformal fields to be the first nontrivial nonpertubatively controllable and explicitly constructed QFT in physical spacetime" [4].

0.3 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit dient der Ausarbeitung des ersten Schrittes des oben skizzierten Programms, d.h. der Abstraktion der Gruppe \mathcal{BP}_n und der Verifikation der Hypothese 0.2.1 im Spezialfall des konformen verallgemeinerten freien Feldes im höherdimensionalen Fall. Sie zerfällt (abgesehen von dieser Einführung, dem Schlußkapitel 10 und den Anhängen) in drei große Teile.

In Teil I geben wir einige "Hintergrundinformationen": In Kapitel 1 skizzieren wir, wie die DHR-Theorie via Statistikoperatoren auf zelluläre Darstellungen der Zopfgruppe (bzw. im höherdimensionalen Fall der Permutationsgruppe) in der Basis der Pfadintertwiner führt; im Permutationsfall können die R -Matrizen der quadratischen VR ohne Verwendung der DHR-Endomorphismen und Intertwiner aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten einer eindeutig bestimmten kompakten Gruppe (*Eichgruppe*) berechnet werden. Da sich die "fundamentale Struktur" der quadratischen VR (6) bzw. der zellulären Zopfgruppendarstellungen in konformen chiralen Theorien als ein Sonderfall der DHR-Theorie erweist, erscheint es lohnend, sich diesen Mechanismus näher anzusehen. Es liegt nahe, zu vermuten, daß eine (noch ausstehende) abstrakte Verifikation von Hypothese 0.2.1 zumindest Ähnlichkeiten mit dieser im Fall der zellulären Zopf- bzw. Permutationsgruppendarstellungen erfolgreichen Vorgehensweise zeigt. Tatsächlich gelingt uns in Kapitel 7 die Verifikation von Hypothese 0.2.1, d.h. die Angabe von Austauschkomponenten mit zeit- und raumartigen quadratischen VR, für das konkrete Beispiel des konformen verallgemeinerten freien Feldes im höherdimensionalen Fall in einer gewissen Analogie, allerdings auch mit großen Unterschieden zu Abschnitt 1.3.

Außerdem führen wir in diesem Teil der Arbeit zur Vorbereitung von Kapitel 5 den Begriff einer *symmetrischen* oder *gezopfsten tensoriellen Kategorie* ein, der eine natürliche Sprache und mittels einer graphischen Notation ein geometrisches Verständnis von Vertauschungsrelationen bereithält (Kapitel 2).

In Teil II beschäftigen wir uns mit der von den Austauschmatrizen $D_i(x_i, x_{i+1})$ für zeit- und raumartige Abstände dargestellten Gruppe \mathcal{BP}_n . Dabei dient Kapitel 3 der eigentlichen Ausarbeitung des ersten Schrittes des oben skizzierten Programms: Ausgehend von Hypothese 0.2.1, d.h. insbesondere unter der Annahme quadratischer VR untersuchen wir die Kompatibilität der zeit- und der raumartigen Statistik und abstrahieren die Vertauschungsgruppe \mathcal{BP}_n .

Die \mathcal{BP}_n läßt sich sowohl aus der Permutations- als auch aus der Zopfgruppe durch das Hinzufügen *eines* weiteren Erzeugers generieren (Kapitel 4). Dies liefert ein Verfahren, geeignete Darstellungen einer dieser beiden Untergruppen zu Darstellungen der \mathcal{BP}_n zu erweitern — oder zu zeigen, daß sich eine Darstellung der Zopfgruppe nicht zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern läßt (Darstellungen der Permutationsgruppe lassen sich immer trivial erweitern, s. Abschnitt 4.1). Wir illustrieren dieses Verfahren in Kapitel 5, indem wir es auf eine konkrete Darstellung der Zopfgruppe anwenden; es zeigt sich, daß sich diese von einer DHR-Kategorie erzeugte Darstellung nicht zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern läßt.

In Teil III schließlich verifizieren wir die Hypothese 0.2.1 für den Fall des konformen verallgemeinerten freien Feldes im höherdimensionalen Fall. Die $2n$ -Punktfunktion dieses Feldes zerfällt in $(2n - 1)!!$ Produkte von Zweipunktfunktionen, und diese bilden die *natürliche Basis* einer *natürlichen Darstellung* der \mathcal{BP}_{2n} (Kapitel 6). In der natürlichen Basis ist die-

se Darstellung allerdings nicht zellulär. In Kapitel 7 erweitern wir den Fockraum des konformen verallgemeinerten freien Feldes und identifizieren auf diesem größeren Hilbertraum Austauschkomponenten, die zwischen gewissen Unterräumen interpolieren und in zeit- und raumartiger Richtung quadratische VR erfüllen. Die Erzeuger und Vernichter des konformen verallgemeinerten freien Feldes und damit auch das Feld selbst sind Linearkombinationen bestimmter Austauschkomponenten. Wegen der quadratischen VR ist klar, daß auf Ketten der Länge $2n$ dieser Austauschkomponenten die \mathcal{BP}_{2n} zellulär dargestellt ist; diese zelluläre Darstellung stimmt mit der natürlichen Darstellung aus Kapitel 6 bis auf Äquivalenz überein (Kapitel 8).

Bei dem hier zugrundeliegenden Pfadraum handelt es sich nicht um eine Tensor-kategorie und bei den genannten Unterräumen nicht um Sektoren im Sinne der DHR-Theorie einer geeigneten Observablenalgebra. Es ist zum einen nicht klar, bzgl. welcher “Observablen” eine DHR-artige Realisierung (Endomorphismen und zugehörige Intertwiner) zu erwarten wäre, zum anderen wird die in der DHR-Theorie wichtige Forderung nach Haag-Dualität und daraus abgeleitet nach *Natürlichkeit* der Statistikoperatoren i.a. nicht in raum- und zeitartiger Richtung aufrecht erhalten werden können (vgl. Abschnitt 2.3).

Dennoch zeigt der Pfadraum gewisse Analogien zum gruppentheoretischen Pfadraum bei Anwesenheit einer Eichsymmetrie (s. Abschnitt 1.3); an die Stelle der Eichgruppe tritt die Gesamtheit der Permutationsgruppen \mathcal{P}_N , an die Stelle der Tensorierung mit einer Elementareichladung und anschließender Ausreduktion tritt die Induktion zwischen Darstellungen von \mathcal{P}_N und \mathcal{P}_{N+1} , $N \in \mathbb{N}_0$, bzw. die Restriktion zwischen Darstellungen von \mathcal{P}_N und \mathcal{P}_{N-1} , $N \in \mathbb{N}$; anstelle der Clebsch-Gordan-Koeffizienten bestimmen im wesentlichen die Komponenten der *Induktionsmatrizen* zwischen Darstellungen der \mathcal{P}_N und der \mathcal{P}_{N+1} die *R*-Matrizen der quadratischen VR der Austauschkomponenten (Kapitel 9).

In Kapitel 10 fassen wir unsere Ergebnisse noch einmal zusammen und weisen auf offene Fragen hin; insbesondere werden im Rahmen dieser Arbeit die Schritte zwei und drei des skizzierten Programms nicht untersucht.

Teil I

Hintergrund

Kapitel 1

Darstellungen der Zopfgruppe in der DHR-Theorie

Wir skizzieren, wie die Statistikoperatoren der DHR-Theorie eine Darstellung der Zopfgruppe oder im höherdimensionalen Fall der Permutationsgruppe auf endlichdimensionalen Intertwinerräumen liefern; eine natürliche Basis dieser Räume ist durch Pfade durch die Menge der Sektoren indiziert, und die Matrixelemente der Darsteller sind wie in (4) aus R -Matrizen gebildet, die tatsächlich als Koeffizienten einer Austauschalgebra interpolierender Felder gedeutet werden dürfen. Im Permutationsfall gilt außerdem das Doplicher-Roberts-Theorem: Die Sektoren lassen sich auffassen als irreduzible Unterdarstellungen der Observablenalgebra in der Vakuumdarstellung einer Feldalgebra, wobei die Observablen die Fixpunkte der Feldalgebra unter einer eindeutig bestimmten kompakten Gruppe \mathcal{G} sind. Die Sektoren korrespondieren mit den Darstellungen von \mathcal{G} , und die R -Matrizen lassen sich allein aus dem Kenntnis der Clebsch-Gordan-Koeffizienten von \mathcal{G} berechnen. Unsere Untersuchungen in Kapitel 7 werden sich in (etwas entfernter) Analogie zu dieser Vorgehensweise bewegen.

1.1 Präliminarien aus der DHR-Theorie

Den Rahmen der DHR-Theorie [14, 15, 16, 17] bildet der algebraische Ansatz zur Quantenfeldtheorie nach Haag und Kastler [22]. In diesem Ansatz wird jeder offenen Menge \mathcal{O} mit kompaktem Abschluß im Minkowskiraum \mathbb{M} eine C^* -Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ mit Einselement zugeordnet. Es gelten Isotonie,

$$\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \implies \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1),$$

wobei das Einselement in $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$ mit dem in $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ übereinstimmt, und Lokalität,

$$\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}'_1 \implies \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_1)',$$

wobei \mathcal{O}'_1 das kausale Komplement der Raumzeit-Region \mathcal{O}_1 und $\mathfrak{A}(\mathcal{O}'_1)'$ die Kommutante der Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ bezogen auf die Algebra der *quasilokalen Observablen*

$$\mathfrak{A} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})}^{\|\cdot\|}$$

bezeichnen. \mathfrak{A} enthält alle relevanten Observablen der Theorie. Die Poincarégruppe \mathfrak{P} ist auf \mathfrak{A} durch eine Gruppe von Automorphismen dargestellt,

$$\mathfrak{P} \ni g \mapsto \alpha_g \in \text{Aut } \mathfrak{A}, \quad \alpha_g \mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(g\mathcal{O}).$$

\mathfrak{A} besitze mindestens eine treue irreduzible Darstellung.

Dieses abstrakte Algebren-Netz wird als grundlegend für die Theorie angenommen.

Unter einem *Zustand* verstehen wir im folgenden eine positive normierte Linearform auf \mathfrak{A} [23]. Eine positive Linearform ω über einer C^* -Algebra mit Eins ist reell, d.h. $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$, $A \in \mathfrak{A}$ (s. z.B. [24]), und für selbstadjungierte Elemente von \mathfrak{A} (*Observable*) folgt $\omega(A) \in \mathbb{R}$; somit läßt sich ein Zustand für die Observablen als ein Erwartungswertfunktional interpretieren. Jeder Zustand ω führt über die *GNS-Konstruktion* auf eine Darstellung π_ω von \mathfrak{A} auf einem Hilbertraum \mathcal{H}_ω [25, 26]. \mathcal{H}_ω enthält einen Vektor Ω , der zyklisch ist für $\pi_\omega(\mathfrak{A})$, d.h.

$$\overline{\pi_\omega(\mathfrak{A})\Omega} = \mathcal{H}_\omega.$$

Dies liefert eine Quantenfeldtheorie im Sinne von beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum.

Wir nehmen im folgenden an, daß es einen eindeutigen unter Poincarétransformationen invarianten Zustand ω_0 gebe, das *Vakuum*¹; die zugehörige GNS-Darstellung π_0 sei irreduzibel und treu auf dem *Vakuumbilbertraum* \mathcal{H}_0 . Da ω_0 unter den Poincarétransformationen invariant ist, $\omega_0 \circ \alpha_g = \omega_0$, $g \in \mathfrak{P}$, induziert die Darstellung von \mathfrak{P} durch Automorphismen auf \mathfrak{A} eine unitäre Darstellung von \mathfrak{P} auf \mathcal{H}_0 ,

$$\pi_0(\alpha_g(A)) = U(g)\pi_0(A)U(g)^*$$

(vgl. [23], III.3.2).

Wir betrachten ferner nur Darstellungen *positiver Energie*, d.h. solche, in denen die Energie-Impuls-Operatoren (die Erzeuger der Translationen) unitär implementiert sind und ihr Spektrum im Vorwärtslichtkegel haben.

Die DHR-Theorie beschreibt geeignete Darstellungen der Algebra \mathfrak{A} durch lokalisierte Endomorphismen ϱ ; die Superauswahlsektoren werden verstanden als Äquivalenzklassen der irreduziblen geeigneten Darstellungen von \mathfrak{A} . Eine zentrale Rolle spielen die *Statistikoperatoren* $\varepsilon(\varrho, \varrho')$, die VR der sektorerzeugenden (“geladenen”) nichtobservablen Felder kodieren. Wir geben keinen vollständigen Überblick über die DHR-Theorie, sondern tragen nur einige für das Folgende wichtige Fakten zusammen, um den Ausgangspunkt für die Pfadraumdarstellungen der Zopfgruppe in den folgenden Abschnitten zu klären und um die verwendeten Begriffe und Notationen einzuführen.

1.1.1 Voraussetzungen

Wir betrachten nur solche Darstellungen π des Algebrennetzes $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$, die im kausalen Komplement \mathcal{O}' eines geeigneten Doppelkegels \mathcal{O} der Vakuumdarstellung π_0 unitär äquivalent sind,

$$\pi|_{\mathfrak{A}(\mathcal{O}')} \cong \pi_0|_{\mathfrak{A}(\mathcal{O}')}.$$
 (1.1)

Dieses Kriterium ist zu restriktiv, um Theorien mit langreichweitigen Ladungen wie etwa die Quantenelektrodynamik zu betrachten [16]. Eine elektrische Ladung beispielsweise führt via Gaußsches Gesetz auf einen konstanten Fluß durch eine beliebige, die Ladung umschließende Sphäre und ist damit auch in beliebiger Entfernung vom Vakuum zu unterscheiden. Trotzdem gibt die DHR-Theorie die wesentlichen Strukturen wieder. Modifikationen für weniger restriktive Kriterien werden beispielsweise in [28] diskutiert (Lokalisierung von Ladungen in raumartigen Kegeln).

¹Eine präzisere Definition eines Vakuumzustandes sowie eine kurze Diskussion der Existenz und der Eigenschaften von Vakuumzuständen findet sich z.B. in [23], III.3.2.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes identifizieren wir die abstrakten Algebren der Einfachheit halber mit ihren jeweiligen Vakuumdarstellungen [15],

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \equiv \pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O})).$$

Desweiteren nehmen wir an, daß für alle Doppelkegel \mathcal{O}

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$$

gilt (*Haag-Dualität*).

1.1.2 Endomorphismen

Unter der Annahme von Haag-Dualität für die Vakuumdarstellung ist das Kriterium (1.1) äquivalent dazu, daß ein in \mathcal{O} *lokalisierter Endomorphismus* $\varrho : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ existiert, so daß $\pi \cong \pi_0 \circ \varrho$ ([16], Proposition 1.2). Dabei bedeutet "lokalisiert in \mathcal{O} ", daß

$$\varrho(A) = A \quad \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}').$$

Das ist aus zwei Gründen von Interesse: Zum einen ermöglicht es, alle Äquivalenzklassen von Darstellungen, die (1.1) erfüllen, auf demselben Hilbertraum \mathcal{H}_0 zu betrachten, zum anderen induziert das Kompositionsgesetz der Morphismen eine Komposition von Darstellungen.

Die Begriffe (unitär) äquivalent und reduzibel bzw. irreduzibel verwenden wir im folgenden für die Endomorphismen ϱ so, wie für die von ihnen induzierten Darstellungen $\pi_0 \circ \varrho$. Die Klasse der zu ϱ unitär äquivalenten Endomorphismen bezeichnen wir mit $[\varrho]$.

Definition 1.1.1 $\Delta_t(\mathcal{O})$ sei die Menge aller in \mathcal{O} lokalisierten Endomorphismen ϱ , für die gilt, daß für jede aus \mathcal{O} durch Poincarétransformation hervorgegangene Region $\tilde{\mathcal{O}}$ ein zu ϱ äquivalenter Endomorphismus mit Lokalisierungsgebiet in $\tilde{\mathcal{O}}$ existiert. Die Vereinigung aller $\Delta_t(\mathcal{O})$ nennen wir Δ_t ,

$$\Delta_t := \bigcup_{\mathcal{O}} \Delta_t(\mathcal{O}).$$

Die Endomorphismen in Δ_t heißen *transportable Endomorphismen*. Die Untermenge aller irreduziblen $\varrho \in \Delta_t$ bezeichnen wir mit Δ_t^{irr} .

Eigenschaften der lokalisierten Endomorphismen finden sich in [16], Lemmata 1.2, 2.1 bis 2.5. Wir erwähnen, daß die Menge der durch Endomorphismen von Δ_t beschriebenen Darstellungen abgeschlossen ist unter direkten Summen und Unterdarstellungen.

Die Superauswahlsektoren der Theorie entsprechen in 1-zu-1-Korrespondenz den Klassen unitär äquivalenter irreduzibler Endomorphismen in Δ_t^{irr} .

1.1.3 Intertwiner

Zwei Darstellungen $\pi_0 \circ \varrho, \pi_0 \circ \sigma$ besitzen genau dann unitär äquivalente Unterdarstellungen, wenn es nichttriviale *Intertwiner*

$$\mathfrak{A} \ni T : \varrho \rightarrow \sigma, \quad T\varrho(A) = \sigma(A)T \quad \forall A \in \mathfrak{A} \quad (1.2)$$

gibt ([16], Abschnitt IV).

Die Menge aller Intertwiner $\varrho \rightarrow \sigma$ bezeichnen wir im folgenden mit $(\sigma|\varrho)$. Die Menge $(\varrho|\varrho)$ der Selbstintertwiner von ϱ bildet offenbar gerade die Kommutante der Darstellung ϱ , und mit Schurs Lemma folgt

$$\varrho \text{ irreduzibel} \iff (\varrho|\varrho) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}.$$

Für irreduzible ϱ bildet $(\sigma|\varrho)$ somit einen Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(T_2, T_1) := T_2^* T_1 \in \mathbb{C} \tag{1.3}$$

[13].

1.1.4 Statistikoperatoren

Für zwei Endomorphismen $\varrho, \sigma \in \Delta_t$ gibt es einen unitären lokalen Intertwiner $\varepsilon(\varrho, \sigma) \in (\sigma\varrho|\varrho\sigma)$, den *Statistikoperator* [16].

Die Gesamtheit der Statistikoperatoren $\varepsilon(\varrho, \sigma), \varrho, \sigma \in \Delta_t$ ist eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$\varepsilon(\sigma_1, \sigma_2) \sigma_1(T_2) T_1 = T_2 \varrho_2(T_1) \varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) \quad \forall T_i : (\sigma_i|\varrho_i) \tag{1.4}$$

(*Natürlichkeit*) und die ‘‘Anfangsbedingung’’

$$\varepsilon(\varrho, \sigma) = \mathbf{1}, \quad \sigma < \varrho, \quad \text{falls } \dim \mathbb{M} = 1 + 1 \tag{1.5}$$

wobei $\sigma < \varrho$ bedeutet, daß σ im linken raumartigen Komplement des Lokalisierungsgebietes von ϱ lokalisiert ist, bzw.

$$\varepsilon(\varrho, \sigma) = \mathbf{1}, \quad \sigma \times \varrho, \quad \text{falls } \dim \mathbb{M} \geq 1 + 2, \tag{1.6}$$

wobei $\sigma \times \varrho$ bedeutet, daß die Träger der beiden Endomorphismen raumartig getrennt sind (s. z.B. [13]).

Aus den obigen Bedingungen folgen die Gleichungen

$$\varepsilon(\varrho_1 \varrho_2, \sigma) = \varepsilon(\varrho_1, \sigma) \varrho_1(\varepsilon(\varrho_2, \sigma)) \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon(\varrho, \sigma_1 \sigma_2) = \sigma_1(\varepsilon(\varrho, \sigma_2)) \varepsilon(\varrho, \sigma_1) \tag{1.7}$$

und, da id in jeder Region des Minkowskiraumes lokalisiert ist,

$$\varepsilon(\varrho, \text{id}) = \varepsilon(\text{id}, \varrho) = \mathbf{1}.$$

Insbesondere folgt, daß die Statistikoperatoren der *Zopfrelation*

$$\varrho_3(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) \varepsilon(\varrho_1, \varrho_3) \varrho_1(\varepsilon(\varrho_2, \varrho_3)) = \varepsilon(\varrho_2, \varrho_3) \varrho_2(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_3)) \varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) \tag{1.8}$$

genügen.

Die Bedingung

$$\varepsilon(\varrho, \sigma) = \mathbf{1}, \quad \varrho < \sigma,$$

anstelle der Bedingung (1.5) führte auf die Operatoren $\varepsilon(\sigma, \varrho)^*, \varrho, \sigma \in \Delta_t$; im höherdimensionalen Fall (d.h. ohne eine intrinsische Unterscheidung zwischen dem linken und dem rechten raumartigen Komplement) folgt die *Permutationsrelation*

$$\varepsilon(\varrho, \sigma) = \varepsilon(\sigma, \varrho)^* \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon(\varrho, \sigma) \varepsilon(\sigma, \varrho) = \mathbf{1}, \quad \text{falls } \dim \mathbb{M} \geq 1 + 2.$$

Im höherdimensionalen Fall führt somit die Zuordnung

$$t_i \mapsto \varrho_\beta \varrho^{i-1}(\varepsilon(\varrho, \varrho)) \quad (1.9)$$

für ein festes $\varrho_\beta \in \Delta_t$ mit der Transposition $t_i : i \leftrightarrow i + 1$ auf eine unitäre Darstellung der Permutationsgruppe ([16], Abschnitt 4), im niederdimensionalen Fall führt

$$b_i \mapsto \varrho_\beta \varrho^{i-1}(\varepsilon(\varrho, \varrho)) \quad (1.10)$$

mit den Erzeugern b_i von Artins Zopfgruppe [11] auf eine unitäre Darstellung der Zopfgruppe. Diese Darstellung für $\varrho_\beta = \text{id}$ heißt *Statistik* des Sektors ϱ .

1.1.5 Konjugierte Endomorphismen

Für jedes $\varrho \in \Delta_t$ existiert eine *Linksinverse* ϕ_ϱ , d.h. eine normierte, positive, lineare Abbildung, so daß $\phi_\varrho(\varrho(A)B\varrho(C)) = A\phi_\varrho(B)C$, $A, B, C \in \mathfrak{A}$ ([16], Lemma 3.4).

Für jedes $\varrho \in \Delta_t^{\text{irr}}$ mit $\phi_\varrho(\varepsilon(\varrho, \varrho)) \neq 0$ (*endliche Statistik*) gibt es einen bereits von der Äquivalenzklasse $[\varrho]$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmten *konjugierten Endomorphismus* $\bar{\varrho} \in \Delta_t^{\text{irr}}$, so daß ein isometrischer Intertwiner $R \in (\bar{\varrho}\varrho|\text{id})$ existiert, d.h. $\pi_0 \circ \bar{\varrho}\varrho$ enthält die Vakuumdarstellung ([16], Theorem 3.9). ϱ ist konjugiert zu $\bar{\varrho}$.

Wir nehmen im folgenden an, daß alle betrachteten Endomorphismen endliche Statistik haben und somit ein konjugierter Endomorphismus existiert.

Eng mit den Begriffen der Linksinversen und des konjugierten Endomorphismus' verwandt sind die Begriffe der *statistischen Dimension* und der *statistischen Phase*; da sie aber für das Folgende nicht von direkter Bedeutung sind, verzichten wir an dieser Stelle darauf, sie einzuführen, und holen dies in Kapitel 2 nach.

1.2 Zelluläre Darstellung der Zopf- bzw. der Permutationsgruppe

Wir führen einen reduzierten Hilbertraum ein, der alle Sektoren mit Vielfachheit 1 enthält. Zwischen den Sektoren interpolieren Elemente eines reduzierten Feldbündels, die bei raumartigem Abstand quadratische VR erfüllen; die R -Matrizen dieser quadratischen VR sind durch die DHR-Endomorphismen und Intertwiner (insbesondere die Statistikoperatoren) bestimmt. Auf Produkten gegebener Länge von Elementen des reduzierten Feldbündels ist die Zopf- bzw. im höherdimensionalen Fall die Permutationsgruppe zellulär dargestellt.

Bemerkung 1.2.1 Die in diesem Abschnitt zusammengestellten Ergebnisse gehen zurück auf Fredenhagen, Rehren und Schroer [12, 13].

1.2.1 Reduzierter Hilbertraum

Durch die Einführung der Endomorphismen oben ergibt sich die Möglichkeit, nicht unitär äquivalente Darstellungen auf demselben Hilbertraum \mathcal{H}_0 zu beschreiben. Die Abbildung

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \frac{(\Phi, \pi_0 \circ \varrho(A)\Phi)}{(\Phi, \Phi)},$$

wobei $\Phi \in \mathcal{H}_0$ ist und (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt des \mathcal{H}_0 bezeichnet, ist ein Zustand über \mathfrak{A} . Ein solcher Zustand wird offenbar vollständig erst beschrieben durch Angabe des Vektors $\Phi \in \mathcal{H}_0$ und des Endomorphismus' ϱ .

Dieses Bild enthält einige Redundanz, da alle $\varrho' \in [\varrho]$ auf denselben Zustandsbegriff führen. Wir beseitigen diese Redundanz, indem wir aus jeder Klasse in Δ_t^{irr} einen Repräsentanten auswählen [13]; der Repräsentant von $[\text{id}]$ sei id . Die Menge dieser Repräsentanten bezeichnen wir im folgenden mit Δ_{red} .

Definition 1.2.2 [13], 3. Ein *generalisierter Zustandsvektor* ist ein Paar $\{\varrho, \Phi\}$ mit $\varrho \in \Delta_{\text{red}}$, $\Phi \in \mathcal{H}_0$. Der *reduzierte Hilbertraum* \mathcal{H}_{red} ist

$$\mathcal{H}_{\text{red}} := \bigoplus_{\varrho \in \Delta_{\text{red}}} \mathcal{H}_{\varrho},$$

wobei für $\varrho \in \Delta_{\text{red}}$

$$\mathcal{H}_{\varrho} := \{ \{\varrho, \Phi\} : \Phi \in \mathcal{H}_0 \} \equiv \{ \varrho, \mathcal{H}_0 \}$$

ist.

Zwischen zwei Elementen von Δ_{red} gibt es keine Intertwiner, da die zugehörigen Darstellungen irreduzibel und nicht äquivalent sind. Ein Produkt $\varrho_\alpha \varrho$, $\varrho_\alpha, \varrho \in \Delta_{\text{red}}$ wird aber im allgemeinen reduzibel sein in Endomorphismen $\varrho_\beta \in \Delta_{\text{red}}$ mit Vielfachheiten

$$\begin{aligned} N_{\varrho_\alpha \varrho}^{\varrho_\beta} &= N_{\varrho \varrho_\alpha}^{\varrho_\beta} = N_{\varrho_\beta \varrho}^{\varrho_\alpha} = N_{\varrho_\beta \varrho}^{\overline{\varrho_\alpha}} = N_{\varrho_\alpha \varrho}^{\overline{\varrho_\beta}}, \\ N_{\varrho_\alpha \varrho}^{\text{id}} &= N_{\varrho_\alpha \text{id}}^{\varrho} = \delta_{\varrho_\alpha \varrho}. \end{aligned}$$

Somit gibt es für gegebene $\varrho_\alpha, \varrho, \varrho_\beta \in \Delta_{\text{red}}$ einen $N_{\varrho_\alpha \varrho}^{\varrho_\beta}$ -dimensionalen Intertwinerraum $(\varrho_\alpha \varrho | \varrho_\beta)$; da ϱ_β irreduzibel ist, handelt es sich hierbei um einen Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (1.3). Für diese Intertwinerräume wählen wir Orthonormalbasen $\{T_e\}$; der Index e enthält Information über die *Quelle* $s(e) = [\varrho_\alpha]$, die *Ladung* $c(e) = [\varrho]$ und das *Ziel* $r(e) = [\varrho_\beta]$ sowie eine Nummerierung bzgl. der gewählten Basis des Intertwinerraumes $(\varrho_\alpha \varrho | \varrho_\beta)$. e heißt ein *Kanal von der Art* $(\varrho_\beta, \varrho, \varrho_\alpha)$. Für e, f mit $s(e) = s(f)$ und $c(e) = c(f)$ gilt

$$T_f^* T_e = \delta_{ef} \mathbf{1}_{r(e)} \quad \text{und} \quad \sum_{r(e)} T_e T_e^* = \mathbf{1}_{s(e)c(e)}, \quad (1.11)$$

Falls Ladung oder Quelle trivial sind, wähle $T_e = \mathbf{1}$. Ist das Ziel trivial, d.h. $\varrho = \overline{\varrho_\alpha}$, so wähle $T_e = R_\varrho = R_{\overline{\varrho_\alpha}}$.

1.2.2 Reduziertes Feldbündel

Wir führen nun das reduzierte Feldbündel ein, dessen Elemente zwischen den Sektoren $\mathcal{H}_\varrho \subset \mathcal{H}_{\text{red}}$ interpolieren.

Definition 1.2.3 [13], 3. Der lineare Operator $\{e, A\}$ mit e von der Art $(\varrho_\beta, \varrho, \varrho_\alpha)$ und $A \in \mathfrak{A}$ ist definiert durch

$$\{e, A\} : \mathcal{H}_{\varrho_\alpha} \longrightarrow \mathcal{H}_{\varrho_\beta}, \quad \{e, A\} \{ \varrho_\alpha, \Phi \} := \{ \varrho_\beta, T_e^* \varrho_\alpha(A) \Phi \}. \quad (1.12)$$

Das *reduzierte Feldbündel* ist

$$\mathcal{F}_{\text{red}} := \bigoplus_e \{e, \mathfrak{A}\}.$$

$\{e, A\}$ heißt *lokalisiert* in \mathcal{O} , $\{e, A\} \in \mathcal{F}_{\text{red}}(\mathcal{O})$, wenn $\{e, A\}$ mit allen Observablen kommutiert, die im kausalen Komplement von \mathcal{O} lokalisiert sind,

$$(\pi_0 \circ \varrho_\beta(B)) \{e, A\} = \{e, A\} (\pi_0 \circ \varrho_\alpha(B)) \quad \forall B \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}').$$

Observable sind offenbar Elemente aus \mathcal{F}_{red} mit trivialer Ladung.

Eine gewisse Willkür birgt natürlich die Auswahl der Repräsentanten ϱ aus den jeweiligen Äquivalenzklassen; wegen der unitären Äquivalenz aller Darstellungen in einer Klasse führte aber eine andere Wahl der Repräsentanten nur auf zu den ursprünglichen unitär äquivalente Größen, änderte also im wesentlichen nichts. Für eine gegebene Wahl von Δ_{red} transformieren sich die $\{e, A\}$ kontravariant unter einem Wechsel der Basis $\{T_e\}$ [13].

1.2.3 Pfade und Pfadintertwiner

Das Produkt $\{e_2, A_2\} \{e_1, A_1\}$ mit e_2 von der Art $(\varrho_\gamma, \varrho_2, \varrho_\beta)$, e_1 von der Art $(\varrho_\beta, \varrho_1, \varrho_\alpha)$ ist gegeben durch

$$(\{e_2, A_2\} \{e_1, A_1\}) \{\varrho_\alpha, \Phi\} := \{e_2, A_2\} (\{e_1, A_1\} \{\varrho_\alpha, \Phi\}) = \{\varrho_\gamma, T_{e_2}^* T_{e_1}^* \varrho_\alpha(\varrho_1(A_2)A_1)\Phi\};$$

für $s(e_2) \neq r(e_1)$ setzen wir $\{e_2, A_2\} \{e_1, A_1\} = 0$. Höhere Produkte sind entsprechend erklärt.

Ein Produkt $\{e_n, A_n\} \cdots \{e_1, A_1\}$ definiert einen *Pfad* $\eta = e_n \circ \cdots \circ e_1$, $r(e_i) = s(e_{i+1})$ durch die Menge der Sektoren (Abb. 1.1). Bei der mehrmaligen Anwendung von (1.12) entstehen

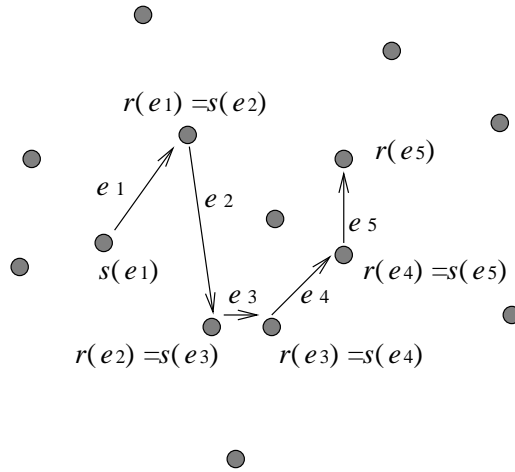


Abbildung 1.1: Der von $\{e_5, A_5\} \cdots \{e_1, A_1\}$ definierte Pfad durch die Menge der Sektoren (in der Abbildung durch Punkte symbolisiert)

Pfadintertwiner $T_\eta = T_{e_1} \circ \cdots \circ T_{e_n}$; für feste $r(e_n) = \varrho_\beta, c(e_i) = \varrho_i, s(e_1) = \varrho_\alpha$ und freie $r(e_i) = s(e_{i+1}), i = 1, \dots, n - 1$ bilden die

$$T_\eta = T_{e_1} \cdots T_{e_n} : \varrho_\beta \longrightarrow \varrho_\alpha \varrho_1 \cdots \varrho_n$$

eine Orthonormalbasis des Intertwinerraumes $(\varrho_\alpha \varrho_1 \cdots \varrho_n | \varrho_\beta)$.

1.2.4 Quadratische VR der Elemente von \mathcal{F}_{red}

Eine Basis des Intertwinerraumes $(\varrho_\alpha \varrho_1 \cdots \varrho_n | \varrho_\beta \varrho'_1 \cdots \varrho'_m)$ wird gebildet von den

$$T_{e_1} \cdots T_{e_n} T_{f_m}^* \cdots T_{f_1}^*$$

mit $s(e_1) = \varrho_\alpha, c(e_i) = \varrho_i, c(f_i) = \varrho'_i, s(f_1) = \varrho_\beta$ und freien $s(e_i) = r(e_{i-1}), r(e_n) = r(f_m), s(f_i) = r(f_{i-1})$ sonst.

Die Statistikoperatoren $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)$ besitzen somit eine eindeutige Entwicklung (Bezeichnungen wie oben, $\varrho_\beta = \varrho_\alpha, m = n = 2, \varrho'_i = \varrho_i$)

$$\varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) = \sum_{e_1 \circ e_2, f_2 \circ f_1} R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2}(+) \cdot T_{e_2} T_{e_1} T_{f_2}^* T_{f_1}^*, \quad (1.13)$$

und

$$\varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_2, \varrho_1)^*) = \sum_{e_1 \circ e_2, f_2 \circ f_1} R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2}(-) \cdot T_{e_2} T_{e_1} T_{f_2}^* T_{f_1}^*.$$

Im höherdimensionalen Fall ist $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) = \varepsilon(\varrho_2, \varrho_1)^*$, d.h. $R(+)=R(-) \equiv R$.

Für die Elemente des reduzierten Feldbündels folgen daraus leicht die quadratischen VR

$$\{e_1, A_1\} \{e_2, A_2\} = \sum_{f_2 \circ f_1} R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2}(+) \cdot \{f_2, A_2\} \{f_1, A_1\},$$

falls $\{e_1, A_1\}$ im rechten kausalen Komplement von $\{e_2, A_2\}$ lokalisiert ist, bzw.

$$\{e_1, A_1\} \{e_2, A_2\} = \sum_{f_2 \circ f_1} R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2}(-) \cdot \{f_2, A_2\} \{f_1, A_1\},$$

falls $\{e_1, A_1\}$ im linken kausalen Komplement von $\{e_2, A_2\}$ lokalisiert ist; im höherdimensionalen Fall ist entsprechend

$$\{e_1, A_1\} \{e_2, A_2\} = \sum_{f_2 \circ f_1} R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2} \cdot \{f_2, A_2\} \{f_1, A_1\}, \quad (1.14)$$

falls die Lokalisierungsgebiete von $\{e_2, A_2\}$ und $\{e_1, A_1\}$ raumartig getrennt sind.

1.2.5 Zelluläre Darstellungen

Für Produkte von n Elementen des reduzierten Feldbündels folgt aus den obigen quadratischen VR (η wie oben, $\xi = f_n \circ \dots \circ f_1$)

$$\begin{aligned} & \{e_n, A_n\} \cdots \{e_i, A_i\} \{e_{i+1}, A_{i+1}\} \cdots \{e_1, A_1\} \\ = & \sum_{\xi} (D_i^\pm)_{\eta, \xi} \cdot \{f_n, A_n\} \cdots \{f_{i+1}, A_{i+1}\} \{f_i, A_i\} \cdots \{f_1, A_1\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

mit

$$(D_i^\pm)_{\eta, \xi} := \delta_{e_n, f_n} \cdots \delta_{e_{i+2}, f_{i+2}} \cdot R_{f_{i+1} \circ f_i}^{e_i \circ e_{i+1}}(\pm) \cdot \delta_{e_{i-1}, f_{i-1}} \cdots \delta_{e_1, f_1}, \quad (1.16)$$

falls $\{e_i, A_i\}$ im rechten/linken kausalen Komplement von $\{e_{i+1}, A_{i+1}\}$ lokalisiert ist, bzw. entsprechend im höherdimensionalen Fall.

Für $c(e_i) = c(f_i) \equiv \varrho, i = 1, \dots, n$ folgt aus (1.8) und

$$R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2}(+) = T_{e_1}^* T_{e_2}^* \varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) T_{f_1} T_{f_2}$$

(s. (1.13)) und entsprechend für $R(-), R$, daß die Matrizen $D_i, i = 1, \dots, n-1$ eine Darstellung der Zopfgruppe \mathcal{B}_n bzw. im höherdimensionalen Fall der Permutationsgruppe \mathcal{P}_n bilden (s.a. (1.10) bzw. (1.9)).

Definition 1.2.4 Eine Darstellung der jeweiligen Vertauschungsgruppe ($\mathcal{B}_n, \mathcal{P}_n$ oder später \mathcal{BP}_n) auf Produkten von Feldern, die zwischen geeigneten Unterräumen interpolieren (wie beispielsweise die Elemente von \mathcal{F}_{red} in (1.15) zwischen verschiedenen Sektoren), mit Matrizen D_i , die wie in (1.16) aus den R -Matrizen quadratischer VR dieser interpolierenden Felder aufgebaut sind, heißt *zellulär*.

Bemerkung 1.2.5 Die Zellularität ist eine basisabhängige Eigenschaft, d.h. äquivalente Darstellungen müssen nicht zugleich zellulär oder nicht-zellulär sein. In Teil III etwa geben wir eine nicht-zelluläre Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} in einer bestimmten Basis an und zeigen dann, daß diese in einer anderen Basis zellulär ist.

Dieser Begriffsbildung liegt folgende Vorstellung zugrunde: Ein Produkt interpolierender Felder definiert einen Pfad durch die Menge der jeweiligen Unterräume (s.o.). Nichtverschwindende Matrixelemente gibt es wegen der speziellen Form (1.16) der Darstellungsmatrizen nur zwischen solchen Produkten, deren Pfade sich höchstens in einem Teilstück der Länge 2 unterscheiden; die beiden unterschiedlichen Teilstücke gleichen Anfangs- und Endpunktes bilden eine *Zelle* (Abb. 1.2).

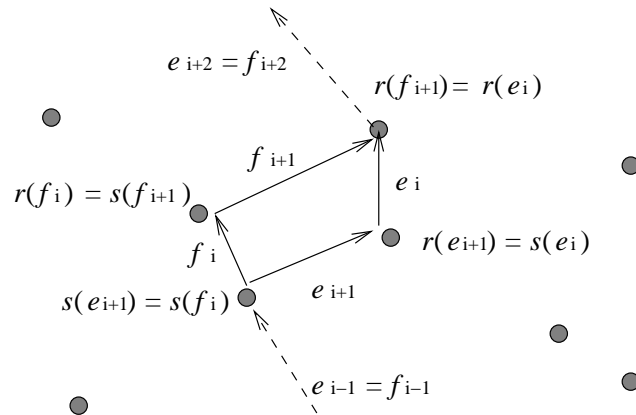


Abbildung 1.2: Die Pfade $e_n \circ \dots \circ e_i \circ e_{i+1} \circ \dots \circ e_1$ und $f_n \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i \circ \dots \circ f_1$ unterscheiden sich nur in einem Teilstück der Länge 2; die beiden unterschiedlichen Abschnitte gleichen Anfangs- und Endpunktes bilden eine *Zelle*.

1.3 Besonderheit im Permutationsfall: Das DR-Rekonstruktionstheorem und seine Folgen

Wir zeigen, wie sich im Permutationsfall die R -Matrizen auch ohne Verwendung der DHR-Intertwiner bestimmen lassen aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten einer kompakten Eichgruppe \mathcal{G} , die durch Automorphismen $\alpha_g, g \in \mathcal{G}$ auf einer Feldalgebra \mathfrak{F} dargestellt ist, so daß

$$\mathfrak{A} = \{A \in \mathfrak{F} : \alpha_g A = A \forall g \in \mathcal{G}\} \equiv \mathfrak{F}^{\mathcal{G}}.$$

Wenn wir in Kapitel 7 für das konforme verallgemeinerte freie Feld für geeignete Austauschkomponenten quadratische VR in zeit- und raumartiger Richtung angeben, aus denen Matrizen einer zellulären Darstellung der in Kapitel 3 abstrahierten Vertauschungsgruppe \mathcal{BP}_{2n}

gebildet werden, zeigt die Leitidee unserer dortigen Konstruktion gewisse (bisweilen etwas entfernte) Analogien zu der Vorgehensweise dieses Abschnittes.

1.3.1 Das DR-Rekonstruktionstheorem

In der DHR-Theorie der Superauswahlsektoren läßt sich im höherdimensionalen Fall (die Statistikoperatoren bilden eine Darstellung der Permutationsgruppe) beobachten, daß die Superauswahlsektoren sich klassifizieren lassen durch die Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen einer bis auf Konjugation eindeutig bestimmten kompakten Gruppe \mathcal{G} , der *Eichgruppe* oder der *Gruppe der inneren Symmetrien*. Ende der achtziger Jahre konnten Doplicher und Roberts die Existenz einer solchen Gruppe aus den “first principles” der Quantenfeldtheorie zeigen [19, 20].

Theorem 1.3.1

Gegeben sei eine einfache C^* -Algebra \mathfrak{A} mit Endomorphismen und Intertwinern wie oben; die Statistikoperatoren bilden eine Darstellung der Permutationsgruppe. Dann gibt es eine bis auf Konjugation eindeutig bestimmte kompakte Gruppe \mathcal{G} , die Eichgruppe, und eine Einbettung von \mathfrak{A} in eine Feldalgebra \mathfrak{F} (s.u.), auf der \mathcal{G} durch Automorphismen dargestellt ist, so daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^{\mathcal{G}}$.

Im niederdimensionalen (Zopf-) Fall gilt dieses Theorem nicht; dort bleibt zur Bestimmung der R -Matrizen nur der Weg über die DHR-Endomorphismen und Intertwiner. Für den höherdimensionalen Fall zeigen wir im folgenden, beginnend mit der Feldalgebra \mathfrak{F} und der Eichgruppe \mathcal{G} , wie die R -Matrizen sich aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten von \mathcal{G} berechnen lassen.

1.3.2 Feldalgebra und Eichgruppe

Feldalgebren sind von Doplicher und Roberts z.T. mit Haag bereits um das Jahr 1970 studiert worden. Ihre Eigenschaften sind ähnlich denen der Observablenalgebren \mathfrak{A} (s. z.B. [14, 29]); insbesondere wird jedem Doppelkegel $\mathcal{O} \in \mathbb{M}$ eine C^* -Algebra $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$ mit Einselement zugeordnet, der Abschluß der Vereinigung aller $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$ ist eine C^* -Algebra \mathfrak{F} ,

$$\mathfrak{F} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{F}(\mathcal{O})}^{\|\cdot\|}.$$

Wesentlich für uns sind vor allem zwei Unterschiede:

1. Neben der Poincarégruppe ist eine kompakte Gruppe \mathcal{G} , die *Eichgruppe* oder *Gruppe der inneren Symmetrien* durch Automorphismen $\alpha_g, g \in \mathcal{G}$ auf \mathfrak{F} dargestellt. Die Feldalgebren der Doppelkegel sind invariant unter \mathcal{G} ,

$$\alpha_g \mathfrak{F}(\mathcal{O}) = \mathfrak{F}(\mathcal{O}) \quad \forall g \in \mathcal{G}, \mathfrak{F}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{F}.$$

Die inneren Symmetrien kommutieren mit den Poincarétransformationen,

$$\alpha_g \alpha_L = \alpha_L \alpha_g \quad \forall g \in \mathcal{G}, L \in \mathfrak{P}. \quad (1.17)$$

2. Es sind auch fermionische Felder zugelassen, die bei raumartigen Abständen antikommutieren. Genauer: Es gibt ein $k \in \mathcal{G}, k^2 = \mathbf{1}$, bezüglich dessen sich jedes $F \in \mathfrak{F}$ in einen

geraden Anteil F_+ mit $k(F_+) = F_+$ und einen ungeraden Anteil F_- mit $k(F_-) = -F_-$ zerlegen läßt; sind $F_{\pm}^{(1)}$ in \mathcal{O}_1 und $F_{\pm}^{(2)}$ in \mathcal{O}_2 lokalisiert mit $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'_2$, so gilt

$$\left[F_+^{(1)}, F_+^{(2)} \right] = \left[F_-^{(1)}, F_-^{(2)} \right]_+ = \left[F_+^{(1)}, F_-^{(2)} \right] = 0.$$

Als Observable definieren wir die unter \mathcal{G} invarianten (*eichinvarianten*) Elemente der Feldalgebren,

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) := \{ A \in \mathfrak{F}(\mathcal{O}) : \alpha_g A = A \forall g \in \mathcal{G} \}.$$

Aus den Eigenschaften der Felder folgen die Lokalität und die Poincaré-Kovarianz des Observablen-Netztes. Wie üblich benutzen wir die Bezeichnung

$$\mathfrak{A} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})}^{\|\cdot\|} = \mathfrak{F}^{\mathcal{G}}.$$

Wir nehmen nun an, daß es einen eindeutigen Poincaré-invarianten Vakuumzustand ω auf \mathfrak{F} gebe, so daß die via GNS erhaltene Darstellung $\pi(\mathfrak{F})$ (die *Vakuumdarstellung der Felder*) auf dem Hilbertraum \mathcal{H} (dem *Vakuumphilbertraum der Felder*) irreduzibel sei. Wie oben existiert eine unitäre Darstellung der Poincarétransformationen $\mathcal{U}(\mathfrak{P})$ auf \mathcal{H} . Wegen (1.17) ist mit ω auch $\omega \circ \alpha_g$ für alle $g \in \mathcal{G}$ Poincaré-invariant, und aus der Eindeutigkeit von ω folgt $\omega \circ \alpha_g = \omega$; ω ist somit *a fortiori* auch *eichinvariant*, und es existiert eine unitäre Darstellung der Eichgruppe $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ auf \mathcal{H} (*ungebrochene Eichsymmetrie*).

