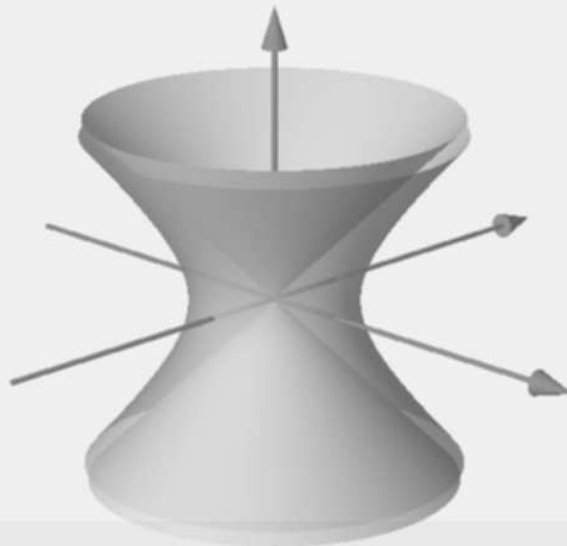


Ole Kniemeyer

Untersuchungen am erzeugenden Funktional der AdS-CFT-Korrespondenz

Diplomarbeit



$$\langle e^{A(f)} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-I(\phi)} \delta(\partial\phi - f)$$

Institut für Theoretische Physik
der
Georg-August-Universität Göttingen

Untersuchungen am erzeugenden Funktional der AdS-CFT-Korrespondenz

Diplomarbeit

vorgelegt von

Ole Kniemeyer
aus Bremen

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik
der
Georg-August-Universität Göttingen

Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
0.1	Aufbau der Arbeit	2
I	Quantenfeldtheoretische Grundlagen	3
1	Quantenfeldtheorie im Wightman-Rahmen	5
1.1	Motivation	5
1.2	Wightman-Axiome	6
1.3	Wightman-Distributionen	7
1.4	Trunkierte Wightman-Distributionen	9
1.5	Beispiele für Wightman-Felder	9
1.6	Wightman-Funktionen	10
2	Euklidische Quantenfeldtheorie	11
2.1	Motivation	11
2.2	Osterwalder-Schrader-Axiome	11
2.3	Zweipunktfunktion	13
2.4	Erzeugende Funktionale	14
2.5	Trunkierte Schwinger-Funktionen	15
2.6	Verallgemeinerte freie Felder	16
2.7	Positivität der Vierpunktfunktion	16
3	Konforme Quantenfeldtheorie	19
3.1	Motivation	19
3.2	Konforme Symmetrie im Minkowski-Raum	19
3.3	Euklidische konforme Gruppe	20
3.4	Konforme Invarianten	21

3.5	Konform kovariante n -Punkt-Funktionen	23
3.6	Zweipunkt- und freie Vierpunktfunktion	24
3.7	Positivitätsbedingungen	25
4	Konforme Partialwellenentwicklung	33
4.1	Motivation	33
4.2	Herleitung der Entwicklung	33
4.3	Euklidische Partialwellenentwicklung	35
4.3.1	Bestimmung der Partialwellen	35
4.3.2	Durchführung der Entwicklung	39
4.4	Positivität	41
4.5	Anwendung	44
4.5.1	Freies Feld	44
4.5.2	Feld mit Wechselwirkung	46
II	AdS-CFT-Korrespondenz	51
5	Anti-de-Sitter-Raum	53
5.1	Motivation	53
5.2	Geometrie	53
5.3	Quantenfeldtheorie auf $\text{AdS}_{1,d}$	54
5.4	Euklidischer Anti-de-Sitter-Raum	55
5.5	Klassische Feldtheorie auf AdS_{d+1}	56
5.5.1	Lösung der freien Feldgleichung	57
5.5.2	Perturbative Lösung der Feldgleichung mit Potential	61
5.5.3	Bestimmung der stationären Wirkung	68
6	AdS-CFT-Korrespondenz	73
6.1	Einführung	73
6.2	Korrespondenz über Funktionale	75
6.2.1	Klassische Näherung	76
6.2.2	Skalare Zweipunktfunktion	76
6.2.3	Skalare Vierpunktfunktion	77
6.2.4	Übergang zum Funktionalintegral	77
6.3	φ^4 -Modell	79
6.3.1	Vierpunktfunktion	79

6.3.2	Positivitätsuntersuchung	80
6.3.3	Deutung der Logarithmen	81
6.3.4	Partialwellenentwicklung	82
6.4	φ^3 -Modell	85
6.4.1	Vierpunktfunktion	86
6.4.2	Partialwellenentwicklung	89
7	Zusammenfassung und Diskussion	93
A	Formelsammlung	97
A.1	Spezielle Funktionen	97
A.2	Bestimmte Integrale	98
A.3	Feynman-Parametrisierung	98
A.4	Vierpunktfunktion E	99
B	Partialwellenentwicklung mit Maple	103
B.1	Aufbereitung der Formeln	103
B.2	Indizierung der Indexpaare	104
B.3	Koeffizientenbestimmung der nullten Ordnung	104
B.4	Quelltext	105
B.5	Verifikation beim φ^4 -Modell	108
B.6	Anwendung beim φ^3 -Modell	109

Kapitel 0

Einleitung

Seit Maldacena 1997 eine Vermutung über eine Korrespondenz zwischen Theorien auf dem Anti-de-Sitter-Raum und konformen Theorien auf dessen Rand formuliert hat [Ma98] und diese eher informell aufgestellte Vermutung in der Folge durch Arbeiten von Witten [Wi98], Gubser, Klebanov und Polyakov [GKP98] ein präzises und belastbares Fundament erhalten hat, ist eine Fülle von Arbeiten zur *AdS-CFT-Korrespondenz* entstanden. Das rege Interesse entspringt der Faszination, die von der Verbindung verschiedener Klassen von Theorien ausgeübt wird, etwa der Existenz einer Korrespondenz zwischen AdS-Stringtheorien und konformen Eichtheorien. Eine solche Eichtheorie-String-Dualität wurde schon seit langer Zeit vermutet und erhält durch die AdS-CFT-Korrespondenz neue Evidenz [K199].

