

Renormierungskonzepte
und Kontinuumslimits
auf Netzwerken
und anderen
diskreten Strukturen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Andreas Lochmann

aus

Bad Pyrmont

angefertigt

am Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Symbolverzeichnis	8
2	Graphentheorie	11
2.1	Definitionen	11
2.1.1	Graphen als metrische Räume	12
2.1.2	Untergraphen und spezielle Graphen	13
2.2	Dimensionsbegriffe	15
2.2.1	Skalierungsdimension	16
2.2.2	Weitere Dimensionsbegriffe für Graphen	18
2.2.3	Dimensionsbegriffe für metrische Räume	19
2.3	Symmetrien und Gitter	20
2.3.1	Graphensymmetrien	20
2.3.2	Cayleygraphen und Gitter	22
2.4	Weitere Graphencharakteristika	26
3	Kontinuumslimites	29
3.1	Der Gromov-Hausdorff-Abstand	29
3.2	Skalierung und Kontinuumslimites	35
3.3	Grob-isometrische Räume	38
3.3.1	Kartesische Produkte	43
3.4	Quasi-isometrische Räume	45
3.4.1	Ein Homöomorphiesatz	45
3.4.2	Quasi-isometrische Graphen	47
3.5	GH-Abstand und Skalierungsdimension	49
3.5.1	Gromov-Skalierungsdimension von Banachräumen	51
3.5.2	Zusammenhang zur Hausdorffdimension	51
3.5.3	Ergänzende Ergebnisse	60
3.6	Kontinuumslimites als Maßraum	60
3.7	Das Beispiel Heisenberg-Gruppe	61
3.8	Banachräume als Kontinuumslimites	63
3.9	Geometrische Renormierungsverfahren	65
3.10	Weitere Abstandsdefinitionen	70

4	Stochastische Graphen	75
4.1	Stochastische Cayleygraphen und Gitter	76
4.2	Beispiele für stochastische Cayleygraphen	78
4.2.1	Zufallsgraphen	78
4.2.2	Das Smallworld-Modell	80
4.3	Limes stochastischer Cayleygraphen	81
4.4	Eindimensionales Modell	86
4.4.1	Obere und untere Schranken	87
4.5	Höherdimensionale stochastische Gitter	90
4.6	Kontinuumsnäherung	94
4.7	Verallgemeinerungen	97
4.7.1	Alternative Funktionen für \hat{p}	97
4.7.2	Modelle mit abhängigen Kanten	98
4.7.3	Großräumig variables \hat{p}	102
4.8	Random Walks	103
5	Interpretation und Spekulation	107
5.1	Gravitation	108
5.2	Lorentzinvarianz	110
5.3	Problem des Anfangszustands	111
	Danksagung	119

Kapitel 1

Einleitung

1899 wies Max Planck in einem Artikel in den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften ([Pla]) darauf hin, dass das von ihm eingeführte Plancksche Wirkungsquantum (damals noch ohne die umfassende Bedeutung, die ihm heute zukommt) zusammen mit den bereits bekannten Naturkonstanten Lichtgeschwindigkeit und Gravitationskonstante zur Definition eines neuen, natürlich gegebenen Einheitensystems verwendet werden kann. Darin erscheint auch eine selbst gegenüber nuklearen Abständen außergewöhnlich kleine Längeneinheit, die heute als Planck-Länge l_p bezeichnet wird. In den folgenden Jahren wurde unter anderem von Matvey Bronstein darauf hingewiesen, dass l_p eine natürliche Grenze definiert, bis zu der die Quantenfluktuationen in der Allgemeinen Relativitätstheorie vernachlässigt werden können, und bis 1955 häuften sich durch die Arbeiten namhafter Wissenschaftler wie John Archibald Wheeler und Oskar Klein die Anzeichen dafür, dass diese Grenze einen fundamentalen Charakter besitzt, an der die Krümmung des Raums und die Quanteneigenschaften sowohl der Gravitation selber als auch der auf dem Raum agierenden Felder und Teilchen miteinander in Wechselwirkung treten müssen ([Gor]).

45 Jahre vor Plancks Beschreibung der fundamentalen Längeneinheit, hat Bernhard Riemann in einem Vortrag darauf hingewiesen, dass die Realität der Raumzeit aus gutem Grunde diskret sein könnte ([Riem]):

Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Massverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage [...] kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dass bei einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anderswoher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden,

oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.

Die Frage nach der Herkunft der Maßverhältnisse, die Riemann hier aufwirft, stellte sich bereits 1851, bei der Analyse der Größenverhältnisse der Atome: Warum sind alle Atome des gleichen Typs auch gleich groß? Wenn wir mit dem heutigen Wissen über die Quantenmechanik argumentieren, so stellen wir fest, dass Riemanns Maßverhältnisse in den Massenverhältnissen der Elementarteilchen stecken – und damit letztlich auch in der Gravitationskonstanten und der Planck-Länge: Alle Fragen dieser Natur kulminieren in der einen Frage, warum es eine allgemein gültige Planck-Länge gibt. Und wie bei der Frage nach der Identität von schwerer und träger Masse ist es auch in diesem Fall aussichtsreich, eine “neue” Theorie über die Raumzeit auf eben der Erkenntnis aufzubauen, dass eine solche fundamentale Länge existiert.

Sonderlich “neu” wäre eine diskrete Theorie der Raumzeit freilich nicht. Im gesamten vergangenen Jahrhundert wurde eine Vielzahl von Ansätzen und Weiterentwicklungen für diskrete physikalische Theorien vorgestellt, teils als Ersatz für das Kontinuum (z.B. Zuses “rechnender Raum”, Wheelers “space-time foam”, die Theorie kausaler Mengen und der Ansatz von ’t Hooft et.al. in Cellularen Automaten), teils auch nur zu seiner Approximation (wie z.B. der Regge-Kalkulus und Gitter-QFT). Diese Arbeit wiederum ist eingebettet in ein Programm von Requardt, das den Nutzen von Graphen als Grundlage des Raumes untersucht ([Req₁], [RN], [Req₂], [Req₃], [RR]). Graphen bilden eine besondere Klasse von diskreten Räumen, da die in ihnen auftretenden Knoten nicht mehr kennen als ihre nächste Umgebung, alle anderen Abstände aber aus diesen Nachbarschaften abgeleitet sind. Während bei einer Riemannschen Mannigfaltigkeit oder allgemeiner bei einem metrischen Raum der Abstand zweier Punkte jede positive Zahl sein kann, kennen zwei Knoten in einem Graphen nur zwei mögliche Positionen zueinander: benachbart oder nicht benachbart. Erst in einem zweiten Schritt wird hieraus eine Metrik in natürlichen Werten abgeleitet. Dieses scheinbar primitive mathematische System überrascht zugleich mit einem ausgeprägten Reichtum an Struktur, wie der Existenz von Dimensionsbegriffen und deren Ganzzahligkeit.

Es wurden bereits viele vereinzelte Versuche unternommen, Quantenmechanik und Quantenfeldtheorien auf Graphen zu übertragen, mit wechselndem Erfolg. So wurde beispielsweise in [I_{*}] festgestellt, dass Ising-Felder im Smallworld-Modell sehr unterschiedliches Verhalten zeigen können, je nachdem, in welchem Bereich sich das Modell befindet. Auch ’t Hooft hat in einer Reihe von Artikeln festgestellt, dass sich die Quantisierung deterministisch-diskreter Systeme besonders einfach gestaltet. So hat er in [tHo₁] eine Reihe deterministischer Modelle für typisch quantenmechanische Systeme und einen Mechanismus zur Konstruktion eines Hamiltonians zu einem vorgegebenen cellularen Automaten vorgestellt. Zum Ende des Artikels gibt er auch ein Argument, weshalb eine diskrete, globale Zeit in solchen Systemen von Vorteil ist gegenüber einer kontinuierlich verlaufenden

Zeit. In [tHo₂] stellt er dar, dass sich durch die Quantisierung zusätzliche Symmetrien offenbaren können (mit dem Hinweis, dass dies auch für die Lorentzinvarianz möglich sein könnte) und gibt ein Modell für eine diskrete 2+1-dimensionale Gravitation.

Wenn die Ergebnisse dieser Untersuchungen analytisch mit bereits existierenden Theorien verglichen werden sollen, wird ein geeigneter Limes benötigt, in dem der zugrunde liegende Graph gegen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit strebt. Dies ist im Grunde nicht anders als der Übergang einer Quantentheorie in eine klassische durch den Limes $\hbar \rightarrow 0$ oder den Übergang einer relativistischen Theorie in eine nicht-relativistische durch $c \rightarrow \infty$, zuzüglich einer vorher vorzunehmenden Bereinigung des Graphen, doch mit dem Unterschied, dass verschiedene Arten von metrischen Räumen miteinander verglichen werden müssen. Dabei werden wir uns an die Arbeiten von Misha Gromov halten, der für die Zwecke der geometrischen Gruppentheorie einen solchen Limes beschrieben und erfolgreich angewendet hat. Parallel zu dieser Arbeit wird ein Letter von Requardt erscheinen ([Req₄]), in dem er ähnliche Fragestellungen wie hier mit anderen Begriffsbildungen bearbeitet hat.

In dieser Arbeit wollen wir uns ganz auf geometrische Aspekte des Kontinuums-limes konzentrieren, also Materie und Felder ebenso wie dynamische Aspekte unbeachtet lassen. Wir werden zunächst die Grundbegriffe der Graphentheorie und des wichtigsten Dimensionsbegriffs für Graphen, den der Skalierungsdimension, erläutern, sodann den Gromov-Hausdorff-Kontinuums-limes beschreiben und ein Ergebnis von Mitchell rekonstruieren, dass die Skalierungsdimension mit der Hausdorff-Dimension in Zusammenhang bringt. Dabei erhalten wir auch konkrete Beschreibungen für Kontinuums-limes in einfach gelagerten Fällen, sowie im Gegenzug Einschränkungen an den Graphen, um physikalisch besonders interessante Limesräume zu fordern. Wir werden auch kurz auf das Problem der Bereinigung von Graphen eingehen, aber aufgrund der Komplexität dieses Themas und der Abhängigkeit vom gewählten Modell nicht weiter verfolgen.

Im darauf folgenden Kapitel werden wir die verwendeten Methoden auf stochastische Modelle erweitern, um so eine fluktuierende Raumzeit abbilden zu können. Dies führt insbesondere zur Untersuchung der Frage, unter welchen Umständen die Metrik des Kontinuums-limes durch eine Norm erklärt werden kann (diese Norm kann dann in späteren Arbeiten den Ausgangspunkt zur Definition des räumlichen Anteils eines metrischen Tensors liefern, der im Prinzip die Rolle einer "lokalen Norm" spezieller Art spielt). Für den eindimensionalen Fall geben wir ein allgemeingültiges Ergebnis über Existenz und Eindeutigkeit eines Banachraums als Kontinuums-limes und ergänzen dieses durch numerische und analytische Untersuchungen der genauen Größe dieser Norm an einem einfachen eindimensionalen Modell.

1.1 Symbolverzeichnis

Diese Arbeit berührt mehrere sehr unterschiedliche Gebiete, insbesondere Graphentheorie, Gruppentheorie, Stochastik und Differentialgeometrie. Jedes dieser Gebiete belegt die Buchstaben des lateinischen Alphabets anders. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, durch eine möglichst konsequente Verwendung bestimmter Schriftstile die Überladung von Symbolen zu vermeiden: Fraktur soll typischerweise diskrete Elemente beschreiben, in Skriptbuchstaben sind stochastische Objekte gehalten. Aufrechte Buchstaben kennzeichnen bekannte Funktionen, darunter auch den Erwartungswert und die Wahrscheinlichkeitsfunktion P . Graphen werden mit G und H dargestellt, Gruppen mit \mathfrak{G} und \mathfrak{H} (wir verwenden nur diskrete Gruppen). Erzeugendenmengen von Gruppen schreiben wir mit \mathfrak{S} , alle anderen Untermengen werden mit A gekennzeichnet, die genaue Bedeutung ist dabei kontextabhängig. Mit “ n -Simplex” bezeichnen wir einen Simplex mit n Knoten, im Gegensatz zur topologischen Schreibweise, wo ein n -Simplex $n+1$ Knoten besitzt (nämlich Dimension n). Darüber hinaus lassen wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die Funktionsklammern bei Ausdrücken mit nur einem Symbol im Argument weg (also “ fx ” statt “ $f(x)$ ”).

Aut	Automorphismengruppe
B	Kantenmenge eines Graphen
$B_A(r); B_A[r]$	Offener; geschlossener r -Ball um $A \subseteq S$
C, R	Nicht-negative, reelle Konstanten
$C_L; S_L$	Kreisgraph, also $\text{Cay}(\mathbb{Z}_L, \{-1, +1\})$; Strecke der Länge L
$\text{Cay}(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$	Cayleygraph zur Gruppe \mathfrak{G} und Erzeuger $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{G}$
$\text{Cliq } G$	Cliquengraph von G
$\text{DDS}(G)$	Distance degree sequence von G (Abschnitt 2.1.1)
E	Erwartungswert
E_j	Mengen einer Überdeckung
\mathbb{G}	Menge aller einfachen, höchstens abzählbar unendl. Graphen
$\mathbb{G}_n; \mathbb{G}_{n,m}$	Menge aller Graphen mit n Knoten; n Knoten und m Kanten
$\mathbb{G}_V; \mathbb{G}_V^{n,m}$	Menge aller Graphen über V ; mit Kante zwischen \mathbf{n} und \mathbf{m}
G, H	Graphen
$\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; \mathfrak{S}$	Gruppen; Untermenge einer Gruppe
$\mathcal{G}_{n,p}$	Zufallsgraph mit n Knoten und Kantenwahrscheinlichkeit p
$H^d; \mathcal{S}^d; \mathcal{T}^d$	Hausdorffmaß; sphärisches Maß; Minkowski-Inhalt
J	Natürliche Zahl oder Untermenge von \mathbb{N}
K_n	Simplex mit n -Knoten (n -Simplex)
$L(\mathbf{p})$	Länge des Pfades \mathbf{p}
\mathbb{M}	Menge der vollst., \mathbb{R} -abzählbaren metrischen Räume, Def.11
$\mathcal{M}_{n,p}$	Zufallsvariable der Kantenzahl von $\mathcal{G}_{n,p}$

$\mathbb{N}; \mathbb{N}_0; \mathbb{N}_{0,\infty}$	Natürliche Zahlen; mit 0; mit 0 und ∞
$\mathfrak{P}(V)$	Potenzmenge über V
$\mathfrak{P}_n(V)$	Menge aller Untermengen von V mit genau n Elementen
$P(X \in X)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignis X
$\mathbb{R}; \mathbb{R}^+; \mathbb{R}_0^+$	reelle Zahlen; positiv; nicht-negativ
S	metrischer oder top. Raum (vollst., separabel, \mathbb{R} -abzählbar)
$\text{SCay}(\mathfrak{G}, \hat{p})$	Stochastischer Cayleygraph zur Gruppe \mathfrak{G} mit $\hat{p} : \mathfrak{G} \rightarrow [0, 1]$
$U_n(l)$	abgeschlossener l -Ball um \mathbf{n} in einem Graphen
V	Knotenmenge eines Graphen
$\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_n$	Ganze Zahlen, auch als eindimensionales Gitter; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
\mathfrak{a}	Automorphismus
$\mathfrak{b}; \mathfrak{b}_{ij}$	Kante; Kante zwischen \mathbf{n}_i und \mathbf{n}_j
c, r, s	Nicht-negative reelle Konstanten
$d(\cdot, \cdot)$	Metrik
$d_1; d_2$	Metrik zur 1-Norm (“Manhattan-Metrik”); euklidische Metrik
$d_H; d_{GH}$	Hausdorff-Abstand; Gromov-Hausdorff-Abstand
d_{\cup}	Metrik auf einer disjunkten Vereinigung (kontextabhängig)
$\text{deg}(\mathbf{n}), \text{deg}(G)$	Vertexgrad eines Knotens; Schranke der Vertexgrade
$\text{diam } A$	Durchmesser der Untermenge $A \subseteq S$
$\text{dim}_H S; \text{dim}_T S$	Hausdorffdimension; topologische Dimension von S
$\text{dim}_S G$	Skalierungsdimension des Graphen G
dist	Abstand eines Punktes von einer Menge
e_i	Einheitsvektoren in \mathbb{R}^n
$\mathfrak{e}; \mathfrak{e}_i$	Neutrales Element einer Gruppe; Einheitsvektoren in \mathbb{Z}^n
f, g, h	Abbildungen zwischen metrischen Räumen
$\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$	Automorphismus; Gruppenelemente
ℓ	Kantenlänge (Skalenfaktor)
j, k, l, m, n, v	Natürliche Zahlen (“ l ” manchmal auch reell und groß)
l_p	Plancklänge ($1,62 \cdot 10^{-35}$ m)
$\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{n}_i$	Knoten
p, q	Wahrscheinlichkeiten, $q = 1 - p$
\hat{p}	Kantenwahrscheinlichkeiten eines stoch. Cayleygraphen
$\mathfrak{p}; \mathfrak{p}_{ij} \dots$	Pfad; Pfad von \mathbf{n}_i nach \mathbf{n}_j nach \dots
pt	Metrischer und topologischer Einpunktraum
\mathfrak{s}	Simplex, Subsimplex oder Clique (= maximaler Subsimplex)
x, y, z	Punkte eines metrischen oder topologischen Raumes

α_ℓ	Skalierungsoperator mit Skalierung ℓ
αG	Kontinuumslices von G
β_S	Ballkonstante zum hom., skal.inv. Raum S , $:= (\text{diam } B_x(r))/r$
$\Gamma_{\mathbf{n}}(l)$	Oberfläche des l -Balls um \mathbf{n} in einem Graphen
$\Gamma(x)$	Gamma-Funktion
$\epsilon, \delta, \lambda, \mu$	positive reelle Konstanten
$\mu(A)$	Maß der Untermenge A
κ_n	Volumen von $B_0[1] \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2} + 1)$)
$\kappa_{S,d}$	d -dimensionales Hausdorffmaß von $B_x[1] \subseteq S$, $x \in S$
$\tau_{S,d}$	d -dimensionaler Minkowski-Inhalt von $B_x[1] \subseteq S$, $x \in S$
ζ, ξ	nicht-negative reelle Konstanten
$\xi(\mathbf{n})$	“ ξ -Funktion” aus Lemma 21
θ	Umrechnungsfaktor zweier Metriken auf \mathbb{Z}^n
$\lfloor x \rfloor; \lceil x \rceil$	größte ganze Zahl kleiner x ; kleinste ganze Zahl größer x
$(\mathfrak{G} : \mathfrak{H})$	Index einer Untergruppe \mathfrak{H} der Gruppe \mathfrak{G}
$\dot{\cup}$	disjunkte Vereinigung
$\vee; \wedge$	logisches “oder”; logisches “und”
$\vee; \wedge$	Vereinigung von Graphen; Schnittmenge von Graphen
\times	Kartesisches Produkt
$\langle H \rangle$	Von $H \subseteq G$ induzierter Untergraph
$\#A$	Kardinalität der Menge A
∂A	Rand der Menge A
\bar{A}	Topologischer Abschluss der Menge A

Kapitel 2

Graphentheorie

2.1 Definitionen

Ein *ungerichteter, einfacher Graph* (oder einfach *Graph*) G besteht aus einer abzählbaren und nicht-leeren Menge V (“Knoten” oder “Ecken”, notiert als \mathbf{n} oder \mathbf{m}) und einer Untermenge $B \subseteq \mathfrak{P}_2(V) := \{\mathfrak{b} \in \mathfrak{P}(V) : \#\mathfrak{b} = 2\}$ (“Kanten”, notiert mit \mathfrak{b}), d.h. wir betrachten Kanten als ungeordnete Paare von Knoten.

Ein solcher Graph wird auch *einfacher Graph* genannt, im Gegensatz zum *Multigraphen*, in dem auch mehrfache Kanten zwischen zwei Knoten und schleifenförmige Kanten von einem Knoten zu sich selbst erlaubt sind. Dies implementiert man beispielsweise durch ein natürlichwertiges Feld $V \dot{\cup} \mathfrak{P}_2(V) \rightarrow \mathbb{N}_0$ oder durch die Angabe zweier Mengen V und B sowie einer Funktion $B \rightarrow V \dot{\cup} \mathfrak{P}_2(V)$, die jeder abstrakten Kante aus B ihre ein oder zwei Endknoten zuweist. Für einen gerichteten Graphen wählt man statt $B \subseteq \mathfrak{P}_2(V)$ einfach $B \subseteq V \times V$, also geordnete Paare.

Die *Größe* eines Graphen ist die Anzahl seiner Kanten, die *Ordnung* die Zahl seiner Knoten. Für einen festen Knoten $\mathbf{n} \in V$ definieren wir seinen *Ecken-* oder *Vertexgrad* $\deg(\mathbf{n}) := \#\{\mathfrak{b} \in B : \mathbf{n} \in \mathfrak{b}\}$ als die Zahl der mit ihm verbundenen Kanten, also die Kanten, zu denen \mathbf{n} ein *Endknoten* ist. Ist der Eckengrad für alle Ecken eines Graphen endlich (beschränkt, gleich n), so heißt der Graph *lokal endlich* (*gradbeschränkt*, *n-regulär*). Ist ein Graph *n-regulär*, so bezeichnen wir n als seine *Koordinationszahl*.

Sind $G = (V, B)$ und $G' = (V, B')$ zwei Graphen über derselben Knotenmenge V , so erklären wir die Verknüpfungen \vee und \wedge durch $G \vee G' := (V, B \cup B')$ und $G \wedge G' := (V, B \cap B')$.

Sind $G = (V, B)$ und $G' = (V', B')$ Graphen, so können wir ein *kartesisches Produkt* $H = G \times G'$ folgendermaßen definieren: Als Knotenmenge von H wird das kartesische Produkt $V \times V'$ verwendet. Zwei Knoten (\mathbf{n}, \mathbf{m}) und $(\mathbf{n}', \mathbf{m}')$ sind außerdem genau dann verbunden, wenn \mathbf{n} mit \mathbf{n}' verbunden und $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ ist oder \mathbf{m}

mit \mathbf{m}' verbunden und $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$ ist. Das n -fache kartesische Produkt eines Graphen G schreiben wir auch G^n .

2.1.1 Graphen als metrische Räume

Eine Folge $\mathbf{p} = (\mathbf{n}_i)_{i \in I}$ von Knoten, $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein endliches oder unendliches Intervall, heißt *Pfad*, wenn zwei aufeinander folgende Knoten durch eine Kante miteinander verbunden sind, also

$$\forall i \in I \text{ mit } i + 1 \in I : \{\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i+1}\} \in B$$

Die Zahl $\#I - 1$ der Kanten im Pfad bezeichnen wir als *Länge* $L(\mathbf{p})$ des Pfades. Ist sie endlich, so nennen wir den Pfad *endlich*. Einen Pfad der Länge L nennen wir auch L -Pfad. In diesem Zusammenhang bezeichnen wir einen einzelnen Knoten $\{\mathbf{n}\}$ auch als 0-Pfad.

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Knoten des Graphen einen Pfad gibt, der beide Knoten enthält (dann gibt es auch automatisch einen endlichen Pfad, der beide Knoten enthält). Auf einem Graph lässt sich ein natürlicher Abstand $d(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ dadurch definieren, dass die geringst mögliche Pfadlänge zwischen \mathbf{n} und \mathbf{m} gesucht wird:

$$d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) := \inf_{\mathbf{p}: \{\mathbf{n}, \mathbf{m}\} \subseteq \mathbf{p}} L(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m} \in G$$

(Das Infimum über eine leere Menge ist definiert als ∞ .) Damit ist $d(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = L(\{\mathbf{n}\}) = 0$, $d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = d(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ (da wir nur ungerichtete Graphen betrachten) und $d(\mathbf{n}, \mathbf{n}') + d(\mathbf{n}', \mathbf{n}'') \leq d(\mathbf{n}, \mathbf{n}'')$, mit der Festlegung $x + \infty = \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$. Darüber hinaus ist der Abstand d für zusammenhängende Graphen endlich, so dass wir eine Metrik erhalten. Andererseits ist ein Graph durch seine Metrik bereits vollständig beschrieben. Für ungerichtete Graphen lässt sich ebenfalls eine solche Funktion $d : V \times V \rightarrow \mathbb{N}_{0, \infty}$ definieren, die aber nicht mehr symmetrisch ist und auch nicht mehr die Dreiecksungleichung erfüllt.

In dieser Definition wurde die Länge einer Kante zunächst auf 1 festgesetzt. Wir werden im Laufe der Arbeit auch den Kontinuumsliches betrachten. Dieser erfordert, dass die Kantenlänge gegen Null geht, was sich am einfachsten dadurch gewährleisten lässt, dass jede Länge mit einem Faktor ℓ multipliziert und dann der Limes $\ell \rightarrow 0$ betrachtet wird. ℓ nennen wir dann den Skalenfaktor, dieser kann aber auch als Kantenlänge interpretiert werden. Auf diese Weise erzeugte metrische Räume bezeichnen wir als *skalierte Graphen*, unter einem Graphen dagegen verstehen wir stets einen solchen mit Kantenlänge 1.

Den größtmöglichen Abstand zweier Knoten in einer Untermenge $A \subseteq G$ in Bezug auf den gesamten Graphen bezeichnen wir mit *Durchmesser* ($\text{diam } A$); ist er unbeschränkt, so setzen wir $\text{diam } A = \infty$. Ist allgemein A Untermenge eines

metrischen Raumes S , so bezeichnen wir

$$\text{diam } A := \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

als den *Durchmesser* von A .

Ausgehend von einem festen Knoten $\mathbf{n} \in V$ definieren wir für $l \in \mathbb{N}_0$ die l -Umgebung $U_{\mathbf{n}}(l) := \{\mathbf{m} \in V : d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \leq l\}$ um \mathbf{n} und die Oberfläche dieser Umgebung

$$\Gamma_{\mathbf{n}}(l) := \{\mathbf{m} \in V : d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = l\} = U_{\mathbf{n}}(l) \setminus U_{\mathbf{n}}(l-1)$$

mit der Konvention $U_{\mathbf{n}}(l) := \emptyset$ für $l < 0$. Die Folge $(\#\Gamma_{\mathbf{n}}(l))_{l \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten in $\mathbb{N}_{0,\infty}$ gibt die Zahl der Knoten an, die sich in der Entfernung l von \mathbf{n} befinden. Man bezeichnet sie als *distance degree sequence* oder DDS, beginnend bei \mathbf{n} . Im Rahmen allgemeiner metrischer Räume werden wir ebenfalls mit offenen und abgeschlossenen Bällen arbeiten, die wir mit $B_A(r)$ und $B_A[r]$ für $A \subseteq S$ und $r > 0$ notieren (eine genaue Definition folgt in Abschnitt 3.1). Wir werden häufig mit Bällen in einem Graphen und Bällen in seinem Kontinuumslikes gleichzeitig arbeiten. Daher lohnt es sich, verschiedene Buchstaben für die beiden Räume zu wählen: U und Γ für Graphen und B für allgemeine metrische Räume.

Lemma 1 *Als metrischer Raum ist jeder (abzählbare) Graph vollständig. Die konvergenten Folgen sind gerade diejenigen Folgen, die ab einem endlichen Index konstant sind.*

Beweis: Vollständigkeit bedeutet: Jede Cauchyfolge konvergiert. Dies sind Folgen $(\mathbf{n}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ aus G , so dass es für alle $\epsilon > 0$ einen Index $j_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $j, j' > j_0$ gilt $d(\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_{j'}) < \epsilon$. Wähle nun $\epsilon = \frac{1}{2}$. Da die Metrik ganzzahlige Werte annimmt, muss eine Cauchyfolge also ab irgendeinem endlichen Index konstant sein. Solche Folgen sind in jeder Topologie konvergent, also auch in der diskreten Topologie eines Graphen. Sei andererseits $(\mathbf{n}_j) \rightarrow \mathbf{n}$ eine in G konvergente Folge. Dann muss es einen Index geben, ab dem sich alle Folgenglieder im $\frac{1}{2}$ -Ball um \mathbf{n} befinden. Da dieser Ball nur \mathbf{n} enthält sind also alle konvergenten Folgen ab einem endlichen Index konstant. \square

2.1.2 Untergraphen und spezielle Graphen

Sind $G = (V, B)$ und $G' = (V', B')$ Graphen mit $V' \subseteq V$ und $B' \subseteq B$, so nennen wir G' einen *Untergraphen* von G ($G' \subseteq G$). Gilt $B' = B|_{V'}$ (d.h. in G' tritt jede Kante zwischen Knoten von V' auf, die auch in G auftritt), dann heißt G' der *von V' induzierte Untergraph*, notiert mit $\langle V' \rangle$.

Einen L -Pfad, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind, nennen wir *L -Strecke*. Alle von L -Strecken induzierten Untergraphen sind zueinander isometrisch, wir bezeichnen diese als S_L . Sind ausschließlich Anfangs- und Endpunkt

eines L -Pfades identisch, so wird ein L -Kreis induziert (notiert mit C_L). Den Einpunktgraphen S_1 bezeichnen wir auch als "pt".

Die Länge des größten Kreises eines Graphen heißt *Umfang*. Ein Graph mit Umfang Null heißt *Wald*, ist er zudem zusammenhängend, so heißt er *Baum*. Die Länge des kleinsten Kreises mit Länge ≥ 2 nennen wir seine *Taille*, die Taille eines Waldes setzen wir auf Null.

Es gibt (bis auf Isometrie) nur einen 2-regulären, zusammenhängenden und abzählbar-unendlichen Graph. Seine Knoten indizieren wir mit ganzen Zahlen, so dass die Metrik der ganzen Zahlen mit der des Graphen übereinstimmt. Wir bezeichnen ihn mit \mathbb{Z} und identifizieren ihn mit den ganzen Zahlen. Das d -fache kartesische Produkt \mathbb{Z}^n bezeichnen wir als *d -dimensionales kubisches Gitter*.

Ist $G = (V, B)$ ein Graph mit $B = \mathfrak{P}_2(V)$, so nennen wir G *vollständig zusammenhängend* oder *$\#V$ -Simplex*, notiert mit $K_{\#V}$. Ist das Gegenteil der Fall, also $B = \emptyset$, so heißt G *vollständig unzusammenhängend*.

Die Menge aller (ungerichteten und einfachen) Graphen bezeichnen wir mit \mathbb{G} , die Menge aller Graphen mit n Knoten als \mathbb{G}_n , mit n Knoten und m Kanten als $\mathbb{G}_{n,m}$. Mit \mathbb{G}_V bezeichnen wir alle Graphen zu einer gegebenen Knotenmenge V .

Bemerkung: Es ist möglich, \mathbb{G} selber mit einer Graphenstruktur zu versehen, beispielsweise als vollständig unzusammenhängender Graph oder (etwas interessanter) durch $\{G_1, G_2\} \in B$ genau dann, wenn $G_1 \subseteq G_2$ oder $G_2 \subseteq G_1$ gilt. Jedoch ist \mathbb{G} als Menge überabzählbar (zu einer beliebigen unendlichen Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $r_n \in \{0, 1\}$ wähle z.B. die disjunkte Vereinigung aller K_n mit $r_n = 1$; diese bilden eine überabzählbare Menge einfacher und selber abzählbarer Graphen, die zudem paarweise nicht isometrisch sind). Damit kann sich \mathbb{G} nicht selber enthalten, mengentheoretischen Widersprüchen sind wir also durch die spezielle Auswahl abzählbarer Graphen zuvorgekommen.

Was ist nun die physikalische Motivation, Graphen als Grundlage für die Raumzeit zu verwenden? Es erscheint sinnvoll, die Raumzeit zumindest als metrischen Raum anzunehmen. Wenn dieser metrische Raum quantisiert ist, und zwar quantisiert im ursprünglichsten Sinn, dann sind die Abstände bis auf einen konstanten Faktor ganzzahlig. Ein solcher metrischer Raum ist, sofern wir Abzählbarkeit fordern, stets durch einen Graphen darstellbar:

Lemma 2 *Jeder abzählbare metrische Raum S mit \mathbb{N}_0 -wertiger Metrik ist (metrischer) Unterraum eines zusammenhängenden Graphen G .*

Beweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten, S in einen Graphen einzubetten. Eine Methode ist, zwischen je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in S$ mit Abstand $d(x, y)$ eine Strecke aus $d(x, y) + 1$ Knoten einzukleben mit Anfangspunkt x und Endpunkt y . Die Einschränkung der so erhaltenen Metrik auf S ändert sich durch dieses Vorgehen nicht. Aus der Abzählbarkeit von $S \times S$ und der Endlichkeit aller Abstände lässt sich auf die Abzählbarkeit des resultierenden Graphen schließen.

Der so konstruierte Graph ist im allgemeinen aber nicht gradbeschränkt. \square

2.2 Dimensionsbegriffe

Bei der Untersuchung großer thermodynamischer Systeme reduziert man die gewaltige Informationsfülle (z.B. die Positionen und Geschwindigkeiten aller Teilchen) auf wenige Zahlen, die das Gesamtverhalten des Systems treffend beschreiben können, ohne zu sehr ins Detail zu gehen (z.B. Temperatur und Druck). Aus demselben Grund führt man *Graphencharakteristika* ein, die die gesamte Struktur des Graphen grob, aber dafür in wenigen Zahlen zusammenfassen können. Einfache Graphencharakteristika sind die Gesamtzahl an Knoten n oder die Kantendichte $p = m/\frac{1}{2}n(n-1)$. Eine wichtige Klasse sind weiterhin Dimensionsbegriffe. Wünschenswerte Eigenschaften eines Dimensionsbegriffs $\dim : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ sind die folgenden:

1. \dim ist nicht-negativ. Für den Einpunktgraphen pt ist $\dim \text{pt} = 0$.
2. Ist H ein Untergraph von G , so ist $\dim H \leq \dim G$.
3. Unterscheidet sich die DDS von G und H (beginnend bei zwei beliebigen Punkten $\mathbf{n} \in G$ und $\mathbf{m} \in H$) nur an endlich vielen Stellen, so ist $\dim H = \dim G$ (d.h. die Dimension ist stabil gegenüber kleinen Änderungen am Graphen).
4. Für das unendliche Gitter \mathbb{Z} ist $\dim \mathbb{Z} = 1$.
5. Sind H und G Graphen, so ist $\dim(H \times G) = \dim H + \dim G$.
6. Ist $\mathbf{n} \in G$ und $\langle U_{\mathbf{n}}(l) \rangle$ der von der l -Umgebung von \mathbf{n} induzierte Untergraph von G , so ist $\dim \langle U_{\mathbf{n}}(l) \rangle \rightarrow \dim G$ für $l \rightarrow \infty$.

Einige dieser Eigenschaften widersprechen sich leider gegenseitig: Ein endlicher Graph besitzt eine abbrechende DDS, d.h. sie unterscheidet sich nur an endlich vielen Positionen von der DDS des Einpunktgraphen. Folglich muss $\dim G = 0$ sein für endliche Graphen G . Dann muss nach der letzten Eigenschaften aber auch $\dim \mathbb{Z} = 0$ sein, was der vierten Eigenschaft widerspricht. Einen weiteren Widerspruch findet man in Zusammenhang mit unzusammenhängenden Graphen: Sei $G = \mathbb{Z} \dot{\cup} \text{pt}$ (d.h. zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten \mathbb{Z} und $\text{pt} = (\{\mathbf{n}\}, \emptyset)$). Die DDS beginnend bei \mathbf{n} ist gleich der DDS des Graphen pt , und folglich nach der dritten Eigenschaft $\dim G = \dim \text{pt} = 0$; analog gilt aber auch $\dim G = \dim \mathbb{Z} = 1$. Folglich kann ein sinnvoller Dimensionsbegriff nur einige dieser Bedingungen erfüllen – eine feste oder gar eindeutige Charakterisierung der Dimension eines Graphen wird dadurch außerordentlich erschwert.

2.2.1 Skalierungsdimension

Zwei mögliche (verschiedene) Dimensionsbegriffe wurden von Requardt in [RN] vorgeschlagen und zusammen mit zwei weiteren von Nowotny in [Now] untersucht und in Relation zueinander gestellt. Von diesen vier Begriffen soll hier nur auf einen eingegangen werden, der in [Now] als Skalierungsdimension bezeichnet wird. Er erscheint bereits sehr viel früher in der Theorie der Ising-Modelle ([Bax]), wo er als “effektive Dimension” bezeichnet wurde, sowie in der geometrischen Gruppentheorie unter dem Namen “growth degree” (z.B. [Mil]). Die genaue Untersuchung dieses Begriffs für allgemeine Graphen geht aber wohl auf [RN] und (zusammenfassend) [Now] zurück.

In vielen Gebieten der statistischen Mechanik, beispielsweise bei der Untersuchung von Ising-Modellen, steht das qualitative Verhalten des Modells in Zusammenhang mit der Dimension des Einbettungsraumes. Dabei werden Felder auf diskreten Mengen betrachtet, deren Wechselwirkung abhängt von ihrem Abstand im Einbettungsraum. Diese Modelle lassen sich oft mit Leichtigkeit übertragen auf allgemeinere Graphen, und auch hier lassen sich qualitative Verhaltenswechsel (“Phasensprünge”) beobachten, abhängig von der Art der Vernetzung der Knoten. Da in diesen Modellen ein Umgebungsraum aber mit der eigentlichen Dynamik nichts mehr zu tun hat, muss ein anderer Faktor dafür anzugeben sein, der sich direkt aus der Vernetzung der Knoten ergibt. Dies führte Requardt zu Beginn seiner Definition der Skalierungsdimension zu dem Gedanken, dass die Zahl der Wechselwirkungspartner eines festen Knotens in einem bestimmten Abstand maßgebend ist. Im \mathbb{Z}^n wächst diese Zahl polynomial mit dem Abstand an, wobei die Dimension n des Einbettungsraumes \mathbb{R}^n nochmals auftritt als Exponent des polynomialen Wachstums. Dies rechtfertigt die folgende Definition als physikalisch sinnvolle Verallgemeinerung des üblichen Dimensionsbegriffes (vgl. auch die Diskussion in [RN, “Cellular Networks”, Abschnitt 4]):

Definition 1 *Sei G ein beliebiger Graph. Die Skalierungsdimension (beginnend bei $\mathbf{n} \in G$) ist dann definiert als*

$$\dim_S(G, \mathbf{n}) := \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln \#U_{\mathbf{n}}(l)}{\ln l},$$

falls dieser Limes existiert. Analog sind obere und untere Skalierungsdimension als Limes superior und Limes inferior definiert. Sind die Limes unabhängig von \mathbf{n} , so sprechen wir von der (oberen/unteren) Skalierungsdimension von G ($\dim_S G$). Ist G nicht lokal endlich, so kann $\#U_{\mathbf{n}}(l) = \infty$ werden. Ist dies für die spezielle Wahl von \mathbf{n} der Fall, so setzen wir auch $\dim_S(G, \mathbf{n}) = \infty$.

Für unzusammenhängende Graphen hängt die Skalierungsdimension von der Zusammenhangskomponente von \mathbf{n} ab. Darüber hinaus wurde in [RN] und [Now] folgendes Verhalten für unendliche, aber lokal endliche Graphen mit existierender Skalierungsdimension gezeigt:

- \dim_S eines unendlichen Baumgraphen ist ∞ .
- Hinzufügen von Knoten und Kanten kann \dim_S höchstens erhöhen.
- Ist $d(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) < \infty$, dann sind die Skalierungsdimensionen bezüglich \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 gleich, d.h. innerhalb einer Zusammenhangskomponente ist die Skalierungsdimension von jedem Knoten aus gleich.
- Die Skalierungsdimension eines n -dimensionalen Bravaisgitters existiert und ist n (beginnend bei jedem Knoten).
- Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig und G zusammenhängend. Das Einfügen beliebig vieler Kanten zwischen Knoten von G mit Abstand höchstens l voneinander ändert \dim_S nicht.
- Seien G und H lokal endlich und zusammenhängend, und ihr Schnitt enthalte genau einen gemeinsamen Knoten. Dann ist

$$\dim_S(G \cup H) = \max(\dim_S(G), \dim_S(H)).$$

- Seien G und H lokal endlich, disjunkt und von endlicher Skalierungsdimension. Dann ist $\dim_S(G \times H) = \dim_S(G) + \dim_S(H)$.
- Zu jeder reellen Zahl $D \geq 1$ gibt es einen unendlichen, zusammenhängenden und gradbeschränkten Graphen mit Skalierungsdimension D .

Insbesondere werden wir im Laufe der Arbeit mehrfach verwenden, dass sich die Skalierungsdimension unter Hinzunahme beliebig vieler Kanten in endlichem Abstand nicht verändert. Deshalb soll diese Eigenschaft als einzige nochmal bewiesen werden, dabei halten wir uns an die Beweise aus [RN] und [Now, Lemma 3.8]:

Lemma 3 *Seien $L \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{n} \in V$ beliebig. Das gleichzeitige Einfügen von beliebig vielen Kanten zwischen Knoten $\mathbf{m}_j, \mathbf{m}'_j \in V$ mit $d(\mathbf{m}_j, \mathbf{m}'_j) \leq L$ verändert obere und untere Skalierungsdimension ausgehend von \mathbf{n} nicht (und damit auch nicht die Skalierungsdimension \dim_S selber, falls sie existiert).*

Beweis: Sei G der Ausgangsgraph mit Metrik d und G' der Graph nach Einfügen der Kanten mit Metrik d' . Da $L < \infty$ gewählt ist, kann das Hinzufügen von Kanten keine getrennten Zusammenhangskomponenten zusammenführen, es reicht also aus, sich auf zusammenhängende Graphen zu konzentrieren. Ferner sei $U_l := \{\mathbf{n}' \in G : d(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \leq l\}$ und analog $U'_l := \{\mathbf{n}' \in G' : d'(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \leq l\}$. Nach Voraussetzung kann ein Knoten \mathbf{n}' nach Hinzufügen der Kanten höchstens mit allen Knoten seiner L -Umgebung verbunden sein. Entsprechend sind nach k Schritten

auf G' höchstens alle Knoten der “alten” Entfernung kL enthalten, also $U'_k \subseteq U_{kL}$. Außerdem ist offensichtlich $U_k \subseteq U'_k$, damit folgt (falls $\dim_S(G, \mathbf{n})$ existiert):

$$\dim_S(G', \mathbf{n}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \#U'_k}{\ln k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \#U_{kL}}{\ln(kL) - \ln L} = \dim_S(G, \mathbf{n})$$

$$\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \#U_k}{\ln k} = \dim_S(G, \mathbf{n})$$

Analoges gilt für obere und untere Skalierungsdimension. \square

2.2.2 Weitere Dimensionsbegriffe für Graphen

Neben den bereits angesprochenen findet sich in der Literatur eine weitere Vielfalt an Vorschlägen für die Dimension eines Graphen:

Antonsen ([Ant]) schlägt die Ordnung des größten Simplex (“maximale Dimension”) und die Ordnung des häufigsten Simplex (“effektive Dimension”) in G vor, jeweils abzüglich eins.

Evako ([Eva]) definiert eine axiomatische Dimension durch die folgende rekursive Konstruktion: (1) Der nicht zusammenhängende Zweipunktgraph heiße normaler null-dimensionaler Graph. (2) Ein Graph heiße genau dann normaler n -dimensionaler Graph, wenn er sich nur aus normalen n -dimensionalen Knoten zusammensetzt und zusammenhängend ist ($n \geq 1$). (3) Ein Knoten $\mathbf{n} \in G$ heiße normaler n -dimensionaler Knoten, wenn $\Gamma_1(\mathbf{n})$ einen normalen $n - 1$ -dimensionalen Graphen induziert ($n \geq 1$). Die einzigen normalen ein-dimensionalen und zusammenhängenden Graphen sind die Kreisgraphen C_n und \mathbb{Z} , das trigonale Gitter ist normal zwei-dimensional. Die kubischen Gitter \mathbb{Z}^n mit $n \geq 2$ und das Gitter zur dichtesten Kugelpackung in drei Dimensionen sind keine normalen n -dimensionalen Graphen. Deshalb führt Evako seine Definition folgendermaßen weiter aus: (4) Ein Knoten $\mathbf{n} \in G$ heiße null-dimensional, wenn $\Gamma_1(\mathbf{n})$ ein Simplex ist. (5) G heiße null-dimensional, wenn jeder $\mathbf{n} \in G$ null-dimensional ist (damit ist jeder Simplex mit mindestens drei Knoten null-dimensional). (6) G heiße geschlossen n -dimensional, wenn jeder Punkt höchstens n -dimensional und G homotop zu einem normalen n -dimensionalen Graphen ist, d.h. G aus einer Reihe spezieller Transformationen hervorgeht. (7) $\mathbf{n} \in G$ heiße n -dimensional, wenn $\Gamma_1(\mathbf{n})$ einen geschlossenen $n - 1$ -dimensionalen Untergraphen aber keinen geschlossenen n - oder höher dimensionalen Untergraphen enthält. (8) G heiße n -dimensional, wenn G mindestens einen n -dimensionalen, aber keinen höher dimensional Knoten enthält.

Dimakis und Müller-Hoissen verwenden in [DM₁] als Dimension eines (gerichteten) Graphen die homologische Dimension eines in natürlicher Weise zugeordneten Differentialkalkls, d.h. der Grad der höchsten nicht-verschwindenden Differentialform.

Abgesehen von Antonsens effektiver Dimension sind alle diese Begriffe nicht stabil gegen kleine Änderungen, d.h. eine einzige zusätzliche Kante kann bereits die

Dimension verändern, eine größere Zahl lokaler Änderungen kann auch Antonsens effektive Dimension ändern. Seine Dimensionsbegriffe ordnen im übrigen jedem kubischen Graphen \mathbb{Z}^n die Dimension eins zu.