1.3.3 Zerlegung von \mathcal{H} in Darstellungsräume von \mathfrak{A}

Schränkt man die irreduzible Darstellung π von \mathfrak{F} auf die Unteralgebra \mathfrak{A} ein, so ist sie i.a. reduzibel: Ist die Darstellung $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ nicht-trivial, so projiziert wegen der Eichinvarianz der Observablen jeder Projektor im Ring $\mathcal{U}(\mathcal{G})'' = \pi(\mathfrak{A})'$ auf einen unter $\pi(\mathfrak{A})$ invarianten Unterraum des Darstellungsraumes \mathcal{H} ; minimale Projektoren in $\mathcal{U}(\mathcal{G})''$ projizieren auf die Räume irreduzibler Unterdarstellungen von $\pi(\mathfrak{A})$.

Da \mathcal{G} kompakt ist, ist $\mathcal{U}(\mathcal{G})''$ isomorph zur direkten Summe endlichdimensionaler Matrixalgebren ([30], IV §2.5): Bezeichnen wir die Äquivalenzklassen der irreduziblen Unterdarstellungen von \mathcal{G} in \mathcal{U} mit ϱ , die Dimension einer Darstellung in der Klasse ϱ mit $d_{\varrho} < \infty$ und den Ring der komplexwertigen $d_{\varrho} \times d_{\varrho}$ -Matrizen $M_{d_{\varrho}}$ mit $\mathcal{M}_{d_{\varrho}}$, so gilt

$$\mathcal{U}(\mathcal{G})'' \cong \bigoplus_{\varrho} \mathcal{M}_{d_{\varrho}}.$$

Zwei irreduzible Unterdarstellungen von $\pi(\mathfrak{A})$ sind genau dann äquivalent, wenn die zugehörigen minimalen Projektoren in $\mathcal{U}(\mathcal{G})''$ zur selben Matrixalgebra gehören.

\mathcal{H} zerfällt somit gemäß

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{\varrho} \mathcal{H}'_{\varrho} \otimes \mathcal{H}_{\varrho} \cong \bigoplus_{\varrho} \mathbb{C}^{d_{\varrho}} \otimes \mathcal{H}_{\varrho}, \quad (1.18)$$

wobei

$$\pi(A)|_{\mathcal{H}'_{\varrho} \otimes \mathcal{H}_{\varrho}} \cong \mathbf{1}_{\mathbb{C}^{d_{\varrho}}} \otimes \pi_{\varrho}(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

und

$$U(g)|_{\mathcal{H}'_{\varrho} \otimes \mathcal{H}_{\varrho}} \cong M_{d_{\varrho}}(g) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\varrho}} \quad \forall g \in \mathcal{G}$$

Mit Hilfe der besonderen strukturellen Eigenschaften der Quantenfeldtheorie zeigt man, daß auf dem Vakuumraum der Felder \mathcal{H} alle Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von \mathcal{G} dargestellt sind ([14], Theorem 3.6). Auf $\mathcal{H}_{\text{red}} := \oplus_{\varrho} \mathcal{H}_{\varrho}$ tritt jede irreduzible Darstellung π_{ϱ} von \mathfrak{A} mit der Vielfachheit 1 auf; die Vielfachheit d_{ϱ} dieser Darstellung auf \mathcal{H} ist in der Dimension von $\mathcal{H}'_{\varrho} \cong \mathbb{C}^{d_{\varrho}}$ kodiert.

Die triviale Darstellung der Eichgruppe korrespondiert zum *Vakuumhilbertraum der Observablen*

$$\mathcal{H}_0 := \overline{\pi(\mathfrak{A})\Omega},$$

wobei Ω der zyklische Vektor in der GNS-Konstruktion zum Vakuumzustand ω ist. Die Darstellung

$$\pi_0(\mathfrak{A}) := \pi(\mathfrak{A})|_{\mathcal{H}_0}$$

nennen wir die *Vakuumdarstellung der Observablen* (jeweils im Unterschied zur Vakuumdarstellung $\pi(\mathfrak{F})$ und dem Vakuumraum \mathcal{H} der Feldalgebra \mathfrak{F}). Wie oben identifizieren wir $\mathfrak{A} \equiv \pi_0(\mathfrak{A})$.

1.3.4 Eichmultipletts

Die von den minimalen Orthogonalprojektoren in $\mathcal{U}(\mathcal{G})''$ bestimmten irreduziblen Unterdarstellungen $\pi_{\varrho}(\mathfrak{A})$ von $\pi(\mathfrak{A})$ erfüllen das DHR-Kriterium (1.1) ([14], Theorem 6.1), und die Vakuumdarstellung π_0 ist Haag-dual ([14], Theorem 4.1); das ist der Ausgangspunkt der DHR-Theorie (s.o.).

Die Superauswahlsektoren π_{ϱ} lassen sich somit durch lokalisierte Endomorphismen $\varrho \in \Delta_{\text{red}}$ beschreiben. “Neu” im Vergleich zu den vorigen Abschnitten ist, daß diese Endomorphismen durch einen Hilbertraum von Isometrien²

$$H_{\varrho} = \left\{ \Psi^{(\varrho)} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \quad : \quad \Psi^{(\varrho)} A = \varrho(A) \Psi^{(\varrho)} \quad \forall A \in \mathfrak{A} \right\}$$

implementiert werden ([29], Abschnitte 2 und 3), wobei $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ die Menge der beschränkten Operatoren auf \mathcal{H} bezeichnet. Sind die Lokalisierungsgebiete von ϱ_1, ϱ_2 raumartig getrennt, so gilt

$$\Psi^{(\varrho_1)} \Psi^{(\varrho_2)} = \pm \Psi^{(\varrho_2)} \Psi^{(\varrho_1)}, \quad \Psi^{(\varrho_i)} \in H_{\varrho_i}, \quad \varrho_1 \times \varrho_2. \quad (1.19)$$

H_{ϱ} transformiert sich unter der Darstellung $\overline{\mathcal{U}}_{\varrho}$ der Eichgruppe. Die Basisvektoren $\left\{ \Psi_i^{(\varrho)} \right\}_{i=1}^{d_{\varrho}}$ von H_{ϱ} (*Eichmultipletts*) lassen sich so wählen, daß die Beziehungen

$$\Psi_i^{(\varrho)*} \Psi_j^{(\varrho)} = \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad \sum_{i=1}^{d_{\varrho}} \Psi_i^{(\varrho)} \Psi_i^{(\varrho)*} = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mu \left(\Psi_i^{(\varrho)} \Psi_{i'}^{(\varrho')*} \right) = \frac{1}{d_{\varrho}} \delta_{\varrho\varrho'} \delta_{ii'} \mathbf{1} \quad (1.20)$$

gelten, wobei μ die Mittelung über \mathcal{G} bzgl. des invarianten Haarmaßes $d\mu$ der Eichgruppe bezeichne³. Weiter gilt

$$\varrho(A) = \sum_{i=1}^{d_{\varrho}} \Psi_i^{(\varrho)} A \Psi_i^{(\varrho)*}$$

(s.a. [20]).

²D.h. einen Unterraum H der beschränkten Operatoren auf \mathcal{H} , so daß jedes Element von H Vielfaches einer Isometrie ist.

³Ein solches Haarmaß existiert wegen der Kompaktheit von \mathcal{G} [30].

1.3.5 Intertwiner

Wir drücken die Intertwiner T_e mit e von der Art $(\beta, \varrho', \alpha)$ aus durch Elemente der Eichmultiplikation von oben. Dazu setzen wir in der Intertwinergleichung (1.2) $\varrho = \beta$ und $\sigma = \alpha\varrho'$ und erhalten (wir schreiben wieder ϱ anstelle von ϱ')

$$T_e \left(\sum_k \Psi_k^{(\beta)} A \Psi_k^{(\beta)*} \right) = \left(\sum_{i,j} \Psi_i^{(\alpha)} \Psi_j^{(\varrho)} A \Psi_j^{(\varrho)*} \Psi_i^{(\alpha)*} \right) T_e;$$

das wird offenbar gelöst von

$$T_e = \sum_{i,j,k} c_e(ij|k) \Psi_i^{(\alpha)} \Psi_j^{(\varrho)} \Psi_k^{(\beta)*}, \quad c_e(ij|k) \in \mathbb{C}. \quad (1.21)$$

Da die T_e eichinvariant sind, müssen die Koeffizienten $c_e(ij|k)$ die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der Eichgruppe \mathcal{G} sein (s. z.B. [21]).

Wir formulieren noch ein Lemma, das uns bei der Berechnung der R -Matrizen von Nutzen sein wird:

Lemma 1.3.2

Es gilt

$$\Psi_j^{(\varrho)*} \Psi_i^{(\alpha)*} = \sum_{\beta} \sum_k c_e(ij|k) \Psi_k^{(\beta)*} T_e$$

mit

$$c_e(ij|k) = d_{\beta} \mu \left(\Psi_k^{(\beta)} \Psi_j^{(\varrho)*} \Psi_i^{(\alpha)*} \right) T_e.$$

BEWEIS.

Multipliziert man (1.21) von links mit $\Psi_j^{(\varrho)*} \Psi_i^{(\alpha)*}$, so erhält man

$$\Psi_j^{(\varrho)*} \Psi_i^{(\alpha)*} T_e = \sum_k c_e(ij|k) \Psi_k^{(\beta)*}; \quad (1.22)$$

Multiplikation von rechts mit T_e^* und Summation aller dieser Gleichungen für alle in $\alpha\varrho$ enthaltenen β führt wegen der Vollständigkeit (1.11) auf die erste Gleichung des Lemmas.

Die Form der $c_e(ij|k)$ folgt aus (1.22) durch Multiplikation von links mit $\Psi_k^{(\beta)}$ und Mittelung über die Eichgruppe, wenn man (1.20) und die Eichinvarianz der Intertwiner $T_e \in \mathfrak{A}$ berücksichtigt.

□

Bemerkung 1.3.3 Die Form der $c_e(ij|k)$ ist konsistent damit, daß die Koeffizienten komplexe Zahlen sind: $\mu \left(\Psi_k^{(\beta)} \Psi_j^{(\varrho)*} \Psi_i^{(\alpha)*} \right) T_e$ sind Intertwiner von β nach β und somit komplexe Vielfache der $\mathbf{1}$, da β irreduzibel ist. Die erste Gleichung im Lemma verdeutlicht die Rolle der $c_e(ij|k)$ als Clebsch-Gordan-Koeffizienten von \mathcal{G} : $\Psi_j^{(\varrho)*} \Psi_i^{(\alpha)*}$ transformiert sich unter der i.a. reduziblen Darstellung $\mathcal{U}_{\varrho}(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{U}_{\alpha}(\mathcal{G})$, die Terme in der Zerlegung auf der rechten Seite transformieren sich unter irreduziblen Darstellungen $\mathcal{U}_{\beta}(\mathcal{G})$.

Korollar 1.3.4 Es gilt

$$\Psi_i^{(\alpha)} \Psi_j^{(\varrho)} = \sum_{\beta,k} \overline{c_e(ij|k)} T_e \Psi_k^{(\beta)}.$$

1.3.6 Berechnung der R -Matrizen

Wir berechnen die R -Matrizen aus (1.14) bzw. der (1.13) im höherdimensionalen Fall entsprechenden Gleichung. Dazu weisen wir zunächst darauf hin, daß die Statistikoperatoren gegeben sind durch

$$\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) = \pm \sum_{j,k} \Psi_k^{(\varrho_2)} \Psi_j^{(\varrho_1)} \Psi_k^{(\varrho_2)*} \Psi_j^{(\varrho_1)*}.$$

Man überprüft leicht, daß diese Operatoren der Gleichung (1.4) und der Anfangsbedingung (1.6) genügen, wenn das Vorzeichen auf der rechten Seite das Vorzeichen der Vertauschung der Ψ bei raumartigem Abstand (1.19) ist; ebenso sieht man leicht, daß die Permutationseigenschaft $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) = \varepsilon(\varrho_2, \varrho_1)^*$ erfüllt ist. Offenbar ist also

$$\varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) = \pm \sum_{i,j,k} \Psi_i^{(\varrho_\alpha)} \Psi_k^{(\varrho_2)} \Psi_j^{(\varrho_1)} \Psi_k^{(\varrho_2)*} \Psi_j^{(\varrho_1)*} \Psi_i^{(\varrho_\alpha)*}. \quad (1.23)$$

Lemma 1.3.5

Es gilt

$$\varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) = \sum_{e_1 \circ e_2, f_2 \circ f_1} R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2} \cdot T_{e_2} T_{e_1} T_{f_2}^* T_{f_1}^*;$$

für das Matricelement $R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2} = T_{e_1}^* T_{e_2}^* \varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) T_{f_1} T_{f_2}$ gilt dabei

$$R_{f_2 \circ f_1}^{e_1 \circ e_2} = \pm \frac{1}{d_r(f_2)} \sum_{\substack{i,j,k \\ l,m,n}} \overline{c_{e_2}(ik|n)c_{e_1}(nj|m)} c_{f_1}(ij|l)c_{f_2}(lk|m).$$

BEWEIS.

Anwenden von Lemma 1.3.2 bzw. Korollar 1.3.4 auf Gleichung (1.23) ergibt

$$\begin{aligned} \varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) &= \pm \sum_{i,j,k} \sum_{\substack{\beta,l \\ \gamma,m}} c_{f_1}(ij|l)c_{f_2}(lk|m) \Psi_i^{(\varrho_\alpha)} \Psi_k^{(\varrho_2)} \Psi_j^{(\varrho_1)} \Psi_m^{(\gamma)*} T_{f_2}^* T_{f_1}^* \\ &= \pm \sum_{i,j,k} \sum_{\substack{\beta,l \\ \gamma,m \\ \delta,n \\ \eta,o}} \overline{c_{e_2}(ik|n)c_{e_1}(nj|o)} c_{f_1}(ij|l)c_{f_2}(lk|m) T_{e_2} T_{e_1} \Psi_o^{(\eta)} \Psi_m^{(\gamma)*} T_{f_2}^* T_{f_1}^* \end{aligned} \quad (1.24)$$

mit f_2 von der Art $(\gamma, \varrho_2, \beta)$, f_1 von der Art $(\beta, \varrho_1, \varrho_\alpha)$ und e_2 von der Art $(\delta, \varrho_2, \varrho_\alpha)$, e_1 von der Art $(\eta, \varrho_1, \delta)$.

$\varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2))$ als Intertwiner ist eichinvariant; insbesondere ist

$$\varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) = \mu(\varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2))).$$

Bilden des Mittels auf der rechten Seiten der vorigen Gleichung führt mit

$$\mu\left(\Psi_o^{(\eta)} \Psi_m^{(\gamma)*}\right) = \frac{1}{d_\gamma} \delta_{\gamma\eta} \delta_{om}$$

auf

$$\varrho_\alpha(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)) = \pm \sum_{\substack{e_1 \circ e_2 \\ f_2 \circ f_1}} \left(\frac{1}{d_r(f_2)} \sum_{\substack{i,j,k \\ l,m,n}} \overline{c_{e_2}(ik|n)c_{e_1}(nj|m)} c_{f_1}(ij|l)c_{f_2}(lk|m) \right) T_{e_2} T_{e_1} T_{f_2}^* T_{f_1}^*.$$

□

Kapitel 2

Tensorielle Kategorien

Die in Abschnitt 1.1 beschriebene Struktur ist die einer *tensoriellen Kategorie*¹ [19, 31]; die Objekte der Kategorie sind die DHR-Endomorphismen, die Pfeile zwischen den Objekten die Intertwiner, das Tensorprodukt zwischen Objekten ist die Komposition von Endomorphismen. Im niederdimensionalen Fall sind die Statistikoperatoren der DHR-Theorie Statistikoperatoren einer gepopften tensoriellen Kategorie, im höherdimensionalen Fall einer symmetrischen tensoriellen Kategorie. Der Begriff der tensoriellen Kategorie hält eine natürliche Sprache und ein geometrisches Verständnis zur Untersuchung von Vertauschungsrelationen bereit. Wir führen diesen Begriff ein zur späteren Verwendung in Kapitel 5.

2.1 Definitionen und Begriffe

Gegeben sei eine Kategorie \mathcal{T} mit Objekten ϱ, σ, \dots . Den Raum der Pfeile von ϱ nach σ bezeichnen wir mit $(\sigma|\varrho)$; es handele sich um einen komplexen Banachraum. $\mathbf{1}_\varrho \in (\varrho|\varrho)$ sei die Identität auf ϱ . Zwischen diesen Banachräumen gebe es eine bilineare Komposition \circ mit $\|T \circ S\|_{(\tau|\varrho)} \leq \|T\|_{(\tau|\sigma)} \cdot \|S\|_{(\sigma|\varrho)}$, $T \in (\tau|\sigma)$, $S \in (\sigma|\varrho)$. Weiter gebe es einen antilinearen, kontravarianten und involutiven Funktor $*$,

$$* : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : (\sigma|\varrho) \ni T \mapsto T^* \in (\varrho|\sigma)$$

der auf den Objekten als die Identität wirke. Die Banachraum-Norm erfülle $\|R^* \circ R\| = \|R\|^2$; dann handelt es sich um eine *C*-Kategorie*.

Wir sagen, daß \mathcal{T} *Unterobjekte* hat, wenn es zu einem gegebenen (selbstadjungierten) Projektor $P \in (\varrho|\varrho)$ ein Objekt $\sigma \in \mathcal{T}$ und eine Isometrie $V \in (\varrho|\sigma)$ gibt, die $P = V \circ V^*$ erfüllt. Weiter sagen wir, daß \mathcal{T} (endliche) *direkte Summen* habe, wenn für gegebene Objekte $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ ein $\tau \in \mathcal{T}$ und Isometrien $V_i \in (\tau|\varrho_i)$ existieren, so daß

$$\sum_{i=1}^n V_i \circ V_i^* = \mathbf{1}_\tau$$

gilt. Ein Objekt, das sich nicht in Unterobjekte zerlegen läßt, heißt *irreduzibel*.

Es gebe weiterhin einen assoziativen bilinearen Bifunktor $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$,

$$(\varrho, \sigma) \mapsto \varrho \otimes \sigma,$$

¹In der Literatur findet sich bisweilen auch der Begriff einer *monoidalen* anstelle einer tensoriellen Kategorie.

und für $T \in (\sigma|\varrho), T' \in (\sigma'|\varrho')$

$$(T, T') \mapsto T \otimes T' \in (\sigma \otimes \sigma' | \varrho \otimes \varrho'),$$

mit einem irreduziblen Einselement id ,

$$\text{id} \otimes \varrho = \varrho \otimes \text{id} = \varrho \quad \forall \varrho \in \mathcal{T} \quad \text{und} \quad \mathbb{1}_{\text{id}} \otimes T = T \otimes \mathbb{1}_{\text{id}} = T.$$

\otimes kommutiere mit $*$,

$$(T \otimes T')^* = T^* \otimes T'^*,$$

und es gelte²

$$(S \circ T) \otimes (S' \circ T') = S \otimes S' \circ T \otimes T'. \quad (2.1)$$

Im folgenden verwenden wir der Einfachheit halber und zugunsten der Konsistenz mit der Notation aus Kapitel 1 meistens die Notation $\varrho_1 \varrho_2 \equiv \varrho_1 \otimes \varrho_2$ und schreiben T anstelle von $T \otimes \mathbf{1}_\varrho$ sowie $\varrho(T)$ anstelle von $\mathbf{1}_\varrho \otimes T$.

Definition 2.1.1 Eine C^* -Kategorie mit einem bilinearen Bifunktor \otimes wie oben beschrieben heißt *monoidale* oder *tensorielle C^* -Kategorie*.

Es gebe zu jedem Paar von Objekten $\varrho, \sigma \in \mathcal{T}$ einen unitären Pfeil $\varepsilon(\varrho, \sigma) \in (\sigma \varrho | \varrho \sigma)$ (den *Statistikoperator*), so daß die Gesamtheit der Pfeile $\varepsilon(\varrho, \sigma), \varrho, \sigma \in \mathcal{T}$ den Gleichungen (1.4) und (1.7) genüge. Die Gleichung (1.4) gewinnt unter Verwendung der Identität (2.1) die Form

$$\varepsilon(\sigma_1, \sigma_2) \circ T_1 \otimes T_2 = T_2 \otimes T_1 \circ \varepsilon(\varrho_1, \varrho_2), \quad T_i \in (\sigma_i | \varrho_i).$$

Weiterhin gelte für alle $\varrho \in \mathcal{T}$

$$\exists \bar{\varrho} \in \mathcal{T}, R \in (\bar{\varrho} \varrho | \text{id}), \bar{R} \in (\varrho \bar{\varrho} | \text{id}) \quad \text{mit} \quad \bar{R}^* \circ \varrho(R) = \mathbf{1}_\varrho \quad \wedge \quad R^* \circ \bar{\varrho}(\bar{R}) = \mathbf{1}_{\bar{\varrho}}. \quad (2.2)$$

Offenbar ist $\bar{\bar{\varrho}} = \varrho$. $\bar{\varrho}$ wird *das zu ϱ konjugierte Objekt* genannt.

Definition 2.1.2 Eine tensorielle C^* -Kategorie \mathcal{T} , in der zu jedem Objekt $\varrho \in \mathcal{T}$ ein konjugiertes Objekt $\bar{\varrho} \in \mathcal{T}$ existiert, mit Statistikoperatoren $\varepsilon(\varrho, \sigma)$ wie oben beschrieben nennen wir *gezopfte C^* -Kategorie*. Gilt zusätzlich noch für alle Statistikoperatoren

$$\varepsilon(\sigma, \varrho) \circ \varepsilon(\varrho, \sigma) = \mathbf{1}_{\varrho \sigma}, \quad (2.3)$$

so heißt \mathcal{T} eine *symmetrische C^* -Kategorie*. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir *symmetrische Statistikoperatoren* (mit (2.3)) im folgenden mit $\tau(\varrho, \sigma)$, “nur” *gezopfte Statistikoperatoren* (ohne (2.3)) mit $\beta(\varrho, \sigma)$.

Bemerkung 2.1.3 Üblicherweise definiert man die symmetrische oder gezopfte tensorielle Kategorie ohne Bezug auf konjugierte Objekte und nennt eine symmetrische oder gezopfte tensorielle Kategorie, in der zu jedem Objekt ein konjugiertes existiert, eine *symmetrische* oder *gezopfte tensorielle Kategorie mit konjugierten Objekten* (s. z.B. [19]). Wir schränken uns im folgenden auf Kategorien mit konjugierten Objekten ein und bezeichnen der Einfachheit diese als *gezopfte* oder *symmetrische tensorielle Kategorien*. Auf dem Level der DHR-Endomorphismen und Intertwiner bedeutet das, daß wir nur Endomorphismen mit endlicher Statistik zulassen (s. Abschnitt 1.1.5).

²Wir folgen der Konvention, daß “ \otimes ” vor “ \circ ” ausgewertet wird.

2.2 Graphische Notation

Es gibt im Umfeld der symmetrischen bzw. gezopften tensoriellen C^* -Kategorien eine graphische Notation, die ein geometrisches Verständnis der Strukturen erlaubt (s. [32] und [33, 34]).

Grundsätzlich sind die auftretenden Diagramme “von oben nach unten” zu lesen. Dabei wird ein Intertwiner $T \in (\sigma_1 \cdots \sigma_m | \varrho_1 \cdots \varrho_n)$ (ein Pfeil im Sinne der Kategorie) durch einen Kasten dargestellt, in den Pfeile $\varrho_1 \dots \varrho_n$ hinein- und aus dem Pfeile $\sigma_1 \dots \sigma_m$ herausgehen; der Kasten wird mit T gekennzeichnet, wenn der entsprechende Intertwinerraum mehrdimensional ist (Abb. 2.1). Rechts davon können beliebige Pfeile, Kästen o.ä. stehen; ein Pfeil τ

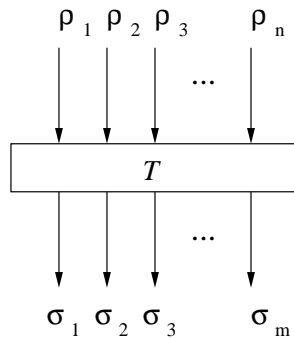


Abbildung 2.1: $T \in (\sigma_1 \cdots \sigma_m | \varrho_1 \cdots \varrho_n)$

rechts etwa entspricht der Operation $\cdot \otimes \mathbf{1}_\tau$, d.h. der identischen Einbettung $(\sigma | \varrho) \hookrightarrow (\sigma \tau | \varrho \tau)$. Ist links ein Pfeil τ , entspricht das $\tau(T)$ (Abb. 2.2).

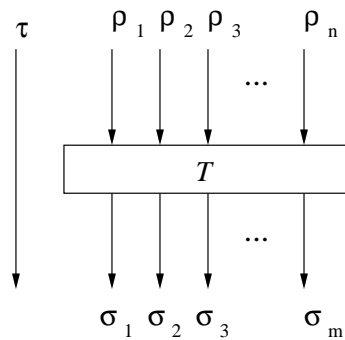


Abbildung 2.2: $\tau(T)$

Ein Intertwiner $T \in (\sigma \tau | \varrho)$ wird durch einen Pfeil symbolisiert, der sich in zwei Pfeile aufspaltet; der Punkt der Aufspaltung wird mit dem Namen des Intertwiners gekennzeichnet. Der adjungierte Intertwiner $T^* \in (\varrho | \sigma \tau)$ wird entsprechend dargestellt (Abb. 2.3).

Ein konjugiertes Objekt wird wie jedes andere durch einen entsprechend gekennzeichneten Pfeil dargestellt; außerdem kann ein Objekt aber auch durch einen “rückwärts” laufenden Pfeil des konjugierten Objektes symbolisiert werden. Verzichtet man weiter darauf, für ein $R \in (\overline{\varrho} | \text{id})$, das die Konjugationsgleichungen (2.2) löst, den einlaufenden Pfeil id zu zeichnen, so ergibt sich die in Abb. 2.4 dargestellte graphische Identität.

$\beta(\varrho, \sigma)$ wird durch zwei gekreuzte Pfeile dargestellt, wobei der Pfeil von links oben nach

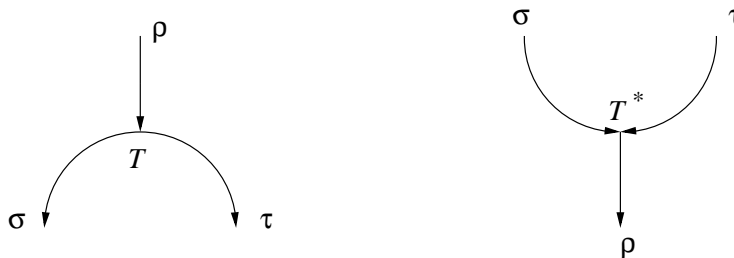


Abbildung 2.3: $T \in (\sigma\tau|\varrho)$ und $T^* \in (\varrho|\sigma\tau)$

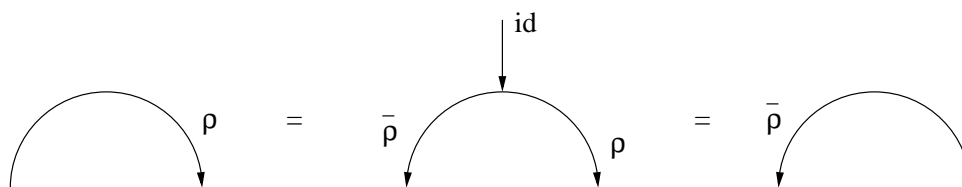


Abbildung 2.4: $R \in (\bar{\varrho}|\text{id})$

rechts unten über dem anderen verläuft; bei $\beta(\varrho, \sigma)^*$ verhält es sich genau andersherum, und für die Statistikoperatoren $\tau(\varrho, \sigma)$ in symmetrischen Kategorien werden beide Pfeile durchgezogen. (Abb. 2.5). Gleichung (1.8) ist in Abb. 2.6 dargestellt.

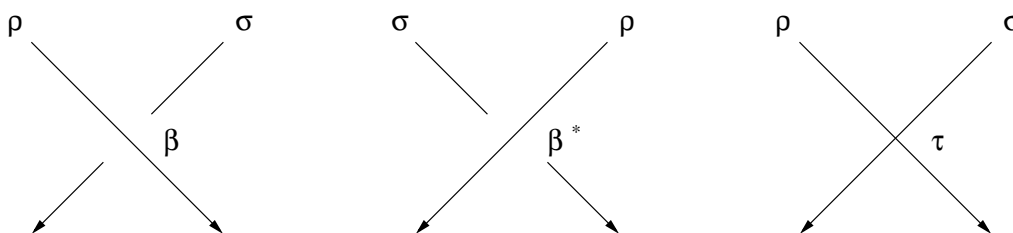


Abbildung 2.5: Die Operatoren $\beta(\varrho, \sigma)$, $\beta^*(\varrho, \sigma)$ im gezopften sowie $\tau(\varrho, \sigma)$ im symmetrischen Fall

2.3 Statistische Dimension

Eigenschaften der symmetrischen und der gezopften tensoriellen Kategorien schränken die Möglichkeit stark ein, von *einer* Kategorie erzeugte Darstellungen der \mathcal{P}_n und der \mathcal{B}_n zu finden, die sind im Sinn der zeit- und raumartigen VR kompatibel sind (s. Abschnitt 0.2 der Einführung o. Kapitel 3). Wir skizzieren dieses Problem und deuten einen möglichen Ausweg an.

2.3.1 Definition der statistischen Dimension und der statistischen Phase

Wir führen zunächst die Begriffe der statistischen Dimension und der statistischen Phase ein, die wir in Kapitel 1 ausgelassen hatten.

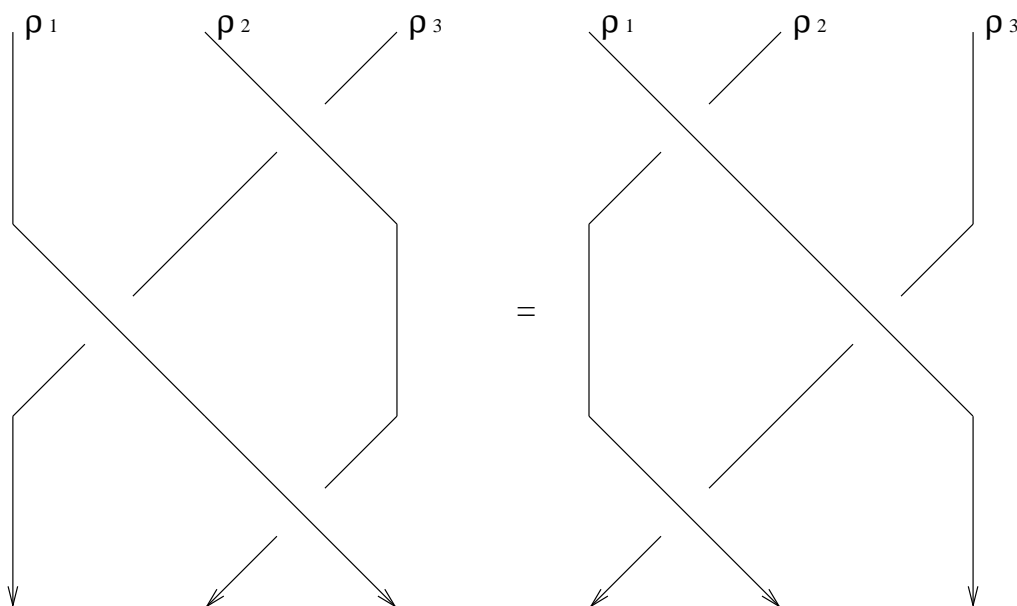


Abbildung 2.6: Die Gleichung (1.8)

Definition 2.3.1 [31] Für $R \in (\overline{\varrho}|\text{id})$ und $\overline{R} \in (\varrho|\overline{\text{id}})$, die der Konjugationsgleichung (2.2) genügen, definieren wir die *statistische Dimension* eines Objektes $\varrho \in \mathcal{T}$ durch

$$d(\varrho) := R^* \circ R = \overline{R}^* \circ \overline{R} = d(\overline{\varrho}). \quad (2.4)$$

Für ein irreduzibles Objekt $\varrho \in \mathcal{T}$ ist diese Definition eindeutig, für ein reduzibles fordern wir, daß $d(\varrho)$ minimal sein soll (dieses Minimum existiert).

Lemma 2.3.2

[19], Korollar 2.4 und Korollar 2.8

Es gelten $d(\varrho_2 \varrho_1) = d(\varrho_2)d(\varrho_1)$ sowie

$$d\left(\bigoplus_{i=1}^n \varrho_i\right) = \sum_{i=1}^n d(\varrho_i).$$

Definition 2.3.3 Für ein $R \in (\overline{\varrho}|\text{id})$, das der Konjugationsgleichung (2.2) genügt, definieren wir die *Statistikphase*³ eines Objektes $\varrho \in \mathcal{T}$ durch

$$\kappa(\varrho) := d(\varrho) \cdot R^* \circ \overline{\varrho}(\varepsilon(\varrho, \varrho)) \circ R. \quad (2.5)$$

Für irreduzible $\varrho \in \mathcal{T}$ sind $d(\varrho)$ und $\kappa(\varrho)$ bereits durch die Äquivalenzklasse $[\varrho]$ festgelegt. Um den Zusammenhang mit Abschnitt 1.1.5 zu klären, weisen wir darauf hin, daß

$$\phi_\varrho : A \mapsto R^* \overline{\varrho}(A) R$$

³Daß es sich für irreduzible Objekte wirklich um eine Phase handelt, wird in [31], Abschnitt 4 gezeigt; für ein reduzibles Objekt ϱ ist $\kappa(\varrho) = \sum_\alpha \kappa(\alpha) P_\alpha$, wobei die P_α die minimalen Orthogonalprojektoren in $(\varrho|\varrho)$ sind und $\kappa(\alpha)$ die Statistikphasen der korrespondierenden irreduziblen Objekte.

eine Linksinverse von ϱ ist. Für irreduzible $\varrho \in \mathcal{T}$ ist

$$0 \neq \phi_\varrho(\varepsilon(\varrho, \varrho)) = \frac{1}{d(\varrho)} \kappa(\varrho)$$

wegen $|\kappa(\varrho)| = 1$ äquivalent zu $d(\varrho) \neq \infty$; das motiviert die oben etwas eigenwillige Begriffsbildung “endliche Statistik”.

2.3.2 Statistische Dimension in symmetrischen und in gezopferten tensoriellen Kategorien

Lemma 2.3.4

[19], Korollar 2.15

Die statistische Dimension eines Objektes ϱ in einer symmetrischen tensoriellen Kategorie ist eine natürliche Zahl, $d(\varrho) \in \mathbb{N}$; ist ϱ irreduzibel, so gilt für die Statistikphase $\kappa(\varrho) = \pm 1$.

Für eine gezopferte tensorielle Kategorie (ohne (2.3)) ist das im allgemeinen nicht der Fall [31]. Zwar gilt auch hier $d(\varrho) \geq 1 \forall \varrho \in \mathcal{T}$, aber anstelle der Ganzzahligkeit existieren nichtlineare Constraints an die Dimensionen und Statistikphasen, die nur in Ausnahmefällen explizit gelöst werden können und i.a. keine ganzzahligen Dimensionen zulassen.

2.3.3 Konsequenzen von Lemma 2.3.4

Eine symmetrische tensorielle Kategorie erzeugt via (1.9) zelluläre Darstellungen der Permutationsgruppe (nämlich gerade die Statistikoperatoren in der durch die Pfade indizierten Basis der Intertwinerräume, s. Abschnitt 1.2), eine gezopferte tensorielle Kategorie erzeugt via (1.10) zelluläre Darstellungen der Zopfgruppe. Im Kontext der zeit- und raumartigen VR sind wir an zellulären Darstellungen der \mathcal{BP}_n interessiert, die sowohl die \mathcal{P}_n als auch die \mathcal{B}_n als Untergruppe enthält, wobei die Erzeuger dieser beiden Untergruppen gewisse Konsistenzrelationen untereinander erfüllen (s. Abschnitt 0.2 oder für eine exakte Definition der \mathcal{BP}_n Kapitel 3). Eine DHR-artige Darstellung dieser Gruppe, die von einer gezopferten und symmetrischen tensoriellen Kategorie erzeugt wird, sollte aus einer Darstellung der Zopfgruppe,

$$b_i \mapsto \mathbb{1}_{\varrho_\alpha} \otimes \varrho^{i-1} \otimes \beta(\varrho, \varrho) \otimes \varrho^{n-i-1} = \varrho_\alpha \varrho^{i-1}(\beta(\varrho, \varrho)),$$

und einer Darstellung der Permutationsgruppe,

$$t_i \mapsto \mathbb{1}_{\varrho_\alpha} \otimes \varrho^{i-1} \otimes \tau(\varrho, \varrho) \otimes \varrho^{n-i-1} = \varrho_\alpha \varrho^{i-1}(\tau(\varrho, \varrho)),$$

bestehen, die die in Kapitel 3 abstrahierten Konsistenzrelationen erfüllen (*Kompatibilität* der Zopf- und der Permutationsgruppendarstellung). Diese Konsistenzrelationen bedeuten somit Restriktionen an die $\beta(\varrho, \varrho)$ und $\tau(\varrho, \varrho)$ der Kategorie.

Die Symmetrie der Kategorie erfordert ganzzahlige statistische Dimension der Objekte, was vom Standpunkt der gezopferten Statistikoperatoren aus ein unnatürlicher Constraint ist. Die Darstellungen der Zopfgruppe, die von der Kategorie erzeugt werden, sind dann sehr stark eingeschränkt. Als Ausweg aus diesem Dilemma bietet es sich an, die Forderung nach *Natürlichkeit* (1.4) entweder für die symmetrischen oder für die gezopferten Statistikoperatoren abzuschwächen und sie durch eine geeignete Auswahl ihrer Konsequenzen zu ersetzen: Müssen die β nicht natürlich sein, so werden die oben erwähnten nichtlinearen Constraints

abgeschwächt; es ist zu klären, ob eine geeignete Abschwächung existiert, die ganzzahlige Dimensionen zuläßt, so daß die zugehörigen “gezopften Statistikoperatoren” nichttriviale Darstellungen der $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{BP}_n$ erzeugen⁴. Verlangt man von den τ keine Natürlichkeit, so bricht der Beweis von Lemma 2.3.4 zusammen, und der Constraint $d(\rho) \in \mathbb{N}$ fällt weg.

Nun ist die Natürlichkeit auf dem Level der Endomorphismen und Intertwiner eine Folge der Haag-Dualität; Haag-Dualität aber werden wir im allgemeinen nicht in raum- und zeitartiger Richtung vorfinden, was die Abschwächung einer Natürlichkeit rechtfertigt⁵. Typischerweise werden wir zunächst Haag-Dualität in raumartiger Richtung finden, Nichtlokalität in zeitartiger. Man kann jetzt das Algebren-Netz verkleinern zu einem in beide Richtungen lokalen *Huygens-Netz*, das auf einem Unter-Hilbertraum des ursprünglichen Hilbertraumes lebt. Dieses Huygens-Netz, das keine Felder mit anomalen Skalendimensionen mehr enthält, läßt sich auf diesem Unter-Hilbertraum in raum- oder zeitartiger Richtung dualisieren, wobei die andere Richtung im allgemeinen nicht-lokal wird. Dies ist jedoch noch ein weites Feld voller ungeklärter Fragen, auf die wir nicht weiter eingehen werden (hier liegt auch zumindest ein Grund dafür, daß es noch keine allgemeine abstrakte Rechtfertigung der Hypothese 0.2.1 gibt); wichtig für uns ist: Wir können Haag-Dualität wahlweise in raum- oder zeitartiger Richtung bekommen, können dem entsprechend die “volle” Natürlichkeit wahlweise für β oder τ annehmen.

Die Frage, ob eine gezopfte und symmetrische tensorielle Kategorie (evtl. mit einer abgeschwächten Natürlichkeit) existiert, die eine nichttriviale Darstellung der $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{BP}_n$ erzeugt, bleibt im Rahmen dieser Arbeit offen. Kapitel 5 zeigt ein Gegenbeispiel einer von einer gezopften Kategorie erzeugten Darstellung der \mathcal{B}_n , die sich nicht zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern läßt; eine allgemeine Aussage in Form eines *No-Go*-Theorems wird aber nicht gezeigt. Der in Teil III gefundenen zellulären Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} wiederum liegt keine tensorielle Kategorie zugrunde.

⁴Daß die Zopfgruppe als Untergruppe der \mathcal{BP}_n aufgefaßt wird, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{BP}_n$, bedeutet insbesondere, daß die Darstellung der Zopfgruppe sich zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern läßt; d.h. es existiert eine Darstellung der \mathcal{P}_n (erzeugt von den symmetrischen Statistikoperatoren der Kategorie), die mit ihr im Sinne von Kapitel 3 kompatibel ist. “Nichttrivial” meint hier, daß die Darstellung nicht von der Form $D(b_i) = \text{const} \cdot D(t_i)$, $i = 1, \dots, n-1$ ist.

⁵Die τ (Permutation) sind mit der raumartigen Richtung assoziiert, die β (Zopf) mit der zeitartigen.

Teil II

Die Gruppe \mathcal{BP}_n

Kapitel 3

Abstraktion der Gruppenrelationen

Wir untersuchen modellunabhängig die Kompatibilität der zeit- und der raumartigen Statistik in höherdimensionalen konformen Quantenfeldtheorien; wir gehen dazu aus von der Hypothese 0.2.1, d.h. wir nehmen an, daß es eine Zerlegung des konformen Feldes F in *Austauschkomponenten* $F_{\beta,\alpha}$ gibt,

$$F(x) = \sum_{\beta,\alpha} F_{\beta,\alpha}(x), \quad F_{\beta,\alpha}(x) := P_\beta F(x) P_\alpha$$

mit orthogonalen Projektoren P_α, P_β , so daß die Austauschkomponenten für nichtlichtartige Abstände von x und y ($(x - y)^2 \neq 0$) Teil einer Austauschalgebra

$$F_{\gamma,\beta}(x) F_{\beta,\alpha}(y) = \sum_{\beta'} R_{\beta,\beta'}^{(\gamma,\alpha)}(x, y) \cdot F_{\gamma,\beta'}(y) F_{\beta',\alpha}(x) \quad (3.1)$$

sind, die ggf. zwischen einer größeren Menge von Feldern gilt als denen, die in der Zerlegung von F vorkommen.

Bemerkung 3.0.1 Die Existenz einer Zerlegung konformer Felder in Austauschkomponenten mit quadratischen VR dient in diesem Kapitel als Arbeitshypothese und als Ansatz zur Abstraktion der Gruppe \mathcal{BP}_n . Eine abstrakte Rechtfertigung von Hypothese 0.2.1 steht noch aus; für den Fall konformer verallgemeinerter freier Felder rechtfertigen wir sie in Teil III, indem wir die Austauschkomponenten und ihre VR explizit angeben.

3.1 Eine Konsequenz der konformen Kovarianz

Wegen der vorausgesetzten konformen Kovarianz ist $R(x, y)$ in Gleichung (3.1) jeweils konstant auf

$$V_+ := \{(x, y) : (x - y)^2 > 0, x^0 > y^0\}, \quad V_- := \{(x, y) : (x - y)^2 > 0, x^0 < y^0\}$$

und

$$S := \{(x, y) : (x - y)^2 < 0\}.$$

Wir machen zur Vereinfachung der Notation die folgende

Definition 3.1.1 Analog zur oben verwendeten Notation $x > y$ für “ x liegt in der Zukunft von y ” ($(x, y) \in V_+$), bezeichne $x < y$ die Situation “ x liegt in der Vergangenheit von y ” ($(x, y) \in V_-$). Ferner stehe $x \times y$ für “ x und y sind raumartig getrennt” ($(x, y) \in S$).