Maldacenas ursprünglicher Formulierung lag gerade diese Dualität zugrunde, dort wurden konforme Super-Yang-Mills-Theorien mit Eichgruppe $SU(N)$ und Kopplungskonstante g_{YM} verbunden mit Stringtheorien auf dem Produkt eines Anti-de-Sitter-Raumes mit einem kompakten Raum. Die charakteristischen Größen beider Seiten bestimmen sich dabei gegenseitig, so ist der AdS-Krümmungsradius eine positive Potenz der t'Hooft'schen Kopplungskonstante $g_{YM}^2 N$ und die Kopplungskonstante der Stringtheorie proportional zu g_{YM}^2 . Im Limes großer N , aber fester t'Hooft'scher Kopplungskonstante ist die Stringtheorie schwach gekoppelt, in diesem Fall nehmen Witten, Gubser et al. klassische Supergravitation als perturbative Approximation der AdS-Stringtheorie.

Die ursprünglich aus der Stringtheorie motivierte Korrespondenz konnte bald rigoros im Rahmen der Quantenfeldtheorie etabliert werden, indem Identifikationen zwischen Objekten der Quantenfeldtheorien beiderseits angegeben wurden [Be00] [Re00]. Hierdurch wurde aber keine Antwort auf die Frage gegeben, welche Struktur für einen möglichen Zusammenhang zwischen Stringtheorien und strengen Axiomen genügenden Quantenfeldtheorien verantwortlich sein könnte. Dass ein solcher Zusammenhang tatsächlich besteht, erhält Plausibilität durch die vielen quantenfeldtheoretischen Überprüfungen, denen die via Korrespondenz induzierten konformen Theorien im Laufe der letzten Jahre unterzogen wurden, etwa das Erfüllen von Ward-Identitäten [F99A] [F99B] oder die Existenz einer Operatorproduktentwicklung mit bemerkenswerten Eigenschaften [HPR00] [HMR00].

In dieser Arbeit werden zwei explizite Modelle einer klassischen, skalaren AdS-Feldtheorie untersucht, welche man sich als einfache Modellierung der Witten'schen klassischen Supergravitation vorstellen kann. Die Fragestellung dabei ist die Interpretierbarkeit dieser stringtheore-

tisch motivierten Korrespondenzvorschrift im Rahmen der axiomatischen, euklidischen Quantenfeldtheorie nach Osterwalder und Schrader. Wir werden sehen, dass eine solche Interpretation nur dann möglich ist, wenn die klassische AdS-Feldtheorie als erste Ordnung einer tatsächlichen AdS-Feldtheorie verstanden wird, die zusätzliche String- oder Quantenkorrekturen enthält. Insbesondere ist eine Operatorproduktentwicklung bzw. Partialwellenentwicklung konsistent und in einem Fall sogar geschlossen durchführbar. Das von uns untersuchte Objekt ist dabei stets die Vierpunktfunktion des konformen Feldes, da diese als erste in ihrer Form nicht durch konforme Kovarianz festgelegt ist und somit nichttriviale Aussagen im Zusammenhang mit Wechselwirkung erlaubt.

Die kürzlich erschienene Arbeit [DR02] klärt, warum eine solche Interpretierbarkeit zu erwarten ist: Bei einer bestimmten Wahl von Randbedingungen lässt sich die stringtheoretisch motivierte Korrespondenzvorschrift mit der quantenfeldtheoretischen identifizieren.

0.1 Aufbau der Arbeit

Wir werden im ersten Teil der Arbeit das Fundament für die Analyse einer Vierpunktfunktion schaffen: Kapitel 1 gibt einen Überblick über das Wightman'sche Axiomensystem, Kapitel 2 stellt den Übergang ins Euklidische dar und führt die Osterwalder-Schrader-Axiome auf. In Kapitel 3 befassen wir uns mit euklidischer, konformer Quantenfeldtheorie und leiten Spezialfälle der Positivitätsbedingungen aus Kapitel 2 her. Kapitel 4 schließt den ersten Teil mit einer ausführlichen Beschreibung der konformen Partialwellenentwicklung ab, in der Positivitätskriterien sowie praktikable Verfahren angegeben werden.

Im zweiten Teil geben wir zunächst in Kapitel 5 eine kurze Einführung in den Anti-de-Sitter-Raum und betrachten anschließend die klassische Lösungstheorie eines skalaren Feldes. Sie ermöglicht uns in Kapitel 6 das Aufstellen der AdS-Modelle φ^4 und φ^3 im Rahmen der AdS-CFT-Korrespondenz, die sodann mit den Methoden aus dem ersten Teil untersucht werden. In Kapitel 7 fassen wir die Ergebnisse zusammen und benennen offen gebliebene und untersuchenswerte Fragen.

Im Anhang finden sich einige spezielle Funktionen, die für die Untersuchung expliziter Modelle unerlässlich sind. Außerdem diskutieren wir ausführlich die Potenzreihenentwicklung einer recht allgemeinen konform kovarianten Funktion E vierer Punkte. Schließlich geben wir den Maple-Quelltext einer Implementierung der Partialwellenentwicklung an und untersuchen damit die beiden Modelle.

Teil I

Quantenfeldtheoretische
Grundlagen

Kapitel 1

Quantenfeldtheorie im Wightman-Rahmen

1.1 Motivation

Die Anfänge der Quantenfeldtheorie gehen zurück bis zu den Anfängen der Quantentheorie selbst. Schon früh wurde klar, dass es nicht nur galt, mit der Quantenmechanik eine neue physikalische Theorie für Punktteilchen aufzustellen, sondern dass auch das klassische Konzept der Felder einer „Quantisierung“ unterzogen werden musste.

