Nichtlineare chirale Quantenfelder

Diplomarbeit

vorgelegt von

Oliver Natt

aus

Bad Hersfeld

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik

der Georg-August-Universität zu Göttingen

September 2000

Inhaltsverzeichnis

Anhang

Fortschritt ist nur möglich, wenn man intelligent gegen die Regeln verstößt.

Barlog, Boleslaw

1 Einleitung

Eine mögliche Axiomatisierung von Quantenfeldtheorien ist in der Literatur unter dem Begriff Wightmansche Quantenfeldtheorie bekannt. Jedem Raum-Zeit-Gebiete $\mathcal{O}$ werden Feldoperatoren $\phi(f)$ zugeordnet, wobei f Testfunktionen sind, deren Träger ganz in $\mathcal{O}$ liegen. Die Feldoperatoren $\phi(f)$ hängen linear von den Testfunktionen f ab und werden als operatorwertige Distributionen aufgefaßt.

In der vorliegenden Arbeit stellen wir uns die Frage, ob das Postulat der Linearität der Wightmanfelder physikalisch erzwungen ist. Konkret werden wir die Feldalgebra der chiralen Energiedichte betrachten. Die entsprechenden Feldoperatoren lassen sich als Generatoren einer Untergruppe der Diffeomorphismengruppe auf der reellen Achse deuten. Es stellt sich heraus, daß die Algebra dieser Feldoperatoren gerade die einzige nicht-triviale Erweiterung der Witt-Algebra, die sogenannte Virasoro-Algebra ist. Die Virasoro-Algebra ist in physikalischen Fragestellungen von Interesse, bei denen in ein oder zwei Raum-Zeit-Dimensionen eine konforme Invarianz wesentlich ist. Als Beispiele seien Anwendungen in der statistischen Mechanik niederdimensionale Systeme in der Nähe kritischer Punkte [FQS84, GO86] und das Wess-Zumino-Modell in der String-Theorie [KZ84] genannt.

Im Laufe der Arbeit werden wir eine neue Algebra, die Quasi-Witt-Algebra, konstruieren. In den dazugehörigen algebraischen Relationen tauchen die von der Virasoro-Algebra bekannten Schwinger-Terme *nicht* mehr auf. Weiterhin werden wir zeigen, daß die physikalisch interessanten Darstellungen dieser Algebra in einer eineindeutigen Beziehung zu den physikalisch interessanten Darstellungen der Virasoro-Algebra stehen, wenn man die Forderung nach der Linearität der Feldoperatoren aufgibt. In diesem Sinne ist dann das Auftreten der Schwinger-Terme in den Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren, das klassisch nicht zu verstehen ist, als ein Artefakt der Forderung nach der Linearität der Feldoperatoren zu verstehen.

Weiterhin werden wir eine Erweiterung des Wightmanschen Rahmens der Quantenfeldtheorie vorschlagen, der solche nichtlineare Felder zuläßt und zeigen, daß dieser erweiterte Rahmen immernoch die Rekonstruktion der kompletten Theorie aus ihren Vakuumerwartungswerten zuläßt.

Viele der zitierten Artikel, die in direktem Zusammenhang mit der Virasoro-Algebra stehen, sind von Goddard und Olive in einem Buch zusammengetragen worden [GO88]. Im Text werden nicht immer alle mathematischen Symbole definiert. Der Leser sei dazu auf das Symbolverzeichnis ab Seite 78 verwiesen.

1.1 Wightmansche Quantenfeldtheorie

Die primären Objekte der Wightmanschen Quantenfeldtheorie sind die Feldoperatoren $\phi_i(f)$, die als „operatorwertige Distributionen" über einem Testfunktionenraum (üblicherweise dem Raum der Schwartz-Funktionen $\mathscr{S}$) aufzufassen sind. Der Index i numeriere den Typ des Feldes. Man denke beispielsweise an verschiedene Komponenten eines Vektorfeldes.

Die (im allgemeinen unbeschränkten) Operatoren $\phi_i(f)$ operieren auf einem Hilbertraum $\mathscr{H}$, auf dem die Poincaré-Gruppe $\mathfrak{P}$ unitär implementiert ist.

Damit eine Menge von Feldoperatoren zusammen mit einem Hilbertraum und einer Darstellung der Poincaré-Gruppe die Bezeichnung „Quantenfeldtheorie" verdient, sollen gewisse Postulate – die Wightman-Axiome [SW64] – erfüllt sein, die zum Teil physikalisch motiviert sind, aber auch technische Annahmen enthalten:

1. Hilbertraum und Darstellung der Poincaré-Gruppe:
   - Der Hilbertraum $\mathscr{H}$ trage eine stark stetige, unitäre Darstellung $\mathfrak{P} \ni g \mapsto U(g)$ der Poincaré-Gruppe $\mathfrak{P}$. Die Generatoren der Translationen $U(0,a)$ seien mit P^μ bezeichnet und stellen die Energie-Impuls-Operatoren dar.
   - Es gebe einen Vektor $\Omega \in \mathscr{H}$, den „Vakuumvektor", der invariant unter U ist.
   - Das Spektrum der Energie-Impuls-Operatoren P^μ sei auf den abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel
   $$\overline{V}^+ = \left\{ p \in \mathbb{R}^{s+1} \mid p^2 \geq 0;\ p^0 \geq 0 \right\} \tag{1.1.1}$$
   beschränkt.
2. Felder als „operatorwertige Distributionen":
   - Die Felder ϕ_i seien lineare Abbildungen des Raumes der Schwartz-Funktionen in die Menge der linearen Abbildungen auf einem dichten Unterraum $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$.
   - Der Unterraum $\mathscr{D}$ sei sowohl invariant unter Wirkung der Operatoren $U(g), g \in \mathfrak{P}$, als auch unter Wirkung der Feldoperatoren $\phi_i(f)$ und enthalte den Vakuumvektor Ω.

- Für beliebige $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathscr{D}$ sei die Abbildung

$$f \longmapsto (\Psi_1, \phi(f)\Psi_2) \tag{1.1.2}$$

stetig bezüglich der Schwartz-Topologie.

- Der zu $\phi_i(f)$ adjungierte Operator $\phi_i(f)^*$ sei ebenfalls in der Menge der Felder enthalten.

Diese Eigenschaften legen es nahe, die Feldoperatoren symbolisch in der Form

$$\phi_i(f) = \int dx \; f(x)\phi_i(x) \tag{1.1.3}$$

zu notieren. Dementsprechend sind Ausdrücke der Art $\left[\phi(x)\,,\,\phi(y)\right]$ oder $\phi'(x)$ symbolisch aufzufassen.

3. Transformationsverhalten der Felder:

   Es gebe eine endlich-dimensionale Matrix-Darstellung M der Lorentz-Gruppe $\mathfrak{L}$, so daß sich die Felder $\phi_i(f)$ gemäß

$$U(\Lambda, a)\phi_i(f)U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_i M_{ij}\left(\Lambda^{-1}\right)\phi_j\left(f_{\Lambda,a}\right) \tag{1.1.4}$$

   transformieren, wobei die Wirkung der Poincaré-Transformation (Λ, a) auf f durch

$$f_{\Lambda,a}(x) = f\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right) \tag{1.1.5}$$

   gegeben ist.

4. Kausalität (Lokalität):

   Seien f und g Testfunktionen, deren Träger raumartig getrennt liegen, so gilt entweder

$$\left[\phi_i(f)\,,\,\phi_j(g)\right] = 0 \qquad \text{„Bose-Felder“} \tag{1.1.6}$$

   oder

$$\left\{\phi_i(f)\,,\,\phi_j(g)\right\} = 0 \qquad \text{„Fermi-Felder“}\ . \tag{1.1.7}$$

5. Vollständigkeit:

   Die Menge der Bilder des Vakuumvektors Ω unter beliebigen Polynomen der Feldoperatoren $\phi_i(f)$ liege dicht in $\mathscr{H}$.

1.2 Konforme Quantenfeldtheorie

Da wir uns in dieser Arbeit mit dem chiralen Energie-Impulstensor befassen wollen, geben wir im folgenden eine kurze Einführung in die konforme Quantenfeldtheorie.

Die konforme Gruppe ist die Gruppe der winkeltreuen Transformationen der Minkowski-Raumzeit. Sie enthält neben der Poincaré-Gruppe noch die Skalentransformationen $x \mapsto \lambda x$ sowie die speziellen konformen Transformationen. Die speziellen konformen Transformationen sind durch

$$x^\mu \longmapsto \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2bx + b^2 x^2} \ . \tag{1.2.1}$$

mit einer Konstanten $b \in \mathbb{R}$ gegeben. Diese Transformationen können endliche Punkte in $\mathbb{R}^{s+1}$ nach ∞ abbilden und umgekehrt. Zudem können Punktpaare mit raumartigem Abstand in Punktpaare mit zeitartigem Abstand abgebildet werden. Die damit verbundenen Schwierigkeiten lassen sich allerdings überwinden, indem man vom $\mathbb{R}^{s+1}$ zu einer geeigneten Überlagerungsmannigfaltigkeit übergeht [Mac88].

Eine Quantenfeldtheorie heißt skaleninvariant, wenn es eine unitäre Darstellung U der Skalentransformationen $x \mapsto \rho x,\ \rho > 0$ gibt, die den Vakuumvektor Ω invariant läßt und die Felder gemäß

$$U(\lambda)\phi(x)U(\lambda)^{-1} = \lambda^d \phi(\lambda x) \tag{1.2.2}$$

transformiert. Die Zahl d wird als Skalendimension des Feldes bezeichnet.

In solchen skaleninvarianten Theorien in 1+1-dimensionaler Raumzeit läßt sich eine recht allgemeine Aussage über die Vertauschungsrelationen des Energie-Impuls-Tensors treffen:

Theorem 1.1 (Lüscher-Mack [Mac88, FST89]).
Man betrachte eine Wightman-Theorie auf dem 1+1-dimensionalen Minkowskiraum. Es sei $\Theta^{\mu\nu}$ ein symmetrischer, erhaltener, spurloser Energie-Impulstensor. Das heißt, es gilt:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \ , \quad \partial\mu\Theta^{\mu\nu} = 0 \quad \textit{und} \quad \Theta_\mu{}^\mu = 0 \ .$$

Dann besitzt $\Theta^{\mu\nu}$ nur zwei unabhängige Komponenten

$$\Theta_\pm = \Theta^{00} \pm \Theta^{01} \ ,$$

die jeweils nur von einer Lichtkegelvariablen

$$x_\pm = x^0 \pm x^1$$

nicht-trivial abhängen. Beide dieser chiralen Komponenten sind skaleninvariante Felder der

Skalendimension 2 und es gelten die Vertauschungsrelationen

$$
\begin{aligned}
\big[\Theta_+(x_+)\,,\,\Theta_+(y_+)\big] &= c_+\frac{i^3}{24\pi}\delta'''(x_+-y_+)+2i\delta'(x_+-y_+)\Theta_+(y_+)\\
&\quad -i\delta(x_+-y_+)\frac{\partial}{\partial y_+}\Theta_+(y_+)\ ,\\
\big[\Theta_-(x_-)\,,\,\Theta_-(y_-)\big] &= c_-\frac{i^3}{24\pi}\delta'''(x_--y_-)+2i\delta'(x_--y_-)\Theta_-(y_-)\\
&\quad -i\delta(x_--y_-)\frac{\partial}{\partial y_-}\Theta_-(y_-)\ \textit{und}\\
\big[\Theta_+(x_+)\,,\,\Theta_-(y_-)\big] &= 0\ .
\end{aligned}
$$

Die Algebra der Θ_+ beziehungsweise der Θ_- wird als Virasoro-Algebra bezeichnet. Die Konstanten c_+ bzw. c_- sind die zentrale Ladung der entsprechenden Algebra. Die Terme die proportional zu c_+ bzw. c_- sind werden auch Schwinger-Terme genannt. Diese Terme legen in der linearen Wightmantheorie gerade die Amplitude der 2-Punkt-Funktionen fest [FST89]; insbesondere ergibt sich, daß für $c_\pm = 0$ in Darstellungen mit positiver Energie das Feld identisch verschwindet.

Da die $\Theta_+(x_+)$ und die $\Theta_-(x_-)$ für beliebige Argumente vertauschen, entkoppeln die zugehörigen Algebren. Aus diesem Grund werden wir im folgenden stets nur eine dieser Komponenten betrachten und diese zur Vereinfachung der Schreibweise mit $\Theta(x)$ bezeichnen.

Ausnahmen sind nicht immer Bestätigung einer alten Regel; sie können auch Vorboten einer neuen sein.

Marie Freifrau von Ebner-Eschenbach

2 Die Wirkung der Diffeomorphismengruppe

In diesem Kapitel werden wir die Eigenschaften der exponenzierten chiralen Komponente des Energie-Impuls-Tensors untersuchen. Betrachtet man die adjungierte Wirkung dieser Operatoren, so taucht zum einen ein Term auf, der gerade der Wirkung der Diffeomorphismen auf $\mathbb{R}$ entspricht, zum anderen ist ein Term enthalten, der von dem stärker singulären Schwinger-Term in den Vertauschungsrelationen des Energie-Impuls-Tensors herrührt. Buchholz, Mack, Paunov und Todorov [BMPT89] haben festgestellt, daß man durch geeignetes Hinzufügen eines Terms zu den Feldoperatoren diese Zusatzterme eliminieren kann. Dies bringt einige Vorteile bei der Behandlung der Theorie mit sich:

- Der zusätzliche Term rührt von dem Beitrag der Schwinger-Terme in den Vertauschungsrelationen des Energie-Impuls-Tensors her. Das Auftauchen dieses Terms, das klassisch nicht zu erklären ist [GO86], kann im Rahmen der modifizierten Theorie besser verstanden werden.

- Die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra hängt empfindlich vom Wert der zentralen Ladung c ab. Friedan, Qiu und Shenker [FQS85, FQS86] haben gezeigt, daß unterhalb von $c = 1$ nur bestimmte Werte von c möglich sind, nämlich

  $$c = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)}\ , \quad m \in \mathbb{N}\ . \tag{2.0.1}$$

  Nur für diese Werte erhält man Darstellungen der entsprechenden Algebra mit positiver Energie. Für $c \geq 1$ ergeben sich keine weiteren Einschränkungen. Goddard, Kent und Olive [GO85, GO86, GKO86] haben die Existenz dieser Darstellungen nachgewiesen.

In der neuen Algebra taucht die zentrale Ladung nicht mehr auf. Wir erhalten somit eine universelle Algebra, die in gewisser Weise alle Virasoro-Algebren zu unterschiedlichen Werten von c enthält. Der Parameter c sollte verschiedene Darstellungen dieser Algebra charakterisieren und eine Sektorstruktur der zugehörigen Quantenfeldtheorie induzieren.

Wir möchten zunächst die Argumentation des erwähnten Artikels von Buchholz et al. wiederholen und vertiefen. Wir werden insbesondere zeigen, daß sich das Problem nur lösen läßt, wenn man den Rahmen der linearen Felder verläßt und nichtlineare Funktionale λ zuläßt. Die Konstruktion solcher Funktionale stellt sich als recht aufwendig heraus, und wir werden wir die Lösung dieses Problems in einem separaten Kapitel präsentieren.

2.1 Die Feldalgebra

Wir betrachten im folgenden eine chirale Komponente des Energie-Impuls-Tensors und setzen $\Theta(x) = \Theta_\pm(x_\pm)$. Verschmiert man die operatorwertige Distribution $\Theta(x)$ mit Testfunktionen f gemäß

$$\Theta(f) = \int dx\ f(x)\Theta(x)\ , \tag{2.1.1}$$

so erhält man mit dem Lüscher-Mack-Theorem 1.1 die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
\big[\Theta(f)\,,\,\Theta(g)\big] &= \int dxdx'\ f(x)g(x')\Big\{c\frac{i^3}{24\pi}\delta'''(x-x') \\
&\qquad\qquad + 2i\delta'(x-x')\Theta(x') - i\delta(x-x')\Theta'(x')\Big\} \\
&= \frac{ci}{24\pi}\int dx\ f'''(x)g(x) - 2i\int dx\ f'(x)g(x)\Theta(x) + i\int dx\ f(x)g(x)\Theta'(x) \\
&= \frac{ci}{24\pi}\int dx\ f'''(x)g(x) - i\int dx\ \left(f'g - fg'\right)(x)\Theta(x) \\
&= -i\Theta(f'g - fg') + i\frac{c}{24\pi}\int dx\ f'''(x)g(x)\ .
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Wir definieren die Lie-Ableitung

$$\mathrm{D}_f g = f'g - fg'\ , \tag{2.1.3}$$

sowie den Gelfand-Fuks-Kozykel[1] [BMPT89]

$$\omega(f,g) = \frac{1}{24\pi}\int dx\ f'''(x)g(x) \tag{2.1.4}$$

[1] zum Begriff des Kozykels siehe Abschnitt 2.3.

und können dann die Vertauschungsrelation in der Form

$$\big[\Theta(f)\,,\,\Theta(g)\big] = -i\Theta(\mathrm{D}_f g) + ic\omega(f,g) \tag{2.1.5}$$

schreiben. Da es sich bei den Objekten $\Theta(f)$ um unbeschränkte Operatoren handelt, ist es für eine mathematisch rigorose Behandlung der Theorie vorteilhaft, zu den – im Sinne formaler Potenzreihen erklärten – Exponentialfunktionen

$$W(f) = e^{i\Theta(f)} \tag{2.1.6}$$

überzugehen. Die Vertauschungsrelationen (2.1.5) lassen sich dann durch Beziehungen zwischen beschränkten unitären Operatoren reformulieren.

Mit Hilfe der n-fachen Kommutatoren

$$\begin{aligned}\big[\Theta(f)\,,\,\Theta(g)\big]_n &= \big[\Theta(f)\,,\,\big[\Theta(f)\,,\ldots\big[\Theta(f)\,,\,\Theta(g)\big]\big]\ldots\big] \\ &= (-i)^n\Theta(\mathrm{D}_f{}^n g) + ic(-i)^{n-1}\omega\left(f,\mathrm{D}_f{}^{n-1}g\right)\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

berechnet man die adjungierte Wirkung der Operatoren $W(f)$:

$$\begin{aligned}W(f)\Theta(g)W(f)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\big[\Theta(f)\,,\,\Theta(g)\big]_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Theta\left(\mathrm{D}_f{}^n g\right) - c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\omega\left(f,\mathrm{D}_f{}^{n-1}g\right) \\ &= \Theta\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right) - c\omega\left(f,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{D}_f{}^{n-1}g\right) \\ &= \Theta\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right) - c\omega\left(f,\int_0^1 dt\ e^{t\mathrm{D}_f}g\right) \\ &= \Theta\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right) - \int_0^1 dt\ c\omega\left(f,e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\quad .\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Durch Exponenzieren dieser Gleichung erhält man:

$$W(f)W(g)W(f)^{-1} = W\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right)\cdot\exp\left(-ic\int_0^1 dt\ \omega\left(f,e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\right)\quad . \tag{2.1.9}$$

Auf die präzise Definition des Ausdrucks $e^{t\mathrm{D}_f}g$ gehen wir weiter unten ein.

Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt wurde, stellen wir uns nun die Frage, ob es möglich ist, durch Umdefinieren der Operatoren $W(f)$ den Term

$$\exp\left(-ic\int_0^1 dt\ \omega\left(f,e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\right) \tag{2.1.10}$$

in Gleichung (2.1.9) zu eliminieren. Dazu definieren wir neue Operatoren

$$\tilde{W}(f) = e^{i\lambda(f)} W(f) \tag{2.1.11}$$

mit einem reellwertigen Funktional λ, die der Relation

$$\begin{aligned}
\tilde{W}(f)\tilde{W}(g)\tilde{W}(f)^{-1} &= W(f)W(g)W(f)^{-1}e^{i\lambda(g)} \\
&= W\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) \exp\Big(i\big(\lambda(g) - \int_0^1 dt\; c\omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right)\big)\Big) \\
&= \tilde{W}\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) \exp\Big(i\big(\lambda(g) - \lambda\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) - \int_0^1 dt\; c\omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right)\big)\Big)
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

genügen. Um den besagten Zusatzterm zu eliminieren, muß das Funktional λ also die Gleichung

$$\lambda(g) - \lambda\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) - c\int_0^1 dt\; \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right) = 2\pi n \qquad ; \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.1.13}$$

erfüllen.

In Kapitel 3 werden wir eine Lösung dieser Gleichung für $n = 0$ explizit konstruieren. Vorher werden wir zunächst zeigen, daß diese Lösung notwendig nichtlinear sein muß, und einen Zusammenhang mit der Kohomologietheorie der Witt-Algebra herstellen.

2.2 Darstellung der Diffeomorphismen auf $\mathbb{R}$

Bevor wir die Gleichung (2.1.13) genauer untersuchen, werden wir in diesem Abschnitt die Operatoren $e^{t\mathrm{D}_f}$, $t \in \mathbb{R}$, die bisher nur im Sinne einer formalen Potenzreihe erklärt sind, rigoros definieren.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß D_f bei gegebenem f der Erzeuger einer Untergruppe der Diffeomorphismengruppe auf $\mathcal{S}^1$ – also auf der kompaktifizierten Gerade $\mathbb{R}$ – ist [GO86, Mac88] (vgl. [PS86]). Somit beschreibt $e^{t\mathrm{D}_f}$ gerade Diffeomorphismen von $\mathcal{S}^1$. Es sei allerdings angemerkt, daß es auch Diffeomorphismen von $\mathcal{S}^1$ gibt, die in keiner Einparameter-Untergruppe der Diffeomorphismen enthalten sind [Fre68, Mil84]. Wir betrachten also lediglich eine Untergruppe der Diffeomorphismen.

Die Diffeomorphismen $e^{t\mathrm{D}_f}$ lassen sich problemlos auf die reelle Achse einschränken, wenn man sich auf Funktionen f beschränkt, die kompakten Träger haben, also nur solche Diffeomorphismen betrachtet, die außerhalb eines Kompaktums gerade die Identität sind. Für spätere Sätze (insbesondere Satz 3.14) ist es allerdings wichtig, detailliertere Kenntnis über die Wirkung dieser Diffeomorphismen zu gewinnen.

Zur konkreten Berechnung der Diffeomorphismen machen wir den Ansatz

$$\left(e^{t\mathrm{D}_f} g\right)(x) = N_f(t,x) \cdot g\left(\phi_f(t,x)\right) \tag{2.2.1}$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen N_f und ϕ_f, die den Anfangsbedingungen

$$\phi_f(0,x) = x \qquad \text{und} \qquad N_f(0,x) = 1 \tag{2.2.2}$$

genügen sollen[2].

Wir vereinbaren zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\dot{} = \frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad {}' = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.2.3}$$

und erhalten durch Differentiation unseres Ansatzes nach t und der Tatsache, daß g eine beliebige Funktion ist, jeweils eine Differentialgleichung für N_f und ϕ_f:

$$\dot{N}_f = f' N_f - f N_f' \tag{2.2.4a}$$
$$\dot{\phi}_f = -f \phi_f' \ . \tag{2.2.4b}$$

Durch direkte Rechnung zeigt man, daß bei gegebener Lösung ϕ_f für die zweite Differentialgleichung die erste Differentialgleichung gerade durch

$$N_f(t,x) = \frac{1}{\phi'(t,x)} \tag{2.2.5}$$

erfüllt wird, falls ϕ_f wenigstens zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Die Existenz eines solchen ϕ_f stellt der folgende Satz sicher:

Satz 2.1 (Kamke: [Kam36, Kam37, Kam44]). *Sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Außerdem seien zwei k-mal stetig partiell differenzierbare Funktionen f und g auf $\mathcal{G}$ mit*

$$|f(x,y)| + |g(x,y)| > 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \mathcal{G}$$

gegeben. Ferner sei ein beschränktes Gebiet $\mathfrak{g} \subset \mathcal{G}$ gegeben, das mit $\mathcal{G}$ keinen Randpunkt gemeinsam hat und eine stetig differenzierbare Kurve γ

$$\begin{aligned} \gamma\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ s &\longmapsto \gamma(s) = (u(s), v(s))\ , \end{aligned}$$

die „quer zu den Charakteristiken läuft“, das heißt

$$u'(s) g(\gamma(s)) - v'(s) f(\gamma(s)) \neq 0 \qquad \forall\ s \in \mathbb{R}\ .$$

Auf dieser Kurve sei eine k-mal stetig differenzierbare Anfangsbedingung

$$\phi(x,y) = \phi_0(x,y) \qquad \forall\ (x,y) = (u(s), v(s))\ ,\ s \in \mathbb{R}$$

gegeben.

[2] ϕ_f muß der Differentialgleichung $\dot{\phi}_f = -f \circ \phi_f$ genügen [Mil84]. Man rechnet dies für das ϕ_f, das wir in Lemma 2.2 explizit konstruieren, leicht nach.