Eine leichte Abwandlung der Skalierungsdimension wurde in [RL] eingeführt, um ein vergleichbares Konzept für große, endliche Graphen zu bekommen: Ein n -dimensionaler, würfelförmiger Gitterausschnitt von \mathbb{Z}^n mit der Kantenlänge $L - 1$ (d.h. $L - 1$ Kanten und L Knoten) besitzt $N(G) = L^n$ Knoten und einen Durchmesser $\text{diam } G = n \cdot (L - 1)$. Für nicht-kubische (z.B. trigonale) Gitter ist $N(G) \approx k_1 L^n$ und $\text{diam } G \approx k_2 n L$ mit $O(1)$ -Konstanten k_1 und k_2 . Für sehr große L ist damit

$$\frac{\ln N(G)}{\ln \text{diam } G} = \frac{\ln(k_1 L^n)}{\ln(k_2 n L)} \approx \frac{n \ln L + \ln k_1}{\ln L + \ln(n k_2)} \rightarrow n \text{ für } L \rightarrow \infty,$$

also eine mögliche Größe zur Beschreibung der Dimension endlicher Graphen. Sie lässt sich mit der Skalierungsdimension folgendermaßen verbinden:

Definition 2 Sei G ein zusammenhängender Graph. Dann ist die approximative Dimension (beginnend bei $\mathbf{n} \in G$)

$$\dim_A(G, \mathbf{n}) := \lim_{l \rightarrow \text{diam}(G)} \frac{\ln \#U_{\mathbf{n}}(l)}{\ln l}. \quad (2.1)$$

Wie bei der Skalierungsdimension wird $\dim_A(G) = \infty$ gesetzt, falls $\#U_{\mathbf{n}}(l) = \infty$ für ein $l \in \mathbb{N}$ werden sollte.

Dieser Dimensionsbegriff erweist sich als nützlich bei der Untersuchung des Smallworld-Modells (Abschnitt 4.2.2) und auch von großen endlichen Ausschnitten unendlicher Graphen. Für endliche Graphen geht er über in $\ln n(G) / \ln \text{diam}(G)$ (ist also im Fall zusammenhängender Graphen unabhängig von \mathbf{n}), für unendliche, aber lokal endliche Graphen in die Skalierungsdimension (hier ist $\text{diam}(G) = \infty$).

In Abschnitt 2.4 werden wir eine weitere Definitionsmöglichkeit für die Dimension kurz vorstellen, die *isoperimetrische Dimension*.

2.2.3 Dimensionsbegriffe für metrische Räume

In dieser Arbeit tauchen noch zwei weitere Dimensionsbegriffe auf, die auf allgemeineren Räumen definiert sind, für Graphen aber beide Null ergeben. Auf die Hausdorffdimension gehen wir später ein, die andere ist die sogenannte topologische Dimension:

Definition 3 Ist S ein topologischer Raum, so definieren wir die topologische Dimension $\dim_T S$ von S als das Infimum aller n , für die jede Überdeckung von S eine Teilüberdeckung der Ordnung n enthält (eine Überdeckung hat Ordnung n , wenn jeder Punkt $x \in S$ in nicht mehr als $n + 1$ ihrer Mengen enthalten ist).

Diese Zahl lässt sich auch rekursiv definieren durch Schnitte des topologischen Raums mit Teilmengen der topologischen Dimension $n - 1$. Eine gute Referenz für die topologische Dimension ist Hurewicz-Wallmann ([HW]). Dort wird auch auf den Zusammenhang zwischen topologischer und Hausdorffdimension eingegangen. So gilt stets $\dim_T S \leq \dim_H S$ für alle metrischen Räume S und es gibt explizite Beispiele für $\dim_T S < \dim_H S$. Ist S aber ein topologischer Raum, so ist das Infimum über die Hausdorffdimension aller metrischen Räume mit der Topologie von S gleich der topologischen Dimension.

2.3 Symmetrien und Gitter

Eine wichtige (aber nicht typische) Klasse von Graphen bilden die *Gitter*. Sie lassen sich am einfachsten durch Forderung von Translationsinvarianz beschreiben, die im folgenden charakterisiert werden soll.

Zunächst führen wir einen Isomorphiebegriff für Graphen ein: Gegeben zwei Graphen $G = (V, B)$ und $G' = (V', B')$, so nennen wir eine Abbildung

$$f = (f_V, f_B) : (V, B) \rightarrow (V', B')$$

einen *Homomorphismus* von Graphen, wenn

$$f_B(\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\}) = \{f_V(\mathbf{n}), f_V(\mathbf{m})\} \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m} \in V$$

gilt, also die Struktur des Graphen (einseitig) erhält. Die Abbildung f heißt *Isomorphismus*, wenn sie bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} Homomorphismen sind. Zwei Graphen G, G' heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus gibt, der sie aufeinander abbildet, geschrieben $G \simeq G'$.

Zwei Graphen sind offensichtlich genau dann *isomorph*, wenn sie als metrische Räume *isometrisch* sind, wir können also “isomorph” und “isometrisch” für Graphen synonym verwenden.

Ein Isomorphismus eines Graphen in sich selbst heißt *Automorphismus*. Die Automorphismengruppe bezeichnen wir mit $\text{Aut}(G)$, ihre Elemente werden mit \mathbf{a} notiert. Nach Izbicki gibt es zu jeder endlichen Gruppe auch einen Graphen mit dieser Gruppe als Automorphismengruppe (vgl.[Big]).

2.3.1 Graphensymmetrien

Entsprechend der regellosen Struktur eines Graphen gibt es eine Vielzahl verschiedener Symmetriebegriffe für Graphen. Wir folgen hier der Darstellung von Biggs in [Big], in dem neben Regularität noch sechs weitere Symmetrien vorgestellt werden.

Definition 4 Ein Graph $G = (V, B)$ heißt knoten- oder vertex-transitiv, wenn $\text{Aut}(G)$ transitiv auf V operiert. Dies ist nach Definition genau dann der Fall, wenn es zu je zwei Knoten \mathbf{n} und $\mathbf{m} \in G$ einen Automorphismus gibt, der \mathbf{n} auf \mathbf{m} abbildet. Analog bezeichnen wir G als kanten-transitiv, wenn $\text{Aut}(G)$ transitiv auf B operiert.

Es gibt sowohl knoten-transitive Graphen, die nicht kanten-transitiv sind (z.B. Leitergraphen), als auch solche, die kanten- aber nicht knoten-transitiv sind (z.B. zweiseitige Graphen). Ein knoten-transitiver Graph ist im übrigen automatisch bereits regulär; für kanten-transitive gilt dies nicht. Für metrische Räume gibt es einen zur Knoten-Transitivität analogen Begriff: Ein metrischer Raum heißt *homogen*, wenn es zu jedem Paar $x, y \in S$ eine Isometrie f gibt mit $f(x) = y$. Für Graphen reduziert sich Homogenität wieder auf Knoten-Transitivität.

Definition 5 G heißt symmetrisch (im algebraischen Sinne), wenn es zu jedem Quadrupel $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{m}, \mathbf{m}' \in V$ mit $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}'\} \in B$ und $\{\mathbf{m}, \mathbf{m}'\} \in B$ einen Automorphismus $\mathbf{a} : G \rightarrow G$ mit $\mathbf{a}(\mathbf{n}) = \mathbf{m}$ und $\mathbf{a}(\mathbf{n}') = \mathbf{m}'$ gibt.

Diese Definition ist stärker als die der Kantentransitivität, da nicht nur eine Kante auf eine andere abgebildet werden muss, sondern zudem eine bestimmte Orientierung der Kanten gefordert wird (die Orientierung ist dabei in den Endknoten \mathbf{n}, \mathbf{n}' und \mathbf{m}, \mathbf{m}' kodiert). Ein symmetrischer Graph ist dagegen stets auch knoten- und kanten-transitiv. Tutte konnte 1966 zeigen, dass ein endlicher, knoten- und kanten-transitiver Graph mit ungerader Koordinationszahl symmetrisch ist, ein 4-reguläres Gegenbeispiel aus 27 Knoten konnte Holt 1981 beschrieben. Im Zusammenhang mit gerichteten Graphen wird der Begriff "symmetrisch" verwendet, wenn es zu jeder Kante auch die Kante in entgegengesetzter Richtung gibt. Um eine eventuelle Verwechslung auszuschließen, empfehlen sich die Bezeichnungen "algebraisch-symmetrisch" und "gerichtet-symmetrisch".

Definition 6 G heißt entfernungs-transitiv, wenn es zu jedem Quadrupel $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{m}, \mathbf{m}' \in V$ mit $d(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = d(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$ einen Automorphismus gibt, der \mathbf{n} auf \mathbf{m} und \mathbf{n}' auf \mathbf{m}' abbildet. G heißt schwach-homogen^a, wenn es zu je zwei zueinander isomorphen induzierten Untergraphen $G_1, G_2 \subseteq G$ mindestens einen Isomorphismus $G_1 \rightarrow G_2$ gibt, der zu einem Automorphismus von G erweitert werden kann. G heißt homogen^a, wenn sich sogar jeder Isomorphismus zwischen ihnen derart erweitern lässt.¹

Sheehan und Gardiner klassifizierten in den 70er Jahren die endlichen homogenen^a und schwach-homogenen^a Graphen. Danach ist jeder schwach-homogene^a Graph

¹Um diese Begriffe von der sehr viel schwächeren Homogenität metrischer Räume zu unterscheiden, kennzeichnen wir sie durch ein hochgestelltes a . Wir werden sie im weiteren Verlauf der Arbeit nicht mehr verwenden und geben sie nur der Vollständigkeit halber mit an.

entweder (a) der kreisförmige Graph C_5 , (b) die disjunkte Vereinigung von $t \geq 1$ Kopien des n -Simplex, (c) deren Komplemente (die vollständigen t -seitigen Graphen $K_{s,\dots,s}$ mit $t \geq 2$) oder (d) der Graph $L(K_{3,3})$, der entsteht, wenn man alle Kanten von $K_{3,3}$ als Knoten und gemeinsame Endknoten als Kanten auffasst. Überraschenderweise sind alle diese Graphen nicht nur schwach-homogen^a, sondern sogar homogen^a. Zusammenfassend gilt die folgende Hierarchie zwischen den verschiedenen Symmetriebegriffen:

homogen^a \Rightarrow schw.-homogen^a \Rightarrow entfernungs-tr. \Rightarrow symmetrisch \Rightarrow kanten-tr.
 symmetrisch \Rightarrow knoten-tr. \Rightarrow regulär
 knoten-tr., kanten-tr., ungerade-regulär, endlich \Rightarrow symmetrisch
 schwach-homogen^a, endlich \Rightarrow homogen^a

Aus physikalischer Sicht sind knoten-transitive (= homogene) Räume besonders interessant, da sie die natürliche Gleichförmigkeit des physikalischen Raums am besten widerspiegeln, zumal wir bei der Betrachtung von Graphen als Ersatz für das Kontinuum sets nur winzige Ausschnitte desselben im Auge haben, in dem sich also physikalische Größen wie z.B. der metrische oder der Krümmungstensor nur unwesentlich verändern. Eine große Klasse homogener Graphen bilden die Cayleygraphen, die wir als nächstes vorstellen wollen.

2.3.2 Cayleygraphen und Gitter

Unter dem Begriff "Gitter" versteht man üblicherweise Bravaisgitter. Dies sind diskrete Untermengen A des \mathbb{R}^n , die sich durch Translationsinvarianz entlang der durch Paare von Punkten in A definierten Verschiebungsvektoren auszeichnen. Darüberhinaus müssen Bravaisgitter auch den \mathbb{R}^n aufspannen, d.h. ein zweidimensionales Bravaisgitter gilt nicht zusätzlich als dreidimensionales. Bravais konnte 1848 alle Bravais-Gitter in drei Dimensionen beschreiben und unterscheidet 7 Kristallsysteme, die sich durch zusätzliche Symmetrien voneinander unterscheiden. Abgesehen von Ähnlichkeitstransformationen sind dabei 14 mögliche Raumgitter möglich.

Dieser Begriff eines Gitters ist jedoch für die Untersuchung von Graphen eher unpraktisch, aus folgenden Gründen: Ein Bravaisgitter ist stets an die Einbettung im \mathbb{R}^n gebunden, außerhalb von diesem verliert es die Bedeutung seiner Symmetrien. Hinzu kommt, dass es in einem Bravaisgitter a priori keine Kanten gibt, die das Gitter außerhalb des \mathbb{R}^n zusammenhalten könnten. Wir benötigen also eine andere Definition.

Definition 7 Sei \mathfrak{G} eine endlich erzeugte Gruppe und $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{G}$ eine endliche Untergruppe. Wir nennen $G = (\mathfrak{G}, B)$ den zugehörigen Cayleygraphen $\text{Cay}(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ (in der Literatur auch als "group lattice" bezeichnet), wobei eine gerichtete Kante

genau dann von $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{g}' \in \mathfrak{G}$ weist, wenn es ein Element $\mathfrak{h} \in \mathfrak{S}$ gibt mit $\mathfrak{g}\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'$, also

$$B = \{\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'\} \in \mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}) : \mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{g}' \in \mathfrak{S}\}$$

Offensichtlich ist G genau dann ein einfacher Graph, wenn $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1}$ und $\mathfrak{e} \notin \mathfrak{S}$ gelten. Als (freies) Gitter bezeichnen wir in dieser Arbeit einen zusammenhängenden und einfachen Cayleygraphen zu einer (freien) abelschen Gruppe.

Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen (vgl.z.B.[Bos]) lässt sich eine abelsche Gruppe \mathfrak{G} stets zerlegen in $\mathbb{Z}^n \times \mathfrak{H}$ mit einer endlichen Gruppe \mathfrak{H} (dem sogenannten Torsionsmodul), die weiter als direkte Summe von \mathbb{Z}_{q_i} mit Primpotenzen q_i dargestellt werden kann. Ein freies Gitter ist also stets von der Form $\text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S})$. Beispiele für freie Gitter sind die kubischen Gitter $\mathbb{Z}^n = \text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \{\mathfrak{e}_i, -\mathfrak{e}_i : i = 1 \dots n\})$ und das trigonale Gitter $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, \{\pm\mathfrak{e}_1, \pm\mathfrak{e}_2, \pm(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2)\})$. Beispiele für nicht-freie Gitter sind endliche Simplices aus mindestens zwei Elementen ($\text{Cay}(\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_q \setminus \{0\})$) und zylinderförmige Gitter ($\text{Cay}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_q, \mathfrak{S})$).

Beispiel: Das zweidimensionale hexagonale Gitter lässt sich nur durch eine nicht-kommutative Gruppe darstellen: Angenommen, es ist Cayleygraph zu einer kommutativen Gruppe \mathfrak{G} . Es ist 3-regulär, wird also von drei Elementen aufgespannt. Nach Forderung muss eines dieser Elemente sein eigenes Inverses sein, also ist die Erzeugendenmenge von der Gestalt $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, -\mathfrak{h}\}$ mit $\mathfrak{g} = -\mathfrak{g}$ (additive Schreibweise, da kommutativ). Dann wird von den Elementen \mathfrak{g} und \mathfrak{h} ein Viereck im Graphen aufgespannt, das aber im hexagonalen Gitter nirgends existiert. Folglich ist in unserer Schreibweise das hexagonale Gitter kein Gitter. Allerdings lässt es sich zumindest durch eine nicht-kommutative Gruppe darstellen (multiplikative Schreibweise, da nicht-kommutativ):

$$\text{Cay}(\langle \mathfrak{g}, \mathfrak{h} : \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{e}, \mathfrak{g}\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}^2\mathfrak{g} \rangle, \{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{-1}\})$$

Wir haben Cayleygraphen eingeführt und werden sie auch weitgehend nutzen als Beispiele für besonders geordnete, nämlich für knoten-transitive Graphen. Dazu besitzen sie aufgrund ihrer Gruppenstruktur zusätzlich leicht zu charakterisierende Translationen, die uns die Arbeit mit ihnen erleichtern werden. Dabei bleiben sie natürlich nur eine Klasse besonderer Graphen, später werden wir sie durch stochastische Überlegungen etwas verallgemeinern können. Wir wollen ihre Besonderheiten kurz notieren:

Lemma 4 *Ein Gitter G ist stets translationsinvariant (bzgl. Translation um ein festes Gruppenelement), knoten-transitiv, lokal endlich und besitzt eine ganzzahlige Skalierungsdimension: Ist $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{H}$ mit einer endlichen Gruppe \mathfrak{H} und*

$n \in \mathbb{N}_0$, so gilt für die Skalierungsdimension $\dim_S \text{Cay}(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}) = n$. Ein freies Gitter ist stets regulär mit geradem Vertexgrad. Aber es gibt freie Gitter, die nicht kanten-transitiv (und damit auch nicht algebraisch-symmetrisch oder distanz-transitiv) sind.

Beweis: Eine Translation der Form $\alpha_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}, \mathfrak{n} \mapsto \mathfrak{n} + \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ ist aufgrund der Kommutativität ein Automorphismus des Graphen auf sich: Sind \mathfrak{n} und \mathfrak{m} benachbart, dann existiert ein $\mathfrak{h} \in \mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{n} + \mathfrak{h} = \mathfrak{m}$. Dann ist auch $\mathfrak{m} + \mathfrak{g} = (\mathfrak{n} + \mathfrak{h}) + \mathfrak{g} = (\mathfrak{n} + \mathfrak{g}) + \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{n} + \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{m} + \mathfrak{g}$ sind benachbart. Genau genommen ist jedes Cayleygitter linksinvariant, aber nicht notwendig rechtsinvariant (in [DM₂] wird ein beidseitig invarianter Cayleygraph als bico-variant bezeichnet). Aufgrund der Existenz eines Inversen ist G damit auch knoten-transitiv (um \mathfrak{n} auf \mathfrak{m} abzubilden wähle $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} - \mathfrak{n}$) und folglich auch j -regulär, mit $j = \#\mathfrak{S}$. Da wir $\mathfrak{S} = -\mathfrak{S}$ gefordert haben, und im Fall eines freien Gitters das einzige Element mit $\mathfrak{g} = -\mathfrak{g}$ (nämlich 0) ausgeschlossen wurde, ist $\#\mathfrak{S}$ gerade. Für ein nicht-freies Gitter kann das Torsionsmodul \mathbb{Z}_2 beinhalten und somit ungerade-regulär sein. Lokale Endlichkeit folgt direkt aus der Endlichkeit von \mathfrak{S} . Zur algebraischen Symmetrie lässt sich folgendes Beispiel anbringen: $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{\pm 1, \pm 2\})$ ist dem Leitergraphen sehr ähnlich (vgl. Abbildung 2.1) und ist wie dieser nicht kanten-transitiv. Nun zur Skalierungsdimension: Wir haben gefordert, dass G zusammenhängend ist. Damit können wir einen beliebigen Startpunkt wählen, dazu eignet sich insbesondere 0. Aufgrund der Endlichkeit von \mathfrak{H} ist dieses für die Skalierungsdimension uninteressant (Kreuzprodukt mit einem null-dimensionalen Graphen und Verändern der Kanten innerhalb eines endlichen Radius). Sei also $\text{oBdA } \mathfrak{H} = \emptyset$ und $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}^n$. Nun bilden wir $\mathfrak{S}' := \{\pm \mathbf{e}_j : j = 1 \dots n\}$. Es ist offensichtlich $\text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S}') = \mathbb{Z}^n$ und besitzt damit Skalierungsdimension d . Für $\text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}')$ werden zu diesem nur Kanten in endlichen Abständen hinzugefügt (Endlichkeit von \mathfrak{S} , $\text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S}')$ ist zusammenhängend), also ist $\dim_S \text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}') = \dim_S \text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S}')$. Analog werden im Schritt von $\text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S})$ zu $\text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}')$ ebenfalls nur Kanten in endlichem Abstand eingefügt (hierfür ist nötig, dass $\text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S})$ zusammenhängend ist), und damit

$$\dim_S \text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S}) = \dim_S \text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}') = \dim_S \text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S}') = n$$

□

Nicht jeder knoten-transitive Graph ist automatisch ein Cayleygraph, ein endliches Gegenbeispiel ist der sogenannte Petersen-Graph (2.2). Es ist allerdings möglich, aus der Automorphismengruppe eines Graphen zu erkennen, ob er ein Cayleygraph ist; wir geben hier ohne Beweis ein Lemma aus [Big] an:

Lemma 5 *Sei $G = (V, B)$ ein endlicher und zusammenhängender Graph. Eine Untergruppe $\mathfrak{H} \subseteq \text{Aut}(G)$ operiert genau dann regulär auf V , wenn G isomorph*

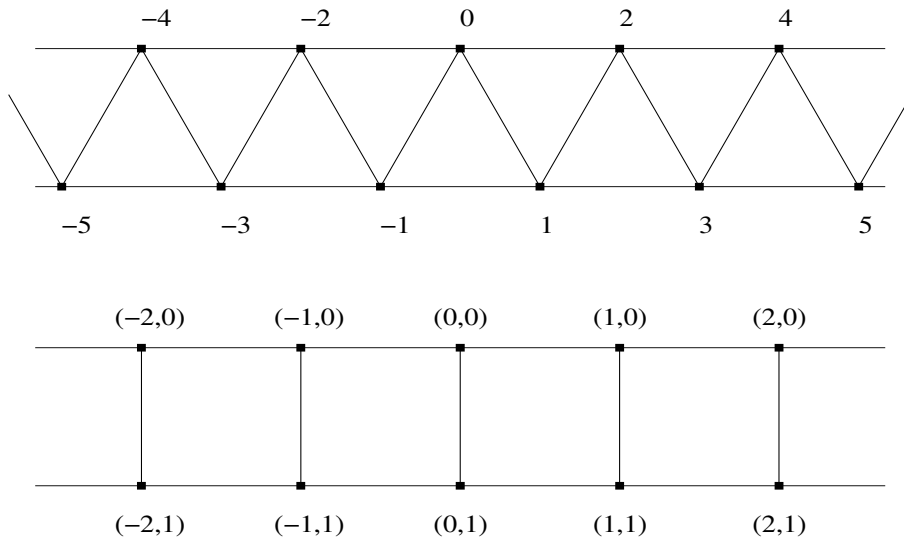


Abbildung 2.1: Oben: $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{\pm 1, \pm 2\})$, unten: $\text{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1)\})$ (Leitergraph)

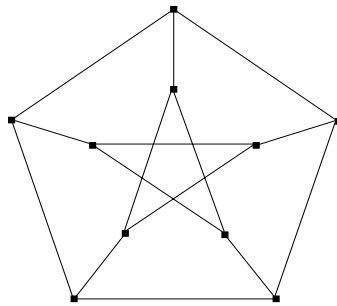


Abbildung 2.2: Der Petersen-Graph: Kanten- und knotentransitiv, aber kein Cayleygraph.

ist zu einem Cayleygraphen $\text{Cay}(\mathfrak{H}, \mathfrak{S})$, mit einer Untermenge $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{H}$, die \mathfrak{H} erzeugt. (\mathfrak{H} operiert nach Definition genau dann regulär auf V , wenn es keinen Automorphismus in \mathfrak{H} gibt, der mindestens einen Fixpunkt in V besitzt.)

Nichtsdestotrotz lässt sich jeder zusammenhängende vertex-transitive Graph als sogenannte “Retraktion” eines Cayleygraphen darstellen. Insbesondere sind die Skalierungsdimensionen dieser beiden Graphen identisch ([GR], [ST]) und nach einem Ergebnis von Bass ganzzahlig ([Bas]); wir werden darauf in Lemma 17 zurückkommen.

Desweiteren ist ein Graphenautomorphismus eines Cayleygraphen im allgemeinen kein Gruppenautomorphismus der erzeugenden Gruppe, also $f(\mathfrak{g}\mathfrak{h}) \neq f(\mathfrak{g}) \cdot f(\mathfrak{h})$; als Beispiel dient bereits ein einfacher Baumgraph, wie er aus einer freien Gruppe hervorgeht. Dies liegt auch darin begründet, dass die Gruppenstruktur in die Geometrie des Cayleygraphen zwar einfließt, aber nicht eindeutig aus dieser

rekonstruiert werden kann: Es gibt explizite Beispiele für isometrische Cayleygraphen zu verschiedenen Gruppen.

2.4 Weitere Graphencharakteristika

In dieser Arbeit werden wir uns auf die Untersuchung der Geometrie eines Graphen und seiner Skalierungsdimension beschränken. Das soll aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass es eine große Zahl weiterer Eigenschaften gibt, die sich in den Kontinuumslimites übertragen könnten und damit einer tieferen Untersuchung bedürfen:

Ein Beispiel hierfür ist der *Clusteringkoeffizient* (vgl. [WS], [Zho])

$$\text{Clus}(G) := E^{n \in G} \frac{2 \langle \Gamma_n(1) \rangle}{\# \Gamma_n(1) \cdot (\# \Gamma_n(1) - 1)}.$$

Er ist ein Maß für die gegenseitige Verknüpfung einer Nachbarschaft (“Wie wahrscheinlich ist es, dass zwei Knoten, die beide mit einem dritten Knoten verbunden sind, auch miteinander verbunden sind?”). Für (genügend große) Simplexe ist der Clusteringkoeffizient Eins, für Baumgraphen Null. Der Clusteringkoeffizient ist besonders für zufällig konstruierte Graphen von Interesse, beispielsweise Smallworld-Netzwerke.

Unter der *isoperimetrischen Zahl* eines Graphen $G = (V, B)$ versteht man das Verhältnis

$$i^{(\infty)} := \inf_{A \subseteq V: 1 \leq \#A \leq \#G/2} \frac{\#\partial A}{\#A} \quad \text{mit} \quad \#\partial A := \#\{\mathbf{b} \in B : \#(\mathbf{b} \cap A) = 1\}.$$

$\#\partial A$ ist dabei gerade die Zahl der Kanten, die aus A hinausreicht, was mit einer Art Oberfläche von A verglichen werden kann. Diese Konstante wird u.a. in der Untersuchung von Random-Walk-Modellen verwendet. Für einen vollständig unzusammenhängenden Graphen ist sie stets Null, für einen n -Simplex gerade $\lceil n/2 \rceil$. Für die kubischen Gitter \mathbb{Z}^n ist sie ebenfalls stets Null, da die Oberfläche der Bälle $B_0[r]$ und damit auch die durch die Regularität beschränkte Kantenzahl wie r^{n-1} anwächst, das Volumen aber wie r^n ; weitere Beispiele in [Bol₂]. Die isoperimetrische Zahl ist ein Analogon der Cheegerzahlen, die von Cheeger 1970 eingeführt wurden, um Schranken für den Laplace-Operator auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten herzuleiten, der in einem engen Zusammenhang zum Random-Walk steht. Daher wird die isoperimetrische Zahl auch als Cheegerzahl oder Cheegerkonstante bezeichnet.

Varopoulos untersucht in [Var] eine Variation der isoperimetrischen Zahl; dazu definiert er die *k-dimensionale isoperimetrische Zahl*

$$i^{(k)}(G) := \inf_A \frac{\#\partial A}{(\#A)^{-(k-1)/k}}.$$

Für die kubischen Gitter gilt $i^{(k)}(\mathbb{Z}^n) > 0 \Leftrightarrow k \leq n$. Dies rechtfertigt die Definition

$$\dim_{\text{isop}}(G) := \inf\{k \in \mathbb{R} : i^{(k)}(G) = 0\}.$$

Da die isoperimetrische Dimension aus dem Vergleich des Wachstums von Volumen und Oberfläche, und nicht, wie die Skalierungsdimension, von Volumen und Radius resultiert, kann man Abweichungen der beiden Dimensionsbegriffe voneinander erwarten. Insbesondere sollte sich ein interessanter Zusammenhang zwischen diesen beiden und der in [RN] definierten Konnektivitätsdimension ergeben, die das Wachstum von Oberfläche und Radius miteinander vergleicht.

Kapitel 3

Kontinuumslimites

3.1 Der Gromov-Hausdorff-Abstand

Unter einem Kontinuumslimites versteht man üblicherweise den Limes $\ell \rightarrow 0$, wobei ℓ eine Länge ist, die den untersuchten Raum charakterisiert, beispielsweise eine Kantenlänge. Genaugenommen haben wir es aber mit einer Folge von Räumen und nicht von Zahlen zu tun, die Zahlen dienen nur zur Parametrisierung der Räume. Für einen mathematisch fundierten Konvergenzbegriff müssen wir also eine Topologie, noch besser eine Metrik auf einer geeigneten Menge von Räumen finden. In [Gro₁] und später in [Pet] wird ein Konvergenzbegriff für metrische Räume untersucht, der im wesentlichen auf der Hausdorffmetrik von (kompakten) Untermengen metrischer Räume basiert:

Definition 8 Sei S ein metrischer Raum und $A, A' \subseteq S$, außerdem $r \in \mathbb{R}_0^+$. Dann definieren wir den offenen r -Ball $B_A(r)$ bzw. den abgeschlossenen r -Ball $B_A[r]$ um A zum Radius r als die Menge $\{x \in S : \text{dist}(A, x) < r\}$ bzw. $\{x \in S : \text{dist}(A, x) \leq r\}$. Der Hausdorffabstand zwischen A und A' ist dann

$$d_H(A, A') := \inf\{r > 0 : A \subseteq B_{A'}(r) \quad \wedge \quad A' \subseteq B_A(r)\},$$

d.h. derjenige Radius r , zu dem sowohl A im r -Ball um A' als auch A' im r -Ball um A enthalten ist (vgl. Abb. 3.1).

Dieser Abstands begriff bildet auf dem Raum aller Kompakta von S eine Metrik, die Hausdorffmetrik. Gromov dehnte ihn auf einen Abstands begriff zwischen metrischen Räumen aus:

Definition 9 Seien (S_1, d_1) und (S_2, d_2) zwei metrische Räume. Ihr Gromov-Hausdorff-Abstand $d_{GH}(S_1, S_2)$ ist das Infimum über alle $\epsilon \geq 0$, zu denen eine Metrik d_\cup auf der disjunkten Vereinigung $S_1 \dot{\cup} S_2$ existiert, so dass $d_\cup|_{S_j} = d_j$ für $j \in \{1, 2\}$ und der Hausdorff-Abstand zwischen S_1 und S_2 (als Untermengen von $S_1 \dot{\cup} S_2$) kleiner ist als ϵ . (Das Infimum über die leere Menge ist ∞ .)

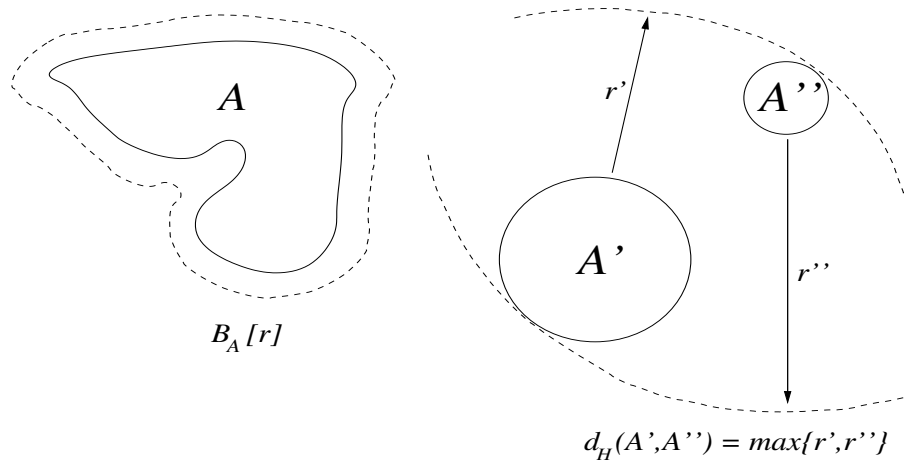


Abbildung 3.1: Links: Ball um eine Untermenge, rechts: Hausdorffabstand

Bemerkung: Eine alternative, etwas kanonischere Definition ist die folgende: “Der Gromov-Hausdorff-Abstand $d_{GH}(S_1, S_2)$ ist das Infimum über alle $\epsilon \geq 0$, zu denen ein metrischer (dann auch ein vollständiger) Raum S' und zwei isometrische (und damit notwendig injektive) Einbettungen f_1 und f_2 von S_1 bzw. S_2 in S' existieren, so dass der Abstand der Untermengen $f_1(S_1)$ und $f_2(S_2)$ in Bezug auf S' kleiner ist als ϵ .” Sie ist äquivalent zur obigen Definition ([Pet]), aber wesentlich schwieriger zu handhaben.

Der soeben vorgestellte Abstandsbegriff besitzt im nicht-kompakten Fall, für den wir uns besonders interessieren, eine Reihe von Problemen, die bei alternativen Ansätzen nicht auftreten. Wir werden diesen Problemen begegnen, indem wir uns auf homogene oder nahezu homogene Räume konzentrieren, die genauen Vor- und Nachteile ebenso wie die physikalische Motivation wollen wir aber erst in Abschnitt 3.10 diskutieren, um uns zuvor mit der mathematischen Struktur vertrauter machen.

Ein solcher alternativer Abstandsbegriff, der *punktierte Gromov-Hausdorff-Abstand* stammt von Gabber und wurde bereits von Gromov in seinem Paper [Gro₁] für den nicht-kompakten Fall verwendet. Wir müssen ihn allerdings kurz einführen, um die Ergebnisse von Gromov übernehmen zu können:

Definition 10 Seien (S_1, d_1) und (S_2, d_2) zwei metrische Räume und $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$ (sog. *Aufhängepunkte*). Ihr punktierte Gromov-Hausdorff-Abstand $d_{pGH}((S_1, x_1), (S_2, x_2))$ ist das Infimum über alle $\epsilon \geq 0$, zu denen eine Metrik d_\cup auf der disjunkten Vereinigung $S_1 \dot{\cup} S_2$ existiert, so dass gilt:

1. $d_\cup|_{S_j} = d_j$ für $j \in \{1, 2\}$,
2. $d_\cup(x_1, x_2) < \epsilon$,

3. $B_{x_j}(1/\epsilon) \subseteq B_{S_k}(\epsilon)$ für $\{j, k\} = \{1, 2\}$ (d.h. der $1/\epsilon$ -Ball um x_1 befindet sich in einer ϵ -Umgebung von S_2 und umgekehrt).

Wie ist der Zusammenhang zwischen GH- und pGH-Abstand? Beispielsweise ist der GH-Abstand des Intervalls $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ zu sich selber stets 0. Wählen wir zwei verschiedene Aufhängepunkte $x_1, x_2 \in [0, 1]$, so ist der pGH-Abstand von $([0, 1], x_1)$ zu $([0, 1], x_2)$ zwar größer 0, das Infimum über alle x_1, x_2 ist aber dennoch 0. Andererseits ist der GH-Abstand zwischen $[-1, 1]$ und \mathbb{R} unendlich, der pGH-Abstand zwischen $[-1, 1]$ und \mathbb{R} je nach Aufhängepunkt größer oder gleich $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Prinzipiell können also GH-Abstand und pGH-Abstand in beliebiger Weise voneinander abweichen. Setzen wir nun aber voraus, dass beide Räume homogen sind (d.h. zu je zwei Punkten $x_j, y_j \in S_j$ gibt es eine Isometrie, die x_j auf y_j abbildet), so spielt die Wahl der Aufhängepunkte keine Rolle mehr. In diesem Fall ist die Bedingung an ϵ im pGH-Abstand schwächer als im GH-Abstand und wir erhalten

$$d_{pGH}(S_1, S_2) \leq d_{GH}(S_1, S_2)$$

für homogene und vollständige metrische Räume S_1, S_2 . Insbesondere bedeutet dies folgendes: Wenn eine Folge (S_j) homogener Räume im GH-Abstand gegen den homogenen Raum S konvergiert, so geschieht dies auch im pGH-Abstand; die Umkehrung gilt nicht. Dies erlaubt es uns, die Eigenschaften für pGH-Limesräume, die in [Gro₁] bestimmt wurden, auf GH-Limesräume zu übertragen (vgl. Satz 5) – vorausgesetzt, wir können uns ihrer Existenz sicher sein.

Bemerkung: Die Topologie des pGH-Abstands lässt sich auch folgendermaßen beschreiben: Eine Folge (S_j, x_j) konvergiert genau dann gegen (S, x) , wenn für alle $r > 0$ die Folge $(B_{x_j}[r])$ im GH-Abstand gegen $(B_x[r])$ konvergiert (vgl. Abschnitt 3.10).

Wir werden nun die Eigenschaften des GH-Abstands und seine Eignung als Metrik näher beleuchten:

Satz 1 Seien S_1, S_2 und S_3 metrische Räume.

1. Es gilt die Dreiecksungleichung $d_{GH}(S_1, S_3) \leq d_{GH}(S_1, S_2) + d_{GH}(S_2, S_3)$.
2. Sind S_1 und S_2 beschränkt, so ist der Gromov-Hausdorff-Abstand endlich.

Beweis: 1. Ist $d_{GH}(S_1, S_2) = \infty$ oder $d_{GH}(S_2, S_3) = \infty$, so ist die Ungleichung trivial. Seien also beide Abstände endlich. Ist d_{12} eine Metrik auf $S_1 \dot{\cup} S_2$ und d_{23} eine Metrik auf $S_2 \dot{\cup} S_3$, so können wir eine Metrik auf $S_1 \dot{\cup} S_2 \dot{\cup} S_3$ erklären durch $d(s_1, s_3) := \inf_{s_2 \in S_2} (d_{12}(s_1, s_2) + d_{23}(s_2, s_3))$ für $s_1, s_3 \in S_j$; wir bezeichnen dieses Verfahren im folgenden als *Verschmelzung* der Räume $S_1 \dot{\cup} S_2$ und $S_2 \dot{\cup} S_3$. Nach Definition der Hausdorffabstände liegt S_2 im $d_H(S_1, S_2)$ -Ball um S_1 und S_3

wiederum im $d_H(S_2, S_3)$ -Ball um S_2 , jedesmal in Bezug auf den Hausdorffabstand in $S_1 \dot{\cup} S_2 \dot{\cup} S_3$. Damit muss sich auch S_3 im $d_H(S_1, S_2) + d_H(S_2, S_3)$ -Ball um S_1 befinden. Nach Definition des Gromov-Hausdorffabstands können wir Folgen von Metriken auf $S_1 \dot{\cup} S_2 \dot{\cup} S_3$ finden, so dass $d(S_1, S_2) \rightarrow d_{GH}(S_1, S_2)$ und $d(S_2, S_3) \rightarrow d_{GH}(S_2, S_3)$ streben. Nach Voraussetzung sind diese Werte endlich und damit auch der Limes ihrer Summe definiert. Daher gilt die Dreiecksungleichung $d_{GH}(S_1, S_3) \leq d_{GH}(S_1, S_2) + d_{GH}(S_2, S_3)$.

2. Wir wählen $s_1 \in S_1$ und $s_2 \in S_2$ beliebig und erweitern die Metriken von S_1 und S_2 auf $S_1 \dot{\cup} S_2$ durch $d(x, y) := d_1(x, s_1) + 1 + d_2(s_2, y)$ für $x \in S_1, y \in S_2$. Dann ist $d_{GH}(S_1, S_2) \leq 1 + \max\{\text{diam}(S_1), \text{diam}(S_2)\}$. \square

Es ist klar, dass der Gromov-Hausdorff-Abstand isometrischer Räume Null ist. Die Umkehrung gilt leider nicht: Es gibt nicht-isometrische Räume S, S' mit $d_{GH}(S, S') = 0$. Räume mit verschwindendem Gromov-Hausdorff-Abstand bezeichnen wir im weiteren als "pseudo-isometrisch". Wir gehen auf dieses Problem in Abschnitt 3.3 näher ein, wenn wir die notwendigen Werkzeuge bereitgestellt haben.

Es ist naheliegend, die Menge aller vollständigen metrischen Räume modulo Pseudo-Isometrie mit d_{GH} als einen neuen Raum aufzufassen. Um nicht mit mengentheoretischen Problemen zu kollidieren, beschränken wir außerdem die Kardinalität der beteiligten Räume:

Definition 11 Sei \mathbb{M} die Menge aller Pseudo-Isometrieklassen von \mathbb{R} -abzählbaren (d.h. es gibt eine injektive Abbildung nach \mathbb{R}), vollständigen metrischen Räumen, versehen mit der Gromov-Hausdorff-Metrik. Die Pseudo-Isometrieklasse von S bezeichnen wir mit $[S]$, die Isometrieklasse von S dagegen identifizieren wir mit S selber und notieren sie auch mit " S ".

Die GH-Metrik kann auf \mathbb{M} den Wert ∞ annehmen. Dies ist mittels der Dreiecksungleichung eine transitive Eigenschaft, d.h. wir können \mathbb{M} zerlegen in Äquivalenzklassen bezüglich der Relation " S_1 und S_2 haben endlichen GH-Abstand". Wir interpretieren dies als Zusammenhangskomponenten von \mathbb{M} . Ferner ist jede Zusammenhangskomponente für sich genommen mit der induzierten GH-Metrik ein echter metrischer Raum, wir können beispielsweise den Banachschen Fixpunktsatz anwenden und Konvergenzeigenschaften betrachten. Da für Konvergenz der Abstand gegen Null streben muss und damit ab einem bestimmten Index endlich ist, können wir uns für die nun folgende Untersuchung der Vollständigkeit von \mathbb{M} auf Folgen beschränken, deren Glieder in einer gemeinsamen Zusammenhangskomponente liegen – dass es tatsächlich Räume gibt, deren GH-Abstand unendlich groß ist, ist zunächst nicht von Belang.

Lemma 6 \mathbb{M} ist vollständig.

Beweis: Wir übernehmen hier den Beweis aus [Pet], der zeigt, dass jede Cauchyfolge konvergiert, und zeigen außerdem, dass der so konstruierte Grenzraum jeder Cauchyfolge in \mathbb{M} wieder \mathbb{R} -abzählbar ist. Sei also (S'_j) eine Cauchyfolge von Repräsentanten in \mathbb{M} . Sie konvergiert genau dann, wenn mindestens eine Teilfolge konvergiert (dann konvergieren alle). Sei nun (S_j) eine Teilfolge von (S'_j) mit $d_{GH}(S_j, S_{j+1}) < 2^{-j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Zu jedem Paar aufeinanderfolgender Räume können wir damit eine Metrik auf $S_j \dot{\cup} S_{j+1}$ finden, so dass der Hausdorffabstand von S_j und S_{j+1} kleiner ist als 2^{-j} . Durch Verschmelzen dieser disjunkten Vereinigungen können wir eine Metrik auf dem Raum $S_j \dot{\cup} S_{j+1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_k$ ($\forall k > j$) und damit insbesondere auf $S_j \dot{\cup} S_k$ finden, was uns einen Entfernungsbegriff zwischen Punkten aus verschiedenen Folgeelementen liefert. Wir können sogar die disjunkte Vereinigung aller Folgeelemente $\dot{\cup} S_j$ betrachten und mit dieser Metrik versehen, die wir als $d_{\dot{\cup}}$ bezeichnen wollen. In ihr ist auch der Hausdorffabstand zwischen den kanonischen Einbettungen von S_j und S_k durch die Dreiecksungleichung beschränkt durch

$$d_{GH}(S_j, S_k) \leq \sum_{n=j}^{k-1} 2^{-n} = 2^{-j+1} - 2^{-k+1} \leq 2^{-j+1} \text{ für } k > j.$$

Wir definieren nun

$$\hat{S} := \{(x_j)_{j \in \mathbb{N}} : x_j \in X_j \forall j \in \mathbb{N} \wedge d_{\dot{\cup}}(x_j, x_k) \rightarrow 0, j, k \rightarrow \infty\},$$

also als den Raum aller Cauchyfolgen, deren Folgenglieder nacheinander in den Räumen S_j liegen. Sind $(x_j), (y_j) \in \hat{S}$, so lässt sich ein Abstand zwischen ihnen angeben via

$$d((x_j), (y_j)) := \lim_{j \rightarrow \infty} d_{S_j}(x_j, y_j)$$

Dieser Grenzwert existiert stets: Da

$$d_{S_k}(x_k, y_k) \leq d_{\dot{\cup}}(x_k, x_j) + d_{S_j}(x_j, y_j) + d_{\dot{\cup}}(y_j, y_k)$$

gilt (die Metriken d_{S_k} sind nur eingeschränkte Versionen der Metrik $d_{\dot{\cup}}$) und $(x_k), (y_k)$ Cauchyfolgen sind, fällt auch $d_{S_k}(x_k, y_k) - d_{S_j}(x_j, y_j)$ unter jede positive Schranke für $j, k \rightarrow \infty$. Damit ist $(d_{S_j}(x_j, y_j))_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Symmetrie von d ist offensichtlich, die Dreiecksungleichung folgt aus den Dreiecksungleichungen von d_{S_j} und der Existenz des Grenzwertes, ebenso die Positivität von d . Jedoch bildet d nur eine Pseudometrik, d.h. es kann geschehen, dass $d((x_j), (y_j)) = 0$ ist trotz $(x_j) \neq (y_j)$; beispielsweise durch Veränderung der Folgenglieder an endlich vielen Stellen. Durch Identifikation von Folgen mit Abstand 0 erhalten wir den gesuchten Raum $S := \hat{S}/(d(\cdot, \cdot) = 0)$ bzw. dessen Klasse $[S]$.