Zur Feldquantisierung wurden verschiedene Verfahren entwickelt. Im Falle freier Felder, d. h. Felder ohne Wechselwirkung, liefern diese Verfahren eine mathematisch wohldefinierte Struktur, die physikalisch sinnvoll interpretierbar ist. Sobald aber Wechselwirkungen als „Störungen“ mit in die Feldquantisierung einbezogen werden, führt die naive Anwendung der Quantisierungsverfahren zu mathematisch undefinierten Objekten in der Theorie. Um dieses früh erkannte Problem zu lösen, wurden Quantisierungsverfahren um Renormierungsvorschriften erweitert. Im Falle der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes gelangt man so zu der Quantenelektrodynamik, die experimentell überprüfbare Aussagen in Form von Störungsreihen macht. Berücksichtigt man nur die untersten Ordnungen, so ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment hervorragend. Allerdings sind die Konvergenzeigenschaften der Störungsreihen unbekannt. Die Quantenelektrodynamik ist somit eine Theorie hoher physikalischer Aussagekraft und Präzision, deren mathematische Grundlagen aber im starken Gegensatz dazu fragwürdig sind.

Um sich bei Betrachtungen zur Quantenfeldtheorie von konkreten Modellen mit solch fragwürdigem Zustandekommen zu lösen, wurden verschiedene axiomatische Zugänge zur Quantenfeldtheorie geschaffen, die die fundamentalen Eigenschaften von Quantenfeldern abstrahieren. Diese Eigenschaften ergeben sich aus physikalisch sinnvollen Forderungen, den Beobachtungen, die man an Modellen machen konnte, aber auch aus einigen mathematischen Notwendigkeiten. Sie beschreiben das Mindeste, was man – mit etwas Optimismus – von vernünftigen Modellen der Quantenfeldtheorie erwarten darf, nachdem all die verwickelten Prozeduren der Quantisierung und Renormierung durchgeführt wurden.

Im mathematisch präzisen Rahmen, den diese physikalisch motivierten Axiomensysteme setzen, lassen sich mit mathematisch unzweifelhaften Methoden Einsichten in die allgemeine

Natur der Quantenfelder gewinnen. Das System der *Wightman-Axiome*, welches im nächsten Abschnitt eingeführt wird, erlaubt z. B. den Beweis des PCT-Theorems und des Spin-Statistik-Theorems.

1.2 Wightman-Axiome

Im Folgenden werden die Wightman-Axiome für ein skalares, neutrales, hermitisches Quantenfeld A angegeben, wie sie z. B. in [Jo65] oder [SW64] zu finden sind. Die Wightman-Axiome beschreiben relativistische Quantenfelder, der zugrunde liegende Raum ist also der Minkowski-Raum. Dessen Dimension d muss nicht unbedingt 4 sein, entscheidend ist, dass es genau eine Zeitrichtung gibt.

In der Quantenmechanik ordnet man observablen Größen hermitische Operatoren auf einem Hilbertraum der Zustände zu. Beim Übergang zur Quantenfeldtheorie erwartet man daher ein ganzes Feld solcher Operatoren, d. h. ein Feld A sollte eine Abbildung des Minkowski-Raumes \mathbb{R}^d in die Menge der Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} sein, $x \mapsto A(x)$. Allerdings erweist sich schon das freie Feld als singulärer, als es diese naive Vorstellung eines punkrtartig lokalisierten Operatorfeldes erlaubt. Erst nach Verschmieren mit Testfunktionen ergeben sich Operatoren. Diese Überlegungen halten wir in zwei Axiomen fest:

A1 Zustände werden durch Einheitsstrahlen in einem separablen Hilbertraum \mathcal{H} beschrieben.

A2 Das Feld A wird durch eine operatorwertige Distribution auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ beschrieben. Genauer:

- A ordnet jedem $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ einen Operator $A(f)$ zu, der auf einem (von f unabhängigen) dichten Unterraum \mathcal{D} von \mathcal{H} definiert ist.
- Es gilt die Hermitizitätsbedingung

$$\langle \phi, A(f)\psi \rangle = \langle A(\bar{f})\phi, \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}.$$

- Die Anwendung von $A(f)$ führt nicht aus \mathcal{D} heraus, d. h. $A(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$.
- Für $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ ist $f \mapsto \langle \phi, A(f)\psi \rangle$ eine temperierte Distribution.

Unserem Anliegen, Axiome einer relativistischen Quantenfeldtheorie definieren zu wollen, tragen wir Rechnung, indem wir eine Darstellung U der Poincaré-Gruppe auf dem Hilbertraum fordern. Mit dieser Darstellung können wir es dann anschließend als Axiom formulieren, dass A das korrekte Transformationsverhalten eines Skalars besitzt.

Die Darstellung sollte noch zwei zusätzliche, physikalisch motivierte Eigenschaften haben. Erstens soll die Theorie keine Zustände negativer Energie oder imaginärer Masse enthalten. Dieses lässt sich mithilfe der Erzeugenden der Translationen P_μ (d. h. $U(a) = e^{ia^\mu P_\mu}$) formulieren, deren gemeinsames Spektrum muss in $p^0 \geq 0, m^2 = p^\mu p_\mu \geq 0$ enthalten sein. Zweitens sollte es genau einen Zustand geben, der translationsinvariant ist, nämlich das Vakuum.

A3 Es gibt eine stetige unitäre Darstellung U der Poincaré-Gruppe \mathcal{P}_+^\uparrow auf \mathcal{H} , die \mathcal{D} invariant lässt, $U(g)\mathcal{D} = \mathcal{D} \forall g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$.

Das Spektrum des Erzeugenden der Translationen liegt im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel \bar{V}_+ , $V_+ := \{p \mid p^0 > 0, p^\mu p_\mu > 0\}$.

Es gibt einen bis auf eine Phase eindeutig bestimmten U -invarianten Zustand Ω , das Vakuum.

A4 A hat unter \mathcal{P}_+^\uparrow das Transformationsverhalten eines Skalars,

$$U(g)A(f)U(g)^{-1} = A\left((g^{-1})^* f\right) \quad \forall g \in \mathcal{P}_+^\uparrow, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Hier ist g^* wie üblich die induzierte Wirkung von \mathcal{P}_+^\uparrow auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$g^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad (g^* f)(x) := f(gx).$$

Nun muss noch das Konzept der *Lokalität* berücksichtigt werden, das sicherstellt, dass raumartig getrennte Messungen des Feldes sich nicht beeinflussen:

A5 Für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit raumartig getrennten Trägern gilt

$$[A(f), A(g)] = 0 \quad (\text{auf } \mathcal{D}).$$

Schließlich verlangen wir, dass es im folgenden Sinn kein von A unabhängiges Feld in der Theorie geben soll:

A6 Das Vakuum Ω ist bezüglich Polynomen in A zyklisch, d. h. die Menge

$$\left\{ P(A(f_1), A(f_2), \dots) \mid P \text{ Polynom}, f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \right\} \subset \mathcal{H}$$

ist dicht in \mathcal{H} .