Damit gilt dann

$$R(x, y) = R(\varepsilon(x, y)) \quad \text{mit} \quad \varepsilon(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \times y \\ + & \text{falls } x > y \\ - & \text{falls } x < y \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2 Zelluläre Darstellung der Vertauschungsgruppe

Aus (3.1) folgt für eine *Kette* von n Austauschkomponenten

$$\begin{aligned} & F_{\alpha_n, \alpha_{n-1}}(x_n) \cdots F_{\alpha_{i+1}, \alpha_i}(x_i) F_{\alpha_i, \alpha_{i-1}}(x_{i+1}) \cdots F_{\alpha_1, \alpha_0}(x_1) \\ &= \sum_{\alpha'} D\left(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}\right)_{\alpha, \alpha'} \cdot F_{\alpha'_n, \alpha'_{n-1}}(x_n) \cdots F_{\alpha'_{i+1}, \alpha'_i}(x_{i+1}) F_{\alpha'_i, \alpha'_{i-1}}(x_i) \cdots F_{\alpha'_1, \alpha'_0}(x_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit Multiindizes $\alpha = (\alpha_n, \dots, \alpha_0)$, α' entsprechend und

$$D\left(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}\right)_{\alpha, \alpha'} = \delta_{\alpha_n, \alpha'_n} \cdots \delta_{\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1}} \cdot R_{\alpha_i, \alpha'_i}^{(\alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})}(\varepsilon(x_i, x_{i+1})) \cdot \delta_{\alpha_{i-1}, \alpha'_{i-1}} \cdots \delta_{\alpha_0, \alpha'_0}.$$

Durch Inversion von (3.3) in $\text{span}\{F \cdots F\}$ folgt wegen $x_{i+1} > x_i \iff x_i < x_{i+1}$ und $x_{i+1} \times x_i \iff x_i \times x_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$

$$D(g_i^0) = (D(g_i^0))^{-1} \quad \text{und} \quad (D(g_i^+))^{-1} = D(g_i^-);$$

wir abstrahieren

$$g^0 = (g_i^0)^{-1} \quad \text{und} \quad (g_i^+)^{-1} = g_i^-. \quad (3.4)$$

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir im folgenden für $i = 1, \dots, n-1$ die Bezeichnungen $t_i := g_i^0$ und $b_i := g_i^+$.

3.3 Abstraktion der Gruppe \mathcal{BP}_n

Die Reihenfolge dreier benachbarter Koordinaten kann umgekehrt werden durch Anwendung von

$$D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)}) D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}) D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)})$$

oder von

$$D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}) D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)}) D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})});$$

notwendig und hinreichend für die Eindeutigkeit dieser Operation ist, daß

$$D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)}) D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}) D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)}) = D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}) D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)}) D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})})$$

für alle denkbaren nichtlichtartigen relativen Lagen der betroffenen Punkte x_{i-1}, x_i, x_{i+1} . Weiter sieht man leicht, daß

$$D(g_j^{\varepsilon(x_j, x_{j+1})}) D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}) = D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}) D(g_j^{\varepsilon(x_j, x_{j+1})}) \quad \text{falls } |i - j| \geq 2.$$

Für nur zeitartige Abstände folgt, daß die $D(b_i)$ eine Darstellung der \mathcal{B}_n bilden, für nur raumartige Abstände folgt, daß die $D(t_i)$ eine Darstellung der \mathcal{P}_n bilden. Im Fall beliebiger nichtlichtartiger Abstände führen die Forderungen $DDD = DDD$ bzw. $DD = DD$ auf *Konsistenzrelationen* zwischen den $D(b_i)$ und den $D(t_i)$; wir finden

Theorem 3.3.1

Die Matrizen $D(b_i), D(t_i), i = 1, \dots, n - 1$ aus (3.3) bilden eine Darstellung \mathcal{D} der Gruppe \mathcal{BP}_n , die von Generatoren $b_i, t_i, i = 1, \dots, n - 1$ mit

$$t_i^2 = e \quad (3.5)$$

$$t_{i-1} t_i t_{i-1} = t_i t_{i-1} t_i \quad (3.6)$$

$$t_{i-1} t_i b_{i-1} = b_i t_{i-1} t_i \quad (3.7)$$

$$t_{i-1} b_i b_{i-1} = b_i b_{i-1} t_i \quad (3.8)$$

$$t_{i+1} b_i b_{i+1} = b_i b_{i+1} t_i \quad (3.9)$$

$$b_{i-1} b_i b_{i-1} = b_i b_{i-1} b_i \quad (3.10)$$

$$[t_j, t_k] = e \quad \text{wenn } |j - k| \geq 2 \quad (3.11)$$

$$[t_j, b_k] = e \quad \text{wenn } |j - k| \geq 2 \quad (3.12)$$

$$[b_j, b_k] = e \quad \text{wenn } |j - k| \geq 2, \quad (3.13)$$

erzeugt wird, wobei $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ den gruppentheoretischen Kommutator bezeichnet und e das Einselement der \mathcal{BP}_n ist.

Bemerkung 3.3.2 Der aus dem Durchmustern aller denkbaren relativen Lagen von drei bzw. 2·2 Punkten im höherdimensionalen Minkowskiraum sowie aus elementaren Rechnungen bestehende Beweis dieses Satzes findet sich in Anhang A.1. Die Gruppenrelationen sind ohne Beweis bereits in [4] angegeben.

Definition 3.3.3 Lösen eine gegebene Darstellung der \mathcal{B}_n und eine gegebene Darstellung der \mathcal{P}_n das System aus Theorem 3.3.1, d.h. bilden sie gemeinsam eine Darstellung der \mathcal{BP}_n , so nennen wir die beiden Darstellungen *kompatibel*.

Bemerkung 3.3.4 Es ist nicht klar, ob die Gruppenrelationen in Theorem 3.3.1 die Relation

$$t_i b_i = b_i t_i, \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (3.14)$$

implizieren. [33, 34], die die \mathcal{BP}_n im mathematischen Kontext besprechen, behandeln die mit diesem zusätzlichen Constraint versehene Gruppe als eine Quotientengruppe der \mathcal{BP}_n , allerdings ohne die Unabhängigkeit der Relation (3.14) von den Gruppenrelationen zu zeigen.

Die Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} im Fall des konformen verallgemeinerten freien Feldes¹ (Teil III) ist von der Art, daß

$$D(t_i)D(b_i) = D(b_i)D(t_i), \quad i = 1, \dots, n - 1$$

(Darstellung vom *anyonischen Typ*); solange die Frage nach der Unabhängigkeit von (3.14) nicht geklärt ist, ist natürlich auch unklar, ob die Darstellungen vom anyonischen Typ Darstellungen einer echten Quotientengruppe oder bereits (potentiell) treue Darstellungen der \mathcal{BP}_n sind.

¹Der Index $2n$ erklärt sich daher, daß für das freie Feld Vakuumerwartungswerte von ungeraden Potenzen des Feldes verschwinden.

Kapitel 4

Erzeugung der \mathcal{BP}_n aus einer ihrer Untergruppen \mathcal{P}_n oder \mathcal{B}_n

Wir entwickeln ein Verfahren, um die Gruppe \mathcal{BP}_n aus der Permutationsgruppe \mathcal{P}_n oder der Zopfgruppe \mathcal{B}_n durch Hinzufügen eines weiteren Erzeugers zu gewinnen; es folgt, daß eine Darstellung der \mathcal{P}_n oder \mathcal{B}_n sich genau dann zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern läßt, wenn der neue Erzeuger darstellbar ist.

4.1 Erzeugung von \mathcal{BP}_n aus \mathcal{P}_n

Wir schreiben die Gruppenrelationen der \mathcal{BP}_n um in Relationen für die t_i und die Produkte $m_i := b_i t_i$. Diese Relationen wiederum folgen aus denen für t_i und m_1 und einer Rekursionsformel für die Produkte.

4.1.1 Eine Rekursionsformel für die Produkte $b_i t_i$

Definition 4.1.1 Für $i = 1, \dots, n-1$ sei

$$m_i := b_i t_i; \quad m_1 \equiv m. \quad (4.1)$$

Lemma 4.1.2

Für die Produkte m_i gilt die Rekursionsformel

$$m_i = t_{i-1} t_i m_{i-1} t_i t_{i-1}. \quad (4.2)$$

BEWEIS.

Aus (3.7) folgt nach Multiplikation von rechts mit t_{i-1}

$$\begin{aligned} t_{i-1} t_i m_{i-1} &= b_i t_{i-1} t_i t_{i-1} \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \underbrace{b_i t_i}_{m_i} t_{i-1} t_i \end{aligned} \quad (4.3)$$

und daraus durch Multiplikation von rechts mit $t_i t_{i-1}$ wegen (3.5) die Behauptung des Lemmas.

□

4.1.2 Definition der \mathcal{BP}_n durch t_i, m_i

Wir setzen $b_i = m_i t_i$ in die Gleichungen aus Theorem 3.3.1 ein und erhalten nach einigen Umformungen:

Lemma 4.1.3

Die Gleichungen in Theorem 3.3.1 sind äquivalent zu den Gleichungen

$$t_i^2 = e \quad (4.4)$$

$$t_{i-1} t_i t_{i-1} = t_i t_{i-1} t_i \quad (4.5)$$

$$[t_j, t_k] = e \quad \text{wenn } |j - k| \geq 2 \quad (4.6)$$

$$[m_i, t_k] = e \quad \text{falls } |i - k| \geq 2 \quad (4.7)$$

$$[m_i, t_{i+1} t_{i+2} t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i t_{i+3} t_{i+1}] = e \quad (4.8)$$

$$[m_i, t_{i+1} t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i t_{i+1}] = e \quad (4.9)$$

$$[m_i, t_{i+1} m_i t_{i+1}] = e \quad (4.10)$$

$$[m_i, t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i] = e. \quad (4.11)$$

zwischen den t_i und $m_i = b_i t_i$.

Bemerkung 4.1.4 Der Beweis dieses Lemmas besteht aus elementaren Rechnungen; er findet sich in Anhang A.2.

4.1.3 Erzeugung der \mathcal{BP}_n aus der \mathcal{P}_n durch Hinzufügen eines weiteren Erzeugers

Durch einfaches Nachrechnen finden wir

Lemma 4.1.5

Die Gleichungen in Lemma 4.1.3 folgen bereits aus (4.4) bis (4.6) und den Gleichungen für m (d.h. $i = 1$ in den Gleichungen (4.7) bis (4.11)) sowie der Rekursionsformel (4.2).

Bemerkung 4.1.6 Der Beweis des Lemmas findet sich in Anhang A.3.

Unmittelbar folgt

Theorem 4.1.7

Gegeben sei eine Darstellung \mathcal{D} der Permutationsgruppe \mathcal{P}_n mit Erzeugern $t_i, i = 1, \dots, n-1$, die den Gleichungen (3.5), (3.6) und (3.11) genügen. Läßt sich in dieser Darstellung ein weiterer Erzeuger m mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} [m, t_k] &= e \quad \text{falls } k \geq 3 \\ [m, t_2 t_3 t_1 t_2 m t_2 t_1 t_3 t_2] &= e \\ [m, t_2 t_1 t_2 m t_2 t_1 t_2] &= e \\ [m, t_2 m t_2] &= e \\ [m, t_1 t_2 m t_2 t_1] &= e \end{aligned} \quad (4.12)$$

darstellen, so erhält man mit der Rekursionsformel (4.2) eine Darstellung aller m_i und via $D(b_i) := D(m_i)D(t_i)$ eine Darstellung der \mathcal{BP}_n .

Bemerkung 4.1.8 Es läßt sich offenbar *jede* Darstellung \mathcal{D} der \mathcal{P}_n zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern; wir setzen dazu $D(b_i) := \text{const} \cdot D(t_i)$, $i = 1, \dots, n-1$. Man sieht leicht, daß diese Darstellungen den Relationen aus Theorem 3.3.1 genügen. Sie entsprechen der trivialen Lösung $D(m) = \text{const} \cdot \mathbf{1}$ des Systems in Theorem 4.1.7; eine solche Darstellung nennen wir dementsprechend auch *triviale Erweiterung* einer Permutationsgruppendarstellung. Die Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} im Fall des konformen verallgemeinerten freien Feldes (Teil III) ist für anomale Skalendimensionen $\delta \notin \mathbb{Z}$ keine triviale Erweiterung einer Darstellung der \mathcal{P}_{2n} .

4.2 Erzeugung von \mathcal{BP}_n aus dem Zopfanteil

Analog zum vorangegangenen Abschnitt läßt sich die Gruppe \mathcal{BP}_n auch aus der Zopfgruppe durch Hinzufügen des oben definierten Erzeugers m gewinnen; wir geben die definierenden Relationen zwischen m und den b_i an. Wieder gilt: Kennt man eine Darstellung der Zopfgruppe, in der sich der zusätzliche Erzeuger darstellen läßt, so läßt sich daraus mittels der angegebenen Rekursionsformeln eine Darstellung der \mathcal{BP}_n gewinnen. Der augenfälligste Unterschied zu den obigen Überlegungen ist, daß $b_i^2 \neq e$ ist; zum einen hat das zur Folge, daß in den Bedingungen an m auch b_i^{-1} auftritt, zum anderen treten Terme der Art b_i^2 auf, die in den obigen Betrachtungen trivial waren. Zudem läßt sich eine Darstellung der \mathcal{B}_n i.a. nicht zu einer trivialen Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern.

4.2.1 Zwei Rekursionsformeln für die m_i

Lemma 4.2.1

Für die Produkte m_i gelten die Rekursionsformeln

$$b_{i-1}^{-1} b_i^{-1} m_{i-1} b_i b_{i-1} = m_i = b_{i-1} b_i m_{i-1} b_i^{-1} b_{i-1}^{-1}. \quad (4.13)$$

BEWEIS.

Aus (3.8) folgt nach Multiplikation von links mit b_{i-1}

$$\begin{aligned} m_{i-1} b_i b_{i-1} &= b_{i-1} b_i b_{i-1} t_i \\ &\stackrel{(3.10)}{=} b_i b_{i-1} m_i \\ \iff m_i &= b_{i-1}^{-1} b_i^{-1} m_{i-1} b_i b_{i-1}; \end{aligned} \quad (4.14)$$

ganz entsprechend folgt aus (3.9) durch Multiplikation von links mit b_{i+1}

$$\begin{aligned} m_{i+1} b_i b_{i+1} &= b_{i+1} b_i b_{i+1} t_i \\ &\stackrel{(3.10)}{=} b_i b_{i+1} m_i \\ \iff m_{i+1} &= b_i b_{i+1} m_i b_{i+1}^{-1} b_i^{-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

und damit die zweite Gleichung im Lemma. □

4.2.2 Definition der \mathcal{BP}_n durch b_i, m_i

Wir setzen $t_i = b_i^{-1} m_i$ in die Gleichungen aus Theorem 3.3.1 ein und erhalten nach einigen Umformungen:

Lemma 4.2.2

Die Gleichungen in Theorem 3.3.1 sind äquivalent zu den Gleichungen

$$b_{i-1} b_i b_{i-1} = b_i b_{i-1} b_i \quad (4.16)$$

$$[b_i, b_k] = e, \quad \text{falls } |i - k| \geq 2 \quad (4.17)$$

$$b_i m_i^{-1} b_i = m_i \quad (4.18)$$

$$[m_i, b_k] = e, \quad \text{falls } |i - k| \geq 2 \quad (4.19)$$

$$[m_i, b_{i+1} b_{i+1}] = e \quad (4.20)$$

$$[m_i, b_{i+1} b_i b_{i+1}] = e \quad (4.21)$$

$$[m_i, \text{Ad}(b_{i+1}) m_i] = e \quad (4.22)$$

$$[m_i, \text{Ad}(b_i b_{i+1}) m_i] = e \quad (4.23)$$

$$[m_i, \text{Ad}(b_{i+1} b_{i+2} b_i b_{i+1}) m_i] = e \quad (4.24)$$

zwischen den b_i und $m_i = b_i t_i$.

Bemerkung 4.2.3 Der Beweis dieses Lemmas besteht aus elementaren Rechnungen; er findet sich in Anhang A.4.

4.2.3 Erzeugung der \mathcal{BP}_n aus der \mathcal{B}_n durch Hinzufügen eines weiteren Erzeugers

Durch einfaches Nachrechnen finden wir

Lemma 4.2.4

Die Gleichungen in Lemma 4.2.2 folgen bereits aus (4.16), (4.17) und den Gleichungen für m (d.h. $i = 1$ in den Gleichungen (4.18) bis (4.24)) sowie den Rekursionsformeln (4.13).

Bemerkung 4.2.5 Der Beweis des Lemmas findet sich in Anhang A.5.

Unmittelbar folgt

Theorem 4.2.6

Gegeben sei eine Darstellung \mathcal{D} der Zopfgruppe \mathcal{B}_n mit den Erzeugern $b_i, i = 1, \dots, n - 1$, die den Gleichungen (3.10) und (3.13) genügen. Läßt sich in dieser Darstellung ein weiterer Erzeuger m mit den Eigenschaften

$$b_1 m^{-1} b_1 = m \quad (4.25)$$

$$[m, b_i] = e, \quad \text{falls } i \geq 3 \quad (4.26)$$

$$[m, b_2 b_2] = e \quad (4.27)$$

$$[m, b_2 b_1 b_1 b_2] = e \quad (4.28)$$

$$[m, \text{Ad}(b_2) m] = e \quad (4.29)$$

$$[m, \text{Ad}(b_1 b_2) m] = e \quad (4.30)$$

$$[m, \text{Ad}(b_2 b_3 b_1 b_2) m] = e \quad (4.31)$$

darstellen, so erhält man mit den Rekursionsformeln (4.13) eine Darstellung aller m_i und via $D(t_i) := D(b_i)^{-1} D(m_i)$ eine Darstellung der \mathcal{BP}_n . Läßt sich m nicht darstellen, so läßt sich die gegebene Darstellung der \mathcal{B}_n nicht zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern.

Anders als im Fall der Permutationsgruppe läßt sich *nicht* jede Darstellung \mathcal{D} der Zopfgruppe trivial zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern. $D(m) = \text{const} \cdot \mathbf{1}$ löst zwar (4.26) bis (4.31), (4.25) aber erzwänge dann $D(b_1^2) = \text{const}^2 \cdot \mathbf{1}$; dies wird jedoch nur von speziellen (anyonischen) Darstellungen der Zopfgruppe erfüllt.

Wir illustrieren das hier entwickelte Verfahren, Darstellungen der \mathcal{P}_n oder der \mathcal{B}_n auf ihre Erweiterbarkeit zu prüfen und ggf. zu Darstellungen der \mathcal{BP}_n zu erweitern, indem wir es im folgenden Kapitel auf eine konkrete Zopfgruppendarstellung anwenden; es zeigt sich, daß diese sich nicht zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern läßt.

Kapitel 5

Anwendung des in Kapitel 4 entwickelten Verfahrens auf eine konkrete Zopfgruppendarstellung

Wir betrachten eine von der tensoriellen Kategorie des 1 + 1-dimensionalen Isingmodells erzeugte Darstellung der Zopfgruppe und zeigen mit der in Abschnitt 4.2 entwickelten Methode, daß diese sich nicht zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern läßt.

5.1 Eine tensorielle Kategorie

Den Ansatzpunkt der Betrachtungen in diesem Kapitel bildet eine tensorielle Kategorie mit drei irreduziblen Objekten. Es handelt sich um die Kategorie des 1 + 1-dimensionalen Isingmodells; wir werden aber keinen direkten Bezug auf das Isingmodell nehmen, sondern die Kategorie selber als grundlegend für das Folgende annehmen.

5.1.1 Definition der Kategorie

Wir haben drei irreduzible Objekte $\text{id}, \sigma, \alpha$. Für die Dimensionen und Statistikphasen gilt

$$d(\sigma) = \sqrt{2}, \kappa(\sigma) = e^{\frac{2\pi i}{16}}; d(\text{id}) = 1, \kappa(\text{id}) = 1; d(\alpha) = 1, \kappa(\alpha) = -1.$$

Es ist $\sigma^2 \cong \text{id} \oplus \alpha$, $\alpha\sigma \cong \sigma$ und $\alpha^2 \cong \text{id}$. Ohne Einschränkung kann sogar

$$\alpha\sigma = \sigma \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \text{id} \tag{5.1}$$

angenommen werden. Es gibt triviale Intertwiner ($\vartheta = \text{id}, \sigma, \alpha$) $\vartheta \otimes \text{id} \rightarrow \vartheta, \text{id} \otimes \vartheta \rightarrow \vartheta, \text{id} \rightarrow \alpha^2$ und $\sigma \rightarrow \alpha\sigma$, die wir alle zu $\mathbf{1}$ wählen können. Es bleiben nicht-triviale Intertwiner [35]

$$\begin{aligned} V &: \sigma \rightarrow \sigma\alpha \\ R &: \text{id} \rightarrow \sigma^2 \\ S &: \alpha \rightarrow \sigma^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Insbesondere ist id das Einselement bzgl. des Bifunktors \otimes , und α, σ sind jeweils zu sich selber konjugiert.

5.1.2 Eine Basis des Intertwinerraumes $(\sigma^2|\sigma^2)$

Anhand von (5.2) sehen wir, daß σ^2 die beiden irreduziblen Unterobjekte id, α jeweils mit Vielfachheit 1 hat; somit bilden RR^* und SS^* eine Basis des Intertwinerraumes $(\sigma^2|\sigma^2)$; es gilt

$$R^*S = S^*R = 0, \quad R^*R = \mathbf{1}_{\text{id}}, \quad S^*S = \mathbf{1}_{\alpha} \quad \text{und} \quad RR^* + SS^* = \mathbf{1}_{\sigma^2}.$$

Die Darstellung von

$$V = V \otimes \mathbf{1}_{\sigma} : \sigma^2 \longrightarrow \sigma\alpha\sigma = \sigma^2,$$

d.h. $V \in (\sigma^2|\sigma^2)$, bzgl. dieser Basis läßt sich wie folgt bestimmen [35]:

$$V^* = V^* \otimes \mathbf{1}_{\alpha} : \sigma\alpha^2 = \sigma \longrightarrow \sigma\alpha$$

ist ein Vielfaches von V , und die relative Phase können wir so wählen, daß $V = V^*$ bzw. $V^2 = \mathbf{1}_{\sigma}$. Es folgt $V = \pm RR^* \pm SS^*$. Desweiteren ist $\alpha(R) : \alpha \longrightarrow \alpha\sigma^2 = \sigma$ ein Vielfaches von S , und die relative Phase können wir so wählen, daß

$$\alpha(R) = S \quad \text{bzw.} \quad \alpha(S) = R. \quad (5.3)$$

Legen wir das globale Vorzeichen von V fest, $V = RR^* \pm SS^*$, folgt $\alpha(V) = \pm V$. Die Konsistenzrelationen für die Statistikoperatoren $\tau(\alpha, \alpha) = -\mathbf{1}$ und $\beta(\sigma, \alpha) : \sigma\alpha \longrightarrow \alpha\sigma = \sigma$, d.h. $\beta(\sigma, \alpha)$ ist ein Vielfaches von $V = V^*$ (es zeigt sich, daß $\beta(\sigma, \alpha) = \beta(\alpha, \sigma) = -iV$) verlangen

$$\alpha(V) = -V,$$

d.h.

$$V = RR^* - SS^*.$$

5.1.3 Wirkung von σ . Statistikoperator $\beta(\sigma, \sigma)$

Zur Verwendung im folgenden Abschnitt bestimmen wir die Wirkung von σ aus R und S sowie den Statistikoperator $\beta(\sigma, \sigma) = \beta_{\sigma}$; wir halten uns dabei an [35].

Zunächst einmal ist

$$\sigma(R) : \sigma \longrightarrow \sigma^3,$$

d.h. $\sigma(R)$ ist eine Linearkombination von R, S ; aus $\alpha\sigma(R) \stackrel{!}{=} \sigma(R)$ (s.o.) folgt $\sigma(R) = \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot (R + S)$. Weiter gilt mit (5.3)

$$\sigma(S) = \sigma\alpha(R) = V\sigma(R)V^* = \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot (R - S)V;$$

man sieht sofort, daß $\alpha\sigma(S) = \sigma(S)$. Aus $R^*\sigma^2(R)R \stackrel{!}{=} R$ folgt $c = \pm 1$.

Für $\beta_{\sigma} \in (\sigma^2|\sigma^2)$ gilt $\beta_{\sigma} = \omega_R RR^* + \omega_S SS^*$; aus der Bedingung $\sigma(R) = \beta_{\sigma}\sigma(\beta_{\sigma})R$ (s. Abb. 5.1) und

$$\frac{\kappa(\sigma)}{d(\sigma)} = R^*\sigma(\beta_{\sigma})R$$

(s. (2.5)) sowie der Unitarität von β_{σ} folgen $c = 1$ und $\omega_R = -i\omega_S = \frac{1}{\kappa(\sigma)}$, d.h.

$$\sigma(R) = \sqrt{\frac{1}{2}}(R + S), \quad \sigma(S) = \sqrt{\frac{1}{2}}(R - S)V \quad (5.4)$$

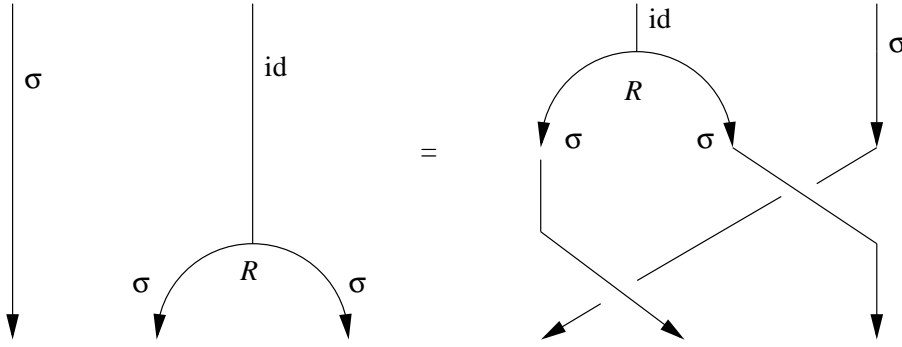


Abbildung 5.1: $\sigma(R) = \beta_\sigma \sigma(\beta_\sigma)R$

und

$$\beta(\sigma, \sigma) \equiv \beta_\sigma = \frac{1}{\kappa}(RR^* + iSS^*) \neq \beta_\sigma^*$$

mit $\kappa := \kappa(\sigma)$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß

$$b_i \mapsto \sigma^{i-1}(\beta_\sigma), \quad i = 1, \dots, n-1$$

eine Darstellung der \mathcal{B}_n ist.

5.2 Eine Darstellung der Zopfgruppe

Wir betrachten den reduziblen Sektor $\varrho = N\sigma$ und wenden das in Abschnitt 4.2 beschriebene Verfahren an, d.h. in diesem Abschnitt bestimmen wir die durch die obigen Beziehungen induzierte Darstellung der Zopfgruppe $b_i \mapsto \varrho^{i-1}(\beta(\varrho, \varrho))$ und versuchen dann in Abschnitt 5.3, in dieser Darstellung einen Erzeuger m mit den Eigenschaften aus Theorem 4.2.6 darzustellen.

Wir beginnen, indem wir eine Basis von $(\varrho^2 | \varrho^2) \ni \beta(\varrho, \varrho)$ angeben.

5.2.1 Selbstintertwiner von ϱ^2

Da ϱ die direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^N \sigma$ ist, existieren N Isometrien

$$W_i : \sigma \longrightarrow \varrho \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^N W_i W_i^* = \mathbf{1}_\varrho \quad \text{und} \quad W_i^* W_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_\sigma.$$

Die Selbstintertwiner von ϱ^2 sind von der Gestalt " $\varrho^2 \longrightarrow \sigma^2, \sigma^2 \longrightarrow \sigma^2, \sigma^2 \longrightarrow \varrho^2$ " (Abb. 5.2). Da RR^*, SS^* eine Basis für den Intertwiner-Raum $\sigma^2 \longrightarrow \sigma^2$ bilden, können wir mit $W_{ij} := W_i \otimes W_j$

$$\{W_{ij}RR^*W_{kl}^*, W_{ij}SS^*W_{kl}^* \quad \text{mit} \quad i, j, k, l = 1, \dots, N\}$$

als Basis für $(\varrho^2 | \varrho^2)$ wählen. Ein Intertwiner $I : \varrho^2 \longrightarrow \varrho^2$ ist dann von der Gestalt

$$I = \sum_{i,j,k,l=1}^N (\Gamma_{ij,kl}^R(I) W_{ij}RR^*W_{kl}^* + \Gamma_{ij,kl}^S(I) W_{ij}SS^*W_{kl}^*) \quad (5.5)$$

mit Koeffizienten $\Gamma_{ij,kl}^{R,S}$. Unitarität des Intertwiners I ist äquivalent zur Unitarität der Koeffizientenmatrizen $\Gamma^{R,S}$, wie man sich leicht überzeugt.

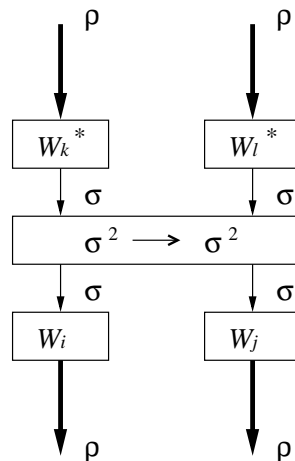


Abbildung 5.2: Die Selbstintertwiner von ϱ^2

5.2.2 Darstellung der \mathcal{B}_n

Wir setzen für den Erzeuger b_i der \mathcal{B}_n ($W_{a_1 \dots a_n} := W_{a_1} \otimes \dots \otimes W_{a_n}$, $\sum_a W_a W_a^* = \mathbf{1}_\varrho$)

$$\begin{aligned}
 b_i &\mapsto \varrho^{i-1}(\beta(\varrho, \varrho)) \equiv \varrho^{i-1}(\beta) \\
 &= \sum W_{a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} a_i} \circ \sigma^{i-1}(\beta_\sigma) \circ W_{a_1^* \dots a_{i-1}^* a_i^* a_{i+1}^*}
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

(s. Abb. 5.3). Wieder kann man sich leicht davon überzeugen, daß dies eine Darstellung der \mathcal{B}_n ist.

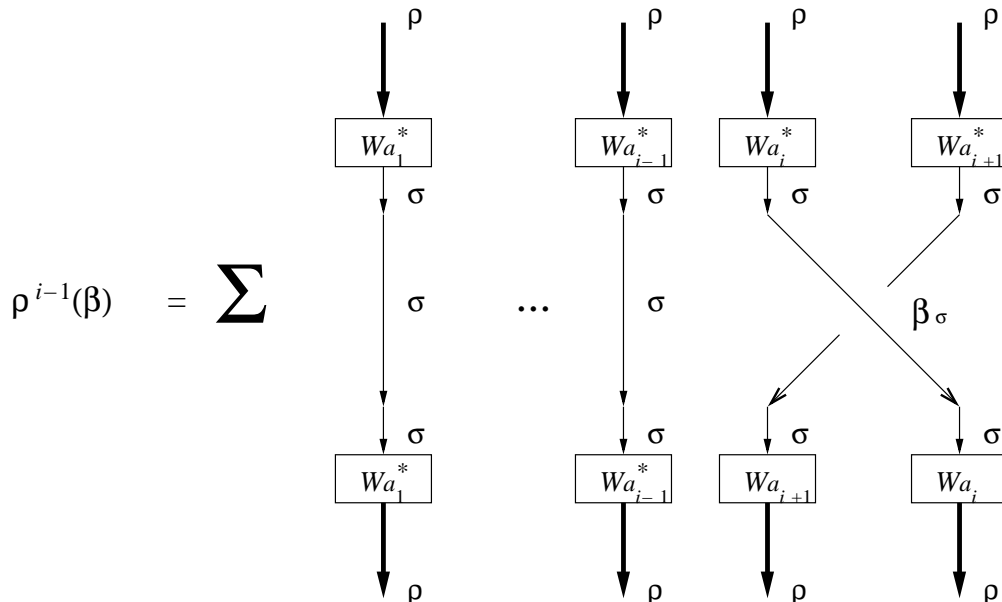


Abbildung 5.3: Darsteller $\varrho^{i-1}(\beta(\varrho, \varrho)) \equiv \varrho^{i-1}(\beta)$ des Erzeugers b_i der \mathcal{B}_n

5.2.3 Explizite Angabe der Darsteller von b_1 und b_2^2

Zur späteren Verwendung geben wir die Darsteller von b_1 und b_2^2 an.
 b_1 wird dargestellt durch

$$\beta(\varrho, \varrho) \equiv \beta = \sum W_{ab} \beta_\sigma W_{ba}^* = \sum W_{ab} \frac{1}{\kappa} (RR^* + iSS^*) W_{ba}^*. \quad (5.7)$$

Weiter ist $\sigma(\beta_\sigma) = \frac{1}{\kappa} [\sigma(RR^*) + i\sigma(SS^*)]$. Mit den Gleichungen (5.4) ergibt sich

$$\sigma(RR^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + RS^* + SR^*), \quad \sigma(SS^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - RS^* - SR^*),$$

d.h.

$$\sigma(\beta_\sigma)^2 = \frac{1}{\kappa^2} (RS^* + SR^*).$$

Somit wird b_2^2 dargestellt durch

$$\begin{aligned} \varrho(\beta)^2 &= \left(\sum W_{abc} \sigma(\beta_\sigma) W_{acb}^* \right) \circ \left(\sum W_{def} \sigma(\beta_\sigma) W_{dfe}^* \right) \\ &= \sum W_{abc} \sigma(\beta_\sigma)^2 W_{abc}^* \\ &= \sum W_{abc} \frac{1}{\kappa^2} (RS^* + SR^*) W_{abc}^*. \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.2.4 Strategie zur Erweiterung der Darstellung

Wir haben einen gezopfsten Statistikoperator β , der via (5.6) eine Darstellung der Zopfgruppe liefert, und versuchen jetzt, diese zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n zu erweitern; d.h. wir suchen einen ‘symmetrischen Statistikoperator’¹ $\tau \in (\varrho^2 | \varrho^2)$, so daß die von diesem gelieferte Darstellung der \mathcal{P}_n mit der obigen Zopfgruppendarstellung kompatibel ist (s. Definition 3.3.3). Nach Abschnitt 4.2 ist die Existenz von τ äquivalent dazu, daß in $(\varrho^2 | \varrho^2)$ ein unitärer² Intertwiner μ existiert, so daß $\varrho^{i-1}(\beta)$, $i = 1, \dots, n-1$ und μ als Darsteller des Erzeugers m das System aus Theorem 4.2.6 lösen. τ ist dann durch $\tau = \beta^* \mu$ gegeben.

Die Bedingungen aus Theorem 4.2.6 sind z.T. automatisch erfüllt; so implizieren die Forderungen an den Bifunktor \otimes bereits

$$R_1 \otimes R_2 = \mathbf{1}_{\sigma_1} \otimes R_2 \circ R_1 \otimes \mathbf{1}_{\varrho_2} = R_1 \otimes \mathbf{1}_{\sigma_2} \circ \mathbf{1}_{\varrho_1} \otimes R_2 \quad \forall R_i \in (\sigma_i | \varrho_i), i = 1, 2.$$

Wir werten diese Identität für $\sigma_{1,2} = \varrho_{1,2} \equiv \varrho^2$ aus. $R_1 \otimes \mathbf{1}_{\varrho^2}$ ist ein beliebiger Intertwiner in (ϱ^4, ϱ^4) , der die beiden linken ϱ miteinander verknüpft, und $\mathbf{1}_{\varrho^2} \otimes R_2$ ein Intertwiner, der die beiden rechten ϱ miteinander verknüpft. Die obige Gleichung lautet dann

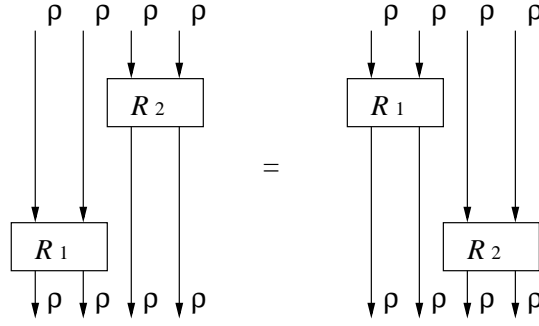
$$\mathbf{1}_{\varrho^2} \otimes R_2 \circ R_1 \otimes \mathbf{1}_{\varrho^2} = R_1 \otimes \mathbf{1}_{\varrho^2} \circ \mathbf{1}_{\varrho^2} \otimes R_2$$

(Abb. 5.4); entsprechend sind die Kommutatoren zwischen μ und $\varrho^j(\beta)$, $j \geq 3$ automatisch erfüllt.

Die verbleibenden Relationen stellen Restriktionen an μ .

¹Wegen $d(\sigma) = \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ ist nicht zu erwarten, daß es einen symmetrischen Statistikoperator $\tau \in (\varrho^2 | \varrho^2)$ mit voller Natürlichkeit gibt (s. Bemerkung 2.3); selbst wenn wir also ein τ fänden, das eine Darstellung der \mathcal{P}_n lieferte, die mit der gegebenen Zopfgruppendarstellung kompatibel wäre, handelte es sich evtl. nicht im eigentlichen Sinn um einen symmetrischen Statistikoperator.

²Wir erinnern daran, daß die Statistikoperatoren unitäre Intertwiner sind.


 Abbildung 5.4: $\mathbf{1}_{Q^2} \otimes R_2 \circ R_1 \otimes \mathbf{1}_{Q^2} = R_1 \otimes \mathbf{1}_{Q^2} \circ \mathbf{1}_{Q^2} \otimes R_2$

5.3 Auswertung der Relationen aus Theorem 4.2.6

Für μ (den potentiellen Darsteller des Erzeugers m) machen wir in leichter Vereinfachung der Notation von oben den Ansatz

$$\mu = \sum W_{ab}(M_{ab,cd}^R RR^* + M_{ab,cd}^S SS^*)W_{cd}^* \quad (5.9)$$

mit unitären Matrizen M^R, M^S .

Lemma 5.3.1

Aus Gleichung (4.25) in Theorem 4.2.6 folgt

$$\kappa^2 M_{ab,cd}^R = \overline{M_{dc,ba}^R} \quad \text{und} \quad \kappa^2 M_{ab,cd}^S = -\overline{M_{dc,ba}^S}$$

BEWEIS.

Aus Gleichung (4.25) in Theorem 4.2.6 folgt für die Darsteller β bzw. μ von b_1 bzw. m (s. (5.7), (5.9))

$$\begin{aligned} \sum W_{ab}(M_{ab,cd}^R RR^* + M_{ab,cd}^S SS^*)W_{cd}^* &\stackrel{!}{=} \left(\sum W_{ab} \frac{1}{\kappa} (RR^* + iSS^*) W_{ba}^* \right) \\ &\quad \circ \left(\sum W_{ef} (\overline{M_{cd,ef}^R} RR^* + \overline{M_{cd,ef}^S} SS^*) W_{cd}^* \right) \\ &\quad \circ \left(\sum W_{gh} \frac{1}{\kappa} (RR^* + iSS^*) W_{hg}^* \right) \\ &= \sum W_{ab} \frac{1}{\kappa^2} (\overline{M_{gh,ba}^R} RR^* - \overline{M_{gh,ba}^S} SS^*) W_{hg}^* \quad (5.10) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das Lemma. □

Lemma 5.3.2

Aus Gleichung (4.27) in Theorem 4.2.6 folgt

$$M^R = M^S.$$

BEWEIS.

Einerseits gilt

$$\begin{aligned}
\mu \varrho(\beta)^2 &= \left(\sum W_{ab} (M_{ab,cd}^R RR^* + M_{ab,cd}^S SS^*) W_{cd}^* \right) \circ \\
&\quad \left(\sum W_{efg} \frac{1}{\kappa^2} (RS^* + SR^*) W_{efg}^* \right) \\
&= \frac{1}{\kappa^2} \sum W_{abg} (M_{ab,cd}^R RS^* + M_{ab,cd}^S SR^*) W_{cdg}^*; \tag{5.11}
\end{aligned}$$

andererseits ist

$$\begin{aligned}
\varrho(\beta)^2 \mu &= \left(\sum W_{abc} \frac{1}{\kappa^2} (RS^* + SR^*) W_{abc}^* \right) \circ \\
&\quad \left(\sum W_{de} (M_{de,fg}^R RR^* + M_{de,fg}^S SS^*) W_{fg}^* \right) \\
&= \frac{1}{\kappa^2} \sum W_{abc} (M_{ab,fg}^R SR^* + M_{ab,fg}^S RS^*) W_{fgc}^*. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Wegen Gleichung (4.27) aus Theorem 4.2.6 müssen aber beide Ausdrücke übereinstimmen, und damit folgt das Lemma. □

Korollar 5.3.3 Die Gleichungen (4.25) und (4.27) aus Theorem 4.2.6 implizieren mit der gegebenen Darstellung der Zopfgruppe

$$M^R = M^S = 0.$$

$\mu = 0$ ist aber keine Darstellung des Erzeugers m , denn eine Darstellung müßte zumindest $D(m)D(m^{-1}) = \mathbf{1}_{\varrho^2}$ erfüllen; damit ist gezeigt:

Theorem 5.3.4

Die Darstellung $b_i \mapsto \varrho^{i-1}(\beta)$, $\varrho = N\sigma$, $i < n$ der Zopfgruppe \mathcal{B}_n , die von der tensoriellen Kategorie des 1+1-dimensionalen Isingmodells erzeugt wird, läßt sich nicht zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern.

Teil III

Konformes verallgemeinertes freies Feld

In diesem Teil der Arbeit verifizieren wir die Hypothese 0.2.1 für den Fall des konformen verallgemeinerten freien Feldes im $1 + 3$ -dimensionalen Minkowskiraum. Wir motivieren die Betrachtung dieses Feldes mit der Beobachtung, daß man ausgehend von seiner $2n$ -Punktfunktion leicht eine Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} erhalten kann, die für anomale Skalendimensionen $\delta \notin \mathbb{Z}$ nicht von der trivialen Art $r(b_i) = \text{const} \cdot r(t_i)$ ist. Diese natürliche Darstellung ist in ihrer natürlichen Basis allerdings nicht zellulär (Kapitel 6).

Kapitel 7 dient der eigentlichen Verifikation der Hypothese 0.2.1: Wir führen unsymmetrisierte Erzeuger und Vernichter auf dem relativ zum Fockraum \mathcal{H}_F des konformen verallgemeinerten freien Feldes erweiterten Hilbertraum $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_1^{\otimes N} \supset \mathcal{H}_F$ ein. Diesen reduzieren wir zu einem Hilbertraum \mathcal{H}_{red} , auf dem alle Darstellungen der unitären Gruppe des Einteilchenraumes $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ mit Vielfachheit 1 auftreten; \mathcal{H}_{red} enthält immer noch \mathcal{H}_F . Wir zerlegen die unsymmetrisierten Erzeuger und Vernichter in Austauschkomponenten, die zwischen verschiedenen Darstellungsräumen von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ in \mathcal{H}_{red} interpolieren und in zeit- und raumartiger Richtung quadratische VR erfüllen. Das konforme verallgemeinerte freie Feld ist eine Linearkombination von bestimmten Austauschkomponenten.

Wegen der quadratischen VR ist klar, daß die \mathcal{BP}_{2n} auf Ketten der Länge $2n$ dieser Austauschkomponenten zellulär dargestellt ist. In Kapitel 8 zeigen wir, daß diese zelluläre Darstellung bis auf Äquivalenz mit der natürlichen Darstellung übereinstimmt und illustrieren dies durch zwei Beispiele.

Wir beschließen die Betrachtung des konformen verallgemeinerten freien Feldes, indem wir einige Analogien zwischen dem Vorgehen in Kapitel 7 und dem DHR-Fall bei Anwesenheit einer Eichsymmetrie ziehen (Kapitel 9).

Kapitel 6

Natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_{2n}

Die $2n$ -Punktfunktion des konformen verallgemeinerten freien Feldes zerfällt in $(2n - 1)!!$ Produkte von Zweipunktfunktionen. Diese bilden die natürliche Basis einer Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} , die für anomale Skalendimensionen $\delta \notin \mathbb{Z}$ nicht vom trivialen Typ $r(b_i) = \text{const} \cdot r(t_i)$ ist. In der natürlichen Basis ist diese Darstellung allerdings nicht zellulär.

Bemerkung 6.0.1 Wie bereits mehrfach angesprochen, existiert keine abstrakte Zerlegungstheorie (etwa nach dem Vorbild von [14, 15, 16, 17], [5] oder [6]), die Hypothese 0.2.1 begründet. Die Idee, statt dessen das konkrete Beispiel des konformen verallgemeinerten freien Feldes zu untersuchen, geht auf eine Anregung von D. Buchholz zurück.

6.1 Das konform invariante verallgemeinerte freie Feld

6.1.1 Definition des Feldes

Verallgemeinerte freie Felder wurden von Greenberg eingeführt [36]; für einen guten Einblick in die Theorie der verallgemeinerten Felder s.a. [37]. Anders als ein kanonisches Feld ist ein verallgemeinertes freies Feld keine Lösung einer Bewegungsgleichung, und die Zweipunktfunktion liegt nicht auf einer Massenschale; vielmehr ist

$$\langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} d\rho(m^2) W_m(x - y),$$

wobei $W_m(x - y)$ die Zweipunktfunktion des Klein-Gordon-Feldes mit Masse m ist. Das *Källen-Lehmann-Gewicht* $d\rho(m^2)$ [38, 39] ist positiv und polynomial beschränkt.