Dann hat die Differentialgleichung

$$f(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

genau eine Lösung ϕ auf $\mathfrak{g}$, die der Anfangsbedingung genügt, und diese Lösung ist k-mal stetig differenzierbar.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich das folgende Lemma formulieren:

Lemma 2.2. Für jedes $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ hat die Differentialgleichung

$$-f(x)\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)$$

genau eine auf $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig partiell differenzierbare Lösung $\phi_f(t,x)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \phi_f(0,x) &= x \ , \\ \phi_f'(t,x) &> 0 \ , \\ \phi_f(s+t,x) &= \phi_f(s,\phi_f(t,x)) \ , \\ \phi_f'(s+t,x) &= \phi_f'(s,\phi_f(t,x)) \cdot \phi_f'(t,x) \ . \end{aligned}$$

Beweis: Wir suchen zunächst eine Lösung $\phi_f(t,x)$ der partiellen Differentialgleichung

$$-f(x)\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) \ , \tag{2.2.7}$$

die der Anfangsbedingung

$$\phi_f(u,v) = v \tag{2.2.8}$$

auf der Kurve

$$s \longmapsto \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \tag{2.2.9}$$

genügt.

Die Anfangskurve erfüllt wegen

$$u'(s) \cdot f(u(s)) - v'(s) \cdot 1 = -1 \neq 0 \tag{2.2.10}$$

die Voraussetzung des vorangegangenen Satzes. Es gibt also auf jedem einfach zusammenhängenden, beschränkten Gebiet genau eine unendlich oft stetig differenzierbare Lösung ϕ_f. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung in jedem beschränkten Gebiet folgt sogar, daß es eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ eindeutige Lösung der Differentialgleichung gibt. Insbesondere können wir die Differentialgleichung in beliebigen Gebieten lösen und die Teillösungen zu einer unendlich oft stetig differenzierbaren Funktion zusammensetzen.

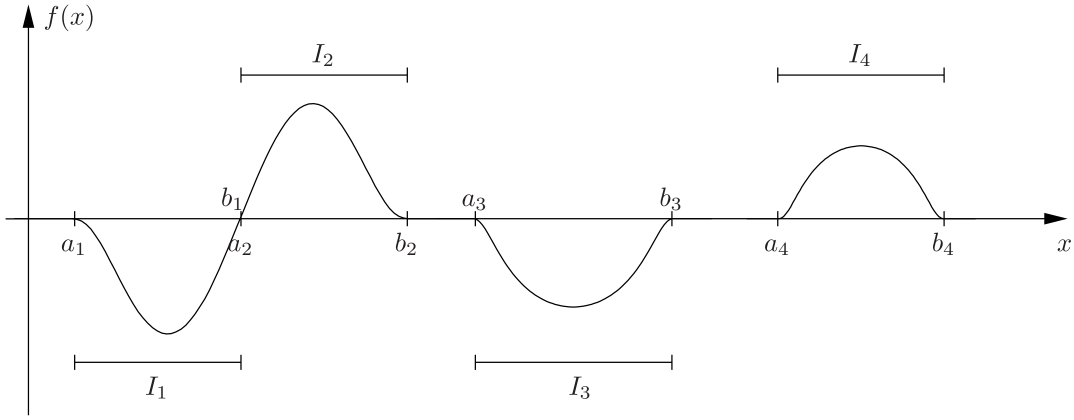

Abbildung 2.1: Aufteilung in Intervalle

Wir unterteilen den Träger von f in Intervalle $I_j =]a_j, b_j[$ mit $b_j \leq a_{j+1}$ so daß $f(a_j) = f(b_j) = 0$ und $f(x) \neq 0$ für $x \in I_j$ und $\mathrm{supp}(f) = \overline{\bigcup I_j}$ (siehe Abbildung 2.1). Das Komplement des Inneren des Trägers bezeichnen wir mit J. Wählen wir zu jedem j ein beliebiges $s_j \in I_j$, so definiert

$$\begin{aligned} h_j \ :]a_j, b_j[\ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x \ &\longmapsto \ h_j(x) = \int\limits_{s_j}^{x} \frac{1}{f(u)} du \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

eine Bijektion, da f an den Randpunkten des Intervalls Null wird und f auf dem ganzen Intervall entweder positiv oder negativ ist. Mit diesen Hilfsfunktionen können wir nun direkt eine Lösung der Differentialgleichung angeben[3]:

$$\phi_f(t,x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in J \\ h_j^{-1}\left(h_j(x) - t\right) & \text{falls } x \in I_j \ . \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Die Funktion $x \mapsto \phi_f(t,x)$ ist nicht nur eine streng monoton wachsende Funktion, sondern bildet sogar jedes der Intervalle I_j bijektiv auf sich selber ab. Damit berechnet man

$$\begin{aligned} \phi_f(s, \phi_f(t,x)) &= h_j^{-1}(h_j(h_j^{-1}(h_j(x) - t)) - s) = h_j^{-1}(h_j(x) - t - s) \\ &= \phi_f(s+t, x) \qquad \text{für } x \in I_j \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

[3] Die Definition von $\phi_f(t,x)$ ist unabhängig von der konkreten Wahl der Stützpunkte s_j. Dies folgt entweder unmittelbar aus der Eindeutigkeit der Lösung nach Satz 2.1 oder durch direkte Rechnung: Seien s_i und $\hat{s}_i$ zwei verschiedene Stützpunkte auf dem Intervall I_i. Mit s_i und $\hat{s}_i$ seien die Funktionen h_i und $\hat{h}_i$ verbunden. Dann ist $\hat{h}_i = h_i + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und für $x \in I_i$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_f(t,x) &= \hat{h}_i^{-1}\left(\hat{h}_i(x) - t\right) = \hat{h}_i^{-1}\left(h_i(x) + c - t\right) = \hat{h}_i^{-1}\left((h_i(x) - t) + c\right) \\ &= h_i^{-1}\left(h_i(x) - t\right) = \phi_f(t,x) \ . \end{aligned}$$

und erhält

$$\phi_f(s, \phi(t,x)) = \phi_f(s+t, x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \; , \tag{2.2.14}$$

sowie durch Differentiation dieser Gleichung

$$\phi'_f(s+t,x) = \frac{d}{dx}\phi_f(s, \phi_f(t,x)) = \phi'_f(s, \phi_f(t,x))\phi'_f(t,x) \; . \tag{2.2.15}$$

Insbesondere kann somit wegen

$$1 = \phi'_f(0,x) = \phi'_f(-t, \phi_f(t,x))\phi'_f(t,x) \tag{2.2.16}$$

die x-Ableitung von ϕ_f keine Nullstelle haben. Da $x \mapsto \phi_f(t,x)$ streng monoton wachsend ist gilt somit stets:

$$\phi'_f(t,x) > 0 \; . \tag{2.2.17}$$

■

Satz 2.3. *Für jedes $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ gibt es die differenzierbare Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} A_f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})) \\ g & \longmapsto & \left(A_f(t)g\right)(x) = \dfrac{1}{\phi'_f(t,x)} g\left(\phi_f(t,x)\right) \; , \end{array}$$

wobei ϕ_f die Funktion aus Lemma 2.2 bezeichnet. $A_f(t)$ erfüllt die Rechenregeln

$$\begin{aligned} A_f(0) &= \mathbb{1} \; , \\ A_f(t+s) &= A_f(t)A_f(s) \; \textit{und} \\ \frac{d}{dt}A_f(t) &= \mathrm{D}_f A_f(t) \; . \end{aligned}$$

Beweis:

- Wohldefiniertheit:
  Für $g \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ist $A_f(t)g$ offensichtlich wieder eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger, da ϕ_f unendlich oft stetig differenzierbar ist, eine Bijektion der reellen Achse darstellt und zusätzlich stets $\phi'_f(t,x) \neq 0$ ist.

- $A_f(0) = \mathbb{1}$
  ist offensichtlich erfüllt, da $\phi_f(0,x) = x$ und $\phi'_f(0,x) = 1$ ist.

- Funktionalgleichung:
  Mit Hilfe der Rechenregeln aus Lemma 2.2 erhält man

$$\begin{aligned} \left(A_f(t+s)g\right)(x) &= \frac{1}{\phi'_f(s+t,x)} g(\phi_f(s+t,x)) \\ &= \frac{1}{\phi'_f(s,\phi_f(t,x))\phi'_f(t,x)} g(\phi_f(s,\phi_f(t,x))) \\ &= \left(A_f(t)A_f(s)g\right)(x) \; . \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

- Ableitung:
  Die Funktion $t \mapsto A_f(t)g(x)$ ist differenzierbar, da sowohl g als auch ϕ_f differenzierbar sind. Desweiteren erfüllt ϕ_f die Differentialgleichung $\dot{\phi}_f(t,x) = -f(x)\phi'_f(t,x)$, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(A_f(t)g\right)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{g(\phi_f(t,x))}{\phi'_f(t,x)} &= g'(\phi_f(t,x))\frac{\dot{\phi}_f(t,x)}{\phi'(t,x)} - g(\phi_f(t,x))\frac{\dot{\phi}'_f(t,x)}{\phi'^2(t,x)} \\ &= -f(x)g'(\phi_f(t,x)) + g(\phi_f(t,x))\frac{\Big(f(x)\phi'_f(t,x)\Big)'}{\phi'^2(t,x)} \\ &= f'(x)\frac{g(\phi_f(t,x))}{\phi'_f(t,x)} - f\frac{\partial}{\partial x}\frac{g(\phi_f(t,x))}{\phi'_f(t,x)} \\ &= \Big(\mathrm{D}_f A_f(t)g\Big)(x)\ .\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

■

Die in diesem Satz abgeleiteten Rechenregeln entsprechen gerade den bekannten Rechenregeln der Exponentialfunktion. Wir definieren also:

Definition 2.4. Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ sei $e^{t\mathrm{D}_f}$ durch

$$\begin{aligned} e^{t\mathrm{D}_f}\ :\ \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \\ g &\longmapsto e^{t\mathrm{D}_f}g = A_f(t)g \end{aligned}$$

definiert.

2.3 Einordnung des Problems

Wir möchten im folgenden das Problem, das sich am Ende von Abschnitt 2.1 gestellt hat, genauer analysieren und die folgenden Fragen beantworten:

1. Aus der Literatur ist bekannt, daß die Virasoro-Algebra eine nicht-triviale zentrale Erweiterung der Witt-Algebra ist [GO86]. Was bedeutet in diesem Zusammenhang „der zentrale Term ist ein Kozykel“ bzw. „der zentrale Term ist ein Korand“?

2. Warum ist es für die Lösung unseres Problems zwingend notwendig, nichtlineare Funktionale zu betrachten?

3. Warum entspricht die Lösung unseres Problems gerade *nicht* einer Trivialisierung der Virasoro-Algebra?

2.3.1 Kohomologie

Es sollen zunächst einige Begriffe aus der Homologietheorie definiert werden, die es uns ermöglichen werden, die erste der oben genannten Fragen prägnant zu formulieren.

Wir betrachten eine Familie $(\mathscr{C}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektorräumen. Zu jeder natürlichen Zahl n gebe es einen Vektorraumhomomorphismus

$$\delta_n \ : \ \mathscr{C}^n \ \longrightarrow \ \mathscr{C}^{n+1} \ , \tag{2.3.1}$$

den sogenannten Korandoperator mit der Eigenschaft

$$\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0 \ . \tag{2.3.2}$$

Im Allgemeinen wird der Index am Korandoperator unterdrückt, da sich aus dem Zusammenhang meist ergibt welcher der Korandoperatoren zu benutzen ist. Die Elemente des Vektorraums $\mathscr{C}^n$ werden meist als n-Koketten bezeichnet. Die Familie der $\mathscr{C}^n$ zusammen mit den zugehörigen Korandoperatoren heißt ein Koketten-Komplex $\mathscr{C} = \left\{(\mathscr{C}^n)_{n\in\mathbb{N}}\, , \delta\right\}$. Desweiteren definiert man

$$Z^n\left(\mathscr{C}\right) = \operatorname{Ker}\delta_n \quad = \quad \text{„Menge der } n\text{-Kozykel“} \tag{2.3.3}$$

und

$$B^n\left(\mathscr{C}\right) = \operatorname{Im}\delta_{n-1} \quad = \quad \text{„Menge der } n\text{-Koränder“} \ . \tag{2.3.4}$$

Wegen $\delta \circ \delta = 0$ sind die n-Koränder stets ein Untervektorraum der n-Kozykel. Der Quotient

$$H^n\left(\mathscr{C}\right) = Z^n\left(\mathscr{C}\right)/B^n\left(\mathscr{C}\right) \tag{2.3.5}$$

heißt die n-te Kohomologiegruppe von $\mathscr{C}$.

2.3.2 Zentrale Erweiterungen der Witt-Algebra und Kohomologie

Aus der Literatur ist bekannt, daß es sich bei der Virasoro-Algebra bis auf Äquivalenz um die einzige nicht-triviale Erweiterung (im Sinn von Anhang A.1) der Witt-Algebra [Sch95, GO86] mit den Vertauschungsrelationen

$$\left[\Theta(f)\, ,\, \Theta(g)\right] = -i\Theta(\mathrm{D}_f g) \tag{2.3.6}$$

handelt. Wir wählen als Koketten

$$\mathscr{C}^n = \{\mu : (\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}))^n \longrightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ ist multilinear und total antisymmetrisch } \} \tag{2.3.7}$$

und definieren die Korandoperatoren durch

$$\left(\delta_n\mu\right)\left(f_1, \ldots, f_{n+1}\right) = \sum_\pi \mu\left(f_{\pi(1)}, \ldots, f_{\pi(n-1)}, \mathrm{D}_{f_{\pi(n)}} f_{\pi(n+1)}\right) \ , \tag{2.3.8}$$

wobei die Summe über alle geraden Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ läuft.

Sei nun $\omega \in \mathscr{C}^2$ ein 2-Kozykel, dann gilt $\delta\omega = 0$, also

$$\omega\,(f, \mathrm{D}_g h) + \omega\,(h, \mathrm{D}_f g) + \omega\,(g, \mathrm{D}_h f) = 0 \ . \tag{2.3.9}$$

Die zulässigen zentralen Terme, die die Jakobi-Identität erfüllen, sind also gerade die 2-Kozykel. Die Trivialität einer zentralen Erweiterung drückt sich in dieser Sprache gerade dadurch aus, daß der zentrale Term ein 2-Korand, also

$$\omega(f, g) = \lambda(\mathrm{D}_f g) \tag{2.3.10}$$

mit einem geeigneten linearen Funktional λ ist.

2.3.3 Notwendigkeit nichtlinearer Funktionale

Nehmen wir einmal an, wir hätten ein lineares Funktional λ gefunden, das der Gleichung (2.1.13) genügt. Wegen der Linearität kann dies nur für $n = 0$ der Fall sein. Es gelte also

$$\lambda(g) - \lambda\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) = c \int_0^1 dt\ \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right) \ . \tag{2.3.11}$$

Wir benutzen nun

$$g - e^{\mathrm{D}_f} g = -\int_0^1 dt\ \frac{d}{dt} e^{t\mathrm{D}_f} g = -\int_0^1 dt\ \mathrm{D}_f e^{t\mathrm{D}_f} g \tag{2.3.12}$$

und können wegen der Linearität die Beziehung in der Form

$$\int_0^1 dt\ \left\{ \lambda\left(\mathrm{D}_f e^{t\mathrm{D}_f} g\right) + c\omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right) \right\} = 0 \tag{2.3.13}$$

schreiben.

Da f eine beliebige Funktion aus $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ist, können wir in dieser Beziehung f durch ϵf ersetzen und erhalten nach der Substitution $t \to \epsilon t$

$$\int_0^\epsilon dt\ \left\{ \lambda\left(\mathrm{D}_f e^{t\mathrm{D}_f} g\right) + c\omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right) \right\} = 0 \qquad \forall\ \epsilon > 0 \ . \tag{2.3.14}$$

Insbesondere muß also der Integrand an der Stelle $t = 0$ verschwinden und es folgt

$$\lambda\,(\mathrm{D}_f g) = -c\omega(f, g) \ . \tag{2.3.15}$$

Dies würde allerdings bedeuten, daß die Virasoro-Algebra gerade eine triviale Erweiterung der Witt-Algebra ist, was nicht der Fall ist. Es gibt also kein lineares Funktional λ, das der Gleichung (2.3.11) genügt.

2.3.4 Problemlösung und Trivialisierung der Feldalgebra

Nehmen wir umgekehrt an, wir hätten ein (unter Umständen nichtlineares) Funktional λ gefunden, das der Gleichung (2.3.15) genügt, die Feldalgebra also in einem etwas allgemeineren Sinn als in Abschnitt 2.3.2 eine triviale zentrale Erweiterung der Witt-Algebra ist.

Wir werden im folgenden zeigen, daß daraus schon folgt, daß λ linear sein müßte – sich die Gleichung (2.3.15) also auch unter dieser etwas allgemeineren Voraussetzung nicht lösen läßt.

Seien g und h zwei beliebig vorgegebene Funktionen aus $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Wir wählen dazu ein $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, so daß

$$f\Big|\operatorname{supp} g \cup \operatorname{supp} h = 1 \tag{2.3.16}$$

gilt und definieren zwei neue Funktionen

$$\tilde{g}(x) = -f(x) \int\limits_0^x du\ g(u) \quad \text{und} \tag{2.3.17}$$

$$\tilde{h}(x) = -f(x) \int\limits_0^x du\ h(u)\ . \tag{2.3.18}$$

Die Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ sind wieder glatte Funktionen mit kompaktem Träger und es gilt

$$\mathrm{D}_f \tilde{g} = f^2 g = g \text{ und} \tag{2.3.19}$$

$$\mathrm{D}_f \tilde{h} = f^2 h = h\ . \tag{2.3.20}$$

Wegen der Bilinearität von ω ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \lambda(g+h) &= \lambda\big(\mathrm{D}_f(\tilde{g}+\tilde{h})\big) = -c\omega\big(f, \tilde{g}+\tilde{h}\big) = -c\omega\big(f,\tilde{g}\big) - c\omega\big(f,\tilde{h}\big) \\ &= \lambda(g) + \lambda(h) \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha g) &= \lambda\big(\alpha \mathrm{D}_f \tilde{g}\big) = \omega\big(f, \alpha\tilde{g}\big) = \alpha\omega\big(f,\tilde{g}\big) \\ &= \alpha\lambda(g) \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

für beliebige glatte Funktionen g, h mit kompaktem Träger und beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aus Steinen, die in den Weg gelegt werden, kann man Schönes bauen.

Johann Wolfgang von Goethe

3 Ein quasilineares Funktional

Ziel dieses Kapitels ist es, ein Funktional λ zu konstruieren, das der Gleichung

$$\lambda(g) - \lambda\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) - c \int\limits_0^1 dt\ \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right) = 0 \tag{3.0.1}$$

genügt. Wie im vorangehenden Kapitel bereits bemerkt wurde, muß dieses Funktional notwendigerweise nichtlinear sein. Andererseits taucht dieser Zusatzterm in Gleichung (2.1.9) ohnehin nur dann auf, wenn die Träger der Funktionen f und g sich überlappen und man möchte erwarten, daß das gesuchte Funktional die ursprünglichen W's nicht „mehr als notwendig“ ändert und sich die Nichtlinearität von λ für Funktionen mit disjunkten Trägern nicht bemerkbar macht. In dem bereits erwähnten Artikel [BMPT89] wird für eine eingeschränkte Klasse von Funktionen als Lösung das Funktional

$$\lambda(f) \propto \int dx\ f''(x) \ln(f(x)^2) \tag{3.0.2}$$

angegeben. Es ist jedoch a priori nicht klar, ob und in welchem Sinn dieses Integral für beliebige glatte Funktionen mit kompaktem Träger existiert. Probleme könnten insbesondere dann auftreten, wenn die Funktion f unendlich viele Nullstellen besitzt.

Wir werden diese Probleme lösen, indem wir das regularisierte Funktional

$$\lambda(f) = \int\limits_0^\infty \frac{-dt}{t} \int\limits_{-\infty}^\infty dx\ f''(x) \chi\left(t|f(x)|\right) \tag{3.0.3}$$

betrachten, das cum grano salis mit oben genanntem Funktional übereinstimmt.

Im Laufe des Kapitels stellt sich unter anderem heraus, daß sich das Funktional in der Form

$$\lambda(f) \propto \lim_{\epsilon \searrow 0} \int dx\ f''(x) \ln(f(x)^2 + \epsilon) \tag{3.0.4}$$

darstellen läßt. Das Funktional (3.0.2) ist also im Sinne einer Hauptwertintegration definiert.

3.1 Existenz des Funktionals

Wie bereits erwähnt, möchten wir für beliebige $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ die Existenz des Funktionals

$$\int_0^\infty \frac{-dt}{t} \int_{-\infty}^\infty dx\ f''(x) \chi\left(t|f(x)|\right)\ , \tag{3.1.1}$$

sicherstellen, wobei χ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, 1]$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

bezeichnet. Wir werden dazu in Lemma 3.8 eine in t hinreichend schnell abfallende Schranke für

$$\int dx\ f''(x)\chi(t|f(x)|) \tag{3.1.3}$$

angeben. Der Beweis dieses Lemmas hängt wesentlich davon ab, daß für festes $t \in \mathbb{R}$ eine glatte Funktion nicht „zu viele" isoliert liegende t-Stellen, d.h. Stellen an denen die Funktion den Wert t annimmt, haben kann.

3.1.1 Funktionen mit Häufungspunkten von t-Stellen

Definition 3.1. Seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und $t \in \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt **regulärer Häufungspunkt von t-Stellen** von f, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(x_0) = t$.
2. Für jede Umgebung U von x_0 gibt es ein $x \in U$ mit $f(x) \neq t$.
3. Für jede Umgebung U von x_0 gilt $\#\{x \in U \mid f(x) = t\} = \infty$.

Lemma 3.2. Sei $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ und x_0 ein regulärer Häufungspunkt von t-Stellen von f. Dann ist $f^{(k)}(x_0) = 0$ für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis: Angenommen es gebe ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Falls $k > 1$ ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $f^{(i)}(x_0) = 0$ für alle $0 < i < k$ gilt. Eine k-mal differenzierbare Funktion f läßt sich stets in der Form

$$f(x) = p_k(x - x_0) + \rho(x - x_0)(x - x_0)^k \tag{3.1.4}$$

schreiben, wobei p_k ein Polynom vom Grad k und ρ eine stetige Funktion mit $\rho(0) = 0$ ist.[1] Nach unserer Annahme gilt also

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \rho(x - x_0) \right) (x - x_0)^k \ . \tag{3.1.5}$$

In einer geeignet kleinen Umgebung U von x_0 ist sicher $|\rho(x - x_0)| < \frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!}$. Die Stelle $x = x_0$ ist also der einzige Punkt in U mit $f(x) = t$. Die Stelle x_0 ist somit kein regulärer Häufungspunkt von t-Stellen von f. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme. ■

Lemma 3.3. Seien $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist die Menge

$$N_t(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist regulärer Häufungspunkt von } t\text{-Stellen von } f\ \}$$

abgeschlossen.

Beweis: Wir zeigen, daß die Menge $\mathbb{R} \setminus N_t(f)$ offen ist. Sei also $x_0 \in \mathbb{R} \setminus N_t(f)$ beliebig. Wir zeigen nun, daß es stets eine Umgebung U um x_0 gibt, so daß U ganz in $\mathbb{R} \setminus N_t(f)$ enthalten ist. Nach der Definition 3.1 gibt es nur drei Möglichkeiten, ein x_0 zu wählen, das nicht in $N_t(f)$ liegt:

1. $f(x_0) \neq t$.

   Da f stetig ist, gibt es eine ganze Umgebung U von x_0, in der f keine t-Stellen hat. Insbesondere ist also $U \subset \mathbb{R} \setminus N_t(f)$.

2. Es gibt eine Umgebung U von x_0 mit $f|U \equiv t$.

   Sei $x \in U$ beliebig. Da U eine Umgebung ist, kann man eine Umgebung V von x wählen, die ganz in U liegt. Insbesondere ist also $f|V \equiv t$ und somit liegt x nicht in $N_t(f)$. Folglich ist U ganz in $\mathbb{R} \setminus N_t(f)$ enthalten.

3. Es gibt eine Umgebung U von x_0 mit $\#\{x \in U \mid f(x) = t\} < \infty$.

   Zu $x \in U$ gibt es eine Umgebung $V \subset U$. Dann gilt offensichtlich

   $$\#\{x \in V \mid f(x) = t\} < \infty \ , \tag{3.1.6}$$

   also $x \notin N_t(f)$. Auch hier ergibt sich somit $U \subset \mathbb{R} \setminus N_t(f)$.

[1] Es handelt sich hierbei um eine Folgerung aus dem Taylorschen Satz und der Tatsache, daß eine bei x_0 differenzierbare Funktion sich stets in der Form $f(x) = f(x_0) + (f'(x_0) + \rho(x - x_0))(x - x_0)$ darstellen läßt, wobei ρ eine geeignete Funktion ist, die bei x_0 stetig ist und für die $\rho(x_0) = 0$ gilt.

■

Definition 3.4. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt **nirgends dicht in** $\mathbb{R}$, wenn es zu jeder nicht leeren, offenen Menge $U \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere, offene Teilmenge $V \subset U$ gibt, so daß $V \cap M = \emptyset$ ist.

Lemma 3.5. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann nirgends dicht in $\mathbb{R}$, wenn es keine nicht leere, offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ gibt, so daß $M \cap U$ dicht in U ist.