1.3 Wightman-Distributionen

Die Wightman-Axiome verwenden die operatorwertige Distribution A , den Hilbertraum \mathcal{H} mit dem Vakuumvektor Ω sowie die Darstellung U als die grundlegenden Objekte der Theorie. Eine äquivalente und in manchen Situationen geeignetere Beschreibung mit anderen Objekten, den *Wightman-Distributionen*, ist möglich. Sie werden als *Vakuumerwartungswerte* von Produkten des Feldes A definiert,

$$\mathcal{W}_n(f_1, \dots, f_n) := \langle \Omega, A(f_1) \cdots A(f_n) \Omega \rangle, \quad (1.1)$$

und oftmals *n-Punkt-Funktionen* genannt. Wegen A2 ist \mathcal{W}_n für jedes f_i separat eine temperierte Distribution, das Nuklear-Theorem erlaubt daher eine eindeutige Fortsetzung zu einer Distribution $\mathcal{W}_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd})$.

Die Wightman-Axiome übersetzen sich unmittelbar in Eigenschaften der Wightman-Distributionen [Jo65] [SW64]:

W1 (Temperiertheit)

$$\mathcal{W}_0 = 1, \quad \mathcal{W}_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd})$$

W2 (Poincaré-Invarianz)

$$\mathcal{W}_n \circ g^* = \mathcal{W}_n \quad \forall g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$$

Für die folgenden Eigenschaften benötigen wir die Involution

$$f^*(x_1, \dots, x_n) := \overline{f(x_n, \dots, x_1)}$$

auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{nd})$.

W3 (Hermitizität)

$$\mathcal{W}_n(f^*) = \overline{\mathcal{W}_n(f)} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{nd})$$

W4 (Lokalität) *Sind die Punkte x_i und x_{i+1} raumartig voneinander getrennt, so gilt (im Sinne von Distributionen)*

$$\mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n).$$

W5 (Positivität) *Für alle endlichen Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{nd})$ ¹ gilt*

$$\sum_{i,j} \mathcal{W}_{i+j}(f_i^* \otimes f_j) \geq 0.$$

Die Eindeutigkeit des Vakuums wird durch folgende Eigenschaft gesichert, die die physikalische Bedeutung hat, dass zwischen raumartig weit entfernten Systemen keine Wechselwirkung stattfindet.

W6 (Cluster-Eigenschaft) *Für alle raumartigen Translationen $a \neq 0$ gilt*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{W}_{n+m}(f_n \otimes (\lambda a)^* f_m) = \mathcal{W}_n(f_n) \mathcal{W}_m(f_m) \quad \forall f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{jd}).$$

Schließlich müssen wir noch die Spektrumsbedingung formulieren. Wegen der Translationsinvarianz hängen Wightman-Distributionen (in der formalen Sprechweise) nur von Differenzen der Punkte x_i ab, lassen sich also durch Distributionen $W_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd})$ gemäß

$$\mathcal{W}_{n+1}(x_0, \dots, x_n) =: W_n(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1})$$

ausdrücken. Die Fouriertransformierten der W_n sind wieder in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd})$ und erfüllen

W7 (Spektrumsbedingung)

$$\text{supp } \widetilde{W}_n \subset \overline{V}_+^n.$$

Es lässt sich zeigen, dass die Axiome A1–A6 zu den Eigenschaften W1–W7 äquivalent sind, aus den Vakuumerwartungswerten \mathcal{W}_n lassen sich also $(A, \mathcal{H}, \Omega, U)$ rekonstruieren [Jo65] [SW64]. W1–W7 können daher als ein Axiomensystem für Vakuumerwartungswerte betrachtet werden.

¹ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^0) \simeq \mathbb{C}$

1.4 Trunkierte Wightman-Distributionen

Ein nützliches Konzept ist das der *trunkierten Vakuumerwartungswerte* \mathcal{W}_n^T [Ha58] [Jo65] [Ha96], die (im Sinne von Distributionen) rekursiv über

$$\mathcal{W}_0^T := 0, \quad \mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_n) =: \sum_P \prod_{\alpha \in P} \mathcal{W}_{|\alpha|}^T(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{|\alpha|}})$$

definiert werden. Die Summe erstreckt sich dabei über alle Partitionen $P = \{\alpha^{(i)}\}$ von $\{1, \dots, n\}$, wobei in den Teilmengen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{|\alpha|})$ die natürliche Reihenfolge beibehalten wird. Nach dem Nukleartheorem sind die trunkierten Wightman-Distributionen ebenfalls temperierte Distributionen.

Nehmen wir jetzt und im Folgenden $\mathcal{W}_1 = 0$ an, was immer durch Abziehen des Vakuumerwartungswertes vom Feld A erreicht werden kann, lauten die ersten Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{W}_1^T = 0, & \mathcal{W}_2 &= \mathcal{W}_2^T, & \mathcal{W}_3 &= \mathcal{W}_3^T, \\ \mathcal{W}_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \mathcal{W}_4^T(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mathcal{W}_2(x_1, x_2)\mathcal{W}_2(x_3, x_4) \\ &\quad + \mathcal{W}_2(x_1, x_3)\mathcal{W}_2(x_2, x_4) + \mathcal{W}_2(x_1, x_4)\mathcal{W}_2(x_2, x_3). \end{aligned}$$

Die Betrachtung der trunkierten Wightman-Distributionen ist etwa im Zusammenhang mit Fragen der Wechselwirkung nützlich. Für ein (verallgemeinertes) freies Feld verschwinden nämlich alle trunkierten Wightman-Distributionen bis auf die Zweipunktfunktion. Umgekehrt darf nach dem folgenden Satz von Baumann [Ba75] bei einem Feld mit Wechselwirkung keine einzige gerade \mathcal{W}_n^T -Distribution verschwinden:

Satz 1.1 (Baumann) *Gilt $\mathcal{W}_n^T = 0$ für ein gerades $n > 2$, so ist das zugehörige Feld notwendig ein verallgemeinertes freies Feld, d. h. es muss $\mathcal{W}_m^T = 0 \forall m \neq 2$ gelten.*

1.5 Beispiele für Wightman-Felder

Bisher haben wir nur ein Axiomensystem für ein Quantenfeld A eingeführt und eine dazu äquivalente Beschreibung durch Vakuumerwartungswerte gefunden. Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt Felder gibt, die den Axiomen genügen.