Konkret betrachten wir auf dem $1 + 3$ -dimensionalen Minkowskiraum \mathbb{M} das verallgemeinerte hermitesche skalare freie Feld mit Källen-Lehmann-Gewicht $d\rho(m^2) = m^{2(\delta-2)} dm^2$, $\delta \geq 2$; dieses ist ein konform invariantes Feld mit Skalendimension δ (s. z.B. [40] und die dortigen Referenzen). Es ist gegeben durch¹ (V_+ bezeichne den offenen Vorwärtslichtkegel im

¹Das ist der Spezialfall $d = 4$ des verallgemeinerten hermiteschen skalaren freien Feldes mit Källen-Lehmann-Gewicht $d\rho(m^2) = m^{2(\delta-d/2)} dm^2$ im $1 + (d - 1)$ -dimensionalen Minkowskiraum, $d \geq 2$; das Feld ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \int_{V_+} d^d k \left(\phi(k) e^{-ikx} + \phi^+(k) e^{ikx} \right)$$

mit

$$[\phi(k), \phi^+(k')] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{d-1} k^{2(\delta-\frac{d}{2})} \delta^d(k - k'), \quad [\phi, \phi] = [\phi^+, \phi^+] = 0.$$

Impulsraum)

$$\Phi(x) = \int_{V_+} d^4k \left(\phi(k)e^{-ikx} + \phi^+(k)e^{ikx} \right) =: A(x) + A^+(x) \quad (6.1)$$

mit einem *Erzeugeroperator* $\phi^+(k)$ und einem *Vernichtoperator* $\phi(k)$; diese erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[\phi(k), \phi^+(k')] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 k^{2(\delta-2)} \delta^4(k - k'), \quad [\phi, \phi] = [\phi^+, \phi^+] = 0.$$

Dieses Feld ist definiert auf dem *Fockraum*

$$\mathcal{H}_F := \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \left(\mathcal{H}_1^{\otimes N} \right)_S$$

über dem *Einteilchenraum* $\mathcal{H}_1 = L^2(V_+, k^{2(\delta-2)} d^4k)$; dabei identifizieren wir

$$L^2(V_+, k^{2(\delta-2)} d^4k) \ni \tilde{f} \equiv |\tilde{f}\rangle := (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int_{V_+} d^4k \tilde{f}(k) \phi^+(k) \Omega \in \mathcal{H}_1$$

mit dem *Vakuumevektor* Ω . Der Index $_S$ bezeichnet den symmetrischen Unterraum des Tensorraumes $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$.

Wir führen *uneigentliche Vektoren*

$$|x\rangle := A^+(x)\Omega$$

mit dem *Erzeuger* A^+ aus (6.1) ein. Die uneigentlichen Vektoren ergeben nach dem Verschmieren mit einer quadratintegriblen Funktion f einen eigentlichen Vektor; man sieht, daß für

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{V_+} dk \tilde{f}(k) e^{-ikx} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f}(k) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int dx f(x) e^{ikx}$$

gilt

$$|\tilde{f}\rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int dx f(x) |x\rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int dx f(x) A^+(x)\Omega =: A^+(f)\Omega \equiv |f\rangle.$$

Für den Kommutator unseres verallgemeinerten freien Feldes Φ gilt

$$\begin{aligned} [\Phi(x), \Phi(y)] &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{V_+} k^{2(\delta-2)} d^4k \left\{ e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)} \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} m^{2(\delta-2)} dm^2 \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{V_+} d^4k \delta(k^2 - m^2) \left\{ e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)} \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} m^{2(\delta-2)} dm^2 \Delta_m(x-y), \end{aligned} \quad (6.2)$$

Wir setzen im folgenden nur voraus, daß die raumartige Region bzgl. eines Punktes bzw. einer beschränkten Region zusammenhängend ist, d.h. $d > 2$; der Einfachheit halber formulieren wir die definierenden Gleichungen für den Spezialfall $d = 4$ (physikalische Raumzeit).

wobei $\Delta_m(x - y)$ der Kommutator des Klein-Gordon-Feldes der Masse m ist. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} [A(x), A^+(y)] &= \int_{\mathbb{R}_+} m^{2(\delta-2)} dm^2 W_m(x - y) \\ &= \langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle \end{aligned} \quad (6.3)$$

und

$$[A^+(x), A^+(y)] = 0 = [A(x), A(y)] \quad \forall x, y \in \mathbb{M}.$$

Der Erzeuger A^+ wirkt auf (den uneigentlichen Vektoren von) $(\mathcal{H}_1^{\otimes N})_S$ durch

$$\begin{aligned} A^+(x) |x_N, \dots, x_1\rangle_S &:= \sqrt{N+1} \cdot (|x\rangle \otimes |x_N, \dots, x_1\rangle)_S \\ &\equiv \sqrt{N+1} \cdot |x, x_N, \dots, x_1\rangle_S \in (\mathcal{H}_1^{\otimes N+1})_S, \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei der Index S die Symmetrisierung in allen Argumenten bezeichnet.

Der Vernichter A aus (6.1) vernichtet das Vakuum, $A(x)\Omega = 0$; aus (6.3) und (6.4) folgt weiter für $|x_N, \dots, x_1\rangle \in (\mathcal{H}_1^{\otimes N})_S$

$$\begin{aligned} A(x) |x_N, \dots, x_1\rangle_S &= \sqrt{\frac{1}{N!}} \cdot A(x) A^+(x_N) \cdots A^+(x_1) \Omega \\ &= \sqrt{\frac{1}{N!}} \sum_{i=1}^N \langle \Phi(x)\Phi(x_i) \rangle A^+(x_N) \cdots \widehat{A^+(x_i)} \cdots A^+(x_1) \Omega \\ &= \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{i=1}^N \langle \Phi(x)\Phi(x_i) \rangle |x_N, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_1\rangle_S \in (\mathcal{H}_1^{\otimes N-1})_S, \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei $\widehat{A^+(x_i)}$ bzw. $\widehat{x_i}$ bedeutet, daß dieser Eintrag gestrichen wird.

Aus (6.1) sowie (6.4) und (6.5) folgt, daß die $2n$ -Punktfunktion des konform invarianten hermiteschen verallgemeinerten skalaren freien Feldes eine Summe von $(2n-1)!!$ Produkten von Zweipunktfunktionen ist,

$$\langle \Phi(x_{2n}) \cdots \Phi(x_1) \rangle = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{2n}, \\ P^{-1}(i+1) > P^{-1}(i)}} \prod_{\substack{i=1, \dots, 2n-1 \\ i \in 2\mathbb{N}-1}} \langle \Phi(x_{P^{-1}(i+1)}) \Phi(x_{P^{-1}(i)}) \rangle. \quad (6.6)$$

6.1.2 Zweipunktfunktion

Die Zweipunktfunktion unseres verallgemeinerten freien Feldes mit Källen-Lehmann-Gewicht $d\rho(m^2) = m^{2(\delta-2)} dm^2$ ist

$$\langle \Phi(y)\Phi(x) \rangle = \text{const} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{(y^0 - x^0 - i\varepsilon)^2 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2} \right)^\delta; \quad (6.7)$$

man liest die zeitartige Vertauschungsrelation

$$\langle \Phi(y)\Phi(x) \rangle = e^{2\pi i \delta} \langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle, \quad y > x \quad (6.8)$$

ab [4]. Diese VR ist eine direkte Folge der Zweipunktfunktion (6.7); aus diesem Grund ist sie nur für das hier betrachtete konform invariante verallgemeinerte freie Feld Φ mit Skalendimension δ (s.o.) gültig.

6.2 Natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_{2n}

Die Eigenschaft (6.8) der konformen Zweipunktfunktion erlaubt im Fall eines konform invarianten skalaren freien Feldes die Konstruktion einer Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} , wenn die x_i jeweils paarweise raum- oder zeitartig zueinander liegen. Basisvektoren des Darstellungsraumes sind die Produkte von Zweipunktfunktionen in der Zerlegung (6.6); wir bezeichnen diese im folgenden mit $\prod \langle \Phi \Phi \rangle$. Die von ihnen gebildete Basis nennen wir *natürliche Basis*, die zugehörige Darstellung *natürliche Darstellung*; den Darstellungsraum der natürlichen Darstellung bezeichnen wir mit $\mathcal{N} := \text{span} \{ \prod \langle \Phi \Phi \rangle \}$.

Wir diskutieren, wie sich ein Basisvektor $\prod \langle \Phi \Phi \rangle$ unter der Vertauschung $\Phi(x_{i+1}) \longleftrightarrow \Phi(x_i)$ verhält:

Falls der Basisvektor den Faktor $\langle \Phi(x_{i+1}) \Phi(x_i) \rangle$ enthält, so enthält das Bild den Faktor $\langle \Phi(x_i) \Phi(x_{i+1}) \rangle$, alle anderen Faktoren bleiben gleich. Dieses Bild ist offenbar nicht von der Form der natürlichen Basisvektoren in (6.6), da die Argumente in diesem Faktor in der falschen Reihenfolge stehen; die "richtige" Form gewinnen wir zurück mit der Identität

$$\langle \Phi(x_i) \Phi(x_{i+1}) \rangle \equiv \chi \langle \Phi(x_{i+1}) \Phi(x_i) \rangle, \quad (6.9)$$

wobei (δ sei die Skalendimension des Feldes)

$$\chi := \begin{cases} e^{2\pi i \delta} & \text{falls } x_i > x_{i+1} \\ e^{-2\pi i \delta} & \text{falls } x_i < x_{i+1} \\ 1 & \text{falls } x_{i+1} \times x_i \end{cases} \quad (6.10)$$

ist (vgl. Gleichung (6.8)). In allen anderen Fällen sieht man leicht, daß $\Phi(x_{i+1}) \longleftrightarrow \Phi(x_i)$ zwei der natürlichen Basisvektoren miteinander vertauscht.

Im Fall $x_{i+1} \times x_i$ wird diese Vertauschung somit durch eine Matrix $r(t_i)$ beschrieben, die aus 2×2 -Blöcken $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ und 1×1 -Blöcken 1 aufgebaut ist, im Fall $x_i > x_{i+1}$ durch eine Matrix $r(b_i)$ mit denselben 2×2 -Blöcken und 1×1 -Blöcken $e^{2\pi i \delta}$ und im Fall $x_i < x_{i+1}$ durch $r(b_i)^{-1}$. Offensichtlich ist für *anomale Skalendimensionen* $\delta \notin \mathbb{Z}$

$$r(b_i) \notin \mathbb{C} \cdot r(t_i).$$

Lemma 6.2.1

Die Matrizen $r(t_i), r(b_i), i = 1, \dots, 2n - 1$ bilden eine Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} .

In der natürlichen Basis ist diese Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} nicht zellulär (s. Abschnitt 6.3.3). Im folgenden Kapitel werden wir auf einem Hilbertraum, der den Fockraum \mathcal{H}_F enthält, Austauschkomponenten identifizieren, die quadratische VR erfüllen. Die Erzeuger und Vernichter des konformen verallgemeinerten freien Feldes erweisen sich als Summen bestimmter Austauschkomponenten. Wegen der quadratischen VR ist klar, daß die \mathcal{BP}_{2n} auf Ketten der Länge $2n$ dieser Austauschkomponenten zellulär dargestellt ist. In Kapitel 8 zeigen wir, daß diese zelluläre Darstellung äquivalent ist zu den obigen Matrizen $r(t_i), r(b_i), i = 1, \dots, 2n - 1$; insbesondere ist dann klar, daß diese wirklich eine Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} bilden. An dieser Stelle verzichten wir auf den nicht sehr schwierigen, aber etwas technischen direkten Beweis der Darstellungseigenschaft und illustrieren stattdessen das oben beschriebene Verfahren, indem wir die natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_4 explizit ausrechnen.

6.3 Natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_4

6.3.1 Zerlegung der Vierpunktfunktion

Die Vierpunktfunktion des konformen verallgemeinerten freien Feldes zerlegen wir gemäß (6.6),

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x_4) \cdots \Phi(x_1) \rangle &= \langle \Phi(x_4)\Phi(x_3) \rangle \langle \Phi(x_2)\Phi(x_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(x_4)\Phi(x_1) \rangle \langle \Phi(x_3)\Phi(x_2) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(x_4)\Phi(x_2) \rangle \langle \Phi(x_3)\Phi(x_1) \rangle \\ &=: e_1 + e_2 + e_3; \end{aligned} \tag{6.11}$$

$e_i, i = 1, 2, 3$ bilden die natürliche Basis der Darstellung der \mathcal{BP}_4 , die wir im folgenden angeben.

6.3.2 Natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_4

Für die Vertauschungen $\Phi(x_{i+1}) \leftrightarrow \Phi(x_i), i = 1, 2, 3$ lesen wir aus (6.11) ab

$$\Phi(x_1) \leftrightarrow \Phi(x_2) : \begin{cases} e_1 \mapsto \chi_{21}e_1 \\ e_2 \mapsto e_3 \\ e_3 \mapsto e_2 \end{cases}, \quad \Phi(x_2) \leftrightarrow \Phi(x_3) : \begin{cases} e_1 \mapsto e_3 \\ e_2 \mapsto \chi_{32}e_2 \\ e_3 \mapsto e_1 \end{cases},$$

$$\Phi(x_3) \leftrightarrow \Phi(x_4) : \begin{cases} e_1 \mapsto \chi_{43}e_1 \\ e_2 \mapsto e_3 \\ e_3 \mapsto e_2 \end{cases},$$

wobei wie in (6.10)

$$\chi_{i+1,i} := \begin{cases} e^{2\pi i\delta} & \text{falls } x_i > x_{i+1} \\ e^{-2\pi i\delta} & \text{falls } x_i < x_{i+1} \\ 1 & \text{falls } x_i \times x_{i+1} \end{cases}$$

ist.

Wir lesen aus den obigen Gleichungen für $x_{i+1} \times x_i$ die Matrizen

$$r(t_1) = r(t_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(t_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ab und für $x_{i+1} > x_i$ die Matrizen

$$r(b_1) = r(b_3) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(b_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{2\pi i\delta} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nun leicht nach, daß diese Matrizen eine Darstellung der \mathcal{BP}_4 bilden.

6.3.3 Nicht-Zellularität in der natürlichen Basis

Wir zeigen, wie die Annahme, die natürliche Darstellung in ihrer natürlichen Basis sei zellulär, zum Widerspruch führt.

Angenommen, die obige Darstellung der \mathcal{BP}_4 wäre zellulär. Insbesondere entspräche dann jeder natürliche Basisvektor einem Pfad der Länge 4 durch geeignete Unterräume von \mathcal{H}_F ,

$$e_j \equiv H_j \circ G_j \circ F_j \circ E_j,$$

wobei H_j, \dots, E_j die *Kanten* eines hypothetischen Graphen wie in Abb. 1.1 sind; $r(t_i), r(b_i)$ “vermischten” nur solche Wege, die sich höchstens in dem Teilstück des von rechts gelesen i -ten und $(i+1)$ -ten Schrittes unterscheiden (vgl. Definition 1.2.4).

Lemma 6.3.1

Unter den obigen Annahmen folgt aus der Form von $r(t_1), r(b_1)$, daß

$$H_2 = H_3 \quad \text{und} \quad G_2 = G_3.$$

BEWEIS.

Die beiden erwähnten Matrizen vermischen die (hypothetischen) Pfade e_2, e_3 . Da diese sich aber wegen der angenommenen Zellularität der Darstellung nur auf dem ersten und zweiten Schritt unterscheiden dürfen, folgt das Lemma. □

$r(g_3) = r(g_1), g = t, b$, mischen e_2 und e_3 in gleicher Weise; da sich die beiden (hypothetischen) Pfade jetzt nur in den ersten beiden Teilstücken unterscheiden dürfen, folgt

$$F_2 = F_3 \quad \text{und} \quad E_2 = E_3.$$

Korollar 6.3.2 Wäre die natürliche Darstellung in der natürlichen Basis zellulär, so folgte

$$e_2 = e_3.$$

Das kann aber schon deswegen nicht sein, weil e_2 und e_3 sich unter $r(t_2), r(b_2)$ unterschiedlich transformieren; damit ist klar, daß die natürliche Darstellung in der natürlichen Basis nicht zellulär ist.

Kapitel 7

Austausch-Komponenten und quadratische VR

Wir verifizieren die Hypothese 0.2.1 für den Spezialfall des konformen verallgemeinerten freien Feldes des vorigen Kapitels; dabei halten wir uns an die folgende Strategie:

Wir führen unsymmetrisierte Erzeuger und Vernichter auf dem relativ zum Fockraum \mathcal{H}_F des konformen verallgemeinerten freien Feldes erweiterten Hilbertraum $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_1^{\otimes N} \supset \mathcal{H}_F$ ein. Die unitäre Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ des Einteilchenraumes ist auf \mathcal{H} reduzibel dargestellt (2. Quantisierung). Wir zerlegen \mathcal{H} in die Darstellungsräume irreduzibler Unterdarstellungen von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$; die entsprechenden Unterräume von $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ korrespondieren zu minimalen Orthogonalprojektoren im Gruppenring der \mathcal{P}_N . Der reduzierte Hilbertraum \mathcal{H}_{red} , auf dem alle irreduziblen Darstellungen der $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ mit Vielfachheit 1 vorkommen, enthält immer noch \mathcal{H}_F .

Wir zerlegen die unsymmetrisierten Erzeuger und Vernichter in Austauschkomponenten, die zwischen verschiedenen Darstellungsräumen von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ in \mathcal{H}_{red} interpolieren und in zeit- und in raumartiger Richtung quadratische VR erfüllen. Die R -Matrizen dieser quadratischen VR werden im wesentlichen bestimmt von den Matrixelementen der Matrizen der Induktion bzw. Restriktion zwischen Darstellungen von \mathcal{P}_N und $\mathcal{P}_{N\pm 1}$. Die Erzeuger und Vernichter A^+ , A des konformen verallgemeinerten freien Feldes und damit auch das Feld selbst ergeben sich als Linearkombinationen von bestimmten Austauschkomponenten.

7.1 Voraussetzungen

7.1.1 Erweiterter Hilbertraum. Erzeuger und Vernichter

Wir betrachten den *erweiterten Hilbertraum*

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_1^{\otimes N} \supset \mathcal{H}_F$$

über dem *Einteilchenraum* \mathcal{H}_1 des vorigen Kapitels. Das Skalarprodukt auf \mathcal{H}_1 sei

$$\langle g|f \rangle := \langle \Phi(\bar{g}) \Phi(f) \rangle,$$

wobei $\langle \Phi(g) \Phi(f) \rangle$ die Zweipunktfunction des konformen verallgemeinerten freien Feldes Φ mit nichtkanonischer Skalendimension δ aus dem vorigen Kapitel ist.

Der mit einer quadratintegrablen Funktion f verschmierte *unsymmetrisierte Erzeuger* $a^+(f)$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} a^+(f)\Omega &= |f\rangle \\ a^+(f)|f_N, \dots, f_1\rangle &:= |f\rangle \otimes |f_N, \dots, f_1\rangle \equiv |f, f_N, \dots, f_1\rangle, \end{aligned} \quad (7.1)$$

der mit f verschmierte *unsymmetrisierte Vernichter* $a(f)$ sei erklärt durch

$$a(f)\Omega = 0 \quad \text{und} \quad a(f)|f_N, \dots, f_1\rangle := \langle \bar{f} | f_N \rangle \cdot |f_{N-1}, \dots, f_1\rangle, \quad N \geq 1. \quad (7.2)$$

Offenbar ist $a(f)^* = a^+(\bar{f})$.

Die unitäre Gruppe auf \mathcal{H}_1 heiße $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$. $\mathcal{H}_1^{\otimes 0} \equiv \Omega$ transformiert sich trivial unter $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$, $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ trägt die N -fache Tensor Darstellung $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}_1))$ (2. Quantisierung).

7.1.2 Gruppenring \mathcal{R}_N der Permutationsgruppe \mathcal{P}_N

Auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$, $N \in \mathbb{N}_0$ wirke die Permutationsgruppe \mathcal{P}_N gemäß

$$\mathcal{P}_N \ni P : |f_N, \dots, f_1\rangle \mapsto |f_{P^{-1}(N)}, \dots, f_{P^{-1}(1)}\rangle. \quad (7.3)$$

Wir bezeichnen mit $\iota : \mathcal{P}_l \hookrightarrow \mathcal{P}_{l+1}$ die *Einbettung* in die "nächstgrößere" Permutationsgruppe, d.h. aus (7.3) folgt

$$\iota^{m-N}(P)|f_m, \dots, f_1\rangle = |f_m, \dots, f_{N+1}\rangle \otimes P|f_N, \dots, f_1\rangle, \quad m > N, P \in \mathcal{P}_N. \quad (7.4)$$

Für $P_N \in \mathcal{P}_N$, $P_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1}$ gilt auf \mathcal{H}_N offenbar

$$a^+(f)P_N = \iota(P_N)a^+(f) \quad \text{und} \quad P_{N-1}a(f) = a(f)\iota(P_{N-1}). \quad (7.5)$$

Außerdem führen wir die Abbildung $\alpha : \mathcal{P}_l \rightarrow \mathcal{P}_{l+1} : t_i \mapsto t_{i+1}$ ein; es folgt

$$\alpha^{m-N}(P)|f_m, \dots, f_1\rangle = P|f_m, \dots, f_{m-N+1}\rangle \otimes |f_{m-N}, \dots, f_1\rangle, \quad m > N, P \in \mathcal{P}_N.$$

Wir setzten (7.3) linear fort auf den Gruppenring \mathcal{R}_N der \mathcal{P}_N :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P P : |f_N, \dots, f_1\rangle \mapsto \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P (P|f_N, \dots, f_1\rangle). \quad (7.6)$$

Die erzeugenden Einheiten der zweiseitigen Ideale im Gruppenring \mathcal{R}_N der \mathcal{P}_N sind die *Youngrahmen*¹ mit N Kästchen, diese sind zentral in \mathcal{R}_N . Die Menge der Youngrahmen mit N Kästchen bezeichnen wir mit \mathcal{Y}_N , ein einzelnes Element von \mathcal{Y}_N mit Y_N . Zwei Youngrahmen $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ und $Y_{N+1} \in \mathcal{Y}_{N+1}$ heißen *benachbart*, $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$, wenn Y_{N+1} aus Y_N durch Hinzufügen eines weiteren Kästchens entsteht (s. Abb. 7.1). Ein *Youngtableau* T_N der Größe N ist eine Abfolge von benachbarten Youngrahmen, $T_N = (Y_N, Y_{N-1}, \dots, Y_2, Y_1)$, $Y_k \triangleleft Y_{k+1}$, $k = 1, \dots, N-1$. Wir sagen, daß T_N zum Rahmen Y_N *gehört*, $T_N | Y_N$, wenn Y_N der größte Rahmen in dieser Abfolge ist. Die Menge aller Youngtableaux der Größe N bezeichnen wir mit \mathcal{T}_N . Bei der Angabe der Rahmenabfolge eines Tableaus verzichten wir auf $Y_1 = \square = \mathbf{1}$, da es keinen anderen Rahmen in \mathcal{Y}_1 gibt und die Angabe dieses Rahmens keine nichttriviale Information beinhaltet.

¹Eine recht umfassende Abhandlung der Darstellungstheorie des Ringes \mathcal{R}_N der symmetrischen Gruppe \mathcal{P}_N , in der die Youngrahmen und -tableaux eine wichtige Rolle spielen, findet sich bei [41]. Die für den gegebenen Zusammenhang wichtigsten Resultate sind in Abschnitt B.1 von Anhang B zusammengestellt.

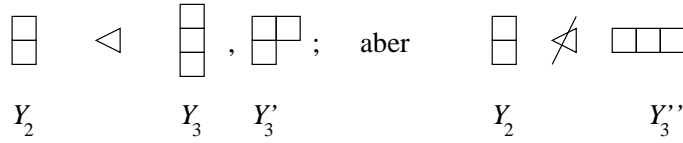


Abbildung 7.1: $Y_2 \not\triangleleft Y_3''$, weil nicht nur ein Kästchen hinzugefügt, sondern auch noch eines umgesetzt werden müßte.

Für ein Youngtableau $T_N = (Y_N, Y_{N-1}, \dots, Y_2) \in \mathcal{T}_N$ definieren wir² ($P^* := P^{-1}, P \in \mathcal{P}_N$)

$$Q(T_N) := Y_N \circ \alpha(Y_{N-1}) \circ \dots \circ \alpha^{N-2}(Y_2) = Q(T_N)^*;$$

die $Q(T_N)$ sind minimale Orthogonalprojektoren in \mathcal{R}_N . Es gilt

$$Q(T_N)Q(T'_N) = \delta_{T_N, T'_N} Q(T_N), \quad \sum_{T_N | Y_N} Q(T_N) = Y_N, \quad \sum_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} Y_N = \mathbf{1}_{\mathcal{R}_N} \quad (7.7)$$

und

$$Y_N \circ \iota(Y_{N-1}) \neq 0 \iff Y_{N-1} \triangleleft Y_N \quad (7.8)$$

und ebenso natürlich für $\iota(Y_{N-1}) \circ Y_N$ (s. Abschnitt B.1 von Anhang B).

$Q(T_N) \in \mathcal{R}_N$ ist gemäß (7.3) zunächst auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ definiert. Wir setzen $Q(T_N)$ auf \mathcal{H} fort durch

$$Q(T_N)\mathcal{H}_1^{\otimes m} = 0 \quad \text{falls } N \neq m$$

Im Fall $m > N$ gilt wegen (7.4)

$$\mathcal{R}_m \ni \iota^{m-N} Q(T_N) |f_m, \dots, f_1\rangle = |f_m, \dots, f_{N+1}\rangle \otimes Q(T_N) |f_N, \dots, f_1\rangle.$$

Wir benutzen die Bezeichnung

$$\mathcal{H}_{T_N} := Q(T_N)\mathcal{H}_1^{\otimes N}.$$

7.2 Zerlegung von \mathcal{H} in Darstellungsräume von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$

Die Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ ist auf \mathcal{H} reduzibel dargestellt; wir zerlegen \mathcal{H} in die Darstellungsräume irreduzibler Unterdarstellungen von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$. Projektoren auf diese Räume sind bekanntlich minimale Orthogonalprojektoren in $\mathcal{R}_N, N \in \mathbb{N}_0$, etwa die $Q(T_N)$ aus Abschnitt 7.1.2³. Wir werden \mathcal{H} jedoch nicht direkt durch die $Q(T_N)$ zerlegen, sondern durch Elemente von $Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)})$; dies führt nach der Auswahl eines *Referenztableaus* T_N^0 für jeden Rahmen $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ auf eine Zerlegung der Form

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \mathbb{C}^{f_{Y_N}} \otimes \mathcal{H}_{T_N^0},$$

wobei auf $\mathcal{H}_{\text{red}} := \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \mathcal{H}_{T_N^0}$ jede irreduzible Darstellung von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ mit Vielfachheit 1 vorkommt (d.h. ein Repräsentant je Klasse äquivalenter Darstellungen), während die entsprechende linke Tensorkomponente die Vielfachheit dieser Darstellung in \mathcal{H} angibt (vgl. (1.18)). Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Aussagen über die $Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)})$.

² α und ι setzen wir gemäß $\alpha(c_1 P_1 + c_2 P_2) := c_1 \alpha(P_1) + c_2 \alpha(P_2)$, entsprechend für ι , linear von der Gruppe auf den Ring fort.

³Die minimalen Orthogonalprojektoren sind nur bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

7.2.1 Die Mengen $Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)})$

Jede Menge $Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)})$ enthält höchstens ein unabhängiges Element:

Lemma 7.2.1

Sei $T_N^{(i)}|Y_N^{(i)}$, $i = 1, 2$. Falls $Y_N^{(2)} \neq Y_N^{(1)}$ ist, so ist

$$Q(T_N^{(2)})\gamma Q(T_N^{(1)}) = 0 \quad \forall \gamma \in \mathcal{R}_N.$$

Ist dagegen $Y_N^{(2)} = Y_N^{(1)}$, so ist

$$Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)}) := \left\{ Q(T_N^{(2)})\gamma Q(T_N^{(1)}) \mid \gamma \in \mathcal{R}_N \right\}$$

eindimensional, d.h. alle Elemente von $Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)})$ sind Vielfache eines Repräsentanten.

BEWEIS.

Der erste Teil des Lemmas folgt aus der Tatsache, daß die Y_N zentral in \mathcal{R}_N ([41], Satz III.3.10) und außerdem orthogonal sind. Der zweite Teil folgt direkt aus der Anwendung von [41] III §4 (S. 62) auf \mathcal{R}_N .

□

Korollar 7.2.2 Jedes $\xi \in Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)})$, $T_N^{(1)}, T_N^{(2)}|Y_N$ ist Vielfaches einer partiellen Isometrie, d.h.

$$\xi^* \xi \in \mathbb{R}_+ Q(T_N^{(1)}) \quad \text{und} \quad \xi \xi^* \in \mathbb{R}_+ Q(T_N^{(2)}).$$

7.2.2 Definition der W_{T_N}

Für alle $T_N^{(2)}, T_N^{(1)}|Y_N$ und $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ wählen wir partielle Isometrien

$$W_{T_N^{(2)}, T_N^{(1)}} \in Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)}),$$

so daß

$$W_{T_N^{(2)}, T_N^{(1)}}^* \stackrel{!}{=} W_{T_N^{(1)}, T_N^{(2)}} \quad \text{und} \quad W_{T_N^{(2)}, T_N^{(1)}}^* W_{T_N^{(2)}, T_N^{(1)}} = W_{T_N^{(1)}, T_N^{(1)}} \stackrel{!}{=} Q(T_N^{(1)}). \quad (7.9)$$

Wegen der Eindimensionalität von $Q(T_N^{(2)})\mathcal{R}_N Q(T_N^{(1)})$ sind die $W_{T_N^{(2)}, T_N^{(1)}}$ durch die Bedingungen (7.9) bis auf eine komplexe Phase festgelegt.

Für jeden Rahmen $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ wählen wir ein *Referenztableau* $T_N^0|Y_N$ und setzen für $T_N|Y_N$

$$W_{T_N} := W_{T_N, T_N^0}.$$

Lemma 7.2.3

Es gelten die beiden Gleichungen

$$W_{T_N^{(2)}}^* W_{T_N^{(1)}} = \delta_{T_N^{(2)}, T_N^{(1)}} \cdot Q(T_N^0) \quad \text{und} \quad \sum_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \sum_{T_N|Y_N} W_{T_N} W_{T_N}^* = \mathbf{1}.$$

BEWEIS.

Die erste Gleichung folgt direkt aus Gleichung (7.9) und der Orthogonalität der $Q(T_N)$. Die zweite Gleichung ergibt sich aus

$$\sum_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \sum_{T_N | Y_N} W_{T_N} W_{T_N}^* \stackrel{(7.9)}{=} \sum_{Y_N \in \mathcal{R}_N} \sum_{T_N | Y_N} Q(T_N) = \sum_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} Y_N = \mathbf{1}.$$

□

7.2.3 Transformationsverhalten der W_{T_N} unter der Permutationsgruppe

Zur späteren Verwendung untersuchen wir das Transformationsverhalten der W_{T_N} unter Elementen der Permutationsgruppe. Konkret werden wir die Transformationsgesetze aus Lemma 7.2.4 und Lemma 7.2.5 in Abschnitt 7.6 zur Berechnung der R -Matrizen benötigen.

Lemma 7.2.4

$W_{T_N}, T_N | Y_N$ transformiert sich unter einer unitären Darstellung $U^{(Y_N)}$ der \mathcal{P}_N , d.h. für $P \in \mathcal{P}_N$ gilt

$$PW_{T_N} = \sum_{S_N | Y_N} U_{S_N, T_N}^{(Y_N)}(P) W_{S_N} \quad (7.10)$$

mit einer unitären Matrix $U^{(Y_N)}(P)$.

BEWEIS

der Gleichung (7.10) und der Darstellungseigenschaft $U^{(Y_N)}(P')U^{(Y_N)}(P) = U^{(Y_N)}(P'P)$.

Wegen $W_{T_N} = W_{T_N} Q(T_N^0)$ und

$$\sum_{S_N \in \mathcal{T}_N} Q(S_N) = \sum_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \sum_{S_N | Y_N} Q(S_N) = \sum_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} Y_N = \mathbf{1}$$

gilt mit Lemma 7.2.1

$$PW_{T_N} = \sum_{S_N \in \mathcal{T}_N} Q(S_N) PW_{T_N} Q(T_N^0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } S_N \not| Y_N \\ \sum_{S_N | Y_N} U_{S_N, T_N}^{(Y_N)}(P) W_{S_N} & \text{falls } S_N | Y_N \end{cases} \quad (7.11)$$

Mit $P', P \in \mathcal{P}_N$ gilt $P'P \in \mathcal{P}_N$ und somit

$$P'PW_{T_N} = \sum_{V_N | Y_N} U_{V_N, T_N}^{(Y_N)}(P'P) W_{V_N};$$

andererseits ist

$$P'PW_{T_N} = P' \sum_{S_N | Y_N} U_{S_N, T_N}^{(Y_N)}(P) W_{S_N} = \sum_{V_N, S_N | Y_N} U_{V_N, S_N}^{(Y_N)}(P') U_{S_N, T_N}^{(Y_N)}(P) W_{V_N},$$

d.h.

$$U^{(Y_N)}(P')U^{(Y_N)}(P) = U^{(Y_N)}(P'P).$$

□

Um die Unitarität zu zeigen, zeigen wir zunächst

Lemma 7.2.5

Eine Permutation $P \in \mathcal{P}_N$ wirkt von rechts auf $W_{T_N}^*, T_N | Y_N$ durch

$$W_{T_N}^* P = \sum_{S_N | Y_N} U_{T_N S_N}^{(Y_N)}(P) W_{S_N}^*. \quad (7.12)$$

BEWEIS.

Das Lemma folgt unmittelbar aus Lemma 7.2.4:

$$\begin{aligned} P W_{V_N} &= \sum_{S_N | Y_N} U_{S_N, V_N}^{(Y_N)}(P) W_{S_N} \\ \implies W_{T_N}^* P W_{V_N} &= U_{T_N V_N}^{(Y_N)}(P) Q(T_N^0) \\ \implies W_{T_N}^* P &= \sum_{V_N | Y_N} U_{T_N V_N}^{(Y_N)}(P) W_{V_N}^*. \end{aligned} \quad (7.13)$$

□

Damit können wir die Unitarität der Darstellung $\mathcal{U}^{(Y_N)}$ von \mathcal{P}_N zeigen.

Lemma 7.2.6

Es gilt

$$\overline{U_{S_N T_N}^{(Y_N)}(P)} = U_{T_N S_N}^{(Y_N)}(P^*), \quad \text{d.h.} \quad \left(U^{(Y_N)}(P) \right)^* = U^{(Y_N)}(P^*),$$

also

$$U^{(Y_N)}(P) \left(U^{(Y_N)}(P) \right)^* = \left(U^{(Y_N)}(P) \right)^* U^{(Y_N)}(P) = \mathbb{1}.$$

BEWEIS.

Die Konjugation von Gleichung (7.10) ergibt

$$W_{T_N}^* P^* = \sum_{S_N} \overline{U_{S_N, T_N}^{(Y_N)}(P)} W_{S_N}^*.$$

Der Vergleich mit Gleichung (7.12) liefert das Lemma.

□

Bemerkung 7.2.7 Für ein gegebenes $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ ist $\mathcal{U}^{(Y_N)}$ die Einschränkung der regulären Darstellung von \mathcal{P}_N auf ein minimales Linksideal $\mathcal{R}_N Q(T_N^0), T_N^0 | Y_N$ des Gruppenrings und somit irreduzibel (s. z.B. [41], III §2).

7.2.4 Zerlegung von \mathcal{H}

Wir können nun eine Zerlegung von $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ in Unterräume $W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}$ angeben; da die N -fache Tensorarstellung $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}_1))$ der $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ mit $\mathcal{R}_N \ni W_{T_N}^*$ vertauscht⁴, ist klar, daß diese Unterräume invariant sind unter $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$.

Lemma 7.2.8

Der Unterraum $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ ist isomorph zur direkten Summe der $W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}, T_N \in \mathcal{T}_N$,

$$\mathcal{H}_1^{\otimes N} \cong \bigoplus_{T_N \in \mathcal{T}_N} W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N} = \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \bigoplus_{T_N | Y_N} W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}$$

⁴s.a. Anhang B.2

BEWEIS.

Aus Lemma 7.2.3 folgt

$$\mathcal{H}_1^{\otimes N} = \sum_{T_N \in \mathcal{T}_N} W_{T_N} W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}$$

Das heißt aber, es existieren partielle Isometrien

$$W_{T_N} : W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes N} \quad \text{mit} \quad W_{T_N}' W_{T_N} = \delta_{T_N', T_N} Q(T_N^0), \quad \sum_{T_N \in \mathcal{T}_N} W_{T_N} W_{T_N}^* = \mathbf{1}.$$

Auf $W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N} = Q(T_N^0) W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}$ wirkt $Q(T_N^0)$ aber wie die Identität,

$$W_{T_N}' W_{T_N} |_{W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}} = \delta_{T_N', T_N} \mathbf{1}_{W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}}.$$

Die Existenz solcher partieller Isometrien aber heißt

$$\mathcal{H}_1^{\otimes N} \cong \bigoplus_{T_N \in \mathcal{T}_N} W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}.$$

□

Korollar 7.2.9 \mathcal{H} ist isomorph zur direkten Summe der $W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}$, $T_N | Y_N$, $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ und $N \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \bigoplus_{T_N | Y_N} W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}.$$

Wir führen Bezeichnungen für die irreduziblen Unterdarstellungen der $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ ein:

Definition 7.2.10 Für $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ sei

$$\pi_{T_N}(u) := Q(T_N) \Gamma_N(u) = \Gamma_N(u) |_{\mathcal{H}_{T_N}}$$

und

$$\pi_{Y_N} := \pi_{T_N^0}, \quad \mathcal{H}_{Y_N} := \mathcal{H}_{T_N^0}.$$

Die Irreduzibilität dieser Darstellungen folgt aus der Minimalität der $Q(T_N)$ (vgl. Korollar B.2.4); weiter sind π_{T_N} und $\pi_{T_N'}$ genau dann äquivalent, wenn T_N und T_N' zum selben Rahmen Y_N gehören (vgl. Lemma B.2.5).

Lemma 7.2.11

$W_{T_N}, T_N | Y_N$ ist ein Intertwiner zwischen π_{Y_N} und π_{T_N} , $W_{T_N} \in (\pi_{T_N} | \pi_{Y_N})$.

BEWEIS.

Zu zeigen ist, daß für alle $\Psi \in \mathcal{H}_{Y_N}$, $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$

$$\pi_{T_N}(u) W_{T_N} \Psi = W_{T_N} \pi_{Y_N}(u) \Psi$$

gilt:

$$\begin{aligned} \pi_{T_N}(u) W_{T_N} \Psi &= Q(T_N) \Gamma_N(u) W_{T_N} Q(T_N^0) \Psi \\ &= Q(T_N) W_{T_N} Q(T_N^0) \Gamma_N(u) \Psi \\ &= W_{T_N} \pi_{Y_N}(u) \Psi. \end{aligned} \tag{7.14}$$

□

Es ist unmittelbar klar, daß $W_{T_N}^* \in (\pi_{Y_N} | \pi_{T_N})$ ist. Damit gilt

Korollar 7.2.12 Alle $W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N}, T_N | Y_N$ tragen dieselbe Darstellung $\pi_{Y_N}(\mathcal{U}(\mathcal{H}_1))$. Als Darstellungsraum von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ aufgefaßt, gilt für \mathcal{H} also (vgl. Korollar 7.2.9)

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \bigoplus_{T_N | Y_N} W_{T_N}^* \mathcal{H}_1^{\otimes N} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \mathbb{C}^{f_{Y_N}} \otimes \mathcal{H}_{Y_N}, \quad (7.15)$$

wobei f_{Y_N} die Anzahl der $T_N | Y_N$ ist.

7.3 Der reduzierte Hilbertraum \mathcal{H}_{red}

7.3.1 Definition des reduzierten Hilbertraumes

Wir schränken uns ein auf einen reduzierten Hilbertraum, auf dem alle Darstellungen π_{Y_N} von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ mit $Y_N \in \mathcal{Y}_N, N \in \mathbb{N}_0$ mit Vielfachheit 1 auftreten:

Definition 7.3.1 Der *reduzierte Hilbertraum* ist

$$\mathcal{H}_{\text{red}} := \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \mathcal{H}_{Y_N}.$$

Bezeichnen wir mit \mathfrak{S}_N je nach Kontext den total symmetrischen Youngrahmen in \mathcal{Y}_N bzw. das einzige Tableau zu diesem Rahmen⁵,

$$\mathfrak{S}_N := \boxed{} \cdots \boxed{} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{S}_N := \boxed{1} \cdots \boxed{N},$$

so gilt für den Fockraum \mathcal{H}_F des konformen verallgemeinerten freien Feldes aus Kapitel 6

$$\mathcal{H}_F = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_{\mathfrak{S}_N} \subset \mathcal{H}_{\text{red}}.$$

7.3.2 Die interpolierenden Felder $W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N}$ und $W_{T_N}^* a(f) W_{T_{N+1}}$

Wir betrachten nun die Operatoren $W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N}$ und $W_{T_N}^* a(f) W_{T_{N+1}}$; man überlegt sich mit (7.4) und (7.8) leicht, daß diese nur von Null verschieden sein können, wenn für $T_N | Y_N, T_{N+1} | Y_{N+1}$ gilt, daß $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$.

Offenbar ist

$$W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N} = Q(T_{N+1}^0) W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N} Q(T_N^0)$$

mit $T_N | Y_N, T_{N+1} | Y_{N+1}$ und $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ eine Abbildung

$$W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N} : \mathcal{H}_{Y_N} \longrightarrow \mathcal{H}_{Y_{N+1}} \quad (7.16)$$

⁵Alternativ zur Angabe eines Tableaus durch seine Rahmenabfolge (s. Abschnitt 7.1) kennzeichnen wir ein Tableau $T_N = (Y_N, \dots, Y_2)$ auch derart, daß wir den Rahmen Y_N so mit Zahlen belegen, daß die Kästchen mit den Nummern $1, \dots, k$ den Rahmen Y_k in der Rahmenabfolge bilden; vgl. auch Anhang B: Dort definieren wir ein Tableau $T_N \in \mathcal{T}_N$ zuerst über die Belegung eines Rahmens $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ mit Ziffern $1, \dots, N$ und stellen dann den Zusammenhang zur Rahmenabfolge her.

und entsprechend

$$W_{T_{N-1}}^* a(f) W_{T_N} = Q(T_{N-1}^0) W_{T_{N-1}}^* a(f) W_{T_N} Q(T_N^0)$$

mit $T_{N-1}|Y_{N-1}, T_N|Y_N$ und $Y_{N-1} \triangleleft Y_N$ eine Abbildung

$$W_{T_{N-1}}^* a(f) W_{T_N} : \mathcal{H}_{Y_N} \longrightarrow \mathcal{H}_{Y_{N-1}} \quad (7.17)$$

Es handelt sich aber *nicht* um einen Intertwiner zwischen den Darstellungen π_{Y_N} und $\pi_{Y_{N+1}}$ von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$; vielmehr gilt für $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ beispielsweise

$$\pi_{Y_{N+1}}(u) W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N} |f_N, \dots, f_1\rangle = W_{T_{N+1}}^* a^+(\pi_{\square}(u)f) W_{T_N} \pi_{Y_N}(u) |f_N, \dots, f_1\rangle,$$

wobei die unitäre Gruppe auf den quadratintegralen Funktionen durch

$$a^+(\pi_{\square}(u)f) \Psi_N := (\pi_{\square}(u) |f\rangle) \otimes \Psi_N, \quad \Psi_N \in \mathcal{H}_1^{\otimes N}, N \in \mathbb{N}_0$$

erklärt ist.

Es gibt für gegebene f und Y_N, Y_{N+1} mit $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ i.a. mehr als einen nichtverschwindenden Operator $W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N}, T_N|Y_N, T_{N+1}|Y_{N+1}$. Diese sind jedoch alle Vielfache eines Repräsentanten, wie wir im folgenden Abschnitt zeigen.