Bleibt zu zeigen, dass die Cauchyfolge (S_j) tatsächlich gegen S konvergiert. Wir ergänzen dazu $S_j \dot{\cup} S$ zu einem metrischen Raum mittels

$$d'_j(y, (x_k)) := d'_j((x_k), y) := \limsup_{k \rightarrow \infty} d_{\dot{\cup}}(y, x_k) \quad \forall y \in S_j, (x_k) \in S, j \in \mathbb{N}$$

Dieser Grenzwert existiert stets, da er von unten durch 0 begrenzt wird. Weiter ist offensichtlich $d'_j(y, (x_k)) = 0$ aufgrund dieser Beschränkung genau dann, wenn $\lim d_{\dot{\cup}}(y, x_k) = 0$ ist. Dann sind nach Definition von S die Punkte y und (x_k) bereits miteinander identifiziert, d.h. d' ist positiv-definit. Zur Dreiecksungleichung – hier sind vier Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned}
d_{S_j}(y_1, y_2) + d'_j(y_2, (x_k)) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} (d_{S_j}(y_1, y_2) + d_{\dot{\cup}}(y_2, x_k)) \\
&\leq \limsup d_{\dot{\cup}}(y_1, x_k) = d'_j(y_1, (x_k)) \\
d'_j(y, (x_k)) + d((x_k), (z_k)) &= \limsup (d_{\dot{\cup}}(y, x_k) + d_{S_k}(x_k, z_k)) \\
&\leq \limsup d_{\dot{\cup}}(y, z_k) = d'_j(y, (z_k)) \\
d'_j(y_1, (x_k)) + d'_j((x_k), y_2) &= \limsup (d_{\dot{\cup}}(y_1, x_k) + d_{\dot{\cup}}(x_k, y_2)) \\
&\leq \limsup d_{\dot{\cup}}(y_1, y_2) = d_{S_j}(y_1, y_2) \\
d'_j((x_k), y) + d'_j(y, (z_k)) &= \limsup (d_{\dot{\cup}}(x_k, y) + d_{\dot{\cup}}(y, z_k)) \\
&\leq \limsup (d_{\dot{\cup}}(x_k, z_k)) = d((x_k), (y_k))
\end{aligned}$$

Sei nun $(x_j) \in S$. Dies ist eine Cauchyfolge, deswegen können wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n \geq k$ finden, so dass $d'_n(x_n, (x_j))$ kleiner ist als 2^{-k} . Wie wir oben gezeigt haben, können wir $d_{GH}(S_k, S_n) \leq 2^{-k+1}$ erreichen (es gilt $n \geq k$) und damit zu jedem $x_n \in S_n$ ein Element $y \in S_k$ mit $d_{\dot{\cup}}(y, x_n) \leq 2^{-i+1}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
d'_k(y, (x_j)) &= \limsup_{j \rightarrow \infty} d_{\dot{\cup}}(y, x_j) \\
&\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} (d_{\dot{\cup}}(y, x_n) + d_{\dot{\cup}}(x_n, x_j)) \\
&\leq d_{\dot{\cup}}(y, x_n) + d'_j(x_n, (x_j)) \leq 2^{-k} + 2^{-k+1} \leq 2^{-k+2},
\end{aligned}$$

das heißt zu jedem $(x_j) \in S$ kommt eine Folge von Punkten der S_j der Folge (x_j) beliebig nahe, $S \subseteq B_\epsilon(S_k)$ mit $\epsilon \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Sei andererseits $y \in X_k$. Wir setzen $x_j := y$ für alle $j \leq k$ und x_{j+1} für $j \geq k$ derart, dass $d_{\dot{\cup}}(x_j, x_{j+1}) < 2^{-j}$ gilt (dies geht wieder mit Hilfe obiger Abschätzung für den GH-Abstand zwischen S_j und S_{j+1}). Dann bildet die Folge (x_j) eine Cauchyfolge und es ist $d'_k(y, (x_j)) \leq \sum_{j=1}^k 2^{-j} \leq 2^{-k+1} \leq 2^{-k+2}$. Zusammenfassend haben wir nun den GH-Abstand zwischen S_k und S durch 2^{-k+2} beschränkt, es ist also tatsächlich $S_k \rightarrow S$ in der Gromov-Hausdorff-Metrik.

Schließlich betrachten wir die Kardinalität von S : \hat{S} ist Teilmenge aller Folgen aus den Räumen S_j . Da diese \mathbb{R} -abzählbar sind, und die Menge aller Folgen in \mathbb{R} ebenfalls \mathbb{R} -abzählbar ist (es reicht Zahlen im Intervall $(0, 1)$ zu betrachten – aus der Binärdarstellung $0, s_1^j s_2^j s_3^j \dots$ des j -ten Folgengliedes bilde die reelle Zahl $0, s_1^1 s_2^1 s_1^2 s_3^2 s_1^3 \dots$), muss dies auch für S gelten. Nach Konstruktion ist S auch ein vollständiger metrischer Raum und damit \mathbb{M} vollständig. \square

Bemerkung: Dieses Ergebnis ist recht erstaunlich, da die Menge aller abzählbaren metrischen Räume nicht vollständig ist; beispielsweise strebt $(\mathbb{Z}, \ell \cdot d_2)$ (mit

der euklidischen Metrik d_2) für $\ell \rightarrow 0$ gegen den überabzählbaren Raum \mathbb{R} . Dieser Unterschied ist darauf zurückzuführen, dass in der Definition der Metrik selber bereits \mathbb{R} auftaucht und damit eine “mengentheoretische Asymmetrie” zwischen abzählbar/überabzählbar und \mathbb{R} -abzählbar/ \mathbb{R} -überabzählbar verursacht.

3.2 Skalierung und Kontinuumslimes

Wir wissen nun, dass der GH-Abstand die Dreiecksungleichung erfüllt und symmetrisch ist, durch die Bildung von Pseudo-Isometrieklassen können wir Positiv-Definitheit sicherstellen. Darüber hinaus kann der GH-Abstand auch unendlich werden (z.B. zwischen \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 mit euklidischer Metrik), so dass es sich nicht genau um eine Metrik handelt. Als nächstes führen wir einen Operator auf dem Raum \mathbb{M} der Pseudo-Isometrieklassen ein, der einen metrischen Raum auf seine um einen Faktor $\ell > 0$ skalierte Version abbildet:

Definition 12 Auf \mathbb{M} gibt es für alle $\ell > 0$ die natürliche Skalierungsabbildung

$$\begin{aligned} \alpha_\ell &: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} \\ (S, d(\cdot, \cdot)) &\mapsto (S, \ell \cdot d(\cdot, \cdot)). \end{aligned}$$

Diese Operation ist mit der Klassenbildung bzgl. Pseudo-Isometrie in \mathbb{M} verträglich (Beweis folgt). Weiter ist sie für alle $\ell > 0$ eine Bijektion in \mathbb{M} mit der Umkehrabbildung $\alpha_{1/\ell}$.

In der fraktalen Geometrie sind jene Räume von Interesse, die unter einem α_ℓ mit $\ell \neq 1$ stabil sind; solche Räume heißen *selbstähnlich*. Für unsere Untersuchungen sind ganz besonders solche Räume interessant, die unter allen α_ℓ stabil sind:

Definition 13 Einen Raum, der zu jeder seiner Skalierungen (für $\ell > 0$) (pseudo-)isometrisch ist, bezeichnen wir als (pseudo-)skaleninvariant. Eine Pseudo-Isometrieklasse heiße skaleninvariant, wenn jeder Raum der Klasse pseudo-skaleninvariant ist.

Für einen Kontinuumslimes müssen wir den Faktor ℓ gegen Null streben lassen:

Definition 14 Wir definieren weiter die Kontinuumsabbildung

$$\alpha : [S] \mapsto [\lim_{\ell \rightarrow 0} \alpha_\ell S]$$

sofern dieser Limes existiert (d.h. der Limes existiert für alle Folgen $\ell_j \rightarrow 0$ und ist stets gleich). Die Klasse $\alpha(S)$ bezeichnen wir als (starken) Kontinuumslimes von $S \in \mathbb{M}$, falls er existiert. Wenn es mindestens eine Folge $\ell_j \rightarrow 0$ gibt mit $\alpha_{\ell_j} S \rightarrow [S']$, so bezeichnen wir die Klasse $[S']$ als schwachen Kontinuumslimes von S . Gibt es keine konvergente Folge $\alpha_{\ell_j} S$, so bezeichnen wir S als essentiell diskret.

Beispiele für Räume mit Kontinuumslimites sind skaleninvariante Räume, z.B. \mathbb{R}^n mit jeder Norm. Ein Beispiel für einen Raum ohne starken, aber mit schwachem Kontinuumslimites ist $\{2^j : j \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, versehen mit der induzierten Metrik. Schließlich ist $\{j^2 : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ ein essentiell diskreter Raum. Doch für die Gültigkeit der Definition müssen wir noch etwas Wohldefiniertheit nachliefern:

Lemma 7 1. Für $S, S' \in \mathbb{M}$ und $\ell > 0$ ist $d_{GH}(\alpha_\ell S, \alpha_\ell S') = \ell \cdot d_{GH}(S, S')$. Insbesondere ist α_ℓ also klassenerhaltend.

2. Ist S ein skaleninvarianter metrischer Raum, dann auch jeder zu S pseudo-isometrische Raum S' , d.h. Skaleninvarianz ist eine Eigenschaft der gesamten Klasse.

3. Ist $[S]$ eine skaleninvariante Klasse, dann ist $\alpha_\ell[S] = [S]$ für alle $\ell > 0$.

Beweis: Zusammen mit S und S' lässt sich auch jede Metrik auf $S \dot{\cup} S'$ skalieren, deshalb gilt die erste Aussage. Die zweite ist eine direkte Folgerung: $d_{GH}(S', \alpha_\ell S') \leq d_{GH}(S', S) + d_{GH}(S, \alpha_\ell S) + d_{GH}(\alpha_\ell S, \alpha_\ell S') = 0 + 0 + \ell \cdot 0$. Die dritte Aussage folgt direkt aus der Definition. \square

Die eingeführten Operatoren α_ℓ mit $\ell \in \mathbb{R}^+$ bilden offensichtlich eine Gruppe, isomorph zu \mathbb{R}^+ unter Multiplikation, bzw. eine Gruppenaktion von \mathbb{R}^+ auf \mathbb{M} . Dabei ist die Parallele zur Renormierungsgruppentheorie nicht zufällig, mit \mathbb{M} als Parameterraum. Und wie in der RG-Theorie kann auch hier α_ℓ für $\ell \rightarrow 0$ gegen einen Attraktor streben: Beispielsweise strebt der Raum $S := \{2^j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ gegen den Attraktor $\{S_\ell : \ell \in [1, 2)\}$ mit $S_\ell := \{\ell \cdot 2^j : j \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$.

Wir wollen nun einen Verifikationssatz für Kontinuumslimites anstreben. Er soll folgendes leisten: Wenn wir von einem Raum S wissen, dass er skaleninvariant ist und sich in derselben Zusammenhangskomponente befindet wie ein anderer Raum G , so ist S der Kontinuumslimites von G . Natürlich müssen wir dies im Moment noch mit Pseudo-Isometrieklassen beschreiben, später werden wir darauf verzichten können:

Satz 2 (Verifikationssatz, 1.Version) *Gibt es in einer Zusammenhangskomponente $M \subseteq \mathbb{M}$ eine skaleninvariante Klasse $[S]$, dann ist α_ℓ für $\ell \in (0, 1)$ ein kontrahierender und bijektiver Operator auf dem metrischen Raum M , $[S]$ sein einziger Fixpunkt und es gilt $\alpha_\ell(S') \rightarrow [S]$, $\ell \rightarrow 0$ für alle $S' \in M$.*

Beweis: Wegen $\ell < 1$ ist α_ℓ ein kontrahierender Operator. Damit ist aber noch nicht geklärt, ob α_ℓ möglicherweise eine Klasse von M in eine andere Zusammenhangskomponente von \mathbb{M} wirft (in diesem Fall ist der Banachsche Fixpunktsatz nicht einsetzbar, da \mathbb{M} selber kein echter metrischer Raum ist). Nehmen wir also

zunächst an, M sei eine Zusammenhangskomponente mit Fixpunkt $S = \alpha_\ell S$ für alle $\ell > 0$. Ist nun $S' \in M$, ist

$$d_{GH}(S, \alpha_\ell S') = d_{GH}(\alpha_\ell S, \alpha_\ell S') = \ell \cdot d_{GH}(S, S') < \infty,$$

also auch $\alpha_\ell S' \in M$. Nun lässt sich der Banachsche Fixpunktsatz auf den vollständigen metrischen Raum $M \subseteq \mathbb{M}$ für $\ell < 1$ anwenden. Damit gibt es genau einen Fixpunkt von α_ℓ (nämlich S) und jede Iteration von α_ℓ strebt gegen S . Wegen $\alpha_{\ell_1 \cdot \ell_2} = \alpha_{\ell_1} \circ \alpha_{\ell_2}$ strebt auch $\alpha_\ell(S')$ gegen S für $\ell \rightarrow 0$ und jeden Raum $S' \in M$. \square

Folgerung 1 *Seien $S, S' \in \mathbb{M}$ und $[S]$ skaleninvariant. Es ist $\alpha(S') = [S]$ genau dann, wenn $d_{GH}(S', S) < \infty$ gilt.*

Beweis: Es ist offensichtlich, dass α_ℓ aufgrund der Bijektivität keinen Raum einer anderen Zusammenhangskomponente in die von S abbilden kann. \square

Aus der Dreiecksungleichung ist damit auch klar, dass jede Zusammenhangskomponente von \mathbb{M} entweder nur Räume mit starkem Kontinuumslices oder nur Räume mit ausschließlich schwachem Kontinuumslices oder nur essentiell diskrete Räume enthält.

Beispiel: \mathbb{R} versehen mit der diskreten Metrik (d.h. $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$) besitzt endlichen Abstand zu dem metrischen Einpunktraum pt . Damit besitzt er einen Kontinuumslices (nämlich pt) und ist folglich nicht essentiell diskret. Insbesondere ist der Kontinuumslices eines jeden metrisch beschränkten (also auch eines jeden kompakten) Raums aus \mathbb{M} der Einpunktraum. Andererseits ist bereits ohne obigen Satz recht offensichtlich, dass der Einpunktraum der einzige beschränkte Raum ist, der gleichzeitig Fixpunkt von α_ℓ ist: Der Durchmesser eines beschränkten Raums S' skaliert ebenfalls mit ℓ und ist damit nur im Fall $\text{diam } S' = 0$ stabil – damit ist S' eindeutig als Einpunktraum charakterisiert.

Beispiel: Betrachten wir den Raum $S = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) := x + y$ für $x \neq y$, sonst 0 (die sog. “französische Eisenbahnmetrik”). Anwendung von α_ℓ führt zu einem dazu isometrischen Raum mit der Isometrie $f(x) = \ell \cdot x$, d.h. S ist Fixpunkt von α_ℓ und damit sein eigener Kontinuumslices. Insbesondere ist S auch der Kontinuumslices des Unterraums $[1, \infty) \subseteq S$ mit induzierter Metrik, da dieser einen endlichen GH-Abstand von S besitzt (er ist nach oben begrenzt durch 2).

Beispiel: Die beiden Räume \mathbb{R} und \mathbb{R}_0^+ , mit den Metriken $d(x, y) := |x - y|$ sind beide Fixpunkte von α_ℓ , sind nicht pseudo-isometrisch und besitzen folglich den Gromov-Hausdorff-Abstand ∞ .

3.3 Grob-isometrische Räume

Der soeben hergeleitete Verifikationssatz ist noch etwas unangenehm in der Handhabung, da wir keine bessere Beschreibung für den Fall haben, dass sich zwei metrische Räume in derselben Zusammenhangskomponente von \mathbb{M} befinden. Wir können diese Eigenschaft aber auch ausdrücken durch die Existenz einer bestimmten Art von Abbildung zwischen den beiden Räumen, einer sogenannten Grobisometrie. Diese wollen wir nun vorstellen und den Zusammenhang zum Gromov-Hausdorff-Abstand herstellen:

Definition 15 *Zwei metrische Räume S, S' heißen quasi-isometrisch, wenn es Abbildungen $f : S \rightarrow S'$ und $g : S' \rightarrow S$ und reelle Zahlen $\lambda > 0$, $C \geq 0$ gibt, so dass gilt*

$$\begin{aligned} d_{S'}(fx, fy) &\leq \lambda \cdot d_S(x, y) + C \\ d_S(gx', gy') &\leq \lambda \cdot d_{S'}(x', y') + C \\ d_S(gfx, x) &\leq C \\ d_{S'}(fgx', x') &\leq C \end{aligned}$$

für alle $x, y \in S$, $x', y' \in S'$. Offensichtlich kann stets $\lambda \geq 1$ gewählt werden. Ist $\lambda = 1$, so bezeichnen wir S und S' als grob-isometrisch.

Lemma 8 *Diese Definition ist äquivalent zu der Bedingung: Es gibt eine Funktion $f : S \rightarrow S'$ sowie $\lambda \geq 1$, $c > 0$ und $r > 0$ mit*

$$\lambda^{-1} \cdot d_S(x, y) - c \leq d_{S'}(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d_S(x, y) + c \quad \forall x, y \in S$$

und $S' \subseteq B_{f(S)}[r]$. Ein solches f bezeichnen wir als (λ, c, r) -Quasi-Isometrie, bzw. im Fall $\lambda = 1$ als grobe Isometrie. Da sich c und r nach Belieben erhöhen lassen, können wir sie gegen ihr Maximum ersetzen, mit $\epsilon := \max\{c, r\}$ sprechen wir dann auch von einer $(\lambda, \epsilon, \epsilon)$ -Quasi-Isometrie und im Fall $\lambda = 1$ von einer ϵ -Isometrie.

Beweis: Wir verzichten auf den Index an der Metrik, da er von den Elementen her offensichtlich ist.

(1) \Rightarrow (2): Aus $d(gx', gy') \leq \lambda d(x', y') + c$ folgt für $x' = fx, y' = fy$

$$\lambda d(fx, fy) + C \geq d(gfx, gfy)$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt andererseits

$$d(x, y) \leq d(x, gfx) + d(gfx, gfy) + d(gfy, y) \leq d(gfx, gfy) + 2C,$$

zusammen also

$$\begin{aligned}\lambda d(fx, fy) + C &\geq d(gfx, gfy) \geq d(x, y) - 2C \\ \Leftrightarrow d(fx, fy) &\geq \lambda^{-1} \cdot d(x, y) - 3C\lambda^{-1}\end{aligned}$$

mit der Wahl $c := \max(C, 3C\lambda^{-1})$ also gerade der erste Teil der obigen Bedingung. Sei nun $x' \in S'$. Dann ist $d(fgx', x') \leq C$, d.h. x' befindet sich im C -Ball um den Punkt $gx' \in S$, also $S' \subseteq B_C[f(S)]$.

(2) \Rightarrow (1): f erfüllt bereits die erste der vier Ungleichungen für jedes $C > c$. Zu jedem $x' \in S'$ gibt es nach Voraussetzung ein $x \in S$, so dass $d(fx, x') \leq r$ ist. Wir wählen für jedes x' ein solches x aus und setzen $gx' := x$. Dann ist $d(fgx', x') \leq r$ und

$$d(gfx, x) \leq \lambda \cdot (d(fgfx, fx) + c) \leq \lambda \cdot (r + c)$$

Wir setzen zunächst $C' := \max(c, r, \lambda(r + c))$. Die verbleibende zweite Ungleichung folgt mittels Dreiecksungleichung aus

$$\begin{aligned}d(gx', gy') &\leq \lambda \cdot (d(fgx', fgy') + c) \\ &\leq \lambda \cdot d(x', y') + 2\lambda C' + \lambda c\end{aligned}$$

und der abschließenden Wahl $C := \max(2\lambda C' + \lambda c, C')$. Das λ trägt in beiden Definitionen denselben Wert, somit übertragen sich die Beweise im Fall $\lambda = 1$ direkt. \square

Diese äquivalente Definition ist zwar nicht so symmetrisch wie die ursprüngliche, dafür aber in unserem Fall etwas einfacher anzuwenden. Der zentrale Satz dieses Abschnitts ist nun der folgende, der an vielen Stellen in der Literatur und in verschiedenen Varianten auftaucht (z.B. in [Gro₂, Prop.3.5]), und zum Teil sogar zur Definition des GH-Abstands eingesetzt wird, z.B. in [BH]:

Satz 3 *Zwei metrische Räume $S, S' \in \mathbb{M}$ haben endlichen Gromov-Hausdorff-Abstand genau dann (d.h. sie befinden sich in derselben Zusammenhangskomponente von \mathbb{M} genau dann), wenn sie zueinander grob-isometrisch sind. Genauer gilt:*

$$\frac{1}{2} d_{GH}(S, S') \leq \inf\{\epsilon : S \text{ und } S' \text{ sind } \epsilon\text{-isometrisch}\} \leq 2 d_{GH}(S, S')$$

Beweis: " \Rightarrow " Sei $\delta > 0$ beliebig und $r := d_{GH}(S, S')$. Dann gibt es eine Metrik d_{\cup} auf $S \cup S'$, so dass der Hausdorffabstand zwischen S und S' kleiner oder gleich $r + \delta$ ist (r selber ist nur das Infimum!). Insbesondere ist $S \subseteq B_{S'}(r + \delta)$, d.h. zu jedem Punkt $x \in S$ gibt es einen Punkt $x' \in S'$ mit Abstand $d_{\cup}(x, x') < r + \delta$. Wir wählen einen dieser Punkte und setzen $f(x) := x'$, dies liefert uns eine Funktion

$f : S \rightarrow S'$ mit der Eigenschaft $d_{\cup}(x, fx) < r + \delta$. Da d_{\cup} eine Erweiterung von d und d' ist, gilt für je zwei Punkte $x, y \in S$

$$d'(fx, fy) \leq d_{\cup}(fx, x) + d(x, y) + d_{\cup}(y, fy) < 2r + 2\delta + d(x, y)$$

und analog

$$d(x, y) \leq d_{\cup}(x, fx) + d'(fx, fy) + d_{\cup}(fy, y) < 2r + 2\delta + d'(fx, fy).$$

Wir wählen also $c = 2r + 2\delta$. Nun zu der Eigenschaft $S' = B_{f(S)}(R)$ für ein $R > 0$. Nach Forderung des GH-Abstands ist auch $S' \subseteq B_S(r + \delta)$, d.h. zu jedem $x' \in S'$ gibt es ein $x \in S$ mit $d_{\cup}(x', x) < r + \delta$. Mit Dreiecksungleichung ist also

$$d'(x', fx) \leq d_{\cup}(x', x) + d_{\cup}(x, fx) \leq 2r + 2\delta$$

Damit ist $S' \subseteq B_{f(S)}(2r + 2\delta)$ und wir können $R = c = \epsilon = 2r + 2\delta$ wählen. Insbesondere können wir δ in Abhängigkeit von r wählen, z.B. $r/10$; dann ist f eine $(2 + \frac{1}{5})r$ -Grobisometrie. Das Infimum über alle möglichen ϵ dieser Form ist offensichtlich $2r$.

“ \Leftarrow ” Sei $f : S \rightarrow S'$ eine ϵ -Isometrie. Wir definieren eine Metrik auf $S \cup S'$ durch

$$d(x, y) := \inf_{x' \in S} (d(x, x') + \epsilon + d(fx', y)) \quad \forall x \in S, y \in S'$$

und $d(y, x) := d(x, y)$. Damit gilt insbesondere $d(x, y) \leq \epsilon + d(fx, y)$. Zur Dreiecksungleichung: Für $x, x_1, x_2 \in S, y, y_1, y_2 \in S'$ ist

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) + d(x_2, y) &= \inf_{x' \in S} (d(x_1, x_2) + d(x_2, x') + \epsilon + d(fx', y)) \\ &\geq \inf_{x' \in S} (d(x_1, x') + \epsilon + d(fx', y)) = d(x_1, y) \\ d(x, y_1) + d(y_1, y_2) &= \inf_{x' \in S} (d(x, x') + \epsilon + d(fx', y_1) + d(y_1, y_2)) \\ &\geq \inf_{x' \in S} (d(x, x') + \epsilon + d(fx', y_2)) = d(x, y_2) \\ d(x_1, y) + d(y, x_2) &= \inf_{x', x'' \in S} (d(x_1, x') + d(fx', y) + d(y, fx'') + d(x'', x_2) + 2\epsilon) \\ &\geq \inf (d(x_1, x') + d(fx', fx'') + d(x'', x_2) + 2\epsilon) \\ &\geq \inf (d(x_1, x') + d(x', x'') - \epsilon + d(x'', x_2) + 2\epsilon) \\ &= d(x_1, x_2) + \epsilon \geq d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y_1, x) + d(x, y_2) &= \inf_{x', x'' \in S} (d(x, x') + d(fx', y_1) + d(x, x'') + d(fx'', y_2) + 2\epsilon) \\ &\geq \inf (d(x', x'') + d(fx', y_1) + d(fx'', y_2) + 2\epsilon) \\ &\geq \inf (d(fx', fx'') - \epsilon + d(fx', y_1) + d(fx'', y_2) + 2\epsilon) \\ &= d(y_1, y_2) + \epsilon \geq d(y_1, y_2) \end{aligned}$$

Die in den Rechenschritten verwendeten Dreiecksungleichungen beziehen sich natürlich auf die bereits bekannten Metriken auf S und S' . Dass diese auch innerhalb der Infimumsbildung funktionieren erkennt man leicht: Sie geben nur eine Möglichkeit wieder, das echte Infimum könnte noch kleiner sein, was aber mit der Richtung der Ungleichungen kompatibel ist.

Zu jedem $x \in S$ gibt es nun ein $f(x) \in S'$ mit dem Abstand $d(x, fx) \leq \epsilon$, d.h. es ist $S \subseteq B_{S'}[\epsilon]$ (in der gemeinsamen Metrik auf $S \cup S'$). Zu jedem $y \in S'$ lässt sich andererseits (da f eine ϵ -Isometrie ist) ein $x \in S$ finden, so dass $d(y, fx) \leq \epsilon$ ist. Damit ist

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \inf_{x' \in S'} (d(x, x') + \epsilon + d(fx', y)) && | \text{ wähle } x' = x \\ &\leq 0 + \epsilon + \epsilon = 2\epsilon, \end{aligned}$$

also $S' \subseteq B_S[2\epsilon]$. Sei $\delta > 0$ beliebig, dann ist $S' \subseteq B_S(2\epsilon + \delta)$ und $S \subseteq B_{S'}(2\epsilon + \delta)$, also $d_{GH}(S, S') \leq 2\epsilon + \delta$ und nach Infimumsbildung $d_{GH}(S, S') \leq 2\epsilon$. \square

Mit dem Werkzeug der Grob-Isometrie können wir nun auch die umständliche Bildung von Pseudo-Isometrieklassen umformulieren und für homogene Räume ganz aus der Welt schaffen:

Folgerung 2 *Zwei Räume sind genau dann pseudo-isometrisch (also $d_{GH}(S, S') = 0$), wenn es eine Folge von ϵ_j -Isometrien gibt mit $\epsilon_j \rightarrow 0$.*

Lemma 9 *Seien S und S' separable und vollständige metrische Räume. Sei weiter $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}, f_j : S \rightarrow S'$, eine Folge von $(\lambda, \epsilon_j, \epsilon_j)$ -Quasi-Isometrien mit $\epsilon_j \rightarrow 0$, $\lambda \geq 1$ beliebig. Zu jedem $x \in S$ soll es eine kompakte Menge $A_x \subseteq S'$ geben, so dass $f_j x \in A_x$ ist für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gibt es auch eine $(\lambda, 0, 0)$ -Quasi-Isometrie zwischen S und S' .*

Beweis: Der Beweis ist eine offensichtliche Verallgemeinerung des Analogons für kompakte Räume aus [BH] und benötigt das Auswahlaxiom. Zunächst wählen wir eine dichte Folge (x_k) von Punkten in S , $k \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(f_j x_1)_j$ in einem Kompaktum liegt, können wir eine unendliche, konvergente Unterfolge mit den Indizes $J_1 \subseteq \mathbb{N}$ finden (d.h. die Elemente $(f_j x_1)$ mit $j \in J_1$ sollen diese Folge bilden). Für den Punkt x_k , $k \geq 2$ finden wir in derselben Weise eine konvergente Unterfolge mit den Indizes $J_k \subseteq J_{k-1}$. Nun setzen wir

$$fx_k := \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ j \in J_k}} f_j x_k.$$

Dann gilt für $k' \leq k$ (d.h. $J_k \subseteq J_{k'}$):

$$d'(fx_{k'}, fx_k) \leq d'(fx_{k'}, f_j x_{k'}) + d'(f_j x_{k'}, f_j x_k) + d'(f_j x_k, fx_k) \quad \forall j \in J_k$$

Für jedes $\delta > 0$ können wir damit ein $j_0 \in J_k$ finden, so dass für alle $j \in J_k$ mit $j > j_0$ gilt

$$d'(fx_{k'}, fx_k) \leq \delta + \lambda d(x_{k'}, x_k) + \epsilon_j \rightarrow \lambda d(x_{k'}, x_k), \quad j \rightarrow \infty.$$

Für die Umkehrrichtung verwenden wir

$$\begin{aligned} d'(f_j x_{k'}, f_j x_k) &\leq d'(f_j x_{k'}, fx_{k'}) + d'(fx_{k'}, fx_k) + d'(fx_k, f_j x_k) \\ \Rightarrow d'(fx_{k'}, fx_k) &\geq \lambda^{-1} d'(x_{k'}, x_k) - \epsilon_j - d'(f_j x_{k'}, fx_{k'}) - d'(f_j x_k, fx_k) \\ &\rightarrow \lambda^{-1} d(x_{k'}, x_k), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Wir können jeden Punkt $x \in S$ durch eine konvergente Folge von x_k darstellen (nach Forderung soll (x_k) in S dicht sein) und damit die Funktion $f : \{x_k\} \rightarrow S'$ auf S ausdehnen. Die obigen Gleichungen müssen für diese Punkte ebenfalls gelten, da sie sich beliebig genau durch Punkte aus (x_k) annähern lassen. Schließlich müssen wir noch $S' = fS$ zeigen: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und $y' \in S'$ gibt es einen Punkt $y_k \in S$ mit $d'(x', f_k y_k) \leq \epsilon_k$ und

$$\begin{aligned} d'(x', f y_k) &\leq \epsilon_k + d'(f y_k, f_k y_k) \\ \Rightarrow d'(f y_j, f y_k) &\leq \epsilon_j + \epsilon_k + d'(f y_j, f_j y_j) + d'(f y_k, f_k y_k) \rightarrow 0, \quad j, k \rightarrow \infty \\ \Rightarrow d'(y_j, y_k) &\leq \lambda d'(f y_j, f y_k) \rightarrow 0, \quad j, k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Damit ist (y_k) eine Cauchy-Folge und konvergiere gegen $y \in S$. Durch die obigen Abschätzungen folgt direkt $f y = y'$. Damit ist $f : S \rightarrow S'$ eine $(\lambda, 0, 0)$ -Quasi-Isometrie. \square

Beispiel: Sind S und S' pseudo-isometrische, separable und vollständige Räume und S' kompakt, dann sind sie auch isometrisch. Damit ist auch S kompakt.

Für uns ist der folgende Spezialfall besonders wichtig:

Folgerung 3 *Sind S und S' pseudo-isometrische, separable und vollständige Räume und S' proper und pseudo-homogen, dann sind sie auch isometrisch und homogen.*

Beweis: Sei (f_j) eine Folge von ϵ_j -Isometrien $f_j : S \rightarrow S'$, $\epsilon_j \rightarrow 0$. Wir wählen $x_0 \in S$ und $x'_0 \in S'$ beliebig. Aufgrund der Pseudo-Homogenität von S' können wir dann aus den f_j durch Anfügen einer ϵ_j -Translation eine neue Folge (g_j) von $2\epsilon_j$ -Isometrien zwischen S und S' finden mit $g_j x_0 = x'_0$. Die Folge $(2\epsilon_j)$ muss nach oben beschränkt sein, sagen wir durch $2\epsilon \geq 2\epsilon_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist für alle $x \in S$

$$d'(g_j x, x'_0) = d'(g_j x, g_j x_0) \leq d(x, x_0) + 2\epsilon,$$

also $g_j x \in B_{x_0}[d(x, x_0) + 2\epsilon]$. Diese Menge ist nach Voraussetzung kompakt für alle $x \in S$ und damit g_j eine Folge, wie sie für das vorausgehende Lemma benötigt wird.

Da die Pseudo-Isometrieklasse von S (bzw. S') nun nur noch aus isometrischen Räumen besteht, fallen auch alle Pseudo-Symmetrien mit ihren normalen Gegenstücken zusammen; beispielsweise ist ein pseudo-homogener und pseudo-skaleninvarianter Raum automatisch auch homogen und skaleninvariant. \square

Da jeder homogene Raum automatisch pseudo-homogen ist, können wir den Verifikationssatz 2 neu formulieren:

Satz 4 (Verifikationssatz, Version 2) *Seien S und S' zueinander grob-isometrische Räume aus \mathbb{M} und S sei skaleninvariant, proper, separabel und homogen. Dann ist S (bis auf Isometrie) genau der einzige Kontinuumsliches von S' .*

Die Homogenität des Kontinuumsliches S können wir auch aus S' gewinnen, wir fassen dafür die bisherigen Ergebnisse sowie einige Erkenntnisse aus [Gro₁] zusammen:

Satz 5 *Sei G ein (endlich-erzeugter) Cayleygraph mit höchstens polynomialem Wachstum und Kontinuumsliches $[S]$. Dann besteht $[S]$ aus nur einem Raum S (bis auf Isometrie), dieser ist separierbar, skaleninvariant, homogen und proper.*

Beweis: Wir zitieren zunächst Gromov ([Gro₁]). Im pGH-Abstand existiert zu G stets eine Folge $(\ell_j)_{j \in \mathbb{N}}$, so dass $\alpha_{\ell_j} G$ gegen einen homogenen und properen Raum S konvergiert (Hauptkonstruktion in Abschnitt 7 und Korollar am Ende von Abschnitt 6). Falls andererseits G einen Kontinuumsliches $[S]$ besitzt, so muss sich S in derselben Klasse befinden. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz haben wir bereits festgestellt, dass nur die Pseudo-Isometrieklasse von S als Kontinuumsliches in Frage kommt und dass S pseudo-skaleninvariant sein muss. Aus der Konstruktion des Grenzraums ist weiterhin offensichtlich, dass S separierbar ist (beispielsweise liegt die abzählbare Menge $\{\alpha_{1/j} fG, j \in \mathbb{N}\}$ dicht in S). Mit der vorangehenden Folgerung ist S damit bis auf Isometrie eindeutig. Aus dieser Eindeutigkeit und der Pseudo-Skaleninvarianz folgt schließlich Skaleninvarianz. \square

Insbesondere können wir im folgenden von *dem* Kontinuumsliches S sprechen, falls dieser existiert. Mit dem Raum S identifizieren wir dabei stets die gesamte Isometrieklasse.

3.3.1 Kartesische Produkte

Für die Arbeit mit Kontinuumslimiten ist auch ihr Verhalten unter Produktbildung von Interesse. Aus metrischer Sicht gibt es verschiedene Möglichkeiten zur

Definition von kartesischen Produkten, das folgende Lemma behandelt die wichtigsten darunter und zeigt die Verträglichkeit des Limes mit der Produktbildung:

Lemma 10 Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit den Eigenschaften

1. $f(\zeta, \xi) = 0 \Leftrightarrow (\zeta, \xi) = (0, 0)$
2. $f(\zeta, \xi) \leq f(\zeta + \zeta', \xi + \xi') \leq f(\zeta, \xi) + f(\zeta', \xi')$ (kein Tippfehler)
3. $f(\lambda \zeta, \lambda \xi) = \lambda f(\zeta, \xi)$

für alle $\zeta, \xi, \zeta', \xi', \lambda \geq 0$. Seien weiter (S'_1, d'_1) und (S'_2, d'_2) vollständige metrische Räume mit den Kontinuumslimiten (S_1, d_1) und (S_2, d_2) . Dann ist $(S'_1 \times S'_2, f \circ (d'_1, d'_2))$ ein vollständiger metrischer Raum mit dem Kontinuumslime $[(S_1 \times S_2, f \circ (d_1, d_2))]$ (Klassenbildung bezüglich Pseudo-Isometrie, Def.11).

Beweis: Aus der ersten Eigenschaft und dem Definitionsbereich folgt die Positiv-Definitheit von $f \circ (d'_1, d'_2)$, die Symmetrie wird vererbt von d'_1 und d'_2 . Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} f \circ (d'_1, d'_2)(x, z) &= f(d'_1(x_1, z_1), d'_2(x_2, z_2)) \\ &\leq f(d'_1(x_1, y_1) + d'_1(y_1, z_1), d'_2(x_2, y_2) + d'_2(y_2, z_2)) \\ &\leq f(d'_1(x_1, y_1), d'_2(x_2, y_2)) + f(d'_1(y_1, z_1), d'_2(y_2, z_2)) \\ &= f \circ (d'_1, d'_2)(x, y) + f \circ (d'_1, d'_2)(y, z) \end{aligned}$$

mit $x = (x_1, x_2) \in S'_1 \times S'_2$, y, z analog. Die Vollständigkeit lässt sich wie üblich bei kartesischen Produkten beweisen und folgt im wesentlichen aus der Vollständigkeit von S'_1 und S'_2 und einer speziellen Anwendung der Eigenschaft (2): Sei (x_j, y_j) eine CF in $S'_1 \times S'_2$. Dann ist wegen

$$d_1(x_j, x_k) \cdot f(1, 0) = f(d_1(x_j, x_k), 0) \leq f(d_1(x_j, x_k), d_2(y_j, y_k)) \rightarrow 0$$

auch $(x_j) \rightarrow x$ eine CF in S'_1 , analog $(y_j) \rightarrow y$ eine CF in S'_2 . Damit ist

$$f \circ (d_1, d_2)((x, y), (x_j, y_j)) \leq f(d_1(x, x_j), 0) + f(0, d_2(y, y_j)) \rightarrow 0,$$

also $(x_j, y_j) \rightarrow (x, y)$.

Damit ist auch klar, dass das Produkt der Limes $S_1 \times S_2$ mit der Metrik $f \circ (d_1, d_2)$ bereits ein vollständiger metrischer Raum ist. Darüber hinaus ist er skaleninvariant aufgrund der Eigenschaft (3). Schließlich bleibt zu zeigen, dass $S'_1 \times S'_2$ und $S_1 \times S_2$ grob-isometrisch sind. Dazu seien $g_j : S'_j \rightarrow S_j$, $j = 1, 2$, ϵ -Isometrien und $g : S'_1 \times S'_2 \rightarrow S_1 \times S_2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto (g_1 x_1, g_2 x_2)$. Dann ist für alle $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in S'_1, S'_2$:

$$\begin{aligned} f \circ (d_1, d_2)(gx, gy) &\leq f(d'_1(x_1, y_1) + \epsilon, d'_2(x_2, y_2) + \epsilon) \\ &\leq f \circ (d'_1, d'_2)(x, y) + \epsilon f(1, 1) \\ f \circ (d'_1, d'_2)(x, y) &\leq f(d_1(g_1 x_1, g_1 y_1) + \epsilon, d_2(g_2 x_2, g_2 y_2) + \epsilon) \\ &\leq f \circ (d_1, d_2)(gx, gy) + \epsilon f(1, 1) \end{aligned}$$

Schließlich gibt es zu jedem $(x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$ Punkte $x'_1 \in S'_1$ und $x'_2 \in S'_2$ mit $d_1(g_1x'_1, x_1) \leq \epsilon$ und $d_2(g_2x'_2, x_2) \leq \epsilon$. Damit ist

$$\begin{aligned} f \circ (d_1, d_2) ((x_1, x_2), (g_1x'_1, g_2x'_2)) \\ \leq f(d_1(x_1, g_1x'_1), 0) + f(0, d_2(x_2, g_2x'_2)) \leq \epsilon f(1, 0) + \epsilon f(0, 1), \end{aligned}$$

mit $f(1, 1) \leq f(1, 0) + f(0, 1)$ ist g also eine $\epsilon \cdot (f(1, 0) + f(0, 1))$ -Isometrie. \square

Beispiel: Typische Beispiele sind Funktionen wie $f(\zeta, \xi) = \zeta + \xi$, $\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}$ und $\max\{\zeta, \xi\}$. Mit ihnen lassen sich diskrete Versionen der Banachräume konstruieren.

3.4 Quasi-isometrische Räume

3.4.1 Ein Homöomorphiesatz

Als wir in Definition 15 die Grob-Isometrie definiert haben, ist auch der allgemeinere Begriff der Quasi-Isometrie bereits gefallen. So wie grob-isometrische Räume im Kontinuumslimit zur gleichen Metrik führen, werden wir in diesem Abschnitt sehen, dass quasi-isometrische Räume zur gleichen Topologie führen.

Cayleygraphen zur gleichen Gruppe aber verschiedenen Erzeugendensystemen sind im allgemeinen nicht grob- sondern nur quasi-isometrisch. Auch die Betrachtung gewichteter Graphen ist mittels Quasi-Isometrien möglich, wenn wir die Gewichtungen der Kanten nach oben und unten beschränkt wissen. Wie verhalten sich nun also die Kontinuumslimiten quasi-isometrischer Räume zueinander?

Lemma 11 *Eine $(\lambda, 0, 0)$ -Quasi-Isometrie ist ein Homöomorphismus. (Solche Abbildungen werden auch als Bilipschitz-Abbildungen bezeichnet.)*

Beweis: Sei $f : (S, d) \rightarrow (S', d')$ eine $(\lambda, 0, 0)$ -Quasi-Isometrie. Dann ist nach Definition

$$\lambda^{-1} d(x, y) \leq d'(fx, fy) \leq \lambda d(x, y)$$

und $S' \subseteq B_{f(S)}[0] = f(S)$. Aus der ersten Ungleichung folgt die Injektivität von f , aus der zweiten Gleichung Surjektivität.

Nun zur Homöomorphieeigenschaft von f . Seien dafür $x \in S$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta := \epsilon/\lambda$. Dann ist für alle $y \in S$ mit $d(x, y) \leq \delta$

$$d'(fx, fy) \leq \lambda d(x, y) \leq \epsilon,$$

f ist also stetig. Sei nun $x' \in S'$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta := \epsilon/\lambda$. Dann ist für alle $y' \in S'$ mit $d'(x', y') \leq \delta$

$$d(f^{-1}x', f^{-1}y') \leq \lambda d'(x', y') \leq \epsilon,$$

d.h. auch f^{-1} ist stetig, f ist folglich ein Homöomorphismus zwischen S und S' . \square

Satz 6 (Homöomorphiesatz) *Seien S und $S' \in \mathbb{M}$ skaleninvariante, separable, propere, homogene und vollständige Räume, S und S' zueinander $(\lambda, \epsilon, \epsilon)$ -quasi-isometrisch. Dann sind sie homöomorph.*

Beweis: Zunächst verwenden wir die Skaleninvarianzen von S und S' . Sie erlaubt uns, zu jedem $\mu > 0$ eine bijektive Abbildung $\alpha_\mu : S \rightarrow S$ zu finden mit $d(\alpha_\mu x, \alpha_\mu y) = \mu d(x, y)$ für alle $x, y \in S$, sowie analoge Funktionen $\alpha'_\mu : S' \rightarrow S'$. Sei nun $f : S \rightarrow S'$ eine $(\lambda, \epsilon, \epsilon)$ -Quasi-Isometrie. Wir definieren $f_\mu := \alpha'_\mu \circ f \circ \alpha_\mu^{-1}$. Dann ist für alle $x, y \in S$

$$\begin{aligned} d(f_\mu x, f_\mu y) &\leq \mu(\lambda(\mu^{-1}d(x, y)) + \epsilon) = \lambda d(x, y) + \mu \epsilon, \text{ sowie} \\ d(f_\mu x, f_\mu y) &\geq \mu(\lambda^{-1}(\mu^{-1}d(x, y)) - \epsilon) = \lambda^{-1} d(x, y) - \mu \epsilon. \end{aligned}$$

Sei nun $x' \in S'$ beliebig. Dann gibt es zum Punkt $\alpha'^{-1}_\mu x' \in S'$ einen Punkt $y \in S$ mit $d(fy, \alpha'^{-1}_\mu x') \leq \epsilon$. Wir setzen $x := \alpha_\mu y$. Dann ist

$$d(f_\mu x, x') = d(\alpha'_\mu f \alpha_\mu^{-1} x, x') = \mu d(fy, \alpha'^{-1}_\mu x') \leq \mu \epsilon,$$

also $S' = B_{f_\mu S}[\mu \epsilon]$. f_μ ist demnach eine $(\lambda, \mu \epsilon, \mu \epsilon)$ -Quasi-Isometrie. Aus einer absteigenden Folge $\mu_j \rightarrow 0$ können wir mit Lemma 9 daraus eine $(\lambda, 0, 0)$ -Quasi-Isometrie erhalten; diese ist ein Homöomorphismus. \square

Beispiel: Reelle Vektorräume gleicher Dimension mit äquivalenten Normen sind zwar quasi-isometrisch und damit homöomorph, aber nicht notwendig isometrisch.

Bemerkung: An die Räume werden im Homöomorphiesatz sechs Eigenschaften gestellt: Vollständigkeit, Separabilität, Proper, Homogenität, Skaleninvarianz und Quasi-Isometrie. Für die Wichtigkeit dreier Eigenschaften lässt sich mit Leichtigkeit Gegenbeispiele konstruieren: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist skaleninvariant und quasi-isometrisch zu \mathbb{R} , aber nicht vollständig, und schon gar nicht homöomorph zu \mathbb{R} . \mathbb{R} und \mathbb{Z} sind vollständig und quasi-isometrisch, aber nicht homöomorph – \mathbb{Z} ist aber auch nicht skaleninvariant. Und schließlich sind \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 vollständig und skaleninvariant, aber weder homöomorph noch quasi-isometrisch. Bislang fehlen aber noch Beispiele zu proper, homogen und separabel.