Anhand der Axiome lassen sich die möglichen Zweipunktfunktionen skalarer Felder charakterisieren, sie lassen sich stets in der *Källen-Lehmann-Darstellung*

$$\mathcal{W}_2(x, y) = \int_0^\infty d\rho(m^2) \int d^d k \delta(k^2 - m^2) \Theta(k^0) e^{-ik(x-y)} \quad (1.2)$$

schreiben. $d\rho$ ist dabei ein positives, polynomial beschränktes Maß. Diese Darstellung ist eine Zerlegung in Propagatoren zur Masse m , so ergibt sich für $d\rho(m^2) = dm^2 (2\pi)^{-(d-1)} \delta(m^2 - M^2)$ die Zweipunktfunktion des freien Feldes mit Masse M .

Eine große und wohlverstandene Klasse von Wightman-Feldern bilden die *verallgemeinerten freien Felder*, die – wie im vorigen Abschnitt erwähnt – wegen des Verschwindens der höheren trunkierten n -Punkt-Funktionen alleine durch ihre Zweipunktfunktion festgelegt sind. Ist diese von der Form (1.2), so sind alle Wightman-Axiome erfüllt.

Skalare, masselose Felder, also solche mit $M = 0$ in obigen Formeln, sind notwendig freie Felder, denn es gilt [Po69]

Satz 1.2 (Jost–Schroer, Federbush–Johnson, Pohlmeyer) *Ein hermitisches, skalares Quantenfeld mit der Zweipunktfunktion der Masse 0 ist ein freies Feld.*

Solche Felder existieren nur in $d > 2$.

Die Konstruktion wechselwirkender Wightman-Felder, d. h. solcher mit nichttrivialer S -Matrix, erweist sich dagegen als außerordentlich schwierig. Erfolge gab es in zwei Dimensionen mit von unten beschränkten polynomialen Wechselwirkungen ($P(\varphi)_2$ -Modelle, etwa $\varphi^2 + \lambda\varphi^4$, $\lambda \geq 0$), in drei Dimensionen mit einem φ^4 -Modell, mit der Yukawa-Kopplung sowie mit integrierbaren Modellen.

1.6 Wightman-Funktionen

Ausgehend von den Wightman-Axiomen lassen sich einige interessante Aussagen gewinnen. Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit sind die folgenden Sätze wichtig [Jo65]:

Satz 1.3 *Wightman-Distributionen sind Randwerte eindeutiger, $L_+(\mathbb{C})$ -invarianter Wightman-Funktionen $\mathcal{W}_n(z_1, \dots, z_n)$, die im Gebiet*

$$\mathcal{G}_n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid (z_2 - z_1, \dots, z_n - z_{n-1}) \in \mathcal{T}'_{n-1}\}$$

holomorph sind. \mathcal{T}'_n ist dabei die erweiterte Vorwärtsröhre

$$\mathcal{T}'_n := \bigcup_{A \in L_+(\mathbb{C})} A\mathcal{T}^n, \quad \mathcal{T} := \{z \mid \text{Im } z \in V_+\}.$$

In den Beweis dieses Satzes geht wesentlich die Spektrumsbedingung ein, die Lokalitätseigenschaft wird dagegen nicht benötigt. Tatsächlich gilt der

Satz 1.4 *Erfüllen die Wightman-Distributionen alle Wightman-Axiome außer der Lokalität, so erfüllen sie genau dann auch die Lokalität, wenn die Wightman-Funktionen symmetrisch sind.*

Hieraus ergibt sich eine Vergrößerung des Holomorphiegebietes von Satz 1.3:

Korollar 1.5 *Die Wightman-Funktionen eines lokalen Feldes sind symmetrisch und holomorph im Gebiet*

$$\mathcal{G}_n^P := \{(z_{\pi_1}, \dots, z_{\pi_n}) \mid (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{G}_n, \pi \text{ Permutation}\}.$$

Kapitel 2

Euklidische Quantenfeldtheorie

2.1 Motivation

Den Wightman-Axiomen lag die Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie zugrunde, nämlich der Minkowski-Raum – „unsere Welt“. Aus mathematischer Sicht wären manche Dinge einfacher, wenn die Welt euklidisch wäre. In diesem Fall hätte man es mit einer definiten Metrik statt der indefiniten Lorentz-Metrik zu tun. Die Invarianzgruppe des Skalarproduktes wäre $SO(d)$ und somit im Gegensatz zur Lorentzgruppe kompakt. Konstruktive Verfahren der Quantenfeldtheorie wie Pfadintegrale und stochastische Zugänge lassen sich erst sinnvoll im euklidischen Rahmen formulieren.

Aus diesen Gründen war die Einsicht, dass Minkowski'sche und euklidische Quantenfeldtheorie – modulo einiger technischer Komplikationen – nur zwei Seiten einer Medaille sind, für die axiomatische und konstruktive Quantenfeldtheorie ein großer Fortschritt. In zwei Artikeln [OS73] [OS75] zeigten Osterwalder und Schrader, wie aus einem Modell der einen Seite eines der anderen Seite konstruiert werden kann. Der grundlegende Gedanke dabei ist, dass die Lorentz-Metrik definit wird, wenn man die Zeitkoordinate t in Richtung imaginärer Zeit fortsetzt, $t = -i\tau$. Diese Rotation $t \rightarrow \tau$ in der komplexen Zeitebene wird *Wick-Rotation* genannt. Sie muss mit der gebotenen Sorgfalt auf alle Wightman-Axiome angewandt werden, um daraus äquivalente Axiome für eine euklidische Quantenfeldtheorie herzuleiten.