Beweis: Mit ein wenig Aussagelogik und den Definitionen für „dicht" und „nirgends dicht" sieht man, daß die folgenden Aussagen der Reihe nach äquivalent sind.

- M ist nirgends dicht in $\mathbb{R}$.
- $\forall\, U \subset \mathbb{R},\ U \text{ offen},\ U \neq \emptyset\ :\ \exists\, V \subset U,\ V \text{ offen},\ V \neq \emptyset\ :\ V \cap M = \emptyset.$
- $\forall\, U \subset \mathbb{R},\ U \text{ offen},\ U \neq \emptyset\ :\ \exists\, x \in U$ und eine Umgebung V von $x\ :\ V \cap M \cap U = \emptyset.$
- $\nexists\, U \subset \mathbb{R},\ U \text{ offen},\ U \neq \emptyset\ :\ \forall\, x \in U$ und jede Umgebung V von $x\ :\ V \cap (M \cap U) \neq \emptyset.$
- $\nexists\, U \subset \mathbb{R},\ U \text{ offen},\ U \neq \emptyset\ :\ M \cap U$ ist dicht in U.

■

Lemma 3.6. Sei $M \subset \mathbb{R}$ nirgends dicht in $\mathbb{R}$, dann ist $\mathbb{R} \setminus M$ dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und U eine Umgebung von x. Zu U gibt es eine nicht leere, offene Teilmenge $V \subset U$ mit $V \cap M = \emptyset$, also $V \cap (\mathbb{R} \setminus M) \neq \emptyset$ und erst recht $U \cap (\mathbb{R} \setminus M) \neq \emptyset$. Wir haben somit gezeigt: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ liegt in jeder Umgebung U von x ein Punkt in $\mathbb{R} \setminus M$. Folglich ist $\mathbb{R} \setminus M$ dicht in $\mathbb{R}$. ■

Lemma 3.7. Sei $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl. Dann ist die Menge $N_t(f)$ nirgends dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Dazu nehmen wir an, es gebe eine nicht leere, offene Menge U, so daß $M = N_t(f) \cap U$ dicht in U liegt. Auf der Menge M ist f gleich t. Da M dicht in U liegt und f stetig ist, gilt sogar $f|U \equiv t$. M ist nicht leer, da U nicht leer ist. Sei also x_0 ein beliebiges Element von M. Da U offen ist, gibt es eine Umgebung V von x_0, die ganz in U liegt.

Wir haben also einen Punkt x_0 und eine Umgebung V von x_0 mit $f|V \equiv t$ gefunden. Insbesondere kann damit x_0 nicht in $N_t(f)$ und folglich auch nicht in M liegen. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von x_0. ■

3.1.2 Eine hinreichend schnell abfallende Schranke in t

Lemma 3.8. Die Abbildung

$$[0,\infty[\ni t \longmapsto L_f(t) = \int dx\ f''(x)\chi\left(t|f(x)|\right)$$

existiert für beliebige $f \in \mathscr{C}_0^4(\mathbb{R})$ und es gilt die Abschätzung

$$|L_f(t)| \leq 20 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty^{1/2} \cdot |b-a| \cdot t^{-1/2}$$

falls $\mathrm{supp}(f) \subset [a,b]$.

Beweis: Wir betrachten zunächst die Menge $N = N_{1/t}(|f|)$ der regulären Häufungspunkte von $1/t$-Stellen von $|f|$, die nach Lemma 3.7 nirgends dicht in $\mathbb{R}$ liegt und nach Lemma 3.3 abgeschlossen ist. Wir zerlegen nun die Menge $\mathbb{R} \setminus N$ in ihre Zusammenhangskomponenten $(Z_i)_{i\in\mathbb{I}}$ mit einer geeigneten Indexmenge $\mathbb{I}$. Die Zusammenhangskomponenten Z_i einer offenen Menge sind stets offen und zusammenhängend, somit also offene Intervalle $Z_i =]a_i, b_i[$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Da jedes Z_i wenigstens eine rationale Zahl enthält, kann es höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten geben. Außerdem liegt die Vereinigung aller Z_i dicht in $\mathbb{R}$, und wir können das Integral in eine Summe von Integralen über jeweils eine Zusammenhangskomponente aufteilen.

Insbesondere genügt es somit, die Existenz des Integrals und die zugehörige Abschätzung auf jedem endlichen Intervall $[a,b]$ zu zeigen[2], wobei kein regulärer Häufungspunkt von $1/t$-Stellen im Inneren des Intervalls liegt, die 1. bis 4. Ableitung der Funktion an den Randpunkten verschwindet (Lemma 3.2) und die Funktion selbst an den Randpunkten entweder gegen Null oder gegen $1/t$ strebt[3].

Man kann somit zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren[4] (siehe Abbildung 3.1):

- $x_n \leq y_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- $\lim\limits_{n\to-\infty} x_n = a$.

[2] Falls das entsprechende Z_i ein unbeschränktes Intervall ist, reicht es ebenfalls das Integral auf einem endlichen Intervall auszuwerten, da der Träger von f kompakt ist.

[3] Ein Randpunkt des Intervalls ist entweder eine $1/t$-Stelle von f, oder er liegt am Rand (oder sogar außerhalb) des Trägers von f.

[4] Die Stellen y_n bzw. x_n sind im wesentlichen die $1/t$-Stellen der Funktion $|f|$ im betrachteten Intervall. Wahlfreiheit besteht lediglich in zwei Punkten: Falls f auf einem ganzen Intervall gleich $1/t$ ist, so kann man beliebige Punkte aus diesem Intervall wählen, und die Folgen können gemäß $x'_n = x_{n+N}$ und analog für y_n umindiziert werden. Da sich im Inneren des Intervalls keine regulären Häufungspunkte $1/t$-Stellen von f befinden können, ist sichergestellt, daß sich die $1/t$-Stellen entsprechend durchnumerieren lassen.

- $\lim_{n\to+\infty} y_n = b$.
- $|f(x)| \leq \frac{1}{t} \quad \forall\, x \in [x_n, y_n], \quad n \in \mathbb{Z}$.
- $|f(x)| > \frac{1}{t} \quad \forall\, x \in]y_n, x_{n+1}[, \quad n \in \mathbb{Z}$.
- Es gibt stets ein $x \in [y_n, x_{n+1}]$ mit $f'(x) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$. [5]

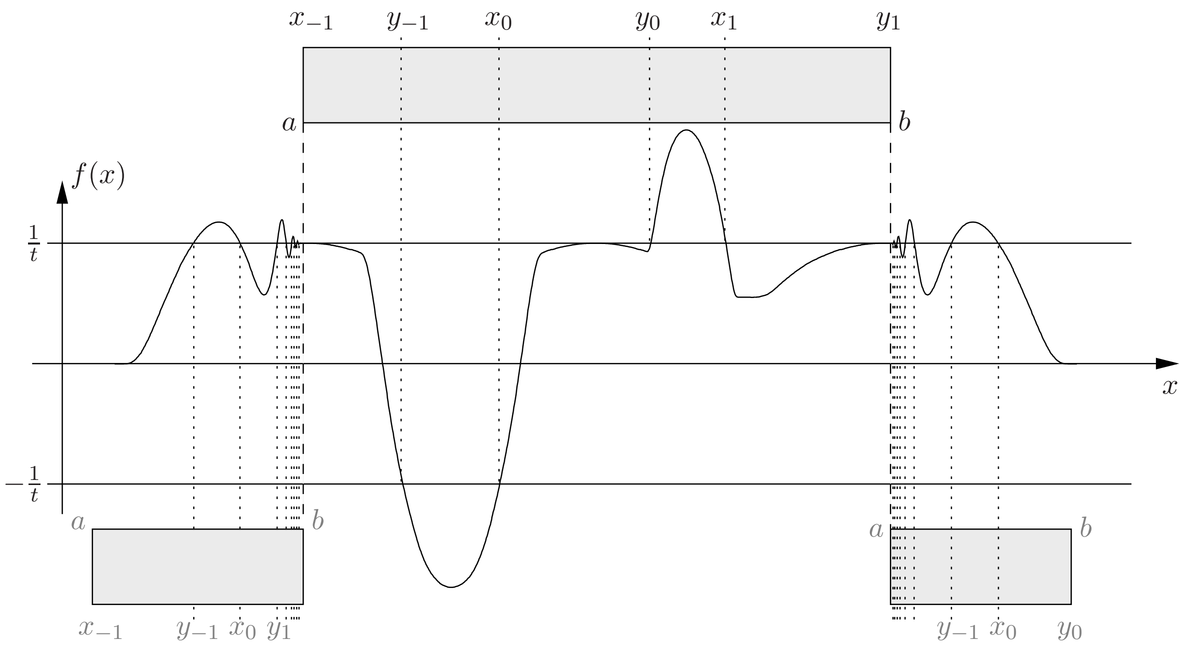

Abbildung 3.1: Aufteilung des Integrationsbereichs

Damit zerfällt die Integration gemäß

$$L_f(t) = \int_{|f(x)|\leq\frac{1}{t}} dx\ f''(x) = \sum_i \int_{x_i}^{y_i} dx\ f''(x) = \sum_i \big(f'(y_i) - f'(x_i)\big) \tag{3.1.7}$$

in eine Summation über die Ableitung von f an den Stellen x_i bzw. y_i. Wir wählen nun für jedes i eine Stelle $m_i \in [x_i, y_i]$ so daß gilt

$$|f''(m_i)| = \sup_{x\in[x_i,y_i]} |f''(x)|\ . \tag{3.1.8}$$

Im folgenden werden drei Fälle unterschieden:

---

[5] Falls $y_n \neq x_{n+1}$ ist, folgt dies unmittelbar aus dem Satz von Rolle. Die Forderung verlangt also, daß man im Inneren des Intervalls $[a, b]$ keine $1/t$-Stellen von $|f|$ „mehrfach zählt“. Am Rand des Intervalls ist dies jedoch unter Umständen notwendig, falls am Rand kein regulärer Häufungspunkt von $1/t$-Stellen von $|f|$ liegt. In diesem Fall verschwinden allerdings ohnehin die ersten 4 Ableitungen der Funktion, so daß die Forderung auch hier automatisch erfüllt ist.

1. $|f'(x_i)|^2 \geq 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$.
2. $|f'(y_i)|^2 \geq 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$.
3. $|f'(x_i)|^2 < 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$ und $|f'(y_i)|^2 < 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$.

In den ersten beiden Fällen ist die Ableitung von f an wenigstens einer der beiden Intervallgrenzen „groß" und man sollte erwarten, daß die Länge des Intervalls aus diesem Grund „klein" sein sollte. Wir wollen diese Überlegung präzisieren, um in jedem der Fälle die Abschätzung

$$|f'(y_i) - f'(x_i)| \leq 4t^{-1/2}|f''(m_i)|^{1/2} \tag{3.1.9}$$

zu etablieren.

Falls $f''(m_i) = 0$ ist, so ist die Ableitung von f auf dem ganzen Intervall $[x_i, y_i]$ konstant und die gesuchte Abschätzung ist trivial erfüllt. Wir können somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $f''(m_i) \neq 0$ ist.

1. Fall: $|f'(x_i)|^2 \geq 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$.

Wir bezeichnen die Intervallänge mit $\Delta_i = |y_i - x_i|$. Sei $x \in [x_i, y_i]$, also $\Delta = x - x_i \leq \Delta_i$. Dann gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{t} \geq |f(x) - f(x_i)| &= |f'(x_i)(x - x_i) + \int_{x_i}^{x} du\ (x-u)f''(u)| \\
&\geq |f'(x_i)(x - x_i)| - |\int_{x_i}^{x} du\ (x-u)f''(u)| \\
&\geq |f'(x_i)||x - x_i| - \frac{1}{2}|f''(m_i)||x - x_i|^2 \\
&= |f'(x_i)|\Delta - \frac{1}{2}|f''(m_i)|\Delta^2 \ .
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Jedes $\Delta \leq \Delta_i$ muß somit die Ungleichung

$$\Delta^2 - 2\frac{|f'(x_i)|}{|f''(m_i)|}\Delta + \frac{4}{t|f''(m_i)|} \geq 0 \tag{3.1.11}$$

erfüllen. Die Forderung $|f'(x_i)|^2 \geq 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$ stellt sicher, daß diese Ungleichung nicht für beliebige Δ erfüllt ist und sich durch Lösen der Ungleichung eine Einschränkung an die zulässigen Δ_i ergibt:

$$\begin{aligned}
\Delta_i &\leq \frac{|f'(x_i)|}{|f''(m_i)|} - \sqrt{\frac{|f'(x_i)|^2}{|f''(m_i)|^2} - \frac{4}{t|f''(m_i)|}} = \frac{|f'(x_i)|}{|f''(m_i)|}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4|f''(m_i)|}{t|f'(x_i)|^2}}\right) \\
&\leq^6 \frac{4}{t|f'(x_i)|} \leq 2t^{-1/2}|f''(m_i)|^{-1/2} \ .
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgt somit

$$|f'(y_i) - f'(x_i)| \leq |f''(m_i)| \cdot \Delta_i \leq 2t^{-1/2}|f''(m_i)|^{1/2} \ . \tag{3.1.13}$$

2. Fall: $|f'(y_i)|^2 \geq 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$.

Die Abschätzung verläuft völlig analog zum 1. Fall und liefert das gleiche Ergebnis.

3. Fall: $|f'(x_i)|^2 < 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$ und $|f'(y_i)|^2 < 4\frac{|f''(m_i)|}{t}$.

Hier folgt direkt

$$|f'(y_i) - f'(x_i)| \leq |f'(x_i)| + |f'(y_i)| \leq 2\sqrt{\frac{4|f''(m_i)|}{t}} = 4t^{-1/2}|f''(m_i)|^{1/2} \ . \tag{3.1.14}$$

Es gilt demnach in jedem der drei Fälle

$$|L_f(t)| \leq 4t^{-1/2}\sum_i |f''(m_i)|^{1/2} \ . \tag{3.1.15}$$

Im folgenden werden wir eine obere Schranke für $\sum_i |f''(m_i)|^{1/2}$ etablieren, die nicht mehr von der durch die Variable t induzierten Aufteilung des Intervalls abhängt.

Nach der Wahl der Folgen (x_i) und (y_i) gibt es stets Stellen n_i mit

$$y_{i-1} \leq n_i \leq x_i \ : \ f'(n_i) = 0 \ . \tag{3.1.16}$$

Falls n_i echt kleiner als n_{i+1} ist, so findet man nach dem Satz von Rolle eine Stelle l_i mit

$$n_i \leq l_i \leq n_{i+1} \ : \ f''(l_i) = 0 \ . \tag{3.1.17}$$

Andernfalls ist n_i ein Randpunkt des Intervalls $[a, b]$ und f'' verschwindet an der entsprechenden Stelle ohnehin. Mit der gleichen Argumentation findet man nun Stellen L_i zwischen l_i und l_{i+1}, an denen die 3. Ableitung von f verschwindet:

$$l_i \leq L_i \leq l_{i+1} \ : \ f'''(L_i) = 0 \ . \tag{3.1.18}$$

Falls $l_i \leq m_i$ ist, gibt es stets ein M_i aus dem Intervall $[l_i, m_i]$, an dem $|f'''|$ sein Maximum annimmt:

$$l_i \leq M_i \leq m_i \ : \ |f'''(M_i)| = \sup\left\{|f'''(x)| \ : \ x \in [l_i, m_i]\right\} \ . \tag{3.1.19}$$

Andernfalls gibt es ein analoges M_i aus dem Intervall $[m_i, l_i]$.

Durch 2-maliges Anwenden des Mittelwertsatzes finden wir nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f''(m_i)| &= |f''(m_i) - f''(l_i)| \leq |f'''(M_i)||m_i - l_i| = |f'''(M_i) - f'''(L_i)||m_i - l_i| \\ &\leq \|f^{(4)}\|_\infty |M_i - L_i||m_i - l_i| \ . \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

[6] $\sqrt{1-x} \geq 1 - x$ für $0 \leq x \leq 1$.

Nach Konstruktion liegen die Stellen M_i, L_i, m_i alle im Intervall $[y_{i-1}, x_{i+2}]$:

$$n_i \in [y_{i-1}, x_i] \ , \tag{3.1.21a}$$
$$m_i \in [x_i, y_i] \ , \tag{3.1.21b}$$
$$l_i \in [n_i, n_{i+1}] \subset [y_{i-1}, x_{i+1}] \ , \tag{3.1.21c}$$
$$L_i \in [l_i, l_{i+1}] \subset [y_{i-1}, x_{i+2}] \ , \tag{3.1.21d}$$
$$M_i \in [\min\{l_i, m_i\}, \max\{l_i, m_i\}] \subset [y_{i-1}, x_{i+1}] \ . \tag{3.1.21e}$$

Wir haben somit die Abschätzung

$$|f''(m_i)| \leq \|f^{(4)}\|_\infty |y_{i-1} - x_{i+2}|^2 \tag{3.1.22}$$

gewonnen. Durch 4-maliges Anwenden der Dreiecksungleichung finden wir

$$|f''(m_i)|^{1/2} \leq \|f^{(4)}\|_\infty^{1/2} \Big(|y_{i-1} - x_i| + |x_i - y_i| + |y_i - x_{i+1}| + |x_{i+1} - y_{i+1}| + |y_{i+1} - x_{i+2}| \Big) \tag{3.1.23}$$

und erhalten somit

$$\sum_i |f''(m_i)|^{1/2} \leq 5 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty^{1/2} \cdot |b - a| \ . \tag{3.1.24}$$

Zusammen mit der Ungleichung (3.1.15) ergibt sich daraus das gesuchte Ergebnis

$$|L_f(t)| \leq 20 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty^{1/2} \cdot |b - a| \cdot t^{-1/2} \ . \tag{3.1.25}$$

■

Wesentlich an diesem Ergebnis ist insbesondere die Tatsache, daß $L_f(t)$ für große t wenigstens wie $t^{-\epsilon}$ abfällt. Es wird sich im nächsten Satz herausstellen, daß dies die Existenz des Funktionals λ sicherstellt.

3.1.3 Existenzbeweis

Satz 3.9. *Das Funktional*

$$\begin{aligned} \lambda \ : \ \mathscr{C}_0^4(\mathbb{R}) \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ f \quad &\longmapsto \quad \lambda(f) = \int_0^\infty \frac{-dt}{t} \int_{-\infty}^\infty dx \ f''(x) \chi\left(t|f(x)|\right) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, und es gilt die Abschätzung

$$|\lambda(f)| \leq 40 \cdot |b - a| \cdot \|f^{(4)}\|_\infty^{1/2} \cdot \|f\|_\infty^{1/2}$$

falls $\operatorname{supp}(f) \subset [a, b]$.

Beweis: Offenbar gilt

$$L_f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\; f''(x)\chi\left(t|f(x)|\right) = 0 \qquad \text{falls} \quad t < \frac{1}{\|f\|_\infty}\,. \tag{3.1.26}$$

Für große t fällt $L_f(t)$ wenigsten wie $t^{-1/2}$ ab. Somit ist $\lambda(f)$ für jede Funktion f erklärt. Aus dem vorangehenden Lemma erhalten wir

$$\begin{aligned}|\lambda(f)| = |\int\limits_{\|f\|_\infty^{-1}}^{\infty} \frac{dt}{t} L_f(t)| &\leq 20 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty^{1/2} \cdot |b-a| \cdot \int\limits_{\|f\|_\infty^{-1}}^{\infty} dt\; t^{-3/2} \\ &= 40 \cdot |b-a| \cdot \|f^{(4)}\|_\infty^{1/2} \cdot \|f\|_\infty^{1/2}\,.\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

■

In Anhang A.2 werden wir einen ganz ähnlichen Satz auch für Schwartz-Funktionen beweisen. (Prinzipiell würde es auch dort ausreichen, 4-mal stetig differenzierbare Funktionen zu betrachten, die im Unendlichen schnell abfallen.)

Der Verzicht auf die Forderung, daß f kompakten Träger hat, würde einige Beweise im folgenden Abschnitt zumindest stark erschweren. Wir werden uns deshalb der Einfachheit halber auf Funktionen mit kompaktem Träger beschränken. An gegebener Stelle wird auf mögliche Obstruktionen im Fall nichtkompakter Träger hingewiesen.

3.2 Eigenschaften des Funktionals

3.2.1 Stetigkeit

Wir haben im letzten Abschnitt gezeigt, daß das Funktional λ in einer Norm auf $\mathscr{C}_0^4(\mathbb{R})$ beschränkt ist. Da es sich jedoch um ein nichtlineares Funktional handelt, folgt hieraus noch *nicht*, daß λ bezüglich dieser Normtopologie stetig ist.

Lemma 3.8 liefert jedoch geeignete Schranken, so daß wir mit Hilfe des Satzes von Lebesgue (= Satz von der majorisierten Konvergenz) die Stetigkeit des Funktionals bezüglich geeigneter Schwartz-Normen

$$\|f\|_{p,q} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big((1+|x|^p)\, |f^{(q)}(x)| \Big) \tag{3.2.1}$$

zeigen können.

Lemma 3.10. Seien $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist die Menge $N = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = c \text{ und } f''(x) \neq 0\}$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Beweis: Sei $y \in N$ beliebig. Wir werden im folgenden zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ob $f'(y)$ gleich Null oder ungleich Null ist.

1. Sei $f'(y) \neq 0$.
   Dann gibt es eine stetige Funktion ρ_1 mit $\rho_1(0) = 0$, so daß sich f in der Form
   $$f(x) = f(y) + \big(f'(y) + \rho_1(x-y)\big) \cdot (x-y) \tag{3.2.2}$$
   darstellen läßt. In einer kleinen Umgebung U_y von y ist also sicher $|\rho_1(x-y)| < |f'(y)|$. Insbesondere gibt es also in dieser Umgebung keine weitere Stelle x mit $f(x) = c$.

2. Sei $f'(y) = 0$.
   Dann gibt es eine stetige Funktion ρ_2 mit $\rho_2(0) = 0$, so daß sich f in der Form

$$f(x) = f(y) + \left(\frac{f''(y)}{2} + \rho_2(x-y)\right) \cdot (x-y)^2 \tag{3.2.3}$$

   darstellen läßt. Analog zum 1. Fall findet man auch hier wieder ein Umgebung U_y von y, in der keine weitere c-Stelle von f liegt.

Zu jedem $y \in N$ gibt es also eine Umgebung U_y, so daß $U_y \cap N = \{y\}$ ist. In jeder Umgebung U_y liegt wenigsten ein $q_y \in \mathbb{Q}$. Das heißt es gibt eine injektive Abbildung

$$N \ni y \longmapsto q_y \in \mathbb{Q} \tag{3.2.4}$$

von N nach $\mathbb{Q}$. Die Menge N ist demnach abzählbar, also eine Lebesgue-Nullmenge. ■

Satz 3.11. *Das Funktional λ ist bezüglich der Schwartz-Norm $\|\cdot\|_{p,4}$ für jedes $p \geq 2$ stetig.*

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge in $\mathscr{C}_0^4(\mathbb{R})$, die bezüglich der besagten Norm gegen eine Funktion $f \in \mathscr{C}_0^4(\mathbb{R})$ konvergiert. Wir setzen

$$h_n^t(x) = f_n''(x)\chi\left(t|f_n(x)|\right) - f''(x)\chi\left(t|f(x)|\right) \ . \tag{3.2.5}$$

Die Funktion χ ist lediglich an den Stellen 0 und 1 unstetig. Für jedes x mit $f(x) \notin \{-1/t, 0, 1/t\}$ ist für hinreichend große n also $\chi\left(t|f_n(x)|\right) = \chi\left(t|f(x)|\right)$ und die Folge $h_n^t(x)$ konvergiert gegen Null für $n \to \infty$. Die Folge $h_n^t(x)$ konvergiert offensichtlich ebenfalls für jedes x mit $f''(x) = 0$ gegen Null.

Keine Konvergenz gegen Null liegt also lediglich auf der Menge

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in \left\{-\frac{1}{t}, 0, \frac{1}{t}\right\} \text{ und } f''(x) \neq 0 \right\} \tag{3.2.6}$$

vor. Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, ist diese Menge jedoch nach Lemma 3.10 eine Nullmenge.

Die Funktionen h_n^t haben somit die folgenden Eigenschaften:

1. Die Folge $\left(h_n^t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall (bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$) punktweise gegen Null für $n \to \infty$.

2. Die Funktionen h_n^t sind integrierbar.

3. Die Folge $(\|f_n\|_{p,4})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Insbesondere ist diese Folge beschränkt, und es gibt eine Konstante K mit $\|f_n\|_{p,4} + \|f\|_{p,4} \leq K$. Über die Abschätzung

$$|h_n^t(x)| \leq |f_n''(x)| + |f''(x)| \leq \frac{\|f_n\|_{p,4} + \|f\|_{p,4}}{1+|x|^p} \leq \frac{K}{1+|x|^p} \tag{3.2.7}$$

   finden wir somit für $p \geq 2$ eine integrierbare Majorante für die Funktionenfolge h_n^t.