Zuvor weisen wir noch darauf hin, daß sich wegen $W_{\mathfrak{S}_N}^* = W_{\mathfrak{S}_N} = Q(\mathfrak{S}_N) = \mathfrak{S}_N$ die Erzeuger und Vernichter des konformen verallgemeinerten freien Feldes Φ aus Kapitel 6 in der Form

$$A^+(f) = \sum_{N=0}^{\infty} \sqrt{N+1} \cdot Q(\mathfrak{S}_{N+1}) a^+(f) Q(\mathfrak{S}_N) \quad (7.18)$$

und

$$A(f) = \sum_{N=1}^{\infty} \sqrt{N} \cdot Q(\mathfrak{S}_{N-1}) a(f) Q(\mathfrak{S}_N) \quad (7.19)$$

schreiben lassen: Für $\Psi_N \in \mathcal{H}_{\mathfrak{S}_N}$ folgt für $A^+(f), A(g)$ wie in (7.18), (7.19) aus (7.1) und (7.2)

$$\begin{aligned} A(g) A^+(f) \Psi_N - A^+(f) A(g) \Psi_N &= (N+1) \cdot Q(\mathfrak{S}_N) a(g) Q(\mathfrak{S}_{N+1}) a^+(f) Q(\mathfrak{S}_N) \Psi_N \\ &\quad - N \cdot Q(\mathfrak{S}_N) a^+(f) Q(\mathfrak{S}_{N-1}) a(g) Q(\mathfrak{S}_N) \Psi_N \\ &= \langle \bar{g} | f \rangle \Psi_N = \langle \Phi(g) \Phi(f) \rangle \Psi_N, \end{aligned} \quad (7.20)$$

d.h. $A^+(f), A(g)$ aus (7.18), (7.19) erfüllen die VR (6.3). $[A^+, A^+] = 0 = [A, A]$ sind offensichtlich ebenfalls erfüllt.

Es folgt

$$\Phi(f) = \sum_{N \in \mathbb{N}_0} \sqrt{N+1} \cdot Q(\mathfrak{S}_{N+1}) a^+(f) Q(\mathfrak{S}_N) + \sum_{N \in \mathbb{N}} \sqrt{N} \cdot Q(\mathfrak{S}_{N-1}) a(f) Q(\mathfrak{S}_N). \quad (7.21)$$

7.4 Austauschkomponenten

Wir zeigen zunächst, daß für gegebene $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ alle $W_{T_{N+1}}^* \iota(W_{T_N}), T_N|Y_N, T_{N+1}|Y_{N+1}$ Vielfache eines Repräsentanten sind. Dann folgt für gegebene f sofort dieselbe Aussage für $W_{T_{N+1}}^* \iota(W_{T_N}) a^+(f) = W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N}, T_N|Y_N, T_{N+1}|Y_{N+1}$.

Lemma 7.4.1

$W_{T_{N+1}}^* \iota(W_{T_N})$ mit $T_N|Y_N, T_{N+1}|Y_{N+1}$ und $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ ist ein Intertwiner $\pi_{\square} \otimes \pi_{Y_N} \longrightarrow \pi_{Y_{N+1}}$.

BEWEIS.

Sei $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$.

$$\begin{aligned}
& W_{T_{N+1}}^* \iota(W_{T_N}) (\pi_{\square} \otimes \pi_{Y_N}) (u) |f_{N+1}, f_N, \dots, f_1\rangle \\
= & W_{T_{N+1}}^* \iota(W_{T_N}) \iota(Q(T_N^0)) \Gamma_{N+1}(u) |f_{N+1}, f_N, \dots, f_1\rangle \\
= & Q(T_{N+1}^0) \Gamma_{N+1}(u) W_{T_{N+1}}^* \iota(W_{T_N}) \iota(Q(T_N^0)) |f_{N+1}, f_N, \dots, f_1\rangle \\
= & \pi_{Y_{N+1}}(u) W_{T_{N+1}}^* \iota(W_{T_N}) |f_{N+1}, f_N, \dots, f_1\rangle
\end{aligned} \tag{7.22}$$

□

Lemma 7.4.2

Der Raum der Intertwiner $\pi_{\square} \otimes \pi_{Y_N} \longrightarrow \pi_{Y_{N+1}}$, $(\pi_{Y_{N+1}}|_{\pi_{\square} \otimes \pi_{Y_N}})$, ist eindimensional, falls $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ gilt; andernfalls existieren keine nichttrivialen Intertwiner.

BEWEIS.

Die Dimension von $(\pi_{Y_{N+1}}|_{\pi_{\square} \otimes \pi_{Y_N}})$ ist gleich der Vielfachheit von $\pi_{Y_{N+1}}$ in der i.a. reduziblen Darstellung $\pi_{\square} \otimes \pi_{Y_N}$. Diese wiederum ist nach [42, 43] gleich der Vielfachheit der Darstellung $\mathcal{U}^{(Y_{N+1})}$ von \mathcal{P}_{N+1} im äußeren Produkt⁶ der Darstellungen $\mathcal{U}^{(\square)}$ und $\mathcal{U}^{(Y_N)}$. Diese wiederum ist nach [44], Kapitel 7-12 für einen gegebenen Rahmen $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ gleich 1 für alle $Y_{N+1} \in \mathcal{Y}_{N+1}$ mit $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ und Null für alle anderen $Y_{N+1} \in \mathcal{Y}_{N+1}$.

□

Bemerkung 7.4.3 Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Darstellungen endlichdimensionaler unitärer Gruppen; die Aussage über die Gleichheit der Vielfachheiten findet sich dann bei [41], VI §5 bzw. [44], Kapitel 10-3.

Korollar 7.4.4 Alle $W_{T_{N+1}}^* \iota(W_{T_N}) a^+(f) = W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N}$ mit $T_{N+1}|Y_{N+1}, T_N|Y_N$ und $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ sind Vielfache eines Repräsentanten $(Y_{N+1}|f|Y_N)$,

$$W_{T_{N+1}}^* a^+(f) W_{T_N} = c_{T_{N+1}T_N} \cdot (Y_{N+1}|f|Y_N), \tag{7.23}$$

wobei $c_{T_{N+1}T_N} \in \mathbb{C}$ und $(Y_{N+1}|f|Y_N) : \mathcal{H}_{Y_N} \longrightarrow \mathcal{H}_{Y_{N+1}}$.

Mit Lemma 7.2.3 folgt daraus, daß auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$

$$a^+(f) = \sum_{Y_{N+1}, Y_N} \sum_{\substack{T_{N+1}|Y_{N+1} \\ T_N|Y_N}} c_{T_{N+1}T_N} \cdot W_{T_{N+1}}(Y_{N+1}|f|Y_N) W_{T_N}^* \tag{7.24}$$

gilt.

Analog erhält man die entsprechenden Gleichungen für die Vernichter (oder einfach durch Adjungieren der obigen Gleichungen und die Umbenennung $f \mapsto \bar{f}$):

$$W_{T_{N-1}}^* a(f) W_{T_N} = \overline{c_{T_N T_{N-1}}} \cdot (Y_{N-1}|f|Y_N)$$

⁶s. [44], Kapitel 7-12

und auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$

$$a(f) = \sum_{Y_{N-1}, Y_N} \sum_{\substack{T_{N-1}|Y_{N-1} \\ T_N|Y_N}} \overline{c_{T_N T_{N-1}}} \cdot W_{T_{N-1}}(Y_{N-1}|f|Y_N) W_{T_N}^*. \quad (7.25)$$

Die $(Y_{N\pm 1}|f|Y_N)$ nennen wir *Austauschkomponenten* von $a^+(f)$ bzw. $a(f)$. Wie in Hypothese 0.2.1 verlangt, ist das konforme Feld eine Linearkombination von bestimmten Austauschkomponenten,

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \sum_{N \in \mathbb{N}_0} \sqrt{N+1} \cdot Q(\mathfrak{S}_{N+1}) a^+(f) Q(\mathfrak{S}_N) + \sum_{N \in \mathbb{N}} \sqrt{N} \cdot Q(\mathfrak{S}_{N-1}) a(f) Q(\mathfrak{S}_N) \\ &= \sum_{N \in \mathbb{N}_0} \sqrt{N+1} \cdot (\mathfrak{S}_{N+1}|f|\mathfrak{S}_N) + \sum_{N \in \mathbb{N}} \sqrt{N} \cdot (\mathfrak{S}_N|f|\mathfrak{S}_{N+1}). \end{aligned} \quad (7.26)$$

In Abschnitt 7.6 zeigen wir, daß die Gesamtheit aller Austauschkomponenten quadratischen VR in zeit- und raumartiger Richtung genügt.

7.5 Die Induktionsmatrix $C^{(Y_{N+1}, Y_N)}$

Zur späteren Verwendung bei der Bestimmung der quadratischen VR der Austauschkomponenten untersuchen wir die aus den Koeffizienten $c_{T_{N+1} T_N}$ in (7.24) bzw. (7.25) gebildete Matrix.

Definition 7.5.1 Die aus den Koeffizienten $c_{T_{N+1} T_N}$ mit $T_N|Y_N$ und $T_{N+1}|Y_{N+1}$ mit $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ gebildete Matrix heiße $C^{(Y_{N+1}, Y_N)}$.

Lemma 7.5.2

$C^{(Y_{N+1}, Y_N)}$ ist ein Intertwiner

$$\mathcal{U}^{(Y_N)}(\mathcal{P}_N) \longrightarrow \mathcal{U}^{(Y_{N+1})} \circ \iota(\mathcal{P}_N),$$

wobei ι die Einbettung $\iota: \mathcal{P}_N \hookrightarrow \mathcal{P}_{N+1}$ bezeichnet.

BEWEIS.

Sei $P \in \mathcal{P}_N$. Gleichung (7.5) besagt

$$a^+(f)P = \iota(P)a^+(f);$$

daraus folgt mit Gleichung (7.24) und Lemma 7.2.5 bzw. Lemma 7.2.4

$$\begin{aligned} & \sum_{Y_{N+1}, Y_N} \sum_{\substack{T_{N+1}|Y_{N+1} \\ S_N|Y_N}} \sum_{T_N|Y_N} c_{T_{N+1} S_N} U_{S_N, T_N}^{(Y_N)}(P) W_{T_{N+1}}(Y_{N+1}|f|Y_N) W_{T_N}^* \\ &= \sum_{Y_{N+1}, Y_N} \sum_{\substack{S_{N+1}|Y_{N+1} \\ T_N|Y_N}} \sum_{T_{N+1}|Y_{N+1}} U_{T_{N+1}, S_{N+1}}^{(Y_{N+1})}(\iota(P)) c_{S_{N+1} T_N} W_{T_{N+1}}(Y_{N+1}|f|Y_N) W_{T_N}^* \end{aligned} \quad (7.27)$$

und somit

$$\sum_{S_N|Y_N} c_{T_{N+1} S_N} U_{S_N, T_N}^{(Y_N)}(P) = \sum_{S_{N+1}|Y_{N+1}} U_{T_{N+1}, S_{N+1}}^{(Y_{N+1})}(\iota(P)) c_{S_{N+1} T_N}$$

bzw.

$$C^{(Y_{N+1}, Y_N)} U^{(Y_N)}(P) = U^{(Y_{N+1})}(\iota(P)) C^{(Y_{N+1}, Y_N)}.$$

□

Definition 7.5.3 $C^{(Y_{N+1}, Y_N)}$, $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ heißt *Induktionsmatrix* zwischen den Darstellungen $\mathcal{U}^{(Y_N)}$ und $\mathcal{U}^{(Y_{N+1})} \circ \iota$.

Da $\mathcal{U}^{(Y_N)}$ irreduzibel ist, ist nach Schurs Lemma $C^{(Y_{N+1}, Y_N)} C^{(Y_{N+1}, Y_N)*}$ ein Vielfaches der $\mathbf{1}$ (und $C^{(Y_{N+1}, Y_N)*} C^{(Y_{N+1}, Y_N)} = 0$, falls $Y_N \neq Y'_N$; andernfalls wäre $C^{(Y_{N+1}, Y_N)*} C^{(Y_{N+1}, Y_N)}$ ein nichttrivialer Intertwiner zwischen nicht äquivalenten irreduziblen Darstellungen). Wähle die Normierung der $(Y_{N+1}|f|Y_N)$ so, daß $C^{(Y_{N+1}, Y_N)*} C^{(Y_{N+1}, Y_N)} = \mathbf{1}$, d.h.

$$\sum_{T_{N+1}|Y_{N+1}} \overline{c_{T_{N+1}S_N}} c_{T_{N+1}T_N} = \delta_{S_N, T_N}. \quad (7.28)$$

Die reduzible Darstellung $\mathcal{U}^{(Y_{N+1})} \circ \iota$ der \mathcal{P}_N wiederum zerfällt in die irreduziblen Darstellungen $\mathcal{U}^{(Y_N)}(\mathcal{P}_N)$ mit $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$, diese kommen jeweils mit Vielfachheit 1 vor ([45], V §18.1). Mit der obigen Normierung ergibt sich

$$\sum_{Y_N \triangleleft Y_{N+1}} C^{(Y_{N+1}, Y_N)} C^{(Y_{N+1}, Y_N)*} = \mathbf{1},$$

d.h.

$$\sum_{Y_N \triangleleft Y_{N+1}} \sum_{S_N|Y_N} c_{T'_{N+1}S_N} \overline{c_{T_{N+1}S_N}} = \delta_{T'_{N+1}, T_{N+1}}, \quad T'_{N+1}, T_{N+1}|Y_{N+1}. \quad (7.29)$$

7.6 Quadratische VR. R -Matrizen

Wir zeigen die Existenz quadratischer VR der Austauschkomponenten, indem wir die R -Matrizen in den vier denkbaren Fällen

$$(Y_{N+1}|f|Y_N)(Y_N|g|Y_{N-1}), (Y_{N-1}|f|Y_N)(Y_N|g|Y_{N+1}), \\ (Y'_N|f|Y_{N-1})(Y_{N-1}|g|Y_N), (Y'_N|f|Y_{N+1})(Y_{N+1}|g|Y_N)$$

bestimmen. Die Träger der Funktionen f, g seien entweder vollständig raumartig oder vollständig zeitartig zueinander. In diesem Abschnitt untersuchen wir die ersten drei Fälle, mit dem (komplizierteren) vierten Fall beschäftigen wir uns im folgenden Abschnitt.

7.6.1 $(Y_{N+1}|g|Y_N)(Y_N|f|Y_{N-1})$ und $(Y_{N-1}|g|Y_N)(Y_N|f|Y_{N+1})$

Wir beginnen mit $(Y_{N+1}|g|Y_N)(Y_N|f|Y_{N-1})$. Den Ausgangspunkt bildet die folgende Beobachtung: Bezeichnet t_N die Transposition des N -ten und des $(N+1)$ -ten Tensorfaktors, so gilt auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N-1}$ offenbar

$$a^+(f)a^+(g)|f_{N-1}, \dots, f_1\rangle = t_N a^+(g)a^+(f)|f_{N-1}, \dots, f_1\rangle,$$

für beliebige $|f_{N-1}, \dots, f_1\rangle \in \mathcal{H}_1^{\otimes N-1}$, d.h. auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N-1}$, $N \geq 1$ ist

$$a^+(f)a^+(g) = t_N a^+(g)a^+(f). \quad (7.30)$$

Lemma 7.6.1

Es gilt die Beziehung

$$\begin{aligned}
& (Y_{N+1}|f|Y_N) (Y_N|g|Y_{N-1}) \\
= & \sum_{Y'_N} \left(\sum_{\substack{T'_{N+1}|Y'_N \\ S'_N|Y'_N \\ T_{N+1}, T'_{N+1}|Y_{N+1}}} \overline{c_{S'_N T_{N-1}} c_{T_{N+1} S'_N}} \cdot U_{T_{N+1} T'_{N+1}}^{(Y_{N+1})}(t_N) \cdot c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_N T_{N-1}} \right) \\
& \cdot (Y_{N+1}|g|Y'_N) (Y'_N|f|Y_{N-1}). \tag{7.31}
\end{aligned}$$

BEWEIS.

Einsetzen von (7.24) in Gleichung (7.30) führt auf

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{Y_{N+1} \\ Y_N \\ Y_{N-1}}} \sum_{\substack{T_{N+1}|Y_{N+1} \\ T_N|Y_N \\ T_{N-1}|Y_{N-1}}} c_{T_{N+1} T_N} c_{T_N T_{N-1}} W_{T_{N+1}} (Y_{N+1}|f|Y_N) (Y_N|g|Y_{N-1}) W_{T_{N-1}}^* \\
= & \sum_{\substack{Y'_{N+1} \\ Y'_N \\ Y'_{N-1}}} \sum_{\substack{T'_{N+1}|Y'_{N+1} \\ T'_N|Y'_N \\ T'_{N-1}|Y'_{N-1} \\ S'_{N+1}|Y'_{N+1}}} U_{S'_{N+1} T'_{N+1}}^{(Y'_{N+1})}(t_N) c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_N T'_{N-1}} W_{S'_{N+1}} (Y'_{N+1}|g|Y'_N) \\
& \cdot (Y'_N|f|Y'_{N-1}) W_{T'_{N-1}}^*, \tag{7.32}
\end{aligned}$$

Multiplikation mit einem $W_{T_{N+1}}^*$ von links und einem $W_{T_{N-1}}$ ergibt

$$\begin{aligned}
& \sum_{Y_N} \sum_{T_N|Y_N} c_{T_{N+1} T_N} c_{T_N T_{N-1}} (Y_{N+1}|f|Y_N) (Y_N|g|Y_{N-1}) \\
= & \sum_{Y'_N} \sum_{\substack{T'_{N+1}|Y_{N+1} \\ T'_N|Y'_N}} U_{T_{N+1} T'_{N+1}}^{(Y_{N+1})}(t_N) c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_N T_{N-1}} (Y_{N+1}|g|Y'_N) (Y'_N|f|Y_{N-1}). \tag{7.33}
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\overline{c_{T_{N+1} S'_N}}$ und Summation über $T_{N+1}|Y_{N+1}$ führt mit (7.28) auf

$$\begin{aligned}
c_{S'_N T_{N-1}} (Y_{N+1}|f|Y_N) (Y_N|g|Y_{N-1}) &= \sum_{Y'_N} \sum_{\substack{T_{N+1}, T'_{N+1}|Y_{N+1} \\ T'_N|Y'_N}} \overline{c_{T_{N+1} S'_N}} \cdot U_{T_{N+1} T'_{N+1}}^{(Y_{N+1})}(t_N) \\
&\cdot c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_N T_{N-1}} (Y_{N+1}|g|Y'_N) (Y'_N|f|Y_{N-1}), \tag{7.34}
\end{aligned}$$

wobei Y_N der Rahmen von S_N ist. Durch Multiplikation mit $\overline{c_{S'_N T_{N-1}}}$ und Summation über $S_N|Y_N$ gelangt man schließlich zu Gleichung (7.31). □

Die Koeffizienten $\sum \overline{c_{S_N T_{N-1}} c_{T_{N+1} S_N}} \cdot U_{T_{N+1} T'_{N+1}}^{(Y_{N+1})}(t_N) \cdot c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_N T_{N-1}}$ hängen *a priori* noch von dem tableauwertigen Index T_{N-1} ab; es gilt aber

Lemma 7.6.2

Das Matrixprodukt $C^{(Y_{N-1}, Y_N)} * C^{(Y_N, Y_{N+1})} * U^{(Y_{N+1})}(t_N) C^{(Y_{N+1}, Y'_N)} C^{(Y'_N, Y_{N-1})}$ ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix, d.h.

$$\sum_{\substack{T'_N | Y'_N \\ S_N | Y_N \\ T_{N+1}, T'_{N+1} | Y_{N+1}}} \overline{c_{S_N T_{N-1}} c_{T_{N+1} S_N}} \cdot U_{T_{N+1} T'_{N+1}}^{(Y_{N+1})}(t_N) \cdot c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_N S_{N-1}} = \delta_{T_{N-1} S_{N-1}} R_{Y_N Y'_N}^{(Y_{N+1}, Y_{N-1})}.$$

BEWEIS.

Sei $P \in \mathcal{P}_{N-1}$. Es ist klar, daß die Einbettung von P in \mathcal{P}_{N+1} , $l^2(P)$, mit t_N vertauscht. Dann gilt mit Lemma 7.5.2

$$\begin{aligned} & C^{(Y_{N-1}, Y_N)} * C^{(Y_N, Y_{N+1})} * U^{(Y_{N+1})}(t_N) C^{(Y_{N+1}, Y'_N)} C^{(Y'_N, Y_{N-1})} U^{(Y_{N-1})}(P) \\ &= C^{(Y_{N-1}, Y_N)} * C^{(Y_N, Y_{N+1})} * U^{(Y_{N+1})}(t_N) C^{(Y_{N+1}, Y'_N)} U^{(Y'_N)}(l(P)) C^{(Y'_N, Y_{N-1})} \\ &= C^{(Y_{N-1}, Y_N)} * C^{(Y_N, Y_{N+1})} * U^{(Y_{N+1})}(t_N l^2(P)) C^{(Y_{N+1}, Y'_N)} C^{(Y'_N, Y_{N-1})} \\ &= C^{(Y_{N-1}, Y_N)} * U^{(Y_N)}(l(P)) C^{(Y_N, Y_{N+1})} * U^{(Y_{N+1})}(t_N) C^{(Y_{N+1}, Y'_N)} C^{(Y'_N, Y_{N-1})} \\ &= U^{(Y_{N-1})}(P) C^{(Y_{N-1}, Y_N)} * C^{(Y_N, Y_{N+1})} * U^{(Y_{N+1})}(t_N) C^{(Y_{N+1}, Y'_N)} C^{(Y'_N, Y_{N-1})}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

d.h. $C^{(Y_{N-1}, Y_N)} * C^{(Y_N, Y_{N+1})} * U^{(Y_{N+1})}(t_N) C^{(Y_{N+1}, Y'_N)} C^{(Y'_N, Y_{N-1})}$ ist ein Intertwiner $\mathcal{U}^{(Y_{N-1})} \longrightarrow \mathcal{U}^{(Y_{N-1})}$; da $\mathcal{U}^{(Y_{N-1})}$ irreduzibel ist, folgt mit Schurs Lemma die Behauptung. \square

Korollar 7.6.3 Es ist

$$(Y_{N+1} | f | Y_N) (Y_N | g | Y_{N-1}) = \sum_{Y'_N} R_{Y_N Y'_N}^{(Y_{N+1}, Y_{N-1})} (Y_{N+1} | g | Y'_N) (Y'_N | f | Y_{N-1}).$$

Analog findet man

$$\begin{aligned} (Y_{N-1} | f | Y_N) (Y_N | g | Y_{N+1}) &= \sum_{Y'_N} \overline{R_{Y_N Y'_N}^{(Y_{N+1}, Y_{N-1})}} (Y_{N-1} | g | Y'_N) (Y'_N | f | Y_{N+1}) \\ &=: \sum_{Y'_N} \mathcal{R}_{Y_N Y'_N}^{(Y_{N-1}, Y_{N+1})} (Y_{N-1} | g | Y'_N) (Y'_N | f | Y_{N+1}) \end{aligned} \quad (7.36)$$

Bemerkung 7.6.4 Die Matrix $R^{(Y_{N+1}, Y_{N-1})}$ hängt offenbar nicht von der relativen Lage der Träger $\text{supp } f, \text{supp } g$ ab.

7.6.2 $(Y'_N | g | Y_{N-1})(Y_{N-1} | f | Y_N)$

Wir suchen nun die entsprechenden Relationen für $(Y'_N | f | Y_{N-1})(Y_{N-1} | g | Y_N)$. Den Ausgangspunkt der Überlegungen bildet ähnlich wie oben die Beobachtung

$$a^+(f)a(g) |f_N, \dots, f_1\rangle = \langle \bar{g} | f_N \rangle \cdot |f, f_{N-1}, \dots, f_1\rangle = a(g)t_N a^+(f) |f_N, \dots, f_1\rangle$$

für alle $|f_N, \dots, f_1\rangle \in \mathcal{H}_1^{\otimes N}$, $N \geq 1$, d.h. auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$, $N \geq 1$ ist

$$a^+(f)a(g) = a(g)t_N a^+(f). \quad (7.37)$$

Lemma 7.6.5

Es gilt die Beziehung

$$(Y'_N|f|Y_{N-1}) (Y_{N-1}|g|Y_N) = \sum_{Y_{N+1}} R_{Y'_N Y_N}^{(Y_{N+1}, Y_{N-1})} (Y'_N|g|Y_{N+1}) (Y_{N+1}|f|Y_N). \quad (7.38)$$

BEWEIS.

Einsetzen von (7.24) und (7.25) in Gleichung (7.37) führt auf

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{Y'_N \\ Y_N \\ Y_{N-1}}} \sum_{\substack{T'_N|Y'_N \\ T_N|Y_N \\ T_{N-1}|Y_{N-1}}} c_{T'_N T_{N-1}} \overline{c_{T_N T_{N-1}}} W_{T'_N} (Y'_N|f|Y_{N-1}) (Y_{N-1}|g|Y_N) W_{T_N}^* \\ = & \sum_{\substack{Y'_N \\ Y_N \\ Y_{N+1}}} \sum_{\substack{T'_N|Y'_N \\ T_N|Y_N \\ S_{N+1}|Y_{N+1}}} \overline{c_{S_{N+1} T'_N}} U_{S_{N+1} T_{N+1}}^{(Y_{N+1})} (t_N) c_{T_{N+1} T_N} W_{T'_N} (Y'_N|g|Y_{N+1}) (Y_{N+1}|f|Y_N) W_{T_N}^*, \end{aligned} \quad (7.39)$$

Multiplikation mit einem $W_{T'_N}^*$ von links und einem W_{T_N} ergibt

$$\begin{aligned} & \sum_{Y_{N-1}} \sum_{T_{N-1}|Y_{N-1}} c_{T'_N T_{N-1}} \overline{c_{T_N T_{N-1}}} (Y'_N|f|Y_{N-1}) (Y_{N-1}|g|Y_N) \\ = & \sum_{Y_{N+1}} \sum_{\substack{T_{N+1}|Y_{N+1} \\ S_{N+1}|Y_{N+1}}} \overline{c_{S_{N+1} T'_N}} U_{S_{N+1} T_{N+1}}^{(Y_{N+1})} (t_N) c_{T_{N+1} T_N} (Y'_N|g|Y_{N+1}) (Y_{N+1}|f|Y_N). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Multiplikation mit $c_{T_N S_{N-1}}$ und Summation über $T_N|Y_N$ führt auf

$$\begin{aligned} & c_{T'_N S_{N-1}} (Y'_N|f|Y_{N-1}) (Y_{N-1}|g|Y_N) \\ = & \sum_{Y_{N+1}} \sum_{\substack{T_{N+1}, S_{N+1}|Y_{N+1} \\ T_N|Y_N}} \overline{c_{S_{N+1} T'_N}} U_{S_{N+1} T_{N+1}}^{(Y_{N+1})} (t_N) c_{T_{N+1} T_N} c_{T_N S_{N-1}} (Y'_N|g|Y_{N+1}) (Y_{N+1}|f|Y_N), \end{aligned} \quad (7.41)$$

wobei Y_{N-1} der Rahmen von S_{N-1} ist, und nach Multiplikation mit $\overline{c_{T'_N S_{N-1}}}$ und Summation über $T'_N|Y'_N$ findet man

$$\begin{aligned} & (Y'_N|f|Y_{N-1}) (Y_{N-1}|g|Y_N) \\ = & \sum_{Y_{N+1}} \sum_{\substack{T_{N+1}, S_{N+1}|Y_{N+1} \\ T'_N|Y'_N \\ T_N|Y_N}} \overline{c_{T'_N S_{N-1}} c_{S_{N+1} T'_N}} U_{S_{N+1} T_{N+1}}^{(Y_{N+1})} (t_N) c_{T_{N+1} T_N} c_{T_N S_{N-1}} \\ & \cdot (Y'_N|g|Y_{N+1}) (Y_{N+1}|f|Y_N). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Mit Lemma 7.6.2 folgt dann die Behauptung.

□

Bemerkung 7.6.6 Um im Einklang mit der Notation aus Korollar 7.6.3 zu sein (die Superscripts geben die beiden “äußeren” Rahmen an, die Indizes die “inneren”), läßt sich Lemma 7.6.5 in der Form

$$(Y'_N|f|Y_{N-1})(Y_{N-1}|g|Y_N) = \sum_{Y_{N+1}} R_{Y_{N-1}, Y_{N+1}}^{(Y'_N, Y_N)} (Y'_N|g|Y_{N+1})(Y_{N+1}|f|Y_N)$$

mit

$$R_{Y_{N-1}, Y_{N+1}}^{(Y'_N, Y_N)} := R_{Y'_N, Y_N}^{(Y_{N+1}, Y_{N-1})}$$

schreiben. $R^{(Y'_N, Y_N)}$ hängt nicht von der relativen Lage der Träger $\text{supp } f, \text{supp } g$ ab (s. Bemerkung 7.6.4).

7.7 Quadratische VR für $(Y'_N|g|Y_{N+1})(Y_{N+1}|f|Y_N)$

7.7.1 Unterschied zu den vorhergehenden Fällen

Der letzte Fall $(Y'_N|f|Y_{N+1})(Y_{N+1}|g|Y_N)$ läßt sich nicht ganz nach dem obigen Muster abhandeln. Startet man von

$$\begin{aligned} a(f)a^+(g)|f_N, \dots, f_1\rangle &= \langle \bar{f}|g\rangle|f_N, \dots, f_1\rangle \\ &= \chi \cdot \langle \bar{g}|f\rangle|f_N, \dots, f_1\rangle \\ &= \chi \cdot a(g)a^+(f)|f_N, \dots, f_1\rangle \end{aligned} \quad (7.43)$$

mit

$$\chi := \begin{cases} e^{2\pi i \delta} & \text{falls } \text{supp } f > \text{supp } g \\ e^{-2\pi i \delta} & \text{falls } \text{supp } f < \text{supp } g \\ 1 & \text{falls } \text{supp } f \times \text{supp } g \end{cases},$$

wobei δ die Skalendimension von Φ ist (vgl. (6.8) und (6.10)), d.h.

$$a(f)a^+(g) = \chi a(g)a^+(f) \quad (7.44)$$

auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$, so erhält man lediglich eine Aussage über die Summen von Produkten.

Lemma 7.7.1

Es gilt

$$\sum_{Y_{N+1}} (Y_N|f|Y_{N+1})(Y_{N+1}|g|Y_N) = \chi \sum_{Y_{N+1}} (Y_N|g|Y_{N+1})(Y_{N+1}|f|Y_N). \quad (7.45)$$

BEWEIS.

Einsetzen von (7.24) und (7.25) in Gleichung (7.44) führt auf

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{Y'_N \\ Y_N \\ Y_{N+1}}} \sum_{\substack{T'_N|Y'_N \\ T_N|Y_N \\ T_{N+1}|Y_{N+1}}} \overline{c_{T_{N+1}T'_N}} c_{T_{N+1}T_N} W_{T'_N} (Y'_N|f|Y_{N+1})(Y_{N+1}|g|Y_N) W_{T_N}^* \\ &= \chi \cdot \sum_{\substack{Y'_N \\ Y_N \\ Y_{N+1}}} \sum_{\substack{T'_N|Y'_N \\ T_N|Y_N \\ T_{N+1}|Y_{N+1}}} \overline{c_{T_{N+1}T'_N}} c_{T_{N+1}T_N} W_{T'_N} (Y'_N|g|Y_{N+1})(Y_{N+1}|f|Y_N) W_{T_N}^*, \end{aligned} \quad (7.46)$$

und nach den üblichen Multiplikationen

$$\begin{aligned} & \sum_{Y_{N+1}} \sum_{T_{N+1}|Y_{N+1}} \overline{c_{T_{N+1}T'_N}} c_{T_{N+1}T_N} (Y'_N|f|Y_{N+1}) (Y_{N+1}|g|Y_N) \\ &= \chi \cdot \sum_{Y_{N+1}} \sum_{T_{N+1}|Y_{N+1}} \overline{c_{T_{N+1}T'_N}} c_{T_{N+1}T_N} (Y'_N|g|Y_{N+1}) (Y_{N+1}|f|Y_N). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Ausführen der Summation über $T_{N+1}|Y_{N+1}$ liefert auf jeder Seite des Gleichheitszeichens ein $\delta_{T'_N T_N}$. Die Summanden auf beiden Seiten sind also genau dann von Null verschieden, wenn $Y'_N = Y_N$ ist, und damit ist das Lemma bewiesen. \square

Der prinzipielle Unterschied zwischen diesem letzten und den vorangegangenen Fällen ist der folgende: Wir sind eigentlich gar nicht an Produkten der Form $a^\#(f)a^\#(g)$ interessiert, sondern an Produkten $(Y'_{N\pm 1}|f|Y_N)(Y_N|g|Y_{N\pm 1})$. Diese sind gemäß Korollar 7.4.4 Vielfache von $W_{T'_{N\pm 1}}^* a^\#(f)Q(T_N)a^\#(g)W_{T_{N\pm 1}}$. In den vorangegangenen Fällen ließ sich der Projektor "in der Mitte" nach links oder rechts herausziehen, und die Betrachtung des Produktes $a^\#(f)a^\#(g)$ implizierte die Lösung des eigentlichen Problems. Im nun betrachteten Fall ist das nicht mehr so.

7.7.2 Modifikation des Ansatzpunktes

Wir wählen als Startpunkt nun das Verhalten von $a(f)Q(T_{N+1})a^+(g)$ unter der Vertauschung von f und g , wobei $T_{N+1} \in \mathcal{T}_{N+1}$ zunächst noch beliebig ist. $Q(T_{N+1})$ ist eine Linearkombination von Permutationen aus \mathcal{P}_{N+1} ; wir unterteilen diese in Terme mit Permutationen aus $\iota(\mathcal{P}_N) \subset \mathcal{P}_{N+1}$ und Terme mit Permutationen aus $\mathcal{P}_{N+1} \setminus \iota(\mathcal{P}_N)$. Es folgt

$$\begin{aligned} a(f)Q(T_{N+1})a^+(g) &= \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P \cdot a(f)\iota(P)a^+(g) + \sum_{P \in \mathcal{P}_{N+1} \setminus \iota(\mathcal{P}_N)} c_P \cdot a(f)Pa^+(g) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P \cdot a(f)a^+(g)P + \sum_{P \in \mathcal{P}_{N+1} \setminus \iota(\mathcal{P}_N)} c_P \cdot a(f)Pa^+(g). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Die ersten Summanden verhalten sich unter der Vertauschung $f \longleftrightarrow g$ in der bekannten Art. Die zweiten Summanden formen wir um, indem wir ausnutzen, daß

$$\mathcal{P}_{N+1} \setminus \iota(\mathcal{P}_N) = \bigcup_{j=1}^N \iota(\zeta_j)t_N \iota(\mathcal{P}_N), \quad \zeta_j := t_j \cdots t_{N-1}$$

ist, d.h.

$$\begin{aligned} \sum_{P' \in \mathcal{P}_{N+1} \setminus \iota(\mathcal{P}_N)} c_{P'} \cdot a(f)P'a^+(g) &= \sum_{j=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P(j) \cdot a(f)\iota(\zeta_j)t_N \iota(P)a^+(g) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P(j) \cdot \zeta_j a(f)t_N a^+(g)P. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Mit Gleichung (7.37) folgt

$$a(f)Q(T_{N+1})a^+(g) = \chi \cdot \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P \cdot a(g)a^+(f)P + \sum_{j=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P(j) \cdot \zeta_j a^+(g)a(f)P. \quad (7.50)$$

Lemma 7.7.2

Mit den Bezeichnungen von oben gilt

$$\begin{aligned}
& \overline{c_{T_{N+1}V'_N}} c_{T_{N+1}V_N} \cdot (Y'_N|f|Y_{N+1})(Y_{N+1}|g|Y_N) \\
= & \chi \sum_{Y'_{N+1}} \left(\delta_{Y'_N Y_N} \cdot \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P \cdot U_{V'_N V_N}^{(Y_N)}(P) \right) (Y_N|g|Y'_{N+1})(Y'_{N+1}|f|Y_N) \\
& + \sum_{Y_{N-1}} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P(j) \cdot \sum_{\substack{T'_N|Y'_N \\ T_N|Y'_N \\ T_{N-1}|Y_{N-1}}} U_{V'_N T'_N}^{(Y'_N)}(\zeta_j) c_{T'_N T_{N-1}} \overline{c_{T_N T_{N-1}}} U_{T_N V_N}^{(Y_N)}(P) \right) \\
& \cdot (Y'_N|g|Y_{N-1})(Y_{N-1}|f|Y_N). \tag{7.51}
\end{aligned}$$

BEWEIS.

Für die linke Seite der Gleichung (7.50) gilt

$$\begin{aligned}
a(f)Q(T_{N+1})a^+(g) &= \sum_{\substack{Y'_N, Y_N \\ Y''_{N+1} \\ Y'_{N+1}}} \sum_{\substack{T'_N|Y'_N \\ T_N|Y'_N \\ T''_{N+1}|Y''_{N+1} \\ T'_{N+1}|Y'_{N+1}}} \overline{c_{T'_{N+1}T'_N}} c_{T'_{N+1}T_N} \cdot \\
& W_{T'_N}(Y'_N|f|Y''_{N+1})W_{T''_{N+1}}^* Q(T_{N+1})W_{T'_{N+1}}(Y'_{N+1}|g|Y_N)W_{T'_N}^* \\
&= \sum_{\substack{Y'_N \\ Y_N}} \sum_{\substack{T'_N|Y'_N \\ T_N|Y'_N}} \overline{c_{T_{N+1}T'_N}} c_{T_{N+1}T_N} \cdot W_{T'_N}(Y'_N|f|Y_{N+1})(Y_{N+1}|g|Y_N)W_{T'_N}^*, \tag{7.52}
\end{aligned}$$

wobei Y_{N+1} durch das gegebene $T_{N+1}|Y_{N+1}$ bestimmt ist. Für die rechte Seite gilt ganz entsprechend

$$\begin{aligned}
& \chi \cdot \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P \cdot a(g)a^+(f)P + \sum_{j=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P(j) \cdot \zeta_j a^+(g)a(f)P \\
= & \chi \sum_{\substack{Y_N \\ Y'_{N+1}}} \sum_{P \in \mathcal{P}_N} \sum_{\substack{T_N|Y_N \\ S_N|Y_N}} c_P \cdot U_{T_N S_N}^{(Y_N)}(P)W_{T_N}(Y_N|g|Y'_{N+1})(Y'_{N+1}|f|Y_N)W_{S_N}^* \\
& + \sum_{\substack{Y'_N \\ Y_N \\ Y_{N-1}}} \sum_{j=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P(j) \cdot \sum_{\substack{T'_N, S'_N|Y'_N \\ T_N, S_N|Y_N \\ T_{N-1}|Y_{N-1}}} U_{S'_N T'_N}^{(Y'_N)}(\zeta_j) c_{T'_N T_{N-1}} \overline{c_{T_N T_{N-1}}} U_{T_N S_N}^{(Y_N)}(P) \\
& \cdot W_{S'_N}(Y'_N|g|Y_{N-1})(Y_{N-1}|f|Y_N)W_{S_N}^*. \tag{7.53}
\end{aligned}$$

Gleichsetzen und Multiplikation von links mit einem $W_{V'_N}^*$ und von rechts mit einem W_{V_N} ergibt Gleichung (7.51). □

Um eine Aussage in der gewünschten Form zu erhalten, müssen wir auf der linken Seite den Faktor $\overline{c_{T_{N+1}V'_N}c_{T_{N+1}V_N}}$ eliminieren. Dies gelänge in der gewohnten Weise durch Summation über $T_{N+1}|Y_{N+1}$, diese erzwänge dann aber $Y'_N = Y_N$; wenn wir wüßten, daß $\overline{c_{T_{N+1}V'_N}c_{T_{N+1}V_N}}$ von Null verschieden ist, könnten wir einfach mit dem Kehrwert multiplizieren und hätten eine Gleichung in der gewünschten Form ohne einen solchen Constraint.

Die Tableaux $V'_N|Y'_N$, $V_N|Y_N$ und $T_{N+1}|Y_{N+1}$ sind frei wählbar; insbesondere können wir jeweils die entsprechenden Referenztableaux wählen. Wir diskutieren im folgenden eine spezielle Wahl der Referenztableaux, die $c_{T_{N+1}^0 T_N^0} \neq 0$ für alle Rahmen Y_N, Y_{N+1} , $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$, $N \in \mathbb{N}_0$ sicherstellt.

7.7.3 Eine spezielle Wahl der Referenztableaux

Definition 7.7.3 Für $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ wählen wir das Referenztableau $T_N^0 = (Y_N, Y_{N-1}, \dots, Y_2)$ so, daß Y_{k-1} aus Y_k durch Streichen des rechten Kästchens in der letzten Zeile entsteht (s. Abb. 7.2).

$$T_8^0 = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)$$

Abbildung 7.2: Das Referenztableau zu einem Rahmen aus \mathcal{Y}_8

Wir zeigen nun, daß bei dieser Wahl der Referenztableaux für alle Y_N, Y_{N+1} mit $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ gilt, daß $c_{T_{N+1}^0 T_N^0} \neq 0$. Zunächst weisen wir darauf hin, daß aus Gleichung (7.23) folgt

$$c_{T_{N+1}T_N} \neq 0 \iff W_{T_{N+1}}^* \circ \iota(W_{T_N}) \neq 0 \implies Q(T_{N+1}) \circ \iota(Q(T_N)) \neq 0;$$

im Fall $T_{N+1} = T_{N+1}^0, T_N = T_N^0$ gilt wegen $W_{T_{N+1}^0} = W_{T_{N+1}}^* = Q(T_{N+1}^0)$, entsprechend für T_N^0 sogar Äquivalenz. Wir haben also zu zeigen

$$T_N^0|Y_N, T_{N+1}^0|Y_{N+1}, Y_N \triangleleft Y_{N+1} \implies Q(T_{N+1}^0) \circ \iota(Q(T_N^0)) \neq 0. \quad (7.54)$$

Wir zeigen noch eine Hilfsaussage:

Lemma 7.7.4

Seien $T_{N+1}^0 = (Y_{N+1}, Y_N, \dots, Y_2)$ und $T_N^0 = (Y'_N, Y'_{N-1}, \dots, Y'_2)$ die Referenztableaux zu den Rahmen Y'_N, Y_{N+1} mit $Y'_N \triangleleft Y_{N+1}$. Dann gilt $Y'_k \triangleleft Y_{k+1}$, $k = 2, \dots, N$.

BEWEIS.

Y_{N+1} ist ein gemeinsamer Nachfolger von Y_N und Y'_N . Sind diese beiden Rahmen gleich, so folgt sofort $Y'_{N-1} \triangleleft Y_N$. Andernfalls gilt die folgende Überlegung: Y_N geht aus Y_{N+1} durch Streichen des rechten Kästchens in der letzten Zeile hervor, Y'_N durch ein Streichen eines anderen Kästchens. Y'_{N-1} wiederum geht aus Y'_N infolge der Definition der Referenztableaux durch Streichen des ersten Kästchens hervor und ist damit ein Vorgänger von Y_N , $Y'_{N-1} \triangleleft Y_N$. Durch wiederholte Anwendung dieses Argumentes folgt das Lemma. □

Bemerkung 7.7.5 Wir werden in der folgenden Diskussion nur diese Eigenschaft, nicht aber die konkrete Definition (7.7.3) der Referenztableaux verwenden; in diesem Sinn ist die Definition zu verstehen als ein Beleg dafür, daß tatsächlich eine Wahl der Referenztableaux existiert, so daß Lemma 7.7.4 gilt.

7.7.4 Wahl einer Darstellung von \mathcal{R}_N

Um das Nichtverschwinden von $Q(T_{N+1}^0)\iota(Q(T_N^0))$ zu zeigen, wählen wir vorübergehend eine Darstellung durch Matrizen d auf Tensorräumen $\mathcal{V}^{\otimes N}$ bzw. $\mathcal{V}^{\otimes N+1}$ über einem endlichdimensionalen Hilbertraum \mathcal{V} mit einer unitären Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{V})$. Dabei wählen wir für gegebenes N den Raum \mathcal{V} so, daß $\dim \mathcal{V} \geq N + 1$; so stellen wir sicher, daß alle durch ein $T_N \in \mathcal{T}_N$ bestimmten irreduziblen Unterdarstellungen der N -fachen Tensordarstellung $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{V}))$ auf $\mathcal{V}^{\otimes N}$ vorkommen. Wir bezeichnen diese Darstellungen analog zu denen von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ mit $\pi_{T_N}, \pi_{T_N^0} \equiv \pi_{Y_N}$. Ein Mißverständnis ist nicht zu befürchten, da wir in diesem Abschnitt nur diese endlichdimensionalen Darstellungen betrachten. Das Nichtverschwinden in dieser Darstellung ist hinreichend für das Nichtverschwinden des Ringelementes $Q(T_{N+1}^0)\iota(Q(T_N^0))$, d.h.

$$0 \neq d(Q(T_{N+1}^0)\iota(Q(T_N^0))) = d(Q(T_{N+1}^0)) d(\iota(Q(T_N^0))) \implies Q(T_{N+1}^0)\iota(Q(T_N^0)) \neq 0.$$

Sei

$$C_{(Y_{N-1}, Y_N)} : \pi_{Y_N} \longrightarrow \pi_{Y_{N-1}} \otimes \square$$

die aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Darstellungen von $\mathcal{U}(\mathcal{V})$ gebildete isometrische Matrix. Für $T_N = (Y_N, \dots, Y_2)$, d.h. $Q(T_N) = Y_N \alpha(Y_{N-1}) \cdots \alpha^{N-2}(Y_2)$ ist $d(Q(T_N))$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d(Q(T_N)) &= \alpha^{N-2}(C_{(\square, Y_2)}) \circ \cdots \circ \alpha(C_{(Y_{N-2}, Y_{N-1})}) \circ C_{(Y_{N-1}, Y_N)} \\ &\quad \circ C_{(Y_{N-1}, Y_N)}^* \circ \alpha(C_{(Y_{N-2}, Y_{N-1})}^*) \circ \cdots \circ \alpha^{N-2}(C_{(\square, Y_2)}^*) \end{aligned} \quad (7.55)$$

(s. Abb. 7.3), wobei α, ι für $C : \mathcal{H}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(2)}$ durch

$$\iota(C) = \mathbf{1}_{\mathcal{V}} \otimes C : \mathcal{V} \otimes \mathcal{H}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{H}^{(2)}, \quad \alpha(C) = C \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{V}} : \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{V}$$

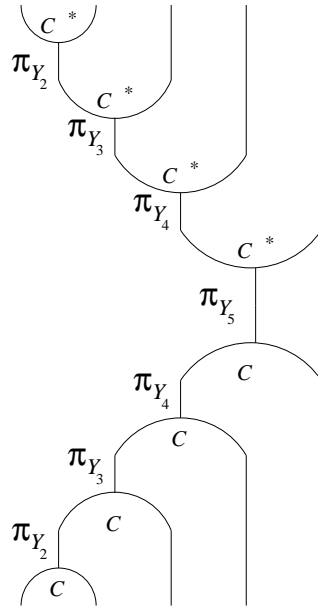
erklärt sind. Man sieht leicht, daß $d(Q(T_N)) = d(Q(T_N))^*$, sowie $d(Q(T_N))d(Q(T'_N)) = \delta_{T_N T'_N} d(Q(T_N))$ und $\sum_{T_N \in \mathcal{T}_N} d(Q(T_N)) = \mathbf{1}$ gelten.