2.2 Osterwalder-Schrader-Axiome

Die grundlegenden Objekte einer euklidischen Formulierung einer Quantenfeldtheorie sind die *euklidischen n -Punkt-Funktionen* oder *Schwinger-Funktionen* S_n . Sie entsprechen den „Wick-rotierten“ Wightman-Distributionen, d. h. sind deren analytische Fortsetzung für imaginäre Zeiten. Diese Fortsetzung ist sogar erstaunlich problemlos durchführbar: Aufgrund des Satzes 1.5 sind Wightman-Distributionen Randwerte in \mathcal{G}_n^P holomorph, eindeutiger und symmetrischer Funktionen. Wie man sich leicht überlegt, ist die Menge der *euklidischen Punkte*

$$\left\{ (z_1, \dots, z_n) \mid z_k = (-ix_k^d, \vec{x}_k), x_k \neq x_j \in \mathbb{R}^d \right\}^1$$

¹Für Punkte x des euklidischen Raumes wird die Konvention $x = (x^1, \dots, x^d) = (\vec{x}, x^d)$ gewählt.

in \mathcal{G}_n^P enthalten. Wir können also auf der Menge

$$\Omega_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_k \neq x_j \in \mathbb{R}^d \right\}$$

die Schwinger-Funktionen als analytische, symmetrische Funktionen gemäß

$$S_n(x_1, \dots, x_n) := \mathcal{W}_n \left((-ix_1^d, \vec{x}_1), \dots, (-ix_n^d, \vec{x}_n) \right)$$

definieren. Diese lassen sich als Distributionen auf der Menge der $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{nd})$ -Funktionen mit kompakten Trägern in Ω_n auffassen und zu temperierten Distributionen auf

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{nd}) := \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{nd}) \mid \partial_\alpha f(\mathbb{R}^{nd} \setminus \Omega_n) = 0 \text{ für alle Multiindizes } \alpha \right\}$$

erweitern.

Osterwalder und Schrader haben ein Axiomensystem – im Folgenden OS-Axiome genannt – für diese Schwinger-Funktionen aufgestellt, das äquivalent zum Axiomensystem für Wightman-Distributionen ist. Die durch analytische Fortsetzung erhaltenen Schwinger-Funktionen erfüllen also die OS-Axiome, und umgekehrt lassen sich aus Schwinger-Funktionen, die z. B. durch ein Modell einer euklidischen Quantenfeldtheorie gewonnen wurden und diesen Axiomen genügen, Wightman-Distributionen rekonstruieren mit all ihren Eigenschaften W1–W7, die wir von ihnen in der Minkowski'schen Welt verlangen.

Zur Formulierung der Axiome werden noch einige Definitionen benötigt. Auf dem Raum $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{nd})$ ist eine Involution gemäß

$$f^*(x_1, \dots, x_n) := \overline{f(\theta x_n, \dots, \theta x_1)}, \quad f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{nd})$$

definiert. θ ist die *euklidische Zeitspiegelung*,

$$\theta x := (\vec{x}, -x^d), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Sie kommt dadurch ins Spiel, dass beim Übergang von \mathcal{W}_n zu S_n die komplexe Konjugation euklidischer Punkte $z = (ix^d, \vec{x})$ einer Vorzeichenumkehr von x^d entspricht.

θ zeichnet offenbar eine Richtung aus. Wegen der Invarianz der Schwinger-Funktionen unter der euklidischen Gruppe (Axiom OS2) kann aber jede beliebige Richtung in \mathbb{R}^d als Zeitrichtung genommen werden.

In $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{nd})$ enthalten ist

$$\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{nd}) := \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{nd}) \mid \partial_\alpha f = 0 \text{ außer wenn } 0 < x_1^d < \dots < x_n^d \right\}.$$

Die Menge der Folgen $\underline{f} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_n \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{nd})$ ², für die nur endlich viele Folgenglieder von null verschieden sind, bezeichnen wir mit $\underline{\mathcal{S}}_+$.

Nun können die Osterwalder-Schrader-Axiome angegeben werden [OS73] [OS75]:

OS1 (Temperiertheit)

$$S_0 = 1, \quad S_n \in \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^{nd}), \quad S_n^- \in \check{\mathcal{S}}'_+(\mathbb{R}_+^{nd})$$

²wieder $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^0) \simeq \mathbb{C}$

Die letzte Eigenschaft macht eine Aussage über das Verhalten der Schwinger-Funktionen S_n^- in den Differenzvariablen $x_{i+1} - x_i$, zur genauen Definition siehe [OS75]. Diese Eigenschaft fehlte in [OS73], dort wurde ein fehlerhaftes Lemma benutzt.

OS2 (Euklidische Invarianz)

$$S_n \circ g^* = S_n \quad \forall g \in E_+(d) := SO(d) \ltimes \mathbb{R}^d$$

OS3 (Hermitizität)

$$S_n(f^*) = \overline{S_n(f)} \quad \forall f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{nd})$$

OS4 (Symmetrie)

$$S_n \circ \pi^* = S_n \quad \forall \text{ Permutationen } \pi$$

OS5 (Positivität)

$$\sum_{i,j} S_{i+j}(f_i^* \otimes f_j) \geq 0 \quad \forall \underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}_+^3$$

Bemerkung. Aus euklidischer Invarianz und Symmetrie folgt, dass die Positivitätsbedingung äquivalent für alle endlichen Folgen von Testfunktionen formuliert werden kann, die mit allen Ableitungen bei koinzidierenden Punkten oder Punkten mit nichtpositiver d -Komponente verschwinden [LM75] [Ma75].

OS6 (Cluster-Eigenschaft)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_{n+m}(f_n^* \otimes (\lambda a)^* f_m) = S_n(f_n) S_m(f_m) \quad \forall a \in \mathbb{R}^d, a \neq 0, f_j \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{jd})$$

2.3 Zweipunktfunktion

Für die Zweipunktfunktion S_2 gilt analog zur Källen-Lehmann-Darstellung von \mathcal{W}_2 die Darstellung

$$S_2(x, y) = \int_0^\infty d\rho(m^2) \int d^d k \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2}, \quad x \neq y \quad (2.1)$$

mit einem polynomial beschränkten Maß $d\rho$ ([Si79], bei $d = 2$ muss noch der Fall eines bei $k = 0$ divergenten Integrals ausgeschlossen werden). Bei koinzidierenden Punkten gibt es eine Unbestimmtheit, die aber wegen der Trägereigenschaft der in den OS-Axiomen involvierten Testfunktionen keine Rolle spielt.