Damit ist es insbesondere zwar nicht möglich, einer Gruppe einen eindeutigen Kontinuumslikes zuzuordnen, zumindest aber einen topologischen Raum; unter der Voraussetzung, dass mindestens ein Kontinuumslikes existiert.

Beispiel: Die Umkehrung des Satzes ist falsch: Wir definieren $d^p(x, y) := |x - y|^p$ für $x, y \in \mathbb{R}$, $p \in (0, 1]$. Dann sind (\mathbb{R}, d^1) und $(\mathbb{R}, d^{1/2})$ homöomorph, skaleninvariant, proper und homogen, aber nicht quasi-isometrisch.

Beispiel: Sei G ein Cayleygraph zur Gruppe \mathfrak{G} und αG ein n -dimensionaler reeller Banachraum (\mathbb{R}^n, d) . Dann ist G grob-isometrisch zu (\mathbb{R}^n, d) , dieser quasi-isometrisch zu (\mathbb{R}^n, d_1) (mit der 1-Metrik) und dieser grob-isometrisch zu \mathbb{Z}^n . Folglich ist G quasi-isometrisch zu \mathbb{Z}^n . Damit muss \mathfrak{G} als Untergruppe mit endlichem Index \mathbb{Z}^n enthalten ([Pan₂]).

Dieses letzte Beispiel verdeutlicht eine Besonderheit, die wir im nächsten Abschnitt nochmals antreffen werden: Ein Graph mit einem Banachraum als Kontinuumslikes muss bereits eine Variation von \mathbb{Z}^n sein. Was dabei genau mit “Variation” gemeint ist, wird der folgende Abschnitt klarstellen.

3.4.2 Quasi-isometrische Graphen

Der scheinbar abstrakte Begriff der Quasi-Isometrie besitzt für Graphen eine sehr konkrete Bedeutung: Eine Quasi-Isometrie ist gerade eine besondere, lokale Transformation eines Graphen, wie das folgende Lemma zeigen wird:

Lemma 12 *Seien G_1 und G_2 gradbeschränkte und zusammenhängende Graphen. Sie sind genau dann zueinander quasi-isometrisch, wenn es eine Konstante $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass G_2 aus G_1 hervorgeht durch:*

1. Verschmelzen von Knoten, deren Abstand höchstens k beträgt¹,
2. Ankleben von höchstens k Baumgraphen der Länge höchstens k und Ordnung höchstens k^k an jedem verbleibenden Knoten von G_1 ,
3. Hinzufügen von Kanten zwischen Knoten mit maximalem Abstand k ,
4. Entfernen einer beliebig großen Menge Kanten $\{\mathbf{n}_j, \mathbf{m}_j\}$, so dass nach dem Entfernen die Endpunkte \mathbf{n}_j und \mathbf{m}_j höchstens Abstand k voneinander besitzen.

Einen solchen Prozess nennen wir eine k -lokale Transformation eines Graphen.

¹Beim Verschmelzen von größeren Mengen sollen die Knoten paarweise Abstand höchstens k besitzen.

Beweis: “ \Rightarrow ” Sei $f : G_1 \rightarrow G_2$ eine $(\lambda, \epsilon, \epsilon)$ -Quasi-Isometrie. Zu jedem Knoten $\mathbf{n} \in G_2$ verschmelzen wir alle Knoten im Urbild $f^{-1}(\mathbf{n})$ miteinander (sofern das Urbild nicht leer ist), das Urbild hat dabei einen durch 2ϵ beschränkten Durchmesser. Als nächstes hat jeder Knoten von G_2 im Abstand ϵ einen Bildknoten aus G_1 , d.h. durch Hinzufügen von Strecken der Länge höchstens ϵ können wir nun jeden Knoten aus G_2 erzeugen. Diese können wir nun so zu Bäumen zusammenkleben, dass die neu eingefügten Kanten auch in G_2 existieren. Die globale Beschränkung des Vertexgrades beschränkt dabei die Zahl der Bäume und ihrer Ordnung. Den resultierenden Graphen bezeichnen wir mit G'_1 . Nach Konstruktion können wir die Knoten aus G'_1 mit denen von G_2 bijektiv identifizieren. Als nächstes fügen wir die fehlenden Kanten ein. Angenommen, es gibt eine Kante in G_2 zwischen den Knoten \mathbf{n} und \mathbf{m} . Diese haben ihre Äquivalente \mathbf{n}' und \mathbf{m}' in G'_1 sowie Knoten \mathbf{n}'' und \mathbf{m}'' mit $d(\mathbf{n}', \mathbf{n}'') \leq \epsilon$ (angeklebte Strecke) und $d(f\mathbf{n}'', \mathbf{n}) \leq \epsilon$ (wegen Quasi-Isometrie). Damit ist

$$d'_1(\mathbf{n}', \mathbf{m}') \leq 4\epsilon + \lambda \cdot d_2(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 4\epsilon + \lambda,$$

also insbesondere beschränkt. Damit können wir durch Einfügen von Kanten zwischen Knoten mit Abstand höchstens $4\epsilon + \lambda$ jede Kante aus G_2 in G'_1 darstellen. Den erhaltenen Graphen nennen wir G'_2 . Nach Konstruktion ist G_2 ein Untergraph von G'_2 , wir müssen also noch einige Kanten entfernen. Seien also $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in G'_2$ benachbarte Knoten. Dann wurde ihre Kante entweder gerade erst hinzugefügt und existiert damit auch in G_2 (trivialer Fall), oder sie wurde beim Ankleben der Baumgraphen hinzugefügt, oder sie existierte bereits in G_1 . Im zweiten Fall existiert sie nach Konstruktion auch in G_2 (die Bäume wurden entsprechend der Kantenstruktur von G_2 erzeugt). Im dritten Fall kann die Kante durch Verschmelzung von Knoten entstanden sein und damit könnten ihre Endknoten ursprünglich einen größeren Abstand als 1 gehabt haben, aber nach Konstruktion nicht mehr als 2ϵ . Damit muss mittels der Quasi-Isometrie auch der Abstand der beiden Knoten in G_2 beschränkt sein. Schließlich wählen wir k als das Maximum aller erwähnten Schranken.

“ \Leftarrow ” Jeder einzelne Schritt ist eine Quasi-Isometrie: Das Ankleben der Baumgraphen ist eine k -Isometrie, Hinzufügen und Entfernen von Kanten ändert die Abstände nur um Faktoren zwischen k^{-1} und k . Beim Verschmelzen von Knoten ändern sich die Abstände für Knoten außerhalb des Verschmelzungsbereichs höchstens um k , innerhalb des Bereichs fällt sie von höchstens k auf 0, d.h. es ist eine Quasi-Isometrie mit $\lambda = \epsilon = k$. \square

Damit bekommen wir eine ausführliche Klassifizierung von Graphen mit Banachräumen als Kontinuumslimits:

Folgerung 4 *Ist G ein gradbeschränkter Graph mit einem endlich-dimensionalen reellen Banachraum S als Kontinuumslimit, dann ist G eine k -lokale Transformation von \mathbb{Z}^n für ein festes $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis: G ist grob-isometrisch zu S , S ist quasi-isometrisch zu (\mathbb{R}^n, d_1) , dieser grob-isometrisch zu \mathbb{Z}^n . Folglich ist G quasi-isometrisch zu \mathbb{Z}^n und wir können das obige Lemma anwenden. \square

Die vier Prozesse, die wir hier als k -lokale Transformation zusammengefasst haben, sind annähernd das, was man auch unter einer lokalen Dynamik des Graphen verstehen könnte; also eine Veränderung der Vernetzung des Graphen auf kurzen Abständen. Allein die seltsame Einschränkung im vierten Punkt (Entfernen von Kanten) erscheint irgendwie ungenügend, da die Dynamik hierfür bereits wissen müsste, wie der Graph in der Zukunft aussehen wird. Wir können dies als eine Art reversible und lokale Dynamik betrachten, im Gegensatz zu einer irreversiblen lokalen Dynamik, in der auch beliebig langreichweitige Kanten entfernt werden dürfen. Wie wir gesehen haben, können in einer reversiblen Dynamik keine Änderungen der Limes-Topologie auftreten, lediglich Änderungen der Limes-Metrik. Im folgenden Abschnitt werden wir außerdem sehen, dass auch die Skalierungsdimension durch eine reversible Dynamik (also Quasi-Isometrie) nicht geändert werden kann. Bei einer irreversiblen Dynamik kann der Graph zusätzliche Kanten verlieren, dabei auch seine Dimension verändern (als Beispiel hierfür dient die Ulam-Spirale, vgl. [RN]), allgemein mit einer viel höheren Geschwindigkeit expandieren und schließlich vollständig zerfallen. Diese Veränderungen stehen in einer reversiblen Dynamik nicht zur Auswahl, sind aber auch gleichzeitig nur in einer Zeitrichtung möglich. Mit den Bezeichnungen aus [Haw] bedeutet dies, dass thermodynamischer und kosmologischer Zeitpfeil unter den getroffenen Annahmen stets in dieselbe Richtung weisen müssen.

3.5 GH-Abstand und Skalierungsdimension

Man könnte annehmen, dass die Skalierungsdimension aus Definition 1 eines Graphen ein Charakteristikum ist, an dem man einen eventuellen Kontinuumslimes erkennen oder zumindest einschränken kann. Dies geht leider nicht so einfach: Es gibt sowohl Graphen gleicher Skalierungsdimension mit verschiedenem Kontinuumslimes, als auch Graphen mit gleichem Kontinuumslimes aber verschiedener Skalierungsdimension:

Beispiel: Die Graphen \mathbb{Z} und \mathbb{N} tragen die gleiche Skalierungsdimension eins, sie sind aber nicht grob-isometrisch (beispielsweise ist \mathbb{Z} regulär, \mathbb{N} aber nicht).

Beispiel: Sei G die disjunkte Vereinigung aller endlichen Simplexe K_j , zuzüglich Kanten zwischen \mathbf{n} und \mathbf{m} für alle $\mathbf{n} \in K_j$ und $\mathbf{m} \in K_{j+1}$. Die Skalierungsdimension ist offensichtlich $\dim_S G = 2$ (wähle als Startpunkt \mathbf{n} , dann ist $\#U_{\mathbf{n}}(l) = \sum_{j=1}^l j = \frac{1}{2}l(l+1) \sim l^2$), der Graph selber lokal endlich, aber nicht gradbeschränkt. Andererseits ist er grob-isometrisch zu \mathbb{N} , dessen Skalierungsdimension

eins ist.

Wir können aber bei Einschränkung auf gradbeschränkte Graphen (also solche mit global beschränktem Vertexgrad) die gewünschte Beziehung zumindest zum Teil wieder herstellen. Dazu verwenden wir ähnliche Techniken wie Requardt und Nowotny in [RN], [Now] und [Req₃]:

Lemma 13 *Seien G und G' gradbeschränkte, zusammenhängende Graphen mit existierender Skalierungsdimension und quasi-isometrisch. Dann sind ihre Skalierungsdimensionen gleich.*

Beweis: Seien G und G' quasi-isometrische zusammenhängende Graphen mit existierender Skalierungsdimension und jeder Vertexgrad von G und G' sei kleiner oder gleich $v \in \mathbb{N}$ (also $v := \max\{\deg G, \deg G'\}$). Sei ferner $f : G \rightarrow G'$ eine Quasi-Isometrie zwischen G und G' , so dass $G' \subseteq B_{fG}[r]$ gilt mit einem festen $r \in \mathbb{N}$. Damit gibt es zu jedem $\mathbf{m}' \in G'$ einen Knoten $\mathbf{m} \in G$, so dass $d'(\mathbf{m}', f\mathbf{m}) \leq r$. Andererseits können wir von jedem Knoten $\mathbf{m} \in G$ aufgrund des beschränkten Vertexgrades höchstens

$$1 + \sum_{j=1}^r v \cdot (v-1)^{j-1} = 1 + v \cdot \frac{(v-1)^r - 1}{v-2} =: v_r$$

Knoten innerhalb des Abstands r erreichen. Sei nun $\mathbf{n} \in G$ fest. Wir betrachten den j' -Ball um $f\mathbf{n}$ und das Urbild dieser Umgebung unter f . Aufgrund der Quasi-Isometrie von f wissen wir, dass $f^{-1}(B_{f\mathbf{n}}[j'])$ enthalten ist im j -Ball um \mathbf{n} mit $j = \lambda(j'+c)$ (wegen $j' \geq d(f\mathbf{n}, f\mathbf{m}) \geq \lambda^{-1}d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) - c$). Nach Definition enthält der j -Ball um \mathbf{n} gerade $\#B_{\mathbf{n}}[j]$ Knoten. Jeder dieser Knoten kann nach Anwendung von f maximal v_r Knoten von G' innerhalb des Abstands r erreichen. Nun muss aber der gesamte j' -Ball um $f\mathbf{n}$ überdeckt werden vom r -Ball um $f(B_{\mathbf{n}}[j])$, und dieser enthält höchstens $v_r \cdot \#B_{\mathbf{n}}[j]$ Knoten. Es ist also

$$\dim_S G' = \lim_{j' \rightarrow \infty} \frac{\ln \#B_{f\mathbf{n}}[j']}{\ln j'} \leq \lim_{j' \rightarrow \infty} \frac{\ln \#B_{\mathbf{n}}[\lambda(j'+c)] + \ln v_r}{\ln j'} = \dim_S G$$

Analog zeigt man die umgekehrte Richtung, es ist also $\dim_S G = \dim_S G'$. \square

Etwas anders ausgedrückt: Sind G_1 und G_2 zwei genügend angenehme Graphen mit dem gleichen Kontinuumslimites, so sind ihre Skalierungsdimensionen gleich; alle schönen Graphen einer Zusammenhangskomponente tragen dieselbe Skalierungsdimension (aus Grob-Isometrie folgt Quasi-Isometrie). Entsprechend ist folgender verallgemeinerter Dimensionsbegriff wohldefiniert:

Definition 16 *Ist S ein vollständiger, \mathbb{R} -abzählbarer metrischer Raum und quasi-isometrisch zu einem gradbeschränkten, zusammenhängenden Graphen G , dessen Skalierungsdimension existiert, so bezeichnen wir $\dim_{GS} S := \dim_S G$ als die Gromov-Skalierungsdimension von S .*

Wir werden im übernächsten Abschnitt sehen, dass \dim_{GS} unter geeigneten Umständen mit der Hausdorffdimension \dim_H übereinstimmt. Zuvor wollen wir uns aber um den sehr einfachen, aber physikalisch interessanten Spezialfall kümmern, in dem der Limesraum S ein Banachraum ist.

3.5.1 Gromov-Skalierungsdimension von Banachräumen

Lemma 14 *Sind $|\cdot|_a$ und $|\cdot|_b$ zwei Normen auf \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}_0$, sowie d_a und d_b die zugehörigen Metriken, so sind (\mathbb{R}^n, d_a) und (\mathbb{R}^n, d_b) zueinander quasi-isometrisch.*

Beweis: Alle Normen auf dem \mathbb{R}^n sind zueinander äquivalent, d.h. es gibt eine Konstante $\lambda \geq 1$ mit

$$\lambda^{-1} |x|_a \leq |x|_b \leq \lambda |x|_a.$$

Die Identität ist damit bereits eine $(\lambda, 0, 0)$ -Quasi-Isometrie. \square

Wir bezeichnen im folgenden eine Metrik d auf \mathbb{R}^n als *normerzeugt*, wenn es eine Norm auf \mathbb{R}^n gibt, die d erzeugt.

Folgerung 5 *Sei G ein gradbeschränkter Graph mit Kontinuumsmlimes (\mathbb{R}^n, d) , $n \in \mathbb{N}_0$ und d eine normerzeugte Metrik. Dann ist $n = \dim_S G$, also stimmen topologische und Gromov-Skalierungsdimension überein.*

Beweis: G ist grobisometrisch zu (\mathbb{R}^n, d) , dieser quasi-isometrisch zu (\mathbb{R}^n, d_1) (dabei ist d_1 die von der 1-Norm erzeugte Metrik). Schließlich ist (\mathbb{R}^n, d_1) zu \mathbb{Z}^n grobisometrisch, also ist G quasi-isometrisch zu \mathbb{Z}^n und besitzt folglich dieselbe Skalierungsdimension, nämlich n . \square

3.5.2 Zusammenhang zur Hausdorffdimension

Wir wollen in diesem Abschnitt den Zusammenhang zwischen der Skalierungsdimension (vgl. Def.1) eines Graphen und der Hausdorffdimension seines Kontinuumsmlimes untersuchen. Die Hausdorffdimension ist ein für metrische Räume eingeführtes Konzept aus der fraktalen Geometrie, die häufig untersucht wird (z.B. [Fal], [Fed], [HW], [DS]) und auch physikalisch interessant wird, sobald man selbstähnliche Systeme untersucht. Sie wird folgendermaßen definiert:

Definition 17 *Das Hausdorffmaß einer Untermenge $A \subseteq S$ eines metrischen Raums S zur Dimension d ist definiert als*

$$H^d(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{(E_j)_{j \in \mathbb{N}}} \left\{ \sum_j (\text{diam } E_j)^d \right\},$$

(vgl. z.B. [DS]) wobei das Infimum über alle abzählbaren Überdeckungen $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von A mit kleiner werdendem Durchmesser $\text{diam } E_j < \delta$ berechnet wird. Die Hausdorffdimension von A ist derjenige kritische Wert d_H für den $H^d(A) = 0$ ist für $d < d_H$ und $H^d(A) = \infty$ für $d > d_H$.

Die Hausdorffdimension ist schwer zu handhaben, da für die überdeckenden Mengen keine unteren Grenzen an den Durchmesser gefordert werden. Deshalb führen wir zwei weitere Begriffe ein, die uns als Zwischenabschätzungen dienen:

Definition 18 Sei S ein metrischer Raum und $A \subseteq S$ eine Untermenge. Wir setzen für alle $\delta > \delta' > 0$

$$\mathcal{S}_{\delta', \delta}^d(A) := \inf_{(E_j)_{j \in \mathbb{N}}} \sum_j (\text{diam } E_j)^d,$$

wobei (E_j) eine abzählbare Überdeckung von A mit offenen Bällen von Durchmesser

$$\delta' \leq \text{diam } E_j \leq \delta \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

ist (das Infimum über die leere Menge ist ∞). Weiter definieren wir das sphärische Maß ([Fed])

$$\mathcal{S}^d(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{S}_{0, \delta}^d(A)$$

und den Minkowski-Inhalt

$$\mathcal{T}^d(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{S}_{\delta, \delta}^d(A).$$

Analog zum Hausdorffmaß können wir auch zu den anderen beiden Begriffen ein $d' \in [0, \infty]$ finden, so dass $\mathcal{S}^d(A) = \infty$ für $d < d'$ und $\mathcal{S}^d(A) = 0$ für $d > d'$ gilt (analog für \mathcal{T}^d). Dieses d' bezeichnen wir als sphärische Dimension $\dim_{\text{sph}} A$ bzw. Minkowski-Dimension $\dim_M A$.

Unsere weitere Vorgehensweise ist die folgende: Wir werden zunächst ein paar grundlegende Eigenschaften der Maße in den nächsten drei Lemmata angeben. In Satz 7 werden wir die notwendigen Abschätzungen zwischen Skalierungsdimension und Minkowski-Inhalt durchführen, und schließlich in Folgerung 6 den Minkowski-Inhalt mit dem Hausdorffmaß vergleichen, woraus die Identität von Skalierungs- und Hausdorffdimension erwächst.

Lemma 15 Sei S ein skaleninvarianter, homogener und unbeschränkter metrischer Raum. Dann gibt es eine Konstante $\beta_S \in [1, 2]$, so dass $\text{diam } B_x[r] = \beta_S \cdot r$ ist für alle $r > 0$ und $x \in S$, wir bezeichnen diese als Ballkonstante des Raumes.

Die Ballkonstante des Einpunktraumes setzen wir auf Null. Außerdem gibt es zu jedem $d > 0$ Konstanten $\kappa_{S,d} \in [0, \infty]$ und $\tau_{S,d}$, so dass für alle $r > 0$ und $x \in S$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d(B_x[r]) &= \kappa_{S,d} \cdot r^d, \\ \mathcal{T}^d(B_x[r]) &= \tau_{S,d} \cdot r^d.\end{aligned}$$

Beweis: Seien $x, y \in S$ mit $r_0 := d(x, y) > 0$. Dann ist $\text{diam } B_x[r_0] \geq r_0$. Andererseits ist wegen Dreiecksungleichung $\text{diam } B_x[r_0] \leq 2r_0$. Wir setzen $\beta := \text{diam } B_x[r_0]/r_0$. β ist vorerst von x und r_0 abhängig. Wir können nun aber durch die Skaleninvarianz und Homogenität von S diesen Ball mit beliebigem Radius an jede beliebige Stelle translatieren; da Durchmesser und Radius gleichermaßen skalieren, ist $\beta_S := \beta$ damit eine Konstante des Raumes.

Analog können wir mit Skaleninvarianz und Homogenität die Konstanz von $\kappa_{S,d}$ beweisen: Aufgrund der Homogenität ist das Hausdorffmaß aller r -Bälle in S gleich. Ist nun E_j eine Überdeckung von $B_x[r]$, so lässt sich diese Überdeckung durch Skalierung in eine Überdeckung E'_j von $B_x[\lambda r]$ für alle $\lambda > 0$ überführen, wobei $\text{diam } E'_j = \lambda \cdot \text{diam } E_j$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d(B_x[\lambda r]) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{(E_j)_{j \in \mathbb{N}}} \left\{ \sum_j (\lambda \text{diam } E_j)^d \right\} \\ &= \lambda^d \cdot \mathcal{H}^d(B_x[r]).\end{aligned}$$

Wir setzen $\kappa_{S,d} := \mathcal{H}^d(B_x[1])$. Dann ist $\mathcal{H}^d(B_x[r]) = \kappa_{S,d} r^d$. Für den Minkowski-Inhalt gilt das analoge. \square

Der erste Teil des obigen Lemmas ist für nicht-skaleninvariante oder nicht-homogene Räume falsch, als Beispiele dienen \mathbb{Z} (hier ist der Durchmesser stets ganzzahlig) und \mathbb{R}_0^+ (der Ball um 0 mit Radius 1 hat auch den Durchmesser 1). Es liegt nahe zu vermuten, dass β_S für unbeschränkte Räume stets den Wert 2 annimmt, das ist aber falsch:

Beispiel: Sei $0 < s < 1$. Wir definieren eine Metrik auf $S := \mathbb{R}$ durch $d^s(x, y) := |x - y|^s$. Damit ist (S, d^s) ein skaleninvarianter, homogener und vollständiger metrischer Raum. Wir setzen $x(r) = r^{1/s} \in S$ für $r > 0$. Dann ist $d^s(x(r), 0) = r$. Der abgeschlossene r -Ball um 0 beinhaltet die Punkte $x(r)$ und $-x(r)$, diese sind zugleich maximal voneinander entfernt. Damit ist $\text{diam } B_0[r] = |2 \cdot x(r)|^s = 2^s r$, also $\beta_S = 2^s \in [1, 2]$. Wir finden also Ballkonstanten für alle Werte in $(1, 2]$.

Lemma 16 Für den Minkowski-Inhalt zweier Mengen $A, B \subseteq S$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^d(A) &\in [0, \infty], & \mathcal{T}^d(\emptyset) &= 0, & \mathcal{T}^d(A) &= \mathcal{T}^d(\bar{A}) \\ \mathcal{T}^d\left(\bigcup_{j=1}^J A_j\right) &\leq \sum_{j=1}^J \mathcal{T}^d(A_j) & & & & \text{(endliche Subadditivität)} \\ A \subseteq B &\Rightarrow \mathcal{T}^d(A) \leq \mathcal{T}^d(B) & & & & \text{(Isotonie)}.\end{aligned}$$

Sind A und B kompakt und disjunkt, so gilt zusätzlich

$$\mathcal{T}^d(A) + \mathcal{T}^d(B) = \mathcal{T}^d(A \cup B).$$

Beweis: Offensichtlich ist $\mathcal{T}^d(A) \in [0, \infty]$ für alle $A \subseteq S$ und $\mathcal{T}^d(\emptyset) = 0$ (jede Menge überdeckt \emptyset , wähle eine Folge von Bällen mit kleiner werdenden Radien). Für den Abschluss ist es nur nötig, die überdeckenden Mengen um $\epsilon \rightarrow 0$ zu vergrößern (diese Eigenschaft werden wir allerdings nicht benötigen).

Sei nun $A := \bigcup_{j=1}^J A_j$, $J \in \mathbb{N}$ und die $A_j \subseteq S$ beliebige Mengen. Zu jedem $\delta > 0$ sei $(E_k^{(j,\delta)})_{k=1 \dots K(j,\delta)}$, $K(j,\delta) \in \mathbb{N}_\infty$ eine abzählbare Überdeckung von A_j mit Bällen zum Durchmesser δ . Dann ist $(E_k^{(j,\delta)})_{k,j}$ eine Überdeckung von A mit Mengen zum Durchmesser δ , also

$$\mathcal{T}^d(A) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K(j,\delta)} \delta^d.$$

Die Summe über k mag unendlich sein, aber die Summe über J ist endlich und kann daher aus dem Limes herausgezogen werden:

$$\mathcal{T}^d(A) \leq \sum_{j=1}^J \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{K(j,\delta)} \delta^d = \sum_{j=1}^J \mathcal{T}^d(A_j)$$

Für unendliches J ist dieses Vorgehen nicht möglich. Die Isotonie von \mathcal{T}^d folgt direkt aus der Subadditivität für die Mengen A und $B \setminus A$. Seien nun A und B kompakt und disjunkt. Dann gibt es einen positiven (Hausdorff-)Abstand zwischen ihnen, und ab einem bestimmten Durchmesser δ abwärts zerfällt jede Überdeckung von $A \cup B$ in eine Überdeckung von A (disjunkt zu B) und eine Überdeckung von B (disjunkt zu A). \square

Bemerkung: Der Minkowski-Inhalt ist erstmal noch kein Inhalt im eigentlichen Sinn, da zum einen die kompakten Mengen alleine noch keinen Ring bilden, wir für die präkompakten Mengen andererseits die Additivität nicht vollständig gezeigt. Es ist auch kein äußeres Maß, da σ -Subadditivität nicht gezeigt wurde und im übrigen auch gar nicht gilt (Beispielsweise ist $\mathcal{T}^2([0,1]) = 0$ für das Intervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}^1$, aber $\mathcal{T}^2(\mathbb{R}) = \infty$). Für unsere Zwecke reicht aber bereits endliche Subadditivität aus.

Lemma 17 Für jeden vertex-transitiven Graphen G mit polynomial-beschränktem Wachstum gibt es endliche Konstanten $A, B, r_0 > 0$ und eine ganze(!) Zahl $d \in \mathbb{N}_0$ mit

$$A \cdot r^d \leq \#U_n(r) \leq B \cdot r^d \quad \forall \mathbf{n} \in G, r > r_0$$

und folglich $d = \dim_S G$.

Beweis: Der Beweis ist sehr kompliziert und basiert wesentlich auf den Eigenschaften der Normalreihe einer nilpotenten Gruppe. Er wurde von Bass, Dixmier, Guivarc'h, Wolf und anderen für nilpotente Gruppen ausgeführt ([Bas]). Durch Gromovs Satz über Gruppen mit polynomialem Wachstum konnte das Ergebnis verallgemeinert werden auf Cayleygraphen mit polynomialem Wachstum und wurde wenig später in Arbeiten von Sabidussi und Trofimov ([ST]) auf vertex-transitive Graphen übertragen. Durch Logarithmieren wird klar, dass die Skalierungsdimension von G existiert und $d = \dim_S G$ gelten muss. \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den folgenden, für diesen Abschnitt zentralen Satz ansteuern, der in einer Version für Carnot-Caratheodory-Räume auf Mitchell [Mit] zurückgeht, auf den wir hier aber nicht zurückgreifen werden:

Satz 7 Sei G ein (diskreter) metrischer Raum² mit

$$A \cdot r^d \leq \#U_{\mathbf{n}}(r) \leq B \cdot r^d \quad \forall \mathbf{n} \in G, r > r_0$$

für endliche $A, B, r_0 > 0$. G sei grob-isometrisch zu einem homogenen, vollständigen und skaleninvarianten metrischen Raum S . Dann gibt es endliche $A', B' > 0$, so dass gilt:

$$A' \cdot r^d \leq \mathcal{T}^d(B_x^{(S)}[r]) \leq B' \cdot r^d \quad \forall x \in S, r > 0$$

Ist G sogar ein vertex-transitiver und gradbeschränkter Graph, dann gilt auch die Umkehrung.

Beweis: “ \Rightarrow ”: Wir verwenden in diesem Beweis $U_{\mathbf{n}}(r)$ für die Bälle in G und $B_x[r]$ bzw. $B_x(r)$ für die abgeschlossenen bzw. offenen Bälle in S . Unsere Vorgehensweise ist die folgende: Zunächst konstruieren wir zu festem $x \in S$ und $r > 0$ eine Überdeckung von $B_x[r]$ mit R -Bällen, deren Zahl x -unabhängig ist. Durch die Skaleninvarianz können wir nun diese Überdeckung überführen in Überdeckungen von $B_x(r)$ mit beliebig kleinen Bällen (Durchmesser δ) durch die Wahl von $r' := r \cdot 2R/\delta$. Daraus lässt sich $\mathcal{T}^d(B_x[r])$ einschränken für alle r .

(1.) Wir beginnen mit der hinteren Ungleichung der Behauptung. Zunächst ist aufgrund von Lemma 15 klar, dass es ausreicht, die Behauptung nur für $r > r'_0$ für ein $r'_0 > 0$ zu zeigen. Sei $f : G \rightarrow S$ eine (c, R) -Grobisometrie. Sie induziert eine G -indizierte Überdeckung von S mit abgeschlossenen R -Bällen, deren Durchmesser $\beta_S \cdot R$ ist. Aufgrund der Homogenität reicht es aus, die Ungleichungskette für ein einziges $x \in S$ zu wählen. Dazu wählen wir $\mathbf{n} \in G$ beliebig und $x = f\mathbf{n}$. Sei außerdem $r' > r_0$ beliebig. Zu jedem $y \in B_x[r']$ gibt es ein $\mathbf{m} \in G$ mit $d(y, f\mathbf{m}) \leq R$. Nach Dreiecksungleichung ist

$$d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \leq d(x, f\mathbf{m}) + c \leq d(x, y) + R + c \leq r' + R + c,$$

²Wir denken uns G stets als Graph, und sprechen daher von “Knoten” und schreiben statt $B_x^{(G)}[r]$: $U_{\mathbf{n}}(r)$. Dies vereinfacht das Verständnis des folgenden Beweises, auch wenn die besonderen Eigenschaften eines Graphen nicht verwendet werden.

also $B_x[r'] \subseteq B_{fU_n(r'+R+c)}[R]$; d.h. wir können $B_x[r']$ vollständig überdecken durch die abgeschlossenen R -Bälle um alle Elemente $f\mathbf{m}$ mit $\mathbf{m} \in U_n(r' + R + c)$. Um mit offenen Bällen zu überdecken, verdoppeln wir noch zusätzlich den Radius, also $B_x[r'] \subseteq B_{fU_n(r'+R+c)}(2R)$. Die Zahl der Mengen in dieser Überdeckung ist $\#U_n(r' + R + c) \leq B (r' + R + c)^d$. Die Skalierungsinvarianz erlaubt uns hieraus zu jedem $\lambda > 0$ eine Überdeckung des Balls $B_x[\lambda^{-1}r']$ mit ebensovielen Mengen zum Radius $2\lambda^{-1}R$ zu konstruieren. Seien nun $r > 0$ und $\delta > 0$ beliebig. Wir setzen $\lambda = 2R\beta_S\delta^{-1}$ und $r' = \lambda r$. Für genügend kleine δ ist $r' > r_0$ und wir erhalten eine Überdeckung von $B_x[r]$ mit Bällen zum Radius $\beta_S^{-1}\delta$, also Durchmesser δ . Die Zahl der Bälle, die für diese Überdeckung nötig ist, beträgt höchstens $B(\lambda r + R + c)^d$. Damit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^d(B_x[r]) &\leq B \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} (2R\beta_S\delta^{-1}r + R + c)^d \cdot \delta^d \\ &\leq B(2R\beta_S r)^d \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{d-d} \end{aligned}$$

Insbesondere ist dieser Wert für $d = d'$ endlich und positiv, also

$$\mathcal{T}^d(B_x[r]) \leq B' r^d \quad \text{mit } B' = 2^d B \beta_S^d R^d$$

(2.) Nun zur umgekehrten Ungleichung. Sei dafür $(E_j)_{j=1\dots J}$ eine Überdeckung von $B_x[r]$ mit offenen Bällen E_j und $\text{diam } E_j = \delta$ für alle j . Aufgrund der Kompaktheit aller abgeschlossenen Bälle können wir J als endlich annehmen. Sei außerdem $g : S \rightarrow G$ eine (c, R) -Grobisometrie. Durch eine Skalierung mit dem Faktor $\lambda := (r_0 + c)\delta^{-1}$ lässt sich die Überdeckung (E_j) überführen in eine gleichmächtige Überdeckung (E'_j) von $B_x[\lambda r]$ mit Bällen zum Durchmesser $r_0 + c$. Dann ist der Durchmesser des Bildes $g(E'_j)$

$$r_0 \leq \text{diam } g(E'_j) \leq r_0 + 2c \quad \Rightarrow \quad g(E'_j) \subseteq U_{g x_j}(r_0 + 2c)$$

für jedes (wir wählen ein beliebiges) $x_j \in E'_j$. Damit ist

$$\#g(E'_j) \leq B \cdot (r_0 + 2c)^d$$

die Zahl der Knoten im Bild von E'_j .

Andererseits umfasst das Bild der gesamten Menge $B_x[\lambda r]$ eine bestimmte Mindestmenge an Knoten, die sich folgendermaßen abschätzen lässt: Zunächst zeigen wir

$$U_{g x}(\lambda r - c - R) \subseteq U_{g(B_x[\lambda r])}(R)$$

für genügend großes λ (also genügend kleines δ). Dafür nehmen wir $\mathbf{m} \in G$ mit $d(\mathbf{m}, gx) \leq \lambda r - c - R$. Es muss ein $y \in S$ geben mit $\mathbf{m} \in U_{gy}(R)$. Außerdem ist

$$d(gy, gx) \leq \lambda r - c \quad \Rightarrow \quad d(y, x) \leq \lambda r,$$

also $y \in B_x[\lambda r]$, was die obige Formel beweist.

Die Zahl der Knoten in der linken Menge können wir (für genügend großes λ) nach unten abschätzen durch

$$\#U_{g_x}(\lambda r - c - R) \geq A(\lambda r - c - R)^d.$$

Folglich ist auch die Größe der rechten Menge $U_{g(B_x[\lambda r])}(R)$ durch diesen Term nach unten beschränkt. Sie setzt sich zusammen aus den R -Umgebungen aller Elemente aus $g(B_x[\lambda r])$. Die Größe einer einzelnen R -Umgebung ist beschränkt durch $\max\{B R^d, B r_0^d\}$ (je nach $R \geq r_0$ oder $R < r_0$). Damit muss $g(B_x[\lambda r])$ selber aus mindestens

$$\#g(B_x[\lambda r]) \geq \left\lfloor \frac{A(\lambda r - c - R)^d}{B \max\{R^d, r_0^d\}} \right\rfloor$$

Knoten bestehen. Da (E'_j) eine Überdeckung von $B_x[\lambda r]$ ist, ist auch $(g(E'_j))$ eine Überdeckung von $g(B_x[\lambda r])$. Die Höchstzahl der Knoten in $g(E'_j)$ haben wir bereits nach oben abgeschätzt, die Mindestzahl der zur Überdeckung notwendigen Mengen ist damit

$$J(\delta) \geq \left\lfloor \frac{A(r(r_0 + c)\delta^{-1} - c - R)^d}{B \max\{R^d, r_0^d\} \cdot B(r_0 + 2c)^d} \right\rfloor$$

Dies gilt natürlich auch für die gleichmächtige Überdeckung (E_j) von $B_x[r]$. Die Folgerung für den Minkowski-Inhalt lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{d'}(B_x[r]) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{d'} \cdot J(\delta) \\ &\geq A' r^d \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{d'-d} \quad \text{mit } A' := \frac{A(r_0 + c)^d}{B^2 \max\{R^d, r_0^d\} (r_0 + 2c)^d} \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $d = d'$ ist insbesondere $\mathcal{T}^d(B_x[r]) \geq A' r^d$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} A' r^d &\leq \mathcal{T}^d(B_x[r]) \leq B' r^d \\ \text{mit } A' &= \frac{A(r_0 + c)^d}{B^2 \max\{R^d, r_0^d\} (r_0 + 2c)^d}, \quad B' = 2^d B \beta_S^d R^d \end{aligned}$$

für $r > r_0$. Insbesondere ist damit $\dim_M B_x[r] = d$.

“ \Leftarrow ”: Der Minkowski-Inhalt erfülle $A' r^d \leq \mathcal{T}^d(B_x[r]) \leq B' r^d$ für eine Dimension $d > 0$ und $C \in (0, \infty)$, $f : G \rightarrow S$ sei wieder eine (c, R) -Grobisometrie.

Wir wählen ein $\delta > c$ fest und betrachten nur Radien $r \gg \delta$. Einige Knoten von G haben unter f einen Abstand kleiner δ , möglicherweise haben sie sogar denselben Bildpunkt. Dann ist ihr Abstand in der Metrik von G höchstens $2R + \delta$. Wir

haben G als endlich erzeugt vorausgesetzt, daher befinden sich in jedem $2R + \delta$ -Ball endlich viele Knoten, nach Definition $\nu := \#U(2R + \delta)$. Damit können auch höchstens ν Knoten einen so geringen Bildabstand von einem zentralen Knoten haben. Für das Urbild der Menge $B_x[r - \delta]$ gilt $f^{-1}(B_x[r]) \subseteq U_{\mathbf{n}}(r + R + c)$, wobei \mathbf{n} ein Knoten in G ist mit $d(f\mathbf{n}, x) < R$. Das Urbild von $B_x[r - \delta]$ enthält $\#f^{-1}(B_x[r - \delta])$ Knoten. Damit können wir eine Menge $\{\mathbf{n}_j\} \subseteq G$, $j \in J$ von

$$\#J \geq \left\lfloor \frac{\#f^{-1}(B_x[r - \delta])}{\nu} \right\rfloor$$

Knoten ausmachen, deren paarweiser Bildabstand größer ist als δ . Wir können zu jedem $j \in J$ den $\delta/3$ -Ball um $f\mathbf{n}_j$ betrachten. Diese Bälle sind nach Konstruktion disjunkt, ihre Anzahl beträgt $\#J$, ihr Durchmesser ist $\beta_S \cdot \delta/3$ und sie befinden sich alle vollständig innerhalb von $B_x[r]$. Jede Überdeckung von $B_x[r]$ mit $\delta/3$ -Bällen muss also mindestens $\#J$ Mengen umfassen. Damit ist

$$\mathcal{T}^d(B_x[r]) = \lim_{\delta/3 \rightarrow 0} (\delta/3)^d \cdot \#J \geq \lim_{\delta/3 \rightarrow 0} (\delta/3)^d \cdot \left\lfloor \frac{\#f^{-1}(B_x[r - \delta])}{\nu} \right\rfloor$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung $\mathcal{T}^d(B_x[r]) \leq B' r^d$ für genügend große g , also

$$\lim_{\delta/3 \rightarrow 0} (\delta/3)^d \cdot \left\lfloor \frac{\#f^{-1}(B_x[r - \delta])}{\#U(2R + \delta)} \right\rfloor \leq B' r^d < 2 B' r^d.$$

Nun muss, damit der Grenzwert die strikte Ungleichung erfüllen kann, ein (möglicherweise sehr kleines) $\delta/3$ existieren, so dass

$$(\delta/3)^d \cdot \left\lfloor \frac{\#f^{-1}(B_x[r - \delta])}{\#U(2R + \delta)} \right\rfloor \leq 2 B' r^d$$

gilt. Dies ist eine polynomiale Beschränkung für $\#f^{-1}(B_x[r - \delta])$ und damit für die r -Umgebungen im Graphen, G ist also von polynomialem Wachstum. Dann besitzt G auch eine Skalierungsdimension (da Cayleygraph: Lemma 17). Der Rest ist aufgrund der Eindeutigkeit beider Dimensionsbegriffe bereits gezeigt. \square

Der obige Satz setzt die Skalierungsdimension erst in Zusammenhang zu der Minkowski- oder auch Covering-Dimension. Der letzte Schritt zur Hausdorffdimension folgt nun:

Folgerung 6 *Seien G und S wie oben. Dann ist das Hausdorffmaß zur Dimension $\dim_S G$ Ahlfors-regulär und folglich $\dim_H S = \dim_H B_x[r] = \dim_S G = \dim_{GS} S$. Die Gromov-Skalierungsdimension (Def.16) und die Hausdorffdimension von S stimmen also überein. Desweiteren ist $0 < \kappa_{S,d} < \infty$.*

Beweis: Sei $d = \dim_S G$. Dann folgt aus dem vorangehenden Satz und aus der Darstellung $\mathcal{T}^d(B_x[r]) = \tau_{S,d} \cdot r^d$ trivialerweise $C^{-1} \leq \tau_{S,d} \leq C$. Dies erlaubt die Verallgemeinerung des Satzes auf alle $r > 0$, nicht nur auf $r > r_0$. Nun ist, vergleichbar dem Beweis zum Massenverteilungs-Prinzip, für jede Überdeckung U_j von $B_x[r]$ mit offenen Bällen

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^d(B_x[r]) &\leq \mathcal{T}^d\left(\bigcup U_j\right) \leq \sum_j \mathcal{T}^d(U_j) \leq C \beta_S^{-1} \cdot \sum_j (\text{diam } U_j)^d \\ \Rightarrow \quad C^{-1} r^d &\leq \mathcal{T}^d(B_x[r]) \leq C \beta_S^{-1} \mathcal{S}^d(B_x[r]). \end{aligned}$$

Zur Anwendbarkeit der endlichen Subadditivität benutzen wir dabei die Kompaktheit von $B_x[r]$. Andererseits ist jede Überdeckung mit offenen Bällen zum Radius δ auch eine Überdeckung zum Radius $\leq \delta$, deshalb gilt

$$\mathcal{S}^d(B_x[r]) \leq \mathcal{T}^d(B_x[r]) \leq C r^d.$$

Dazu gibt es noch die folgende Abschätzung zwischen sphärischem und Hausdorffmaß ([Fed]):

$$2^{-d} \cdot \mathcal{S}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{S}^d(A)$$

Damit muss $\dim_H B_x[r] = d$ sein. Nun ist S eine abzählbare Vereinigung solcher Bälle, und deshalb auch $\dim_H S = d$. \square

Beispiel: Wenn also G ein genügend schöner Graph mit starkem und homogenem Kontinuumslikes S ist, dann stimmen seine Skalierungsdimension und die Hausdorffdimension von S überein. Dies lässt sich aber auch sehr effektiv auf Situationen anwenden, in denen wir es nicht mit Graphen zu tun haben: Sei \mathbb{Z} versehen mit der Metrik $d^s(\mathbf{n}, \mathbf{m}) := |\mathbf{n} - \mathbf{m}|^s$ für ein $s \in (0, 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \#U_0(r) &= 1 + 2\lfloor r^{1/s} \rfloor & \forall r \geq 0 \\ \Rightarrow \quad 1 \cdot r^{1/s} &\leq \#U_0(r) \leq 3 \cdot r^{1/s} & \forall r > 1, \end{aligned}$$

d.h. die Skalierungsdimension von G (im Sinne des Abzählens von Punkten als Knoten) ist $1/s$. Sei nun $S = (\mathbb{R}, d^s)$ wie im Beispiel auf Seite 53. Dann ist S skaleninvariant, homogen und insbesondere grob-isometrisch zu (\mathbb{Z}, d^s) : Für die kanonische Einbettung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt einerseits $d^s(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = d^s(f\mathbf{n}, f\mathbf{m})$, andererseits befindet sich der Einheitsball in (\mathbb{R}, d^s) im endlichen Abstand 1 von 0, womit es zu jedem Punkt x in \mathbb{R} einen Knoten $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$ gibt mit $d^s(x, f\mathbf{n}) \leq 1$. Dann ist nach obiger Folgerung auch die Hausdorffdimension von (\mathbb{R}, d^s) gleich $1/s$. Eine ähnliche Aussage findet sich in [DS]: Ist ein Maß auf (S, d) Ahlfors-regulär zur Dimension n , so ist dasselbe Maß auf (S, d^s) Ahlfors-regulär zur Dimension n/s , der Beweis in [DS] ist aber nicht für diskrete Räume geeignet.