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz gilt demnach:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ h_n^t(x) = 0\ . \tag{3.2.8}$$

Wir betrachten nun die Funktionenfolge L_n mit

$$L_n(t) = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ h_n^t(x)\ . \tag{3.2.9}$$

Für diese Funktionenfolge gilt:

1. Die Folge der L_n konvergiert nach Gleichung (3.2.8) punktweise gegen Null.
2. Da L_n die Summe zweier integrierbarer Funktionen ist, ist L_n selbst wieder eine integrierbare Funktion.
3. Es gibt ein $t_0 > 0$, so daß $\|f_n\|_\infty < 1/t_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also $L_n(t) = 0$ für alle $t < t_0$. Für $t \geq t_0$ liefert wiederum Lemma 3.8 eine integrierbare Majorante.

Durch nochmaliges Anwenden des Satzes von Lebesgue ergibt sich somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} dt\ L_n(t) = \int_0^{\infty} dt\ \lim_{n\to\infty} L_n(t) = \int_0^{\infty} dt\ 0 = 0\ . \tag{3.2.10}$$

■

3.2.2 Alternative Darstellung des Funktionals

Wir werden nun den Zusammenhang des Funktionals λ mit dem von Buchholz et al. für eine eingeschränkte Klasse von Funktionen gefundenen Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x) \ln\left(f^2(x)\right) \tag{3.2.11}$$

herstellen. Es gilt der folgende Satz:

Satz 3.12. *Das Funktional λ läßt sich für alle $f \in \mathscr{C}_0^4(\mathbb{R})$ in der Form*

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x) \ln\left(f^2(x) + \epsilon\right)$$

darstellen.

Beweis: Der Ausdruck

$$D(\epsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x) \ln\left(f(x)^2 + \epsilon\right) - 2\lambda(f) \tag{3.2.12}$$

existiert für beliebige $\epsilon > 0$, da es sich bei dem Integranden um eine stetige Funktion mit kompaktem Träger handelt, die keine Singularitäten besitzt. Wir werden im folgenden zeigen, daß dieser Ausdruck gegen Null konvergiert, falls ϵ gegen Null geht. Mit Hilfe der Identität

$$\ln(x) = \int\limits_0^{\infty} dt\ \frac{\chi(t) - \chi(tx)}{t}\ , \quad x > 0 \tag{3.2.13}$$

läßt sich $D(\epsilon)$ in der Form

$$\begin{aligned} D(\epsilon) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x) \int\limits_0^{\infty} dt\ \frac{\chi(t) - \chi\left(t\left(f(x)^2 + \epsilon\right)\right)}{t} - 2\lambda(f) \\ &= \int\limits_0^{\infty} \frac{-dt}{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x)\chi\left(t\left(f(x)^2 + \epsilon\right)\right) - 2\int\limits_0^{\infty} \frac{-dt}{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x)\chi\left(t|f(x)|\right) \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

schreiben. Da χ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,1]$ ist, gilt für $x > 0$ stets $\chi(x) = \chi(x^2)$. Wir ersetzen nun im zweiten Summanden $t|f(x)|$ durch $t^2 f(x)^2$ und substituieren $t^2 \to t$:

$$D(\epsilon) = \int\limits_0^{\infty} \frac{-dt}{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x)\chi\left(t\left(f(x)^2 + \epsilon\right)\right) - \int\limits_0^{\infty} \frac{-dt}{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x)\chi\left(tf(x)^2\right)\ . \tag{3.2.15}$$

Falls $t > 1/\epsilon$ ist, so ist auf jeden Fall $\chi\left(t\left(f(x)^2 + \epsilon\right)\right) = 0$. Die obere Grenze der t-Integration im ersten Summanden kann also durch $1/\epsilon$ ersetzt werden. Danach führen wir im ersten Summanden die Substitution $t = (\epsilon + 1/t')^{-1}$ durch. Damit ergibt sich:

$$D(\epsilon) = \int\limits_0^{\infty} \frac{-dt'}{t'\left(1 + \epsilon t'\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ f''(x)\chi\left(t(t')\left(f(x)^2 + \epsilon\right)\right) - \int\limits_0^{\infty} \frac{-dt}{t} \int\limits_{f(x)^2 \leq \frac{1}{t}} dx\ f''(x)\ . \tag{3.2.16}$$

Der Ausdruck $\chi\left(t(t')\left(f(x)^2 + \epsilon\right)\right)$ ist genau dann gleich Eins (und sonst gleich Null), wenn

$$f(x)^2 + \epsilon \leq \frac{1}{t(t')} = \frac{1}{t'} + \epsilon\ . \tag{3.2.17}$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.2.16) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} D(\epsilon) &= -\int\limits_0^{\infty} \frac{dt'}{t'\left(1 + \epsilon t'\right)} \int\limits_{f(x)^2 \leq \frac{1}{t'}} dx\ f''(x) + \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t} \int\limits_{f(x)^2 \leq \frac{1}{t}} dx\ f''(x) \\ &= \int\limits_0^{\infty} dt\ \frac{\epsilon}{1 + \epsilon t} L_f(\sqrt{t})\ . \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Nach Gleichung (3.1.26) ist $L_f(\sqrt{t}) = 0$, falls $\sqrt{t} \leq \|f\|_\infty^{-1}$. Weiterhin hat man nach Lemma 3.8 die Abschätzung

$$L_f(\sqrt{t}) \leq Ct^{-1/4} \ . \tag{3.2.19}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}|D(\epsilon)| &\leq C \int_{\|f\|_\infty^{-2}}^{\infty} dt\ \frac{\epsilon}{1+\epsilon t} t^{-1/4} = C\epsilon^{1/4} \int_{\epsilon\|f\|_\infty^{-2}}^{\infty} dt\ \frac{1}{1+t} t^{-1/4} \\ &\leq C\epsilon^{1/4} \int_0^\infty dt\ \frac{1}{1+t} t^{-1/4} = \sqrt{2}\pi C\epsilon^{1/4} \ .\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Insbesondere gilt demnach

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} D(\epsilon) = 0 \ . \tag{3.2.21}$$

■

3.2.3 Zusammenhang mit dem Gelfand-Fuks-Kozykel

Bisher haben wir die Frage offengelassen, ob λ tatsächlich das in Abschnitt 2.1 vorgestellte Problem löst, also der Gleichung

$$\lambda(g) - \lambda\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) \propto \int_0^1 dt\ \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right) \tag{3.2.22}$$

genügt. Wir werden diese Frage in diesem Abschnitt behandeln und zu einer positiven Antwort kommen.

Lemma 3.13. Sei $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. Dann ist die Menge der Nullstellen von f, die innerhalb des Trägers von f liegen, eine Lebesgue-Nullmenge.

Beweis: Da f stetig ist, ist die Menge aller Nicht-Nullstellen von f eine offene Teilmenge des Trägers von f. Wir zerlegen diese Menge in ihre Zusammenhangskomponenten, die gerade offene Intervalle sind. Die Nullstellen von f, die innerhalb des Trägers von f liegen, sind gerade die Randpunkte dieser Intervalle. Da jedes offene, nichtleere Intervall aber wenigstens eine rationale Zahl enthält, folgt, daß die betrachtete Menge höchstens abzählbar sein kann, somit also eine Lebesgue-Nullmenge ist. ■

Satz 3.14. *Seien $f, g \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist die Abbildung*

$$\mathbb{R} \ni t \ \longmapsto \ \lambda\left(e^{t\mathrm{D}_f} g\right)$$

differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(e^{t\mathrm{D}_f} g\right) = 2\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f'''(x)\left(e^{t\mathrm{D}_f} g\right)(x) \ .$$

Beweis: Um den Beweis übersichtlich zu halten, vereinbaren wir folgende Schreibweisen:

$$g_t = e^{t\mathrm{D}_f} g \ , \tag{3.2.23}$$

$$g_t'(x) = \frac{\partial}{\partial x} g_t(x) \ , \tag{3.2.24}$$

$$\dot{g}_t(x) = \frac{\partial}{\partial t} g_t(x) = (\mathrm{D}_f g_t)(x) \text{ und} \tag{3.2.25}$$

$$\lambda_\epsilon(f) = \frac{1}{2} \int dx \ f''(x) \ln\left(f^2(x) + \epsilon\right) \ . \tag{3.2.26}$$

Wir berechnen nun für $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\lambda_\epsilon(g_t) &=^{7} \frac{1}{2}\int dx \ \frac{\partial}{\partial t}\Big(g_t''(x)\ln\left(g_t^2(x)+\epsilon\right)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int dx \ \left(\dot{g}_t''\ln\left(g_t^2+\epsilon\right) + 2g_t''\frac{g_t\dot{g}_t}{g_t^2+\epsilon}\right)(x) \\
&= \int dx \ \left(\frac{g_t}{g_t^2+\epsilon}\Big(-\dot{g}_t'g_t' + g_t''\dot{g}_t\Big)\right)(x) \\
&= \int dx \ \left(\frac{g_t}{g_t^2+\epsilon}\Big(-g_t'\left(\mathrm{D}_f g_t\right)' + g_t''\mathrm{D}_f g_t\Big)\right)(x) \\
&= \int dx \ \left(\frac{g_t}{g_t^2+\epsilon}\Big(-g_t'\left(f''g_t - fg_t''\right) + g_t''\left(f'g_t - fg_t'\right)\Big)\right)(x) \\
&= \int dx \ \left(\frac{g_t^2}{g_t^2+\epsilon}\Big(f'g_t'' - f''g_t'\Big)\right)(x) \ .
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Wir werden im folgenden zeigen, daß die Folge der Funktionen $\left(t \mapsto \frac{d}{dt}\lambda_\epsilon(g_t)\right)_{\epsilon>0}$ kompakt gleichmäßig gegen den gewünschten Grenzwert konvergiert. Sei also $T \subset \mathbb{R}$ kompakt und $t \in T$.

$$\begin{aligned}
D_\epsilon(t) &= |\frac{d}{dt}\lambda_\epsilon(g_t) - 2\int dx \ \left(f'''g_t\right)(x)| \\
&= |\frac{d}{dt}\lambda_\epsilon(g_t) - \int dx \ \left(f'g_t'' - f''g_t'\right)(x)| \\
&= |\int dx \ \frac{\epsilon}{g_t(x)^2+\epsilon}\left(f'g_t'' - f''g_t'\right)(x)| \\
&\leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ t\in T}} |\left(f'g_t'' - f''g_t'\right)(x)| \cdot \int_{\operatorname{supp} g_t} dx \ \frac{\epsilon}{g_t^2(x)+\epsilon} \ .
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Der Ausdruck $\left(f'g_t'' - f''g_t'\right)(x)$ hängt stetig von t und x ab. Da zusätzlich f einen kompakten Träger hat, ist das Supremum also im wesentlichen das Supremum über ein kompaktes Gebiet einer stetigen Funktion im $\mathbb{R}^2$. Das Supremum existiert somit und wir setzen

$$c_T = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ t\in T}} |\left(f'g_t'' - f''g_t'\right)(x)| \ . \tag{3.2.29}$$

[7] Die Differenzierbarkeit, sowie die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation stellen hier kein Problem dar, da die Funktion g_t kompakten Träger hat, effektiv also nur über ein kompaktes Intervall integriert wird und der Integrand stetig differenzierbar ist.

Wir führen nun die Substitution $y = \phi_f(t,x)$ durch, wobei ϕ_f der von f induzierte Diffeomorphismus der reellen Achse aus Lemma 2.2 ist und benutzen die Definition von g_t:

$$D_\epsilon(t) \leq c_T \int\limits_{\operatorname{supp} g} \frac{dy}{\phi'_f\left(t, \phi_f^{-1}(t,y)\right)} \cdot \frac{\epsilon}{\frac{g^2(y)}{\phi'_f\left(t,\phi_f^{-1}(t,y)\right)^2} + \epsilon} \ . \tag{3.2.30}$$

Mit $\phi_f^{-1}(t,y)$ sei dabei die Umkehrfunktion zu $y \mapsto \phi_f(t,y)$ bezeichnet.

Unter Verwendung der ebenfalls aus Lemma 2.2 bekannten Rechenregeln[8] für ϕ_f erhält man daraus

$$D_\epsilon(t) \leq c_T \int\limits_{\operatorname{supp} g} dy \ \frac{\epsilon}{\phi'_f(-t,y) g^2(y) + \epsilon/\phi'_f(-t,y)} \ . \tag{3.2.31}$$

Die Ableitung $\phi'_f(t,y)$ ist stets positiv. Insbesondere existiert also[9]

$$a = \min_{\substack{t \in T \\ x \in \operatorname{supp} g}} \ \phi'_f(-t,x) > 0 \ . \tag{3.2.32}$$

Wir setzen nun

$$b = \max_{\substack{t \in T \\ x \in \operatorname{supp} g}} \ \phi'_f(-t,x) \tag{3.2.33}$$

und erhalten die Abschätzung

$$D_\epsilon(t) \leq c_T \int\limits_{\operatorname{supp} g} dy \ \frac{\epsilon}{a g^2(y) + \epsilon/b} \ . \tag{3.2.34}$$

Der Integrand ist für beliebige ϵ durch die konstante Funktion b beschränkt und konvergiert für alle y, die keine Nullstelle von g sind, gegen Null. Die Menge der Nullstellen von g, die innerhalb des Trägers von g liegen, ist jedoch nach dem vorangehenden Lemma eine Nullmenge. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue erfüllt, und es gilt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int\limits_{\operatorname{supp} g} dy \ \frac{\epsilon}{a g^2(y) + \epsilon/b} = 0 \ . \tag{3.2.35}$$

Wir haben somit gezeigt, daß die Funktionenfolge

$$t \mapsto \frac{d}{dt} \lambda_\epsilon(g_t) \tag{3.2.36}$$

---

[8] Es gilt $1 = \phi'_f(0,y) = \phi'_f(t-t,y) = \phi'_f(t, \phi_f(-t,y))\phi'_f(-t,y) = \phi'_f(t, \phi_f^{-1}(t,y))\phi'_f(-t,y)$.

[9] Hier könnten schwerwiegende Probleme auftreten, falls der Träger von f nicht kompakt wäre. $\phi'_f(t,x)$ wäre zwar immernoch stets positiv, es könnte jedoch der Fall eintreten, daß das Infimum von $|\phi'_f(t,x)|$ über alle $x \in \mathbb{R}$ gerade Null ergibt.

kompakt gleichmäßig konvergiert. In diesem Fall ist auch der Grenzwert differenzierbar und vertauscht mit der Ableitung. Es gilt also

$$\frac{d}{dt}\lambda(g_t) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{d}{dt}\lambda_\epsilon(g_t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f'''(x) g_t(x)\ . \tag{3.2.37}$$

■

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} 48\pi \int_0^1 dt\ \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f} g\right) &= \int_0^1 dt\ 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f'''(x) \left(e^{t\mathrm{D}_f} g\right)(x) \\ &= \int_0^1 dt\ \frac{d}{dt}\lambda\left(e^{t\mathrm{D}_f} g\right) = \lambda\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) - \lambda(g)\ . \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

Das Funktional

$$f \longmapsto -\frac{c}{48\pi}\lambda(f) \tag{3.2.39}$$

stellt also gerade die Lösung des in Abschnitt 2.1 formulierten Problems dar.

3.2.4 Quasilinearität

Satz 3.15. *Das Funktional λ ist nichtlinear, aber quasilinear im folgenden Sinn:*

1. $\lambda(\alpha f) = \alpha\lambda(f)$ $\quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathscr{C}_0^4(\mathbb{R})$.
2. $\lambda(f + g) = \lambda(f) + \lambda(g)$ $\quad$ *falls* $\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g) = \emptyset$.

Beweis: In Abschnitt 3.2.3 haben wir gesehen, daß das Funktional (abgesehen von numerischen Faktoren) unser Problem aus Abschnitt 2.1 löst. Nach Abschnitt 2.3.3 ist λ damit notwendig ein nichtlineares Funktional.

1. Die Homogenität des Funktionals ergibt sich mit der Substitution $t' = |\alpha| t$ direkt aus der Definition von λ:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha f) &= \int_0^\infty \frac{-dt}{t} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \alpha f''(x) \cdot \chi\left(t|\alpha f(x)|\right) \\ &= \alpha \int_0^\infty \frac{-dt'}{t'} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \alpha f''(x) \cdot \chi\left(t'|f(x)|\right) \\ &= \alpha\lambda(f)\ . \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

2. Seien f und g zwei Funktionen mit $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda(f+g) &= \int\limits_0^\infty \frac{-dt}{t} \int\limits_{-\infty}^\infty dx \ \big(f''(x) + g''(x)\big) \cdot \chi\left(t|f(x)+g(x)|\right) \\
&= \int\limits_0^\infty \frac{-dt}{t} \left(\int\limits_{\mathrm{supp}(f)} dx \ f''(x) \cdot \chi\left(t|f(x)|\right) + \int\limits_{\mathrm{supp}(g)} dx \ g''(x) \cdot \chi\left(t|g(x)|\right) \right) \\
&= \lambda(f) + \lambda(g) \ .
\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

■

Es ist recht umständlich, die Nichtlinearität des Funktionals direkt nachzuweisen. Mit Hilfe der speziellen Darstellung des Funktionals aus Satz 3.12, läßt sich $\lambda(f)$ jedoch recht gut numerisch berechnen. Als Beispiel sei hier das Funktional λ für die Summe der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{falls } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.2.42}$$

sowie der entsprechend verschobenen Funktion

$$f_d(x) = f(x-d) \tag{3.2.43}$$

in Abhängigkeit des entsprechenden Translationsparameters ausgewertet. Das Ergebnis ist in der Abbildung 3.2 dargestellt. Man erkennt hier deutlich, daß sich die Nichtlinearität ausschließlich in dem Überlappungsbereich beider Funktionen bemerkbar macht.

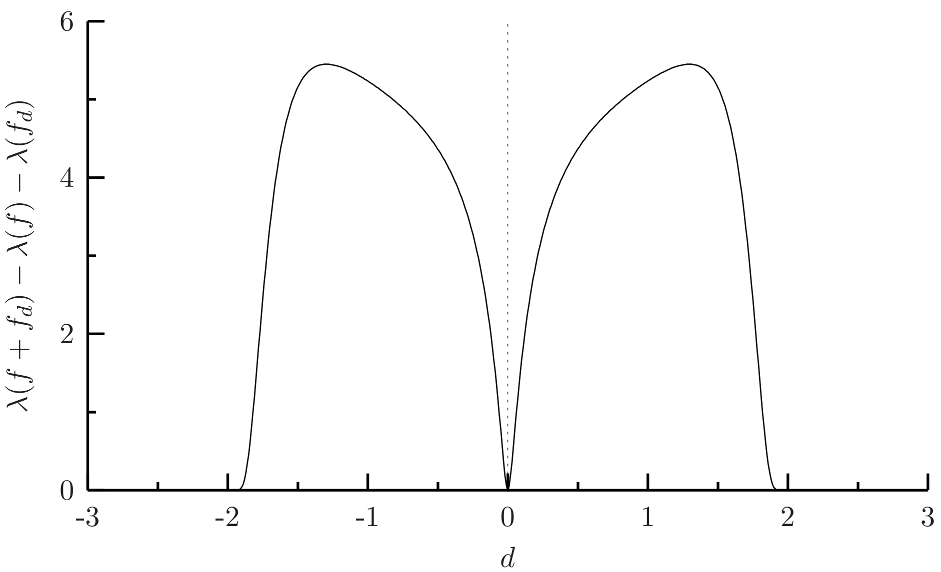

Abbildung 3.2: zur Quasilinearität von λ

3.2.5 Transformationsverhalten

Wir interessieren uns nun für die Frage, welche der aus Abschnitt 2.2 bekannten Diffeomorphismen

$$\begin{aligned} f &\longmapsto f^\star \\ f^\star(x) &= \frac{1}{\psi'(x)} f(\psi(x)) \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

das Funktional λ invariant lassen. Die Funktion ψ ist dabei wie in Lemma 2.2 eine glatte Bijektion der reellen Achse, deren Ableitung stets größer als Null ist[10].

Wir beschränken uns zunächst auf Funktionen $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, die keine Nullstellen innerhalb ihres Trägers besitzen. Für solche Funktionen können wir nach Satz 3.12 das Funktional λ relativ einfach auswerten:

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \int dx\ f''(x) \ln f(x)^2 = - \int dx\ \frac{f'(x)^2}{f(x)} \ . \tag{3.2.45}$$

Da $f^\star$ ebenfalls eine glatte Funktion ist, die keine Nullstellen innerhalb ihres Trägers besitzt, kann man $\lambda(f^\star)$ in gleicher Weise berechnen und wir erhalten mit der Substitution $y = \psi(x)$

$$\lambda(f^\star) = - \int dy\ \left\{ \frac{f'^2}{f} - 2f' \frac{\psi'' \circ \psi^{-1}}{(\psi' \circ \psi^{-1})^2} + f \frac{(\psi'' \circ \psi^{-1})^2}{(\psi' \circ \psi^{-1})^4} \right\} (y) \ . \tag{3.2.46}$$

Durch partielle Integration im 2. Summanden erhält man daraus

$$\lambda(f^\star) = \lambda(f) - \int dy\ f \left\{ 2 \left(\frac{\psi'' \circ \psi^{-1}}{(\psi' \circ \psi^{-1})^2} \right)' + \frac{(\psi'' \circ \psi^{-1})^2}{(\psi' \circ \psi^{-1})^4} \right\} (y) \ . \tag{3.2.47}$$

Die Transformation (3.2.44) läßt das Funktional λ somit genau dann invariant, wenn der Integralterm in Gleichung (3.2.47) für beliebige f verschwindet. Da die von uns betrachtete Funktionenklasse geeignete δ-Folgen enthält, ist dies genau dann der Fall, wenn ψ der Differentialgleichung

$$2 \left(\frac{\psi'' \circ \psi^{-1}}{(\psi' \circ \psi^{-1})^2} \right)' + \frac{(\psi'' \circ \psi^{-1})^2}{(\psi' \circ \psi^{-1})^4} = 0 \tag{3.2.48}$$

genügt. Führt man die Ableitung im ersten Summanden aus und berücksichtigt, daß ψ bijektiv ist, so gelangt man zu der äquivalenten Differentialgleichung

$$2\psi'''\psi' - 3\psi''^2 = 0 \ , \tag{3.2.49}$$

beziehungsweise

$$2\varphi''\varphi - 3\varphi'^2 = 0 \ , \quad \text{mit } \varphi = \psi' \ . \tag{3.2.50}$$

[10] Man könnte zusätzlich auch Diffeomorphismen zulassen, die streng monoton fallend sind. Dies würde jedoch keine wesentliche Verallgemeinerung darstellen und zudem die folgenden Rechnungen durch Fallunterscheidungen erschweren.

Diese Differentialgleichung für φ läßt sich mit den üblichen Methoden (Substitution $p = d\varphi/dx$, $d^2\varphi/dx^2 = pdp/d\varphi$) lösen und wir erhalten zwei Lösungen

$$\varphi(x) = \text{konst.} \qquad \text{und} \qquad \varphi(x) = (cx+d)^{-2} \quad \text{mit} \quad c,d \in \mathbb{R} \; . \tag{3.2.51}$$

Die singuläre Lösung führt zu Transformationen der Form

$$f^\star(x) = (cx+d)^2 \cdot f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \quad \text{mit} \quad ad-bc = 1 \; . \tag{3.2.52}$$

Im allgemeinen gilt für diese Transformationen *nicht* $\lambda(f) = \lambda(f^\star)$. Bei gegebenem f wird die Funktion $f^\star$ nicht einmal für beliebige Werte der Parameter a, b, c, d im Definitionsbereich von λ liegen. Wir werden diese Transformationen im Anhang A.3 diskutieren.

Die konstante Lösung für φ beschreibt gerade Translationen und Dilatationen auf der reellen Achse. Mit der Definition von λ aus Satz 3.9 weist man die Invarianz des Funktionals unter diesen Transformationen für beliebige $f \in \mathscr{C}_0^4(\mathbb{R})$ durch direkte Rechnung nach. Es gilt somit der Satz:[11]

Satz 3.16. *Die Diffeomorphismen der reellen Achse, die das Funktional λ invariant lassen, sind von der Form*

$$\begin{aligned} f &\longmapsto f^\star \\ f^\star(x) &= \frac{1}{|a|} f(ax+b) \quad \textit{mit} \quad a \neq 0 \; . \end{aligned} \tag{3.2.53}$$

3.3 Zusammenfassung

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, daß es möglich ist, ein Funktional $\lambda(f)$ zu definieren, so daß man durch

$$\tilde{\Theta}(f) = \Theta(f) - \frac{c}{48\pi}\lambda(f) \cdot 1\!\!1 \tag{3.3.1}$$

zu neuen Operatoren $\tilde{\Theta}(f)$ gelangt. In der exponenzierten Version der Vertauschungrelationen dieser Operatoren taucht die zentrale Ladung c nicht mehr auf, allerdings sind die Operatoren $\tilde{\Theta}$ nicht mehr linear in den Testfunktionen, da das Funktional λ nichtlinear ist.