³Es gilt $f_i^* \otimes f_j \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{(i+j)d})$.

2.4 Erzeugende Funktionale

Für die Konstruktion von n -Punkt-Funktionen ergibt sich durch die Symmetrie der Schwinger-Funktionen ein großer Vorteil des euklidischen Zugangs gegenüber dem Wightman'schen. Aus den Schwinger-Funktionen kann nämlich das *erzeugende Funktional*

$$S(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(f^{\otimes n})$$

gebildet werden. Durch Funktionalableitung lassen sich aus ihm die symmetrischen Anteile der Schwinger-Funktionen zurückgewinnen – also wegen ihrer Symmetrie die Schwinger-Funktionen selbst. Bei der Bildung des Funktionals ist zu beachten, dass auf der rechten Seite $f^{\otimes n}$ sicherlich nicht im Definitionsbereich $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{nd})$ von S_n liegt. Die S_n müssen daher zunächst zu Distributionen aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd})$ erweitert werden, was stets möglich ist. Bei ihrer Rückgewinnung aus $S(f)$ und der analytischen Fortsetzung zu \mathcal{W}_n kommt es aber nur auf das Verhalten bei nicht koinzidierenden Punkten an, so dass sich die Freiheit in der Fortsetzung, mit der unter Umständen eine Symmetriebrechung in $S(f)$ einhergeht, nicht bemerkbar macht.

In der konstruktiven Quantenfeldtheorie gibt es natürliche Kandidaten für solche erzeugenden Funktionale $S(f)$. Jede Vorschrift etwa, die ein unter der euklidischen Gruppe invariantes Funktional liefert, führt automatisch zu n -Punkt-Funktionen, die dem Invarianz-Axiom OS2 genügen. Fröhlich hat Bedingungen an Funktionale der Form

$$S(f) = \int e^{\phi(f)} d\mu(\phi) \tag{2.2}$$

mit einem Maß $d\mu$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ formuliert, so dass die resultierenden Schwinger-Funktionen, die in diesem Fall die Momente

$$S_n(f_1, \dots, f_n) = \int \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) d\mu(\phi)$$

des Maßes sind, die OS-Axiome erfüllen, siehe [Si79] und [GJ87] (man beachte dort das zusätzliche i). Die OS-Positivität etwa wird durch die Eigenschaft gesichert, dass für alle endlichen Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_n \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^d)$, f_n imaginärwertig, die hermitesche Matrix

$$m_{jk} := S(f_j^* + f_k)$$

positiv semidefinit ist.

Ist ein Funktional $S(f)$ mit OS-Eigenschaften gegeben, so können daraus weitere gewonnen werden, indem Funktionen $h(S(f))$ von $S(f)$ gebildet werden, etwa $S(f)^2$. Solche Funktionale erfüllen offensichtlich erneut die Forderung der euklidischen Invarianz. Lässt sich die Funktion h (global) in eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten entwickeln, so bleibt auch die Positivität erhalten, d. h. die Matrix

$$h(m_{jk}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}}{n!} S(f_j^* + f_k)^n$$

ist positiv semidefinit. Der Grund hierfür ist der interessante

Satz 2.1 (Schur) *Das komponentenweise Produkt $(a_{jk}b_{jk})_{jk}$ positiv semidefiniter Matrizen a, b ist positiv semidefinit.*

Der Beweis findet sich z. B. in [GW64, S. 257] oder [GJ87, S. 101]. Damit ist die Matrix $h(m_{jk})$ eine Summe positiv semidefiniter Matrizen mit positiven Vorfaktoren, also selbst positiv semidefinit.

2.5 Trunkierte Schwinger-Funktionen

Die Konstruktion der trunkierten Wightman-Distributionen lässt sich natürlich unmittelbar auf Schwinger-Funktionen übertragen,

$$S_0^T := 0, \quad S_n(x_1, \dots, x_n) =: \sum_P \prod_{\alpha \in P} S_{|\alpha|}^T(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{|\alpha|}}). \quad (2.3)$$

Das erzeugende Funktional der trunkierten Schwinger-Funktionen

$$S^T(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n^T(f^{\otimes n})$$

steht in einfachem Zusammenhang mit $S(f)$, es gilt nämlich der

Satz 2.2 (Linked Cluster Theorem)

$$S^T(f) = \ln S(f). \quad (2.4)$$

Beweis. Mit etwas Kombinatorik erhält man aus (2.3)

$$S_n(f^{\otimes n}) = \sum_P \prod_{\alpha \in P} S_{|\alpha|}^T(f^{\otimes |\alpha|}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \frac{1}{m!} \binom{n}{k_1 \dots k_m} \prod_{i=1}^m S_{k_i}^T(f^{\otimes k_i}).$$

m zählt die Anzahl der Teilmengen in der Partition, k_i die Anzahl der Elemente in Teilmenge i . Wegen der Symmetrie des Arguments von S_j^T ergeben alle Partitionen, die in Teilmengen der Größen k_1, \dots, k_m aufteilen, denselben Beitrag, die Anzahl dieser Partitionen ist aber gerade durch den Multinomialkoeffizienten gegeben. Da die Klassen der Partitionen mit gleichem Beitrag in der k_i -Summe aber $m!$ -mal aufsummiert werden, muss noch durch diesen Faktor geteilt werden.