3.5.3 Ergänzende Ergebnisse

Unter anderem eine Konsequenz aus Gromov's Satz über polynomiales Wachstums von Gruppen ist der folgende Satz, der eine Reihe von Eigenschaften von Cayleygraphen zusammenfasst ([Har, VII.26,29,33])

Satz 8 *Sei G ein endlich-erzeugter Cayleygraph. Dann ist die Skalierungsdimension $d := \dim_S G \in \mathbb{N}_{0,\infty}$ und im Fall $d < \infty$ existiert der "Vorfaktor" $\lim_{r \rightarrow \infty} \#U(r)/r^d$.*

Beweis: Ist G nicht von polynomialem Wachstum, so ist $\dim_S G = \infty$. Ansonsten ist nach Gromov G eine fast nilpotente Gruppe, d.h. es gibt eine nilpotente Untergruppe H von G mit endlichem Index. Damit ist eine homogene Dimension d für G definiert, die sich aus der unteren Zentralreihe von G herleitet. Nach Ergebnissen von Wolf, Bass und anderen ([Bas]) gibt es zu jedem Cayleygraphen zwei positive Konstanten $A, B > 0$, so dass $Ar^d \leq \#U(r) \leq Br^d$ gilt für alle Radien $r > r_0$ für ein $r_0 \geq 0$. Durch Logarithmieren erhält man damit obere und untere Schranken für die Skalierungsdimension, die für $r \rightarrow \infty$ beide mit d übereinstimmen. Die Existenz eines Vorfaktors des polynomialen Wachstums geht auf Pansu ([Pan₁]) zurück und bedeutet im Grunde, dass für $r \rightarrow \infty$ die Konstanten A und B asymptotisch gleich gewählt werden können. \square

3.6 Kontinuumslices als Maßraum

Für Graphen gibt es ein natürliches Maß, das Zählmaß. Dazu wird jeder Untermenge die Zahl der Knoten zugeordnet, die diese Untermenge umfasst. Für vertex-transitive Graphen wissen wir nach Lemma 17:

$$A \cdot r^d \leq \#U_n(r) \leq B \cdot r^d \quad \forall \mathbf{n} \in G, r > r_0$$

Diese Beschränkung erlaubt uns eine Übertragung des Maßes in den Kontinuumslices, und zwar mit der Skalierungsdimension als kritischem Exponenten. Wir geben gleich eine allgemeinere Definition an:

Definition 19 *Sei G ein gradbeschränkter Graph mit Kontinuumslices S , sei weiter $(\ell_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge mit $\ell_1 = 1$ und $\ell_j \rightarrow 0$. Schließlich sei $f_j : S \rightarrow \alpha_{\ell_j} G$ eine Folge von Grob-Isometrien (diese existieren nach Forderung des Kontinuumslices). Wir definieren für alle $A \subseteq S$*

$$\mu(A) := \lim_{j \rightarrow \infty} \ell_j^{\dim_S G} \cdot \#(f_j A),$$

falls dieser Limes existiert.

Außerdem möchten wir auf die Untersuchungen von Semmes und Gromov ([DS] und [Gro₂, Kapitel 3 $\frac{1}{2}$ und Anhang B]) aufmerksam machen: Die Konvergenz von Maßen auf metrischen Räumen wurde von ihnen vielfältigst untersucht, aber leider selten mit der Betrachtung speziell diskreter Räume. Dies äußert sich beispielsweise in der Definition der Ahlfors-Regularität in [DS], die für diskrete Räume in dieser Form nicht funktioniert (vgl. die Ergänzungen von Requardt in [Req₄]).

Im Gegensatz zu vielen anderen Eigenschaften ist das so definierte Maß des Kontinuumslimes *nicht* invariant unter Grob-Isometrie. Dies lässt sich so verstehen, dass Metrik und Topologie des Kontinuumslimes nur von der großräumigen Vernetzung der Knoten abhängig sind, während das Maß zusätzliche Informationen über die Anzahl der Knoten kodiert. Damit geht das Maß über die normale Metrik hinaus. Physikalisch lässt es sich also nur interpretieren als eine mit der Metrik zwar verbundene, aber nicht allein durch diese definierte Größe. Dies würde z.B. die Interpretation des Maßes als Potential oder Energiedichte nahelegen. In jedem Fall handelt es sich nicht mehr um eine rein geometrische Größe und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, daher wollen wir auf seine weitere Analyse verzichten.

3.7 Das Beispiel Heisenberg-Gruppe

Das einfachste Beispiel für eine nilpotente, unendliche und nicht-abelsche Gruppe ist die Heisenberggruppe ([Har]). Dafür setzen wir

$$\text{Heis}(\mathbb{K}) := \{\sigma(k, l, m) : k, l, m \in \mathbb{K}\} \quad \text{mit} \quad \sigma(k, l, m) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & l & 1 \end{pmatrix}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ spricht man von der *diskreten*, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ von der *kontinuierlichen Heisenberggruppe*. Für die Multiplikation gilt

$$\sigma(k, l, m) \cdot \sigma(k', l', m') = \sigma(k + k', l + l', m + m' + lk').$$

Die diskrete Heisenberggruppe wird damit (multiplikativ) aufgespannt von den drei Matrizen

$$\mathfrak{s} := \sigma(1, 0, 0), \quad \mathfrak{t} := \sigma(0, 1, 0) \quad \text{und} \quad \mathfrak{u} := \sigma(0, 0, 1)$$

durch $\sigma(k, l, m) = s^k t^l u^m$. Diese drei Matrizen erfüllen die Relationen

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{u}] = \mathfrak{e} := \sigma(0, 0, 0), \quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{u}] = \mathfrak{e}, \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{t}] = \mathfrak{u}^{-1}$$

mit dem Gruppenkommutator $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] := \mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{h}^{-1}$. Diese Kommutatoren gelten auch im kontinuierlichen Fall und übersetzen sich durch die Exponentialabbildung direkt in den Kommutator der zugehörigen Liealgebra, die sich als zentrale

Erweiterung der einfachsten CCR-Algebra erweist. Damit existiert ein direkter Zusammenhang zwischen (hier nur eindimensionaler) Quantenmechanik und der kontinuierlichen Heisenberggruppe, die deswegen viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat.

In [Har] wird explizit gezeigt, dass sich die Metrik von

$$G := \text{Cay}(\text{Heis}(\mathbb{Z}), \{\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{s}^{-1}, \mathfrak{t}^{-1}, \mathfrak{u}^{-1}\})$$

abschätzen lässt durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(|k| + |l| + \sqrt{|m|} \right) &\leq d(0, \sigma(k, l, m)) \leq |k| + |l| + 6\sqrt{|m|} \\ &\leq 6 \left(|k| + |l| + \sqrt{|m|} \right), \end{aligned}$$

d.h. G ist quasi-isometrisch zu (\mathbb{Z}^3, d') mit

$$d'((k, l, m), (k', l', m')) := |k - k'| + |l - l'| + \sqrt{|m - m'|}$$

Wir können diese Metrik erweitern auf (\mathbb{R}^3, d') , dann sind (\mathbb{R}^3, d') und (\mathbb{Z}^3, d') grob-isometrisch (vgl. Beispiel S.59: (\mathbb{R}^3, d') ist skaleninvariant, vollständig und homogen). Die Identität zwischen (\mathbb{R}^3, d') und (\mathbb{R}^3, d_1) (also mit der 1-Metrik, sog. “Manhattan-Metrik”) ist ein Homöomorphismus, aber keine Quasi-Isometrie. Damit sind ihre topologischen Dimensionen gleich, also $\dim_T(\mathbb{R}^3, d') = 3$, die Hausdorffdimensionen müssen aber nicht übereinstimmen. Tatsächlich können wir die Zahl der Knoten in (\mathbb{Z}^d, d') in einem Radius r von 0 durch etwas Kombinatorik und das CAS MuPAD recht einfach berechnen:

$$\begin{aligned} \#U_0^{(\mathbb{Z}^d, d')}(r) &= 2 \sum_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} \left(2 \sum_{l=1}^{\lfloor r-k \rfloor} (2 \lfloor r-k-l \rfloor^2 + 1) + 2 \lfloor r-k \rfloor^2 + 1 \right) \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^{\lfloor r \rfloor} (2 \lfloor r-l \rfloor^2 + 1) + 2 \lfloor r \rfloor^2 + 1 \\ &= \frac{2}{3} \lfloor r \rfloor^4 + \frac{10}{3} \lfloor r \rfloor^2 + 2 \lfloor r \rfloor + 1 \end{aligned}$$

Die Zahl der Knoten wächst also aufgrund des Wurzelterms in der dritten Komponente mit der vierten statt dritten Potenz, d.h. die Skalierungsdimension von (\mathbb{Z}^3, d') ist vier und damit auch die Hausdorffdimension von (\mathbb{R}^3, d') . Durch die Quasi-Isometrie übertragen sich Skalierungs- bzw. topologische und Hausdorffdimensionen auch auf die diskrete Heisenberggruppe bzw. die kontinuierliche Heisenberggruppe mit geeigneter Metrik. Erstere wurde in [Har] auch direkt berechnet, letztere findet sich an verschiedenen Stellen in der Literatur, z.B. in [DS].

3.8 Banachräume als Kontinuumslices

Wir sind auf Banachräume als Kontinuumslices bereits in Folgerung 4 eingegangen. Wir wollen uns ihnen nochmals nähern, diesmal mit einer direkten Benennung des Kontinuumslices im Auge:

Lemma 18 *Sei $G = \text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S})$ ein endlich-erzeugter und zusammenhängender Cayleygraph mit konvexer Erzeugendenmenge $\mathfrak{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$ (d.h. für alle $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathfrak{S}$ ist auch $\{\lambda \mathbf{n} + (1 - \lambda)\mathbf{n}' : \lambda \in (0, 1)\} \cap \mathbb{Z}^n \subseteq \mathfrak{S}$). Eingebettet in den \mathbb{R}^n spannt \mathfrak{S} ein konvexes, abgeschlossenes Polyeder $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um den Ursprung auf. Sei*

$$d(x, y) := \|x - y\| := \min\{\lambda : x - y \in \lambda \cdot A, \lambda \geq 0\}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\alpha G = (\mathbb{R}^n, d)$.

Beweis: Zunächst zur Wohldefiniertheit: Aufgrund der Endlichkeit von \mathfrak{S} ist A eine beschränkte Menge, da andererseits G als zusammenhängend gefordert wird, beinhaltet \mathfrak{S} ein Erzeugendensystem für \mathbb{Z}^n und es muss folglich für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ein $\lambda \geq 0$ geben, für das $x \in \lambda \cdot A$ ist, aufgrund der Abgeschlossenheit von A wird das Minimum tatsächlich angenommen. Positiv-Definitheit folgt direkt durch Einsetzen von $\lambda = 0$, Symmetrie von d resultiert aus der Symmetrie $-\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$. Für die Dreiecksungleichung reicht es aus, zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist und als solche die Dreiecksungleichung $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$ erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ (die Skalierung $\|\mu \cdot x\| = \mu \cdot \|x\|$ ist offensichtlich).

Zunächst zeigen wir jedoch eine Rechenregel für konvexe Mengen. Seien dafür $\lambda, \mu \geq 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Wir zeigen $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$. Die Fälle mit $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$ sind trivial, wir betrachten also nur $\lambda, \mu > 0$. Sei zuerst $x \in (\lambda + \mu)A$. Dann gibt es ein $x' \in A$ mit $x = (\lambda + \mu)x' = \lambda x' + \mu x' \in \lambda A + \mu A$. Ist andererseits $x \in \lambda A + \mu A$, dann gibt es $x', x'' \in A$ mit

$$x = \lambda x' + \mu x'' = (\lambda + \mu) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x' + \frac{\mu}{\lambda + \mu} x'' \right)$$

Wegen $x', x'' \in A$, $\lambda/(\lambda + \mu) \in [0, 1]$, $\mu/(\lambda + \mu) = 1 - \lambda/(\lambda + \mu)$ ist der hintere Term eine konvexe Linearkombination von x' und x'' und daher in A enthalten. Damit folgt die Behauptung. Nun zur Dreiecksungleichung: Sei $\lambda = \|x\|$ und $\mu = \|y\|$. Es ist $x \in \lambda A$ und $y \in \mu A$, folglich aufgrund der Konvexität auch $x + y \in (\mu + \lambda)A$. Damit ist $\|x + y\| \leq \mu + \lambda$.

Da d aus einer Norm hervorgeht, ist (\mathbb{R}^n, d) homogen und skaleninvariant. Es bleibt zu zeigen, dass G und (\mathbb{R}^n, d) zueinander grob-isometrisch sind, dazu wählen wir die kanonische Einbettung $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Außerdem reicht es aus, Abstände zum Ursprung zu betrachten, also für jedes $\mathbf{n} \in \Gamma_0(r) \subseteq \mathbb{Z}^n$, $r \in \mathbb{N}_0$ eine Ungleichung der Form $r - 1 < \|f\mathbf{n}\| \leq r$, dies ist eine spezielle Form von

Grob-Isometrie (mit $\epsilon = 1$). Nach Voraussetzung spannt $\mathfrak{S} = \Gamma_0(1)$ die konvexe Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ auf. Wir betrachten die Menge A' der Extrempunkte von $\Gamma_0(1)$, diese spannen ebenfalls A auf. Da $U_0(1)$ (als Untermenge von \mathbb{Z}^n) konvex ist, wird für jedes $r \in \mathbb{N}$ die Menge $U_0(r)$ aufgespannt von $r \cdot A'$. Ein Element $\mathbf{n} \in U_0(r)$ ist damit eine konvexe Linearkombination der Elemente aus $r \cdot A'$ und damit auch in $r \cdot A$ enthalten (denn im Reellen spannt $r \cdot A'$ die Menge $r \cdot A$ auf, Satz von Krein-Milman ([Rud])). Folglich ist $\|\mathbf{n}\| \leq r$. Andererseits ist $\mathbf{n} \in \Gamma_0(r)$, also nicht in $B_0(r-1)$ enthalten. Damit wird \mathbf{n} nicht von $(r-1) \cdot A'$ aufgespannt und ist auch nicht in $(r-1) \cdot A$ enthalten. Folglich ist $r-1 \leq \|\mathbf{n}\|$. \square

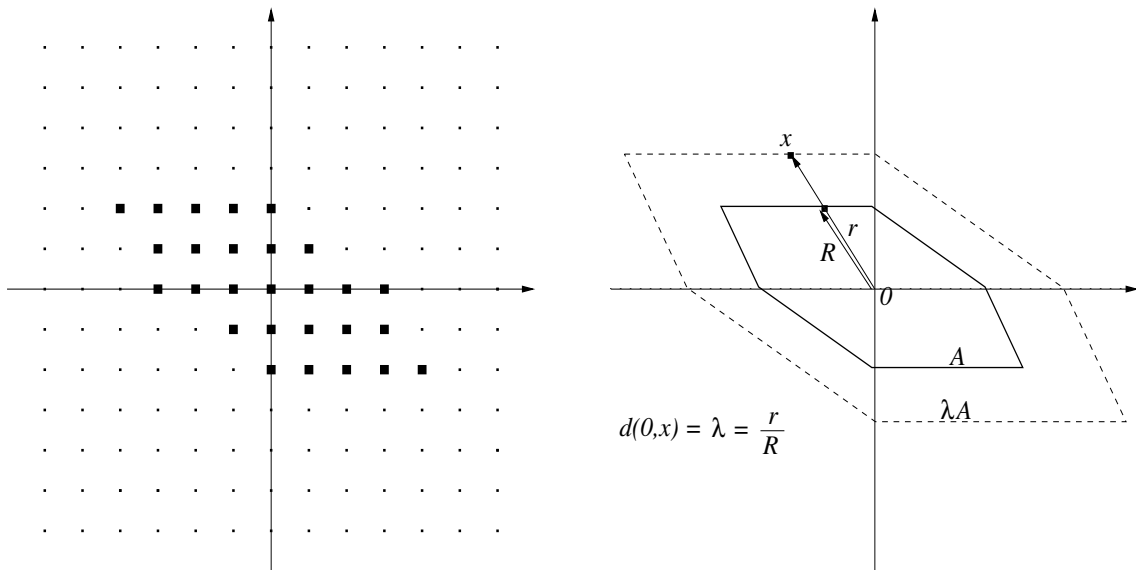


Abbildung 3.2: Links: Konvexe Erzeugendenmenge eines \mathbb{Z}^2 -Gitters, rechts: zugehöriger Kontinuumslimites

Satz 9 Sei auf \mathbb{R}^n eine normerzeugte Metrik d gegeben. Dann gibt es zu jedem $\lambda > 1$ einen Cayleygraphen $G = \text{Cay}(\mathbb{Z}^n, \mathfrak{S}_\lambda)$, so dass (\mathbb{R}^n, d) und αG zueinander $(\lambda, 0, 0)$ -quasi-isometrisch sind.

Beweis: Wir setzen $A := B_0[1] \subseteq \mathbb{R}^n$ als den abgeschlossenen Einheitsball in (\mathbb{R}^n, d) . A ist nach Forderung der Norm konvex (sonst gilt die Dreiecksungleichung nicht). Zu jedem $\mu > 0$ können wir $\mu \cdot \mathbb{Z}^n$ in den \mathbb{R}^n einbetten und die Menge $A_\mu := A \cap (\mu \mathbb{Z}^n)$ konstruieren. Diese ist ebenfalls konvex, endlich und aufgrund der Symmetrie der Norm selber symmetrisch. Aufgrund der Positiv-Definitheit der Metrik d ist darüber hinaus für genügend kleines μ die Menge A_μ eine Erzeugendenmenge von $\mu \mathbb{Z}^n$, kann also als Erzeugendenmenge eines Cayleygraphen erhalten. Dabei nähert sich das von A_μ aufgespannte Polyeder für in geeigneter Weise kleiner werdendes μ (z.B. durch wiederholtes Halbieren) immer besser an

den Einheitsball A an – und zwar im folgenden Sinn: Offensichtlich ist $A_\mu \subseteq A$, also $\|x\|_\mu \geq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ist nun andererseits $x \in \mathbb{R}^n$, $x' := x/\|x\| \in A$, dann finden wir aufgrund der Konvexität von A_μ einen Punkt \mathbf{n}' , dessen euklidischer Abstand von x' kleiner ist als $2 \cdot \sqrt{n} \cdot \mu$ und der auf einer Linie liegt mit x' und dem Ursprung, also $x' = \xi \mathbf{n}'$ für ein $\xi > 0$. Die Norm $\|\cdot\|$, die d erzeugt, ist (wie jede Norm in \mathbb{R}^n) zur euklidischen Norm äquivalent, d.h. es gibt eine feste Konstante $c > 0$ mit $\|y\| \leq c \cdot \|y\|_2$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und damit

$$\begin{aligned} \|x' - \mathbf{n}'\| &\leq c \cdot d_2(x', \mathbf{n}') \leq 2c\sqrt{n}\mu \\ \Rightarrow (\xi - 1) \cdot \|\mathbf{n}'\| &\leq 2c\sqrt{n}\mu \end{aligned}$$

Andererseits ist $\|\mathbf{n}'\| = \xi^{-1} \cdot \|x'\| = \xi^{-1}$ und damit nach Umstellen nach ξ

$$\xi \leq \frac{1}{1 - 2c\sqrt{n}\mu} =: \lambda \rightarrow 1 \text{ für } \mu \rightarrow 0$$

und, da $\mathbf{n}' \in A$ gewählt ist, auch $\|x'\|_\mu \leq \xi$, also

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu = \|x'\|_\mu \cdot \|x\| \leq \lambda \cdot \|x\|.$$

Durch geeignete Wahl von μ lässt sich jedes $\lambda > 1$ einstellen. \square

Wir können also beispielsweise die euklidische Metrik oder auch die Metrik, die aus einer gegebenen Bilinearform folgt, beliebig gut annähern, aber im allgemeinen nie erreichen; die zugehörigen Quadriken sind keine Polyeder. Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, diese Räume dennoch als echten Kontinuumslices zu erhalten, beispielsweise dadurch, dass man sich von Cayleygraphen löst oder andere Kantenlängen als 1 zulässt. Womöglich ist aber auch die Darstellung der physikalischen Metrik durch einen metrischen Tensor selber eine Überidealisierung, und eine wie oben dargestellte polyedrische Norm, womöglich stochastisch verschwommen, näher an der Wahrheit.

3.9 Geometrische Renormierungsverfahren

Beim Studium des Small-World-Netzwerks ([RL]) fällt auf, dass eine genügend kleine Zahl an langreichweitigen Kanten sein Wachstum qualitativ nicht ändern kann. Wenn wir diese Erkenntnis auf Cayleygraphen ausweiten, so erscheint die Hypothese sinnvoll, dass es für den Kontinuumslices keinen Unterschied macht, wenn wir eine genügend kleine Zahl an langreichweitigen Kanten hinzufügen oder entfernen. Dabei soll eine Kante “langreichweitig” sein, wenn ihre Endknoten *nach Entfernen der Kante* einen großen Abstand im Restgraphen haben. Zur Vereinfachung der Berechnung des Kontinuumslices ist das Entfernen solcher Kanten von besonderem Interesse. Im Zusammenhang mit stochastischen Cayleygraphen, die wir im folgenden Kapitel einführen werden, entspricht dies dem

Einführen eines Cutoffs in der Kantenverteilung, sofern diese schnell genug abfällt (da zwei Metriken eines Cayleygraphen zur selben Gruppe zueinander quasi-isometrisch sind, lässt sich der Begriff “Cutoff ab einem bestimmten Radius” hier tatsächlich mit Bedeutung füllen).

Auch physikalisch lässt sich eine plausible Begründung für die Entfernung langreichweitiger Kanten anbringen: Wir erwarten solche Kanten beispielsweise bei der Verschränkung räumlich weit entfernter Teilchen. Aus mikroskopischer Sicht wären die Gebiete der verschränkten Teilchen noch immer durch eine kleine Zahl von Kanten direkt verbunden und damit nahe beieinander; genügend Kanten um einen beschränkten Informationsaustausch zwischen den Teilchen zu bewerkstelligen. Wenn wir nun aber eine Abstandsmessung vornehmen wollten, so wird die damit verbundene Wechselwirkung den Informationsengpass dieser Kanten nicht überwinden können – nach außen erscheinen die beiden Gebiete weit voneinander entfernt zu sein. Der Herausfilterung von solchen Informationsengpässen entspricht gerade der oben benannte Cutoff.

Eine Möglichkeit, einen solchen Cutoff mit möglichst wenig Willkür einzuführen, wurde von Requardt in [Req₃] und nachfolgenden Papern entwickelt. Sein “geometrische Renormierung” genanntes Verfahren basiert im wesentlichen auf dem Begriff des bereinigten Cliquengraphen:

Definition 20 *Sei G ein Graph. Als Subsimplex von G bezeichnen wir eine nicht-leere Knotenmenge, in der jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist. Ein Subsimplex, der in keinem größeren Subsimplex enthalten ist, bezeichnen wir als maximalen Subsimplex oder Clique, notiert mit \mathfrak{s} . Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Die Menge aller Cliques der Ordnung mindestens n bezeichnen wir als $\text{Cliq}_n G$. Schließlich konstruieren wir über $\text{Cliq}_n G$ einen Graphen $\text{Cliq}_n^m G$ durch die folgende Definition: Zwei Cliques $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}' \in \text{Cliq}_n G$ seien genau dann miteinander verbunden, wenn sie mindestens m Knoten gemeinsam haben. Wenn die Indizes n, m nicht angegeben werden, so seien sie Eins, z.B. $\text{Cliq} G := \text{Cliq}_1^1 G$. Wir bezeichnen $\text{Cliq} G$ als Cliquengraphen von G und die Fälle mit $n + m > 2$ als bereinigte Cliquengraphen.*

Wir übersetzen die Resultate von Requardt in [Req₃] in unsere Begriffe:

Satz 10 *Ist G ein gradbeschränkter Graph, so ist sein Cliquengraph ebenfalls gradbeschränkt und zudem grob-isometrisch zu G (mit $\epsilon = 1$).*

Beweis: Sei der Vertexgrad von G beschränkt durch v . Dann besteht jede Clique aus höchstens $v + 1$ Knoten. Betrachten wir andererseits die Cliques, die einen festen Knoten \mathfrak{n} enthalten, so befinden sich diese alle innerhalb dessen 1-Umgebung, die nur $v + 1$ Elemente besitzt. Ihre Zahl ist damit durch $(v + 1)!$ nach oben beschränkt. Eine noch bessere Abschätzung liefert der Spencersche

Satz ([Spe], [Bol₃]), da eine Clique keine andere Clique enthalten kann; die Cliques um \mathbf{n} bilden daher ein Sperner-System. Demnach ist die Zahl der Cliques sogar beschränkt durch

$$\#\{\mathfrak{s} \in \text{Cliqu} G : \mathbf{n} \in \mathfrak{s}\} \leq \binom{v+1}{\lfloor (v+1)/2 \rfloor}$$

Eine Clique \mathfrak{s} kann damit über ihre $v+1$ Knoten mit höchstens

$$\#\{\mathfrak{s}' : \mathfrak{s} \cap \mathfrak{s}' \neq \emptyset\} \leq (v+1) \cdot \left(\binom{v+1}{\lfloor (v+1)/2 \rfloor} - 1 \right)$$

weiteren Cliques verbunden sein, der Cliquengraph ist also gradbeschränkt.

Zu jedem Knoten $\mathbf{n} \in G$ wählen wir eine beliebige Clique $\mathfrak{s} =: f(\mathbf{n}) \in \text{Cliqu}(G)$, die \mathbf{n} enthält (es muss mindestens eine geben, und wenn sie nur aus \mathbf{n} besteht) und konstruieren so eine Funktion $f : G \rightarrow \text{Cliqu}(G)$. Sei nun $\mathfrak{s} \in \text{Cliqu}(G)$ beliebig. Jeder Knoten von \mathfrak{s} muss auf mindestens eine benachbarte Clique abgebildet werden (es ist $\mathbf{n}' \in \mathfrak{s} \cap f\mathbf{n}'$ für alle $\mathbf{n}' \in \mathfrak{s}$ und damit \mathfrak{s} und $f\mathbf{n}$ im Cliquengraph benachbart), d.h. es ist $\text{Cliqu}(G) \subseteq B_{f(G)}[1]$ (jeder Simplex ist in einem Schritt vom Bild eines Knotens auf G erreichbar).

Seien \mathbf{n}, \mathbf{n}' beliebige Knoten in G . Dann finden wir einen Pfad (\mathbf{n}_j) zwischen \mathbf{n} und \mathbf{n}' mit Länge $J := d(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ mit $j = 0 \dots J$, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_J = \mathbf{n}'$. Jede Kante $\{\mathbf{n}_{j-1}, \mathbf{n}_j\}$ ist Teil einer Clique \mathfrak{s}_j ($j = 1 \dots J$), diese sind (da sie gemeinsame Knoten) besitzen, miteinander verbunden und insbesondere paarweise verschieden, denn sonst gäbe es einen kürzeren Pfad zwischen \mathbf{n} und \mathbf{n}' . Damit erhalten wir einen Pfad von Simplexes (s_j) der Länge $J-1$. Der Simplex $f\mathbf{n}$ ist entweder \mathfrak{s}_1 selber oder genau einen Schritt benachbart (und ungleich $\mathfrak{s}_2!$), analoges gilt für $f\mathbf{n}'$. Damit ist der Abstand zwischen $f\mathbf{n}$ und $f\mathbf{n}'$ höchstens $J+1$. Andererseits gibt jeder Simplexpfad der Länge $J-2$ zwischen $f\mathbf{n}$ und $f\mathbf{n}'$ oder weniger Anlass zu einem Pfad zwischen den Knoten \mathbf{n} und \mathbf{n}' mit Länge $J-1$ oder weniger, es gilt also

$$d(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - 1 \leq d(f\mathbf{n}, f\mathbf{n}') \leq d(\mathbf{n}, \mathbf{n}') + 1.$$

□

Folgerung 7 *Existenz und Art eines Kontinuumslimites zum (gradbeschränkten) Graphen G wird durch den Übergang zum unbereinigten Cliquengraphen nicht verändert. Existiert darüber hinaus die Skalierungsdimension \dim_S von G , so ist $\dim_S \text{Cliqu} G = \dim_S G$. Da $\text{Cliqu}_n^m G$ ein Untergraph von $\text{Cliqu} G$ ist, folgt außerdem $\dim_S \text{Cliqu}_n^m G \leq \dim_S G$, falls die Skalierungsdimension existiert.*

Die iterierte Bildung von Cliquengraphen, wie es für die geometrische Renormierung nötig ist, ist erwartungsgemäß für Cayleygraphen im allgemeinen nicht sonderlich interessant, wie der folgende Satz zeigt, eine Verallgemeinerung des Beispiels \mathbb{Z}^2 aus [Req₃]:

Satz 11 Sei $G = \text{Cay}(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ ein endlich-erzeugter und zusammenhängender Cayleygraph aus mindestens drei Knoten. Wir fordern, dass es keine drei Elemente $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3 \in \mathfrak{S}$ gibt, so dass $\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{e}$ ist. Dann ist $\text{Cliq Cliq } G$ als Graph isomorph zu G .

Beweis: Die zusätzliche Forderung an \mathfrak{G} bedeutet, dass keine Dreiecke im Cayleygraphen auftauchen. Damit sind gewöhnliche Kanten die einzigen Cliquen in G . Sei nun $\mathfrak{s} \in \text{Cliq Cliq } G$ eine Clique von Kanten, d.h. eine Menge von Kanten aus G , die paarweise gemeinsame Knoten haben. Dann gibt es zwei mögliche Fälle: (a) \mathfrak{s} ist ein Dreieck in G – diesen Fall haben wir bereits ausgeschlossen – (b) es gibt genau einen Knoten, den alle Kanten gemeinsam haben, wir bezeichnen diesen Knoten als $f\mathfrak{s}$, f ist nun eine Funktion $\text{Cliq Cliq } G \rightarrow G$.

Wir stellen im nächsten Schritt fest, dass f eine Bijektion ist: Sei $\mathfrak{n} \in G$ ein Knoten. Dann bilden alle Kanten an ihn einen maximalen Subsimplex (angenommen, es gibt einen größeren Subsimplex; dann muss die dazugehörige Kante ebenfalls an \mathfrak{n} angrenzen) und \mathfrak{n} ist das Bild dieses Subsimplex (angenommen, ein anderer Knoten \mathfrak{n}' ist das Bild, dann müssen alle Kanten zwischen \mathfrak{n} und \mathfrak{n}' verlaufen, es kann also nur eine einzige Kante in ganz G geben; diesen Fall haben wir explizit ausgeschlossen); folglich ist f surjektiv. Seien nun $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}' \in \text{Cliq Cliq } G$ verschieden, aber $f\mathfrak{s} = f\mathfrak{s}'$. Sie bilden zwei Mengen von Kanten, die alle in denselben Knoten $f\mathfrak{s}$ einlaufen; die Vereinigung ist nun ein noch größerer Kantensimplex als \mathfrak{s} und \mathfrak{s}' und damit die Forderung nach Maximalität verletzt; folglich ist f injektiv.

Schließlich bleibt noch zu zeigen, dass f ein Isomorphismus von Graphen ist. Dafür seien \mathfrak{s} und \mathfrak{s}' benachbarte Kantencliquen, d.h. sie teilen sich eine gemeinsame Kante. Dann sind $f\mathfrak{s}$ und $f\mathfrak{s}'$ über genau diese Kante verbunden. Sind andererseits \mathfrak{n} und \mathfrak{n}' benachbarte Knoten in G , dann gibt es eine gemeinsame Kante zwischen ihnen, die auch den zu \mathfrak{n} und \mathfrak{n}' gehörigen Kantencliquen gemeinsam ist. \square

Beispiel: Es ist $\text{Cliq Cliq } \mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^n$. Etwas komplizierter ist das Beispiel $G_k = \text{Cay}(\langle a, b : ab = ba^k \rangle, \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Requardt hat in [Req₃] vorgeschlagen, für eine Renormierung den Cliquengraph vorher in einer bestimmten Weise zu bereinigen. Wir können zwei Arten der bereinigten geometrischen Renormierung ausmachen: (a) Einschränkung auf Cliquen einer gegebenen Mindestgröße n , (b) Einschränkung auf eine Mindestzahl m an gemeinsamen Knoten zwischen zwei Cliquen, damit sie im bereinigten Cliquengraphen $\text{Cliq}_n^m G$ als benachbart gelten sollen. Diese Renormierungsverfahren liefern für die eben untersuchten endlich-erzeugten und dreieckfreien Cayleygraphen kein sonderlich interessantes Ergebnis (die Zahl der an einer Kantenclique beteiligten Kanten ist stets gleich (nämlich $\#\mathfrak{S}$), und die Zahl der Kanten, die zwei benachbarte Kantencliquen gemeinsam haben ebenfalls (nämlich eine); jede

Bereinigung des Cliquengraphen liefert also entweder kein neues Ergebnis oder einen vollständig unzusammenhängenden Graphen). Dies ist in keiner Weise ein negatives Ergebnis; vielmehr verdeutlicht es, dass der Kontinuumsliches genügend gleichförmiger Graphen mit kurzreichweitigen Kanten durch den Bereinigungsprozess nicht weiter beeinträchtigt wird. Wir haben es sogar mit einer Form von Fixpunkt zu tun, wie er in [Req₃] beschrieben wird, und erwarten eine erfolgversprechende Anwendbarkeit dieses Verfahrens auf stochastische Cayleygraphen mit schnell-abfallender Kantenwahrscheinlichkeit. Wir werden darauf zurückkommen in Abschnitt 4.7.1. Gleichzeitig werden die Analysemethoden aus Abschnitt 3.3 sehr erschwert, da der Graph durch die Bereinigung in einer gänzlich anderen Zusammenhangskomponente von \mathbb{M} landen kann.

Bei der Bildung von Cliquengraphen eines endlichen Graphen kann sich die Gesamtzahl der Knoten und Kanten sehr stark erhöhen. Im unbeschränkten Fall lässt sich dadurch die Hoffnung schöpfen, durch wiederholte Iteration der Cliquenbildung die “Knotendichte” ständig zu erhöhen, wodurch die iterierte Folge gegen eine Art Kontinuumsliches des Graphen strebt. Hierzu lässt sich folgende kurze Rechnung anstellen:

Lemma 19 *Ist G ein Graph mit Kontinuumsliches S aus mindestens zwei Punkten (d.h. G unbeschränkt), so ist $d_{GH}(G, S) \geq \frac{1}{16}$.*

Beweis: Angenommen, es gilt $d_{GH}(G, S) < \frac{1}{16}$. Dann können wir eine ϵ -Grobisometrie $f : G \rightarrow S$ finden mit $\epsilon < \frac{1}{8}$, vergleiche hierzu Satz 3. Zunächst betrachten wir den einfachen Fall des Einpunktraumes $S = \{x\}$ und wählen $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in G$ verschieden. Beide werden von f auf x abgebildet. Damit ist nach Forderung der Grobisometrie

$$\frac{7}{8} \leq d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) - \epsilon \leq d(f\mathbf{n}, f\mathbf{m}) = 0,$$

also offensichtlich ein Widerspruch. Seien nun $x, y \in S$ verschieden. Aufgrund der Skaleninvarianz von S können wir ein Paar x, y so finden, dass $\frac{3}{8} < d(x, y) < \frac{4}{8}$. Nach Forderung der Grobisometrie f gibt es zwei Knoten $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in G$, so dass $d(x, f\mathbf{n}) \leq \frac{1}{8}$ und $d(y, f\mathbf{m}) \leq \frac{1}{8}$. Wegen $d(x, y) > \frac{3}{8}$ gilt $d(f\mathbf{n}, f\mathbf{m}) > \frac{1}{8}$, also insbesondere $\mathbf{n} \neq \mathbf{m}$ und damit $d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \geq 1$ (es ist ein Graph!). Nach Forderung der Grobisometrie gilt nun

$$\frac{7}{8} \leq d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) - \epsilon \leq d(f\mathbf{n}, f\mathbf{m}) \leq d(f\mathbf{n}, x) + d(x, y) + d(y, f\mathbf{m}) \leq \frac{6}{8},$$

also ebenfalls ein Widerspruch. □

Wahrscheinlich lässt sich das Lemma verschärfen auf $d_{GH}(G, S) \geq \frac{1}{2}$ und die analoge Ungleichung für den punktierten Gromov-Hausdorff-Abstand; dies ist aber für das eigentliche Geschehen nicht von Interesse. Wichtig ist in diesem Zusammenhang nur die nun folgende Aussage:

Folgerung 8 *Es gibt keine Folge von (unskalierten!) Graphen, die gegen einen Kontinuumsliches konvergiert (mit Ausnahme von Folgen, die ab einem endlichen Index nur noch aus dem Einpunktraum bestehen). Insbesondere folgt daraus, dass es kein Renormierungsverfahren für Graphen gibt im Sinne einer Abbildung $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$, so dass Iteration gegen den GH-Kontinuumsliches (falls vorhanden) konvergiert. Um den Kontinuumsliches als Grenzwert einer Folge zu erreichen, ist es folglich zwingend notwendig, die Kantenlänge der Graphen gegen Null streben zu lassen, sie also zu skalieren.*

Deshalb muss das geometrische Renormierungsverfahren neben einer Bereinigung über Cliquengraphen auch stets eine Skalierung der Graphen beinhalten. Umgekehrt ist aus den genannten physikalischen Gründen auch immer eine vorherige Bereinigung des Graphen vorzunehmen, sofern wir es mit einem genügend realistischen Modell, mit starken Fluktuationen, räumlichen Verschränkungen oder anderweitigen “Dreckeffekten” zu tun haben. Entsprechend sind auch die vorzunehmenden Bereinigungen modellabhängig zu wählen. Nicht zuletzt deswegen werden wir uns in dieser Arbeit nur mit bereits bereinigten Räumen befassen.

3.10 Weitere Abstandsdefinitionen

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass der hier verwendete GH-Abstand eine Reihe von Nachteilen mit sich bringt, namhaft die folgenden:

1. Es gibt nicht-isometrische Räume mit GH-Abstand Null (Problem der Pseudo-Isometrie).
2. Es gibt metrische Räume mit GH-Abstand unendlich (Problem der Zusammenhangskomponenten).
3. Nicht jeder Graph besitzt einen Kontinuumsliches.

Das erste Problem manifestiert sich ganz besonders dann, wenn eine Folge metrischer Räume (S_j) gegen eine Pseudo-Isometrieklasse $[S]$ konvergiert, dabei aber jeder der Räume S_j einem anderen Raum der Klasse $[S]$ nahe steht – dieses Phänomen wird z.B. in [Req₄] als “Wegwandern im Limes” bezeichnet:

Beispiel: Wir betrachten den folgenden metrischen Raum (vgl.[BH]): Wir versehen $S := \mathbb{R} \dot{\cup} \mathbb{Z}$ mit der Metrik

$$\begin{aligned} d(x, y) &:= |x - y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R} \\ d(x, \mathbf{n}) &:= |x - \mathbf{n}| + \sin(\mathbf{n}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z} \\ d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) &:= \sin(\mathbf{n}) + |\mathbf{n} - \mathbf{m}| + \sin(\mathbf{m}) \quad \text{für } \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}, \mathbf{n} \neq \mathbf{m} \\ d(\mathbf{n}, \mathbf{n}) &:= 0 \quad \text{für } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dieser Raum entspricht \mathbb{R} , wobei zusätzliche Punkte im Abstand $\sin(\mathfrak{n})$ an allen ganzzahligen Punkten von \mathbb{R} angeklebt werden. Dem stellen wir gegenüber $S' := \mathbb{R} \dot{\cup} (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ mit der analogen Metrik. S und S' sind aufgrund der Eigenschaften der Sinus-Funktion nicht isometrisch zueinander, aber es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ eine ϵ -Grobisometrie zwischen ihnen – d.h. sie sind pseudo-isometrisch. Diese Grobisometrien bilden aber die Ursprünge immer weiter voneinander entfernt ab, die Räume wandern in gewisser Weise aneinander vorbei. Die konstante Folge $(S', S', S', S', S', \dots)$ strebt gegen die Klasse $[S]$, dabei auch gegen den Raum S selber. Hierbei werden ebenfalls die Ursprünge immer weiter voneinander entfernt abgebildet; es findet ein “Wegwandern im Limes” statt.

Wir haben diesen Problemkomplex komplett umgangen, indem wir uns auf homogene Räume konzentriert haben (vgl. Folgerung 3). Dadurch lässt sich jedes Wegwandern durch eine geeignete (translationsartige) Isometrie kompensieren. Wie aus dem Beweis der Folgerung 3 ersichtlich ist, hätte es auch schon ausgereicht, statt Homogenität nur Quasi-Isometrie zu einem homogenen Raum zu fordern, in Übereinstimmung mit den Resultaten in [Req₄]. Für entschieden nicht-homogene und nicht-kompakte Räume dagegen ist das Problem der Pseudo-Isometrie weiterhin ungelöst, auch wenn das physikalische Interesse nach wie vor auf (zumindest schwach) homogenen Räumen lastet.

Das zweite Problem ist, wie man in den Beweisen der vorausgehenden Abschnitte sieht, mehr formaler als physikalischer Natur. Wir haben es dadurch umgangen, dass wir stets gezeigt haben, dass sich die betrachteten Räume in der gleichen Zusammenhangskomponente befinden und damit die einzelne Komponente als vollwertiger metrischer Raum verwendet werden kann. Dies lässt sich meist durch eine Benutzung der Dreiecksungleichung durchführen. Alternativ dazu kann man die Metrik verändern, Beispiele dazu werden wir gleich anführen. Eine solche Veränderung der Metrik allerdings verhindert auch eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, wie wir ihn in Abschnitt 3.2 brauchten: Dies ist unumgänglich, da eine Großzahl nicht-isometrischer Räume Fixpunkte des Skalierungsoperators sind und damit entweder der gewählte Abstandsbegriff keine Metrik ist oder der Skalierungsoperator nicht kontraktiv sein kann. Womöglich gibt es aber auch noch eine andere Möglichkeit, die Eindeutigkeit des Kontinuumslimes zu erhalten.

Das dritte Problem schließlich betrifft das genaue Verständnis des Konvergenzbegriffes, den man beabsichtigt. Da dieser nur von der Topologie von \mathbb{M} abhängt, ist er weniger mit den metrischen Problemen (1) und (2) verwandt als vielmehr ein Problem seiner eigenen Definition: Wir haben in dieser Arbeit stets einen Kontinuumslimes untersucht, der zu jeder Folge $\ell_j \rightarrow 0$ von Skalenfaktoren gleich sein soll. Viele Räume, darunter auch Graphen, besitzen einen solchen Limes aber nicht. Wir haben zwar einige Klassen spezieller Graphen angeben können, deren Kontinuumslimes existiert, aber ein allumfassender Existenzsatz existiert bei un-

serer starken Definition des Kontinuumslimes nicht. Anders sieht dies aus, wenn man sich auf einzelne Folgen $\ell_j \rightarrow 0$ konzentriert; das, was wir in der Definition als “schwachem Kontinuumslimes” angegeben haben. In einer umfassenden Analyse und Anwendung des Gromovschen Kompaktheitskriteriums hat Requardt in [Req₄] folgendes gezeigt:

Satz 12 *Wir nennen einen Graphen G uniform-polynomial wachsend, wenn Konstanten $A, B, d, k_0 > 0$ existieren, so dass*

$$A \cdot k^d \leq \#U_{\mathbf{n}}(k) \leq B \cdot k^d$$

gilt für alle $\mathbf{n} \in G$ und alle $k \geq k_0$. Außerdem sagen wir, dass eine Folge (S_j, x_j) von punktierten metrischen Räumen gegen den Raum (S, x) im pGH -Sinn konvergiert, wenn zu jedem $r > 0$ die Folge $(B_{x_j}[r])$ im GH -Abstand (für kompakte Räume) gegen $B_x[r]$ konvergiert. Dann gibt es zu jedem uniform-polynomial wachsendem und gradbeschränktem Graphen G und zu jeder Folge $(\ell_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\ell_j \rightarrow 0$ eine Unterfolge (ℓ'_j) , so dass $\alpha_{\ell'_j} G$ im pGH -Sinn konvergiert.

Als Beispiel hierfür gibt Requardt Graphen an, die quasi-isometrisch sind zu lokal-endlichen und vertex-transitiven Graphen, so wie alle k -lokalen Veränderungen von \mathbb{Z}^n . Auch in diesen Satz geht eine Homogenitäts-Forderung ein, aber eine wesentlich schwächere Forderung als wir in dieser Arbeit verwendet haben. Ebenfalls ist in seiner Analyse der “doubling”-Begriff von zentraler Bedeutung: Ein Maß μ auf einem metrischen Raum S heißt *doubling*, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $\mu(B_x[2r]) \leq C \cdot \mu(B_x[r])$ gilt für alle $x \in S$ und $r > 0$. Für uniform-polynomial wachsende Graphen ist das Zählmaß für genügend große r doubling, woraus sich die für Gromov notwendige gleichmäßige Kompaktheit der Bälle ergibt.³

Dass wir dennoch zu dem eher simplen und für den kompakten Fall entworfenen GH -Abstand gegriffen haben, liegt primär in der mathematischen Schönheit des Begriffs, insbesondere seine Verträglichkeit mit dem Skalierungsoperator. Auch ist es eine schon fast philosophische Frage, ob man sich beim Vergleich zweier Räume auf die mathematische Betrachtungsweise des “Raumes als Ganzes” stützt oder lieber auf den physikalischen Aspekt, dass stets nur endliche Ausschnitte von Räumen miteinander verglichen werden können, ganz so, wie dies in der pGH -Konvergenz geschieht. Allerdings gelten alle Erkenntnisse, die wir über den starken Kontinuumslimes eines Graphen erhalten haben, natürlich auch für seinen schwächeren Kontinuumslimes, da jeder starke Limes im GH -Abstand auch ein schwacher Limes im pGH -Sinn ist, so dass die hier erworbenen Sätze auch in den anderen Topologien anwendbar bleiben.