Das Funktional λ ist stetig, und zeigt ein einfaches Transformationsverhalten unter Translationen und Dilatationen. Dies legt es nahe, auch $\tilde{\Theta}$ als ein Wightman-Feld aufzufassen, dem lediglich die Linearität in den Testfunktionen fehlt. Wir werden, motiviert durch dieses Beispiel, in Kapitel 4 einen allgemeinen mathematischen Rahmen für solche Felder schaffen und die Eigenschaften solcher Felder in diesem Rahmen diskutieren.

[11] Wir lassen die Forderung nach Orientierungstreue der Abbildung ψ nun fallen. Man kann die obigen Rechnungen für nicht orientierungstreue ψ völlig analog durchführen.

Die exponenzierten Operatoren

$$\tilde{W}(f) = e^{i\tilde{\Theta}(f)} \tag{3.3.2}$$

erfüllen die algebraischen Relationen

$$\tilde{W}(f)\tilde{W}(g)\tilde{W}(f)^{-1} = \tilde{W}\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) \ , \tag{3.3.3a}$$

$$\tilde{W}(\alpha f)\tilde{W}(\beta f) = \tilde{W}\left((\alpha+\beta)f\right) \ , \tag{3.3.3b}$$

$$\tilde{W}(0) = \mathbb{1} \ , \tag{3.3.3c}$$

$$\tilde{W}(f)^* = \tilde{W}(-f) \ . \tag{3.3.3d}$$

Wir werden die $*$-Algebra dieser $\tilde{W}(f)$ im folgenden als Quasi-Witt-Algebra bezeichnen. In Kapitel 5 werden wir die physikalisch interessanten Darstellungen dieser Algebra diskutieren und zu interessanten Einsichten über die Herkunft der Schwinger-Terme gelangen.

Nulla praecepta firma et stabilia - Es gibt keine festen und unverrückbaren Regeln.

Cicero, Marcus Tullius

4 Nichtlineare Quantenfelder

Ausgehend von dem Beispiel der chiralen Energiedichte, das in den Kapiteln 2 und 3 ausführlich diskutiert worden ist, möchten wir nun mathematisch präzisieren, was wir unter einem nichtlinearen Quantenfeld verstehen wollen. Dazu lehnen wir uns an die schon in der Einleitung besprochenen Wightman-Axiome an und versuchen diese „möglichst wenig" abzuändern, so daß unser nichtlineares Feld gerade in diesen Rahmen paßt.

Da die Feldoperatoren in einer solchen Theorie nichtlinear von den Testfunktionen abhängen, kann man nicht mehr erwarten, daß die Vakuumerwartungswerte linear in den Testfunktionen sind. Wir müssen aus diesem Grund auch das Axiomensystem für die n-Punkt-Funktionen entsprechend anpassen, und zwar dergestalt, daß weiterhin ein Rekonstruktionstheorem gilt, man also bei Kenntnis der n-Punkt-Funktionale einen Hilbertraum, entsprechende Feldoperatoren, etc. zurückgewinnen kann.

4.1 Nichtlineare Wightman-Felder

Die Wightmanschen Axiome sind bereits in Abschnitt 1.1 behandelt worden. Wir wollen die folgenden Axiome aus diesem Abschnitt unverändert übernehmen und hier nur noch einmal, angepaßt auf den Fall von chiralen Feldern in einer 1+1-dimensionalen Raumzeit, kurz nennen:

1. Hilbertraum und Darstellung der Poincaré-Gruppe:
    - Hilbertraum $\mathscr{H}$ mit stark stetiger, unitärer Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_1 = \mathbb{R}_+ \rtimes \mathbb{R}^1$[1]

[1] Die Poincaré-Transformationen wirken auf dem Lichtkegel gerade wie Skalierungen und Translationen.

- Existenz des Vakuumvektors Ω
- Spektrumsbedingung: Das Spektrum des Generators P der Translationen liegt ganz in $\mathbb{R}_0^+$

2. Felder transformieren sich unter einer geeigneten[2] Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_1$
3. Kausalität (Lokalität)
4. Vollständigkeit

Unter einem nichtlinearen chiralen Quantenfeld ϕ verstehen wir nichtlineare Abbildungen vom Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ in die Menge der linearen Abbildungen auf einem dichten Unterraum $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$.

Weiterhin wollen wir annehmen:

1. Existenz einer invarianten Domäne:

   Der Unterraum $\mathscr{D}$ sei sowohl invariant unter Wirkung der Operatoren $\phi(f)$ als auch unter der Wirkung der Darsteller der Gruppe $\mathfrak{P}_1$ und enthalte den Vakuumvektor Ω.

2. Hermitizität:

   Das Feld sei observabel, es gelte also

$$\phi(f)^* \supset \phi(f) \ . \tag{4.1.1}$$

3. Temperiertheit der Erwartungswerte:

   Für beliebige $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathscr{D}$ sei die Abbildung

$$f \longmapsto (\Psi_1, \phi(f)\Psi_2) \tag{4.1.2}$$

   stetig bezüglich der Schwartz-Topologie.

4. Quasilinearität:

   Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte

$$\phi(\alpha f) = \alpha\phi(f) \ . \tag{4.1.3}$$

   Falls die Träger der Funktionen f und g disjunkt sind, gelte

$$\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g) \ . \tag{4.1.4}$$

[2] Das Wort „geeignet“ ist in Analogie zu Abschnitt 1.1 zu verstehen.

4.2 Nichtlineare Wightman-Funktionale

Wir wollen nun die Vakuumerwartungswerte von Monomen von Feldoperatoren einer nichtlinearen Quantenfeldtheorie betrachten. In Anlehnung an die Wightman-Theorie wollen wir diese Funktionale als Wightman-Funktionale oder n-Punkt-Funktionale bezeichnen. Die Wightman-Funktionale $\mathcal{W}_n$ sind definiert durch

$$\mathcal{W}_n(f_1, \ldots, f_n) = (\Omega, \phi(f_1) \ldots \phi(f_n)\Omega) \ . \tag{4.2.1}$$

Wir vereinbaren für $(\lambda, a) \in \mathfrak{P}_1$

$$f_{\lambda,a}(x) = f\left(\frac{x-a}{\lambda}\right) \quad \text{und} \tag{4.2.2}$$

$$f_a(x) = f_{1,a}(x) = f(x-a) \ . \tag{4.2.3}$$

Wir wollen uns hier auf den Fall eines skalaren Feldes beschränken, um die Notation nicht zu sehr zu überladen. Ein analoger Satz gilt auch im allgemeinen Fall.

Theorem 4.1. *Die Wightman-Funktionale einer nichtlinearen, skalaren Quantenfeldtheorie haben die folgenden Eigenschaften:*

1. *Positivität:*

   Seien $\mathbb{I}$ eine endliche Indexmenge, $k \in \mathbb{I}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $n(k) \in \mathbb{N}$ und $f_{k,j}$ Testfunktionen für $1 \leq j \leq n(k)$. Dann gilt

$$\sum_{k,l \in \mathbb{I}} \overline{\alpha_k} \alpha_l \mathcal{W}_{n(k)+n(l)} \left(f_{k,n(k)}, \ldots, f_{k,1}, f_{l,1}, \ldots, f_{l,n(l)}\right) \geq 0 \ .$$

2. *Hermitizität:*

$$\mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, f_n\right) = \overline{\mathcal{W}_n\left(f_n, \ldots, f_1\right)}$$

3. *Poincaré-Invarianz*

   Für $(\lambda, a) \in \mathfrak{P}_1$ gilt

$$\mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, f_n\right) = \mathcal{W}_n\left(\left(f_1\right)_{\lambda,a}, \ldots, \left(f_n\right)_{\lambda,a}\right) \ .$$

4. *Kausalität:*

   Falls die Träger von f_k und f_{k+1} disjunkt sind, gilt

$$\mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\right) = \mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, f_{k+1}, f_k, \ldots, f_n\right) \ .$$

5. *Spektrumsbedingung:*

$$\operatorname{supp}\left(p \mapsto \int d^{s+1}y \; e^{-ipy} \; \mathcal{W}_{m+n}\left(f_1, \ldots, f_m, \left(g_1\right)_y, \ldots, \left(g_n\right)_y\right)\right) \subset \mathbb{R}_0^+$$

6. *Clustereigenschaft:*

$$\lim_{|a|\to\infty} \mathcal{W}_{m+n}\left(f_1, \ldots, f_m, (g_1)_a, \ldots, (g_n)_a\right) = \mathcal{W}_m\left(f_1, \ldots, f_m\right) \mathcal{W}_n\left(g_1, \ldots, g_n\right) \ .$$

7. *Quasilinearität: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, \alpha f_k, \ldots, f_n\right) = \alpha \mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_n\right) \ .$$

Falls die Träger von f_k und g_k disjunkt sind, so gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, f_k + g_k, \ldots, f_n\right) = & \ \mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_n\right) \\ & + \mathcal{W}_n\left(f_1, \ldots, g_k, \ldots, f_n\right) \ . \end{aligned}$$

Beweis: Ein analoger Satz für lineare Wightman-Funktionale und lineare Wightman-Felder findet sich in der Literatur [SW64]. Im Beweis wird lediglich in der Notation Gebrauch von der Linearität der Felder und der Wightman-Funktionale gemacht, und man kann den Beweis durch Änderung der Notation sofort auf unseren Fall übertragen.

Die Quasilinearität folgt in offensichtlicher Weise sofort aus der Quasilinearität der Feldoperatoren. ■

Der Vollständigkeit halber wollen wir kurz die Eigenschaften der Felder mit denen der Wightman-Funktionale in Verbindung setzen:

Eigenschaft der $\mathcal{W}_n$	folgt aus
Positivität	• Positivität der Hilbertraum-Norm
Hermitizität	• Hermitizität der Felder
Poincaré-Invarianz	• Transformationsverhalten der Felder • Invarianz des Vakuumvektors
Kausalität	• Kausalität
Spektrumsbedingung	• Transformationsverhalten der Felder • Invarianz des Vakuumvektors • Spektrumsbedingung für P
Clustereigenschaft	• Eindeutigkeit des Vakuums • Kausalität • Spektrumsbedingung für P

4.3 Rekonstruktionstheorem

Wir wollen nun annehmen, daß Funktionale $\mathcal{W}_n$ mit den Eigenschaften aus Theorem 4.1 gegeben sind.

Die wichtige Beobachtung von Wightman [Wig56] im linearen Fall war, daß man unter Kenntnis der Vakuumerwartungswerte eine komplette Quantenfeldtheorie rekonstruieren kann, die den Wightman-Axiomen genügt und gerade wieder die vorgegebenen Vakuumerwartungswerte besitzt. Der Beweis dieses Satzes steht in enger Beziehung zur Gelfand-Naimark-Segal (GNS)-Konstruktion.

Theorem 4.2 (Gelfand-Naimark-Segal [Haa92]). *Sei $\mathfrak{A}$ eine $*$-Algebra mit dem Einselement $\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$ und ω ein normiertes, positives, lineares Funktional auf $\mathfrak{A}$, d.h.*

$$\omega(\mathbb{1}) = 1$$
$$\omega(p^* p) \geq 0 \ , \quad \forall p \in \mathfrak{A} \ ,$$

dann gibt es einen Hilbertraum $\mathscr{H}_\pi$, einen Vektor $\Omega_\pi \in \mathscr{H}_\pi$ und eine Darstellung π der Algebra $\mathfrak{A}$ auf $\mathscr{H}_\pi$, so daß

$$\omega(p) = (\Omega_\pi, \pi(p)\Omega_\pi)$$

gilt, und Ω_π zyklisch ist.

Bemerkung 4.3. Falls die Algebra $\mathfrak{A}$ von Elementen der Gestalt $p(f)$ erzeugt wird, die quasilinear von Testfunktionen f abhängen, so hängen wegen der Linearität von π auch die Darsteller $\pi(p(f))$ quasilinear von den Testfunktionen f ab.

Wir werden nun zu gegebenen Wightman-Funktionalen eine abstrakte $*$-Algebra und ein normiertes, positives, lineares Funktional ω definieren, so daß die GNS-Darstellung dieser Algebra gerade eine Quantenfeldtheorie mit den vorgegebenen Erwartungswerten liefert.

Wir betrachten die freie Algebra $\mathfrak{F}$ über dem Körper $\mathbb{C}$, die von Objekten

$$\Phi(f), \qquad f \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{s+1}\right) \tag{4.3.1}$$

und dem Eins-Element $\mathbb{1}$ erzeugt wird. Ein Element $p \in \mathfrak{F}$ ist eine endliche Summe der Form

$$p = \sum_k \alpha_k \Phi(f_{k,1}) \ldots \Phi(f_{k,n(k)}) \ , \tag{4.3.2}$$

wobei α_k beliebige komplexe Zahlen sind. Wir definieren auf dieser Algebra eine $*$-Operation durch

$$p^* = \sum_k \overline{\alpha_k} \Phi(f_{k,n(k)}) \ldots \Phi(f_{k,1}) \tag{4.3.3}$$

und ein lineares Funktional ω durch

$$\omega(p) = \sum_k \alpha_k \mathcal{W}_{n(k)}\left(f_{k,1}, \ldots, f_{k,n(k)}\right) \ . \tag{4.3.4}$$

Nach der Konstruktion von ω, ist ω ein $\mathfrak{F}$-lineares Funktional, und es gilt

$$\omega(\mathbb{1}) = 1. \tag{4.3.5}$$

Wegen der Positivität der Wightman-Funktionale gilt

$$\omega(p^*p) = \sum_{k,l} \overline{\alpha_k} \alpha_l \mathcal{W}_{n(k)+n(l)} \left(f_{k,n(k)}, \ldots, f_{k,1}, f_{l,1}, \ldots, f_{l,n(l)} \right) \geq 0 \; . \tag{4.3.6}$$

Das Funktional ω ist also ein normiertes, positives, lineares Funktional (=Zustand). Die GNS-Konstruktion liefert uns nun eine dazu passende Hilbertraumdarstellung $(\mathscr{H}, \Omega, \pi)$ dieser Algebra. Wir definieren die Feldoperatoren $\phi(f)$ auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$ durch die Darsteller der Erzeuger der Algebra $\mathfrak{F}$:

$$\phi(f) = \pi(\Phi(f)) \; . \tag{4.3.7}$$

Für die weiteren Details und den Nachweis der einzelnen Eigenschaften sei auf das Buch von Haag [Haa92] und die dort genannte Literatur verwiesen. Der Nachweis der Axiome für nichtlineare Quantenfelder hängt nicht von den Eigenschaften der Abbildung $f \mapsto \phi(f)$ ab.

5 Darstellungstheorie der Quasi-Witt-Algebra

Wie wir in den Kapiteln 2 und 3 dargelegt haben, führen nichtlineare chirale Energiedichten zu einfacheren Vertauschungsrelationen, in denen keine Schwinger-Terme mehr auftreten. Wir wollen nun die Darstellungstheorie dieser neuen algebraischen Struktur, der Quasi-Witt-Algebra $\mathfrak{W}$, mit den bereits aus Gleichung (3.3.3) bekannten Relationen

$$W(f)W(g)W(f)^{-1} = W\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) \ , \tag{5.0.1a}$$

$$W(\alpha f)W(\beta f) = W\left((\alpha+\beta)f\right) \ , \tag{5.0.1b}$$

$$W(0) = \mathbb{1} \ , \tag{5.0.1c}$$

$$W(f)^* = W(-f) \ . \tag{5.0.1d}$$

untersuchen.

Nach der GNS-Konstruktion ist jede Hilbertraum-Darstellung der $*$-Algebra $\mathfrak{W}$ mit einem positiven linearen Funktional über der Algebra verknüpft und umgekehrt. Um die Frage nach Darstellungen unserer Algebra zu beantworten ist es also ausreichend, den Zustand ω beziehungsweise die entsprechenden Wightman-Funktionale $\mathcal{W}_n$ zu charakterisieren.

Stellt man keine Regularitätsforderungen an den Zustand ω, so ist es leicht, solche Zustände anzugeben. Als Beispiel für einen solchen nichtregulären Zustand[1] sei die Abbildung

$$\omega(W) = \begin{cases} \alpha \ , & \text{falls } W = \alpha \cdot \mathbb{1} \\ 0 \ , & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.0.2}$$

[1] Falls $W^*W = \alpha \cdot \mathbb{1}$ ist, so muß $\alpha \geq 0$ sein. Falls W eine Linearkombination von paarweise verschiedenen $(W_i)_{i=1\dots n}$ ist, so läßt sich die Positivität von $\omega(W^*W)$ durch direkte Rechnung nachweisen.

genannt. Dieser Zustand erfüllt offensichtlich die Clustereigenschaft; er ist nicht nur translationsinvariant, sondern sogar invariant unter beliebigen Diffeomorphismen. In den zugehörigen Darstellungen, lassen sich die Translationen und Dilatationen unitär implementieren. Weiterhin taucht die zentrale Ladung in keiner Weise mehr auf. Im Gegenzug lassen sich aber auch keine Feldoperatoren (Generatoren der $W(f)$) mehr definieren, da der Zustand unstetig ist.

Im folgenden sind wir daran interessiert, Zustände zu finden, die eine vakuumartige Situation beschreiben. Wir fordern also

- Translationsinvarianz,
- Spektrumsbedingung,
- Clustereigenschaft (der Zustand sei primär).

Darstellungen der Algebra, die diese Eigenschaften erfüllen, werden wir im folgenden als Vakuumdarstellungen bezeichnen.

Weiterhin soll es in den zugehörigen Darstellungen Generatoren $\phi(f)$ der Operatoren $\pi\left(W(f)\right)$ geben, die gerade nichtlineare Wightman-Felder sind. Das heißt, es soll gelten

$$\pi\left(W(tf)\right) = e^{it\phi(f)} \ . \tag{5.0.3}$$

Die Existenz der $\phi(f)$ wird durch den Satz von Stone sichergestellt, wenn wir fordern, daß die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \pi\left(W(tf)\right) \tag{5.0.4}$$

stark stetig ist. Insbesondere gilt dann automatisch

$$\phi(tf) = t\phi(f) \ , \tag{5.0.5}$$

die Felder $\phi(f)$ sind also homogen in den Testfunktionen. Für die Berechnung der Einpunkt-Funktionen in Abschnitt 5.2 benötigen wir noch die Annahme, daß die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \ni (t_1, \dots, t_n) \longmapsto \omega\left(\pi\left(W(t_1 f_1)\right), \dots, \pi\left(W(t_n f_n)\right)\right) \tag{5.0.6}$$

für beliebige $f_1, \dots f_n \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ eine glatte Funktion ist. Darstellungen, die diese Annahmen über die Glattheit der Abbildung (5.0.6) und über die starke Stetigkeit der Abbildung (5.0.4) erfüllen, werden wir als reguläre Darstellungen bezeichnen.

Es wird sich herausstellen, daß diese qualitativen Voraussetzungen die möglichen Darstellungen der Quasi-Witt-Algebra bereits vollständig festlegen. Wir werden weiterhin sehen, daß in den regulären Vakuumdarstellungen der Quasi-Witt-Algebra wieder die bekannten Schwinger-Terme auftreten, die in dem nichtregulären Zustand (5.0.2) nicht auftraten. In diesem Sinn sind es also gerade die Regularitätsforderungen, die das Auftreten von Schwinger-Termen erzwingen.

5.1 Das Kriterium von Hirsch

Bei der Suche nach regulären Zuständen über unserer Algebra wird sich die Frage stellen, wann sich eine gegebenen Funktion $\psi(x, f(x), \ldots, f^{(2N)}(x))$ als Funktionalableitung

$$\psi = \sum_{\nu=0}^{N} (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \frac{\partial \mathscr{L}\left(x, f(x), \ldots, f^{(N)}(x)\right)}{df^{(\nu)}} \tag{5.1.1}$$

eines Funktionals

$$L(f) = \int dx\ \mathscr{L}\left(x, f(x), \ldots, f^{(N)}(x)\right) \tag{5.1.2}$$

darstellen läßt.

Um die spätere Argumentation nicht unnötig zu unterbrechen, möchten wir diese Frage vorab behandeln.

Zwar wurde bereits am Ende des 19. Jahrhunderts ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Funktion ψ gefunden [Hir97, Fun62], in den zitierten Arbeiten werden jedoch einige Voraussetzungen über die Funktionen ψ und $\mathscr{L}$ gemacht, die bei unserem Problem nicht erfüllt sind. Für unsere Zwecke kann allerdings auf diese Voraussetzungen verzichtet werden, da uns ein notwendiges Kriterium genügt.

Sei $\mathscr{T}$ ein Testfunktionenraum. Wir werden im folgenden stets $\mathscr{T} = \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$ annehmen. Zu diesem Testfunktionenraum definieren wir uns Räume von „möglichen Integralkernen" $\mathscr{K}$.

Definition 5.1. Der Raum $\mathscr{K}_n$ ist der Raum aller beliebig oft stetig partiell differenzierbarer Funktionen

$$\psi:\ \mathbb{R}^{n+2} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,$$

so daß die Funktion

$$x \longmapsto \psi\left(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right)$$

für beliebige $f \in \mathscr{T}$ fast überall[2] definiert, beliebig oft differenzierbar ist und kompakten Träger hat.

Für $n < m$ kann man den Raum $\mathscr{K}_n$ in den Raum $\mathscr{K}_m$ einbetten, indem man eine triviale Abhängigkeit der Funktionen von den zusätzlichen Argumenten annimmt. Auf diese Weise können wir den Raum $\mathscr{K}$ als Vereinigung

$$\mathscr{K} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{K}_n \tag{5.1.3}$$

aller $\mathscr{K}_n$ definieren. Entsprechend sind im folgenden Gleichungen stets so zu lesen, daß man ein hinreichend großes n für alle beteiligten Funktionen aus $\mathscr{K}$ wählen muß.

[2] Die Angabe „fast überall" bezieht sich auf das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Bei Aussagen über solche „Einsetzungen" einer Funktion $f \in \mathscr{T}$ in einen möglichen Integralkern $\psi \in \mathscr{K}$ verzichten wir im folgenden stets auf den Zusatz „fast überall".

Definition 5.2. Zwei Elemente φ und ψ aus $\mathscr{K}$ heißen **äquivalent**

$$\varphi \sim \psi \ ,$$

falls es ein $\mu \in \mathscr{K}$ gibt, so daß

$$\varphi\left(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) = \psi\left(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) + \frac{d}{dx}\mu\left(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right)$$

für beliebige Testfunktionen $f \in \mathscr{T}$ gilt.

Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir für Funktionen ψ aus $\mathscr{K}$ mit $\partial_k\psi$ die Ableitung nach dem $k+2$-ten Argument. In diesem Sinne gilt dann also

$$(\partial_k\psi)\left(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial f^{(k)}}\psi\left(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) \ . \tag{5.1.4}$$

Weiterhin vereinbaren wir

$$\psi\left(x, \{f\}\right) = \psi\left(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) \ . \tag{5.1.5}$$

Es stellt sich als nützlich heraus, auf den Integralkernen einen Variationsoperator einzuführen, der an die Variation des zugehörigen Funktionals erinnern soll:

Definition 5.3. Für beliebiges $u \in \mathscr{T}$ sei die **Variation nach u** gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \delta_u \ : \ \mathscr{K} & \longrightarrow & \mathscr{K} \\ \psi & \longmapsto & \delta_u\psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (\partial_k\psi)\,\mathrm{D}^k\,u \ , \end{array}$$

wobei $\mathrm{D}^k\,u$ die k-te Ableitung von u bezeichnet.

Durch schlichtes Nachrechnen gewinnt man das folgende Lemma:

Lemma 5.4. Die Variation hat folgende Eigenschaften:

1. δ_u ist linear.
2. δ_u respektiert die Äquivalenzrelation auf $\mathscr{K}$:

$$\psi \sim \varphi \quad \Rightarrow \quad \delta_u\psi \sim \delta_u\varphi \ .$$

3. Die Variationen kommutieren:

$$\delta_u\delta_v\psi = \delta_v\delta_u\psi \ .$$

Während die Definition von δ_u und das Lemma 5.4 es nahelegen, δ_u als Abbildung von $\mathscr{K}$ in sich selber aufzufassen, ist es im folgenden hilfreich, Abbildungen der Form

$$u \longmapsto \delta_u\psi \tag{5.1.6}$$

bei festem $\psi \in \mathscr{K}$ zu betrachten. Abbildungen dieser Art möchten wir als Differentialausdrücke bezeichnen.

Definition 5.5. Ein **Differentialausdruck** der Ordnung n ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Psi \;:\; \mathscr{T} & \longrightarrow & \mathscr{K} \\ u & \longmapsto & \Psi(u) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k \,\mathrm{D}^k u \;, \end{array}$$

mit $\psi_0, \ldots, \psi_n \in \mathscr{K}$.

Definition 5.6. Sei Ψ ein Differentialausdruck. Ein Differentialausdruck Ψ^* heißt zu Ψ **adjungierter Differentialausdruck**, wenn die Beziehung

$$u\Psi^*(v) \sim v\Psi(u)$$

für alle $u, v \in \mathscr{T}$ erfüllt ist.

Lemma 5.7. Zu jedem Differentialausdruck Ψ gibt es genau einen adjungierten Differentialausdruck Ψ^*, und es gilt

$$\Big(\Psi^*(u)\Big)\,(x, \{f\}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \Big(u(x)\psi_k\,(x, \{f\})\Big)$$

für beliebige $f \in \mathscr{T}$.