Es folgt für $T_{N+1}^0 = (Y_{N+1}, \dots, Y_2), T_N^0 = (Y'_N, \dots, Y'_2)$

$$\begin{aligned} d(Q(T_{N+1}^0))\iota(d(Q(T_N^0))) &= \alpha^{N-1}(C_{(\square, Y_2)}) \cdots \alpha(C_{(Y_{N-1}, Y_N)}) \circ C_{(Y_N, Y_{N+1})} \\ &\quad \circ \left\{ C_{(Y_N, Y_{N+1})}^* \circ \alpha(C_{(Y_{N-1}, Y_N)}^*) \cdots \alpha^{N-1}(C_{(\square, Y_2)}^*) \right\} \\ &\quad \circ \alpha^{N-2}(C_{(\square, Y'_2)}) \cdots \circ \alpha(C_{(Y'_{N-2}, Y'_{N-1})}) \circ \iota(C_{(Y'_{N-1}, Y'_N)}) \\ &\quad \circ \left(C_{(Y'_{N-1}, Y'_N)}^* \circ \alpha(C_{(Y'_{N-2}, Y'_{N-1})}^*) \cdots \alpha^{N-2}(C_{(\square, Y'_2)}^*) \right). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Für das Produkt in den geschweiften Klammern gilt $\{\cdots\} : \pi_{\square} \otimes \pi_{Y'_N} \longrightarrow \pi_{Y_{N+1}}$; dieser Intertwinerraum ist bekanntlich eindimensional (vgl. Bemerkung 7.4.3), d.h.

$$\{\cdots\} = \lambda \cdot C_{(Y'_N, Y_{N+1})}^* \quad \text{mit} \quad \lambda = \{\cdots\} \circ C_{(Y'_N, Y_{N+1})} \in \mathbb{C} \cdot \mathbf{1} \quad (7.57)$$


 Abbildung 7.3: Darsteller $d(Q(T_5))$ auf $\mathcal{V}^{\otimes 5}$

(s. Abb. 7.4). Es folgt

$$d(Q(T_{N+1}^0)) \iota(d(Q(T_N^0))) \neq 0 \iff \lambda \neq 0.$$

λ wiederum können wir als Produkt von $6j$ -Symbolen der unitären Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{V})$ schreiben: Zunächst einmal ist

$$\begin{aligned} \lambda &= C_{(Y_N, Y_{N+1})}^* \circ \dots \circ \alpha^{N-3} \left(C_{(Y_3, Y_4)}^* \right) \\ &\circ \alpha^{N-2} \left(C_{(Y_2, Y_3)}^* \alpha \left(C_{(\square, Y_2)}^* \right) \iota \left(C_{(\square, Y_2')} \right) \right) \\ &\circ \alpha^{N-3} \left(C_{(Y_2', Y_3')} \right) \circ \dots \circ \iota \left(C_{(Y_{N-1}', Y_N')} \right) C_{(Y_N', Y_{N+1})}; \end{aligned} \quad (7.58)$$

dabei gilt ähnlich wie oben

$$C_{(Y_2, Y_3)}^* \alpha \left(C_{(\square, Y_2)}^* \right) \iota \left(C_{(\square, Y_2')} \right) : \square \otimes \pi_{Y_2'} \longrightarrow \pi_{Y_3},$$

d.h.

$$C_{(Y_2, Y_3)}^* \alpha \left(C_{(\square, Y_2)}^* \right) \iota \left(C_{(\square, Y_2')} \right) = \lambda_3 \cdot C_{(Y_2', Y_3)}^*$$

mit

$$\lambda_3 = C_{(Y_2, Y_3)}^* \alpha \left(C_{(\square, Y_2)}^* \right) \iota \left(C_{(\square, Y_2')} \right) C_{(Y_2', Y_3)}. \quad (7.59)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_3 \cdot C_{(Y_N, Y_{N+1})}^* \circ \dots \circ \\ &\alpha^{N-3} \left(C_{(Y_3, Y_4)}^* \alpha \left(C_{(Y_2', Y_3)}^* \right) \iota \left(C_{(Y_2', Y_3')} \right) \right) \\ &\circ \dots \circ \iota \left(C_{(Y_{N-1}', Y_N')} \right) C_{(Y_N', Y_{N+1})} \end{aligned} \quad (7.60)$$

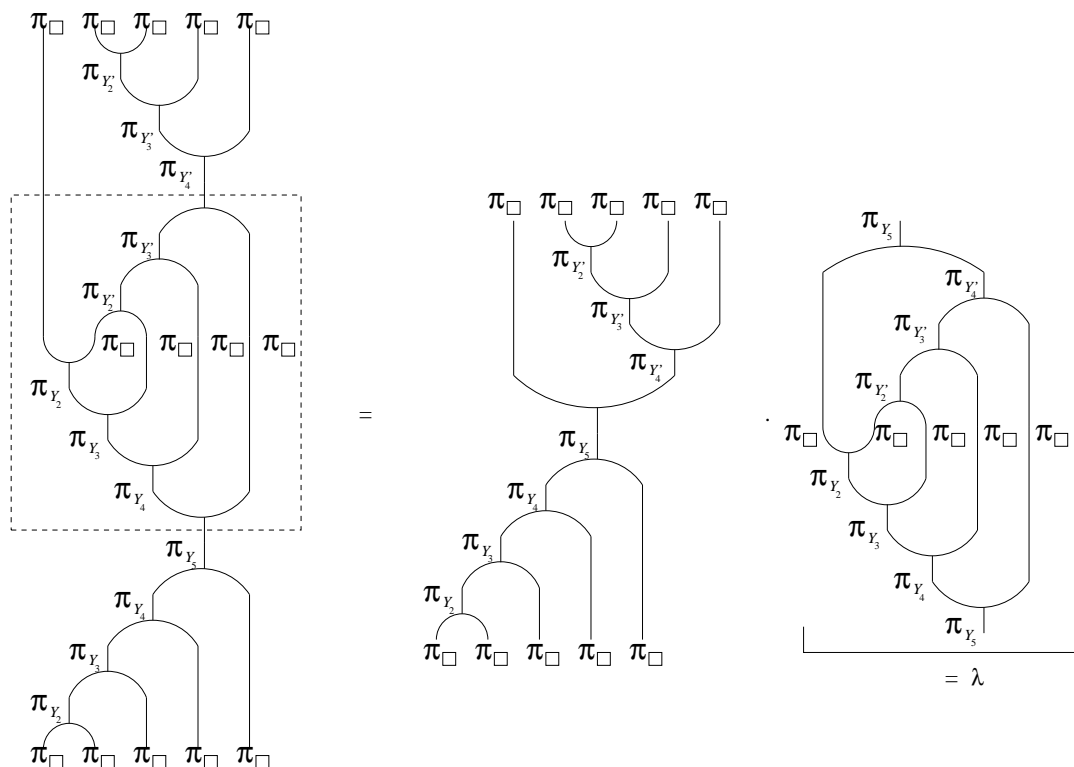


Abbildung 7.4: Abspaltung von $\lambda \in \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ (s. (7.57)) aus $d(Q(T_{N+1}^0)) \iota(d(Q(T_N^0)))$; $N = 4$

(s. Abb. 7.5).

Für das Argument von α^{N-3} läßt sich wieder die obige Argumentation führen, und durch sukzessives Anwenden dieser Überlegung erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_3 \cdots \lambda_N \cdot \underbrace{C_{(Y_N, Y_{N+1})}^* \alpha \left(C_{(Y'_{N-1}, Y_N)}^* \right) \iota \left(C_{(Y'_{N-1}, Y'_N)} \right) C_{(Y'_N, Y_{N+1})}}_{=\lambda_{N+1}} \\ &= \lambda_3 \cdots \lambda_{N+1} \end{aligned} \quad (7.61)$$

mit

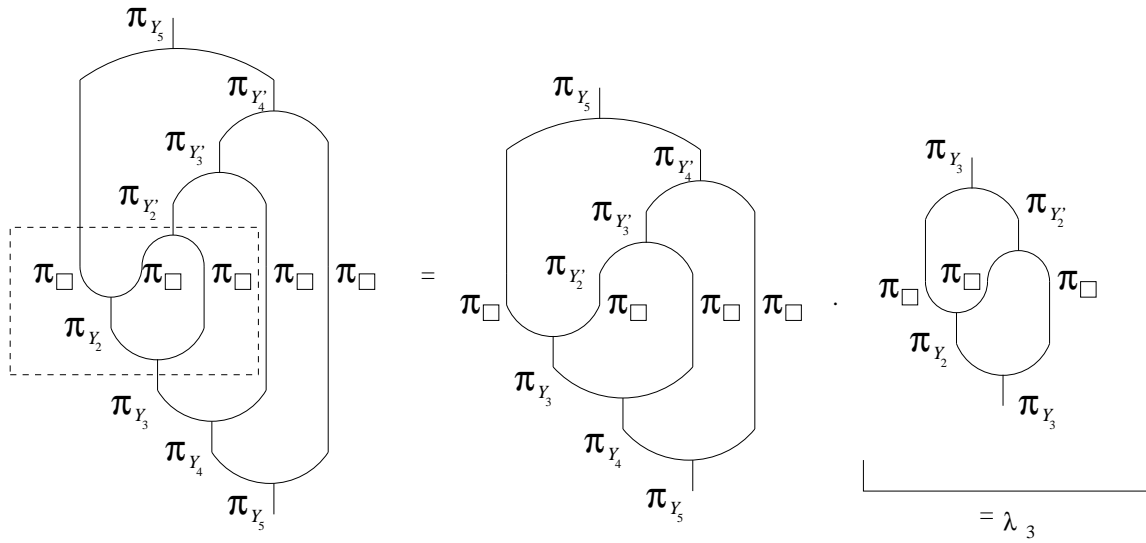
$$\lambda_k = C_{(Y_{k-1}, Y_k)}^* \alpha \left(C_{(Y'_{k-2}, Y_{k-1})}^* \right) \iota \left(C_{(Y'_{k-2}, Y'_{k-1})} \right) C_{(Y'_{k-1}, Y_k)}$$

(s. Abb. 7.6).

Das sind aber gerade die $6j$ Symbole (s.u.) der speziellen Form

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\pi_{Y_k}} & \pi_{\square} & \pi_{Y'_{k-1}} \\ \pi_{Y'_{k-2}} & \overline{\pi_{\square}} & \pi_{Y_{k-1}} \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{Y_k} & \square & Y'_{k-1} \\ Y'_{k-2} & \overline{\square} & Y_{k-1} \end{array} \right\} \quad (7.62)$$

der unitären Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{V})$, wobei wir mit $\overline{Y_k}$ die zu Y_k konjugierte Darstellung bezeichnen. Das Nichtverschwinden von $d(Q(T_{N+1}^0))\iota(Q(T_N^0))$ ist somit äquivalent dazu, daß alle diese $6j$ Symbole von Null verschieden sind, wobei die ungestrichenen Rahmen aus der Rahmenabfolge von T_{N+1}^0 stammen, die gestrichenen aus der von T_N^0 (s.o.).


 Abbildung 7.5: Absplattung von $\lambda_3 \in \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ (s. (7.59)) aus λ

7.7.5 Nichtverschwinden der $6j$ -Symbole der Form (7.62)

Ein Produkt dreier irreduzibler Darstellungen $[\lambda] \otimes [\mu] \otimes [\nu]$ einer geeigneten Gruppe kann auf zwei Arten ausreduziert werden:

$$([\lambda] \otimes [\mu]) \otimes [\nu] \succ M_{[\lambda],[\mu]}^{[\varrho]}[\varrho] \otimes [\nu] \succ M_{[\lambda],[\mu]}^{[\varrho]} M_{[\varrho],[\nu]}^{[\sigma]}[\sigma]$$

oder

$$[\lambda] \otimes ([\mu] \otimes [\nu]) \succ M_{[\mu],[\nu]}^{[\varrho']}[\lambda] \otimes [\varrho'] \succ M_{[\lambda],[\varrho']}^{[\sigma]} M_{[\mu],[\nu]}^{[\varrho']}[\sigma],$$

wobei $M_{[\lambda],[\mu]}^{[\varrho]}$ die Vielfachheit von $[\varrho]$ in $[\lambda] \otimes [\mu]$ bezeichnet. Die Matrix des Wechsels zwischen den zugehörigen Basen des Darstellungsraumes von $[\sigma]$ ist infolge des Schurschen Lemmas ein Vielfaches der Einheitsmatrix; der Faktor, mit dem die Einheitsmatrix multipliziert wird, heißt $6j$ -Symbol (da sechs irreduzible Darstellungen involviert sind).

Wir folgen der Notation von [46]: Drei irreduzible Darstellungen und ein Skalar r bilden einen Dreiklang (*triad*) $\{[\lambda], [\mu], [\nu]; r\}$, wenn $[\lambda] \otimes [\mu] \otimes [\nu]$ die triviale Darstellung wenigstens mit Vielfachheit $r + 1$ enthält. Das $6j$ -Symbol $\left\{ \begin{matrix} [\lambda_1] & [\lambda_2] & [\lambda_3] \\ [\mu_1] & [\mu_2] & [\mu_3] \end{matrix} \right\}_{r_1 r_2 r_3 r_4}$ entspricht den vier Dreiklängen $\{[\lambda_1], [\lambda_2], [\lambda_3]; r_4\}$, dann $\{[\mu_1], [\mu_2], [\lambda_3]; r_3\}$, dann $\{[\mu_1], [\lambda_2], [\mu_3]; r_2\}$ und zuletzt $\{[\lambda_1], [\mu_2], [\mu_3]; r_1\}$ (s. Abb. 7.7). Ein $6j$ -Symbol *verschwindet trivial*, wenn einer der vier Dreiklänge verschwindet.

Anhand der Abbildungen 7.6 und 7.7 sehen wir, daß

$$\lambda_k = \left\{ \begin{matrix} \overline{Y_k} & \square & Y'_{k-1} \\ Y'_{k-2} & \square & Y_{k-1} \end{matrix} \right\};$$

Vielfachheiten treten in unserem Fall nicht auf (vgl. Bemerkung 7.4.3); wir lassen die Indizes $r_i = 0$ der Einfachheit halber fort. Notwendig dafür, daß unsere $6j$ -Symbole nicht bereits trivial verschwinden, ist, daß keine der Clebsch-Gordan-Matrizen $C_{(\cdot, \cdot)}$ verschwindet, d.h. (s. Bemerkung 7.4.3) $Y_{k-1} \triangleleft Y_k, Y'_{k-2} \triangleleft Y'_{k-1}$, was aufgrund der Tableaueigenschaften erfüllt ist,

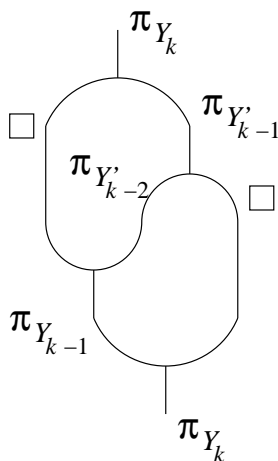


Abbildung 7.6: $\lambda_k = C_{(Y_{k-1}, Y_k)}^* \alpha \left(C_{(Y'_{k-2}, Y_{k-1})}^* \right) \iota \left(C_{(Y'_{k-2}, Y'_{k-1})} \right) C_{(Y'_{k-1}, Y_k)}$

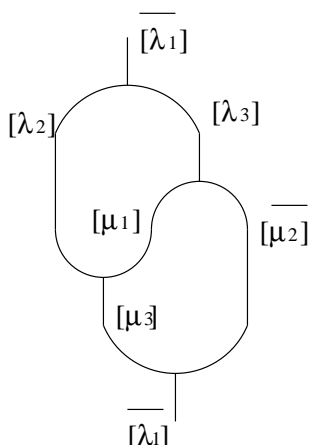


Abbildung 7.7: Graphische Darstellung des allgemeinen $6j$ Symbols ohne die Vielfachheitsindizes r_1, \dots, r_4

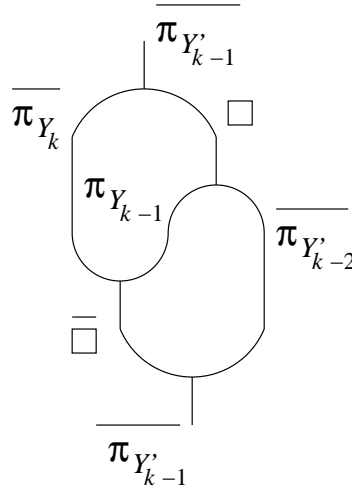
sowie $Y'_{k-2} \triangleleft Y_{k-1}, Y'_{k-1} \triangleleft Y_k$; für $k = N + 1$ ist die letzte Gleichung per Voraussetzung erfüllt (s. (7.54)), für die weiteren $k = 3, \dots, N$ sind dann beide Gleichungen wegen Lemma 7.7.4 erfüllt. Da dieses Lemma für generisch andere als unsere speziellen Referenztableaux i.a. nicht richtig ist, würden für eine andere Wahl der Referenztableaux einige der λ_k in Gleichung (7.61) bereits trivial verschwinden; nur an dieser Stelle ist diese spezielle Eigenschaft und somit diese spezielle Wahl (bzw. eine andere, für die auch Lemma 7.7.4 gilt) der Referenztableaux wichtig.

Im folgenden zeigen wir, daß alle $6j$ Symbole (7.62), die nicht trivial verschwinden, auch tatsächlich von Null verschieden sind. Damit ist dann Gleichung (7.54) gezeigt.

Zunächst geben wir zwei Eigenschaften der $6j$ -Symbole an: Zum einen ist ein $6j$ -Symbol invariant unter zyklischen Permutationen seiner Spalten ([46], ch 3, Seite 59). Somit gilt

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \overline{Y_k} & \square & Y'_{k-1} \\ Y'_{k-2} & \overline{\square} & Y_{k-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} Y'_{k-1} & \overline{Y_k} & \square \\ Y_{k-1} & Y'_{k-2} & \overline{\square} \end{array} \right\}$$

(s. Abb. 7.8). Offenbar gilt


 Abbildung 7.8: Das aus λ_k durch zyklische Permutation der Spalten gewonnene $6j$ -Symbol

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Y'_{k-1} & \overline{Y_k} & \square \\ Y_{k-1} & Y'_{k-2} & [\mu_3] \end{array} \right\} = 0, \text{ falls } [\mu_3] \neq \overline{\square}. \quad (7.63)$$

Zum anderen erfüllen die nicht trivial verschwindenden $6j$ -Symbole die Orthogonalitätsrelation ([46], eq (3.3.21))

$$\sum_{[\mu_3], r_1, r_2} |[\lambda_3]| \cdot |[\mu_3]| \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} [\lambda_1] & [\lambda_2] & [\lambda_3] \\ [\mu_1] & [\mu_2] & [\mu_3] \end{array} \right\}_{r_1 r_2 r_3 r_4} \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{[\lambda_1]} & \overline{[\lambda_2]} & \overline{[\lambda_3]} \\ \overline{[\mu_1]} & \overline{[\mu_2]} & \overline{[\mu_3]} \end{array} \right\}_{r_1 r_2 r'_3 r'_4} = \delta_{[\lambda_3][\lambda'_3]} \delta_{r_3 r'_3} \delta_{r_4 r'_4}, \quad (7.64)$$

wobei $|[\lambda]|$ die Dimension der Darstellung $[\lambda]$ bezeichnet.

Für unsere $6j$ -Symbole ohne Vielfachheiten bedeutet das wegen (7.63)

$$(\dim \mathcal{V})^2 \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} Y'_{k-1} & \overline{Y_k} & \square \\ Y_{k-1} & Y'_{k-2} & \overline{\square} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{Y'_{k-1}} & Y_k & \overline{\square} \\ Y_{k-1} & Y'_{k-2} & \square \end{array} \right\} = 1;$$

insbesondere ist also

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \overline{Y_k} & \square & Y'_{k-1} \\ Y'_{k-2} & \overline{\square} & Y_{k-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} Y'_{k-1} & \overline{Y_k} & \square \\ Y_{k-1} & Y'_{k-2} & \overline{\square} \end{array} \right\} \neq 0, \text{ falls } Y'_{k-2} \triangleleft \left\{ \begin{array}{c} Y_{k-1} \\ Y'_{k-1} \end{array} \right\} \triangleleft Y_k,$$

und damit ist Gleichung (7.54) gezeigt.

7.7.6 Quadratische VR für $(Y'_N|g|Y_{N+1})(Y_{N+1}|f|Y_N)$

Wir wählen in Lemma 7.7.2 $V'_N = T'^0_N|Y'_N$, $V_N = T^0_N|Y_N$ und $T_{N+1} = T^0_{N+1}|Y_{N+1}$ und erhalten wegen $\overline{c_{T_{N+1}^0 T'^0_N} c_{T_{N+1}^0 T^0_N}} \neq 0$

$$(Y'_N|f|Y_{N+1})(Y_{N+1}|g|Y_N)$$

$$\begin{aligned}
&= \chi \sum_{Y'_{N+1}} \left(\frac{\delta_{Y'_N Y_N}}{\overline{c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_{N+1} T'_N}}} \cdot \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P \cdot U_{T'_N T'_N}^{(Y_N)}(P) \right) (Y_N | g | Y'_{N+1}) (Y'_{N+1} | f | Y_N) \\
&\quad + \sum_{Y_{N-1}} \left(\left(\overline{c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_{N+1} T'_N}} \right)^{-1} \sum_{j=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P(j) \right. \\
&\quad \quad \cdot \left. \sum_{\substack{T'_N | Y'_N \\ T'_N | Y_N \\ T_{N-1} | Y_{N-1}}} U_{T'_N T'_N}^{(Y'_N)}(\zeta_j) c_{T'_N T_{N-1}} \overline{c_{T_N T_{N-1}}} U_{T_N T_N}^{(Y_N)}(P) \right) \\
&\quad \quad \cdot (Y'_N | g | Y_{N-1}) (Y_{N-1} | f | Y_N). \tag{7.65}
\end{aligned}$$

Da c_P, P in der ersten und $c_P(j), \zeta_j, P$ in der zweiten Summe auf der rechten Seite von $Q(T_{N+1}^0)$ bestimmt werden, legt diese Wahl der in Lemma 7.7.2 freien Tableaux die Koeffizienten auf der rechten Seite für jeweils gegebene Rahmen Y'_N, Y_N und Y_{N+1}, Y'_{N+1} bzw. Y_{N-1} fest,

$$\chi \left(\overline{c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_{N+1} T'_N}} \right)^{-1} \delta_{Y'_N Y_N} \cdot \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P \cdot U_{T'_N T'_N}^{(Y_N)}(P) =: \chi(\text{supp } f, \text{supp } g) \cdot R_{Y_{N+1}, Y'_{N+1}}^{(Y'_N, Y_N)}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{c_{T'_{N+1} T'_N} c_{T'_{N+1} T'_N}} \right)^{-1} \sum_{j=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}_N} c_P(j) \cdot \sum_{\substack{T'_N | Y'_N \\ T'_N | Y_N \\ T_{N-1} | Y_{N-1}}} U_{T'_N T'_N}^{(Y'_N)}(\zeta_j) c_{T'_N T_{N-1}} \overline{c_{T_N T_{N-1}}} U_{T_N T_N}^{(Y_N)}(P) \\
&=: R_{Y_{N+1}, Y_{N-1}}^{(Y'_N, Y_N)}.
\end{aligned}$$

Korollar 7.7.6 Es ist

$$\begin{aligned}
(Y'_N | f | Y_{N+1})(Y_{N+1} | g | Y_N) &= \chi(\text{supp } f, \text{supp } g) \cdot \sum_{Y'_{N+1}} R_{Y_{N+1}, Y'_{N+1}}^{(Y'_N, Y_N)} \cdot (Y'_N | g | Y'_{N+1})(Y'_{N+1} | f | Y_N) \\
&\quad + \sum_{Y_{N-1}} R_{Y_{N+1}, Y_{N-1}}^{(Y'_N, Y_N)} \cdot (Y'_N | g | Y_{N-1})(Y_{N-1} | f | Y_N). \tag{7.66}
\end{aligned}$$

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen in

Theorem 7.7.7

Unter den in Abschnitt 7.1 formulierten Voraussetzungen gilt:

- Der Hilbertraum \mathcal{H} zerfällt in Unterräume, die irreduzible Darstellungen der unitären Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ tragen,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \mathbb{C}^{f_{Y_N}} \otimes \mathcal{H}_{Y_N};$$

auf dem reduzierten Hilbertraum

$$\mathcal{H}_{\text{red}} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \mathcal{H}_{Y_N}$$

kommt jede irreduzible Darstellung π_{Y_N} von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ mit der Vielfachheit 1 vor.

- \mathcal{H}_{red} enthält den Fockraum \mathcal{H}_F des konformen verallgemeinerten freien Feldes aus Kapitel 6,

$$\mathcal{H}_F = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_{\mathfrak{S}_N} \subset \mathcal{H}_{\text{red}}.$$

- Zwischen \mathcal{H}_{Y_N} und $\mathcal{H}_{Y_{N+1}}$ mit $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$ bzw. \mathcal{H}_{Y_N} und $\mathcal{H}_{Y_{N-1}}$ mit $Y_{N-1} \triangleleft Y_N$ interpolieren die Austauschkomponenten $(Y_{N+1}|f|Y_N)$ bzw. $(Y_{N-1}|f|Y_N)$. Die Erzeuger und Vernichter des konformen verallgemeinerten freien Feldes sind Linearkombinationen von Austauschkomponenten mit total symmetrischen Rahmen $Y_N = \mathfrak{S}_N, Y_{N\pm 1} = \mathfrak{S}_{N\pm 1}$; für das Feld selber folgt

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \sum_{N \in \mathbb{N}_0} \sqrt{N+1} \cdot Q(\mathfrak{S}_{N+1})a^+(f)Q(\mathfrak{S}_N) + \sum_{N \in \mathbb{N}} \sqrt{N} \cdot Q(\mathfrak{S}_{N-1})a(f)Q(\mathfrak{S}_N) \\ &= \sum_{N \in \mathbb{N}_0} \sqrt{N+1} \cdot (\mathfrak{S}_{N+1}|f|\mathfrak{S}_N) + \sum_{N \in \mathbb{N}} \sqrt{N} \cdot (\mathfrak{S}_N|f|\mathfrak{S}_{N+1}). \end{aligned} \quad (7.67)$$

- Die Austauschkomponenten erfüllen sowohl in zeit- als auch in raumartiger Richtung quadratische VR.
- Die R -Matrizen dieser quadratischen VR lassen sich direkt aus der Kenntnis der irreduziblen Darstellungen der \mathcal{P}_N und insbesondere der Induktionsmatrizen $C^{(Y_{N+1}, Y_N)}$ berechnen.

Kapitel 8

Äquivalenz der natürlichen und der zellulären Darstellung der \mathcal{BP}_{2n}

Wir betrachten Vakuumerwartungswerte von Produkten von $2n$ Austauschkomponenten des vorigen Kapitels (*Ketten*). Aus den quadratischen VR der Austauschkomponenten folgt, daß die \mathcal{BP}_{2n} auf diesen Ketten zellulär dargestellt ist. Wir zeigen, daß diese Darstellung äquivalent ist zu der natürlichen Darstellung in Kapitel 6 und illustrieren dies mit zwei Beispielen.

8.1 Ketten von Austauschkomponenten

Wir betrachten *Ketten*, d.h. Vakuumerwartungswerte von Produkten der Austauschkomponenten des vorigen Kapitels der Länge $2n$; wegen der quadratischen VR der Austauschkomponenten ist klar, daß die \mathcal{BP}_{2n} auf diesen Ketten zellulär dargestellt ist. Infolge der Definition der Austauschkomponenten (s. Korollar 7.4.4) und (bei unserer Wahl der Referenztableaux nach Definition 7.7.3) $c_{T_{N+1}^0 T_N^0} \neq 0$ gilt für die Austauschkomponenten

$$(Y_{N+1}|f|Y_N) = \frac{1}{c_{T_{N+1}^0 T_N^0}} \cdot Q(T_{N+1}^0) a^+(f) Q(T_N^0)$$

bzw.

$$(Y_{N-1}|f|Y_N) = \frac{1}{c_{T_N^0 T_{N-1}^0}} \cdot Q(T_{N-1}^0) a(f) Q(T_N^0);$$

somit sind die Ketten Vielfache von

$$\left\langle a(f_{2n}) a^\#(f_{2n-1}) Q\left(T_{N_{2n-2}}^{0;(2n-2)}\right) \cdots a^\#(f_3) Q\left(T_{N_2}^{0;(2)}\right) a^\#(f_2) a^+(f_1) \right\rangle, \quad T_{N_i}^{0,(i)} | Y_{N_i}^{(i)}, \quad (8.1)$$

wobei wir $Q(\square) = \mathbf{1}$ an den Stellen $i = 1, 2n - 1$ nicht hingeschrieben haben; die Träger der $f_i, i = 1, \dots, 2n$ seien paarweise vollständig zeit- oder raumartig zueinander.

Aus (7.1) und (7.2) sieht man leicht, daß die Ketten Linearkombinationen von natürlichen Basisvektoren $\prod \langle \Phi \Phi \rangle$ sind. Wir fassen sie im folgenden als Vektoren in $\mathcal{N} = \text{span} \{ \prod \langle \Phi \Phi \rangle \}$ auf.

Die Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} auf den Ketten beschreibt die Transpositionen $\tau_i : f_i \longleftrightarrow f_{i+1}$ zweier benachbarter Argumente der Austauschkomponenten, wobei das Bild einer Kette unter dieser Transposition eine von den quadratischen VR in den Abschnitten 7.6 und 7.7 bestimmte Linearkombination von Ketten (8.1) ist.

8.2 Äquivalenz der natürlichen und der zellulären Darstellung

Wir zeigen, daß die Ketten (8.1) eine Basis von \mathcal{N} bilden; dann ist klar, daß die zelluläre Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} auf den Ketten der natürlichen Darstellung auf den $\prod \langle \Phi \Phi \rangle$ äquivalent ist, da es sich nur um verschiedene Basen desselben Darstellungsraumes handelt.

Es ist klar, daß die Ketten (8.1) zumindest einen unter \mathcal{BP}_{2n} invarianten Unterraum $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ aufspannen.

Lemma 8.2.1

Der von den Ketten (8.1) aufgespannte Unterraum \mathcal{N}' enthält den Unterraum

$$\mathbb{C} \cdot \langle \Phi(f_{2n}) \cdots \Phi(f_1) \rangle = \mathbb{C} \cdot \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{2n}, \\ P^{-1}(i+1) > P^{-1}(i)}} \prod_{\substack{i=1, \dots, 2n-1 \\ i \in 2\mathbb{N}-1}} \langle \Phi(f_{P^{-1}(i+1)}) \Phi(f_{P^{-1}(i)}) \rangle.$$

BEWEIS.

Aus $\Phi(f) = A^+(f) + A(f)$ folgt

$$\langle \Phi(f_{2n}) \cdots \Phi(f_1) \rangle = \sum \left\langle A(f_{2n}) A^\#(f_{2n-1}) \cdots A^\#(f_2) A^+(f_1) \right\rangle,$$

wobei sich die Summe über alle Terme dieser Form erstreckt, die aus n Vernichtern und n Erzeugern bestehen, so daß von rechts nach links gelesen die Teilchenzahl immer größer oder gleich Null ist. Ein beliebiger Summand auf der rechten Seite ist wegen (7.18), (7.19) parallel (als Vektor in $\text{span} \{ \prod \langle \Phi \Phi \rangle \}$) zu der Kette (8.1) mit der gleichen Reihenfolge an (unsymmetrisierten) Erzeugern und Vernichtern mit nur symmetrischen Tableaux, $T_{N_i}^{(i)} = \mathfrak{S}_{N_i}$, $i = 2, \dots, 2n-2$. Somit enthält allein der Aufspan dieser speziellen *symmetrischen* Ketten den angesprochenen Unterraum. □

Lemma 8.2.2

Der von den Ketten aufgespannte Unterraum \mathcal{N}' enthält den natürlichen Basisvektor

$$\langle \Phi(f_{2n}) \Phi(f_{2n-1}) \rangle \cdots \langle \Phi(f_2) \Phi(f_1) \rangle.$$

BEWEIS.

$\langle \Phi(f_{2n}) \cdots \Phi(f_1) \rangle$ ist eine Summe aller natürlichen Basisvektoren; insbesondere kommen in der Zerlegung bzgl. der natürlichen Basis solche natürlichen Basisvektoren vor, die den Faktor $\langle \Phi(f_{2n}) \Phi(f_{2n-1}) \rangle$ enthalten und somit unter der Transposition τ_{2n-1} eine Phase χ aufnehmen (s.o.), und solche, die diesen Faktor nicht enthalten und unter τ_{2n-1} paarweise miteinander vertauscht werden; es folgt aus der Invarianz von \mathcal{N}' unter \mathcal{BP}_{2n} , daß mit $\langle \Phi(f_{2n}) \cdots \Phi(f_1) \rangle$ auch

$$\begin{aligned} \tau_{2n-1} \langle \Phi(f_{2n}) \cdots \Phi(f_1) \rangle &= \chi \langle \Phi(f_{2n}) \Phi(f_{2n-1}) \rangle \cdot \\ &\quad \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{2n-2}, \\ P^{-1}(i+1) > P^{-1}(i)}} \prod_{\substack{i=1, \dots, 2n-3 \\ i \in 2\mathbb{N}-1}} \langle \Phi(f_{P^{-1}(i+1)}) \Phi(f_{P^{-1}(i)}) \rangle \\ &+ \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{2n}, \\ P^{-1}(i+1) > P^{-1}(i) \\ \exists \langle \Phi(f_{2n}) \Phi(f_{2n-1}) \rangle}} \prod_{\substack{i=1, \dots, 2n-1 \\ i \in 2\mathbb{N}-1}} \langle \Phi(f_{P^{-1}(i+1)}) \Phi(f_{P^{-1}(i)}) \rangle \quad (8.2) \end{aligned}$$

in \mathcal{N}' enthalten ist, wobei $\sum_{\not\exists \langle \Phi(f_{2n}) \dots \Phi(f_1) \rangle}$ bedeutet, daß sich diese Summe nur über die natürlichen Basisvektoren erstreckt, die nicht den Faktor $\langle \Phi(f_{2n}) \Phi(f_{2n-1}) \rangle$ enthalten. Durch Subtraktion $\langle \Phi(f_{2n}) \dots \Phi(f_1) \rangle - \tau_{2n-1} \langle \Phi(f_{2n}) \dots \Phi(f_1) \rangle$ folgt

$$\langle \Phi(f_{2n}) \Phi(f_{2n-1}) \rangle \cdot \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_{2n-2}, \\ P^{-1}(i+1) > P^{-1}(i)}} \prod_{\substack{i=1, \dots, 2n-3 \\ i \in 2\mathbb{N}-1}} \langle \Phi(f_{P^{-1}(i+1)}) \Phi(f_{P^{-1}(i)}) \rangle \in \mathcal{N}'.$$

Durch sukzessive Anwendung aller $\tau_{2i-1}, i = 2, \dots, n$ folgt das Lemma.

□

Ebenso erhalten wir jeden beliebigen natürlichen Basisvektor durch sukzessive Vertauschungen von zwei Argumenten f_i, f_j , die die einzelnen Faktoren dieses Basisvektors mit χ multiplizieren und die Summe der restlichen Faktoren invariant lassen. Es folgt

Lemma 8.2.3

Jeder natürliche Basisvektor ist in \mathcal{N}' enthalten, d.h. $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$.

Somit bilden die Ketten (8.1) eine Basis von \mathcal{N} ; da die Transpositionen $\tau_i, i = 1, \dots, 2n-1$ bzgl. der einen Basis von \mathcal{N} (der der Ketten (8.1)) durch Matrizen beschrieben werden, die eine Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} bilden, bilden auch die Matrizen, die diese Transpositionen in einer anderen Basis von \mathcal{N} beschreiben (der der natürlichen Basisvektoren), nämlich gerade die $r(t_i), r(b_i), i = 1, \dots, 2n-1$ aus Kapitel 6, eine der ersten äquivalente Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} . Somit ist verifiziert, daß die natürliche Darstellung tatsächlich eine Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} ist, und es gilt

Theorem 8.2.4

Die natürliche Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} stimmt mit der zellulären Darstellung auf den Ketten der Austauschkomponenten bis auf Äquivalenz überein.

Dies ist insofern von Interesse, als die natürliche Darstellung sehr leicht zu konstruieren ist.

Daß die Ketten (8.1) eine Basis von $\text{span} \{ \prod \langle \Phi \Phi \rangle \}$ bilden, illustrieren wir im folgenden anhand der Vier- und der Sechspunktfunktion des konformen verallgemeinerten freien Feldes.

8.3 Beispiel: Ketten der Länge 4

8.3.1 Ketten der Länge 4

Es ist klar, daß in Ketten der Länge 4 höchstens Rahmen mit zwei Kästchen vorkommen können. Zu diesen Rahmen $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$ und $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$ gibt es jeweils nur ein Tableau

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \equiv 1 \ 2 \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \equiv \frac{1}{2}.$$

Die zugehörigen Projektoren sind

$$Q \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (1, 2)) \quad \text{und} \quad Q \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - (1, 2))$$

wobei $\mathbf{1}$ die identische Permutation und (i, j) auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$, $N \geq j > i$ die Vertauschung

$$(i, j) : |f_N, \dots, f_j, \dots, f_i, \dots, f_1\rangle \mapsto |f_N, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_1\rangle$$

bezeichnet.

Wir wählen die Normierung so, daß die Ketten als Vektoren im Aufspann der natürlichen Basisvektoren normiert sind; es ergibt sich (e_i wie in Abschnitt 6.2, mit geeigneten quadrat-integriblen Funktionen mit paarweise raum- oder zeitartig getrennten Trägern verschmiert)

$$E_1 := \langle a(f_4)a^+(f_3)a(f_2)a^+(f_1) \rangle = e_1,$$

$$E_2 := \left\langle a(f_4)a(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_2 - e_3)$$

und

$$E_3 := \langle a(f_4)a(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_2 + e_3).$$

Der Basiswechsel von der natürlichen Basis zu den Ketten wird somit beschrieben durch die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Für die Vierpunktfunktion gilt offenbar (vgl. (6.11))

$$\langle \Phi(f_4) \cdots \Phi(f_1) \rangle = E_1 + \sqrt{2} \cdot E_3.$$

8.3.2 Darstellungsmatrizen der zellulären Darstellung der \mathcal{BP}_4

Mittels der Transformationsmatrix V können wir leicht die Matrizen D der zellulären Darstellung der \mathcal{BP}_4 auf den Ketten 8.1 ausrechnen; wir finden

$$D(t_1) = Vr(t_1)V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = D(t_3), \quad D(t_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$D(b_1) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \delta} & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = D(t_3), \quad D(t_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}}e^{2\pi i \delta} & \frac{1}{2}e^{2\pi i \delta} & \frac{1}{2}e^{2\pi i \delta} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}e^{2\pi i \delta} & \frac{1}{2}e^{2\pi i \delta} \end{pmatrix}.$$

8.3.3 Zellularität der Darstellung

Wir überzeugen uns leicht davon, daß die obige Darstellung zellulär ist.

Wir schreiben die neuen Basisvektoren in der Form

$$E_j = \left\langle a(f_4)Q_3^{(j)}a^\#(f_3)Q_2^{(j)}a^\#(f_2)Q_1^{(j)}a(f_1) \right\rangle;$$

jeder dieser Basisvektoren definiert via die Projektoren $Q_i^{(j)}$ einen Pfad durch die Menge der Darstellungen von $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$; Zellularität der Darstellung der \mathcal{BP}_4 bedeutet, daß $D(g_i), g = t, b$ nur solche Pfade mischen darf, die sich höchstens in $Q_i^{(j)}$ unterscheiden.

Offensichtlich erfüllen die diagonalen Matrizen $D(g_1) = D(g_3)$ diese Forderung. Die Matrizen $D(g_2)$ mischen alle drei Pfade; da für alle drei Pfade aber $Q_3^{(j)} = Q_1^{(j)} = \square$ gilt, ist dies mit der Zellularität verträglich.

8.4 Beispiel: Ketten der Länge 6

8.4.1 Die natürliche Basis der natürlichen Darstellung der BP_6

Wir geben zunächst die natürlichen Basisvektoren aus der Zerlegung (6.6) der Sechspunktfunktion des konformen freien Feldes an, um im folgenden explizit zeigen zu können, daß die Ketten (8.1) eine neue Basis dieses Darstellungsraumes bilden. Auf die Angabe der 15×15 -Matrizen der zugehörigen Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} verzichten wir.

Zunächst folgt aus $\Phi(x) = A(x) + A^+(x)$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(f_6) \cdots \Phi(f_1) \rangle &= \langle A(f_6)A^+(f_5)A(f_4)A^+(f_3)A(f_2)A^+(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle A(f_6)A^+(f_5)A(f_4)A(f_3)A^+(f_2)A^+(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle A(f_6)A(f_5)A^+(f_4)A^+(f_3)A(f_2)A^+(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle A(f_6)A(f_5)A^+(f_4)A(f_3)A^+(f_2)A^+(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle A(f_6)A(f_5)A(f_4)A^+(f_3)A^+(f_2)A^+(f_1) \rangle; \end{aligned} \quad (8.3)$$

die Terme dieser Zerlegung sind disjunkte Summen von natürlichen Basisvektoren $\prod \langle \Phi \Phi \rangle$ (s. (6.4) und 6.5):

$$\begin{aligned} \langle A(f_6)A^+(f_5)A(f_4)A^+(f_3)A(f_2)A^+(f_1) \rangle &= \langle \Phi(f_6)\Phi(f_5) \rangle \langle \Phi(f_4)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_2)\Phi(f_1) \rangle \\ &=: e_1; \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \langle A(f_6)A^+(f_5)A(f_4)A(f_3)A^+(f_2)A^+(f_1) \rangle &= \langle \Phi(f_6)\Phi(f_5) \rangle \langle \Phi(f_3)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_4)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_6)\Phi(f_5) \rangle \langle \Phi(f_4)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_3)\Phi(f_1) \rangle \\ &=: e_2 + e_3; \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \langle A(f_6)A(f_5)A^+(f_4)A^+(f_3)A(f_2)A^+(f_1) \rangle &= \langle \Phi(f_5)\Phi(f_4) \rangle \langle \Phi(f_6)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_2)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_6)\Phi(f_4) \rangle \langle \Phi(f_5)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_2)\Phi(f_1) \rangle \\ &=: e_4 + e_5; \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \langle A(f_6)A(f_5)A^+(f_4)A(f_3)A^+(f_2)A^+(f_1) \rangle &= \langle \Phi(f_5)\Phi(f_4) \rangle \langle \Phi(f_3)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_6)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_5)\Phi(f_4) \rangle \langle \Phi(f_6)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_3)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_6)\Phi(f_4) \rangle \langle \Phi(f_3)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_5)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_6)\Phi(f_4) \rangle \langle \Phi(f_5)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_3)\Phi(f_1) \rangle \\ &=: e_6 + e_7 + e_8 + e_9; \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \langle A(f_6)A(f_5)A(f_4)A^+(f_3)A^+(f_2)A^+(f_1) \rangle &= \langle \Phi(f_4)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_5)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_6)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_5)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_4)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_6)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_4)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_6)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_5)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_6)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_5)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_4)\Phi(f_1) \rangle \\ &\quad + \langle \Phi(f_6)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_4)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_5)\Phi(f_1) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle \Phi(f_5)\Phi(f_3) \rangle \langle \Phi(f_6)\Phi(f_2) \rangle \langle \Phi(f_4)\Phi(f_1) \rangle \\
= & e_{10} + e_{11} + e_{12} + e_{13} + e_{14} + e_{15}. \quad (8.8)
\end{aligned}$$

8.4.2 Strategie

Wir betrachten im folgenden nacheinander die Terme in der (groben) Zerlegung (8.3); diese sind disjunkte Summen von natürlichen Basisvektoren (s. (8.4) bis (8.8)). Für jeden der Terme $\langle AA^\#A^\#A^\#A^\#A^+ \rangle$ betrachten wir den Unterraum des Darstellungsraumes, der von den zugehörigen natürlichen Basisvektoren aufgespannt wird. Wir rechnen nach, daß die Ketten (8.1), die die gleiche Reihenfolge (unsymmetrisierter) Erzeuger und Vernichter haben wie der jeweilige Term $\langle AA^\#A^\#A^\#A^\#A^+ \rangle$ (mit symmetrisierten Erzeugern und Vernichtern), eine Basis dieses Unterraumes bilden. Der gesamte Darstellungsraum ist offenbar die direkte Summe dieser Unterräume.