Neben den genannten Abstands Begriffen finden sich noch weitere in der Literatur. Bereits erwähnt haben wir den punktierten Gromov-Hausdorff-Abstand und

³Analoge Sätze, wie sie in [DS] stehen, gelten nicht für den hier betrachteten diskreten Fall.

das Infimum über alle $\epsilon > 0$, für die zwei Räume ϵ -isometrisch sind (vgl. Satz 3). Daneben verwendet Gromov in seinem Buch [Gro₂] auch den sogenannten Lipschitz-Abstand. Dieser berechnet sich für zwei metrische Räume S, S' zu

$$d_L(S, S') := \inf(|\ln \text{dil}(f)| + |\ln \text{dil}(f^{-1})|),$$

wobei das Infimum über alle $(\lambda, 0, 0)$ -Quasiisometrien $f : S \rightarrow S'$ (sog. Bilipschitz-Abbildungen) zu berechnen ist und $\text{dil}(f)$ definiert ist als das Infimum aller λ , für die f noch eine $(\lambda, 0, 0)$ -Quasiisometrie ist. Dieser Abstand ist für manche Anwendungen in Zusammenhang mit Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Carnot-Carathéodory-Räumen von Nutzen, aber für unsere Zwecke aufgrund ihrer erzwungenen Stetigkeit unbrauchbar. Später verwendet er Lipschitz- und Gromov-Hausdorff-Abstand, um daraus einen weiteren Abstandsbegriff abzuleiten, der einige Probleme der ursprünglichen Abstandsbegriffe umgeht, aber leider auch recht unnatürlich ist.

In [KO] vergleichen Kalton und Ostrovskii den Gromov-Hausdorff-Abstand mit einer Variante für Banachräume, in der nur die Einheitsbälle verglichen werden. Ein der GH-Metrik ähnlicher Abstandsbegriff wurde bereits im Rahmen der Quantengravitation angewendet in Form einer Variante für Lorentzsche Mannigfaltigkeiten, vgl. [Nol]. Eine Übertragung auf spezielle C^* -Algebren ist in [Rief] nachzulesen.

Einen Abstandsbegriff ganz anderer Natur verfolgt Seriu in [Ser] und definiert den Abstand zweier Riemannscher Mannigfaltigkeiten durch eine geeignete Funktion der Eigenwerte der Laplaceoperatoren auf den Mannigfaltigkeiten.

Kapitel 4

Stochastische Graphen

In [Req₅] wurde diskutiert, dass sich eine genügend chaotische und im Gleichgewicht befindliche Dynamik eines Graphen wie in der statistischen Mechanik durch einen stochastischen Ansatz nähern lässt; dies ist die Essenz der Ergodentheorie. Ein Beispiel für eine solche Dynamik wurde von Requardt in [Req₆] vorgestellt und von ihm und Nowotny in zahlreichen numerischen Simulationen näher untersucht.

Um einen solchen stochastischen Ansatz voranzutreiben, werden wir in diesem Kapitel den Begriff des Cayleygraphen mit dem des Zufallsgraphen zusammenführen und eine Verallgemeinerung beider Begriffe vorstellen, die wir als *stochastischen Cayleygraphen* bezeichnen wollen. Da der Begriff des Zufallsgraphen bereits belegt ist, bezeichnen wir außerdem beliebige graphenwertige Zufallsvariablen auch als *stochastische Graphen*. Stochastische Cayleygraphen sollen sich dabei durch zwei Eigenschaften von beliebigen stochastischen Graphen unterscheiden:

1. Das Modell ist in einem bestimmten Sinn translationsinvariant.
2. Die Knoten sind fest und deterministisch vorgegeben.
3. Die Kanten sind voneinander stochastisch unabhängig.

Gerade der letzte Punkt ist eine starke Vereinfachung der Situation, und wird für eine allgemeine Dynamik nicht gelten. Wenn beispielsweise die Existenz einer Kante abhängig ist von Zahlenwerten, die ihren Endknoten zugeordnet sind, so werden benachbarte Kanten stochastisch abhängig sein – dieser Fall tritt bei der Dynamik aus [Req₆] auf.

Jedoch ist die Untersuchung von Modellen mit abhängigen Kanten natürlicherweise weitaus komplizierter als im Fall unabhängiger Kanten. Deshalb werden wir nur kurz in Abschnitt 4.7.2 auf solche Modelle eingehen, um zumindest die Symmetriebegriffe zu übertragen.

Die hier betrachteten stochastischen Geometrien hängen eng zusammen mit sogenannten probabilistischen metrischen Räumen, wie sie 1942 von Menger eingeführt wurden. Wir werden in diesen Themenkomplex nicht näher eindringen, als Literatur empfiehlt sich [SSR], sowie die Anwendung auf sich entwickelnde Cliquengraphen in [RR]. Stochastische Graphen wie die hier betrachteten werden auch in der Perkolationsstheorie auf ihre Geometrie hin untersucht (z.B. [Bis]), aber üblicherweise nicht mit der Geometrie des Kontinuumslimites als Ziel.

4.1 Stochastische Cayleygraphen und Gitter

Wenn wir also annehmen, dass sich der physikalische Raum durch stochastische Fluktuationen um einen im wesentlichen translationsinvarianten Graphen darstellt, können wir einen Ansatz in diese Richtung dadurch wagen, dass wir die Kanten eines Cayleygraphen nur mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten besetzen. Um die Situation zu vereinfachen, nehmen wir zudem an, dass die Kantenwahrscheinlichkeiten selber voneinander unabhängig sind – dies sollte der Näherung eines schwachen, nicht mit sich selbst wechselwirkenden Gravitationsfeldes entsprechen.

Wir starten wie bei einem Cayleygraphen bei einer Gruppe, die uns die Knoten indiziert und ein sinnvolles Konzept der Translationen anbietet, und verknüpfen zwei Knoten \mathbf{n}, \mathbf{m} durch eine Kante mit einer Wahrscheinlichkeit, die nur von ihrer relativen Lage $\mathbf{n}^{-1}\mathbf{m}$ zueinander abhängt und absolut unabhängig von allen anderen Kanten sein soll, also (in multiplikativer Schreibweise) von der Form $\hat{p}(\mathbf{n}^{-1}\mathbf{m}) \in [0, 1]$ ist:¹

Definition 21 Sei \mathfrak{G} eine endlich erzeugte Gruppe und $\hat{p} : \mathfrak{G} \rightarrow [0, 1]$ eine Funktion mit endlichem Träger (d.h. nur für endlich viele $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ ist $\hat{p}(\mathbf{g}) \neq 0$). Wir nennen den Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{G} = (\mathfrak{G}, \mu)$ den zugehörigen stochastischen Cayleygraphen $\text{SCay}(\mathfrak{G}, \hat{p})$, wobei das Maß μ so geartet sein soll, dass eine Kante zwischen \mathbf{n} und \mathbf{m} (unabhängig von allen anderen Kanten!) mit der Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{n} \text{ verbunden mit } \mathbf{m}) = \hat{p}(\mathbf{n}^{-1}\mathbf{m})$ existiert. Aus Konsistenzgründen muss dann $\hat{p}(\mathbf{n}) = \hat{p}(\mathbf{n}^{-1})$ für alle $\mathbf{n} \in \mathfrak{G}$ gelten. Schließlich fordern wir zusätzlich $\hat{p}(\mathbf{e}) = 0$, damit keine Kanten von einem Knoten zu sich selbst auftreten. Ist \mathfrak{G} eine (freie) abelsche Gruppe und enthält $\hat{p}^{-1}(\{1\})$ eine Erzeugendmenge von \mathfrak{G} , so nennen wir \mathcal{G} ein (freies) stochastisches Gitter. (Zur Verdeutlichung dieser Definition betrachte man Abb.4.1.)

Wir haben in der Definition nur die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kanten angegeben. Dadurch, und durch die Forderung, dass die Kanten voneinander

¹Der Terminus “stochastischer Cayleygraph” ist also nicht zu verstehen als Ensemble in der Menge aller Cayleygraphen, sondern als Ensemble in der Menge aller Graphen, aber mit bestimmten, abgeschwächten Symmetrieforderungen an das gesamte Ensemble.

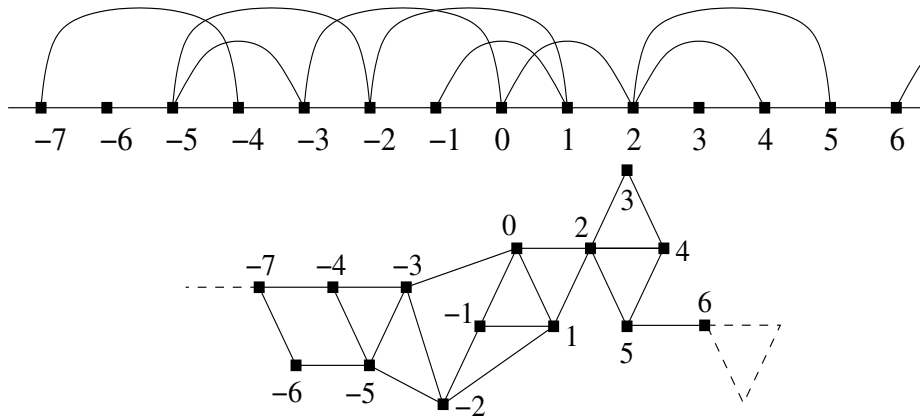


Abbildung 4.1: Ein Ausschnitt einer Realisation von $\text{SCay}(\mathbb{Z}, \hat{p})$ mit $\hat{p}(\pm 1) = 1$, $\hat{p}(\pm 2) = \hat{p}(\pm 3) = \frac{1}{3}$, sonst 0. Darunter derselbe Ausschnitt in gleichmäßiger Darstellung: Der ursprünglich eindimensionale Verlauf von \mathbb{Z} bleibt beim Einfügen der neuen Kanten zwar erhalten, der Gesamtgraph wird aber durch die zusätzlichen Kanten “gestaucht”, d.h. der mittlere Abstand zwischen zwei festen Knoten verringert sich gegenüber ihrem normalen, euklidischen Abstand.

unabhängig sind, ist das Wahrscheinlichkeitsmaß μ von \mathcal{G} bereits eindeutig festgelegt; es ist die resultierende Produktverteilung. Wir werden das in Lemma 25 später in einem abstrakteren Rahmen nochmal kurz aufgreifen.

Die Bedingung, dass es eine Erzeugendenmenge \mathfrak{S} von \mathbb{Z}^n gibt mit $\hat{p}(\mathfrak{S}) = \{1\}$, ist rein technischer Natur. Dadurch ist gesichert, dass \mathcal{G} mit Wahrscheinlichkeit 1 zusammenhängend ist und darüber hinaus für jedes Knotenpaar ein Höchstabstand existiert. Oberhalb der Perkolationsgrenze ist diese Bedingung wahrscheinlich unnötig. Die Motivation für diese Einschränkung wie auch der gesamten Definition stammt aus der Theorie der Smallworld-Netzwerke, auf die wir in Abschnitt 4.2.2 als Beispiel für stochastische Gitter eingehen werden.

Die meisten Realisationen eines stochastischen Gitters sind mit Sicherheit nicht knoten-transitiv. Dies wird durch die Unabhängigkeit der Kanten voneinander verhindert. Jedoch sollte sich eine Art “Knoten-Transitivität im Mittel” einstellen. Das führt uns zum nächsten Punkt: Wir wollen eine Art Mittelwert für einen stochastischen Cayleygraphen erhalten. Wir haben zwar keine Möglichkeit, um eine Menge von Graphen zu mitteln, aber wir können Abstände mitteln. Genau das ist auch die Methode eines Beobachters: Aus vielen, in zeitlichen Abständen durchgeführten Messungen ermittelt er einen Abstand für ein festes Knotenpaar, und führt dann diese Messung für (idealerweise) alle Knotenpaare durch:

Definition 22 Sei \mathcal{G} ein stochastischer Cayleygraph. Wir definieren den mittleren metrischen Raum $E\mathcal{G}$ über der Punktmenge V durch den mittleren Abstand

$$d_{E\mathcal{G}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) := E^{G \in \mathcal{G}} d_G(\mathbf{n}, \mathbf{m}).$$

d_{EG} ist eine Metrik, falls der Abstand zwischen \mathbf{n} und \mathbf{m} fast sicher beschränkt ist (d.h. $\exists \hat{d}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) : d_G(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \leq \hat{d}(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ fast immer); ansonsten kann sie auch den Wert ∞ annehmen.

Beweis: Zur Wohldefiniertheit: Symmetrie und Positivität sind offensichtlich, die Endlichkeit folgt aus der Beschränkung nach oben. Gilt $E d_G(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 0$, so muss wegen Positivität fast immer $d_G(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 0$ gelten – bereits ein Fall würde ausreichen, damit $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ gilt. Damit ist Definitheit gezeigt. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Linearität des Erwartungswertes. Schließlich ist offensichtlich, dass der mittlere metrische Raum zu einem Punktmaß gerade der ausgezeichnete Graph ist. \square

Jede Form von stochastischer Symmetrie sollte auch eine (echte) Symmetrie auf dem mittleren metrischen Raum induzieren. Wir konzentrieren uns dafür auf die Translationsinvarianz von stochastischen Gittern:

Lemma 20 *Sei \mathcal{G} ein freies stochastisches Gitter über \mathbb{Z}^n . Dann existiert $E\mathcal{G} = (\mathbb{Z}^n, d)$ und ist translationsinvariant, d.h. für alle $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ gilt $d(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = d(\mathbf{n} + \mathbf{m}, \mathbf{n}' + \mathbf{m})$. (Insbesondere ist $E\mathcal{G}$ also homogen.)*

Beweis: Nach Definition gibt es eine untere Grenze für $d_G(\mathbf{n}, \mathbf{m})$, womit die Existenz von $E^{G \in \mathcal{G}} d_G(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ für alle $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ gesichert ist. Die Eigenschaften einer Metrik sind nach dem Beweis zur Wohldefiniertheit von Definition 22 bereits erfüllt. Nun zur Translationsinvarianz: Für einen beliebigen Cayleygraphen ist die Wahrscheinlichkeit für eine Kante aufgrund von

$$\hat{p}((g\mathbf{n})^{-1}(g\mathbf{m})) = \hat{p}(\mathbf{n}^{-1}\mathbf{m})$$

invariant gegenüber Linkstranslationen. Da sich der mittlere Abstand allein aus diesen Wahrscheinlichkeiten errechnet, ist auch er aus Symmetriegründen linksinvariant. Der mittlere metrische Raum eines stochastisches Gitter ist aufgrund der Kommutativität der gewählten Gruppe unter allen Translationen invariant. Wir werden einen allgemeineren, abstrakten Beweis hierfür in Lemma 30 nachliefern. \square

4.2 Beispiele für stochastische Cayleygraphen

4.2.1 Zufallsgraphen

Das einfachste Modell eines stochastischen Graphen wurde 1959 von Erdős und Rényi ([ER]) eingeführt, der Zufallsgraph. Genau genommen gibt es zwei Sorten von Zufallsgraphen: Im ersten Modell ist der Wahrscheinlichkeitsraum die

Gesamtmenge aller Graphen mit n Knoten und m Kanten (n, m fest) mit Gleichverteilung über alle Graphen. Im zweiten, wichtigeren Modell wählt man die Zahl der Knoten n und eine Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ fest. p steht hier für die Wahrscheinlichkeit, dass zwei beliebige Knoten im Graph durch eine Kante verbunden sind. Die Wahrscheinlichkeit für genau m Kanten in diesem Modell ist durch eine Binomialverteilung

$$P(\mathcal{M} = m) = \binom{m}{\frac{1}{2}n(n-1)} p^m (1-p)^{\frac{1}{2}n(n-1)-m}$$

mit der Zufallsvariable \mathcal{M} als Zahl der Kanten gegeben. Damit ist der gesamte Wahrscheinlichkeitsraum die Menge aller Graphen mit n Knoten, versehen mit einer Binomialverteilung über der Gesamtzahl an Kanten und einer Gleichverteilung unter Graphen gleicher Kantenzahl. Die erwartete Zahl an Kanten beträgt $E\mathcal{M} = \frac{1}{2}pn(n-1)$. Für uns interessant ist der Fall großer n , so dass die Binomial in eine Poissonverteilung übergeht und wir kurz $E\mathcal{M} \approx \frac{1}{2}pn^2$ schreiben können. p wird auch als Kantenwahrscheinlichkeit oder Kantendichte bezeichnet. Die Zufallsvariable “ein Zufallsgraph mit n Knoten und Kantenwahrscheinlichkeit p ” wird im folgenden als $\mathcal{G}_{n,p}$ abgekürzt.

Es hat sich herausgestellt, dass erstes und zweites Modell zwar nicht identisch sind, aber zumeist gleiche Ergebnisse im Limes $n \rightarrow \infty$ liefern, wenn man $m = \frac{1}{2}pn(n-1)$ setzt (vgl.[CG]). Dies liegt darin begründet, dass die relative Streuung

$$\frac{\sigma_{\mathcal{M}}}{E\mathcal{M}} \approx \frac{\sqrt{\frac{1}{2}n^2 \cdot p \cdot (1-p)}}{\frac{1}{2}pn^2} \sim \frac{1}{n}$$

der Poissonverteilung für $n \rightarrow \infty$ verschwindet. In der Literatur ist als “Zufallsgraph” nur das zweite Modell verankert, da sich mit diesem leichter rechnen lässt.

Erdős und Rényi untersuchten zunächst die Frage, wie sich verschiedene Eigenschaften eines Zufallsgraphen verändern, wenn bei festem und großem n die Kantenwahrscheinlichkeit p erhöht wird. Sie identifizierten dabei sechs Phasen, deren Grenzen im Limes $n \rightarrow \infty$ scharf werden. Dies wird mit dem Begriff “fast sicher” bezeichnet: “Der Zufallsgraph $\mathcal{G}_{n,p}$ hat fast sicher die Eigenschaft A ” heißt $P(\mathcal{G}_{n,p} \text{ erfüllt } A) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Dabei ist es wichtig, anzugeben, wie sich die Kantenwahrscheinlichkeit p in diesem Limes verhält:

1. p fällt langsamer als $1/n$. Ein Zufallsgraph in diesem Bereich setzt sich fast sicher zusammen aus kleinen Baumgraphen, d.h. es treten keine echten Kreise auf.
2. $p \sim c/n$ für ein $0 < c < 1$. Fast alle Komponenten von $\mathcal{G}_{n,p}$ sind weiterhin Baumgraphen, aber die Wahrscheinlichkeit für die *Existenz* eines echten

Kreises beliebiger Größe wird positiv. Die größte Zusammenhangskomponente besteht im Mittel aus $(-\ln c - 1 + c)^{-1}(\ln n - \frac{5}{2} \ln \ln n)$ Knoten, wächst also wie $\ln n$.

3. $p \sim (1 + \epsilon)/n$ für ein kleines $\epsilon \geq 0$. Das Verhalten des Graphen ändert sich grundlegend, sobald $p \sim 1/n$ erreicht wird: Viele kleine Zusammenhangskomponenten mit Ordnung $O(\ln n)$ wachsen nun zusammen und bilden für $\epsilon = 0$ eine gemeinsame Komponente der Ordnung $O(n^{2/3})$. Sobald ϵ Null überschreitet, erreicht sie sogar bereits Ordnung $O(n)$. Diese Phase wird auch als *Doppelsprung* bezeichnet. Dennoch ist der Graph noch immer fast sicher unzusammenhängend – alle übrigen Komponenten haben nun jedoch Ordnung $O(\ln n)$, statt, wie zuvor, $O(1)$.
4. $p \sim c/n$ für $c > 1$. Die große Zusammenhangskomponente wächst weiter an, wobei die nächstgrößten Komponenten als erste “aufgesogen” werden. Die Ordnungen der übrigen Komponenten sinken bis auf $O(1)$ ab.
5. $p = (c \ln n)/n$ für $0 < c \leq 1$. Der Graph wird zum ersten Mal fast sicher zusammenhängend.
6. p wächst schneller als $(\ln n)/n$. Schließlich werden die Vertexgrade, d.h. die Anzahl an Kanten pro Knoten, für jeden Knoten asymptotisch gleich.

Insbesondere ist also ein Zufallsgraph mit fester Kantenwahrscheinlichkeit p im Fall $n \rightarrow \infty$ fast sicher zusammenhängend mit erwartetem Vertexgrad $\approx pn$.

4.2.2 Das Smallworld-Modell

Bei der Untersuchung vieler real existierender Netzwerke hat man festgestellt, dass häufig ein geringer Durchmesser und hohes Clustering zugleich auftreten können. Ein Beispiel hierfür ist die Erkenntnis, dass jeder Mensch jeden anderen über eine nur kleine Zahl von Bekannten kennt. Folglich sind diese Netzwerke (dazu gehören beispielsweise auch das Internet, bestimmte neuronale Netze, Zitierungs- und Kooperationsnetze) weder durch Zufallsgraphen noch durch Gitter adäquat beschreibbar.

1998 wurde von Strogatz und Watts in [WS] ein einfaches Modell vorgestellt, mit dem der Smallworld-Effekt mathematisch erfasst werden konnte. Seien $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, $d \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ beliebig, sowie

$$\mathcal{G} := \text{SCay}(\mathbb{Z}_N^d, \hat{p}) \quad \text{mit } \hat{p}(\pm 1) = 1, \hat{p}(0) = 0, \hat{p}(\mathbf{n}) = p \text{ sonst}$$

\mathcal{G} ist ein d -dimensionales Gitter mit toroidalen Randbedingungen aus N Knoten, überlagert mit einem Zufallsgraphen der Kantenwahrscheinlichkeit p , also $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_N^d \vee \mathcal{G}_{N,p}$.

Damit ist jeder Knoten zum einen mit $2d$ Nachbarn verbunden (“strong links”) und zusätzlich mit $p(N - 3)$ zufällig bestimmten weiteren Knoten im Graph (“weak links” oder “shortcuts”). Bei festem N und zunehmendem p durchläuft \mathcal{G} im wesentlichen drei Phasen: Für sehr kleines p ähnelt es am ehesten noch einem Gitter (mit großem Durchmesser und hohem Clustering) für sehr großes p geht es asymptotisch in einen Zufallsgraphen über (kleiner Durchmesser und niedriges Clustering). Dazwischen gibt es einen Bereich, in dem ein hohes Clustering bei zugleich niedrigem Durchmesser auftritt, der als Smallworld-Bereich des Modells bezeichnet werden kann. Die Übergänge zwischen den drei Phasen sind fließend, vgl. dazu [WS], [NW], [NMW] und [RL].

Die Bestimmung des mittleren Abstands im Smallworld-Modell erweist sich als ein schwieriges kombinatorisches Problem, und wurde auf verschiedene Weisen von mehreren Gruppen angegangen ([BA], [NW], [NMW], [BR], [RL]). Eine gute Approximationsformel wird durch

$$L \approx L_M = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}pN^2 + 1\right)}{2pN}$$

gegeben, die sich den Lösungen von [BR] für $pN^2 > 4$ und der von [BA] für $pN^2 < 1$ asymptotisch annähert. Dabei ist L_M der Median der Abstandsverteilung, L deren Erwartungswert. Die approximative Dimension (Definition 2) wurde in [RL] bestimmt als $1/\epsilon$ für $p \approx N^{-1-\epsilon}$, $\epsilon \in [0, 1]$ und $N \rightarrow \infty$ und lässt sich durch Einsetzen von L in Definition 2 direkt bestätigen.

4.3 Limes stochastischer Cayleygraphen

Wir wollen als nächstes den Begriff des Kontinuumslimes ausdehnen auf stochastische Cayleygraphen. Aus Definition 22 haben wir bereits eine Möglichkeit, einen mittleren metrischen Raum zu berechnen, vorausgesetzt alle Realisationen des metrischen Raums besitzen dieselbe Punktmenge. Für stochastische Cayleygraphen (vgl. Definition 21) haben wir diese Vorbedingung bereits erfüllt, und gemäß Lemma 20 existiert der mittlere metrische Raum (im Sinne von $d_{EG}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) < \infty$) und ist translationsinvariant.

Definition 23 *Sei \mathcal{G} ein stochastischer Cayleygraph (Def.21), für den der mittlere metrische Raum EG existiert. Falls dann auch der Kontinuumslimes von EG existiert, so bezeichnen wir ihn als den mittleren Kontinuumslimes αEG von \mathcal{G} .*

Bemerkung: Natürlich stellt sich die Frage, ob man auch erst den Limes aller Graphen in \mathbb{G}_V berechnen kann, diese mit dem Maß von \mathcal{G} versieht und dann erst mittelt. Nun haben wir kein geeignetes Mittelungsverfahren für beliebige metrische Räume angegeben, nur für Räume über derselben Grundmenge V ;

wir können also keine geeignete Identifikation der einzelnen Kontinuumslimiten durchführen. Wir können aber, unter der Voraussetzung dass fast alle Kontinuumslimites von der Form (\mathbb{R}^n, d) mit normerzeugten Metriken d sind, eine Mittelung der Norm vornehmen. Diese Vorgehensweise wollen wir symbolisch als “ $E\alpha\mathcal{G}$ ” beschreiben. Tatsächlich lässt sich sehr einfach eine Grob-Isometrie (und damit eine Isometrie) zwischen $\alpha E\mathcal{G}$ und $E\alpha\mathcal{G}$ finden, wenn die modellabhängige Konstante $E^{G \in \mathcal{G}} \epsilon(G)$ existiert, dabei soll für jede Realisation G eine $\epsilon(G)$ -Grobisometrie zu αG existieren. Die Zufallsvariable ϵ muss aber nicht notwendigerweise messbar sein; so lassen sich mit Leichtigkeit Realisationen selbst einfacher Modelle finden, deren $\epsilon(G)$ beliebig anwächst. Damit lässt sich auf diese Weise die Identität von $\alpha E\mathcal{G}$ und $E\alpha\mathcal{G}$ wohl nur durch entsprechend aufwendige Abzählungen in konkreten Modellen beweisen.

Lemma 21 (ξ -Funktion) *Sei \mathcal{G} ein freies stochastisches Gitter über \mathbb{Z}^n , $E\mathcal{G}$ dessen mittlerer metrischer Raum, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n$ beliebig und $\xi_j := j^{-1}d_{E\mathcal{G}}(0, j\mathbf{n})$. Dann ist $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, und für den Grenzwert $\xi = \xi(\mathbf{n})$ gilt $\xi > 0$.*

Beweis: Sei G eine beliebige Realisation von \mathcal{G} , dann liefert die Identität eine $(\lambda, \epsilon, \epsilon)$ -Quasi-Isometrie zwischen G und \mathbb{Z}^n , wobei λ und ϵ nur von der Funktion p abhängen. Da dies für jede Realisation gilt, ist die Identität auch für den mittleren metrischen Raum $E\mathcal{G}$ eine $(\lambda, \epsilon, \epsilon)$ -Quasi-Isometrie zu (\mathbb{Z}^n, d_1) , dabei ist d_1 die Metrik zum kubischen Gitter. Es folgt

$$\lambda^{-1} \|\mathbf{n}\|_1 - \frac{\epsilon}{j} \leq \frac{d_{E\mathcal{G}}(0, j\mathbf{n})}{j} \leq \lambda \|\mathbf{n}\|_1 + \frac{\epsilon}{j}.$$

Für genügend großes j ist die untere Schranke positiv, und ξ_j ist in einem positiven reellen Intervall enthalten. Insbesondere gibt es damit eine konvergente Unterfolge.

Weiterhin gelten die folgenden Schranken für ξ_j , wie man leicht durch Nachrechnen aus der Dreiecksungleichung und der Translationsinvarianz von $E\mathcal{G}$ (Lemma 20) erhält:

$$\xi_{j+k} \leq \frac{j\xi_j + k\xi_k}{j+k}, \quad \xi_{j \cdot k} \leq \min\{\xi_j, \xi_k\} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}$$

Beispielsweise ist (ξ_{2^j}) monoton und positiv beschränkt, damit konvergent gegen eine positive Zahl. Jedoch ist (ξ_j) im allgemeinen nicht monoton. Insbesondere ist

$$\xi_{j+1} \leq \xi_j + \frac{\xi_1}{j+1}.$$

Für die harmonische Reihe gilt näherungsweise (z.B.[ML])

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \approx \ln N + \gamma$$

mit der Euler-Mascheroni-Konstanten $\gamma \approx 0,5771\dots$ (durch die Wahl einer leicht vergrößerten oder verkleinerten Konstante lässt sich das \approx -Zeichen gegen exakte Ungleichungen ersetzen, wir kennzeichnen dies durch $o(1)$). Durch Iteration folgt damit

$$\xi_{j+k} \leq \xi_j + \xi_1 \sum_{n=j+1}^{j+k} \frac{1}{n} = \xi_j + \xi_1 \cdot (\ln(j+k) - \ln j + o(1))$$

Insbesondere gilt für $j = 2^n$, $k \in [1, 2^n - 1]$ (also für Argumente zwischen 2^n und 2^{n+1}):

$$\xi_{2^{n+k}} \leq \xi_{2^n} + \xi_1 \cdot (\ln 2^{n+1} - \ln 2^n + o(1)) \approx \xi_{2^n} + \xi_1 \cdot \ln 2;$$

daraus können wir *nicht* folgern, dass (ξ_j) konvergieren muss. Vielmehr fällt die harmonische Reihe zu langsam ab, um hier Konvergenz zu sichern; wenn auch auf eine sehr subtile Art, handelt es sich doch bei (ξ_j) selber um eine beschränkte Folge.

Sei $\xi_{J_j} \rightarrow \xi$ eine konvergente Unterfolge von (ξ_j) , $j \in \mathbb{N}$, (J_j) eine streng monotone Folge in \mathbb{N} . Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $j_0 \in (J_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $|\xi_{j_0} - \xi| \leq \epsilon$, insbesondere also $\xi_{j_0} \leq \xi + \epsilon$. Dies gilt dann auch weiter für jedes ganze Vielfache von j_0 . Nun betrachten wir das Verhalten von ξ_k , $k \in \mathbb{N}$ für große $k > k_0 \gg j_0$. Für jedes k gilt dann $k = n \cdot j_0 + k'$ mit einem $k' < j_0$, $n \in \mathbb{N}$. Nach der obigen Rechenregel für ξ_k ist damit

$$\xi_k \leq \xi_{n \cdot j_0} + \xi_1 \cdot (\ln(n \cdot j_0 + k') - \ln(n \cdot j_0) + o(1))$$

und wegen $k \gg j_0$ (also $n \gg 1$) können wir den Logarithmus nach seinen ersten beiden Taylortermen entwickeln:

$$\xi_k \leq \xi + \epsilon + \xi_1 \cdot \left(\frac{k'}{n j_0} + o(1, n^{-1}) \right) \leq \xi + \epsilon + \xi_1 \cdot (n^{-1} + o(1, n^{-1})) \rightarrow \xi$$

Damit muss insbesondere jeder weitere Häufungspunkt ξ' von (ξ_j) kleiner oder gleich ξ sein – verwenden wir dieses Argument umgekehrt für eine Folge die gegen ξ' konvergiert, folgt $\xi \leq \xi'$, also $\xi' = \xi$. Schließlich wissen wir aus der Beschränkung $\xi \geq \lambda^{-1} \|\mathbf{n}\|_1$, dass der Grenzwert positiv ist. \square

Die soeben berechnete ξ -Funktion stellt den linearen Anteil der Metrik im Unendlichen dar und ist geeignet, um den Kontinuumslikes näher zu beschreiben. Dazu müssen wir ξ zunächst erweitern zu einer Funktion auf \mathbb{R}^n :

Lemma 22 *Es ist $\xi(k\mathbf{n}) = k \xi(\mathbf{n})$ für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Damit lässt sich ξ ausdehnen auf eine Funktion $\xi : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Diese Erweiterung ist konvex in \mathbb{Q}^n , d.h. für alle $x, y \in \mathbb{Q}^n$ und $\lambda \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ gilt*

$$\xi(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda \xi(x) + (1 - \lambda) \xi(y).$$

Damit lässt sich ξ ausdehnen zu einer in \mathbb{R}^n konvexen Funktion $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\xi(\lambda x) = \lambda \xi(x)$ für alle $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Es ist

$$\xi(k\mathbf{n}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{d(0, jk\mathbf{n})}{j} = k \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{d(0, jk\mathbf{n})}{jk} = k \xi(\mathbf{n})$$

Zu jedem $x \in \mathbb{Q}^n$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n$ mit $kx = \mathbf{n}$. Wir setzen $\xi(x) := k^{-1}\xi(\mathbf{n})$, die Wohldefiniertheit ist durch obige Rechnung gegeben.

Als nächstes zeigen wir $\xi(x+y) \leq \xi(x) + \xi(y)$, woraus direkt die Konvexität folgt. Wir können den gemeinsamen Nenner von x und y herausziehen und auf beiden Seiten durch ihn teilen, d.h. wir können uns auf $x, y \in \mathbb{Z}^n$ beschränken. Für diese gilt nach Dreiecksungleichung und Translationsinvarianz

$$\xi(x+y) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{d(0, jx+jy)}{j} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{d(0, jx)}{j} + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{d(0, jy)}{j} = \xi(x) + \xi(y).$$

Daraus erhalten wir bereits die Stetigkeit von $\xi : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$:

$$\xi(x + \epsilon y) \leq \xi(x) + \epsilon \xi(y)$$

und, durch Anwendung von $\xi(x) \geq \xi(x+y) - \xi(y)$:

$$\xi(x + \epsilon y) \geq \xi(x) - \epsilon \xi(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}^n$, $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$. Damit können wir ξ eindeutig stetig fortsetzen auf \mathbb{R}^n . Diese Funktion ist dann noch immer konvex (wähle eine gegen x konvergierende Folge aus \mathbb{Q}^n , verwende die Konvexität in \mathbb{Q}^n und bilde $n \rightarrow \infty$). \square

Worauf wir hinaus wollen, ist die folgende Vermutung:

Vermutung 1 Sei \mathcal{G} ein freies stochastisches Gitter über \mathbb{Z}^n . Dann ist $\alpha E\mathcal{G} = (\mathbb{R}^n, d)$ mit der normerzeugten Metrik

$$d(x, y) := \|x - y\| := \xi(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Das Problem: Wir wissen zwar, dass $d(0, \mathbf{n})$ für große \mathbf{n} gegen $\xi(\mathbf{n})$ strebt im Sinne von $\lim_{j \rightarrow \infty} d(0, j\mathbf{n})/j \rightarrow \xi(\mathbf{n})$, aber das reicht noch nicht aus; d wächst zwar linear wie ξ , aber ein sublineares (z.B. wurzelförmiges oder logarithmisches) Wachstum kann uns die ganze Sache verderben:

Beispiel: Sei \mathbb{Z} versehen mit der Metrik

$$d(\mathbf{n}, \mathbf{m}) := \xi_0 \cdot |\mathbf{n} - \mathbf{m}| + \sqrt{|\mathbf{n} - \mathbf{m}|}$$

für alle $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}$. Da sich die Wurzelfunktion linear beschränken lässt, ist (\mathbb{Z}, d) quasi-isometrisch zu (\mathbb{Z}, d_1) . Es ist sogar $\xi(\mathbf{n}) = \xi_0 \cdot |\mathbf{n}|$, aber (\mathbb{Z}, d) ist nicht grob-isometrisch zu $(\mathbb{R}, \xi_0 \cdot d_1)$. Damit besitzt (\mathbb{Z}, d) auch keinen Banachraum als Kontinuumsimes.

Die (berechtigte) Hoffnung ist mithin, dass die Beschränkung der Wahrscheinlichkeitsfunktion \hat{p} von \mathcal{G} auf einen endlichen Träger ein solches sublineares Wachstum verhindert, spätestens in Kombination mit einem Konvexitätsargument. Zumindest im eindimensionalen Fall können wir dieses Problem lösen:

Lemma 23 *Sei \mathcal{G} ein stochastisches Gitter über \mathbb{Z} . Dann gibt es $\xi_0, \epsilon > 0$, so dass*

$$|\mathbb{E} d(0, \mathbf{n}) - \xi_0 \cdot |\mathbf{n}|| \leq \epsilon.$$

Beweis: OBdA sei $\mathbf{n} \gg 0$. Nach Definition von \mathcal{G} ist der Träger von \hat{p} endlich und damit gibt es ein l' mit $\hat{p}(\mathbf{n}) = 0$ für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$ mit $|\mathbf{n}| > l'$. Wir wählen eine Zerlegung von \mathbb{Z} in euklidisch gleichlange Abschnitte A_j der Länge l' und nummerieren diese fortlaufend durch, so dass 0 im Abschnitt A_0 und \mathbf{n} im Abschnitt A_J liegt, $J \in \mathbb{N}$. Damit ist offensichtlich $|\mathbf{n} - J \cdot l'| \leq 2l'$. Sei nun G eine Realisation von \mathcal{G} und $\mathbf{p} = (\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d)$ ein kürzester Pfad zwischen $0 =: \mathbf{n}_0$ und $\mathbf{n} =: \mathbf{n}_d$, dabei ist $d = d_G(0, \mathbf{n})$. Aufgrund der Größe der Abschnitte A_j können aufeinanderfolgende Knoten des Pfades höchstens in benachbarten Abschnitten liegen. Da weiter der Pfad \mathbf{p} endlich ist, muss es für jeden Abschnitt A_j einen Index $K(j) \in [0, d] \cap \mathbb{Z}$ geben, so dass

$$\mathbf{n}_{K(j)} \in A_j \quad \text{und} \quad \forall k > K(j) : \mathbf{n}_k \notin A_j.$$

Da für $k = J$ die letzte Aussage leer ist, ist $K(J) = d$. Betrachten wir nun die Differenz $\Delta K(j) := K(j) - K(j-1)$, $j = 1..J$. Diese gibt an, wieviele Schritte im Graphen benötigt werden, um den Abschnitt A_{j-1} hinter sich zu lassen. Dabei kann es passieren, dass ein Umweg über weiter hinten liegende Abschnitte gewählt werden muss. Ein solcher Umweg kann nicht mehr als l' Abschnitte umfassen, da wir gefordert haben, dass $\hat{p}^{-1}(1)$ ein Erzeugendensystem enthält – d.h. der Knoten $\mathbf{n}_{K(j)}$ wird nach l' Schritten auf jeden Fall erreicht. Für Abschnitte A_j mit $l' < j < J - l'$ ist damit eine Unabhängigkeit von Start- und Endknoten gewährleistet. Nach der Translationsinvarianz müssen die Erwartungswerte der $\Delta K(j)$ in diesem Bereich gleich sein, wir bezeichnen sie kurz als ξ'_0 . Damit ist (selbst wenn die $\Delta K(j)$ nicht unabhängig sind)

$$\mathbb{E} d(0, \mathbf{n}) = \mathbb{E} K(J) = \mathbb{E} K(0) + \sum_{j=1}^J \mathbb{E}(\Delta K(j)) = (J - 2l') \cdot \xi'_0 + \text{const.},$$

also $E d(0, \mathbf{n}) = \xi_0 \cdot |\mathbf{n}| + \text{const.}$ mit $\xi_0 = \xi'_0/l'$ und nach oben und unten beschränktem und insbesondere \mathbf{n} -unabhängigem “const.”. \square

Dies erlaubt uns die ξ -Funktion, die wir oben berechnet haben, zumindest im eindimensionalen Fall zur Konstruktion des Kontinuumslimes zu verwenden:

Folgerung 9 *Der mittlere Kontinuumslimes eines eindimensionalen stochastischen Gitters existiert eindeutig (bis auf Isometrie) und ist ein eindimensionaler reeller Banachraum.*

Beweis: Die Eindeutigkeit haben wir bereits in Satz 5 gezeigt. Aus dem vorangehenden Lemma wissen wir, dass das der mittlere metrische Raum des stochastischen Gitters grob-isometrisch ist zu einem eindimensionalen reellen Banachraum, dessen Norm wie in Lemma 21 angegeben berechnet werden kann. Da jeder Banachraum nach Definition der Norm skaleninvariant ist, folgt, dass dieser auch der mittlere Kontinuumslimes des stochastischen Gitters sein muss. \square

Auf das Problem höherdimensionaler stochastischer Gitter und die Verallgemeinerung des obigen Beweises werden wir in Abschnitt 4.5 zurückkommen. Doch zunächst wollen wir uns mit einem speziellen eindimensionalen Fall näher beschäftigen.

4.4 Eindimensionales Modell

Wir konkretisieren unsere Untersuchungen durch die Analyse des stochastischen Gitters

$$\mathcal{G} = \text{SCay}(\mathbb{Z}, \hat{p}), \quad \hat{p}(\mathbf{n}) = \begin{cases} 0 & : \quad \mathbf{n} = 0 \\ 1 & : \quad |\mathbf{n}| = 1 \\ p & : \quad 1 < |\mathbf{n}| \leq l \\ 0 & : \quad |\mathbf{n}| > l \end{cases}$$

mit reellen Parametern $p \in [0, 1]$, $l > 1$ für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$. Die Wahl $\hat{p}(\pm 1) = 1$ wurde getroffen, um einen mit Sicherheit zusammenhängenden Graphen zu erhalten (ansonsten wäre er fast sicher unzusammenhängend). Wir wissen aus dem vorangehenden Abschnitt, dass \mathcal{G} einen eindimensionalen reellen Banachraum als Kontinuumslimes hat. Ein solcher wird bereits durch eine einzige positive Zahl θ in der Form $(\mathbb{R}, \theta \cdot d_1)$ beschrieben, dabei ist d_1 die übliche Metrik auf \mathbb{R} . In der Notation des vorigen Abschnitts ist $\theta = \xi(1)$. In Bezug auf unser Modell ist θ nun eine Funktion von l und p und damit auch numerisch zugänglich.

Beispiel: Trivialerweise ist für $p = 0$ oder $p = 1$ der mittlere Kontinuumslimes von der Form $(\mathbb{R}, \theta \cdot d_1)$ mit $\theta(l, 0) = 1$ bzw. $\theta(l, 1) = l$ für alle $l > 1$.

Für sehr große l erwartet man zunächst einen proportionalen Zusammenhang zwischen θ und l , dies ist allerdings falsch: θ wird approximativ unabhängig von l (eine Spezialität des eindimensionalen Falls) und ist stark nicht-linear abhängig von p . Diese Behauptung haben wir numerisch überprüft und werden sie nun näher untersuchen.

4.4.1 Obere und untere Schranken

Wir betrachten die Entfernung zwischen 0 und einem festen, weit entfernten Knoten $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$, oBdA $\mathbf{n} > 0$. Aufgrund der großen Entfernung reicht es uns zu wissen, welchen mittleren Abstand θ (bezüglich dem euklidischen Abstand auf \mathbb{Z}) ein Schritt im Graph überbrücken kann. Sei dafür \mathbf{n}_j der Knoten mit dem höchsten Wert, der im Schritt j erreicht wurde. Um den Abstand $\theta \approx \mathbf{n}_{j+1} - \mathbf{n}_j$ zu berechnen, müssten wir auch wissen, ob die Knoten kurz vor \mathbf{n}_j bereits erreicht wurden – so wäre es möglich, dass \mathbf{n}_j selber nicht mit \mathbf{n}_{j+1} verbunden ist, sondern von einem seiner Vorgänger “überholt” wird. Da wir die Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieser Vorgänger nicht kennen, behelfen wir uns mit den folgenden Näherungen:

1. \mathbf{n}_j ist der einzige Knoten in seiner Umgebung, der bereits erreicht wurde. Dies liefert eine untere Schranke für θ .
2. Alle Knoten vor \mathbf{n}_j wurden erreicht. Dies liefert eine obere Schranke.

Zunächst zum 1.Fall: Damit der Knoten $\mathbf{n}_j + k$ zum nächsten \mathbf{n}_{j+1} wird, muss er erreicht werden und alle darauffolgenden Knoten nicht mehr. Wir vernachlässigen, dass spätestens der auf \mathbf{n}_{j+1} folgende Knoten erreicht wird (d.h. wir fordern $p \cdot l \gg 1$). Dann ist für $0 \leq k \leq p$ dank der Unabhängigkeit der Kanten:

$$P(\mathbf{n}_{j+1} = \mathbf{n}_j + k) = p \cdot (1 - p)^{l-k}$$

Damit ist

$$\theta_{\min} := E\mathbf{n}_{j+1} - \mathbf{n}_j = \sum_{k=1}^l k \cdot p \cdot (1 - p)^{l-k}$$

Im weiteren setzen wir $q := 1 - p$. Dann lässt sich die obige Summe nach der Art einer Teleskopsumme und mittels geometrischer Reihe umformen:

$$\begin{aligned} (1 - q) \cdot \theta_{\min} &= \sum_{k=1}^l k p q^{l-k} - \sum_{k=1}^l k p q^{l-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^l k p q^{l-k} - \sum_{k=0}^{l-1} (k+1) p q^{l-k} = pl - \sum_{k=0}^{l-1} p q^{l-k} \\ \Rightarrow \theta_{\min} &= l - \frac{q}{p} \cdot (1 - q^l) \approx l - \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

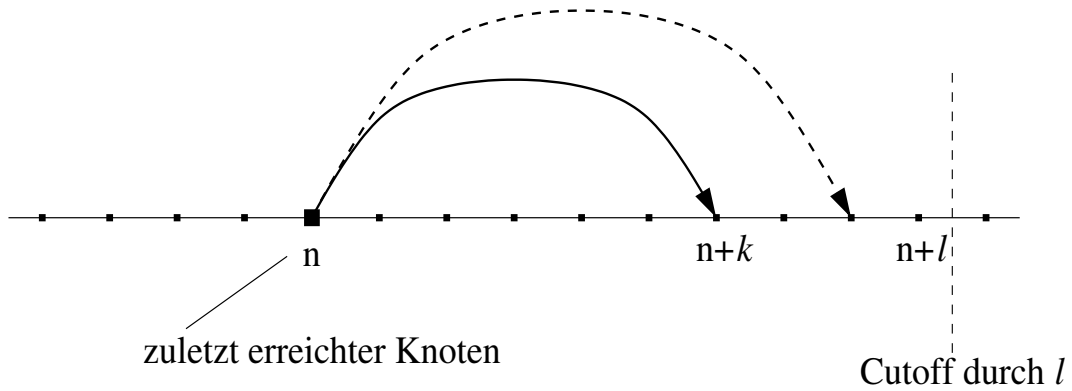


Abbildung 4.2: Fall 1 (untere Schranke): Damit $\mathbf{n}+k$ zum nächsten, am weitesten außen liegenden erreichten Knoten wird, muss eine Kante zwischen \mathbf{n} und $\mathbf{n}+k$ existieren, und darf keine Kante zu einem Knoten zwischen $\mathbf{n}+k+1$ und $\mathbf{n}+l$ existieren. Die Knoten vor \mathbf{n} wurden gemäß Näherung nicht erreicht und spielen daher keine Rolle.