Beweis:

1. Eindeutigkeit:
   Wegen der Linearität von $\sim$ reicht es aus, zu zeigen, daß aus $u\Psi(v) \sim 0$ für beliebige $u, v \in \mathscr{T}$ schon $\Psi = 0$ folgt.

   Sei also $u\Psi(v) \sim 0$ für alle $u, v \in \mathscr{T}$. Dann gilt

   $$\int dx \; u(x) \sum_k \psi_k\,(x, \{f\})\,\big(\mathrm{D}^k\, v\big)(x) = 0 \tag{5.1.7}$$

   und damit schon

   $$\psi_k\,(x, \{f\}) = 0 \;. \tag{5.1.8}$$

   Da f eine beliebige Funktion aus $\mathscr{T}$ ist, folgt daraus, daß jedes ψ_k identisch gleich Null ist.

2. Existenz:
   Durch direkte Rechnung unter Zuhilfenahme von Beziehungen der Form $f'g = (fg)' - fg'$ findet man, daß der gegebene Ausdruck für Ψ^* in der Tat einen zu Ψ adjungierten Differentialausdruck darstellt.

■

Definition 5.8. Ein Differentialausdruck Ψ, für den $\Psi = \Psi^*$ gilt, heißt **selbstadjungiert**.

Lemma 5.9. Sei

$$\begin{array}{rcccl} \Psi & : & \mathscr{T} & \longrightarrow & \mathscr{K} \\ & & u & \longmapsto & \Psi(u) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k \, \mathrm{D}^k \, u \end{array}$$

ein selbstadjungierter Differentialausdruck, dann gilt

$$\psi_k\left(x, \{f\}\right) = \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^\nu \binom{\nu}{k} \frac{d^{\nu-k}}{dx^{\nu-k}} \Big(\psi_\nu\left(x, \{f\}\right) \Big) \; .$$

Beweis: Man betrachte die gegebene Form von $\Psi(u)$ und die aus Lemma 5.7 bekannte Formel für den adjungierten Ausdruck. Man erhält das gesuchte Ergebnis durch Koeffizientenvergleich in den Ableitungen von u in beiden Formeln. ■

Wir wollen nun annehmen, daß ein $\psi \in \mathscr{K}$ gegeben ist, das gerade die Funktionalableitung eines gegebenen Funktionals ist. Es muß also

$$\psi\left(x, \{f\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \Big(\left(\partial_k \mathscr{L}\right) \left(x, \{f\}\right) \Big) \tag{5.1.9}$$

mit einem passenden $\mathscr{L} \in \mathscr{K}$ gelten. Es gilt demnach für beliebiges $u \in \mathscr{T}$:

$$\begin{aligned} \left(\delta_u \mathscr{L}\right)\left(x, \{f\}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\partial_k \mathscr{L}\right)\left(x, \{f\}\right) \partial^k u(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \Big(\left(\partial_k \mathscr{L}\right)\left(x, \{f\}\right) \Big) u(x) + \text{ totale Ableitung} \\ &= \psi\left(x, \{f\}\right) u(x) + \text{ totale Ableitung,} \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

mit anderen Worten:

$$\delta_u \mathscr{L} \sim \psi u \; . \tag{5.1.11}$$

Mit Hilfe der Eigenschaften aus Lemma 5.4 rechnen wir nun

$$v \delta_u \psi = \delta_u \left(\psi v\right) \sim \delta_u \left(\delta_v \mathscr{L}\right) = \delta_v \left(\delta_u \mathscr{L}\right) \sim \delta_v \left(\psi u\right) = u \delta_v \psi \tag{5.1.12}$$

und gewinnen damit eine charakteristische Eigenschaft von Funktionalableitungen:

Satz 5.10. *Seien $\psi, \mathscr{L} \in \mathscr{K}$ mit*

$$\psi\left(x, \{f\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \Big(\left(\partial_k \mathscr{L}\right) \left(x, \{f\}\right) \Big)$$

für beliebige $f \in \mathscr{T}$, dann ist der Differentialausdruck

$$\begin{array}{rcccl} \delta_{.} \psi & : & \mathscr{T} & \longrightarrow & \mathscr{K} \\ & & u & \longmapsto & \delta_u \psi \end{array}$$

selbstadjungiert.

Mit Hilfe von Lemma 5.9 können wir dieses Resultat noch etwas anders formulieren:

Korollar 5.11. Unter den Voraussetzungen von Satz 5.10 gilt für beliebige $f \in \mathscr{T}$:

$$(\partial_k \psi)\,(x, \{f\}) = \sum_{\nu=k}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{k} \frac{d^{\nu-k}}{dx^k} \Big((\partial_\nu \psi)\,(x, \{f\}) \Big) \ ,$$

beziehungsweise in der vom Lagrange-Formalismus gewohnten Schreibweise:

$$\frac{\partial \psi}{\partial f^{(k)}} = \sum_{\nu=k}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{k} \frac{d^{\nu-k}}{dx^{\nu-k}} \frac{\partial \psi}{\partial f^{(\nu)}} \ .$$

5.2 Die Einpunkt-Funktionale

Wir haben nun die geeigneten Werkzeuge in der Hand, um die Einpunkt-Funktionale in den regulären Vakuumdarstellungen der Quasi-Witt-Algebra ausrechnen zu können. Im Anschluß daran werden wir ein Verfahren präsentieren, mit dem sich rekursiv auch die n-Punkt-Funktionale bestimmen lassen. Um die Rechnung übersichtlich zu halten, unterdrücken wir die Darstellungsabbildung π in der Notation und identifizieren $\pi\,(W(f))$ mit $W(f)$.

Durch Differentiation[3] von

$$W(f)W(tg)W(f)^{-1} = W\left(te^{\mathrm{D}_f} g\right) \tag{5.2.1}$$

nach t an der Stelle $t = 0$ finden wir

$$W(f)\phi(g)W(f)^{-1} = \phi\left(e^{\mathrm{D}_f} g\right) \ , \tag{5.2.2}$$

und durch erneutes Differenzieren der linken Seite berechnet sich der Kommutator der Feldoperatoren

$$\big[\phi(f)\,,\,\phi(g)\big] = -i\frac{d}{dt} W(tf)\phi(g)W(tf)^{-1}\Big|_{t=0} \tag{5.2.3}$$

zu

$$\big[\phi(f)\,,\,\phi(g)\big] = -i\frac{d}{dt} \phi\left(e^{t\mathrm{D}_f} g\right)\Big|_{t=0} \ . \tag{5.2.4}$$

Wir wollen nun die Komposition $\omega \circ \phi$ als ein Funktional Λ über den zulässigen Testfunktionen auffassen:

$$\Lambda(h) = \omega\left(\phi(h)\right) \ . \tag{5.2.5}$$

[3] Hier geht die Glattheitsannahme über die Abbildung (5.0.6) ein.

Wegen der Regularität des Zustandes und der Vertauschungsrelation (5.2.4) gilt

$$\begin{aligned}\omega\left(\left[\phi(f)\,,\,\phi(g)\right]\right) &= \omega\left(-i\frac{d}{dt}\phi\left(e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\Big|_{t=0}\right) = -i\frac{d}{dt}\omega\left(\phi\left(e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\right)\Big|_{t=0}\\ &= -i\frac{d}{dt}\Lambda\left(e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\Big|_{t=0}\\ &= -i\int dx\ \frac{\delta\Lambda(g)}{\delta g(x)}\left(\mathrm{D}_f g\right)(x)\ .\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist offensichtlich linear in f und stellt ein lokales[4] Funktional dar. Wegen der Antisymmetrie des Kommutators ist auch Linearität in g gegeben. Weiterhin muß der Vakuumerwartungswert des Kommutators invariant unter Translationen sein. Der allgemeinste Ausdruck für den Erwartungswert des Kommutators ist somit von der Form

$$\omega\left(\left[\phi(f)\,,\,\phi(g)\right]\right) = -i\sum_{k=0}^{N} c_k\int dx\ f^{(2k+1)}(x)g(x) \tag{5.2.7}$$

mit beliebigen komplexen Zahlen c_k. Da der Ausdruck weiterhin stetig in f und g sein soll, können nur endlich viele Terme auftreten. Wir betrachten nun für ein festes $g \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ die Funktion

$$\psi(x) = \frac{\delta\Lambda(g)}{\delta g(x)}\ . \tag{5.2.8}$$

Aus der Gleichung

$$\int dx\ \psi(x)\left(\mathrm{D}_f g\right)(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k\int dx\ f^{(2k+1)}(x)g(x) \tag{5.2.9}$$

gewinnen wir durch partielle Integration eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung für ψ:

$$\psi' g + 2\psi g' = \sum_{k=0}^{N} c_k g^{(2k+1)}\ . \tag{5.2.10}$$

Die Lösungen sind von der Form

$$\psi = \sum_{k=0}^{N} c_k\psi_k \tag{5.2.11}$$

mit den Funktionen

$$\psi_k = \frac{1}{g^2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j g^{(2k-j)}g^{(j)} + \frac{(-1)^k}{2}{g^{(k)}}^2 + \alpha_k\right) \tag{5.2.12}$$

[4] Es sei angemerkt, daß die Lokalität nicht postuliert wurde. Sie ist bereits in den algebraischen Eigenschaften der Quasi-Witt-Algebra kodiert.

und Konstanten $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Da die Funktion ψ die Funktionalableitung des Funktionals Λ sein soll, muß sie nach Abschnitt 5.1 dem Hirsch-Kriterium

$$\frac{\partial \psi}{\partial g^{(k)}} = \sum_{\nu=k}^{2N} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{k} \frac{d^{\nu-k}}{dx^{\nu-k}} \frac{\partial \psi}{\partial g^{(\nu)}} \ , \quad \text{für } k = 0, \ldots, 2N \tag{5.2.13}$$

genügen.

Für $k = 2N - 1$ lautet das Kriterium

$$\frac{\partial \psi}{\partial g^{(2N-1)}} = N \frac{d}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial g^{(2N)}} \ . \tag{5.2.14}$$

Für die von uns gefundene Funktion ψ gilt für $N \geq 1$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial g^{(2N-1)}} = -c_N \frac{g'}{g^2} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial g^{(2N)}} \ . \tag{5.2.15}$$

Aus dem Hirsch-Kriterium folgt somit, daß die Koeffizienten c_k für $k > 1$ verschwinden müssen. Die Funktion ψ hat somit die Gestalt

$$\psi = c_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha_0}{g(x)^2} \right] + c_1 \left[\frac{g''(x)}{g(x)} - \frac{1}{2} \frac{g'(x)^2}{g(x)^2} + \frac{\alpha_1}{g(x)^2} \right] \ . \tag{5.2.16}$$

Damit ψ integrabel ist, müssen die beiden Integrationskonstanten α_0 und α_1 gleich Null sein. Beschränken wir uns zunächst auf Funktionen für die das folgende Integral existiert, so ergibt sich, daß das Funktional

$$\Lambda(g) = \frac{c_0}{2} \int dx \ g(x) + \frac{c_1}{4} \int dx \ g''(x) \ln \left(g(x)^2 \right) \tag{5.2.17}$$

gerade die richtige Funktionalableitung (5.2.16) besitzt[5]. Wie in Kapitel 3 ausführlich dargelegt wurde, ist das Funktional

$$\omega(\phi(g)) = \Lambda(g) = \frac{c_0}{2} \int dx \ g(x) + \frac{c_1}{2} \lambda(g) \tag{5.2.18}$$

die geeignete Fortsetzung dieses Funktionals für beliebige $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Es sei ausdrücklich betont, daß wir *nicht* gezeigt haben, daß diese Einpunkt-Funktionale für beliebige c_0 und c_1 zu regulären Vakuumdarstellungen der Quasi-Witt-Algebra gehören. Es gilt jedoch, daß in jeder regulären Vakuumdarstellung die Einpunkt-Funktionale die angegebene Form haben müssen.

[5] Die dabei auftretende „Integrationskonstante“ wurde gleich Null gesetzt, da die Felder und somit auch die Einpunkt-Funktionale homogen in den Testfunktionen sind.

5.3 Rekursive Berechnung der n-Punkt-Funktionale

Nachdem wir die möglichen Einpunkt-Funktionale über unserer Algebra angegeben haben, wird nun das angekündigte Verfahren vorgestellt, mit dem wir aus den Einpunkt-Funktionalen und der Kommutatorbeziehung (5.2.4) rekursiv die n-Punkt-Funktionale berechnen können. Dieses Verfahren wurde in ähnlicher Form von Buchholz et al. [BMT88a] bei der Bestimmung von KMS-Zuständen über Stromalgebren benutzt.

Wir betrachten die Funktion

$$\mu(y) = \mathcal{W}(g_1, \ldots, g_n, f_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp\; e^{ipy} \tilde{\mu}(p) \; . \tag{5.3.1}$$

Nach der Spektrumsbedingung liegt der Träger von $\tilde{\mu}$ ganz im Abschluß der positiven Halbachse:

$$\mathrm{supp}(\tilde{\mu}) \subset \mathbb{R}_0^+ \tag{5.3.2}$$

Wegen der Translationsinvarianz der Wightman-Funktionale gilt entsprechend für die Funktion

$$\gamma(y) = \mathcal{W}(f_y, g_1, \ldots, g_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp\; e^{ipy} \tilde{\gamma}(p) \; , \tag{5.3.3}$$

daß der Träger ihrer Fouriertransformierten auf die negative Halbachse beschränkt ist.

$$\mathrm{supp}(\tilde{\gamma}) \subset \mathbb{R}_0^- \; . \tag{5.3.4}$$

Die Differenz beider Funktionen

$$\alpha(y) = \gamma(y) - \mu(y) \tag{5.3.5}$$

ist gerade der Erwartungswert eines Kommutators

$$\alpha(y) = \omega\left(\left[\phi(f_y)\, , \, \phi(g_1) \ldots \phi(g_n)\right]\right) \tag{5.3.6}$$

und mit Hilfe von Gleichung (5.2.4) zu berechnen, wenn die n-Punkt-Funktionale bekannt sind.

Die Funktion γ läßt sich somit in folgender Weise schreiben:

$$\gamma(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\epsilon} dp\; e^{ipy} \left(\tilde{\alpha}(p) + \tilde{\mu}(p)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+0} dp\; e^{ipy} \left(\tilde{\alpha}(p) + \tilde{\mu}(p)\right) \; . \tag{5.3.7}$$

Ausdrücke der Form $dp\, \tilde{\alpha}(p)$ sind dabei als signierte Maße aufzufassen. Da der Träger von $\tilde{\mu}$ nicht in die negative reelle Achse hineinragt, können wir γ in der Form

$$\gamma(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+0} dp\; e^{ipy} \left(\tilde{\alpha}(p) + \mu_0 \delta(p)\right) = \frac{\mu_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+0} dp\; e^{ipy} \tilde{\alpha}(p) \tag{5.3.8}$$

schreiben, wobei μ_0 eine noch zu bestimmende Konstante ist.

Die Clustereigenschaft gibt uns nun die Möglichkeit diese Konstante zu bestimmen. Es gilt:

$$\lim_{|y|\to\infty} \gamma(y) = \lim_{|y|\to\infty} \mathcal{W}(f_y, g_1, \ldots, g_n) = \mathcal{W}(f)\mathcal{W}(g_1, \ldots, g_n) \tag{5.3.9}$$

und analog

$$\lim_{|y|\to\infty} \mu(y) = \mathcal{W}(f)\mathcal{W}(g_1, \ldots, g_n) \ . \tag{5.3.10}$$

Die Funktion $\alpha(y)$ konvergiert für $|y| \to \infty$ gegen Null, insbesondere hat das Spektrum von α somit keinen diskreten Anteil bei der Frequenz Null, und wir erhalten

$$\lim_{|y|\to\infty} \gamma(y) = \frac{\mu_0}{\sqrt{2\pi}} = \mathcal{W}(f)\mathcal{W}(g_1, \ldots, g_n) \ . \tag{5.3.11}$$

Wertet man nun $\gamma(y)$ an der Stelle $y = 0$ aus, so erhält man

$$\mathcal{W}(f, g_1, \ldots, g_n) = \mathcal{W}(f)\mathcal{W}(g_1, \ldots, g_n) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+0} dp \ \tilde{\alpha}(p) \ . \tag{5.3.12}$$

Wir haben also gezeigt, daß die Einpunkt-Funktionale Λ bereits *alle* Erwartungswerte und somit die Vakuumdarstellungen der Quasi-Witt-Algebra vollständig festlegen.

5.4 Die Zweipunkt-Funktionale

Wir möchten das Verfahren kurz am Beispiel der Zweipunkt-Funktionale demonstrieren:

Wir setzen

$$\alpha(y) = \omega\left(\left[\phi(f_y) \, , \, \phi(g)\right]\right) \ . \tag{5.4.1}$$

Nach Gleichung (5.2.7) gilt zusammen mit den in Abschnitt 5.2 gezeigten Einschränkungen an die c_k:

$$\alpha(y) = -i\left(c_o \int dx \ f'(x-y)g(x) + c_1 \int dx \ f'''(x-y)g(x)\right) \tag{5.4.2}$$

Die Fouriertransformierte dieser Funktion läßt sich mit Hilfe des Faltungssatzes bestimmen:

$$\begin{aligned} \left[y \mapsto \int dx \ f'(x-y)g(x)\right]^{\sim} &= \left[\ \left(\xi \mapsto f'(-\xi)\right) \star g\right]^{\sim} \\ &= \sqrt{2\pi}\left[\xi \mapsto f'(-\xi)\right]^{\sim} \cdot \tilde{g} \\ &= p \mapsto \sqrt{2\pi}(-ip)\tilde{f}(-p)\tilde{g}(p) \ . \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Die Fouriertransformierte des Integrals mit der 3. Ableitung von f bestimmt man analog. Wir erhalten somit für die Fouriertransformierte von α:

$$\tilde{\alpha}(p) = \sqrt{2\pi}\tilde{f}(-p)\tilde{g}(p)\left(c_1 p^3 - c_0 p\right) \tag{5.4.4}$$

und damit das Zweipunkt-Funktional in der Form

$$\mathcal{W}(f,g) = \mathcal{W}(f)\mathcal{W}(g) + \int_0^\infty dp\ \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)\left(c_0 p - c_1 p^3\right)\ . \tag{5.4.5}$$

Es sei angemerkt, daß die Wahl der Parameter c_0 und c_1 nicht willkürlich ist. Wählen wir eine Folge (f_n) reeller, ungerader Funktionen, so verschwinden die Einpunkt-Funktionale $\mathcal{W}(f_n)$. Die Folge f_n läßt sich so wählen, daß das Betragsquadrat ihrer Fouriertransformierten eine δ-Folge

$$|f_n|^2 \to \delta(\,\cdot - p_0) + \delta(\,\cdot + p_0) \tag{5.4.6}$$

mit beliebigem $p_0 \in \mathbb{R}^+$ bildet. Wegen der Positivität der Hilbertraum-Norm muß $\mathcal{W}(f,f) \geq 0$ sein, und wir erhalten die Bedingung

$$c_0 p_0 - c_1 p_0^3 \geq 0 \qquad \forall p_0 \geq 0\ . \tag{5.4.7}$$

diese Bedingung ist offensichtlich nur dann erfüllt, wenn $c_0 \geq 0$ und $c_1 \leq 0$ ist.

Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, daß die Forderung nach positiver Energie der Darstellung die Wahl der Parameter noch weiter einschränkt. Es wird sich herausstellen, daß der Parameter c_1 in enger Beziehung zur zentralen Ladung c der Virasoro-Algebra steht. Das Ergebnis von Friedan, Qiu und Shenker [FQS85, FQS86], daß nur bestimmte Werte von c zu Darstellungen der Virasoro-Algebra mit positiver Energie führen schränkt somit auch die möglichen Werte von c_1 ein.

5.5 Strukturtheorem

Aus der Diskussion in den Kapiteln 2 und 3 wissen wir, daß man von jeder regulären Vakuumdarstellung der Virasoro-Algebra mit Operatoren $\theta(f)$ mittels

$$\phi(f) = \theta(f) - \frac{c}{48\pi}\lambda(f) \tag{5.5.1}$$

zu einer Realisierung der Quasi-Witt-Algebra $\mathfrak{W}$ durch Operatoren $\phi(f)$ auf dem gleichen Hilbertraum gelangen kann, wobei die zulässigen Werte für c durch

$$c = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)} \text{ mit } m \in \mathbb{N}\ , \quad \text{oder } c \geq 1 \tag{5.5.2}$$

gegeben sind.

Die Form der möglichen Wightman-Funktionale über $\mathfrak{W}$ legt die Vermutung nahe, daß in der Tat jede reguläre Vakuumdarstellung von $\mathfrak{W}$ bis auf unitäre Äquivalenz diese Gestalt hat.

Theorem 5.12. *Jede reguläre Vakuumdarstellung $(\mathscr{H}, \Omega, \pi)$ der Quasi-Witt-Algebra $\mathfrak{W}$ läßt sich in der Form*

$$\pi(\phi(f)) = U\left(\hat{\pi}(\theta(f))\right) U^{-1} - \frac{c}{48\pi}\lambda(f)$$

schreiben, wobei $(\hat{\mathscr{H}}, \hat{\Omega}, \hat{\pi})$ eine Darstellung der Virasoro-Algebra zur zentralen Ladung c ist, und

$$U \; : \; \hat{\mathscr{H}} \longrightarrow \mathscr{H}$$

eine unitäre Abbildung zwischen den zugehörigen Hilberträumen ist.

Beweis: Wir betrachten eine reguläre Vakuumdarstellung $(\mathscr{H}, \Omega, \pi)$ der Algebra $\mathfrak{W}$. Die Generatoren von $\pi(W(tf)$ wollen wir mit $\phi(f)$ bezeichnen. Wir definieren neue Operatoren

$$\hat{\phi}(f) = \phi(f) - \frac{c_1}{2}\lambda(f) \; . \tag{5.5.3}$$

Diese Operatoren genügen den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}(f)\, , \, \hat{\phi}(g)\right] &= -i\frac{d}{dt}\left(\hat{\phi}\left(e^{t\mathrm{D}_f}g\right) + \frac{c_1}{2}\lambda\left(e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\right)\Big|_{t=0} \\ &= -i\frac{d}{dt}\hat{\phi}\left(e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\Big|_{t=0} - i24\pi c_1\omega(f,g) \; , \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

und für ihre Vakuumerwartungswerte[6] gilt offensichtlich

$$\omega\big(\hat{\phi}(f)\big) = \frac{c_0}{2}\int dx \; f(x) \; . \tag{5.5.5}$$

Insbesondere ist $\omega\big(\hat{\phi}(f)\big)$ *linear* in f.

Wir werden nun induktiv zeigen, daß die Erwartungswerte beliebiger Produkte der Feldoperatoren $\hat{\phi}(\cdot)$ linear in den Testfunktionen sind. Dazu nehmen wir an, daß die Erwartungswerte für alle Produkte von Feldoperatoren $\hat{\phi}(\cdot)$ mit höchstens n Faktoren linear in den Testfunktionen sind und folgern daraus, daß auch die $n+1$-Punkt-Funktionale diese Eigenschaft haben. Da wir das rekursive Verfahren aus Abschnitt 5.3 benutzen können, um die $n+1$-Punkt-Funktionale aus den n- und $n-1$-Punkt-Funktionalen zu berechnen, reicht es aus zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\omega\big(\big[\hat{\phi}(f_y)\, , \, \hat{\phi}(g_1)\ldots\hat{\phi}(g_n)\big]\big) \tag{5.5.6}$$

linear in den Testfunktionen ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\omega\big(\big[\hat{\phi}(f_y)\, , \, \hat{\phi}(g_1)\ldots\hat{\phi}(g_n)\big]\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\omega\big(\hat{\phi}(g_1)\ldots\hat{\phi}(g_{k-1})\big[\hat{\phi}(f_y)\, , \, \hat{\phi}(g_k)\big]\hat{\phi}(g_{k+1})\ldots\hat{\phi}(g_n)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\omega\big(\hat{\phi}(g_1)\ldots\hat{\phi}(g_{k-1})\Big(-i\frac{d}{dt}\hat{\phi}(e^{t\mathrm{D}_{f_y}}g_k)\Big|_{t=0} - i24\pi c_1\omega(f_y,g_k)\Big)\hat{\phi}(g_{k+1})\ldots\hat{\phi}(g_n)\big) \; . \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

[6] Wir verwenden das Symbol ω in verschiedenen Bedeutungen: Als Gelfand-Fuks-Kozykel und als Vakuumzustand $\omega(\cdot) = (\Omega, \cdot\,\Omega)$. Die jeweilige Bedeutung ist aus dem Zusammenhang zu entnehmen.

Da ω ein stetiges, lineares Funktional ist, können wir die Ableitung herausziehen. Es verbleiben lediglich Erwartungswerte von Produkten von Feldoperatoren mit n beziehungsweise $n-1$ Einträgen, und wir können folgern, daß $\omega\big([\hat\phi(f_y)\,,\,\hat\phi(g_1)\dots\hat\phi(g_n)]\big)$ linear in den Funktionen $g_1,\dots,g_n$ ist.