Interessant ist dabei vor allem der Fall der Wege über den Dreiteilchenraum (Abschnitt 8.4.7); hier treten in einem *Wort* im \mathcal{R}_3 zueinander orthogonale Projektoren aus $\iota(\mathcal{R}_2)$ auf, ohne daß dieses Wort verschwindet. Die anderen Fälle geben wir der Vollständigkeit halber in den Abschnitten 8.4.3 bis 8.4.6 an.

8.4.3 $\langle AA^+AA^+AA^+ \rangle$; $\text{span} \{e_1\}$

Mit (7.1) und (7.2) finden wir

$$\langle a(f_6)a^+(f_5)a(f_4)a^+(f_3)a(f_2)a^+(f_1) \rangle = e_1.$$

8.4.4 $\langle AA^+AAA^+A^+ \rangle$; $\text{span} \{e_2, e_3\}$

Wie oben können nur die Projektoren

$$Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (1, 2)) \quad \text{und} \quad Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - (1, 2))$$

auftreten, da die Ketten höchstens über den Zweiteilchenraum führen. Wir finden

$$\langle a(f_6)a^+(f_5)a(f_4)a(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \rangle = \frac{1}{2}(e_2 + e_3)$$

und

$$\left\langle a(f_6)a^+(f_5)a(f_4)a(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle = \frac{1}{2}(e_2 - e_3);$$

diese beiden Ketten bilden somit eine Basis von $\text{span} \{e_2, e_3\}$.

8.4.5 $\langle AAA^+A^+AA^+ \rangle$; $\text{span} \{e_4, e_5\}$

Wir finden analog zu oben

$$\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_4)a^+(f_3)a(f_2)a^+(f_1) \rangle = \frac{1}{2}(e_4 + e_5)$$

und

$$\left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a(f_4)a(f_3)a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle = \frac{1}{2}(e_4 - e_5);$$

diese beiden Ketten bilden somit eine Basis von $\text{span} \{e_4, e_5\}$.

8.4.6 $\langle AAA^+AA^+A^+ \rangle$; $\text{span} \{e_6, e_7, e_8, e_9\}$

Wir haben vier Ketten:

$$\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_4)a(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \rangle = \frac{1}{4}(e_6 + e_7 + e_8 + e_9),$$

$$\left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_4)a(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle = \frac{1}{4}(e_6 - e_7 - e_8 + e_9)$$

und zwei Ketten, die sowohl $Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ als auch $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthalten,

$$\left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_4)a(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle = \frac{1}{4}(e_6 + e_7 - e_8 - e_9)$$

und

$$\left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_4)a(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle = \frac{1}{4}(e_6 - e_7 + e_8 - e_9).$$

Diese vier Ketten sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von $\text{span} \{e_6, e_7, e_8, e_9\}$.

8.4.7 $\langle AAAA^+A^+A^+ \rangle$; $\text{span} \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$

Die verbleibenden Ketten führen über den Dreiteilchenraum $\mathcal{H}_1^{\otimes 3}$. Wie oben gibt es die Projektoren auf den total symmetrischen und den total antisymmetrischen Unterraum,

$$Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(\mathbf{1} + (1,2) + (1,3) + (2,3) + (1,2)(2,3) + (2,3)(1,2))$$

und

$$Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(\mathbf{1} - (1,2) - (1,3) - (2,3) + (1,2)(2,3) + (2,3)(1,2));$$

zusätzlich tritt aber noch der “hakenförmige” Rahmen H_3 auf (s. Abb. 8.1); das zugehörige Referenztableau gem. Definition 7.7.3 ist

$$T_3^0 = \begin{array}{c} 1 & 2 \\ 3 \end{array}$$

(s. Abb. 8.1).

$$H_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad T_3^0 = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$$

Abbildung 8.1: Der Rahmen H_3 und das Referenztableau $T_3^0|H_3$

Für die Austauschkomponente $(H_3|f|Y_2)$ gilt nach Korollar 7.4.4

$$c_{T_3^0 T_2^0} \cdot (H_3|f|Y_2) = Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} a^+(f)Q(T_2^0), \quad T_2^0|Y_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array};$$

da wir nur an den linearen Abhängigkeiten interessiert sind, unterdrücken wir im folgenden den zugehörigen Zahlenfaktor $c_{T_3^0 T_2^0} \neq 0$ (s. Abschnitt 7.7).

Um den Projektor $Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu berechnen, berechnen wir zunächst den Rahmen H_3 aus

$$\mathbf{1} = \sum_{Y_3 \in \mathcal{Y}_3} Y_3 = S_3 + A_3 + H_3 \iff H_3 = \mathbf{1} - (S_3 + A_3),$$

mit $S_3 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \sum_{T_3|S_3} Q(T_3) = Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und entsprechend $A_3 := \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

d.h.

$$H_3 = \frac{2}{3} \cdot \mathbf{1} - \frac{1}{3} \cdot ((1, 2)(2, 3) + (2, 3)(1, 2)).$$

Es folgt ($S_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$)

$$Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} = H_3 \circ \alpha(S_2) = \frac{1}{3} \cdot (\mathbf{1} - (2, 3)) - \frac{1}{6} \cdot ((1, 2)(2, 3) + (2, 3)(1, 2) + (1, 2) + (1, 3)).$$

Da die Rahmen aufeinanderfolgender Tableaux' benachbart sein müssen (s.o.), gibt es jeweils nur eine Kette, die $Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ enthält:

$$\begin{aligned} & \langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a(f_4)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a^+(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \rangle \\ & = \frac{1}{6}(e_{10} + e_{11} + e_{12} + e_{13} + e_{14} + e_{15}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a(f_4)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} a^+(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle \\ & = \frac{1}{6}(e_{10} - e_{11} - e_{12} - e_{13} + e_{14} + e_{15}). \end{aligned}$$

Dazu kommen vier Ketten, die den Projektor $Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ enthalten: Zwei Ketten, in denen nur $Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ oder $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Projektor aus \mathcal{R}_2 vorkommt,

$$\begin{aligned} & \left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a(f_4)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} a^+(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle \\ & = \frac{1}{12}(e_{10} + e_{12}) - \frac{1}{24}(e_{11} + e_{13} + e_{14} + e_{15}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a(f_4)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} a^+(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle \\ & = \frac{1}{4}(e_{10} - e_{12}) + \frac{1}{8}(e_{11} + e_{13} - e_{14} - e_{15}), \end{aligned}$$

und zwei Ketten, in denen jeweils beide orthogonale Projektoren auftreten,

$$\begin{aligned} & \left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a(f_4)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} a^+(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle \\ & = \frac{1}{8}(e_{11} - e_{13} - e_{14} + e_{15}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left\langle a(f_6)a(f_5)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} a(f_4)Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} a^+(f_3)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a^+(f_2)a^+(f_1) \right\rangle \\ & = \frac{1}{8}(e_{11} - e_{13} + e_{14} - e_{15}). \end{aligned}$$

Dies ist deshalb bemerkenswert, weil der Operator $\iota \left(Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \iota \left(Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ bzw. entsprechend für die zweite Gleichung nicht verschwindet, obwohl er zueinander orthogonale Projektoren aus \mathcal{R}_2 enthält. Notwendig hierfür ist, daß der Anteil $\alpha(S_2) \in \mathcal{R}_3$ von $Q \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zwischen den beiden orthogonalen Projektoren $\iota(A_2)$ und $\iota(S_2)$ steht und nicht mit ihnen vertauscht.

Diese sechs Ketten sind offensichtlich linear unabhängig und bilden somit eine Basis von $\text{span} \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$. Damit ist gezeigt, daß alle Ketten (8.1) der Länge 6 eine Basis des Darstellungsraumes der natürlichen Darstellung der \mathcal{BP}_6 bilden; dann ist klar, daß die zelluläre Darstellung der \mathcal{BP}_6 auf diesen Ketten äquivalent ist zu der natürlichen Darstellung.

Kapitel 9

Analogien zum DHR-Fall bei Anwesenheit einer Eichsymmetrie

Die Vorgehensweise in Kapitel 7 (Zerlegung und Reduzierung des Hilbertraumes, Identifikation von Austauschkomponenten und Bestimmung der quadratischen VR dieser Austauschkomponenten in zeit- und raumartiger Richtung) zeigt eine gewisse Analogie zum Vorgehen im DHR-Fall bei Anwesenheit einer Eichsymmetrie (s. Kapitel 1.3).

Bemerkung 9.0.1 Die beschriebene Analogie sollte nicht über gravierende Unterschiede hinwegtäuschen: So sind die Unterräume \mathcal{H}_{Y_N} in Kapitel 7 keine Sektoren im Sinne einer DHR-Theorie einer geeigneten Observablenalgebra; zu Endomorphismen und Intertwinern, d.h. zu fundamentalen Bestandteilen der DHR-Theorie, existiert in der Konstruktion in Kapitel 7 kein Analogon.

9.1 Hilbertraum und “Feldalgebra”

Die “Bühne”, auf der sich alles abspielt, ist in Kapitel 7 der erweiterte Hilbertraum

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_1^{\otimes N}$$

über dem Einteilchenraum \mathcal{H}_1 ; wir sehen diesen als Analogon zum Vakuumhilbertraum der Felder an, der diese Rolle im DHR-Fall mit Eichsymmetrie ausfüllt.

Auf dem erweiterten Hilbertraum operieren die unsymmetrisierten Erzeuger und Vernichter a^+, a irreduzibel — wie die Vakuumdarstellung der Feldalgebra auf dem Vakuumhilbertraum der Felder in Abschnitt 1.3. Als Analogon zur Feldalgebra fassen wir deswegen die von a^+, a erzeugte Algebra auf.

9.2 Zerlegung des Hilbertraums. Analogon zur Eichgruppe

Der Zerlegung des erweiterten Hilbertraumes in Kapitel 7 in die Räume irreduzibler Darstellungen der unitären Gruppe des Einteilchenraumes $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$, wobei die entsprechenden irreduziblen Darstellungen auf $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$, $N \in \mathbb{N}_0$ zu minimalen Projektoren $Q(T_N)$ im Ring der \mathcal{P}_N korrespondieren und äquivalente Darstellungen zu solchen Projektoren, deren Tableaux zum gleichen Rahmen gehören, steht in Abschnitt 1.3 die Zerlegung des Vakuumhilbertraumes

der Felder in die Räume irreduzibler Darstellungen der Observablenalgebra gegenüber. Dabei korrespondieren diese Darstellungen zu minimalen Orthogonalprojektoren im Ring $\mathcal{U}(\mathcal{G})''$ der Eichgruppe \mathcal{G} , äquivalente Darstellungen zu Projektoren, die zu derselben Matrixalgebra gehören.

Wir gelangen so zu einer Zerlegung des Hilbertraumes

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{\varrho} \mathbb{C}^{d_{\varrho}} \otimes \mathcal{H}_{\varrho},$$

im DHR-Fall mit Eichsymmetrie (s. (1.18)) bzw.

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \bigoplus_{Y_N \in \mathcal{Y}_N} \mathbb{C}^{f_{Y_N}} \otimes \mathcal{H}_{Y_N}$$

in Kapitel 7 (s. (7.15)). Auf der direkten Summe der rechten Tensorkomponenten kommt jede irreduzible Darstellung der Observablen bzw. der $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ mit Vielfachheit 1 vor, die Vielfachheit dieser Darstellung auf dem jeweiligen vollen Hilbertraum ist in der Dimension der zugehörigen linken Tensorkomponenten kodiert.

Das legt es nahe, als Analogon zu den DHR-Sektoren die Äquivalenzklassen der Darstellungen von $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ aufzufassen, und als Analogon der Eichgruppe die Gesamtheit der Permutationsgruppen,

$$\mathcal{G} \longleftrightarrow \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathcal{P}_N.$$

9.3 Wegelemente und Pfade

Den Wegen durch die Menge der Sektoren im DHR-Fall entsprechen in Kapitel 7 Wege durch die Darstellungen aller \mathcal{P}_N . Dabei ist ein Weg im DHR-Fall aufgebaut aus aneinandergereihten *Elementarwegen*, d.h. aus der wiederholten Tensorierung mit einer Elementar-Eichladung ϱ und anschließender Ausreduktion; einem solchen Elementarweg entspricht in unserem Fall die Induktion zwischen Darstellungen der \mathcal{P}_N und der \mathcal{P}_{N+1} bzw. die Restriktion zwischen Darstellungen der \mathcal{P}_N und der \mathcal{P}_{N-1} .

Insbesondere haben wir anders als im DHR-Fall keine tensorielle Kategorie. Deutlich wird dieser Unterschied daran, daß die Rolle der Clebsch-Gordan-Koeffizienten $c_e(ij|k)$ der Eichgruppe \mathcal{G} , die im DHR-Fall die R -Matrizen der interpolierenden Felder bestimmen, nun von den Matrixelementen der Induktionsmatrizen $C^{(Y_{N+1}, Y_N)}$ der \mathcal{P}_N eingenommen wird. Diese Analogie ist konsistent mit allgemeinen gruppentheoretischen Resultaten: Die Eichgruppe ist eine Untergruppe der $SU(d)$ [19], und es ist bekannt, daß die Clebsch-Gordan-Koeffizienten dieser Gruppe mit den Induktionskoeffizienten der Permutationsgruppen eng zusammenhängen; so lassen sich die Clebsch-Gordan-Koeffizienten und $6j$ -Symbole der $SU(d)$ etwa direkt aus den Induktionskoeffizienten berechnen [47, 48, 49, 50, 51].

9.4 “Eichinvariante”

Analoga zu den eichinvarianten Feldern aus 1.3 sind Erzeuger und Vernichter zwischen vollständig symmetrischen Projektoren,

$$Q(\mathfrak{S}_{N+1}) a^+(f) Q(\mathfrak{S}_N) \quad \text{und} \quad Q(\mathfrak{S}_N) a(f) Q(\mathfrak{S}_{N+1}), \quad N \in \mathbb{N}_0,$$

die unter \mathcal{P}_{N+1} bzw. \mathcal{P}_N invariant sind. Die Summe aller eichinvarianten Erzeuger und Vernichter mit geeigneten Vorfaktoren ist das lokale Feld $\Phi(f)$ (s. (7.21)). Der Darstellungsraum des lokalen Feldes ist der symmetrische Fockraum

$$\mathcal{H}_F = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_{\mathfrak{G}_N} \subset \mathcal{H}_{\text{red}},$$

dieser entspricht somit dem Vakuumhilbertraum der Observablen im DHR-Fall.

Teil IV

Schluß

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

10.1 Zusammenfassung

Ausgehend von Hypothese 0.2.1 (konforme Quantenfelder lassen sich durch orthogonale Projektoren in Austauschkomponenten zerlegen, die Teil einer Austauschalgebra mit quadratischen VR bei nichtlichtartigen Abständen sind) haben wir die von den aus den R -Matrizen der quadratischen VR gebildeten Austauschmatrizen dargestellte Gruppe \mathcal{BP}_n abstrahiert, die die Zopf- und die Permutationsgruppe als Untergruppe enthält (Kapitel 3). Die Gruppe \mathcal{BP}_n kann aus der Zopf- oder aus der Permutationsgruppe durch das Hinzufügen eines weiteren Erzeugers generiert werden (Kapitel 4). Dieses Resultat dürfte bei der Konstruktion nichttrivialer Darstellungen der \mathcal{BP}_n von Nutzen sein.

Für den Fall des konform invarianten verallgemeinerten freien Feldes haben wir Hypothese 0.2.1 rechtfertigen können, indem wir die Austauschkomponenten und die quadratischen VR angegeben haben (Kapitel 7). Der gefundenen Darstellung der \mathcal{BP}_{2n} liegt keine tensorielle Kategorie zugrunde, die Teilräume, zwischen denen die Austauschkomponenten interpolieren, sind keine Sektoren im Sinne einer DHR-Theorie einer geeigneten Observablen-Algebra; der zugehörige Pfadraum zeigt aber gewisse Analogien zum gruppentheoretischen Pfadraum bei Anwesenheit einer Eichsymmetrie (Kapitel 9). An die Stelle der Tensorierung mit einer Elementar-Eichladung und anschließender Ausreduktion tritt dabei die Induktion zwischen Darstellungen der \mathcal{P}_N und der \mathcal{P}_{N+1} bzw. die Restriktion zwischen Darstellungen der \mathcal{P}_N und der \mathcal{P}_{N-1} ; die R -Matrizen der quadratischen VR der interpolierenden Felder werden im wesentlichen von den Matrixelementen der Induktionsmatrizen zwischen Darstellungen der Permutationsgruppen \mathcal{P}_N und \mathcal{P}_{N+1} , $N \in \mathbb{N}_0$ bestimmt.

10.2 Offene Fragen

Zu den wichtigsten offenen Fragen im Kontext dieser Arbeit gehört sicher die nach einer abstrakten Begründung der Hypothese 0.2.1: Die Gültigkeit dieser Hypothese ist die Voraussetzung für die in der Einführung (Kapitel 0) skizzierte Idee, in Analogie zu im niederdimensionalen Fall erfolgreichen Methoden wechselwirkende Modelle in physikalischer Raumzeit zu konstruieren.

Unsere für das konforme verallgemeinerte freie Feld erfolgreichen Überlegungen lassen sich leider nicht auf wechselwirkende Felder verallgemeinern. Ganz wesentlich haben wir ja ausgenutzt, daß der N -Teilchenraum der symmetrische Unterraum von $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ ist und die entsprechende Unterdarstellung der N -fachen Tensor Darstellung der $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ trägt, was die

Erweiterungen von \mathcal{H}_F auf \mathcal{H} und von symmetrischen auf beliebige Tensordarstellungen der $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ erlaubt; das aber sind typische Eigenschaften (verallgemeinerter) freier Felder.

In diesem Zusammenhang ist es natürlich von gewissem Interesse, wie groß die Ähnlichkeit einer potentiellen abstrakten Rechtfertigung zu der im Fall der zellulären Zopf- oder Permutationsgruppendarstellungen erfolgreichen DHR-Theorie ist, d.h. wie erfolgversprechend der naheliegende Ansatz tatsächlich ist, in der begrifflichen und konstruktiven Nähe dieser Theorie zu suchen. Hilfreich wäre sicher, ließe sich ein Analogon zur “Endomorphismen-Theorie” von DHR wenigstens für den Fall des konformen verallgemeinerten freien Feldes finden oder könnte man verstehen, welches die “Observablen” einer solchen Theorie sein sollten. Wie bereits angesprochen, lassen sich ja zumindest gewisse Analogien zwischen der Vorgehensweise in Kapitel 7 und dem DHR-Fall bei Anwesenheit einer Eichsymmetrie beobachten (s.o.).

Denkbar ist auch, sich ausgehend von der “Arbeitshypothese” 0.2.1 auf das Auffinden neuer Darstellungen der \mathcal{BP}_n zu konzentrieren und dann im Sinne des in der Einführung skizzierten Programms zu untersuchen, welche Restriktionen die abstrakten Relationen der \mathcal{BP}_n an die Skalendimensionen einer potentiellen höherdimensionalen Quantenfeldtheorie stellen und in welchem Ausmaß ihre Darstellungen n -Punktfunktionen festlegen. Noch nicht in Sicht ist z.B. eine Darstellung der \mathcal{BP}_n , die nicht vom anyonischen Typ $D(t_i)D(b_i) = D(b_i)D(t_i)$ ist; die Existenz einer einzigen nicht-anyonischen Darstellung würde sicherstellen, daß $t_i b_i = b_i t_i$ ein zusätzlicher Constraint und keine Folge der Gruppenrelationen ist.

Sowohl bei der Suche nach Darstellungen als auch bei dem Problem der Ähnlichkeit zur DHR-Theorie stellt sich die Frage nach der Existenz einer “gezopften und symmetrischen” Kategorie (evtl. mit geeignet abgeschwächten Begriffen, vornehmlich mit geeignet abgeschwächter Natürlichkeit der Statistikoperatoren), die nichttrivial-kompatible Darstellungen der Zopf- und Permutationsgruppe erzeugt. Daß schon die verhältnismäßig einfache Kategorie des 1 + 1-dimensionalen Isingmodells mit drei irreduziblen, jeweils zu sich selber konjugierten Objekten Zopfgruppendarstellungen erzeugt, die sich nicht zu einer Darstellung der \mathcal{BP}_n erweitern lassen (Kapitel 5), deutet an, daß hier kein leichter Erfolg zu erwarten ist. Eine wichtige Frage in diesem Problemkreis ist die nach der Haag-Dualität der Vakuumdarstellung der Observablenalgebra in raum- und/oder zeitartiger Richtung.

Teil V
Anhänge

Anhang A

Beweise der Aussagen aus Teil II

A.1 Beweis von Theorem 3.3.1

Bemerkung A.1.1 Wir verwenden in diesem Abschnitt des öfteren die Formulierung, daß eine nichtlichtartige Punktekonstellation im Minkowskiraum eine Gleichung für die Erzeuger der \mathcal{BP}_n “liefert” o.ä. Das ist wie folgt zu verstehen: Die Eindeutigkeit bei der Umkehrung der Reihenfolge dreier Punkte ist äquivalent zu einer Relation der Darstellungsmatrizen der Art (abhängig von den relativen Abständen der drei Punkte)

$$D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)})D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})})D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)}) = D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})})D(g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)})D(g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})});$$

davon abstrahieren wir den Constraint

$$g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)} g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})} g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)} = g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})} g_{i-1}^{\varepsilon(x_{i-1}, x_i)} g_i^{\varepsilon(x_i, x_{i+1})}$$

für die Erzeuger g_i^ε . Die entsprechenden Formulierungen bei der Auswertung der Kommutatorrelationen sind ganz analog zu verstehen.

Bemerkung A.1.2 Relation (3.5) folgt direkt aus (3.4).

Zunächst werten wir die Eindeutigkeit bei der Umkehrung der Reihenfolge dreier Punkte aus. Wir betrachten dazu alle nichtlichtartigen Anordnungen von drei Punkten im Minkowskiraum; kombinatorisch erwarten wir 27 solche Anordnungen: Für drei relative Abstände haben wir jeweils drei Möglichkeiten $<, +, >$. Wenn wir alle 27 Möglichkeiten diskutiert und entweder ausgewertet oder als nicht realisierbar erkannt haben, haben wir die Kontrolle, keine Möglichkeit übersehen zu haben.

Bemerkung A.1.3 Die Situation

$$x_{i-1} \times x_i, x_{i+1} \times x_i, x_{i-1} \times x_{i+1}$$

führt offensichtlich auf¹ (3.6).

Lemma A.1.4

Alle realisierbaren Punktekonstellationen mit nur zeitartigen Abständen führen auf Gleichungen, die äquivalent zu (3.10) sind.

¹S. Bemerkung A.1.1.

BEWEIS.

Kombinatorisch erwartet man $2^3 = 8$ Konstellationen; davon können offenbar nicht realisiert werden $x_{i-1} > x_i > x_{i+1}$, aber $x_{i-1} < x_{i+1}$ und die "umgekehrte" Konstellation $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$, aber $x_{i-1} > x_{i+1}$. Wir geben die sechs verbleibenden Relationen und die von ihnen abstrahierten Constraints an die Erzeuger in Tabelle A.1 an; man sieht sofort, daß sie äquivalent zu (3.10) sind.

$x_{i-1} > x_i > x_{i+1}$	$b_{i-1}b_i b_{i-1} = b_i b_{i-1} b_i$
$x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$	$b_{i-1}^{-1} b_i^{-1} b_{i-1}^{-1} = b_i^{-1} b_{i-1}^{-1} b_i^{-1}$
$x_i < x_{i+1} < x_{i-1}$	$b_{i-1}^{-1} b_i b_{i-1} = b_i b_{i-1} b_i^{-1}$
$x_i < x_{i-1} < x_{i+1}$	$b_{i-1} b_i^{-1} b_{i-1}^{-1} = b_i^{-1} b_{i-1}^{-1} b_i$
$x_i > x_{i-1} > x_{i+1}$	$b_{i-1} b_i b_{i-1}^{-1} = b_i^{-1} b_{i-1} b_i$
$x_i > x_{i+1} > x_{i-1}$	$b_{i-1}^{-1} b_i^{-1} b_{i-1} = b_i b_{i-1}^{-1} b_i^{-1}$

Tabelle A.1: Zum Beweis von Lemma A.1.4

□

Lemma A.1.5

Alle nichtlichtartigen Punktekonstellationen mit nur einem zeitartigen Abstand führen auf Gleichungen, die äquivalent zu (3.7) sind.

BEWEIS.

Es gibt offenbar $3 \cdot 2 = 6$ solche Kombinationen; wir geben sie mit den von ihnen abstrahierten Constraints in Tabelle A.2 an; man sieht sofort, daß sie äquivalent zu (3.7) sind.

$x_{i-1} > x_i; x_{i+1} \times x_{i-1}, x_i$	$t_{i-1} t_i b_{i-1} = b_i t_{i-1} t_i$
$x_{i+1} > x_i; x_{i-1} \times x_i, x_{i+1}$	$b_{i-1}^{-1} t_i t_{i-1} = t_i t_{i-1} b_i^{-1}$
$x_i > x_{i-1}; x_{i+1} \times x_{i-1}, x_i$	$t_{i-1} t_i b_{i-1}^{-1} = b_i^{-1} t_{i-1} t_i$
$x_i > x_{i+1}; x_{i-1} \times x_i, x_{i+1}$	$b_{i-1} t_i t_{i-1} = t_i t_{i-1} b_i$
$x_{i-1} > x_{i+1}; x_i \times x_{i-1}, x_{i+1}$	$t_{i-1} b_i t_{i-1} = t_i b_{i-1} t_i$
$x_{i+1} > x_{i-1}; x_i \times x_{i-1}, x_{i+1}$	$t_{i-1} b_i^{-1} t_{i-1} = t_i b_{i-1}^{-1} t_i$

Tabelle A.2: Zum Beweis von Lemma A.1.5

□

Von den verbleibenden zwölf nichtlichtartigen Konstellationen sind sechs offenbar nicht zu realisieren: $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$, aber $x_{i+1} \times x_{i+1}$; $x_{i-1} > x_i > x_{i+1}$, aber $x_{i+1} \times x_{i+1}$; $x_{i-1} < x_{i+1} < x_i$, aber $x_{i-1} \times x_i$; $x_{i-1} > x_{i+1} > x_i$, aber $x_{i-1} \times x_i$; $x_{i+1} < x_{i-1} < x_i$, aber $x_{i+1} \times x_i$; $x_{i+1} > x_{i-1} > x_i$, aber $x_{i+1} \times x_i$.

Lemma A.1.6

Die Konstellationen $x_{i-1} > x_i, x_{i+1}$ mit $x_i \times x_{i+1}$ und $x_{i-1} \times x_i$ mit $x_{i-1}, x_i < x_{i+1}$ sowie $x_{i-1}, x_{i+1} < x_i$ mit $x_{i-1} \times x_{i+1}$ führen auf zu (3.8) äquivalente Gleichungen.

BEWEIS.

Wir geben die angegebenen Konstellationen mit den von ihnen abstrahierten Constraints in Tabelle A.3 an; man sieht sofort, daß sie äquivalent zu (3.8) sind.

$x_i, x_{i+1} < x_{i-1}$ mit $x_i \times x_{i+1}$	$t_{i-1} b_i b_{i-1} = b_i b_{i-1} t_i$
$x_{i-1}, x_i < x_{i+1}$ mit $x_{i-1} \times x_i$	$b_{i-1}^{-1} b_i^{-1} t_{i-1} = t_i b_{i-1}^{-1} b_i^{-1}$
$x_{i-1}, x_{i+1} < x_i$ mit $x_{i-1} \times x_{i+1}$	$b_{i-1} t_i b_{i-1}^{-1} = b_i^{-1} t_{i-1} b_i$

Tabelle A.3: Zum Beweis von Lemma A.1.6

□

Lemma A.1.7

Die Konstellationen $x_{i-1}, x_i > x_{i+1}$ mit $x_{i-1} \times x_i$ und $x_{i+1}, x_i > x_{i-1}$ mit $x_{i+1} \times x_i$ sowie $x_{i-1}, x_{i+1} > x_i$ mit $x_{i-1} \times x_{i+1}$ führen auf zu (3.9) äquivalente Gleichungen.

BEWEIS.

Wir geben die angegebenen Konstellationen mit den von ihnen abstrahierten Constraints in Tabelle A.4 an; man sieht sofort, daß sie äquivalent zueinander sind, und mit der Umbenennung $i \mapsto i + 1$ folgt Gleichung (3.9)

$x_{i-1}, x_i > x_{i+1}$ mit $x_{i-1} \times x_i$	$b_{i-1} b_i t_{i-1} = t_i b_{i-1} t_i$
$x_{i+1}, x_i > x_{i-1}$ mit $x_{i+1} \times x_i$	$t_{i-1} b_i^{-1} b_{i-1}^{-1} = b_i^{-1} b_{i-1}^{-1} t_i$
$x_{i-1}, x_{i+1} > x_i$ mit $x_{i-1} \times x_{i+1}$	$b_{i-1} t_i b_{i-1} = t_{i-1} b_i t_{i-1}$

Tabelle A.4: Zum Beweis von Lemma A.1.7

□

Es bleiben jetzt noch die neun Kommutatorrelationen auszuwerten; im folgenden sei immer $|i - j| \geq 2$.

Bemerkung A.1.8 Ist $x_i \times x_{i+1}$, $x_j \times x_{j+1}$, so folgt Gleichung (3.11).

Lemma A.1.9

Die vier Anordnungen, in denen ein Punktpaar zeitartig getrennt ist und eins raumartig, führen auf eine zu (3.12) äquivalente Gleichung.

BEWEIS.

Wir geben die vier Konstellationen mit den von ihnen abstrahierten Constraints in Tabelle A.5 an; man sieht sofort, daß sie äquivalent zu Gleichung (3.12) sind.

$x_i \times x_{i+1}, x_j > x_{j+1}$	$t_i b_j = b_j t_i$
$x_i \times x_{i+1}, x_j < x_{j+1}$	$t_i b_j^{-1} = b_j^{-1} t_i$
$x_i > x_{i+1}, x_j \times x_{j+1}$	$b_i t_j = t_j b_i$
$x_i < x_{i+1}, x_j \times x_{j+1}$	$b_i^{-1} t_j = t_j b_i^{-1}$

Tabelle A.5: Zum Beweis von Lemma A.1.9

□

Lemma A.1.10

In den vier Situationen, in denen sowohl x_i und x_{i+1} als auch x_j und x_{j+1} zeitartig getrennt sind, findet man zu (3.13) äquivalente Gleichungen.

BEWEIS.

Wir geben die vier Konstellationen mit den von ihnen abstrahierten Constraints in Tabelle A.6 an; man sieht sofort, daß sie äquivalent zu Gleichung (3.13) sind.

$x_i > x_{i+1}, x_j > x_{j+1}$	$b_i b_j = b_j b_i$
$x_i > x_{i+1}, x_j < x_{j+1}$	$b_i b_j^{-1} = b_j^{-1} b_i$
$x_i < x_{i+1}, x_j > x_{j+1}$	$b_i^{-1} b_j = b_j b_i^{-1}$
$x_i < x_{i+1}, x_j < x_{j+1}$	$b_i^{-1} b_j^{-1} = b_j^{-1} b_i^{-1}$

Tabelle A.6: Zum Beweis von Lemma A.1.10

□

Die Gesamtheit aller Lemmata in diesem Abschnitt untersucht alle denkbaren nichtlichtartigen Situationen und findet dabei die Theorem 3.3.1 angegebenen unabhängigen Relationen; damit ist das Theorem bewiesen.

A.2 Beweis des Lemmas 4.1.3

Wir zeigen nur, daß die Gleichungen aus Theorem 3.3.1 die Gleichungen aus Lemma 4.1.3 implizieren; man überzeugt sich leicht davon, daß die andere Schlußrichtung ebenfalls gültig ist.

Lemma A.2.1

Die Gleichungen (3.11) und (3.12) implizieren

$$[m_i, t_k] = e \quad \text{falls } |k - i| \geq 2. \quad (\text{A.1})$$

BEWEIS.

Aus (3.12) folgt, daß für $|k - i| \geq 2$ gilt

$$e = [b_i, t_k] = [m_i t_i, t_k] \stackrel{(3.11)}{\iff} e = [m_i, t_k]. \quad (\text{A.2})$$

□

Lemma A.2.2

Aus (3.13) folgt

$$[m_i, t_{i+1} t_{i+2} t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i t_{i+2} t_{i+1}] = e. \quad (\text{A.3})$$

BEWEIS.

Aus (3.13) folgt

$$\begin{aligned} e &= [b_i, b_{i+2}] = [m_i t_i, m_{i+2} t_{i+2}] \\ &\stackrel{(3.11), (A.1)}{\iff} [m_i, m_{i+2}] \stackrel{(4.2)}{=} [m_i, t_{i+1} t_{i+2} t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i t_{i+2} t_{i+1}] = e. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

□

Lemma A.2.3

Aus (3.8) folgt

$$[m_i, t_{i+1} t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i t_{i+1}] = e. \quad (\text{A.5})$$

BEWEIS.

Aus (3.8) folgt

$$\begin{aligned} t_i m_{i+1} t_{i+1} m_i t_i &= m_{i+1} t_{i+1} m_i t_i t_{i+1} \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} t_{i+1} & \underbrace{m_{i+1}} & t_{i+1} \\ & t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i & \end{array} \right) m_i &= t_{i+1} t_i \underbrace{m_{i+1}}_{t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i} t_{i+1} m_i \underbrace{t_i t_{i+1} t_i}_{t_{i+1} t_i t_{i+1}} \\ \Leftrightarrow [m_i, t_{i+1} t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i t_{i+1}] &= e \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

□

Lemma A.2.4

Aus (3.9) folgt

$$[m_i, t_{i+1} m_i t_{i+1}] = e. \quad (\text{A.7})$$

BEWEIS.

Aus (3.9) folgt

$$\begin{aligned} t_{i+1} m_i t_i m_{i+1} t_{i+1} &= m_i t_i m_{i+1} t_{i+1} t_i \\ \Leftrightarrow m_i t_i (t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i) t_{i+1} &= t_{i+1} m_i t_i (t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i) t_{i+1} \\ \Leftrightarrow m_i (t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i) t_{i+1} &= (t_{i+1} m_i t_{i+1}) m_i t_i t_{i+1} \\ \Leftrightarrow [m_i, t_{i+1} m_i t_{i+1}] &= e. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

□

Lemma A.2.5

Aus (3.10) folgt unter Zuhilfenahme von (A.5), (A.7) und (4.2)

$$[m_i, t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i] = e. \quad (\text{A.9})$$

BEWEIS.

Aus (3.10) folgt unter Zuhilfenahme von (A.5), (A.7) und (4.2):

$$\begin{aligned} m_i \underbrace{t_i m_{i+1} t_{i+1}}_{\stackrel{(A.5)}{=} m_{i+1} t_i m_{i+1} t_{i+1} m_i^{-1}} m_i t_i &= m_{i+1} \underbrace{t_{i+1} m_i t_i}_{\stackrel{(A.7)}{=} m_i t_{i+1} m_i t_i m_{i+1}^{-1}} m_{i+1} t_{i+1} \\ \Leftrightarrow m_i m_{i+1} t_i \underbrace{m_i t_{i+1} t_i}_{t_i t_{i+1} m_i t_{i+1}} &= m_{i+1} m_i t_{i+1} m_i t_i t_{i+1} \\ \Leftrightarrow [m_i, t_i t_{i+1} m_i t_{i+1} t_i] &= e. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

□

Die Gesamtheit der Lemmata zeigt Lemma 4.1.3.

A.3 Beweis des Lemmas 4.1.5

Wir zeigen, daß aus den Gleichungen (4.7) bis (4.11) für $i \leq I, I = 1, \dots, n-1$ unter Verwendung der Rekursionsformel (4.2) und der Gleichungen (3.5), (3.6) und (3.11) die entsprechenden Gleichungen für $i = I+1$ folgen. Damit ist dann gezeigt, daß (4.7) bis (4.11) für $i = 1$ mit den Eigenschaften der t_j und (4.2) die Gleichungen (4.7) bis (4.11) für alle $i = 1, \dots, n-1$ implizieren.

Lemma A.3.1

$$[m, t_k] = e \iff [m_3, t_1] = e$$

BEWEIS.

Mit der Zopfeigenschaft (3.6) und der Vertauschungseigenschaft (3.11) der Erzeuger der Permutationsgruppe gilt

$$\begin{aligned} & [m, t_3] = e \\ \iff & [t_2 m t_2, t_3 t_2 t_3] = e \\ \iff & [t_1 t_2 m t_2 t_1, t_3 t_2 t_1 t_2 t_3] = e \\ \iff & \left[\underbrace{t_2 t_3 t_1 t_2 m t_2 t_1 t_3 t_2}_{m_3}, t_1 \right] = e \end{aligned} \tag{A.11}$$

□

Lemma A.3.2

$$[m_i, t_k] = e, |i - k| \geq 2, i \leq I \implies [m_{I+1}, t_{k+1}] = e, |I - k| \geq 2$$

BEWEIS.

Es ist

$$[m_{I+1}, t_{k+1}] = [t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I, t_{k+1}];$$

in den Fällen $k \geq I+2$ und $k \leq I-3$ verschwindet dieser Kommutator offenbar. Im Fall $k = I-2$ gilt (dieser Fall kann offenbar nur für $I \geq 3$ eintreten)

$$\begin{aligned} & e = [m_{I-1}, t_{I+1}] = [t_I t_{I-1} m_I t_{I-1} t_I, t_{I+1}] \\ \iff & e = [t_{I-1} m_I t_{I-1}, t_I t_{I+1} t_I] = [t_{I-1} m_I t_{I-1}, t_{I+1} t_I t_{I+1}] \\ \iff & e = [t_{I+1} t_{I-1} m_I t_{I-1} t_{I+1}, t_I] = [t_{I-1} t_{I+1} m_I t_{I+1} t_{I-1}, t_I] \\ \iff & e = [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_{I-1} t_I t_{I-1}] = [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_I t_{I-1} t_I] \\ \iff & e = [t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I, t_{I-1}] = [m_{I+1}, t_{k+1}] \end{aligned} \tag{A.12}$$

□

Bemerkung A.3.3 Offenbar folgt aus $[m_i, t_k] = e, |i - k| \geq 2, i \leq I$ für $I \geq 3$ mit (3.11) sofort die im Lemma nicht enthaltene Aussage $[m_{I+1}, t_1] = e$, denn

$$[m_{I+1}, t_1] = [t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I, t_1].$$

Lemma A.3.4

$$[m_i, m_k] = e, |i - k| \geq 2, i \leq I \implies [m_{I+1}, m_{k+1}] = e, |I - k| \geq 2$$

BEWEIS.

Ähnlich wie oben ist nur der Fall $|k - I| = 2$ zu betrachten; o.B.d.A. sei $k = i - 2$.

$$\begin{aligned} e &= [m_I, m_{I-2}] \\ \iff e &= [t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I, m_{I-2}] = [m_{I+1}, m_{I-2}] \\ \iff e &= [m_{I+1}, t_{I-2} t_{I-1} m_{I-2} t_{I-1} t_{I-2}] = [m_{I+1}, m_{k+1}], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

wobei wir mehrfach $[m_i, t_k] = e, |i - k| \geq 2$ ausgenutzt haben.

□

Lemma A.3.5

$$[m_i, t_{i+1} m_{i+1} t_{i+1}] = e, i \leq I \implies [m_{I+1}, t_{I+2} m_{I+2} t_{I+2}] = e$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} e &= [m_I, t_{I+1} m_{I+1} t_{I+1}] \\ \iff e &= [m_I, t_{I+2} t_{I+1} m_{I+1} t_{I+1} t_{I+2}] \\ \iff e &= [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_{I+1} t_{I+2} t_{I+1} m_{I+1} t_{I+1} t_{I+2} t_{I+1}] \\ &= [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_{I+2} t_{I+1} t_{I+2} m_{I+1} t_{I+2} t_{I+1} t_{I+2}] \\ &= [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_{I+2} m_{I+2} t_{I+2}] \\ \iff e &= [t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I, t_{I+2} m_{I+2} t_{I+2}] = [m_{I+1}, t_{I+2} m_{I+2} t_{I+2}] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

□

Lemma A.3.6

$$[m_i, t_{i+1} m_i t_{i+1}] = e, i \leq I \implies [m_{I+1}, t_{I+2} m_{I+1} t_{I+2}] = e$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} e &= [m_I, t_{I+1} m_I t_{I+1}] \\ \iff e &= [m_I, t_{I+2} t_{I+1} m_I t_{I+1} t_{I+2}] \\ \iff e &= [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_{I+1} t_{I+2} t_{I+1} m_I t_{I+1} t_{I+2} t_{I+1}] \\ &= [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_{I+2} t_{I+1} t_{I+2} m_I t_{I+2} t_{I+1} t_{I+2}] \\ &= [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_{I+2} t_{I+1} m_I t_{I+1} t_{I+2}] \\ \iff e &= [t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I, t_I t_{I+2} t_{I+1} m_I t_{I+1} t_{I+2} t_I] \\ &= [t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I, t_{I+2} t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I t_{I+2}] \\ &= [m_{I+1}, t_{I+2} m_{I+1} t_{I+2}] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

□

Lemma A.3.7

$$[m_i, m_{i+1}] = e, i \leq I \implies [m_{I+1}, m_{I+2}] = e$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
e &= [m_I, m_{I+1}] = [m_I, t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I] = [m_I, t_I t_{I+1} t_{I+2} m_I t_{I+2} t_{I+1} t_I] \\
\iff e &= [m_I, t_{I+2} t_I t_{I+1} t_{I+2} m_I t_{I+2} t_{I+1} t_I t_{I+2}] \\
&= [m_I, t_I t_{I+2} t_{I+1} t_{I+2} m_I t_{I+2} t_{I+1} t_{I+2} t_I] \\
&= [m_I, t_I t_{I+1} t_{I+2} t_{I+1} m_I t_{I+1} t_{I+2} t_{I+1} t_I] \\
\iff e &= [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_{I+1} t_I t_{I+1} t_{I+2} t_{I+1} m_I t_{I+1} t_{I+2} t_{I+1} t_I t_{I+1}] \\
&= [t_{I+1} m_I t_{I+1}, t_I t_{I+1} t_I t_{I+2} t_{I+1} m_I t_{I+1} t_{I+2} t_I t_{I+1} t_I] \\
\iff e &= [t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I, t_{I+1} t_{I+2} t_I t_{I+1} m_I t_{I+1} t_I t_{I+2} t_{I+1}] \\
&= [m_{I+1}, m_{I+2}]
\end{aligned} \tag{A.16}$$

□

Die Gesamtheit der Lemmata zeigt Lemma 4.1.5.

A.4 Beweis des Lemmas 4.2.2

Wie in Abschnitt A.2 zeigen wir nur, daß die Gleichungen aus Theorem 3.3.1 die Gleichungen aus Lemma 4.2.2 implizieren; man überzeugt sich leicht davon, daß die andere Schlußrichtung ebenfalls gültig ist.

Lemma A.4.1

Aus (3.5) folgt

$$b_i m_i^{-1} b_i = m_i. \tag{A.17}$$

BEWEIS.

Aus (3.5) folgt

$$t_i = t_i^{-1} \quad \text{bzw.} \quad b_i^{-1} m_i = m_i^{-1} b_i \iff b_i m_i^{-1} b_i = m_i. \tag{A.18}$$

□

Lemma A.4.2

Aus (3.12) und (3.13) folgt

$$[m_i, b_k] = e, \quad \text{falls} \quad |k - i| \geq 2. \tag{A.19}$$

BEWEIS.

Aus (3.12) folgt, daß für $|k - i| \geq 2$ gilt

$$e = [t_i, b_k] = [b_i^{-1} m_i, b_k] \stackrel{(3.13)}{\iff} [m_i, b_k] = e. \tag{A.20}$$

□

Lemma A.4.3

Aus (4.13) folgt

$$[m_i, b_{i+1} b_i b_i b_{i+1}] = e. \quad (\text{A.21})$$

BEWEIS.

Das Lemma folgt aus den beiden Rekursionsformeln (4.13):

$$b_i^{-1} b_{i+1}^{-1} m_i b_{i+1} b_i = b_i b_{i+1} m_i b_{i+1}^{-1} b_i^{-1} \iff m_i b_{i+1} b_i b_i b_{i+1} = b_{i+1} b_i b_i b_{i+1} m_i \quad (\text{A.22})$$

□

Lemma A.4.4

Aus (3.11) folgt

$$[m_i, \text{Ad}(b_{i+1} b_{i+2} b_i b_{i+1}) m_i] = e. \quad (\text{A.23})$$

BEWEIS.

Aus (3.11) folgt

$$e = [b_i^{-1} m_i, b_{i+2}^{-1} m_{i+2}] \iff e = [m_i, m_{i+2}] = [m_i, \text{Ad}(b_{i+1} b_{i+2} b_i b_{i+1}) m_i]. \quad (\text{A.24})$$

□

Lemma A.4.5

Aus (3.7) folgt

$$[m_i, \text{Ad}(b_i b_{i+1}) m_i] = e. \quad (\text{A.25})$$

BEWEIS.