Nun zum zweiten Fall: Hier müssen wir die möglichen Kanten beachten, die von den Knoten vor \mathbf{n}_j ausgehen. Damit $\mathbf{n}_{j+1} = \mathbf{n}_j + k$ gilt, muss eintreten:

1. \mathbf{n}_j+k wird von einem Knoten erreicht. Diese Knoten sind gerade im Intervall $[\mathbf{n}_j + k - l, \mathbf{n}_j]$, damit befinden sich $l - k + 1$ Knoten in Reichweite. Die Wahrscheinlichkeit, erreicht zu werden, beträgt also $1 - q^{l-k+1}$.
2. Es wird kein Knoten hinter $\mathbf{n}_j + k$ erreicht. Dies betrifft alle Knoten $\mathbf{n}_j + k'$ mit $k < k' \leq l$. In Reichweite des Knotens $\mathbf{n}_j + k'$ befinden sich $l - k' + 1$ bereits erreichte Knoten. Insgesamt führen also

$$\sum_{k'=k+1}^l (l - k' + 1) = \frac{1}{2}(l - k)(l - k + 1)$$

mögliche Kanten von erreichten Knoten zu Knoten hinter \mathbf{n}_j+k . Alle Kanten sind unabhängig voneinander, da stets verschiedene Paare beteiligt sind. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Knoten nach $\mathbf{n}_j + k$ erreicht wird, $q^{(l-k)(l-k+1)/2}$.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist folglich

$$P(\mathbf{n}_{j+1} = \mathbf{n}_j + k) = (1 - q^{l-k+1}) \cdot q^{(l-k)(l-k+1)/2}.$$

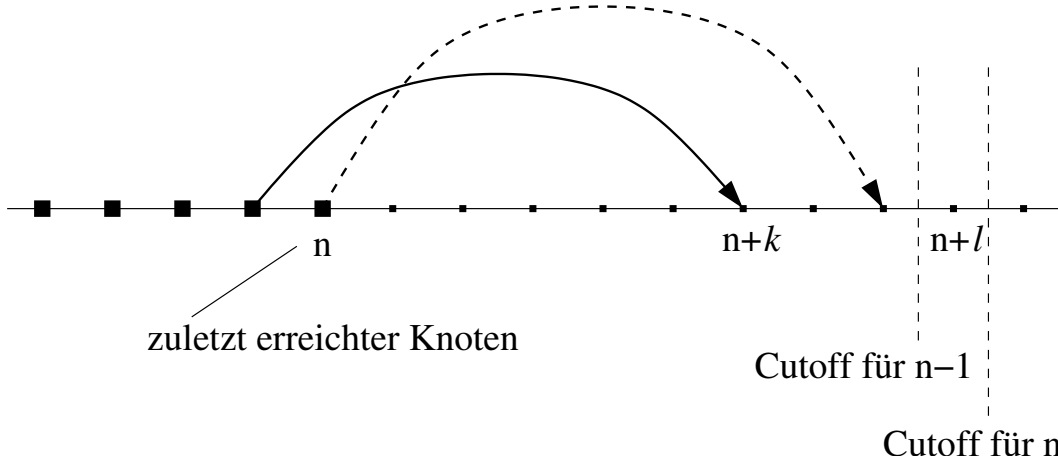


Abbildung 4.3: Fall 2 (obere Schranke): Alle Knoten vor $n+1$ wurden in dieser Näherung bereits erreicht. Damit $n+k$ also zum nächsten, am weitesten außen liegenden Knoten wird, muss mindestens einer der Knoten vor $n+1$ eine Kante zu $n+k$ besitzen, und keiner der Knoten vor $n+1$ darf eine Kante zu einem Knoten hinter $n+k$ besitzen. Dabei ist zu beachten, dass jeder Knoten $n-j$ aufgrund des Cutoffs l höchstens den Knoten $n-j+l$ erreichen könnte.

Für die obere Schranke $\theta_{\max} = \mathbb{E}n_{j+1} - n_j$ gilt also

$$\begin{aligned}
\theta_{\max} &= \sum_{k=1}^l k \cdot (1 - q^{l-k+1}) \cdot q^{(l-k)(l-k+1)/2} \\
&= \sum_{k=1}^l k q^{(l-k)(l-k+1)/2} - \sum_{k=1}^l k q^{(l-k+2)(l-k+1)/2} \\
&= \sum_{k=0}^l k q^{(l-k)(l-k+1)/2} - \sum_{k=0}^{l-1} (k+1) q^{(l-k+1)(l-k)/2} \\
&= l - \sum_{k=0}^{l-1} q^{(l-k+1)(l-k)/2} = l - \sum_{k=1}^l q^{(k+1)k/2} \\
&= l - q - q^3 - q^6 - q^{10} - q^{15} - \dots
\end{aligned}$$

Da $q < 1$ ist, werden die folgenden Glieder nach und nach unwichtig.

Dass diese Näherung tatsächlich strikt größer ist als $l - q/p$ sieht man durch eine Reihenentwicklung von $q/p = q/(1-q) = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$

Folgerung 10 Für das eindimensionale stochastische Gitter

$$\mathcal{G} = \text{SCay}(\mathbb{Z}, \hat{p}), \quad \hat{p}(\mathbf{n}) = \begin{cases} 0 & : \quad \mathbf{n} = 0 \\ 1 & : \quad |\mathbf{n}| = 1 \\ p & : \quad 1 < |\mathbf{n}| \leq l \\ 0 & : \quad |\mathbf{n}| > l \end{cases}$$

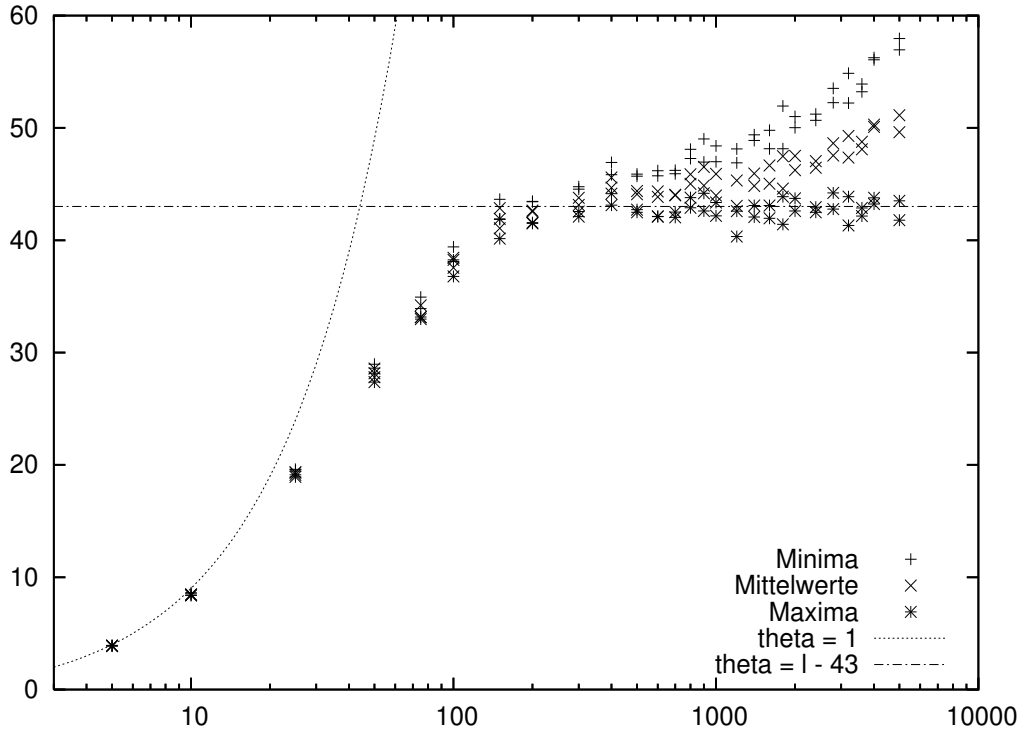


Abbildung 4.4: Numerische Ergebnisse für festes $p = 0,01$ und verschiedene l (x-Achse, logarithmisch), auf der y-Achse ist $l - \theta$ aufgetragen. In jeder Realisation werden Maxima und Minima von θ für Knoten in den Entfernungen 400 bis 500 bezüglich des Graphen vom Ursprung ausgewertet, außerdem wird θ über die Entfernungen 250 bis 500 gemittelt. Man sieht, dass für zu kleine l (also $l < p^{-1}$) sich die Metrik derjenigen des Hintergrundgitters annähert ($\theta = 1$). Für größere Werte von l wird $l - \theta$ asymptotisch konstant, wenn man die Maxima von θ verwendet. Die Minima und Mittelwerte sind durch die Abbruchbedingung $r \leq 500$ kontaminiert und daher nicht konstant.

mit $p \in [0, 1]$, $l \gg 1$, $q := 1 - p$ und $l \cdot p \gg 1$ ist $\alpha \text{EG} = (\mathbb{R}^n, \theta \cdot d_1)$ mit

$$l - \frac{q}{p} \leq \theta \leq l - q - q^3 - q^6 - q^{10} - q^{15} - \dots$$

4.5 Höherdimensionale stochastische Gitter

Aus physikalischer Sicht kann es bereits zufriedenstellend sein, die sublinearen Wachstumsterme, die den Vergleich zwischen dem stochastischen Gitter und seinem Kontinuumslimit stören, aufgrund ihrer Winzigkeit gegenüber dem linearen Anteil zu vernachlässigen und den Kontinuumslimit schlichtweg als (\mathbb{R}^n, ξ) zu definieren. Dennoch wollen wir uns kurz mit dem mathematischen Problem auseinandersetzen, das uns daran hindert, den Beweis von Lemma 23 auf $n > 1$ zu

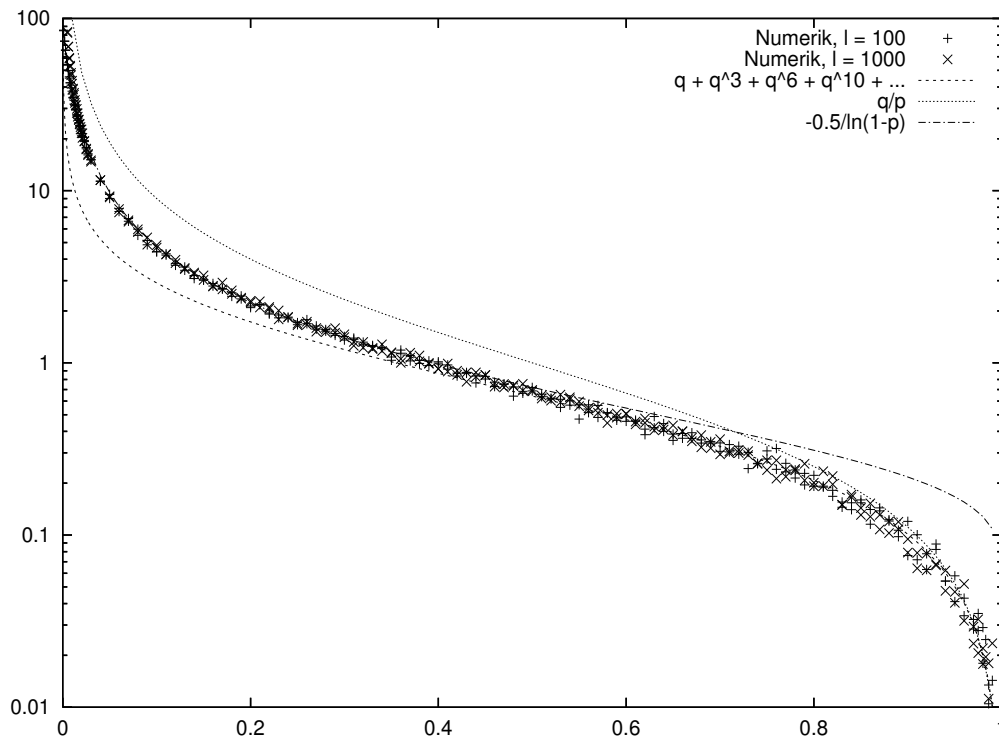


Abbildung 4.5: Dargestellt sind Realisationen für $l = 100$ und $l = 1000$ und verschiedene p (x-Achse), dabei sind die Minima von $\Delta := l - \theta$ (Maxima von θ) logarithmisch aufgetragen. Hier sieht man nochmal die Unabhängigkeit von $l - \theta$ gegenüber l , sofern p genügend groß gewählt ist; daher fallen alle Messwerte auf eine gemeinsame Kurve. Ebenfalls dargestellt sind die hergeleitete obere und untere Schranke, sowie eine weitere Funktion, die den Bereich für kleine p gut approximiert (vgl. Abschnitt 4.6). (Anmerkungen zur Numerik siehe Abb. 4.4)

verallgemeinern, da hier eine unerwartete Eigenschaft wieder auftaucht, die uns bereits in Lemma 18 Probleme bereitet hat.

Die natürlichste Verallgemeinerung wäre, die Zerlegung von \mathbb{Z} in Abschnitte zu ersetzen gegen eine Zerlegung von \mathbb{Z}^n in Scheiben senkrecht zur euklidischen Verbindungslinie zwischen 0 und \mathbf{n} . Jedoch muss der kürzeste Pfad zwischen 0 und \mathbf{n} nicht notwendigerweise dieser Verbindungslinie folgen und kann entsprechend die Scheiben unter wechselnden Winkeln erreichen. Dies zerstört die j -Unabhängigkeit der mittleren Verweildauern $E\Delta K(j)$, die zur Bestimmung der Linearität notwendig ist. Entsprechend ist es nötig, zuvor sicherzustellen, dass die kürzesten Pfade im Mittel in der Nähe der euklidischen Verbindungslinie verlaufen. Das legt eine Art von Konvexitätsforderung für die Metrik des Graphen nahe. Dies wird zusätzlich dadurch bestätigt, dass die ξ -Funktion aus Lemma 21 bereits eine Norm (und damit eine konvexe Metrik) ist, obwohl der zugrunde gelegte mittlere metrische Raum selber keine Konvexität erfüllt und damit ohne eine weitere For-

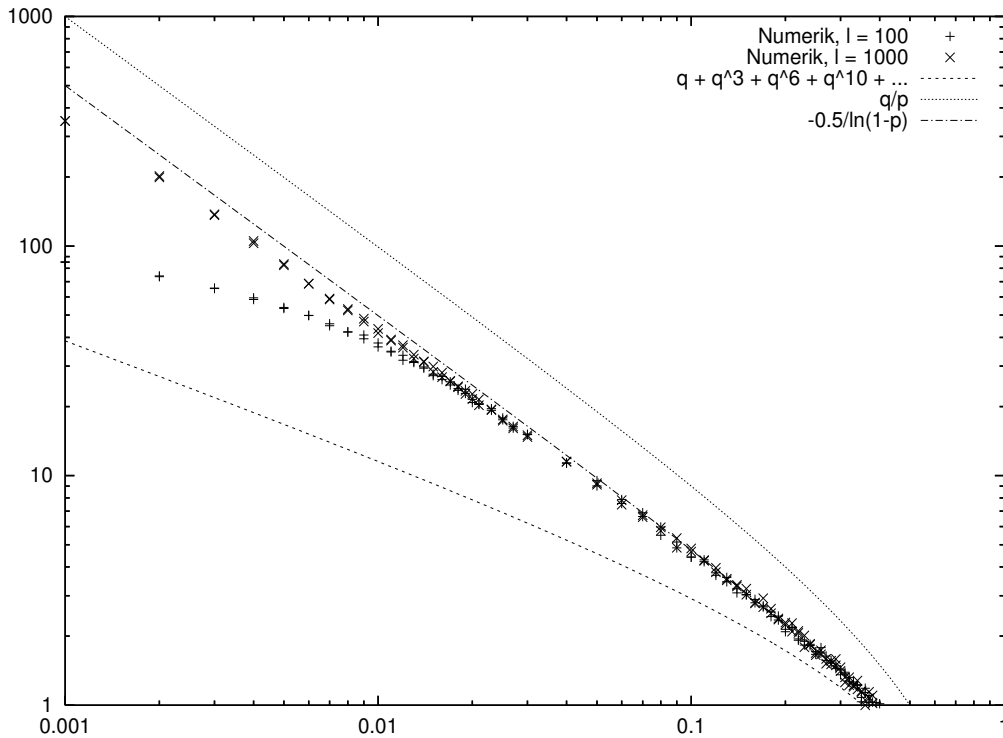


Abbildung 4.6: Dieselbe Graphik wie Abb.4.5, aber mit logarithmischer x -Achse. Deutlich sichtbar ist, wie für zu kleines p die Funktion $l - \theta$ von l abhängig wird und die numerischen Werte für $l = 100$ von denen für $l = 1000$ abweichen. Auch die Güte der Näherung $l - \theta \approx -0.5/\ln(1 - p)$ für kleine p ist hier gut zu sehen.

derung nicht grob-isometrisch sein sollte. Wie könnte nun eine solche Forderung an ein stochastisches Gitter aussehen?

Definition 24 Wir nennen ein freies stochastisches Gitter über \mathbb{Z}^n (stochastisch) konvex, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt:

1. p ist konkav, d.h. für alle $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\mathbf{m} = \lambda \mathbf{n} + (1 - \lambda) \mathbf{n}' \quad \Rightarrow \quad p(\mathbf{m}) \geq \lambda p(\mathbf{n}) + (1 - \lambda) p(\mathbf{n}').$$

2. Für alle $\mu \in [0, 1]$ ist $\{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n : \hat{p}(\mathbf{n}) \leq \mu\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine in \mathbb{Z}^n konvexe Menge.

Beweis: Die Äquivalenz folgt direkt aus der Definition: Die Menge $A_\mu := \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n : \hat{p}(\mathbf{n}) \leq \mu\}$ ist genau dann konvex in \mathbb{Z}^n , wenn für alle $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ so dass $\mathbf{m} := \lambda \mathbf{n} + (1 - \lambda) \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^n$, gilt $\mathbf{m} \in A_\mu$, also $\hat{p}(\mathbf{m}) \leq \mu$. Weiter sind $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in A_\mu$ genau dann, wenn gilt $\lambda \hat{p}(\mathbf{n}) \leq \lambda \mu$ und $(1 - \lambda) \hat{p}(\mathbf{n}') \leq (1 - \lambda) \mu$, zusammen also $\lambda \hat{p}(\mathbf{n}) + (1 - \lambda) \hat{p}(\mathbf{n}') \leq \mu \leq \hat{p}(\mathbf{m})$. \square

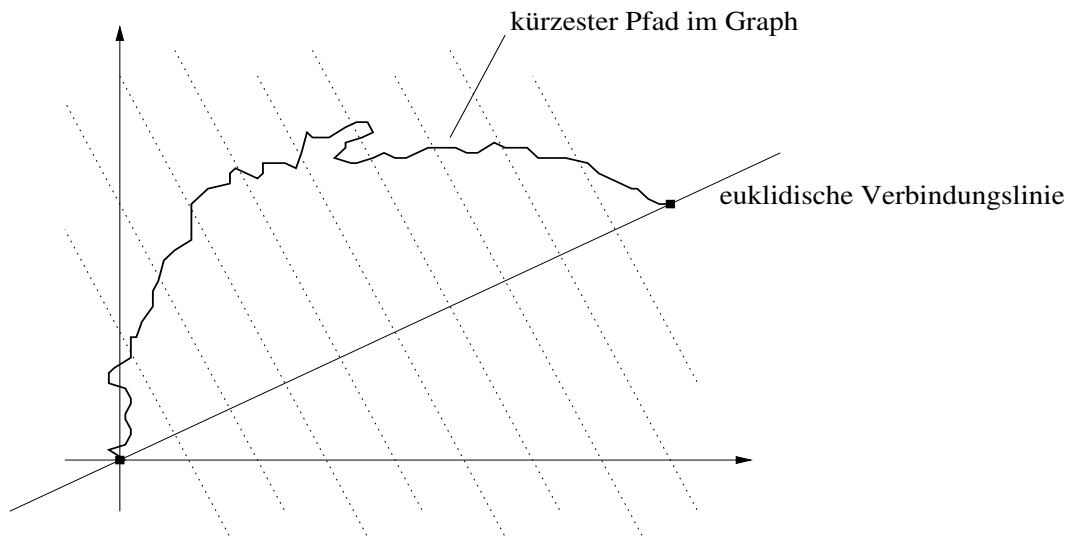


Abbildung 4.7: Das Problem im nicht-konvexen Fall: Die kürzesten Pfade könnten allesamt weit ab von der euklidischen Verbindungslinie liegen. In dem Fall ist die Verweildauer des Pfades in den einzelnen Scheiben deutlich von der Position der Scheibe abhängig.

Insbesondere die zweite Beschreibung erlaubt eine einfache Interpretation der Konvexität für stochastische Gitter: Die Funktion \hat{p} muss in gewisser Weise in Form einer konvexen Menge abfallen. Insbesondere ist \hat{p} eine (möglicherweise unendliche) Linearkombination von charakteristischen Funktionen konvexer Untermengen.

Wir haben bereits bei der Translationsinvarianz gesehen, dass sich Symmetrien und Eigenschaften eines stochastischen Gitters auf dessen mittleren Kontinuums- \limes übertragen können. Hier ist die Situation komplizierter, da die Symmetrien nicht direkt vergleichbar sind. Wir formulieren also:

Vermutung 2 Sei \mathcal{G} ein konvexes und freies stochastisches Gitter über \mathbb{Z}^n . Dann ist auch die Metrik von \mathcal{EG} konvex, d.h. für alle $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\mathbf{m} = \lambda \mathbf{n} + (1 - \lambda) \mathbf{n}' \quad \Rightarrow \quad d_{\mathcal{EG}}(0, \mathbf{m}) \leq \lambda d_{\mathcal{EG}}(0, \mathbf{n}) + (1 - \lambda) d_{\mathcal{EG}}(0, \mathbf{n}').$$

Der nächste Schritt wäre, die Konvexität des stochastischen Gitters auf die Art der Pfade zu übertragen, die von 0 nach \mathbf{n} reichen. Dies ist eine gleichermaßen nicht-triviale Angelegenheit und die Formulierung der j -Unabhängigkeit von $E\Delta K(j)$ müsste daran geknüpft werden. Dies sollte dann ausreichen, um die Existenz eines Banachraums als mittleren Kontinuums- \limes eines jeden endlich-dimensionalen stochastischen Gitters zu beweisen.

Wir möchten auch kurz auf den Zusammenhang zur Theorie stochastischer Prozesse hinweisen: Wenn wir den Raum aller Graphen über \mathbb{Z}^n als Wahrscheinlichkeitsraum verwenden, lässt sich der kürzeste Pfad zwischen 0 und \mathbf{n} verstehen

als ein endlicher stochastischer Prozess. Auch die Folge $K(j)$ ist ein solcher Prozess, allerdings mit reellen Werten. Falls die Erwartungswerte von $\Delta K(j)$ von j unabhängig und gleich sind, wie dies im eindimensionalen Fall gegeben ist, ist $\Delta K(j)$ ein Martingal und $K(j)$ ein Submartingal. Selbst wenn im höherdimensionalen Fall diese Unabhängigkeit nicht mehr gegeben ist, könnte sich $K(j)$ als Submartingal herausstellen und wäre damit für die Maschinerie der stochastischen Analysis zugänglich.

4.6 Kontinuumsnäherung

Wir können die Rechnungen aus Abschnitt 4.4 übernehmen, um analoge Rechnungen in höheren Dimensionen durchzuführen. Wir können zwar noch nicht mit mathematischer Sicherheit Art und Existenz eines mittleren Kontinuumslimes für $n > 1$ beweisen, aber zumindest können wir durch die folgenden Rechnungen sinnvolle Vermutungen über sein Aussehen anstellen. Dazu betrachten wir nun das folgende Modell in n Dimensionen:

$$\mathcal{G} = \text{SCay}(\mathbb{Z}^n, \hat{p}), \quad \hat{p}(\mathbf{n}) = \begin{cases} 0 & : \quad \mathbf{n} = 0 \\ 1 & : \quad \|\mathbf{n}\|_2 = 1 \\ p & : \quad 1 < \|\mathbf{n}\|_2 \leq l \\ 0 & : \quad \|\mathbf{n}\|_2 > l \end{cases}$$

mit reellen Parametern $p \in [0, 1]$, $l > 1$ für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n$ und der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Der Einheitsball ist im wesentlichen kugelförmig (und daher noch lange nicht allgemein genug, wenn man die Beschreibung eines metrischen Tensors im Auge hat).

Im folgenden werden wir eine Kontinuumsnäherung einsetzen, d.h. wir setzen voraus $l \gg 1$, $p \gg l^{-n}$, ignorieren die Anisotropie des Gitters, ersetzen alle Summen durch Integrale und entwickeln die auftretenden Funktionen in erster Ordnung. Dies ist nötig, da die Summen über Wurzelterme im allgemeinen nicht direkt berechenbar sind.

Da wir näherungsweise Isotropie annehmen, ist θ in diesem Modell in jede Richtung gleich, wir können also oBdA in Richtung der ersten Achse messen. Wie weit, gemessen auf der 1.Achse, können wir uns innerhalb eines Schrittes vom Ursprung entfernen? Analog zur oben berechneten unteren Schranke können wir diesen Abstand als gute Näherung für θ annehmen. Im Abstand r vom Ursprung bezüglich der ersten Koordinate befinden sich näherungsweise $\kappa_{n-1}(l^2 - r^2)^{(n-1)/2}$ erreichbare Knoten, dabei ist κ_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ($\kappa_0 = 1, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = \pi, \kappa_3 = \frac{4}{3}\pi, \dots$). Nennen wir die Zahl der Knoten im Abstand r vorerst $N(r)$, dann ist wie in den vorhergehenden Rechnungen für

diskretes r :

$$\theta \approx \sum_{r=1}^l r \cdot (1 - q^{N(r)}) \cdot q^{\sum_{r'=r+1}^l N(r')} = l - \sum_{r=0}^{l-1} q^{\sum_{r'=r+1}^l N(r')}$$

Ersetzen gegen Integrale und einsetzen von $N(r)$ liefert

$$\begin{aligned} \theta &\approx l - \int_0^{l-1} \exp\left(\ln q \cdot \int_{r+1}^l \kappa_{n-1} (l^2 - r'^2)^{(n-1)/2} dr'\right) dr \\ &= l - \int_1^l \exp\left(\ln q \cdot \int_r^l \kappa_{n-1} (l^2 - r'^2)^{(n-1)/2} dr'\right) dr \end{aligned}$$

Der Hauptbeitrag wird geliefert von $r \approx l$, da für kleinere r das zweite Integral größer wird und der Hauptintegrand exponentiell kleiner. Wir können daher das erste Integral bei 0 beginnen lassen (der Fehlbetrag ist sehr gering) und r substituieren gegen $r =: l \cdot (1 - \epsilon)$ und $r' =: l \cdot (1 - \epsilon')$:

$$\begin{aligned} \theta &\approx l - l \cdot \int_0^1 \exp\left(\kappa_{n-1} l^n \ln q \cdot \int_0^\epsilon (1 - (1 - \epsilon')^2)^{(n-1)/2} d\epsilon'\right) d\epsilon \\ &= l - l \cdot \int_0^1 \exp\left(\kappa_{n-1} l^n \ln q \cdot \int_0^\epsilon (2\epsilon' - \epsilon'^2)^{(n-1)/2} d\epsilon'\right) d\epsilon \end{aligned}$$

Der Hauptbeitrag wird geliefert von kleinen ϵ , d.h. wir können ϵ'^2 gegenüber $2\epsilon'$ vernachlässigen und direkt integrieren:

$$\theta \approx l - l \cdot \int_0^1 \exp\left(\kappa_{n-1} l^n \ln q \cdot 2^{(n-1)/2} \cdot \frac{2}{n+1} \epsilon^{(n+1)/2}\right) d\epsilon$$

Wir fassen die konstanten Terme vorläufig zusammen als $\zeta := -\kappa_{n-1} l^n \ln q \cdot 2^{(n+1)/2} \cdot (n+1)^{-1}$. Wegen $q < 1$ ist $\zeta > 0$. Wieder mit dem Hinweis auf kleine ϵ verändern wir die obere Integrationsgrenze von 1 auf ∞ : Dass dies möglich ist, zeigt die folgende Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \exp(-\zeta \cdot \epsilon^{(n+1)/2}) d\epsilon &\leq \int_1^\infty \exp(-\zeta \cdot \epsilon) d\epsilon \quad \text{da } \epsilon \leq \epsilon^{(n+1)/2}, n \geq 1 \\ &= \zeta^{-1} \cdot e^{-\zeta} \end{aligned}$$

Da ζ durch den l -Term sehr groß ist, ist der Fehler also vernachlässigbar und wir erhalten

$$\theta \approx l - l \cdot \int_0^\infty \exp(-\zeta \cdot \epsilon^{(n+1)/2}) d\epsilon$$

Wir substituieren $\epsilon' := \zeta^{2/(n+1)} \epsilon$ und erhalten

$$\theta \approx l - l \cdot \zeta^{-2/(n+1)} \cdot \int_0^\infty \exp(-\epsilon'^{(n+1)/2}) d\epsilon'.$$

Das Integral ist nunmehr nur noch von n abhängig und für die interessanten Fälle numerisch berechenbar. Insbesondere lässt es sich mit Hilfe der Gamma-Funktion durch eine einfache Substitution darstellen (Eulersches Integral 2. Gattung):

$$\int_0^\infty \exp(-x^c) dx = \int_0^\infty e^{-y} \cdot \frac{1}{c} y^{\frac{1}{c}-1} dy = c^{-1} \Gamma(c^{-1})$$

Folgerung 11 *Mit den benutzten Näherungen ist*

$$\theta \approx l - \lambda_n \cdot (-\ln q)^{-\frac{2}{n+1}} \cdot l^{-\frac{n-1}{n+1}}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{\kappa_{n-1}} \right)^{\frac{2}{n+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n+1}\right),$$

z.B. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0,591465\dots$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$.

Für den Spezialfall $n = 1$ erhalten wir daraus die Näherung $l - \theta \approx (-\ln q)^{-1}$. Wir haben in Abbildung 4.5 zusätzlich die Funktion $-0.5/\ln q$ aufgetragen. Diese approximiert die Messwerte für kleine p außerordentlich gut, wird aber schlechter, wenn $p > 0.5$ wird. Dies ist insofern nicht überraschend, als im Bereich mit hohem p die Gitterstruktur von \mathbb{Z}^n deutlicher wird und damit die Kontinuumsnäherung schlechter. Der Ursprung dieses Faktors 2 zwischen der berechneten Näherung und der numerisch überzeugendsten Approximation ist nach wie vor mysteriös: Ohne diesen Faktor nähert sich die Kontinuumsnäherung wie erwartet für kleine p der direkt errechneten unteren Schranke $l - q/p$ an – “erwartet”, weil die Annahme des Kontinuums wie gesagt für kleine p am besten zutrifft. Auch die untere Schranke $l - q/p$ selber ist in diesem Bereich von den numerischen Werten um einen Faktor 2 entfernt. Damit ist die Kontinuumsannahme rehabilitiert. Die um Faktor 2 veränderte Näherung $\theta = l - q/2p$ nähert für kleine p die numerischen Werte gut an, ist allerdings im Bereich größerer p keine untere Schranke mehr, d.h. den ursprünglichen Annahmen (die für alle p gelten sollten) wird widersprochen – der Faktor 2 kann damit kein simpler Rechenfehler sein. Vielmehr handelt es sich offensichtlich um ein Problem mit der Näherungsannahme “der zuletzt erreichte Knoten ist der einzige in seiner Umgebung”. Um also das Problem des Faktors 2 sicher zu klären, bedarf es einer genauen Analyse der Wahrscheinlichkeitsverteilung der erreichten Knoten im Bereich der Propagationsfront.

Eine numerische Bestätigung oder Widerlegung des Verhaltens für $n > 1$ steht noch aus, da die für verlässliche Ergebnisse nötigen Rechnerkapazitäten fehlen. Sofern aber die Tendenz richtig ist, wird sich θ noch mehr an l annähern, da im Korrekturterm l in einer negativen Potenz erscheint. Speziell für $n = 3$ erwarten wir ein Abfallen mit $1/\sqrt{l}$, also einen nur noch sehr schwachen Einfluss von p auf die Limes-Metrik.

4.7 Verallgemeinerungen

4.7.1 Alternative Funktionen für \hat{p}

Neben dem hier verwendeten Modell mit im wesentlichen konstantem \hat{p} ist natürlich eine Vielzahl weiterer Modelle mit variablem und auch langsam absinkendem \hat{p} denkbar, beispielsweise in Form einer Gaußglocke. Im konstanten Modell haben wir festgestellt, dass der genaue Wert von \hat{p} gegenüber seinem Träger nur einen kleinen (aber messbaren) Einfluss auf die Metrik im Limesraum hat, vorausgesetzt, \hat{p} ist nicht kleiner als etwa l^{-1} . Diese Einschränkung liegt daran, dass für $\hat{p} < l^{-1}$ die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Kante zu klein wird, als dass ein Einfluss auf die Metrik sichtbar würde. So ist es plausibel zu behaupten, dass für beliebiges \hat{p} die Metrik im Limes im wesentlichen bestimmt wird durch diejenige minimale Menge $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ aller Knoten, für die die Summe von \hat{p} über $\mathbb{Z}^n \setminus A$ unter Eins sinkt. Eine solche Menge ist natürlich nicht eindeutig gegeben, aber die in Frage kommenden Mengen sollten sich nicht allzu sehr voneinander unterscheiden und damit eine gute Ausgangsposition für genauere, modellabhängige Untersuchungen geben.

Die Auswahl einer solchen Menge A ist vergleichbar der Auswahl eines Cutoffs und entspricht tatsächlich einer primitiven Form von Bereinigung, wie wir sie in Abschnitt 3.9 angesprochen haben. Wesentlich kanonischer, aber schwieriger zu handhaben, ist auch hier das Coarse-Graining mittels Cliquengraphen ([Req₃]), da dann nicht mehr die Form der Cutoff-Menge bestimmt werden muss, sondern nur noch zwei reelle Parameter.

Beispiel: Wir betrachten auf \mathbb{Z}^2 das Modell

$$\hat{p}(\mathbf{n}) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } \mathbf{n} = 0 \\ 1 & \text{für } \|\mathbf{n}\|_2 = 1 \\ \exp(-c(\|\mathbf{n}\|_2)^2) & \text{für } \|\mathbf{n}\|_2 \leq l \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

mit einem beliebigen Cutoff-Parameter $l \gg 0$ und einem weiteren Parameter $0 < c \ll 1$. Ein solches Modell erhält man beispielsweise dadurch, dass man von \mathbb{Z}^2 ausgehend an jedem Knoten eine große Zahl an (potentiellen) Kanten befestigt, deren anderer Endpunkt in der Art eines Random Walk über die Kanten von \mathbb{Z}^2 laufen dürfen. Wenn diese Dynamik nach einer großen Zahl an Schritten gestoppt wird, doppelte Kanten und Schleifen entfernt werden, erhalten wir asymptotisch die obige Gaußverteilung mit einem großen l und kleinem c (vgl. Abschnitt 4.8). Da \hat{p} rotationssymmetrisch bezüglich des euklidischen Abstands ist, empfiehlt es sich, als minimale Menge A eine Sphäre mit noch zu bestimmendem Radius r anzunehmen. Eine Integration der Funktion \hat{p} , gleichsetzen mit 1 und auflösen

nach r liefert sodann

$$r \approx \min \left(l, \sqrt{-\frac{1}{c} \ln \frac{c}{\pi}} \right).$$

Der tatsächliche Kontinuumslimites des Modells ist demnach in der Nähe von $(\mathbb{R}^2, r \cdot d_2)$ zu suchen.

4.7.2 Modelle mit abhängigen Kanten

Einleitend haben wir bereits bemerkt, dass eine Dynamik im allgemeinen dazu führen wird, dass die Kanten nicht voneinander unabhängig sind, sondern vielmehr die Existenz benachbarter Kanten miteinander korreliert ist. Können wir dann noch von einer Translationsinvarianz sprechen? Es reicht nicht mehr aus, festzustellen, dass die Wahrscheinlichkeiten der Kanten translationsinvariant sind; es müssen vielmehr auch die Korrelationen (also die Analoga von n -Punktfunktionen) invariant sein. Wir wollen in diesem Abschnitt allgemein Symmetriebedingungen für stochastische Graphen formulieren, basierend auf einem geeigneten Isomorphiebegriff.

Definition 25 *Ein stochastischer Graph \mathcal{G} mit der Knotenmenge V ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = (\mathbb{G}_V, \mu)$ über dem Raum \mathbb{G}_V aller Graphen auf V und einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ . Äquivalent dazu können wir einen stochastischen Graphen auch verstehen als eine Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{G}_V ; dann ist μ das von \mathcal{G} induzierte Maß auf \mathbb{G}_V .*

Die Grundidee für einen Isomorphismus ist natürlich, dass er die Wahrscheinlichkeit eines Graphen nicht ändert. Da jedoch im allgemeinen die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen (unendlichen) Graphen Null ist, müssen wir einen kleinen Umweg über Mengen von Graphen in Kauf nehmen:

Definition 26 *Seien \mathcal{G} und \mathcal{G}' zwei stochastische Graphen zu einer gemeinsamen Knotenmenge V , dargestellt durch ihre Wahrscheinlichkeitsmaße μ und μ' auf dem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum \mathbb{G}_V . Jede bijektive Abbildung $\mathbf{a} : V \rightarrow V$ induziert eine weitere bijektive Abbildung $\mathbf{a}^* : \mathbb{G}_V \rightarrow \mathbb{G}_V$ auf den Graphen über V :*

$$\mathbf{a}^* : (V, B) \mapsto (V, B') \text{ mit } \{\mathbf{n}, \mathbf{m}\} \in B' : \Leftrightarrow \{\mathbf{a}^{-1}(\mathbf{n}), \mathbf{a}^{-1}(\mathbf{m})\} \in B \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m} \in V$$

Das bedeutet, dass die Kanten unter der Abbildung \mathbf{a}^ mit ihren Endknoten mittransportiert werden; entsprechend ist \mathbf{a}^* eine Isometrie. Wir nennen eine bijektive Abbildung $\mathbf{a} : V \rightarrow V$ mit der Eigenschaft*

$$\mu(A) = \mu'(\mathbf{a}^*(A)) \quad \forall A \subseteq \mathbb{G}_V$$

einen Isomorphismus stochastischer Graphen von \mathcal{G} nach \mathcal{G}' . Ist $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$, so sprechen wir von einem Automorphismus.

Von diesem neuen Isomorphiebegriff ausgehend definieren wir Knotentransitivität und Translationsinvarianz wie zuvor: Ein stochastischer Graph heißt knotentransitiv, wenn zu jedem Paar \mathbf{n}, \mathbf{m} von Knoten ein Automorphismus existiert, der \mathbf{n} auf \mathbf{m} abbildet. Ist die Knotenmenge von \mathcal{G} eine Gruppe, und ist jede (Links- oder Rechts-)Translation ein Automorphismus, so nennen wir \mathcal{G} translationsinvariant.

Das folgende Lemma verdeutlicht, wie sich die stochastische Isomorphie im Fall von Punktmaßen auf die normale, graphentheoretische Isomorphie (= Isometrie) reduziert:

Lemma 24 *Seien \mathcal{G} und \mathcal{G}' zwei \mathbb{G}_V -wertige Zufallsvariablen mit den Maßen μ und μ' . Sei μ ein Punktmaß, d.h. es gibt ein $G \in \mathbb{G}_V$, so dass $\mu(A) = 1$ für alle $A \subseteq \mathbb{G}_V$ mit $G \in A$, sonst 0. Sei weiter $\alpha : V \rightarrow V$ ein Isomorphismus stochastischer Graphen von G nach G' . Dann ist auch μ' ein Punktmaß zu einem Graphen $G' \in \mathbb{G}_V$ (also $\mu(\{G'\}) = 1$) und G und G' sind als Graphen isomorph. Sind umgekehrt zwei Graphen G und G' graphentheoretisch isomorph, so sind die von den beiden Graphen induzierten \mathbb{G}_V -wertigen Zufallsvariablen stochastisch isomorph.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mu(A) = \mu'(\alpha^*(A)) = 1$ für $G \in A$, sonst 0. Da α^* eine Bijektion ist, gibt es also genau ein $G' := \alpha^*(G)$, so dass $\mu'(A) = 1$ für $G' \in A$, sonst 0; damit ist μ' ein Punktmaß. Darüber hinaus ist nach Definition von α^* dieses auch ein graphentheoretischer Isomorphismus, also G' und G zueinander isomorph. Die Umkehrung verläuft analog. \square

Aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung des gesamten Graphen lässt sich auch auf die Wahrscheinlichkeiten einzelner Kanten zurückschließen:

Definition 27 *Gegeben eine \mathbb{G}_V -wertige Zufallsvariable \mathcal{G} und zwei Knoten $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in V$ können wir die Wahrscheinlichkeit für eine Kante zwischen den beiden Knoten bestimmen als*

$$P(\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\} \in \mathcal{B}) := P(\mathbf{n} \text{ verbunden mit } \mathbf{m}) := P(\mathcal{G} \in \mathbb{G}_V^{\mathbf{n}, \mathbf{m}}) = \mu(\mathbb{G}_V^{\mathbf{n}, \mathbf{m}})$$

mit $\mathbb{G}_V^{\mathbf{n}, \mathbf{m}} := \{G = (V, B) \in \mathbb{G}_V : \{\mathbf{n}, \mathbf{m}\} \in B\}$

Sind alle Kantenwahrscheinlichkeiten voneinander stochastisch unabhängig, so nennen wir, wie in den vorangegangenen Abschnitten, \mathcal{G} mit unabhängigen Kanten.

Nach Definition besitzt ein stochastischer Cayleygraph stets unabhängige Kanten. Andererseits ist auch der stochastische Cayleygraph durch die Kantenwahrscheinlichkeiten eindeutig bestimmt:

Lemma 25 *Ein stochastischer Graph mit unabhängigen Kanten ist durch seine Kantenwahrscheinlichkeiten bereits eindeutig festgelegt (Produktverteilung).*

Beweis: Vergleiche hierzu [Bau, Satz 33.4]: “Eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Zufallsvariablen ist genau dann unabhängig, wenn ihre gemeinsame Verteilung das Produkt ihrer einzelnen Verteilungen ist.” I kann dabei sogar überabzählbar sein. Gegeben die Wahrscheinlichkeiten $P(\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\} \in \mathcal{B})$ gibt es also genau eine Verteilung für den Raum aller Konfigurationen der Kanten, die diese Wahrscheinlichkeiten richtig wiedergibt, die sogenannte Produktverteilung. Für eine \mathbb{G}_V -wertige Zufallsvariable ist dies gerade die maßgebliche Verteilung, da ausschließlich die Kanten einer stochastischen Verteilung unterliegen. \square

Schließlich ist die Wirkung eines Isomorphismus auf die Kantenwahrscheinlichkeiten zu untersuchen; und erwartungsgemäß kanonisch:

Lemma 26 *Sei $\mathbf{a} : V \rightarrow V$ ein Isomorphismus zwischen den stochastischen Graphen \mathcal{G} und \mathcal{G}' . Dann ist*

$$P(\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\} \in \mathcal{B}) = P(\{\mathbf{a}(\mathbf{n}), \mathbf{a}(\mathbf{m})\} \in \mathcal{B}'),$$

d.h. der Automorphismus ändert nicht die Kantenwahrscheinlichkeiten.