Für $n=1$ folgt daraus mit der Antisymmetrie des Kommutators auch die Linearität in f_y. Für $n>1$ folgt dies mit Hilfe der Gleichung

$$\begin{aligned}
&\omega\big([\hat\phi(f_y)\,,\,\hat\phi(g_1)\hat\phi(g_2)\dots\hat\phi(g_n)]\big)+\\
&\omega\big([\hat\phi(g_n)\,,\,\hat\phi(f_y)\hat\phi(g_1)\hat\phi(g_2)\dots\hat\phi(g_{n-1})]\big)+\\
&\omega\big([\hat\phi(g_{n-1})\,,\,\hat\phi(g_n)\hat\phi(f_y)\hat\phi(g_1)\hat\phi(g_2)\dots\hat\phi(g_{n-2})]\big)+\\
&\qquad\vdots\\
&\omega\big([\hat\phi(g_1)\,,\,\hat\phi(g_2)\dots\hat\phi(g_n)\hat\phi(f_y)]\big)=0\;.
\end{aligned}\tag{5.5.8}$$

Bei festgehaltenen $g_1,\dots,g_n$ sind alle bis auf den ersten Summanden linear in f_y. Folglich muß auch der erste Summand linear in f_y sein.

Wir haben somit gezeigt, daß die Vakuumerwartungswerte beliebiger Produkte von Feldoperatoren $\hat\phi(\cdot)$ linear in den Testfunktionen sind. Nach dem Rekonstruktionstheorem sind damit die Felder selbst linear. Die Vertauschungsrelationen für $\hat\phi$ lassen sich damit in der Form

$$\begin{aligned}
[\hat\phi(f)\,,\,\hat\phi(g)] &= -i\frac{d}{dt}\hat\phi\left(e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\Big|_{t=0}-i24\pi c_1\omega(f,g)\\
&= -i\hat\phi\left(\mathrm{D}_f g\right)-i24\pi c_1\omega(f,g)\;,
\end{aligned}\tag{5.5.9}$$

schreiben. Dies sind gerade die Vertauschungsrelationen der Virasoro-Algebra und wir wissen nach den bereits erwähnten Ergebnissen von Friedan, Qiu und Shenker [FQS85, FQS86] sowie Goddard, Kent und Olive [GO85, GO86, GKO86], daß reguläre Vakuumdarstellungen dieser Algebra genau dann existieren, wenn für c_1 die Bedingung

$$-24\pi c_1 = 1-\frac{6}{(m+2)(m+3)}\;,\qquad m\in\mathbb{N}\tag{5.5.10}$$

oder

$$-24\pi c_1\geq 1\tag{5.5.11}$$

erfüllt ist. ■

5.6 Zusammenfassung

Ausgehend von *qualitativen* Forderungen (Translationsinvarianz, Spektrumsbedingung, Clustereigenschaft und Regularität) an die interessanten Darstellungen der Quasi-Witt-Algebra konnten wir diese Darstellungen vollständig charakterisieren und eine Eins-zu-eins-Korrespondenz zu den Vakuumdarstellungen der Virasoro-Algebra herstellen. Bemerkenswert sind in diesem Zusammenhang insbesondere zwei Punkte:

- Das Auftreten der Schwinger-Terme ist mit unserem Formalismus als eine Folge von Regularitätsforderungen aufzufassen. Wie wir am Anfang dieses Kapitels gesehen haben, gibt es nichtreguläre Darstellungen der Quasi-Witt-Algebra, in denen diese Terme nicht auftreten.

- Obwohl wir lediglich die Translationsinvarianz des Zustandes gefordert haben, folgt, daß man in jeder regulären Vakuumdarstellung unserer Algebra durch Addition eines nichtlinearen c-Zahlterms zu linearen Feldern gelangt, die zudem *konform* invariant sind.

6 Abschließende Betrachtungen

Wir haben in der vorliegenden Arbeit am Beispiel der chiralen Energiedichte gesehen, daß es möglich und sinnvoll ist, den Wightmanschen Rahmen der Quantenfeldtheorie auf nichtlineare Felder auszudehnen.

Das von uns konstruierte Beispiel eines solchen nichtlinearen Feldes bestand dabei aus einem linearen Feld, zu dem ein nichtlineares Funktional addiert wurde. Diese Modifikation vereinfacht die algebraischen Eigenschaften der Feldoperatoren erheblich: Die algebraische Struktur dieser Felder enthält die zentrale Ladung nicht mehr. Wir konnten zeigen, daß die regulären Vakuumdarstellungen dieser Quasi-Witt-Algebra stets von der Gestalt sind, daß die Feldoperatoren aus einem linearen Virasoro-Anteil und einem nichtlinearen c-Zahlterm bestehen und haben mit dieser Betrachtungsweise das Auftreten von Schwinger-Terme in der Darstellungstheorie der Diffeomorphismengruppe als Folge von Regularitätsforderungen verstanden. Interessant ist nicht zuletzt auch das Auftreten der konformen Invarianz, da wir in unserem Rahmen a priori lediglich die Translationsinvarianz gefordert haben. In diesem Sinne erscheint der Zugang zu Diffeomorphismengruppen über die Quasi-Witt-Algebra viel natürlicher als der Zugang über die Virasoro-Algebra.

Diese Ergebnisse sind weit über das hier präsentierte Beispiel hinausgehend von Interesse und werfen interessante neue Fragestellungen auf:

1. Die Tatsache, daß – wie in in dieser Arbeit demonstriert – quasilineare Funktionale λ mit „angenehmen“ mathematischen Eigenschaften existieren, erlaubt unter Umständen die Konstruktion weiterer Beispiele von nichtlinearen Feldern, zum Beispiel freier Felder mit den Vertauschungsrelationen
$$\big[\phi(f)\,,\,\phi(g)\big] = i\lambda(f'g - fg') \cdot \mathbb{1} \,. \tag{6.0.1}$$

Derartige Felder lassen sich sicher *nicht* als Summe eines linearen Feldes und eines nichtlinearen c-Zahltermes darstellen. Es stellt sich die Frage, ob zu solchen Algebren physikalisch interessante Darstellungen existieren und wie diese aussehen.

2. Wir haben gesehen, daß durch Übergang von linearen zu nichtlinearen Feldern Schwinger-Terme in den Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren verschwinden. Dies deutet darauf hin, daß diese Felder ein besseres Ultraviolettverhalten haben, als die entsprechenden Wightman-Felder. Es scheint lohnend, diese Frage näher zu untersuchen.

3. Die mathematisch strenge Formulierung von Feldgleichungen muß im Rahmen der nichtlinearen Felder neu überdacht werden. Es ist im allgemeinen *nicht* davon auszugehen, daß

$$\Box_x \phi(f_x) = \phi(\Box_x f_x) \tag{6.0.2}$$

gilt. In diesem Kontext stellt sich unter anderem die Frage, wie der Übergang von nichtlinearen Feldern zu punktartig lokalisierten Feldern zu geschehen hat. Unter Umständen werfen Untersuchungen dieses Sachverhalts im Rahmen der nichtlinearen Felder auch neues Licht auf bereits bekannte Konzepte wie z.B. der normalgeordneten Produkte.

Anhang

A
Ergänzungen

A.1 Zentrale Erweiterungen von Lie-Algebren

Die folgende kurze Einführung in die Theorie der zentralen Erweiterungen von Lie-Algebren lehnt sich im Wesentlichen an das Vorlesungsskript von M. Schlottenloher [Sch95] an.

Es sei im folgenden $\mathfrak{a}$ eine abelsche Lie-Algebra, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ seien Lie-Algebren. Alle Lie-Algebren seien Algebren über einen gemeinsamen Körper $\mathbb{K}$.

Definition A.1. Eine exakte Sequenz von Lie-Algebra-Homomorphismen

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\}$$

(exakt heißt: Das Bild jeder Abbildung ist gleich dem Kern der nachfolgenden Abbildung, also ι injektiv, $\operatorname{Im}\iota = \operatorname{Ker}\pi$, π surjektiv) heißt **Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$**. Eine Erweiterung heißt **zentral**, falls $\operatorname{Im}\iota \subset \operatorname{cent}\mathfrak{h}$.

Definition A.2. Eine exakte Sequenz von Lie-Algebra-Homomorphismen

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\}$$

spaltet, falls es einen Lie-Algebra-Homomorphismus $\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ mit $\pi \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ gibt. Der Homomorphismus β heißt **Spaltung** der Sequenz.

Definition A.3. Eine zentrale Erweiterung einer Lie-Algebra heißt **trivial**, wenn es einen

Lie-Algebra-Isomorphismus $\psi : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{h} \arrow[dr, "\pi"] & & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr] & & \mathfrak{g} \arrow[r] & \{0\} \\
 & & \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g} \arrow[uu, "\psi"'] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Satz A.4. *Eine zentrale Erweiterung einer Lie-Algebra ist genau dann trivial, falls sie spaltet.*

Satz A.5. *Zu einer zentralen Erweiterung*

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathfrak{h} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\}$$

gibt es stets einen Vektorraum-Homomorphismus $\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ mit $\pi \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Die Abbildung $\omega(g_1, g_2) = \big[\beta(g_1)\,,\,\beta(g_2)\big] - \beta\big(\big[g_1\,,\,g_2\big]\big)$ hat folgende Eigenschaften:

1. *$\omega \;:\; \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Im}\,\iota$ ist bilinear und antisymmetrisch.*
2. *ω erfüllt die Jakobi-Eigenschaft, d.h. es gilt stets*

$$\omega\big(g_1, \big[g_2\,,\,g_3\big]\big) + \omega\big(g_3, \big[g_1\,,\,g_2\big]\big) + \omega\big(g_2, \big[g_3\,,\,g_1\big]\big) = 0\ .$$

3. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \psi \;:\; \mathfrak{a} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ (a, g) & \longmapsto & \psi(a, g) = \iota(a) + \beta(g) \end{array}$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Für zwei beliebige $h, h' \in \mathfrak{h}$ mit $h = \iota(a) + \beta(g)$ und $h' = \iota(a') + \beta(g')$ gilt

$$\big[h\,,\,h'\big] = \big[\beta(g) + \iota(a)\,,\,\beta(g') + \iota(a')\big] = \beta\big(\big[g\,,\,g'\big]\big) + \omega(g, g')\ .$$

In der physikalischen Literatur werden die Abbildung ι und β in der Notation meist unterdrückt und die Elemente aus einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und ihrer zentralen Erweiterung $\mathfrak{h}$ direkt miteinander identifiziert. In diesem Sinne gewinnt man eine triviale zentrale Erweiterung einer Algebra durch $\mathbb{C}$, in dem man nach Definition A.3 zu Elementen der Algebra $\mathfrak{g}$ formal komplexe Zahlen addiert. Satz A.4 stellt dann sicher, daß diese formale Addition zusammen mit der Identifikation der Elemente aus $\mathfrak{h}$ mit Elementen aus $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}$ die Lie-Klammer geeignet respektiert.

In der vorliegenden Arbeit werden Algebren behandelt, die von Elementen der Form $\theta(f)$ mit Testfunktionen f erzeugt werden. Handelt es sich bei einer solchen Algebra um eine zentrale Erweiterung einer anderen Algebra, die von Elementen $\phi(f)$ erzeugt wird, so lassen sich nach Satz A.5 die Vertauschungsrelationen in der Form

$$\big[\theta(f)\,,\,\theta(g)\big] = \theta(K(f,g)) + \omega(f,g) \tag{A.1.1}$$

schreiben, wenn die Elemente ϕ die Vertauschungsrelationen

$$\big[\phi(f)\,,\,\phi(g)\big] = \phi(K(f,g)) \tag{A.1.2}$$

erfüllen. Der sogenannte zentrale Term $\omega(f,g)$ ist dabei gerade durch Satz A.5 über

$$\omega(f,g) = \omega(\phi(f),\phi(g)) \tag{A.1.3}$$

gegeben und $\theta(K(f,g))$ wird mit $\beta(\phi(K(f,g)))$ identifiziert. Eine zentrale Erweiterung ist genau dann trivial, wenn sich ω in der Form

$$\omega(f,g) = \lambda(K(f,g)) \tag{A.1.4}$$

mit einer linearen Abbildung λ schreiben läßt.

A.2 Erweiterung des quasilinearen Funktionals auf $\mathscr{S}$

In diesem Abschnitt werden wir das quasilineare Funktional λ aus Kapitel 3 auf Schwartz-Funktionen ausdehnen. Dazu beweisen wir zunächst ein Analogon zu Lemma 3.8 und können dann entsprechend zu Satz 3.9 die Existenz des Funktionals folgern.

Lemma A.6. Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, dann existiert die Abbildung

$$t \longmapsto L_f(t) = \int dx\; f''(x)\chi\left(t|f(x)|\right)\;,$$

und es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}|L_f(t)| \leq C\bigg[&\Big(\|f^{(4)}\|_\infty + \|f'''\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty\Big)^{1/2}\cdot\Big(2 + (t\|f\|_{4,0})^{1/4}\Big)\cdot t^{-1/2} + \\ &\Big(\|f\|_{4,2} + \|f\|_{4,1} + \|f\|_{4,0}\Big)\|f\|_{4,0}^{-3/4}\cdot t^{-3/4}\bigg]\;.\end{aligned}$$

mit einer universellen, d.h. von f und t unabhängigen Konstanten C.

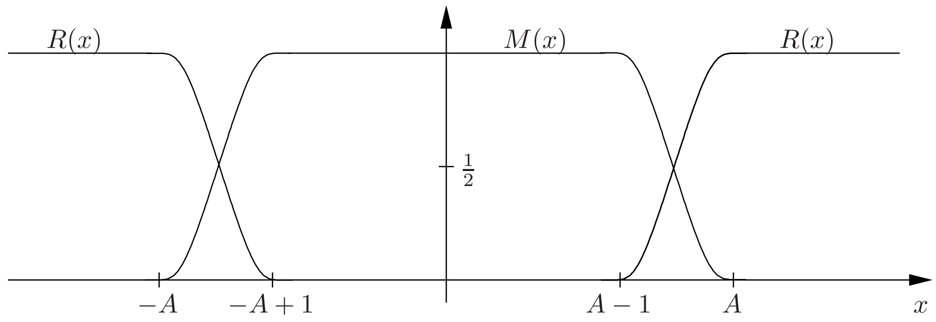

Abbildung A.1: Teilung der Eins

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} T \ : \ \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \quad \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \phi(1-x)} \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

mit

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{A.2.2}$$

Die Funktion T ist unendlich oft differenzierbar, und hat die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} T(x) = 0, &\quad \text{falls } x \leq 0 \\ T(x) = 1, &\quad \text{falls } x \geq 1 \\ 0 \leq T(x) \leq 1, &\quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\ . \end{aligned} \tag{A.2.3}$$

Das Maximum der i-ten Ableitung von T bezeichnen wir mit

$$t_i = \max_{x \in \mathbb{R}} |T^{(i)}(x)|\ . \tag{A.2.4}$$

Für zunächst beliebiges $p \in \mathbb{N}, p > 1$ definieren wir

$$A = \Big(t \cdot \|f\|_{p,0}\Big)^{1/p} + 1\ . \tag{A.2.5}$$

Die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} R(x) &= T(-x - A + 1) + T(x - A + 1) \\ M(x) &= T(x + A) \cdot T(A - x) \end{aligned} \tag{A.2.6}$$

bilden eine Teilung der Eins mit (siehe dazu Abbildung A.1)

$$
\begin{aligned}
M + R &= 1 \ , \\
0 \leq M(x) &\leq 1 \ , \\
M(x) = 1 \text{ für } |x| &\leq A - 1 \ , \\
M(x) = 0 \text{ für } |x| &\geq A \ , \\
0 \leq R(x) &\leq 1 \ , \\
R(x) = 0 \text{ für } |x| &\leq A - 1 \ , \\
R(x) = 1 \text{ für } |x| &\geq A \ .
\end{aligned} \tag{A.2.7}
$$

Wir zerlegen die Integration mit Hilfe dieser Teilung der Eins in zwei Teile. Den Beitrag zum Integral mit $|x| > A - 1$ können wir mit dem Abfallverhalten der Funktion f'' für große x abschätzen, und im mittleren Teil werden wir Lemma 3.8 anwenden:

Für $|x| \geq A - 1$ gilt die Abschätzung

$$
|f(x)| \leq \frac{\|f\|_{p,0}}{1 + |x|^p} \leq \frac{\|f\|_{p,0}}{1 + (A-1)^p} = \frac{\|f\|_{p,0}}{1 + t\|f\|_{p,0}} \leq \frac{1}{t} \ , \tag{A.2.8}
$$

und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
|L_f(t)| &= |\int\limits_{|f(x)| \leq 1/t} dx \ f''(x)| = |\int\limits_{-\infty}^{-A} dx \ f''(x) + \int\limits_{\substack{-A \\ |f(x)| \leq 1/t}}^{A} dx \ f''(x) + \int\limits_{A}^{\infty} dx \ f''(x)| \\
&\leq \int\limits_{-\infty}^{-A+1} dx \ |(fR)''(x)| + \int\limits_{A-1}^{\infty} dx \ |(fR)''(x)| + |\int\limits_{\substack{-A \\ |f(x)| \leq 1/t}}^{A} dx \ (fM)''(x)| \\
&= \int\limits_{-\infty}^{-A+1} dx \ |(fR)''(x)| + \int\limits_{A-1}^{\infty} dx \ |(fR)''(x)| + |\int\limits_{|(fM)(x)| \leq 1/t} dx \ (fM)''(x)| \ .
\end{aligned} \tag{A.2.9}
$$

Für die Randanteile von $|L_f(t)|$ finden wir auf Grund der Abschätzung

$$
|f^{(q)}(x)| \leq \frac{\|f\|_{p,q}}{1 + |x|^p} \tag{A.2.10}
$$

die obere Schranke

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{A-1}^{\infty} dx \ |(fR)''(x)| &\leq \int\limits_{A-1}^{\infty} dx \ |(f''R)(x)| + 2\int\limits_{A-1}^{\infty} dx \ |(f'R')(x)| + \int\limits_{A-1}^{\infty} dx \ |(fR'')(x)| \\
&\leq \Big(\|f\|_{p,2} + 2T_1\|f\|_{p,1} + T_2\|f\|_{p,0}\Big)\frac{|A-1|^{1-p}}{p-1} \\
&= \Big(\|f\|_{p,2} + 2T_1\|f\|_{p,1} + T_2\|f\|_{p,0}\Big)\frac{(t\|f\|_{p,0}))^{\frac{1-p}{p}}}{p-1}
\end{aligned} \tag{A.2.11}
$$

und die gleiche Schranke für

$$\int_{-\infty}^{-A+1} dx\ |(fR'')(x)|\ . \tag{A.2.12}$$

Da fM eine Funktion mit kompaktem Träger ist, können wir auf den mittleren Teil das Lemma 3.8 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} |\int_{|(fM)(x)|\le 1/t} dx\ (fM)''(x)| &\le 40\|(fM)^{(4)}\|_\infty^{1/2} A t^{-1/2} \\ &= 40\|(fM)^{(4)}\|_\infty^{1/2} t^{-1/2}\left((1+t\|f\|_{p,0})^{1/p}+1\right) \\ &\le^1 40\left(\|f^{(4)}\|_\infty + 4T_1\|f'''\|_\infty + 6T_2\|f''\|_\infty + 4T_3\|f'\|_\infty + T_4\|f\|_\infty\right)^{1/2} \\ &\qquad t^{-1/2}\left(2+(t\|f\|_{p,0})^{1/p}\right)\ . \end{aligned} \tag{A.2.13}$$

Setzen wir nun $p=4$, so folgt

$$\begin{aligned} |L_f(t)| \le C\Bigg[&\left(\|f^{(4)}\|_\infty + \|f'''\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty\right)^{1/2} \cdot \frac{2+(t\|f\|_{4,0})^{1/4}}{t^{1/2}} \\ &+ \left(\|f\|_{4,2} + \|f\|_{4,1} + \|f\|_{4,0}\right)\|f\|_{4,0}^{-3/4} t^{-3/4}\Bigg]\ , \end{aligned} \tag{A.2.14}$$

wobei C eine von f und t unabhängige Konstante ist. ■

Satz A.7. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \lambda\ :\ \mathscr{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \lambda(f) = \int_0^\infty \frac{-dt}{t} \int_{-\infty}^\infty dx\ f''(x)\chi\left(t|f(x)|\right) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, und es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\lambda(f)| \le C\Bigg[&8\left(\|f^{(4)}\|_\infty + \|f'''\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty\right)^{1/2}\|f\|_{4,0}^{1/2} \\ &+ \frac{4}{3}\left(\|f\|_{4,2} + \|f\|_{4,1} + \|f\|_{4,0}\right)\Bigg]\ . \end{aligned}$$

Beweis: Wie schon beim Beweis von Satz 3.9 gilt auch hier wieder

$$L_f(t) = \int_{-\infty}^\infty dx\ f''(x)\chi\left(t|f(x)|\right) = 0\ , \qquad \text{falls} \quad t < \frac{1}{\|f\|_\infty}\ . \tag{A.2.15}$$

---

[1] Es gilt $(1+x)^p \le 1 + x^p$ für $0 \le p \le 1$ und $x \ge 0$.

Für große t fällt $L_f(t)$ wenigstens wie $t^{-1/4}$ ab. Somit ist $\lambda(f)$ für jede Schwartz-Funktion f erklärt. Zur Abkürzung setzen wir

$$A = \Big(\|f^{(4)}\|_\infty + \|f'''\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \Big)^{1/2} \tag{A.2.16}$$

$$B = \Big(\|f\|_{4,2} + \|f\|_{4,1} + \|f\|_{4,0} \Big) \|f\|_{4,0}^{-3/4} \;. \tag{A.2.17}$$

Aus dem vorangehenden Lemma erhalten wir damit

$$|\lambda(f)| = |\int\limits_{\|f\|_\infty^{-1}}^{\infty} \frac{dt}{t} L_f(t)| \leq CA \int\limits_{\|f\|_\infty^{-1}}^{\infty} dt\ \frac{2 + (t\|f\|_{4,0})^{1/4}}{t^{3/2}} + CB \int\limits_{\|f\|_\infty^{-1}}^{\infty} dt\ \frac{1}{t^{7/4}} \;, \tag{A.2.18}$$

woraus sich die gesuchte Abschätzung durch direkte Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}
|\lambda(f)| &\leq CA\|f\|_{4,0}^{1/2} \int\limits_{\|f\|_{4,0}/\|f\|_\infty}^{\infty} dt\ \frac{2 + t^{1/4}}{t^{3/2}} + \frac{4}{3} CB \|f\|_\infty^{3/4} \\
&\leq CA\|f\|_{4,0}^{1/2} \int\limits_{\|f\|_{4,0}/\|f\|_\infty}^{\infty} dt\ \left(\frac{2}{t^{3/2}} + \frac{1}{t^{5/4}} \right) + \frac{4}{3} CB \|f\|_\infty^{3/4} \\
&= CA \left(4\|f\|_\infty^{1/2} + 4\Big(\|f\|_\infty \cdot \|f\|_{4,0} \Big)^{1/4} \right) + \frac{4}{3} CB \|f\|_\infty^{3/4} \\
&\leq^2 C \Bigg[8\Big(\|f^{(4)}\|_\infty + \|f'''\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \Big)^{1/2} \|f\|_{4,0}^{1/2} \\
&\qquad + \frac{4}{3}\Big(\|f\|_{4,2} + \|f\|_{4,1} + \|f\|_{4,0} \Big) \Bigg] \;.
\end{aligned} \tag{A.2.19}$$

■

A.3 Invarianz des Funktionals unter Möbius-Transformationen

Wir möchten an dieser Stelle die singulären Lösungen aus Abschnitt 3.2.5 für mögliche Transformationen, die das Funktional λ invariant lassen, näher diskutieren.

Wie bereits dargelegt wurde, sind dies Transformationen der Form

$$\begin{aligned} f &\longmapsto f^\star \\ f^\star(x) &= \frac{1}{\psi'(x)} f(\psi(x)) \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

mit

$$\psi'(x) = (cx + d)^{-2} \;. \tag{A.3.2}$$

[2] Es gilt $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{4,0}$

Die Funktion ψ läßt sich durch eine einfache Integration bestimmen, und man sieht, daß die zugehörige Transformation gerade von der Form

$$f^\star(x) = (cx+d)^2 \cdot f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \quad \text{mit} \quad ad - bc = 1 \tag{A.3.3}$$

ist. Offensichtlich hat $f^\star$ nur dann kompakten Träger, falls

$$\frac{a}{c} \notin \operatorname{supp}(f)\ . \tag{A.3.4}$$

Diese Einschränkung ist in der Tat notwendig, um die Existenz von $\lambda(f^\star)$ sicherzustellen: Für die zweite Ableitung von $f^\star$ ergibt sich

$$f^{\star\prime\prime}(x) = \frac{1}{(cx+d)^2} f''(\cdot) + \frac{2c}{cx+d} f'(\cdot) + 2c^2 f(\cdot)\ . \tag{A.3.5}$$

Für $(\cdot)$ ist jeweils die transformierte Stelle x einzusetzen. Während die ersten beiden Terme wenigstens noch wie Potenzen von x abfallen, konvergiert der 3. Term für $|x| \to \infty$ gegen $2c^2 f(a/c)$ und liefert einen divergenten Anteil zu $\lambda(f^\star)$, falls $f(a/c) \neq 0$. Eventuell ist es ausreichend zu fordern, daß $f(a/c) = 0$ ist, wir wollen uns jedoch der Einfachheit halber auf den Fall beschränken, daß a/c außerhalb des Trägers von f liegt.