Aus (3.7) folgt mit (4.13) und (4.18)

$$\begin{aligned} \underbrace{b_i^{-1} m_i b_{i+1}^{-1} m_{i+1} b_i}_{m_i^{-1} b_i \quad m_{i+1}^{-1} b_{i+1}} &= b_{i+1} \underbrace{b_i^{-1} m_i b_{i+1}^{-1} m_{i+1}}_{m_i^{-1} b_i \quad m_{i+1}^{-1} b_{i+1}} \\ \stackrel{(4.13)}{\iff} m_i^{-1} b_{i+1}^{-1} m_{i+1}^{-1} b_{i+1} &= b_{i+1} m_i^{-1} b_{i+1}^{-1} m_i^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Mit $m_i = b_{i+1} b_i m_{i+1} b_i^{-1} b_{i+1}^{-1}$ bzw. $m_i = b_{i+1}^{-1} b_i^{-1} m_{i+1} b_i b_{i+1}$ (vgl. (4.13)) folgt

$$b_i m_{i+1} b_i^{-1} m_i = m_i b_i^{-1} m_{i+1} b_i$$

bzw. mit (4.18)

$$b_i m_{i+1} m_i^{-1} b_i = b_i m_i^{-1} m_{i+1} b_i \iff m_{i+1} m_i^{-1} = m_i^{-1} m_{i+1};$$

mit (4.13) folgt das Lemma.

□

Lemma A.4.6

Aus (3.6) folgt mit (4.13), (3.10), (3.7), (4.18) und (A.26)

$$[m_i, b_{i+1}^2] = e \quad (\text{A.27})$$

BEWEIS.

Gleichung (3.6) liefert mit (4.13)

$$b_i^{-1} b_{i+1}^{-1} b_i^{-1} m_{i+1} b_i m_{i+1} b_i^{-1} m_i = b_{i+1}^{-1} m_{i+1} b_i^{-1} m_i b_{i+1}^{-1} m_{i+1},$$

und daraus folgt mit (3.10) und $b_{i+1}^{-1} m_{i+1} = m_{i+1}^{-1} b_{i+1}$ (wg. $t_{i+1}^2 = \mathbf{1}$)

$$b_i^{-1} m_{i+1}^{-1} b_{i+1} b_i m_{i+1} b_i^{-1} m_i = m_{i+1} b_i^{-1} m_i m_{i+1}^{-1} b_{i+1}. \quad (\text{A.28})$$

Auf der anderen Seite folgt aus (3.7)

$$m_i^{-1} b_i m_{i+1}^{-1} b_{i+1} b_i = b_{i+1} m_i^{-1} b_i m_{i+1}^{-1} b_{i+1},$$

und wegen $b_{i+1} b_i = b_i^{-1} b_{i+1} b_i b_{i+1}$ folgt

$$[b_{i+1}, b_i m_{i+1} b_i^{-1} m_i] = e.$$

Damit gewinnt Gleichung (A.28) die Gestalt

$$b_i^{-1} m_{i+1}^{-1} b_i m_{i+1} b_i^{-1} m_i = m_{i+1} b_i^{-1} m_i m_{i+1}^{-1},$$

mit (4.13) und (4.18) folgt

$$b_{i+1} m_i^{-1} b_{i+1}^{-1} m_{i+1} m_i^{-1} = m_{i+1} m_i^{-1} b_{i+1}^{-1} m_i^{-1} b_{i+1},$$

und mit (A.26) erhält man

$$\begin{aligned} e &= [m_{i+1}, b_{i+1} m_i b_{i+1}^{-1}] \\ &= \left[\underbrace{b_i b_{i+1}}_{=b_{i+1} b_i b_{i+1} b_i^{-1}}, m_i, \underbrace{b_{i+1}^{-1} b_i^{-1}}_{=b_i^{-1} b_{i+1}^{-1} b_i^{-1} b_{i+1}}, b_{i+1} m_i b_{i+1}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Mit (4.18) folgt

$$\begin{aligned} e &= \left[b_{i+1} \underbrace{b_i b_{i+1} m_i^{-1} b_{i+1}^{-1} b_i^{-1}}_{m_{i+1}^{-1}} b_{i+1}, b_{i+1} m_i b_{i+1}^{-1} \right] \\ &= [b_{i+1} m_{i+1}^{-1} b_{i+1}, b_{i+1} m_i b_{i+1}^{-1}]. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Das ist äquivalent zu

$$e = [m_{i+1}^{-1} b_{i+1}^2, m_i], \quad (\text{A.31})$$

und mit $[m_i, m_{i+1}] = e$ (s.o.) folgt

$$e = [b_{i+1}^2, m_i]. \quad (\text{A.32})$$

□

Lemma A.4.7

Aus (A.27) und (A.26) folgt

$$[m_i, \text{Ad}(b_{i+1})m_i] = e. \quad (\text{A.33})$$

BEWEIS.

Aus (A.27) folgt

$$m_i b_{i+1} m_i b_{i+1}^{-1} = m_i b_{i+1}^{-1} m_i b_{i+1},$$

und mit (A.26) folgt das Lemma. □

Damit sind alle Gleichungen in Lemma 4.2.2 gezeigt.

A.5 Beweis des Lemmas 4.2.4

Wir zeigen, daß aus den Gleichungen (4.18) bis (4.24) für $i \leq I, I = 1, \dots, n-1$ unter Verwendung der Rekursionsformel (4.13) und der Gleichungen (3.10) und (3.13) die entsprechenden Gleichungen für $i = I+1$ folgen. Damit ist dann gezeigt, daß (4.18) bis (4.24) für $i = 1$ mit den Eigenschaften der b_j und (4.13) die Gleichungen (4.18) bis (4.24) für alle $i = 1, \dots, n-1$ implizieren.

Lemma A.5.1

$$b_i m_i^{-1} b_i = m_i, i \leq I \implies b_{I+1} m_{I+1}^{-1} b_{I+1} = m_{I+1}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} & b_I m_I^{-1} = m_I b_I^{-1} \\ \iff & \underbrace{b_I b_{I+1} b_I}_{b_{I+1} b_I b_{I+1}} m_I^{-1} b_{I+1}^{-1} b_I^{-1} = b_I b_{I+1} m_I \underbrace{b_I^{-1} b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}}_{b_{I+1}^{-1} b_I^{-1} b_{I+1}^{-1}} \\ \iff & b_{I+1} m_{I+1}^{-1} b_{I+1} = m_{I+1} \end{aligned} \tag{A.34}$$

□

Lemma A.5.2

$$[m, b_3] = e \iff [m_3, b_1] = e$$

BEWEIS.

Mit der Zopfeigenschaft (3.10) und der Vertauschungseigenschaft (3.13) der Erzeuger der Permutationsgruppe gilt

$$\begin{aligned} & [m, b_3] = e \\ \iff & [b_2 m b_2^{-1}, b_3^{-1} b_2 b_3] = e \\ \iff & [b_1 b_2 m b_2^{-1} b_1^{-1}, b_3^{-1} b_2^{-1} b_1 b_2 b_3] = e \\ \iff & \left[\underbrace{b_2 b_3 b_1 b_2 m b_2^{-1} b_1^{-1} b_3^{-1} b_2^{-1}}_{m_3}, b_1 \right] = e \end{aligned} \tag{A.35}$$

□

Lemma A.5.3

$$[m_i, b_k] = e, |i - k| \geq 2, i \leq I \implies [m_{I+1}, b_{k+1}] = e, |I - k| \geq 2$$

BEWEIS.

Wieder ist nur der Fall $k = I - 2, I \geq 3$ zu untersuchen, in allen anderen Fällen ist das Lemma offensichtlich richtig.

$$\begin{aligned}
e &= [m_{I-1}, b_{I+1}] = [b_I^{-1} b_{I-1}^{-1} m_I b_{I-1} b_I, b_{I+1}] \\
\iff e &= [b_{I-1}^{-1} m_I b_{I-1}, b_I b_{I+1} b_I^{-1}] = [b_{I-1}^{-1} m_I b_{I-1}, b_{I+1}^{-1} b_I b_{I+1}] \\
\iff e &= [b_{I+1} b_{I-1}^{-1} m_I b_{I-1} b_{I+1}^{-1}, b_I] = [b_{I-1}^{-1} b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_{I-1}, b_I] \\
\iff e &= [b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1}, b_{I-1} b_I b_{I-1}^{-1}] = [b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1}, b_I^{-1} b_{I-1} b_I] \\
\iff e &= [b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}, b_{I-1}] = [m_{I+1}, b_{k+1}]
\end{aligned} \tag{A.36}$$

□

Bemerkung A.5.4 Offenbar folgt aus $[m_i, b_k] = e, |i - k| \geq 2, i \leq I$ für $I \geq 3$ mit (3.13) sofort die im Lemma nicht enthaltene Aussage $[m_{I+1}, b_1] = e$, denn

$$[m_{I+1}, b_1] = [b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}, b_1].$$

Lemma A.5.5

$$[m_i, b_{i+1} b_{i+1}] = e, i \leq I \implies [m_{I+1}, b_{I+2} b_{I+2}] = e$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
e &= [m_I, b_{I+1} b_{I+1}] \\
\iff e &= [m_I, b_{I+1}^{-1} b_{I+1} b_{I+2} b_{I+1} b_{I+1} b_{I+2}^{-1}] \\
&= [m_I, b_{I+1}^{-1} b_{I+2} b_{I+1} b_{I+2} b_{I+1} b_{I+2}^{-1}] \\
&= [m_I, b_{I+1}^{-1} b_{I+2} b_{I+2} b_{I+1}] \\
\iff [b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}, b_{I+2} b_{I+2}] &= [m_{I+1}, b_{I+2} b_{I+2}]
\end{aligned} \tag{A.37}$$

□

Lemma A.5.6

$$[m_i, b_{i+1} b_i b_{i+1}] = e, i \leq I \implies [m_{I+1}, b_{I+2} b_{I+1} b_{I+1} b_{I+2}] = e$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
e &= [m_I, b_{I+1} b_I b_I b_{I+1}] \\
\iff e &= [m_I, b_{I+2}^{-1} b_{I+1} b_{I+2} b_I b_I b_{I+2}^{-1} b_{I+1} b_{I+2}] \\
&= [m_I, b_{I+1} b_{I+2} b_{I+1}^{-1} b_I b_I b_{I+1} b_{I+2} b_{I+1}^{-1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [m_I, b_{I+1}b_I b_{I+2} b_I^{-1} b_{I+1}^{-1} b_I b_I b_{I+1} b_{I+2} b_{I+1}^{-1}] \\
&= [m_I, b_{I+1}b_I b_{I+2} b_{I+1} b_I^{-1} b_{I+1}^{-1} b_I b_{I+1} b_{I+2} b_{I+1}^{-1}] \\
&= [m_I, b_{I+1}b_I b_{I+2} b_{I+1} b_{I+1}^{-1} b_I^{-1} b_{I+2} b_{I+1}^{-1}] \\
\iff e &= [b_I^{-1} b_{I+1}^{-1} m_I b_{I+1} b_I, b_{I+2} b_{I+1} b_{I+1} b_{I+2}] \\
&= [m_{I+1}, b_{I+2} b_{I+1} b_{I+1} b_{I+2}]
\end{aligned} \tag{A.38}$$

□

Lemma A.5.7

$$[m_i, b_{i+1} m_i b_{i+1}^{-1}] = e, i \leq I \implies [m_{I+1}, b_{I+2} m_{I+1} b_{I+2}^{-1}] = e$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
e &= [m_I, b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1}] \\
\iff e &= [m_I, b_{I+2} b_{I+1} b_{I+2}^{-1} m_I b_{I+2} b_{I+1}^{-1} b_{I+2}^{-1}] \\
&= [m_I, b_{I+1}^{-1} b_{I+2} b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_{I+2}^{-1} b_{I+1}] \\
&= [m_I, b_{I+1}^{-1} b_I^{-1} b_{I+2} b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1} b_{I+2}^{-1} b_I b_{I+1}] \\
\iff e &= [b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}, b_{I+2} b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1} b_{I+2}^{-1}] \\
&= [m_{I+1}, b_{I+2} m_{I+1} b_{I+2}^{-1}]
\end{aligned} \tag{A.39}$$

□

Lemma A.5.8

$$[m_i, m_{i+1}] = e, i \leq I \implies [m_{I+1}, m_{I+2}] = e$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
e &= [m_I, m_{I+1}] = [m_I, b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}] \\
\iff e &= [m_I, b_I b_{I+2} b_{I+1} b_{I+2}^{-1} m_I b_{I+2} b_{I+1}^{-1} b_{I+2}^{-1} b_I^{-1}] \\
&= [m_I, b_I b_{I+1}^{-1} b_{I+2} b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_{I+2}^{-1} b_{I+1} b_I^{-1}] \\
&= [m_I, b_{I+1}^{-1} b_{I+1} b_I b_{I+1}^{-1} b_{I+2} b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_{I+2}^{-1} b_{I+1} b_I^{-1} b_{I+1}] \\
&= [m_I, b_{I+1}^{-1} b_I^{-1} b_{I+1} b_I b_{I+2} b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_{I+2}^{-1} b_I^{-1} b_{I+1} b_I b_{I+1}] \\
\iff e &= [b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}, b_{I+1} b_I b_{I+2} b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_{I+2}^{-1} b_I^{-1} b_{I+1}] \\
&= [b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}, b_{I+1} b_{I+2} b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1} b_{I+2}^{-1} b_{I+1}] \\
&= [m_{I+1}, m_{I+2}]
\end{aligned} \tag{A.40}$$

□

Lemma A.5.9

$$[m_i, m_k] = e, |i - k| \geq 2, i \leq I \implies [m_{I+1}, m_{k+1}] = e, |I - k| \geq 2$$

BEWEIS.

Wieder nur der Fall $|k - I| = 2$ zu betrachten; o.B.d.A. sei $k = I - 2$.

$$\begin{aligned}
 & e = [m_I, m_{I-2}] \\
 \Leftrightarrow & e = [b_I b_{I+1} m_I b_{I+1}^{-1} b_I^{-1}, m_{I-2}] = [m_{I+1}, m_{I-2}] \\
 \Leftrightarrow & e = [m_{I+1}, b_{I-2} b_{I-1} m_{I-2} b_{I-1}^{-1} b_{I-2}^{-1}] = [m_{I+1}, m_{k+1}], \tag{A.41}
 \end{aligned}$$

wobei wir mehrfach $[m_i, b_k] = e, |i - k| \geq 2$ ausgenutzt haben.

□

Anhang B

Youngdiagramme und irreduzible Darstellungen der unitären Gruppe

Ein ganz wesentliches Werkzeug für die Untersuchungen in Teil III sind die Youngrahmen und -tableaux¹ des Gruppenringes \mathcal{R}_N und die ihnen zugeordneten Projektoren. Wir geben in diesem Kapitel einen kurzen Überblick über ihre für uns wesentlichen Eigenschaften, insbesondere auch über den Zusammenhang zwischen den Youngtableaux und den irreduziblen Darstellungen der unitären Gruppe.

B.1 Youngdiagramme

B.1.1 Vorbemerkungen aus der allgemeinen Darstellungstheorie

Wir tragen zunächst einige Ergebnisse aus der Darstellungstheorie von Gruppen bzw. Gruppenringen ohne Beweise zusammen, um den Boden für die Betrachtung der Youngdiagramme im Fall der \mathcal{P}_N bzw. des \mathcal{R}_N zu bereiten. Diese Zusammenstellung orientiert sich an den ausführlichen Darstellungen in [41], Kapitel III,2 - III,4; dort finden sich auch die hier fehlenden Beweise.

Gegeben seien eine Gruppe \mathcal{G} und ihr Gruppenring $\mathcal{R} = \text{span} \{g \mid g \in \mathcal{G}\}$. \mathcal{R} zerfällt in eine direkte Summe aus minimalen Rechtsidealen r_i ,

$$\mathcal{R} = \bigoplus_i r_i. \tag{B.1}$$

Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Äquivalenz und Reihenfolge. In jedem Rechtsideal r_i gibt es (mindestens) einen Projektor² $P_i = P_i^*$,

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \text{und} \quad \sum_i P_i = \mathbf{1},$$

so daß

$$P_i \mathcal{R} = r_i.$$

¹Im folgenden werden wir bisweilen den Begriff *Youngdiagramme* verwenden, wenn sowohl die Rahmen als auch die Tableaux gemeint sind.

²Die Aussagen dieses Abschnittes bleiben auch richtig, wenn man die P_i *Idempotente* sind, für die nicht notwendig $P_i = P_i^*$ gilt. Wir formulieren sie dennoch für Projektoren, da wir in Teil III auch mit Projektoren arbeiten.

P_i heißt *minimal*, wenn es keinen Projektor $P \neq 0, P_i$ gibt mit

$$PP_i = P.$$

Die Projektoren P_i auf die minimalen Rechtsideale werden im folgenden *minimale Orthogonalprojektoren* genannt. Ein Projektor P_i ist genau dann minimal, wenn gilt

$$P_i x P_i \in \mathbb{C}P_i \quad \forall x \in \mathcal{R},$$

Ein Rechtsideal ist genau dann minimal, wenn der zugehörige Projektor minimal ist. Zwei minimale Rechtsideale r_i und r_j sind genau dann äquivalent, $r_i \cong r_j$, wenn es von Null verschiedene $P_i x P_j$ gibt.

Die minimalen Rechtsideale in der Zerlegung (B.1) ordnen wir jetzt so an, daß

$$\mathcal{R} = r_1^{(1)} \oplus \dots \oplus r_{f_1}^{(1)} \oplus \dots \oplus r_1^{(m)} \oplus \dots \oplus r_{f_m}^{(m)}, \quad r_j^{(i)} \cong r_k^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m \text{ und } j, k = 1, \dots, f_i.$$

Dann sind die

$$a^{(i)} = \bigoplus_{j=1}^{f_i} r_j^{(i)}$$

minimale zweiseitige Ideale in \mathcal{R} , und die Zerlegung

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^m a^{(i)}$$

ist eindeutig. Ebenso eindeutig bestimmt sind die Projektoren

$$\mathbf{P}^{(i)} := \sum_{j=1}^{f_i} P_j^{(i)}$$

auf die zweiseitigen Ideale; die $\mathbf{P}^{(i)}$ spannen das Zentrum von \mathcal{R} auf.

Für alle $x \in a^{(i)}$ gilt nun

$$x = \mathbf{P}^{(i)} x \mathbf{P}^{(i)} = \sum_{j,k} P_j^{(i)} x P_k^{(i)};$$

wegen $r_j^{(i)} \cong r_k^{(i)}$ sind die $P_j^{(i)} x P_k^{(i)}$ nicht alle Null. Vielmehr sind die $P_j^{(i)} x P_k^{(i)}$ alle Zahlenvielfache eines Referenzelementes aus $P_j^{(i)} \mathcal{R} P_k^{(i)}$. Die Wahl von f_i^2 solcher Referenzelemente liefert dann einen Isomorphismus zwischen $a^{(i)}$ und dem vollen Ring der $f_i \times f_i$ -Matrizen. Führt man dieses Verfahren für alle $a^{(i)}$ durch, so erhält man, daß \mathcal{R} isomorph ist zur direkten Summe voller Matrixringe.

B.1.2 Youngdiagramme

Wir wenden die im vorigen Abschnitt zusammengestellten allgemeinen Resultate auf den speziellen Fall der Permutationsgruppe \mathcal{P}_N und ihres Gruppenringes \mathcal{R}_N an.

Definition B.1.1 Ein *Youngrahmen* Y_N in \mathcal{R}_N besteht aus N Kästchen, die in $r < N$ Zeilen so angeordnet sind, daß alle Zeilen links beginnen, keine Lücken haben und die Anzahl der Kästchen in einer Zeile von oben nach unten nicht zunimmt. Die Menge aller Youngrahmen mit N Kästchen heißt \mathcal{Y}_N . Ein *Youngtableau* T_N der Größe N entsteht aus einem Rahmen $Y_N \in \mathcal{Y}_N$ dadurch, daß die Zahlen $1, \dots, N$ derart in die Kästchen des Rahmens eingetragen werden, daß keine Zahl doppelt vorkommt und in einer Zeile von links nach rechts bzw. in einer Spalte von oben nach unten der Zahlenwert zunimmt³. Wir sagen, T_N gehört zum Rahmen Y_N . Die Menge aller Youngtableaux der Größe N bezeichnen wir mit \mathcal{T}_N .

Lemma B.1.2

[41], IV.3 und IV.4

Sei $T_N \in \mathcal{T}_N$. Mit p bezeichnen wir Permutationen der Elemente jeder Zeile miteinander, mit q Permutationen der Elemente jeder Spalte miteinander. Weiter sei $\varepsilon_q = 1$ für gerade Permutationen q und $\varepsilon_q = -1$ für ungerade Permutationen q . Dann sind die Operatoren $B(T_N) = \frac{1}{\kappa} \sum_{pq} \varepsilon_q pq$ mit einem Normierungsfaktor $\kappa \in \mathbb{C}$ minimale Idempotente⁴ in \mathcal{R}_N ,

$$B(T_N)B(T'_N) = \delta_{T_N, T'_N} B(T_N), \quad \sum B(T_N) = \mathbf{1}.$$

Die minimalen Rechtsideale $B(T_N)\mathcal{R}_N, B(T'_N)\mathcal{R}_N, \dots$ sind genau dann äquivalent, wenn die T_N, T'_N, \dots zum selben Rahmen gehören. Den Projektor auf das zugehörige zweiseitige Ideal bezeichnen wir wie den Rahmen mit Y_N ; mit der Notation $T_N|Y_N$ für “ T_N gehört zum Rahmen Y_N ” ist

$$Y_N := \sum_{T_N|Y_N} B(T_N).$$

Ein Tableau läßt sich auffassen als eine Abfolge von Rahmen, die entstehen, wenn man sukzessive das Kästchen mit der höchsten Nummer im Tableau streicht und den Rahmen des resultierenden Tableaux hinschreibt. Diese Zuordnung zwischen den Tableaux und den Rahmen-Abfolgen ist offenbar eindeutig, so daß wir jedes Tableau mit der zugehörigen Rahmenabfolge identifizieren können.

$$T_N \equiv (Y_N, Y_{N-1}, \dots, Y_2, Y_1).$$

Im folgenden verzichten wir darauf, $Y_1 = \square = \mathbf{1}$ zu schreiben.

Während die $Y_N = Y_N^*$ als Projektoren auf die minimalen zweiseitigen Ideale eindeutig bestimmt sind, gibt es in der Wahl der minimalen Orthogonalprojektoren einige Freiheit.

Definition B.1.3 Für jedes Tableau $T_N = (Y_N, Y_{N-1}, \dots, Y_2)$ definieren wir die Operatoren

$$Q(T_N) := Y_N \circ \alpha(Y_{N-1}) \circ \dots \circ \alpha^{N-2}(Y_2)$$

³In der Literatur ist ein Tableau häufig durch beliebiges Eintragen der Zahlen $1, \dots, N$, keine Zahl doppelt, definiert; ein Tableau, dessen Zahlen von links nach rechts und von oben nach unten anwachsen, heißt dann *Standardtableau*. Wir werden hier nur Standardtableaux verwenden und benutzen aus Gründen der Einfachheit für diese die Bezeichnung “Tableau”.

⁴Es gilt

$$\left(\sum_{pq} \varepsilon_q pq \right) \left(\sum_{pq} \varepsilon_q pq \right) = \kappa \left(\sum_{pq} \varepsilon_q pq \right)$$

und somit $B(T_N)B(T_N) = B(T_N)$. Es handelt sich nicht um Orthogonalprojektoren, da i.a. $B(T_N)^* \neq B(T_N)$ ist.

mit der Abbildung $\alpha : \mathcal{R}_{m-1} \rightarrow \mathcal{R}_m : t_i \mapsto t_{i+1}$ und

$$P(T_N) := Y_N \circ \iota(Y_{N-1}) \circ \cdots \circ \iota^{N-2}(Y_2)$$

mit der Einbettung $\iota : \mathcal{R}_{m-1} \hookrightarrow \mathcal{R}_m$.

- Bemerkung B.1.4** 1. Ist $m < N$ und ist Y_m in Y_N enthalten, d.h. Y_m geht aus Y_N durch Streichung von $N-m$ Kästchen hervor, so folgt aus Satz IV.5.4 von [41] oder Satz V.18.1 von [45], daß $Y_N \circ \alpha^{N-m}(Y_m), Y_N \circ \iota^{N-m}(Y_m) \neq 0$ und insbesondere $Q(T_N), P(T_N) \neq 0$.
2. Wegen der Zentralität Youngrahmen im jeweiligen Gruppenring sind $Q(T_N)$ und $P(T_N)$ invariant unter Vertauschung der $\alpha^{N-m}(Y_m)$ bzw. $\iota^{N-m}(Y_m)$.

Lemma B.1.5

Sowohl die $Q(T_N)$ als auch die $P(T_N)$ sind minimale Orthogonalprojektoren in \mathcal{R}_N . Es gilt

$$Y_N = \sum_{T_N|Y_N} Q(T_N) = \sum_{T_N|Y_N} P(T_N). \quad (\text{B.2})$$

BEWEIS.

Die Orthogonalität der $Q(T_N)$ folgt aus der Zentralität der Y_m in \mathcal{R}_m und der Orthogonalität der Y_m :

$$\begin{aligned} Q(T_N)Q(T'_N) &= Y_N \circ \alpha(Y_{N-1}) \circ \cdots \circ \alpha^{N-2}(Y_2) \circ Y'_N \circ \alpha(Y'_{N-1}) \circ \cdots \circ \alpha^{N-2}(Y'_2) \\ &= Y_N \circ Y'_N \circ \alpha(Y_{N-1}) \circ \cdots \circ \alpha^{N-2}(Y_2) \circ \alpha(Y'_{N-1}) \circ \cdots \circ \alpha^{N-2}(Y'_2) \\ &= \delta_{Y_N, Y'_N} Y_N \\ &\quad \circ \alpha \left(\delta_{Y_{N-1}, Y'_{N-1}} Y_{N-1} \circ \alpha(Y_{N-2}) \cdots \alpha^{N-3}(Y_2) \circ \alpha(Y_{N-2}) \cdots \alpha^{N-3}(Y'_2) \right) \\ &= \dots = \delta_{Y_N, Y'_N} \cdots \delta_{Y_2, Y'_2} \cdot Y_N \circ \alpha(Y_{N-1}) \circ \cdots \circ \alpha^{N-2}(Y_2) \\ &= \delta_{T_N, T'_N} Q(T_N). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Da nun die $Q(T_N)$ aber orthogonal sind und nicht verschwinden (s. Bemerkung B.1.4), ist klar, daß sie minimal sind: Wären sie nicht minimal, so wären die Rechtsideale $Q(T_N)\mathcal{R}_N$ nicht minimal und könnten in weitere Rechtsideale aufgespalten werden. Dann gäbe es aber mehr minimale Rechtsideale als in der Zerlegung bzgl. der $B(T_N)$; das kann aber nicht sein, da die Zerlegung in minimale Rechtsideale bis auf Reihenfolge und Äquivalenz eindeutig ist.

Aus $Y_m = Y_m^*$ und der Bemerkung B.1.4 folgt $Q(T_N) = Q(T_N)^*$.

Es bleibt Gleichung (B.2) zu zeigen; das gelingt durch vollständige Induktion: Für $N = 1$ gibt es nur einen Rahmen und ein Tableau, Gleichung (B.2) ist also offenbar erfüllt. Angenommen, (B.2) gilt nun für $N = k - 1 \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{Q(T_k)|Y_k} Q(T_k) &= Y_k \sum_{Y_{k-1}, \dots, Y_2} \alpha(Y_{k-1}) \circ \alpha^2(Y_{k-2}) \circ \cdots \circ \alpha^{k-2}(Y_2) \\ &= Y_k \sum_{Y_{k-1}} \alpha \left(Y_{k-1} \sum_{Y_{k-2}, \dots, Y_2} \alpha(Y_{k-2}) \circ \cdots \circ \alpha^{k-3}(Y_2) \right) \\ &= Y_k \sum_{Y_{k-1}} \alpha \left(\sum_{T_{k-1}|Y_{k-1}} Q(T_{k-1}) \right) \\ &= Y_k \sum_{Y_{k-1}} \alpha(Y_{k-1}) = Y_k. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Der Beweis für die $P(T_N)$ läuft vollkommen analog.

□

Sowohl auf die $P(T_N)$ als auch auf die $Q(T_N)$ treffen damit alle Aussagen zu, die im vorangegangenen Abschnitt über die minimalen Orthogonalprojektoren $P_j^{(i)}$ in einem Gruppenring gemacht wurden. Die Rolle des oberen Indizes, der angibt, in welchem zweiseitigen Ideal (d.h. auch, in welcher Äquivalenzklasse von Rechtsidealen) $P_j^{(i)}\mathcal{R}$ liegt und gleichbedeutend damit, zu welchem $\mathbf{P}^{(i)}$ $P_j^{(i)}$ beiträgt, spielt hier offenbar der Rahmen eines Tableaus.

Wir zeigen noch eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Produkt aus einem Rahmen aus \mathcal{Y}_N und einem Rahmen aus $\iota(\mathcal{Y}_{N-1})$ nicht verschwindet.

Definition B.1.6 Geht Y_{N+1} aus Y_N durch Anfügen eines Kästchens hervor, so nenne Y_N und Y_{N+1} *benachbart* und schreibe $Y_N \triangleleft Y_{N+1}$. Sind $T_{N+1} \equiv (Y_{N+1}, \dots, Y_2)$ und $T'_N \equiv (Y'_N, \dots, Y'_2)$ mit $Y'_m = Y_m, m = 2, \dots, N$, so schreibe $T'_N \triangleleft T_{N+1}$.

Wir beweisen zunächst eine Hilfsaussage:

Lemma B.1.7

$$P(T_{N+1})\iota(P(T'_N)) \neq 0 \iff T'_N \triangleleft T_{N+1}$$

BEWEIS.

Es ist

$$\begin{aligned} P(T_{N+1})\iota(P(T'_N)) &= Y_{N+1}\iota(Y_N) \cdots \iota^{N-1}(Y_2)\iota(Y'_N) \cdots \iota^{N-1}(Y'_2) \\ &= Y_{N+1} \circ \iota(Y_N Y'_N) \circ \cdots \iota^{N-1}(Y_2 Y'_2); \end{aligned} \tag{B.5}$$

aus der Orthogonalität der Y_m und Bemerkung B.1.4 folgt die Behauptung.

□

Lemma B.1.8

$$Y_{N+1}\iota(Y'_N) \neq 0 \iff Y'_N \triangleleft Y_{N+1}$$

BEWEIS.

Es gilt

$$Y_{N+1}\iota(Y'_N) = \sum_{T_{N+1}|Y_{N+1}} \sum_{T'_N|Y'_N} P(T_{N+1})\iota(P(T'_N));$$

die rechte Seite verschwindet genau dann nicht, wenn für mindestens einen Summanden $T'_N \triangleleft T_{N+1}$. Das ist genau dann der Fall, wenn $Y'_N \triangleleft Y_{N+1}$.

□

Da die Y_{N+1} als Projektoren auf die zweiseitige Ideale im \mathcal{R}_{N+1} zentral im \mathcal{R}_{N+1} sind, gilt $Y_{N+1}\iota(Y'_N) = \iota(Y'_N)Y_{N+1}$, d.h. die Aussage des Lemmas ist unabhängig von der Reihenfolge der beiden Faktoren auf der linken Seite.

B.2 Tensordarstellungen der unitären Gruppe

Gegeben sei ein separabler Hilbertraum \mathcal{H} . Auf \mathcal{H} wirkt die Vektordarstellung der unitären Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ irreduzibel gemäß

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) \ni u : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : \Psi \mapsto u\Psi.$$

Auf $\mathcal{H}^{\otimes N}$ wirke der Ring \mathcal{R}_N der Permutationsgruppe \mathcal{P}_N durch Vertauschung der Tensorkomponenten; offenbar ist \mathcal{R}_N in der Kommutante der N -fachen Tensordarstellung $\Gamma_N(u) = u \otimes \cdots \otimes u$ auf $\mathcal{H}^{\otimes N}$ enthalten. Für das Folgende ist entscheidend, daß der Ring sogar gleich dieser Kommutanten ist,

$$\mathcal{R}_N = \Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))';$$

diese Aussage gilt sowohl für $\dim \mathcal{H} < \infty$ (s. z.B. [41], V §3, Satz 3.5) als auch für $\dim \mathcal{H} = \infty$ (s. z.B. [52], 2.8 Lemma). Die Projektoren in \mathcal{R}_N sind somit Projektoren auf unter $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ invariante Teilräume von $\mathcal{H}^{\otimes N}$ und umgekehrt.

Lemma B.2.1

Gegeben sei ein unter $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ invarianter Teilraum $R \in \mathcal{H}^{\otimes N}$. Dann ist

$$r := \{s \in \mathcal{R}_N : s\Psi \in R \forall \Psi \in \mathcal{H}^{\otimes N}\}$$

ein Rechtsideal in \mathcal{R}_N .

BEWEIS.

Wegen $(\alpha s_1 + \beta s_2)\Psi = \alpha s_1\Psi + \beta s_2\Psi$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist r ein linearer Raum; wegen $(sa)\Psi = s(a\Psi) \in R$, $s \in r$, $a \in \mathcal{R}_N$ ist r invariant unter der Rechtsmultiplikation. □

Korollar B.2.2 Jeder Projektor $P \in \Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))' = \mathcal{R}_N$ auf einen unter $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ invarianten Teilraum von $\mathcal{H}^{\otimes N}$ ist ein Projektor auf ein Rechtsideal in \mathcal{R}_N .

Lemma B.2.3

Es sei R ein unter $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ invarianter Teilraum von $\mathcal{H}^{\otimes N}$, r das zugehörige Rechtsideal in \mathcal{R}_N . Dann ist die Einschränkung von $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ auf R genau dann irreduzibel, wenn r minimal ist.

BEWEIS.

Ist r nicht minimal, so läßt sich der Projektor $P_r \in \mathcal{R}_N = \Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))'$ auf r zerlegen in zwei Projektoren $P_r^{(1)}, P_r^{(2)} \in \mathcal{R}_N$; dann ist aber

$$R = P_r \mathcal{H}^{\otimes N} = P_r^{(1)} \mathcal{H}^{\otimes N} \oplus P_r^{(2)} \mathcal{H}^{\otimes N},$$

und beide Teilräume von R sind invariant unter $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$, d.h. R ist reduzibel.

Sei umgekehrt R reduzibel, $R = R_1 \oplus R_2$ und R_1, R_2 invariant unter $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$. Es gibt dann Projektoren $P_R^{(i)} \in \Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))' = \mathcal{R}_N$ auf R_i , und der Projektor P_R auf R ist die Summe von diesen beiden. Dann ist aber das zugehörige Rechtsideal

$$r = P_R \mathcal{R}_N = P_R^{(1)} \mathcal{R}_N \oplus P_R^{(2)} \mathcal{R}_N$$

in \mathcal{R}_N nicht minimal.

Es gilt also: $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))|_R$ ist reduzibel genau dann, wenn r nicht minimal ist. Durch Negation folgt das Lemma. □

Korollar B.2.4 Die Darstellungen $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))|_{Q(T_N)\mathcal{H}^{\otimes N}}$ sind irreduzibel.

Lemma B.2.5

Die zwei Darstellungen $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))|_{Q(T_N)\mathcal{H}^{\otimes N}}, \Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))|_{Q(T'_N)\mathcal{H}^{\otimes N}}$ sind genau dann äquivalent, wenn T_N und T'_N zum selben Rahmen gehören.

BEWEIS.

Die Darstellungen sind genau dann äquivalent, wenn es unitäre

$$V \in Q(T'_N)\mathcal{R}_N Q(T_N)$$

gibt; das ist aber genau dann der Fall, wenn die jeweiligen Rechtsideale in \mathcal{R}_N äquivalent sind, d.h. wenn T_N, T'_N zum selben Rahmen Y_N gehören.

□

Wie bereits angesprochen, gelten die hier gemachten Aussagen sowohl für $\dim \mathcal{H} < \infty$ als auch für $\dim \mathcal{H} = \infty$; ein wesentlicher Unterschied besteht allerdings zwischen diesen beiden Fällen: Im Fall eines endlichdimensionalen \mathcal{H} kommen auf $\mathcal{H}^{\otimes N}$ mit $N > \dim \mathcal{H}$ nicht alle durch Youngdiagramme indizierte Darstellungen $\Gamma_N(\mathcal{U}(\mathcal{H}))|_{Q(T_N)\mathcal{H}^{\otimes N}}$ vor: Die Tensoren im Bild eines Projektors $Q(T_N), T_N|Y_N$ mit r_{Y_N} Zeilen sind antisymmetrisch in r_{Y_N} Indizes; die Indizes können aber nur $\dim \mathcal{H}$ unterschiedliche Werte annehmen, und somit gilt für $T_N|Y_N$

$$Q(T_N)\mathcal{H}^{\otimes N} = 0 \text{ falls } r_{Y_N} > \dim \mathcal{H}.$$

Literaturverzeichnis

- [1] D. BUCHHOLZ & R. HAAG: *The quest for understanding in relativistic quantum physics*, Journ. Math. Phys. **41**, 3674-3697 (2000)
- [2] B. SCHROER: *Anomalous scale dimensions from timelike braiding*, hep-th/0005134 v4 (2000)
- [3] B. SCHROER: *Space- and timelike superselection rules in conformal quantum field theory*, hep-th/0010290 v2 (2000)
- [4] B. SCHROER: *Braided structure in 4-dimensional quantum field theory*, Phys. Lett. B **506** (2001), 337-343
- [5] A.A. BELAVIN, A.M. POLYAKOV & A.B. ZAMOLODCHIKOV: *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B**241**, 333-380 (1984)
- [6] B. SCHROER, J.A. SWIECA & A.H. VÖLKEL: *Global operator expansions in conformally invariant relativistic quantum field theory*, Phys. Rev. D**11**, 1509-1520 (1975)
- [7] B. SCHROER J.A. SWIECA: *Conformal transformations for quantized fields*, Phys. Rev. D **10**, 480-485, (1974)
- [8] K.H. REHREN & B. SCHROER: *Exchange algebra on the light-cone and order/disorder 2n-point functions in the Ising field theory*, Phys. Letters B**198**, 84-88 (1987)
- [9] K.-H. REHREN: *Locality of conformal fields in two dimensions: exchange algebra on the light-cone*, Comm. Math. Phys. **116**, 675-688 (1988)
- [10] K.H. REHREN & B. SCHROER: *Einstein causality and Artin braids*, Nucl. Phys. B**312**, 715-750 (1989)
- [11] E. ARTIN: *Collected Papers*, pp. 416-498; S. LANG & J.T. TATE (eds.); Reading, MA 1965
- [12] K. FREDENHAGEN, K.-H. REHREN & B. SCHROER: *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras I: general theory*, Comm. Math. Phys. **125**, 201-226 (1989)
- [13] K. FREDENHAGEN, K.-H. REHREN & B. SCHROER: *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras II: geometric aspects and conformal covariance*, Rev. Math. Phys. **SI**, 113-157 (1992)
- [14] S. DOPLICHER, R. HAAG & J.E. ROBERTS: *Fields, observables and gauge transformations I*, Comm. Math. Phys. **13**, 1-23 (1969)

- [15] S. DOPLICHER, R. HAAG & J.E. ROBERTS: *Fields, observables and gauge transformations II*, Comm. Math. Phys. **15**, 173-200 (1969)
- [16] S. DOPLICHER, R. HAAG & J.E. ROBERTS: *Local observables and particle statistics I*, Comm. Math. Phys. **23**, 199-230 (1971)
- [17] S. DOPLICHER, R. HAAG & J.E. ROBERTS: *Local observables and particle statistics II*, Comm. Math. Phys. **35**, 49-85 (1974)
- [18] J. FRÖHLICH & F. GABBIANI: *Braid statistics in local quantum theory*, Rev. Math. Phys. **2**, 251 (1991)
- [19] S. DOPLICHER & J.E. ROBERTS: *A new duality theory for compact groups*, Inv. Math. **98**, 157-218 (1989)
- [20] S. DOPLICHER & J.E. ROBERTS: *Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics*, Comm. Math. Phys. **131**, 51-107 (1991)
- [21] K.H. REHREN: *Space time fields and exchange fields*, Comm. Math. Phys. **132**, 461-483 (1990)
- [22] R. HAAG & D. KASTLER: *An algebraic approach to quantum field theory*, Journ. Math. Phys. **5**, 848-861 (1964)
- [23] R. HAAG: *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, 2nd rev. & enl. ed., Springer Verlag Berlin, Heidelberg, 1996
- [24] R.V. KADISON & J.R. RINGROSE: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Vols. 1 & 2, Academic, New York, 1986
- [25] I.M. GELFAND & M.A. NEUMARK: *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in hilbert space*, Mat. Sb. **12**, 197-213 (1947)
- [26] I.E. SEGAL: *Irreducible representations of operator algebras*, Bull. Am. Math. Soc. **53**, 73-88 (1947)
- [27] R.F. STREATER & A.S. WIGHTMAN: *PCT, Spin & Statistics, And All That*, W.A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam 1964
- [28] D. BUCHHOLZ & K. FREDENHAGEN: *Locality and the structure of particle states*, Comm. Math. Phys. **84**, 1 (1982)
- [29] S. DOPLICHER & J.E. ROBERTS: *Fields, statistics & non-abelian gauge groups*, Comm. Math. Phys. **28**, 331-348 (1972)
- [30] M.A. NAIMARK & A.I. ŠTERN: *Theory of Group Representations*, Springer Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1982
- [31] LONGO, R. & ROBERTS, J.E.: *A theory of dimension*, K-Theory **11**, 103-159 (1997)
- [32] BÖCKENBAUER, J., EVANS, D.E. & KAWAHIGASHI, Y.: *On α -induction, chiral generators & modular invariants for subfactors*, Comm. Math. Phys. **208**, 429-487 (1999)

- [33] R. FENN, R. RIMÁNYI & C. ROURKE: *The braid-permutation group*, Topology **36**, 123-135, 1997
- [34] R. STREET: *Braids among the groups*, Preprint, Macquarie University, Australia
- [35] K.-H. REHREN: private Notizen
- [36] O.W. GREENBERG: *Generalized free fields and models of local field theory*, Ann. Phys. **16**, 158-176 (1961)
- [37] R. JOST: *The General Theory of Quantized Fields*, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1965
- [38] G. KÄLLEN: *On the definition of the renormalization constants*, Helv. Phys. Acta **25**, 417-434 (1952)
- [39] H. LEHMANN: *Über die Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder*, Nuovo Cim. (Ser. 9) **11**, 342-357 (1954)
- [40] M. DÜTSCH & K.H. REHREN: *Generalized free fields and the AdS-CFT correspondence*, math-ph/0209035 (2002)
- [41] H. BOERNER: *Darstellungen von Gruppen; Mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1967
- [42] I.M. GELFAND & M.I. GRAEV: *Principal representations of the group $U(\infty)$* , in A.M. VERSHIK & D.P. ZHELOBENKO (ed.): *Representations of Lie Groups And Related Topics*, Gordon And Breach Science Publishers, New York, 1991, S. 119-153
- [43] A.A. KIRILLOV: *Representations of the infinite dimensional unitary group*, Proc. Acad. Sci. USSR **212**, No. 2, 288-290 (1973)
- [44] M. HAMERMESH: *Group Theory And Its Applications to Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London-Paris 1962
- [45] H. WEYL: *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, Stuttgart 1967
- [46] P.H. BUTLER: *Point Group Symmetry Applications*, Plenum Press, New York And London, 1981
- [47] P. KRAMER: *Recoupling coefficients of the symmetric group for shell and cluster model configuration*, Z. Physik **216**, 68-83 (1968)
- [48] J.Q. CHEN: *A New Approach to Group Representation Theory*, Science and Technology Press, Shanghai, 1984
- [49] J.Q. CHEN, M.J. GAO & X.G. CHEN: *The Clebsch-Gordan coefficients for the $SU(m/n)$ Gel'fand basis*, J. Phys. **A17**, 481-500 (1984)
- [50] J.Q. CHEN: *Tables of the Clebsch-Gordan, Racah And Subduction Coefficients of $SU(n)$ Groups*, World Scientific, Singapore 1987

- [51] J.Q. CHEN: Group Representation Theory For Physicists, World Scientific, Singapore, 1989
- [52] G.I. OL'SHANSKII: *Unitary representations of infinite dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe*, in [42], S. 269-463

Danksagungen

Ich konnte während meines Studiums und während meiner Diplomarbeit von der Hilfe und der Erfahrung vieler Menschen profitieren; besonders bedanken möchte ich mich bei (in alphabetischer Reihenfolge)

- Herrn Prof. Dr. Detlev BUCHHOLZ für die Übernahme des Koreferats
- meiner Ehefrau Sandra MOSER-NEUMANN für viel Geduld besonders während der letzten Wochen der Fertigstellung des Manuskriptes
- meinen Eltern Dr. Rainer und Dr. Ursula NEUMANN für die Finanzierung des größten Teils meines Studiums
- Herrn Prof. Dr. Karl-Henning REHREN für die ausgesprochen geduldige Betreuung dieser Arbeit