Beweis: Das folgt einfach durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} P(\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\} \in \mathcal{B}) &= \mu(\mathbb{G}_V^{\mathbf{n}, \mathbf{m}}) = \mu'(\mathbf{a}^*(\mathbb{G}_V^{\mathbf{n}, \mathbf{m}})) \\ &= \mu'(\mathbb{G}_V^{\mathbf{a}(\mathbf{n}), \mathbf{a}(\mathbf{m})}) = P(\{\mathbf{a}(\mathbf{n}), \mathbf{a}(\mathbf{m})\} \in \mathcal{B}') \end{aligned}$$

\square

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass die Umkehrung dieses Lemmas nicht gilt; sie benötigt noch die Einschränkung auf \mathbb{G}_V -wertige Zufallsvariablen mit unabhängigen Kanten:

Lemma 27 *Seien $\mathcal{G} = (V, \mathcal{B})$ und $\mathcal{G}' = (V, \mathcal{B}')$ zwei \mathbb{G}_V -wertige Zufallsvariablen mit unabhängigen Kanten. Eine Abbildung $\mathbf{a} : V \rightarrow V$ ist ein Isomorphismus stochastischer Graphen zwischen \mathcal{G} und \mathcal{G}' genau dann, wenn \mathbf{a} bijektiv ist und*

$$P(\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\} \in \mathcal{B}) = P(\{\mathbf{a}(\mathbf{n}), \mathbf{a}(\mathbf{m})\} \in \mathcal{B}') \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{m} \in V \quad \text{gilt.}$$

Beweis: Die Vorwärtsrichtung ist bereits bewiesen. Zur Rückrichtung: Durch die Bijektivität werden alle Kantenwahrscheinlichkeiten von \mathcal{G}' durch solche von \mathcal{G} erklärt. Wir haben gefordert, dass \mathcal{G}' unabhängige Kanten besitzt; die Eindeutigkeit der Produktverteilung liefert dann die Aussage. \square

Schließlich können wir unter Hinzunahme von Translationsinvarianz von links den stochastischen Cayleygraphen zurückgewinnen, was seine Besonderheit nochmals herausstellt:

Lemma 28 *Ein linksinvarianter stochastischer Graph mit unabhängigen Kanten ist ein stochastischer Cayleygraph.*

Beweis: Aus dem Satz über die Produktverteilung (vgl. Lemma 25) wissen wir, dass wir nur die Kantenwahrscheinlichkeiten aller Kanten angeben müssen. Gemäß der Linksinvarianz und dem vorangehenden Lemma reicht es dafür aus, die Kantenwahrscheinlichkeiten für die Kanten ausgehend vom neutralen Element zu kennen – und genau dies ist \hat{p} . \square

Auch die Automorphismengruppe verhält sich so, wie man es erwarten würde:

Lemma 29 *Die Menge $\text{Aut}(\mathcal{G})$ der stochastischen Automorphismen einer \mathbb{G}_V -wertigen Zufallsvariable \mathcal{G} bildet unter Verkettung eine Gruppe. Im Fall eines Punktmaßes zum Graphen G ist $\text{Aut}(\mathcal{G}) = \text{Aut}(G)$.*

Beweis: Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \text{Aut}(\mathcal{G})$. Dann ist $\mu(A) = \mu(\mathfrak{g}^*(A)) = \mu((\mathfrak{h}^* \circ \mathfrak{g}^*)(A))$. Weiter ist offensichtlich $\mathfrak{h}^* \circ \mathfrak{g}^* = (\mathfrak{h} \circ \mathfrak{g})^*$. Da $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{g}$ eine Bijektion ist, muss $\mathfrak{h}^* \circ \mathfrak{g}^*$ auch eine sein, d.h. die Verknüpfung zweier stochastischer Automorphismen ist wieder ein stochastischer Automorphismus. Aus der Bijektivität eines jeden $\mathfrak{g} \in \text{Aut}(\mathcal{G})$ folgt auch die Existenz eines Inversen in dieser Menge bezüglich Verknüpfung. Das Einselement ist dabei die Identität id_V . Assoziativität schließlich ist eine Eigenschaft der Verknüpfung selber. Die Reduktion auf den Fall des Punktmaßes ist eine Folgerung aus Lemma 24. \square

Damit haben wir den Zusammenhang zu den bisherigen Begriffen beleuchtet und die Definitionen für stochastische Graphen, ihre Isomorphismen und stochastische Cayleygraphen gerechtfertigt.

Wir können nun für stochastische Graphen einen mittleren metrischen Raum definieren, wie in Definition 22. Dafür setzen wir wie im Fall für stochastische Cayleygraphen ein, dass wir stets über einer festen Knotenmenge arbeiten, verzichten nun aber auf die Unabhängigkeit der Kanten:

Lemma 30 *Sei \mathcal{G} ein stochastischer Graph und translationsinvariant im Sinne stochastischer Graphen (Def.26). Wenn der mittlere metrische Raum EG existiert, dann ist EG translationsinvariant, d.h. für alle $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{m} \in V$ gilt $d(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = d(\mathbf{n} + \mathbf{m}, \mathbf{n}' + \mathbf{m})$.*

Beweis: Damit \mathcal{G} translationsinvariant sein kann, muss es eine Gruppenstruktur auf V geben. Nach Definition 26 gilt für jede Translation $\mathfrak{a}_{\mathbf{m}} : V \rightarrow V$ mit $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n} + \mathbf{m}$ und jede Untermenge $A \subseteq \mathbb{G}_V$: $\mu(A) = \mu(\mathfrak{a}_{\mathbf{m}}^*(A))$. Weiter ist $\mathfrak{a}_{\mathbf{m}}^*$ eine Bijektion auf \mathbb{G}_V nach Forderung der Gruppeneigenschaft. Damit ist nach

Substitutionsregel für alle $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in V$:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{n}, \mathbf{n}') &= \mathbb{E}^{G \in \mathcal{G}} d_G(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \int_{G \in \mathcal{G}} d_G(\mathbf{n}, \mathbf{n}') d\mu(G) \\ &= \int_{\mathfrak{a}_m G \in \mathcal{G}} d_G(\mathbf{n} + \mathbf{m}, \mathbf{n}' + \mathbf{m}) d\mu(G) = d(\mathbf{n} + \mathbf{m}, \mathbf{n}' + \mathbf{m}) \end{aligned}$$

□

Wie im Fall für stochastische Cayleygraphen können wir wieder eine ξ -Funktion definieren gemäß

$$\xi(\mathbf{n}) := \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{d_{EG}(0, j\mathbf{n})}{j}.$$

Auch der Beweis für die Konvergenz aus Lemma 21 überträgt sich, wenn wir zusätzlich fordern, dass $\hat{p}^{-1}(\{1\})$ eine Erzeugendenmenge enthält. Wir hatten diese Forderung, die nach wie vor eher technischen Charakter hat, in der Definition eines stochastischen Gitters eingefügt, und müssen sie natürlich auch hier wiederholen. Sie stellt sicher, dass stets eine $(\lambda, \epsilon, \epsilon)$ -Quasi-Isometrie zu \mathbb{Z}^n existiert, mit festen λ und $\epsilon > 0$.

Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 4.5 diskutierten Probleme lässt sich auch hier wieder vermuten, dass der mittlere Kontinuumslices gegeben ist durch (\mathbb{R}^n, ξ) . Dabei ist auffällig, dass die Abhängigkeit der Kanten voneinander keine weiteren Auswirkungen auf die Art des Kontinuumslices zu haben scheint; höchstens in der genauen numerischen Form von ξ .

4.7.3 Großräumig variables \hat{p}

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit wird definiert durch Karten aus einer Grundmenge in für jeden Punkt verschiedene Banachräume, die aber stetig ineinander übergehen müssen, und deren Normen gegeben sind durch Quadriken als Einheitsbälle. Es ist offensichtlich, dass bei weitem nicht jede Riemannsche Mannigfaltigkeit durch einen Kontinuumslices erreicht werden kann: Der Limes $\ell \rightarrow 0$ führt dazu, dass auch der Krümmungsskalar der Mannigfaltigkeit skaliert wird und damit 0 oder ∞ anstrebt; eine gekrümmte Mannigfaltigkeit können wir damit mathematisch nicht erreichen. Hier liegt aber auch eine Überidealisierung der physikalischen Situation vor: Der Kontinuumslices darf eben gerade nicht bis zum Ende durchgeführt werden, wenn wir davon ausgehen, dass die Raumzeit selber durch einen Graphen beschrieben wird. Das heißt, wir können für den gesamten Graphen nur lokal den Limes durchführen und erhalten entsprechend auch nur lokale metrische Tensoren, die sodann in der Manier einer Riemannschen Mannigfaltigkeit verklebt werden müssen. Dies lässt sich exemplarisch durch das folgende Modell darstellen:

Wir betrachten das kubische Gitter \mathbb{Z}^n , sowie zwei Felder $l : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $p : \mathbb{Z}^n \rightarrow (0, 1]$ hierauf. Dabei soll $l(\mathbf{n}) \gg 1$ gelten $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n$ und sich in den durch l gegebenen Abständen nur langsam ändern, d.h. $l(\mathbf{n}) \approx l(\mathbf{m})$ für $\sum |\mathbf{n} - \mathbf{m}|_2^2 \lesssim l(\mathbf{n})$ für alle $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Auch p soll sich über solche Abstände nur langsam ändern. Schließlich soll l beschränkt sein durch $l(\mathbf{n}) \leq l_{\max} \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n$.

Als nächstes konstruieren wir auf den Knoten von \mathbb{Z}^n einen stochastischen Graphen \mathcal{G} , dessen Kanten unabhängig voneinander sind und mit folgenden Wahrscheinlichkeiten existieren:

$$P(\{\mathbf{n}, \mathbf{n}'\} \in \mathcal{B}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |\mathbf{n} - \mathbf{m}|_2 = 1 \\ \frac{1}{2}(p(\mathbf{n}) + p(\mathbf{n}')) & \text{falls } 1 < |\mathbf{n} - \mathbf{m}|_2 \leq \frac{1}{2}(l(\mathbf{n}) + l(\mathbf{m})) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. innerhalb eines Abstands, der durch die l -Funktion gegeben ist, kann mit der durch p gegebenen Wahrscheinlichkeit eine Kante existieren. Da wir sowohl von p als auch von l verlangt haben, sich nur langsam zu verändern, sind $p(\mathbf{n})$ und $p(\mathbf{m})$ sowie $l(\mathbf{n})$ und $l(\mathbf{m})$ nahezu gleich; die in der Definition auftretenden Mittelwerte sind nur dazu da, eine exakte Konsistenz zu erzielen und damit von rein technischer Natur.

Mit den in den Abschnitten 4.4 und 4.6 bereitgestellten Methoden lassen sich nun Näherungen für die Limes-Norm berechnen, die vom Ort abhängig sind. Im hiesigen Modell ist die Limes-Norm durch einen fast kreisförmigen Polyeder gegeben und entspricht damit einem metrischen Tensor g , der nur ein Vielfaches (nämlich das θ -fache) der Einheitsmatrix ist. Es ist aber offensichtlich, dass durch eine geeignete Verallgemeinerung jeder metrische Tensor approximiert werden kann (vgl. Satz 9 und Abb.4.8). Es ist dabei wichtig zu erwähnen, dass der so bestimmte metrische Tensor keine lokal berechenbare Eigenschaft des zugrundeliegenden Graphen ist, sondern, wie die Temperatur in der statistischen Mechanik, eine gemeinsame Eigenschaft ist, die von einer Vielzahl von Knoten gemeinsam gebildet wird. In derselben Weise ist auch der aus g abgeleitete Krümmungstensor eine makroskopische Größe und nicht direkt aus der Konfiguration von Kanten auf mikroskopischer Skala berechenbar.

4.8 Random Walks

Wir wenden uns nun kurz noch einem anderen Prozess zu, der für spezielle Netzwerk-Dynamiken von Relevanz sein kann (wie in Beispiel 4.7.1 angewandt) und andererseits selber wesentlich von der Metrik des ihm zugrundeliegenden Netzwerks abhängt.

Ein Random Walk auf einem Graphen ist ein stochastischer Prozess, bei dem, beginnend bei einem festen Knoten \mathbf{n}_0 ein zufälliger Pfad $(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \dots)$ dadurch bestimmt wird, dass vom Knoten \mathbf{n}_j aus alle benachbarten Knoten mit gleicher

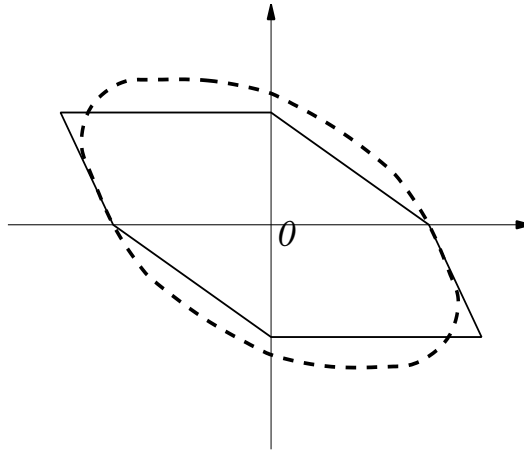


Abbildung 4.8: Der Einheitsball aus Abb.3.2, mit einer ihn approximierenden Quadrik, die dann die räumlichen Anteile eines metrischen Tensors wiedergibt.

Wahrscheinlichkeit \mathbf{n}_{j+1} sein können. Random Walks auf Graphen und insbesondere Cayleygraphen sind von großem Interesse in den angewandten Wissenschaften und wurden dementsprechend intensiv untersucht. Ein wichtiges Ergebnis ist der *zentrale Grenzwertsatz auf dem Gitter*, nach dem die Niveauflächen eines Random Walks auf einem Cayleygitter gegen eine Quadrik streben, vgl. [Woe, Korollar 13.1] und [Cha].

Wie ist der Einfluss von p und l in unserem einfachen Modell aus Abschnitt 4.5 auf einen Random Walk? Genauer gesagt: Wie weit in Bezug auf die euklidische Metrik d_2 kommt man mit einem zufälligen Schritt, ausgehend von einem Knoten \mathbf{n} ? Innerhalb einer euklidischen Kugel mit Radius $r \gg 1$ um \mathbf{n} befinden sich etwa $\kappa_n r^n$ Knoten mit einer Konstanten κ_n , die nur von der Dimension n abhängt. Jeder dieser weit entfernten Knoten trägt die gleiche Wahrscheinlichkeit p , mit dem Startknoten \mathbf{n} verbunden zu sein, solange $r \leq l(\mathbf{n})$ ist. Die Kugeloberfläche können wir durch die Ableitung abschätzen zu $n\kappa_n r^{n-1}$, und so ergibt sich als erwarteter Abstand für genügend großes l :

$$E d_2(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \int_{r=0}^l r \cdot \frac{n\kappa_n r^{n-1}}{\kappa_n l^n} dr = \frac{n}{l^n} \cdot \frac{1}{n+1} l^{n+1} = \frac{n}{n+1} l$$

wenn \mathbf{n} und \mathbf{m} benachbart sind. Beispielsweise ist im Fall $n = 1$: $E d_2 = l/2$, wie man auch erwarten würde. Im dreidimensionalen Fall ist $E d_2 = \frac{3}{4}l$. Bei dieser Rechnung haben wir das Hintergrundgitter vernachlässigt, was nur dann möglich ist, wenn der Abstand der meisten Knoten viel größer ist als 1. Dies erfordert (a) $l \gg 1$ und (b) $p l^n \gg 2n$, da die erwartete Gesamtzahl der durch Shortcuts erreichten Knoten viel größer sein soll als die Zahl $2n$ der über das Hintergrundgitter direkt erreichbaren Knoten. Unter diesen Voraussetzungen ist das Hintergrundgitter nicht mehr für den erwarteten Abstand $E d_2$ relevant, und insbesondere tritt auch die Anisotropie des Gitters nicht mehr im Abstands begriff auf. Was

aber viel interessanter ist, ist die Tatsache, dass damit auch p asymptotisch nicht mehr in den Random-Walk-Abstand eingeht. Dies ist eine spezielle Eigenschaft des von uns gewählten Modells, und wird sich verändern, wenn für \hat{p} eine andere Funktion gewählt wird. Jedoch verdeutlicht dieses Beispiel, dass der Random Walk von den Parametern des Modells in gänzlich anderer Weise abhängen kann als die normale Metrik. Dies wird von Interesse sein, wenn Dynamiken auf dem Graphen untersucht werden, die auf einem Random Walk aufbauen.

Kapitel 5

Interpretation und Spekulation

Wir haben in dieser Arbeit eine Reihe kleinerer Ergebnisse erhalten, die insgesamt den Zusammenhang zwischen Graph, Dynamik und Kontinuumslimes ein Stück weit erhellen konnten:

1. In Folgerung 6 haben wir gezeigt, dass unter geeigneten, sehr allgemeinen Voraussetzungen die Skalierungsdimension eines Graphen und die Hausdorffdimension seines Kontinuumslimes übereinstimmen (dieses Ergebnis existiert in abgewandelter Form bereits bei Mitchell in [Mit]) und Schranken für das Volumen des Einheitsballes angeben.
2. Wir haben durch den Verifikationssatz 4 ein Mittel an der Hand, einen einmal erratenen Kontinuumslimes im Sinne des Gromov-Hausdorff-Abstandes auf einfache Weise zu bestätigen. Dies führte uns insbesondere zu der Berechnung von eindeutigen Kontinuumslimiten für Gitter mit konvexer Erzeugendenmenge in Lemma 18.
3. Durch die Untersuchung der Bedeutung der Quasi-Isometrie für die Topologie des Kontinuumslimes einerseits in Abschnitt 3.4.1 und für die Transformation von Graphen ineinander andererseits in Abschnitt 3.4.2 haben wir festgestellt, dass eine reversible, lokale Dynamik eines Graphen die Topologie seines Kontinuumslimes nicht verändert, eine irreversible und lokale Dynamik dies aber unter starker Ausdehnung des Graphen bewerkstelligen kann.
4. Mit dem Werkzeug der Quasi-Isometrie konnten wir in Folgerung 4 mit Leichtigkeit zeigen, dass jeder Graph mit global beschränktem Vertexgrad und n -dimensionalem Banachraum als Limes automatisch durch eine k -lokale Transformation aus dem \mathbb{Z}^n hervorgeht.
5. Wir haben für eindimensionale und freie stochastische Gitter die Existenz des Kontinuumslimes in Folgerung 9 bewiesen, ebenso haben wir gezeigt,

dass es sich um einen Banachraum handelt und die Art aufgezeigt, wie seine Norm berechnet werden kann. In verschiedenen darauf folgenden Abschnitten haben wir für ein exemplarisches Modell Ungleichungen und Näherungen entwickelt und numerisch belegt. Dabei stellte sich insbesondere heraus, dass die Limesgeometrie stärker durch die maximale Reichweite von Kanten beeinflusst wird als durch die Wahrscheinlichkeit ihrer Existenz.

6. Für höherdimensionale Gitter haben wir in Lemma 21 einen Vorschlag für einen Kontinuumslimes berechnet, die Verifikation allerdings gelang uns nicht. Die Diskussion der auftretenden Probleme haben wir in Abschnitt 4.5 vorgenommen. Wir haben auch eine Näherung für die erwartete Limesmetrik angegeben, konnten sie aber numerisch noch nicht belegen.

Damit wird auch eine Vielzahl an neuen Fragen aufgeworfen: Gibt es Äquivalente für die anderen Dimensionsbegriffe im Kontinuumslimes? Sind sie vielleicht genau dann gleich, wenn ein Kontinuumslimes im starken Sinn existiert? In wie weit lassen sich unsere Resultate auf andere Limesbegriffe übertragen, wie die in Abschnitt 3.10 angesprochenen? Wie lässt sich feststellen, ob eine lokale Graphendynamik reversibel oder irreversibel ist? Wie sollte eine Bereinigung des Graphen aussehen, und welche Folgen hat sie für die Limesmetrik? Können wir auf die Einschränkung “konvexe Erzeugendenmenge” in Lemma 18 verzichten? Was bedeutet die Konvexität für stochastische Gitter und können wir allgemein deren Kontinuumslimes durch die ξ -Funktion in Lemma 21 berechnen? Können wir neue Einblicke gewinnen, wenn wir die Limesräume nicht-kommutativer Cayleygraphen wie z.B. zur Heisenberggruppe betrachten? Sofern Felder und Operatoren auf Graphen untersucht werden sollen, werden auch deren kritische Exponenten von Interesse sein. Wir haben bereits einen kritischen Exponenten für das Zählmaß bestimmt, aber ist beispielsweise der kritische Exponent des Graphen-Laplace-Operators, wie er in [Req₂] beschrieben ist, ebenfalls gleich der Skalierungsdimension? Wie übertragen sich allgemein Ableitungsoperatoren in den Kontinuumslimes? Dies sind weitere Fragen, die in zukünftigen Arbeiten beantwortet werden müssen, bevor erste dynamische Modelle in den Kontinuumslimes übertragen werden können. Auf einige physikalische Zusammenhänge wollen wir noch kurz eingehen: Was könnte Gravitation in unserem Zugang bedeuten, können wir die Lorentzinvarianz wiederherstellen und wie könnte ein möglicher Anfangszustand unserer im Grunde deterministischen Theorie aussehen?

5.1 Gravitation

Die übliche Beschreibung der Raumzeit besteht aus einer 4-Mannigfaltigkeit mit einer (Pseudo-)Riemannschen Metrik g . Diese ist zu verstehen als eine Art “lokale Norm”, mit der zugehörigen Quadrik als Einheitsball. Konzentrieren wir uns

auf den räumlichen Anteil, so ist diese Quadrik ein Ellipsoid, und wir können ihn wie in Satz 9 asymptotisch rekonstruieren aus geeigneten Graphen und durch Zusammenkleben dieser Graphen die Riemannsche Mannigfaltigkeit beliebig gut annähern. Damit haben wir einen Zusammenhang zwischen dem metrischen Tensor und der Metrik des zugrundeliegenden Graphen hergestellt. In spezifischen Modellen versetzt uns dies in die Lage, ein makroskopisches Differentialkalkül auf dem Kontinuumslices zu konstruieren, basierend auf der durch den Graphen gegebenen Geometrie. Dazu gehört natürlich auch ein Krümmungstensor, der sich wie üblich aus dem metrischen Tensor berechnet; modulo dem bisher nicht gelösten Problem, wie die zeitlichen, pseudo-riemannschen Komponenten des metrischen Tensors aus dem Graphen hervorgehen könnten.

Dimakis und Müller-Hoisen ([DM₁]), Requardt ([Req₂]) und Nowotny ([Now]) haben im Kontrast dazu mikroskopische Differentialkalküle und differentialgeometrische Konzepte für Graphen ausgearbeitet, in [Now] dann auch angewendet, um den Euler-Lagrange-Formalismus auf Graphen zu übertragen. Diese basieren darauf, Begriffe wie z.B. Tangentialvektoren aus der direkten Nachbarschaft eines Knotens zu extrahieren.

Beispielsweise ist der Differentialkalkül für Cayleygraphen, wie er in [DM₂] erarbeitet wurde, auf unsere Situation nicht übertragbar ([Mül]). So ist ein metrischer Tensor in [DM₂] im wesentlichen eine $n \times n$ -dimensionale Matrix, wobei $n = \#\mathfrak{S}$ ist. Somit wären auf dem kubischen Gitter $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, \{\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2\})$ und dem trigonalen Gitter $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, \{\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2, \pm(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\})$ sehr unterschiedliche metrische Tensoren angesiedelt. Im Kontinuumslices sollten sie aber zum selben Objekt (oder zumindest ähnlichen Objekten) verschmelzen. In unseren Modellen haben wir, grob gesprochen, stochastische Cayleygraphen mit sehr großer Koordinationszahl $\#\mathfrak{S}$ betrachten, die zudem von Knoten zu Knoten schwanken kann. Ein metrischer Tensor soll die grapheneigene Metrik widerspiegeln und dementsprechend auch die Dimension besitzen, die in natürlicher Weise dieser Metrik entspringt. Eine solche Dimension muss aber unabhängig von der Koordinationszahl des Graphen sein, so wie beispielsweise die Skalierungsdimension. Eine Übertragung des DMH-Kalküls auf unsere Situation ist aus den genannten Gründen nicht möglich, ebenso kann auch nicht überprüft werden, ob der aus unserem Kalkül entspringende metrische Tensor den Anforderungen von DMH genügt. Es sind schlichtweg verschiedene, inkompatible Ansätze, auch wenn sie sich augenscheinlich mit derselben Sache beschäftigen.

Mit dem Aufbau einer Differentialgeometrie im Kontinuumslices fällt natürlich auch die Frage nach der Gravitation in unseren Modellen ins Auge; hierzu wollen wir einen spekulativen Zusammenhang aufzeigen: Wir nehmen an, dass sich Materie und Felder auf dem Graphen wiederum als Felder darstellen lassen, womöglich in Form Cellularer Automaten (vgl. [Req₆] und [Ila]) oder spezieller Muster in der Vernetzung. Dann wäre es nicht überraschend, wenn die Anwesenheit eines Musters an einem Ort die Ausbreitung eines zweiten, eintreffenden Musters

verzögert. Dies entspricht effektiv einer Verringerung der Kantenwahrscheinlichkeiten \hat{p} und damit einer Veränderung des dortigen metrischen Tensors. Insbesondere würde analog zur geometrischen Optik eine eintreffende Wellenfront zur Materiekonzentration hingebeugt, die Richtung der Ablenkung ist soweit also zutreffend. Allerdings wissen wir, dass die Gravitation eine Fernwirkung der Materie ist. Damit ist es auch in dieser Theorie nötig, ein Gravitationsfeld einzuführen, beispielsweise als eine Energieform, die von anwesender Materie in der oben benannten Art beeinflusst wird und andersherum Materie durch seine Anwesenheit beeinflusst. Die genaue Dynamik dieses Feldes sollte sich sodann in den Einsteinschen Feldgleichungen widerspiegeln. Wir wissen aus den Abschnitten 4.4 und 4.6, dass der Einfluss des genauen Verlaufs der Funktion \hat{p} auf die Metrik sehr schwach ist. Dies gibt eine plausible Erklärung, warum die Gravitationskraft gegenüber den anderen elementaren Kräften so verschwindend gering ist. Für eine quantitative Untersuchung bedarf es aber zuvor eines ausführlicheren Modells für Materie, über das wir im Moment noch nicht verfügen.

5.2 Lorentzinvarianz

Wenn wir Zeit als eine diskrete und globale Entwicklung des Graphen und seiner Felder verstehen, gibt es eine feste Grenzgeschwindigkeit für jede Signalübermittlung, gegeben durch die Länge einer Kante pro Zeitschritt. Insofern wäre es nicht überraschend, tatsächlich im Kontinuumslimit eine Form der Speziellen Relativität wiederzufinden. Wir müssen dabei zwischen zwei Erscheinungsformen der SRT unterscheiden: Zum einen die geometrische Lorentzinvarianz, die sich in Längenkontraktion und Zeitdilatation niederschlägt, zum anderen die Lorentzinvarianz von Feldern und Dynamiken auf der Raumzeit.

In einem kurzen Artikel ([Sny]) hat H.S.Snyder 1947 darauf hingewiesen, dass es lorentzinvariante diskrete Raumzeiten gibt, und sich insbesondere dadurch auszeichnen, dass ihre Koordinatenoperatoren nicht mehr miteinander kommutieren; dabei brauchte er nur wenige axiomatisch formulierte Annahmen. Auch hier sehen wir wieder ein Indiz dafür, dass Quantengravitation und Diskretheit einander mathematisch bedingen.

Im Zusammenhang mit Lattice-Gas-Modellen wurden Ende der 80er Jahre Effekte wie Längenkontraktion und Lorentzinvarianz von Toffoli festgestellt ([Tof], vgl.auch [Ila, S.669ff.]). In diesen Modellen existiert ebenfalls eine globale, diskrete Zeit auf einem diskreten Raum und eine maximale Informationsgeschwindigkeit, sehr ähnlich einem cellularen Automaten. Dies nährt die Hoffnung, dass Lorentzinvarianz ein sehr viel allgemeineres Phänomen ist, dass auch in unseren Modellen in natürlicher Weise verankert ist.

Einen eleganten und vielversprechenden Ansatz zur Lösung dieses Problems hat Requardt in [Req₃, Abs.IV] vorgestellt, der die Graphenmodelle in Zusammen-

hang bringt mit der Theorie kausaler Mengen (vgl. [Myr]). Diese wurden ebenfalls von Myrheim zur Diskretisierung der Raumzeit ins Auge gefasst, und auch hier tritt Lorentzinvarianz zu Tage. Da sich aus den kausalen Mengen auch die $n + 1$ -dimensionale Metrik rekonstruieren lässt, könnten die genannten Arbeiten den Schlüssel zu den zeitlichen Komponenten des metrischen Tensors liefern.

5.3 Problem des Anfangszustands

Bei der Frage nach der Herkunft des Universums muss man zwangsläufig neben dynamischen Gesetzen auch passende Anfangswerte angeben, die zu dem uns bekannten Universum passen. Doch stellt sich die Frage, welche Anfangssituation “natürlich” erscheint, d.h. (möglichst) frei von Willkür und dennoch komplex genug, um die sehr differenzierte Welt, in der wir leben, zu erklären. Insbesondere eine deterministische Theorie tut sich damit schwer, da sie nicht, wie Quantentheorien, auf den Zufall bauen kann. Im Rahmen der Graphentheorie gibt es zwei Zustände höchster Symmetrie zu einer gegebenen Zahl von Knoten, nämlich der vollständig unzusammenhängende Graph (die triviale Lösung) und der Simplex. Ein Simplex würde unter translationsinvarianten deterministischen Gesetzen seine Symmetrie stets beibehalten, und damit entweder ein Simplex bleiben, oder vollständig unzusammenhängend werden. Anders sieht dies aus, wenn man die Knoten von Beginn an durchnummeriert, beispielsweise mit natürlichen Zahlen $\{1 \dots n\}$ oder mit den Gruppenelementen einer diskreten Gruppe. Dies würde einen Symmetriebruch im Simplex erlauben und die Knoten voneinander unterscheidbar machen, ohne eine allzu große Willkür zu erfordern. (Es würde Kroneckers konstruktivistische Weltsicht in einem geradezu ironischen Sinne untermauern.)

Insbesondere würde eine primordiale Ordnung der Knoten auch die Ausfaltung der von uns beobachteten Raumdimensionen erklären. Auf diese Fragestellung wird auch in [Req₅] eingegangen: Betrachten wir beispielsweise einen sehr großen und vollständig mit natürlichen Zahlen durchnummerierten n -Simplex und als dynamisches Gesetz, dass jede Kante gelöscht wird, deren Endknotenwerte eine Differenz von mehr als Eins aufweisen. Dann wird gleich im ersten Schritt aus dem Simplex eine n -Strecke entfaltet, also ein Graph mit approximativer Dimension Eins. Dieses einfache Prinzip lässt sich in vielerlei Weise variieren, beispielsweise können wir Differenzen von höchstens z zulassen, einigen Knoten denselben Zahlenwert zuordnen oder eine Dynamik der Knotenwerte einführen. Anzustreben ist damit stets eine gewisse Lokalität der Gesetze in Bezug auf die aktuelle Graphenmetrik. Ein besonders illustratives und zugleich einfaches Beispiel wurde von Requardt in [Req₅, Abschnitt 4.1] durchgerechnet: Er beginnt dabei mit einem Simplex, dem nach dem Zufallsprinzip immer mehr Kanten entfernt werden. In diesem Prozess nimmt die Ordnung des Cliquengraphen anfangs exponentiell zu, und übersteigt schnell die Ordnung des anfänglichen Simplexes selber. Dabei

steigt natürlich auch der Durchmesser beider Graphen schnell an. Die Analogie zu einer “inflationären Phase” liegt auf der Hand. Allerdings ist die Entfaltung eines Zufallsgraphen, wie er in diesem Toy model auftritt, zu einem Graphen mit ganzzahliger Dimension sehr viel komplizierter zu bewerkstelligen. Eine bereits existierende, innere Ordnung des Simplex anzunehmen, ist daher vielleicht unumgänglich.

Literaturverzeichnis

Zitate der Form “gr-qc/0577216” beziehen sich auf Artikel im Preprint-Server ArXiv, <http://xxx.lanl.gov/gr-qc/0577216>.

- [Ant] F.Antonsen: “Random Graphs as a model for pregeometry”, *Int.Jour.Theor.Phys.*33 (1994) 1189
- [BA] M.Barthélémy , L.A.Nunes Amaral: “Small-world networks: Evidence for a crossover picture”, *Phys.Rev.Lett.* 82 (1999) 3180, cond-mat/9903108, and A.Barrat: “Comment on ‘Small-World networks: Evidence for a crossover picture’”, cond-mat/9903323
- [Bas] H.Bass: “The Degree of Polynomial Growth of Finitely Generated Nilpotent Groups”, *Proc.London Math.Soc.* 25 (1972) 603-614; ähnliche Sätze von Y.Guivarc’h, J.W.Jenkins, J.Dixmier und B.Hartley werden in [Har], Thm.VII.26 zitiert.
- [Bau] H.Bauer: “Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie”, 3.Auflage (1977), de Gruyter
- [Bax] R.J.Baxter: “Exactly Solved Models in Statistical Mechanics”, 1982
- [Big] N.Biggs: “Algebraic Graph Theory ”, Cambridge Mathematical Library (second edition, 1993)
- [Bis] M.Biskup: “On The Scaling of the Chemical Distance in Long-Range Percolation Models”, *Ann.Probab.*32 (4) (2004) 2938-2977, math.PR/0304418
- [Bol₁] B.Bollobás: “Modern Graph Theory”, Springer, N.Y. (1998)
- [Bol₂] B.Bollobás: “Isoperimetric Numbers of Random Regular Graphs”, *Eur.op.Jour.of Combinatorics* 9 (1988) 241-244; J.Rosenhouse: “Isoperimetric Numbers of Cayley Graphs Arising from Generalized Dihedral Groups”, *Jour.of Comb.Math.and Comb.Computing* 42 (2002) 127-138
- [Bol₃] B.Bollobás: “Combinatorics”, Cambridge University Press, London (1986)

- [BH] M.Bridson, A.Haefliger: “Metric Spaces of Non-positive curvature”, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 319, Springer (1999)
- [Bos] S.Bosch: “Algebra”, Springer-Verlag (2001)
- [BR] A.D.Barbour, G.Reinert: “Small worlds”, Random Structures & Algorithms 19 (2001) 54, cond-mat/0006001
- [CG] F.Chung, R.Graham: “Erdős on Graphs”, Peters (1998)
- [Cha] S.Chandrasekhar: “Stochastic Problems in Physics and Astronomy”, Rev.of Mod.Physics 15 (1943), No.1, abgedruckt in “selected papers on noise and stochastic processes”, ed.by Nelson Wax, Dover Publications Inc. (1954)
- [DM₁] A.Dimakis, F.Müller-Hoissen: “Discrete differential calculus: Graphs, topologies, and gauge theory”, J.Math.Phys. 35 (12) (1994) 6703-6735
- [DM₂] A.Dimakis, F.Müller-Hoissen: “Differential geometry of group lattices”, J.Math.Phys. 44 (2003) 1781 und “Riemannian geometry of bicovariant group lattices”, J.Math.Phys. 44 (2003) 4220; ferner S.Cho, K.S.Park: “Linear connections on graphs”, J.Math.Phys. 38 (1997) 5889
- [DS] G.David, S.Semmes: “Fractured Fractals and Broken Dreams”, Oxford Science Publications (1997/98)
- [ER] P.Erdős, A.Rényi: “On random graphs, I.”, Publ.Math.Debrecen 6 (1959) 290-296; “On the evolution of random graphs”, Publ.Math.Inst.Hung.Acad.Sci. 5 (1960) 17-61; “On the evolution of random graphs”, Bull.Inst.Internat.Statist. 38 (4) (1961) 343-347; “On the strength of connectedness of a random graph.”, Acta Math.Acad.Sci.Hungar. 12 (1961) 261-267
- [Eva] A.V.Evako: “Dimension on Discrete Spaces”, gr-qc/9402035
- [Fal] K.Falconer: “Fractal Geometry”, Wiley (1990)
- [Fed] H.Federer: “Geometric Measure Theory”, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 153, Springer (1969), Abschnitt 2.10
- [Gor] G.Gorelik: “First Steps of Quantum Gravity and the Planck Values”, Einstein Studies Vol.3: Studies in the history of general relativity, Birkhäuser (1992), 364-379
- [GR] C.Godsil, G.Royle: “Algebraic Graph Theory”, Springer (2001)
- [Gro₁] M.Gromov: “Groups of Polynomial Growth and Expanding Maps”, Publ.Math.IHES 53 (1981) 53-73

- [Gro₂] M.Gromov et.al.: “Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces”, Progress in Mathematics 152, Birkhäuser (1999)
- [Har] P.de la Harpe: “Topics in Geometric Group Theory”, The University of Chicago Press (2000/01)
- [Haw] S.W.Hawking: “Eine kurze Geschichte der Zeit”, Rowohlt (1988)
- [H_{*}] M.Gromov: “Carnot-Carathéodory spaces seen from within”, Sub-Riemannian geometry, Progress in Math.144, Birkhäuser 1996, 79-323; R.Strichartz: “Self-similarity on nilpotent Lie groups”, Contemp.Math.140 (1992) 123-157; in Bezug auf Untermengen: Z.M.Balogh, M.Rickly, F.S.Cassanico: “Comparison of Hausdorff measures with respect to the Euclidean and the Heisenberg metric”, Publ.Math.47 (2003) 237-259; Z.M.Balogh, J.T.Tyson: “Hausdorff dimensions of self-similar and self-affine fractals in the Heisenberg group”, erscheint in Proc.London Math.Soc., Preprint: <http://www.mai.unibe.ch/pdf/heisfractal2.pdf>
- [HW] W.Hurewicz, H.Wallmann: “Dimension Theory”, Princeton University Press (1948)
- [L_{*}] C.P.Herrero: “Ising model in small-world networks”, Phys.Rev.E 65 (2002) 066110; C.P.Zhu, S.J.Xiong: “Localization-delocalization transition of electron states in a disordered quantum small-world network”, Phys.Rev.B 62 (22) (2000) 14780 und “Fractal analysis of wave functions at the localization-delocalization transition in a disordered quantum small-world-network model”, Phys.Rev.B 63 (2001) 193405; R.T.Scalettar: “Critical Properties of an Ising Model With Dilute Long Range Interactions”, Physica A 170 (1991) 282-290; T.Nikoletopoulos, A.C.C.Coolen, I.Peréz Castillo, N.S.Skantzios, J.P.L.Hatchett, B.Wemmenhove: “Replicated transfer matrix analysis of Ising spin models on ‘small world’ lattices”, J.Phys.A: Math.Gen. 37 (2004) 6455-6475
- [Ila] A.Ilachinski: “Cellular Automata”, World Scientific (2001)
- [KO] N.J.Kalton, M.I.Ostrovskii: “Distances between Banach Spaces”, math.FA/9709211v1
- [Mil] J.Milnor: “Growth of finitely generated solvable groups”, J.Diff.Geom.2 (1968) 447-449
- [Mit] J.Mitchell: “On Carnot-Carathéodory metrics”, J.Diff.Geom.21 (1985) 35-45, Theorem 2 (genau gesagt werden hier Hausdorff- und homogene Dimension verglichen, daher die seltsame Formulierung)

- [ML] H.Meschkowski, D.Laugwitz et.al.: “Meyers Handbuch über die Mathematik”, 2.Auflage (1967)
- [Mül] F.Müller-Hoissen (persönliches Gespräch)
- [Myr] J.Myrheim: “Statistical Geometry”, Cern-Preprint Th.2538 (1978); L.Bombelli, J.Lee, D.Meyer, R.D.Sorkin: “Space-Time as a Causal Set”, Phys.Rev.L.59, Nr.5 (1987) 521-524
- [NMW] M.E.J.Newman, C.Moore, D.J.Watts: “Mean-field solution of the small-world network model”, PRL 84 (2000) 3201, cond-mat/9909165
- [Nol] J.Noldus: “A Lorentzian Gromov-Hausdorff notion of distance”, Class.Quant.Grav. 21 (2004) 839-850, gr-qc/0308074; J.Noldus: “Lorentzian Gromov Hausdorff theory as a tool for quantum kinematics”, PhD thesis Gent University, gr-qc/0401126
- [Now] T.Nowotny: “Untersuchung geometrischer Strukturen in zellularen Netzwerken und Graphen im Hinblick auf eine Beschreibung der Feinstruktur der physikalischen Raumzeit auf der Planckskala”, Diplomarbeit an der Georg-August-Universität Göttingen (1998)
- [NW] M.E.J.Newman, D.J.Watts: “Renormalization Group Analysis of the Small World Network Model”, Phys.Lett. A 263 (1999) 341, cond-mat/9903357
- [Pan₁] P.Pansu: “Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés”, Ergod.Th.& Dynam.Sys. 3 (1983) 415-445, zitiert in [Har]
- [Pan₂] P.Pansu: “Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un”, Annals of Math. 129 (1989) 1-60; in diesem Zusammenhang wird auch zitiert: N.Seifter, V.I.Trofimov: “Automorphism groups of graphs with quadratic growth”, J.Combinatorial Theory, Series B 71 (1997) 205-210
- [Pet] P.Petersen V: “Gromov-Hausdorff Convergence of Metric Spaces”, AMS: Proc.Symp.in Pure Math Math. 54 (3) (1993) 489-504
- [Pla] M.Planck: “Über irreversible Strahlungsvorgänge”, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 5 (1899) 479
- [Req₁] M.Requardt: “Scale Free Small World Networks and the Structure of Quantum Space-Time”, gr-qc/0308089
- [Req₂] M.Requardt: “Cellular networks as models for Planck-scale physics”, J.Phys.A: Math.Gen.31 (1998) 7997-8021 und “Dirac operators and the calculation of the Connes metric on arbitrary (infinite) graphs”, J.Phys.A: Math.Gen.35 (2002) 759-779

- [Req₃] M.Requardt: “A geometric renormalization group in discrete quantum space-time”, *J.Math.Phys.* 44 (2003) 5588
- [Req₄] M.Requardt: “The Continuum Limit of Discrete Geometries”, *math-ph/0507017* (v1)
- [Req₅] M.Requardt: “(Quantum) spacetime as a statistical geometry of lumps in random networks”, *Class.Quantum Gravity* 17 (2000) 2029-2057
- [Req₆] M.Requardt: “Emergence of Space-Time on the Planck-Scale described as an Unfolding Phase Transition within the Scheme of Dynamical Cellular Networks and Random Graphs”, *hep-th/9610055* (1996)
- [Rief] M.A.Rieffel: “Gromov-Hausdorff Distance for Quantum Metric Spaces”, *Mem.Amer.Math.Soc.* 168 (2004) 796, 1-65, *math.OA/0011063*
- [Riem] G.F.B.Riemann: “Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grund liegen.”, Vortrag von 1854 zum Zweck seiner Habilitation, mitgeteilt durch R.Dedekind im Jahr 1867 (abrufbar über das Göttinger Digitalisierungszentrum)
- [RL] A.Lochmann, M.Requardt: “A Proof of a Broad Phase-Transition Zone in the Small-World Model”, erscheint in *J.Stat.Phys.* 2005, *cond-mat/0409710*
- [RN] M.Requardt: “Cellular networks as models for Planck-scale physics”, *J.Phys.A: Math.Gen.*31 (1998) 7997-8021; T.Nowotny, M.Requardt: “Dimension Theory of graphs and networks”, *J.Phys.A: Math.Gen.*31 (1998) 2447-2463; T.Nowotny, M.Requardt: “Pregeometric Concepts on Graphs and Cellular Networks as Possible Models of Space-Time at the Planck-Scale”, *hep-th/9801199*
- [RR] M.Requardt, S.Roy: “(Quantum) spacetime as a statistical geometry of fuzzy lumps and the connection with random metric spaces”, *Class.Quant.Grav.*18 (2001) 3039-3057
- [Rud] W.Rudin: “Functional Analysis”, McGraw-Hill (1991)
- [Ser] M.Seriu: “Space of spaces as a metric space”, *CMP* 209 (2000) 393, *gr-qc/9908078* und dort zitierte Artikel
- [Sny] H.S.Snyder: “Quantized Space-Time”, *Phys.Rev.*71 (1947) 38-41
- [Spe] E.Sperner: “Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge”, *Math.Z.* 27 (1928) 544-548

- [SSR] B.Schweizer, A.Sklar: “Probabilistic Metric Spaces”, North-Holland (1983); S.Roy: “Statistical Geometry and Applications to Microphysics and Cosmology”, Kluwer (1998)
- [ST] Die zentralen Arbeiten sind: G.Sabidussi: “Vertex-transitive Graphs”, Monatshefte Mathematik 68 (1964) 426-438 und V.I.Trofimov: “Graphs with Polynomial Growth”, Math.USSR Sbornik 51(1985)405-417; für eine Übersicht vgl. B.Mohar, W.Woess: “A Survey on spectra of infinite graphs”, Bull.London Math.Soc.21 (3) (1989) 209-234
- [tHo₁] G. 't Hooft: “Equivalence Relations Between Deterministic and Quantum Mechanical Systems”, J.Stat.Phys. 53 (1/2) (1988) 323-344
- [tHo₂] G. 't Hooft: “Quantization of Discrete Deterministic Theories by Hilbert Space Extension”, Nucl.Phys.B 342 (1990) 471-485
- [Tof] T.Toffoli: “Four topics in lattice gases: ergodicity; relativity; information flow, and the rule compression for parallel lattice-gas machines”, in “Discrete Kinematic Theory, Lattice Gas Dynamics, and Foundations of Hydrodynamics”, ed.by R.Monaco, World Scientific (1989) 343-354
- [Var] N.Th.Varopoulos: “Isoperimetric inequalities and Markov chains”, J.Funct.Anal. 63 (1985) 215-239 und “Théorie du potentiel sur des groupes et des variétés”, C.R.Acad.Sci.Paris Sér.I 302 (1986) 203-205
- [Woe] W.Woess: “Random Walks on Infinite Graphs and Groups”, Cambridge Tracts in Mathematics 138, Cambridge University Press (2000)
- [WS] D.J.Watts, S.H.Strogatz: “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, Nature 393 (1998) 440-442
- [Zho] H.Zhou: “Scaling exponents and clustering coefficients of a growing random network”, Phys.Rev.66 (2002) 016125, cond-mat/0303547

Danksagung

Herr Priv.-Doz. Dr.M.Requardt gab mir große Freiheit und Unterstützung gleichermaßen bei der Wahl der Fragestellungen in diesem äußerst anregenden und vielfältigen Themengebiet. Dafür und für die regelmäßige, freundliche und äußerst hilfreiche Betreuung bin ich ihm in hohem Maße dankbar. Ich möchte Herrn Prof.Dr.D.Buchholz danken für die Übernahme des Korreferats, sowie ihm und der gesamten Arbeitsgruppe für die wunderbare und offene Arbeitsatmosphäre am Institut. Ich möchte mich bei der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle und umfangreiche ideelle Unterstützung bedanken, und bei meinem langjährigen Praktikumpartner Sascha Werhahn, der mir durch die Untiefen der Experimentalphysik geholfen hat. Besonders danke ich meinen Eltern und allen meinen Freunden für die ständige Unterstützung in allen Lebenslagen, insbesondere Dipl.Math. Johannes Härtel für das Durchlesen des Manuskripts und für zahllose Diskussionen zum Thema und darüber hinaus.