Diese Überlegungen zeigen, daß das Funktional nicht global invariant unter Möbius-Transformationen ist. Trotzdem gilt die Invarianz unter „lokalen Transformationen“ im Sinne des folgenden Satzes. Wir möchten jedoch ausdrücklich betonen, daß die Menge der „erlaubten“ Funktionen hierbei *nicht* invariant unter den beschriebenen Transformationen ist.

Satz A.8. *Sei $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} ad - bc &= 1 \\ \frac{a}{c} &\notin \operatorname{supp}(f)\ , \end{aligned}$$

dann gilt

$$\lambda(f) = \lambda(f^\star)$$

mit

$$f^\star(x) = (cx+d)^2 \cdot f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)\ .$$

Beweis: Wir betrachten zunächst nur Funktionen f der Form

$$f(x) = p(x) \cdot h(x)\ , \tag{A.3.6}$$

wobei p ein Polynom ist, und h eine Hut-Funktion[3], so daß

$$\{x \mid p(x) = 0\} \subset \{x \mid h(x) = 1\}\ . \tag{A.3.7}$$

[3] Unter einer Hut-Funktion h wollen wir eine glatte Funktionen verstehen, für die gilt $0 \le h(x) \le 1$. Weiterhin sei $h(x) = 1$ genau dann, wenn $|x| \le c$. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist die Funktion $M(x)$ aus Anhang A.2 (vgl. Abbildung A.1).

Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{P}$. Da sich $\ln(|x|^n)$ in einer Umgebung von Null integrieren läßt, existiert für solche Funktionen f das Integral

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f''(x) \ln\left(f^2(x)\right) \tag{A.3.8}$$

und es gilt analog zu der Rechnung in Abschnitt 3.2.5

$$\lambda(f) = \lambda(f^\star) \; . \tag{A.3.9}$$

Sei nun $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ eine beliebige Funktion. Da die Menge $\mathscr{P}$ dicht in $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ liegt, können wir eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{P}$ wählen, die zum einen gegen f konvergiert, und zum anderen die Eigenschaft hat, daß der Träger von f_n stets einen Mindestabstand zu a/c hat, das heißt

$$\exists \delta > 0 \; : \; |\frac{a}{c} - x| \geq \delta \quad \forall x \in \mathrm{supp}(f_n), n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathrm{supp}(f) \; . \tag{A.3.10}$$

Da der Träger von f kompakt ist, können wir weiterhin fordern, daß die Träger von f_n und f alle in einem Intervall $[-A, A]$ enthalten sind.

Wir betrachten nun die Funktionenfolge

$$g_n = f_n - f \; . \tag{A.3.11}$$

Die Folge g_n konvergiert in der Schwartz-Topologie gegen Null. Wir müssen sicherstellen, daß auch die Folge $g_n^\star$ in dieser Topologie gegen Null konvergiert.

Die q-te Ableitung von $g_n^\star$ läßt sich in der Form

$$g_n^{\star\,(q)}(x) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_{q,i} \; c^{q-i} \; \frac{1}{(cx+d)^{q+i-2}} \; g_n^{(i)}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \tag{A.3.12}$$

schreiben, wobei die Zahlen $\alpha_{q,i}$ lediglich kombinatorische Faktoren sind, die nicht von der Funktion g_n abhängen.

Wir betrachten nun eine Stelle x, so daß der Punkt

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{A.3.13}$$

im Träger von g_n liegt. Dann gilt

$$cx + d = \frac{-1}{cy - a} \; , \tag{A.3.14}$$

und wir finden aufgrund der Eigenschaft (A.3.10) die Abschätzung

$$|cx + d| = \frac{1}{|c| \; |y - a/c|} \leq \frac{1}{\delta |c|} \; . \tag{A.3.15}$$

Da der Träger der g_n per Konstruktion im Intervall $[-A, A]$ liegt, gilt außerdem

$$\frac{1}{|cx+d|} = |cy - a| \leq |cA| + |a| \; . \tag{A.3.16}$$

Es gibt somit eine von n unabhängige Konstante $K \neq 0$, so daß für beliebige $j \in \mathbb{Z}$ gilt

$$|(cx+d)^j| \leq K^j \ , \quad \text{falls} \quad \frac{ax+b}{cx+d} \in \operatorname{supp} g_n \ . \tag{A.3.17}$$

Damit finden wir eine geeignete Abschätzung für die Schwartz-Norm:

$$\|g_n^\star\|_{p,q} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big((1+|x|^p)\,|g_n^\star(x)| \Big) \leq \sum_{i=0}^{q} \frac{\alpha_{q,i}\ c^{q-i}}{K^{q+i-2}}\ \|g_n\|_{p,i} \ . \tag{A.3.18}$$

Da g_n in der Schwartz-Norm gegen Null konvergiert, konvergiert demnach auch $g_n^\star$ gegen Null, und wir erhalten wegen der Stetigkeit von λ:

$$\lambda(f) = \lim_{n\to\infty} \lambda(f_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(f_n^\star) = \lambda(f^\star) \ . \tag{A.3.19}$$

■

B
Ein Gegenbeispiel

B.1 Stromalgebren

Wir wollen eine weitere Klasse von Algebren, die sogenannten Stromalgebren betrachten, die auf den ersten Blick eine formal ähnliche Struktur wie die Virasoro-Algebra besitzen. Es wird sich jedoch herausstellen, daß sich bei diesen Algebren – im Gegensatz zur Virasoro-Algebra – der zentrale Term in der adjungierten Wirkung der exponenzierten Felder nicht durch Hinzufügen eines Phasenfaktors eliminieren läßt.

Man betrachte in 1+1 Dimensionen eine Theorie mit N komplexen Fermi-Feldern ψ_i mit den Antivertauschungsrelationen

$$\left\{\psi_i^*(x)\,,\,\psi_j(y)\right\} = \delta_{ij}\delta(x-y)\ , \qquad i,j = 1,\ldots,N\ . \tag{B.1.1}$$

Diese Theorie besitzt eine (globale und lokale) $U(N)$-Symmetrie

$$\psi_i \to \psi_i' = g_{ij}\psi_j\ , \qquad g \in U(N)\ . \tag{B.1.2}$$

Die Erzeuger dieser Symmetrie [Reh98, FST89] sind die Ströme

$$j^a = T^a_{ij} : \psi_i\psi_j^* :\ . \tag{B.1.3}$$

Dabei sind $T^a,\ a = 0,\ldots,N^2-1$ die Erzeuger der Lie-Algebra $u(N)$.

Zerlegt man die Lie-Algebra $u(N)$ gemäß

$$u(N) = u(1) \oplus su(N) \tag{B.1.4}$$

und wählt eine Basis $T^a,\ a = 1, \dots, N^2 - 1$, mit den Strukturkonstanten $f^{ab}{}_c$, also

$$\left[T^a\,,\,T^b\right] = i f^{ab}{}_c T^c\ , \tag{B.1.5}$$

so ergeben sich für die Ströme j^0 und $j^a,\ a = 1, \dots, N^2 - 1$, die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\left[j^a(x)\,,\,j^b(y)\right] = i f^{ab}{}_c j^c(y)\delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} g^{ab}\delta'(x-y)\ , \tag{B.1.6a}$$

$$\left[j^0(x)\,,\,j^0(y)\right] = \frac{i}{2\pi}\delta'(x-y)\ , \tag{B.1.6b}$$

$$\left[j^0(x)\,,\,j^a(y)\right] = 0 \tag{B.1.6c}$$

mit der Cartan-Metrik

$$g^{ab} = -\frac{1}{2N} f^{at}{}_s f^{bs}{}_t\ . \tag{B.1.7}$$

Die $U(1)$- und die $SU(N)$-Ströme können somit als unabhängige Modelle angesehen werden. Im folgenden werden wir uns auf die $SU(N)$-Ströme beschränken.

Wie schon bei der Virasoro-Algebra verschmieren wir die Ströme $j^a(x)$ zunächst mit geeigneten Testfunktionen

$$j^a(f) = \int dx\ j^a(x) f(x) \tag{B.1.8}$$

und berechnen die Kommutatoren der verschmierten Ströme:

$$\begin{aligned}\left[j^a(f)\,,\,j^b(g)\right] &= \int dx dx'\ f(x)g(x')i\left\{f^{ab}{}_c j^c(x')\delta(x-x') + \frac{1}{2\pi}g^{ab}\delta'(x-x')\right\} \\ &= i f^{ab}{}_c j^c(fg) + \frac{i}{2\pi} g^{ab}\int dx\ f(x)g'(x)\ .\end{aligned} \tag{B.1.9}$$

Zur Vereinfachung der Notation (die Bezeichnungen sind so gewählt, daß die Vertauschungsrelationen formal mit denen der Virasoro-Algebra übereinstimmen) definiert man[1]

$$\underline{f} = (f_1, \dots, f_{N^2-1})\ , \tag{B.1.10a}$$

$$j(\underline{f}) = \sum_{a=1}^{N^2-1} j^a(f_a)\ , \tag{B.1.10b}$$

$$\mathrm{D}_{\underline{f}}\underline{g} = -\left(f^{ab}{}_d f_a g_b\right)_{d=1,\dots,N^2-1}\ , \tag{B.1.10c}$$

$$\omega(\underline{f}, \underline{g}) = \frac{1}{2\pi}\int dx\ g^{ab} f_a(x) g_b'(x) \tag{B.1.10d}$$

und schreibt die Vertauschungsrelationen in der Form

$$\left[j(\underline{f})\,,\,j(\underline{g})\right] = -ij\left(\mathrm{D}_{\underline{f}}\underline{g}\right) + i\omega(\underline{f}, \underline{g})\ . \tag{B.1.11}$$

[1] $\underline{f}$ wird hier als ein (N^2-1)-Tupel von Testfunktionen aufgefaßt. Da eine feste Basis $\{T^a\}$ für $su(N)$ gewählt wurde, kann man $\underline{f}$ natürlich auch als eine Funktion mit Werten in $su(N)$ ansehen.

Ganz analog zu der bei der Virasoro-Algebra durchgeführten Rechnung erhält man hier für die exponenzierten Ströme

$$W(\underline{f}) = e^{ij(\underline{f})} \tag{B.1.12}$$

die adjungierte Wirkung[2]

$$W(\underline{f})W(\underline{g})W(\underline{f})^{-1} = W\left(e^{\mathrm{D}_{\underline{f}}}\underline{g}\right)\exp\left(-i\int_0^1 dt\ \omega\left(\underline{f}, e^{t\mathrm{D}_{\underline{f}}}\underline{g}\right)\right) \ . \tag{B.1.13}$$

Aufgrund der Ergebnisse bei der Virasoro-Algebra und der formalen Ähnlichkeit der Gleichungen (B.1.13) und (2.1.9) stellt sich die Frage, ob es auch hier möglich ist, durch Umdefinition der Operatoren $W(\underline{f})$ gemäß

$$\tilde{W}(\underline{f}) = e^{i\lambda(\underline{f})}W(\underline{f}) \tag{B.1.14}$$

zu erreichen, daß der Phasenfaktor in Gleichung (B.1.13) verschwindet. Wie sich im folgenden Abschnitt herausstellen wird, ist dies jedoch nicht möglich.

B.2 No-Go Theorem

Satz B.1. *Sei $\mathcal{V}$ ein reeller oder komplexer Vektorraum, $\mathfrak{A}$ eine Algebra und $W : \mathcal{V} \to \mathfrak{A}$ eine Abbildung. Für jedes $f \in \mathcal{V}$ sei eine lineare und exponenzierbare Abbildung $\mathrm{D}_f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ und eine bilineare Abbildung $\omega : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ erklärt, so daß die Abbildung $[0,1] \ni t \mapsto \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f}g\right)$ integrierbar ist. Es gelte*

$$W(f)W(g)W(f)^{-1} = W\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right)\exp\left(-i\int_0^1 dt\ \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\right) \ .$$

Desweiteren gebe es ein Paar $f, g \in \mathcal{V}$ mit $\mathrm{D}_f g = 0$ und $\omega(f,g) \neq 0$.

Dann gibt es keine *Abbildung $\lambda : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$, so daß für*

$$\tilde{W}(f) = e^{i\lambda(f)}W(f)$$

gilt:

$$\tilde{W}(f)\tilde{W}(g)\tilde{W}(f)^{-1} = \tilde{W}\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right) \ .$$

[2] Im Gegensatz zu Abschnitt 2.1 ist hier die Bedeutung von $e^{\mathrm{D}_{\underline{f}}}$ klar, da es sich schlicht um eine Matrix-Exponentialfunktion handelt.

Beweis: Annahme: Es gibt doch ein λ mit der genannten Eigenschaft. Per Definition gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{W}(f)\tilde{W}(g)\tilde{W}(f)^{-1} &= W(f)W(g)W(f)^{-1}e^{i\lambda(g)} \\
&= W\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right)\exp\left(i\Big(\lambda(g) - \int_0^1 dt\ \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\Big)\right) \\
&= \tilde{W}\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right)\exp\left(i\Big(\lambda(g) - \lambda\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right) - \int_0^1 dt\ \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f}g\right)\Big)\right) \ .
\end{aligned} \tag{B.2.1}$$

Das Funktional λ erfüllt also die Gleichung

$$\lambda(g) - \lambda\left(e^{\mathrm{D}_f}g\right) - \int_0^1 dt\ \omega\left(f, e^{t\mathrm{D}_f}g\right) = 2\pi n \qquad ; \quad n \in \mathbb{Z} \tag{B.2.2}$$

für beliebige f und g. Wir wählen nun f und g, so daß $\mathrm{D}_f g = 0$ und $\omega(f,g) \neq 0$. Falls $\mathrm{D}_f g = 0$ ist, so gilt $e^{t\mathrm{D}_f}g = g$ und Gleichung (B.2.2) wird zu

$$\omega(f,g) = 2\pi n \tag{B.2.3}$$

Diese Gleichung ist nur dann mit der Linearität von ω verträglich, falls $\omega(f,g) = 2\pi n = 0$ ist. Dies stellt jedoch einen Widerspruch zur Annahme dar. ■

Für die Virasoro-Algebra sind die Voraussetzungen dieses Satzes offensichtlich nicht erfüllt:

Seien f und g zwei Funktionen mit

$$\mathrm{D}_f g = 0 \ . \tag{B.2.4}$$

Aus der Definition von D_f (2.1.3) ergibt sich daraus

$$f' = fg'/g \ ,$$

und die Funktionen f und g können sich nur durch einen konstanten Faktor α mit $f = \alpha g$ unterscheiden. Mit der Definition von ω rechnet man direkt

$$\omega(f,g) = \frac{c\alpha}{24\pi}\int dx\ g'''(x)g(x) = 0$$

nach.

Im Gegensatz dazu lassen sich bei den Stromalgebren geeignete Elemente $\underline{a}$ und $\underline{b}$ mit $\mathrm{D}_{\underline{a}}\underline{b} = 0$ und $\omega(\underline{a},\underline{b}) \neq 0$ explizit konstruieren:.

Sei f eine (nicht konstante) Funktion. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\underline{a} &= (f', 0, \ldots, 0) \\
\underline{b} &= (f\ \ , 0, \ldots, 0) \ .
\end{aligned} \tag{B.2.5}$$

Da $f^{\mu\nu}{}_{\kappa}$ antisymmetrisch unter Vertauschung der oberen beiden Indizes ist, gilt

$$\left(\mathrm{D}_{\underline{a}}\underline{b}\right)_{\kappa} = -f^{\mu\nu}{}_{\kappa} a_\mu b_\nu = -f^{11}{}_{\kappa} f' f = 0 \ . \tag{B.2.6}$$

Andererseits ist

$$\omega(\underline{a}, \underline{b}) = \int dx \ g^{\mu\nu} a_\mu(x) b'_\nu(x) = g^{11} \int dx \left(f'(x)\right)^2 \ . \tag{B.2.7}$$

Nach [Ham62] und [Wyb74] gilt für halbeinfache Lie-Algebren stets $\det g \neq 0$. Da g eine symmetrische reelle Matrix ist, kann man eine Basis für die Lie-Algebra finden, so daß g diagonal ist, und alle Diagonalelemente ungleich Null sind.

Nach Satz B.1 kann man hier also im Gegensatz zu der Virasoro-Algebra kein Funktional λ finden, so daß der zentrale Term in der Wirkung der Operatoren $W(\underline{f})$ (B.1.13) verschwindet.

Notations- und Symbolverzeichnis

Die Fouriertransformation wird in dieser Arbeit mit der Konvention

$$\tilde{f}(\vec{p}) = (2\pi)^{-s/2} \int d^s x \; e^{-i\vec{p}\vec{x}} f(\vec{x})$$

verwendet. Das Faltungsprodukt zweier Funktionen wird durch

$$(f \star g)(\vec{x}) = \int d^s y \; f(\vec{x} - \vec{y}) g(\vec{y})$$

definiert. Mit dieser Konvention schreibt sich der Faltungssatz in der Form

$$(f \star g)^{\sim} = (2\pi)^{s/2} \tilde{f} \tilde{g} \; .$$

Mengenbezeichnungen		
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$	Raum der Schwartz-Funktionen auf $\mathbb{R}^n$	
$\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$	Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$	
$\mathscr{C}^k_0(\mathbb{R}^n)$	Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$	
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	
$\mathbb{R}^+$	Positive reelle Achse $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	
$\mathbb{R}^+_0$	Nicht negative reelle Achse $\mathbb{R}^+_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	
$\mathcal{S}^1$	Die 1-Sphäre $\{z \in \mathbb{C} \; : \; \lvert z \rvert = 1\}$	

Sonstiges		
$\mathrm{supp}(f)$	Träger der Funktion f	
$\lVert\cdot\rVert_{p,q}$	Schwartz-Normen auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$	Gl. (3.2.1)
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	Supremumsnorm	
$\#M$	Mächtigkeit der Menge M	
id_M	Identitätsabbildung auf der Menge M	

$\mathbb{1}$	Eins-Operator auf einem Vektorraum	
$\operatorname{Im}\psi$	Bild einer Abbildung ψ	
$\operatorname{Ker}\psi$	Kern einer Abbildung ψ	
$\operatorname{cent}\mathfrak{A}$	Zentrum einer Algebra $\mathfrak{A}$	

In der QFT gebräuchliche Symbole

$\mathcal{O}$	Ein Gebiet der Raumzeit	
$[\cdot\,,\,\cdot]$	Kommutator	
$\{\cdot\,,\,\cdot\}$	Antikommutator	
$:\cdot:$	normalgeordnetes Produkt	
$\omega(\cdot)$	Zustand	
$\mathcal{W}, \mathcal{V}$	Wightman-Funktionale	Kap. 4.2

Spezielle Bezeichnungen in dieser Arbeit

$\omega\,(f, g)$	Gelfand-Fuks-Kozykel	Gl. (2.1.4)
$\mathrm{D}_f g$	Lie-Ableitung von g bezüglich f	Gl. (2.1.3)
$\phi_f(t, x)$	Der mit $e^{t\mathrm{D}_f}$ verknüpfte Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$	Kap. 2.2
$\chi(\cdot)$	charakteristische Funktion des Intervalls $[0, 1]$	Gl. (3.1.1)
$N_t(f)$	Menge der regulären Häufungspunkte von t-Stellen der Funktion f	Lemma 3.3

Literaturverzeichnis

[BMPT89] D. Buchholz, G. Mack, R. R. Paunov und I. T. Todorov: An algebraic approach to the classification of local conformal quantum field theories. In *IXth International Congress on Mathematical Physics, Swansea (Wales), 1988*, herausgegeben von B. Simon et al., S. 299–305. Adam Hilger, 1989.

[BMT88a] D. Buchholz, G. Mack und I. T. Todorov: The current algebra on the circle as a germ of local field theories. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, **5B**(1988). Textgleich erschienen unter [BMT88b].

[BMT88b] D. Buchholz, G. Mack und I. T. Todorov: The current algebra on the circle as a germ of local field theories. DESY 88–126, Aug. 1988.

[FQS84] D. Friedan, Z. Qiu und S. Shenker: Conformal invariance, unitarity, and critical exponents in two dimensions. *Physical Review Letters*, **52**(1984).

[FQS85] D. Friedan, Z. Qiu und S. Shenker: Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions. *Physical Review Letters B*, **151**(1985).

[FQS86] D. Friedan, Z. Qiu und S. Shenker: Details of the non-unitarity proof for heighest weight representations of the Virasoro algebra. *Communications in Mathematical Physics*, **107**(1986): 535.

[Fre68] C. Freifeld: One-parameter subgroups do not fill a neighborhood of the identity in an infinite-dimensional lie (pseudo-) group. In *Battelle Rencontres 1967*, Lectures in Mathematics and Physics, S. 538–543. Benjamin, New York, 1968.

[FST89] P. Furlan, G. M. Sotkov und I. T. Todorov: Two-dimensional conformal quantum field theory. *Rivista del Nuovo Cimento*, **12**(1989): 1–203.

[Fun62] P. Funk: *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*, Kap. 10, S. 581 ff. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962.

[GKO86] P. Goddard, A. Kent und D. Olive: Unitary representations of the virasoro and super-virasoro algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **103**(1986): 105.

[GO85] P. Goddard und D. Olive: Kac-Moody algebras, conformal symmetry and critical exponents. *Nuclear Physics B*, **257**(1985): 226–252.

[GO86] P. Goddard und D. Olive: Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics. *International Journal of Modern Physics A*, **1**(1986): 303–414.

[GO88] P. Goddard und D. Olive: *Kac-Moody and Virasoro Algebras*, Bd. 3 von *Advanced Series in Mathematical Physics*. World Scientific Publishing, 1988.

[Haa92] R. Haag: *Local Quantum Physics - Fields, Particles, Algebras*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1992.

[Ham62] M. Hamermesh: *Group Theory and its Application to Physical Problems*. Addison-Wesley Publishing Company, London, Paris, 1962.

[Hir97] A. Hirsch: Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnungen. *Mathematische Annalen*, **49**(1897): 49–72.

[Kam36] E. Kamke: Ueber die partielle Differentialgleichung $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y)$. *Mathematische Zeitschrift*, **41**(1936): 56–66.

[Kam37] E. Kamke: Ueber die partielle Differentialgleichung $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y)$ II. *Mathematische Zeitschrift*, **42**(1937): 287–294.

[Kam44] E. Kamke: *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Kap. 2.8, S. 10,16–17. Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler, Kom.-Ges., Leipzig, 1944.

[KZ84] V. G. Knizhnik und Zamolodchikov: Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions. *Nuclear Physics B*, **247**(1984): 83–103.

[Mac88] G. Mack: Introduction to conformal invariant quantum field theory in two and more dimensions. In *Nonpertubative Quantum Field Theory*, herausgegeben von G. 't Hooft et al., S. 353–383. Plenum Press, New York, 1988.

[Mil84] J. W. Milnor: Infinite-dimensional lie groups. In *Relativity, Groups and Topology II*, herausgegeben von B. S. de Witt und R. Stora, S. 1010–1055. North-Holland Physics Publisher, Amsterdam, 1984. École d'été de physique théorique, Les Houches, Session XL, 1983.

[PS86] A. Pressley und G. Segal: *Loop Groups*. Oxford University Press, Oxford, 1986.

[Reh98] K.-H. Rehren: Konforme Quantenfeldtheorie. Vorlesungsausarbeitung, Göttingen, 1998.

[Sch95] M. Schottenloher: Eine mathematische Einführung in die konforme Feldtheorie. `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~gkadmin/Gradkoll.html`, 1995. Graduiertenkolleg "Mathematik im Bereich ihrer Wechselwirkung mit der Physik".

[SW64] R. F. Streater und A. S. Wightman: *PCT, Spin & Statistics and all that*. W. A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1964.

[Tod65] I. T. Todorov: Der axiomatische Zugang zur Quantenfeldtheorie. *Fortschritte der Physik*, **13**(1965): 649–700.

[Wig56] A. S. Wightman: Quantum field theories in terms of vacuum expectation values. *Physical Reviews*, **88**(1956): 860.

[Wyb74] B. G. Wybourne: *Classical Groups for Physicists*, Kap. 5, S. 46. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1974.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denjenigen meinen Dank aussprechen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonderen Dank richte ich an

- Herrn Prof. Dr. D. Buchholz für die interessante Themenstellung und die gute Betreuung,
- Herrn Prof Dr. G. Hegerfeldt für die Übernahme des Koreferats,
- meine Eltern für die vorbehaltlose Unterstützung meines Studiums,
- Karsten Guth, Sören Köster, Hilke Reiter und meine Schwester Tanja für das Korrekturlesen,
- die Mitarbeiter der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie für die angenehme Arbeitsatmosphäre,
- alle meine Freunde, die stets ein aufmunterndes Wort parat hatten, wenn ich mit meiner Arbeit einmal nicht so vorankam, wie ich es mir wünschte.