Wir erhalten damit die gewünschte Beziehung

$$\begin{aligned} e^{S^T(f)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S_k^T(f^{\otimes k}) \right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \dots k_m!} \prod_{i=1}^m S_{k_i}^T(f^{\otimes k_i}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1 \dots k_m} \prod_{i=1}^m S_{k_i}^T(f^{\otimes k_i}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(f^{\otimes n}) = S(f). \end{aligned}$$

□

2.6 Verallgemeinerte freie Felder

Wie in der Wightman'schen hat man auch in der euklidischen Quantenfeldtheorie den Begriff des verallgemeinerten freien Feldes, welches alleine durch seine Zweipunktfunktion $S_2^T = S_2$ bestimmt wird, alle anderen trunkierten n -Punkt-Funktionen verschwinden. Die erzeugenden Funktionale lauten somit

$$S^T(f) = \frac{1}{2}S_2(f \otimes f), \quad S(f) = \exp\left(\frac{1}{2}S_2(f \otimes f)\right).$$

Die OS-Axiome sind genau dann erfüllt, wenn die Zweipunktfunktion die Form (2.1) hat.

2.7 Positivität der Vierpunktfunktion

Der Positivitätsnachweis in einem konkreten Modell ist schwer zu führen. In gewissen Fällen kann man die Positivität gemäß Abschnitt 2.4 aus Eigenschaften des erzeugenden Funktionals ableiten. Lässt die Konstruktion des Modells aber keine solchen Nachweistechniken zu, bleibt im Allgemeinen nur die Möglichkeit, sich Schritt für Schritt der vollen Positivität OS5 anzunähern, d. h. ausgehend von einfachen Testfolgen $\underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}_+$ nach und nach komplexere Testfolgen zu betrachten.

Für den späteren Gebrauch soll hier eine einfache notwendige Positivitätsbedingung hergeleitet werden. Dazu betrachten wir die vergleichsweise einfache Testfolge

$$\underline{f} = (\lambda, 0, h, 0, \dots) \in \underline{\mathcal{S}}_+.$$

Die resultierende Positivitätsbedingung

$$\bar{\lambda}\lambda + \bar{\lambda}S_2(h) + S_2(h^*)\lambda + S_4(h^* \otimes h) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, h \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{2d}) \quad (2.5)$$

prüft alleine die Zwei- und Vierpunktfunktion. Durch geeignete Wahl lässt sich λ eliminieren, eine quadratische Ergänzung liefert nämlich

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{\lambda}\lambda + \bar{\lambda}S_2(h) + S_2(h^*)\lambda + S_4(h^* \otimes h) \\ &= \overline{(\lambda + S_2(h))}(\lambda + S_2(h)) - S_2(h^*)S_2(h) + S_4(h^* \otimes h) \\ &= |\lambda + S_2(h)|^2 - S_2(h^*)S_2(h) + S_4(h^* \otimes h). \end{aligned}$$

Bei gegebenem h wird diese Ungleichung am schärfsten, wenn mit $\lambda = -S_2(h)$ der Betrag verschwindet, d. h. (2.5) ist genau dann erfüllt, wenn

$$S_4(h^* \otimes h) - S_2(h^*)S_2(h) = G(h^* \otimes h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{2d}) \quad (2.6)$$

gilt, wobei G die Vierpunktfunktion abzüglich des „12–34“-Beitrages ist,

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) - S_2(x_1, x_2)S_2(x_3, x_4) \\ &= S_4^T(x_1, x_2, x_3, x_4) + S_2(x_1, x_3)S_2(x_2, x_4) + S_2(x_1, x_4)S_2(x_2, x_3), \end{aligned} \quad (2.7)$$

und wegen der Hermitizität von S_2 und S_4 ebenfalls die Hermitizitätseigenschaft einer euklidischen Vierpunktfunktion hat. (2.6) ist eine praktikable notwendige Positivitätsbedingung, die in konkreten Modellen oftmals schon erste Positivitätsaussagen liefern kann.

Statt mit Testfunktionen $h \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{2d})$ kann die Bedingung (2.6) auch äquivalent mit Hilfe von Punkten des \mathbb{R}^d formuliert werden. Zur formalen Herleitung stellt man sich vor, dass man mit h eine Summe von δ -Funktionen

$$h(x, y) \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \delta(x - p_i) \delta(y - q_i), \quad a_i \in \mathbb{C}, p_i, q_i \in \mathbb{R}^d, 0 < p_i^d < q_i^d \quad (2.8)$$

approximiert. Im Limes wird aus (2.6) die Ungleichung

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{a}_i a_j G(\theta q_i, \theta p_i, p_j, q_j) \geq 0.$$

Definieren wir nun die Matrix

$$m_{ij} := G(\theta q_i, \theta p_i, p_j, q_j), \quad (2.9)$$

die wegen der Hermitizität von G ebenfalls hermitisch ist, so besagt diese Ungleichung nichts anderes, als dass m notwendig positiv semidefinit sein muss – die Ungleichung soll ja für alle Wahlen von a_i gelten.

Tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend, es gilt also der

Satz 2.3 *Die Positivität (2.6) der Vierpunktfunktion ist genau dann erfüllt, wenn für alle endlichen Folgen $(p_i, q_i)_{i=1 \dots n}$, $p_i, q_i \in \mathbb{R}^d$, $0 < p_i^d < q_i^d$ die Matrix (2.9) positiv semidefinit ist.*

Bemerkung. Die Matrix ist durch (2.9) wohldefiniert, da Schwinger-Distributionen bei nicht koinzidierenden Punkten – wie es hier der Fall ist – gewöhnliche (analytische) Funktionen sind.

Bemerkung. Angesichts der Bemerkung zu OS5 kann die Bedingung $0 < p_i^d < q_i^d$ zu $p_i \neq q_i$, $p_i^d, q_i^d > 0$ abgeschwächt werden.

Beweis. \Rightarrow : Diese Richtung wurde soeben bei der Motivation des Satzes gezeigt. Die Approximation der δ -Summe (2.8) ist durchführbar, denn jeder δ -Faktor kann durch eine δ -Folge mit kompakten Trägern so ersetzt werden, dass die resultierenden h -Folgeglieder in $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{2d})$ liegen. Hierzu wird natürlich $0 < p_i^d < q_i^d$ benötigt. Da G auf den Trägern der h -Folgeglieder eine analytische Funktion und somit stetig ist, kann der Limes ausgeführt werden.

\Leftarrow : Die Idee für Beweise dieser Art ist einfach und findet sich z. B. in [GW64], wo ähnliche Positivitätsfragen diskutiert werden. Wir zeigen (2.6) zunächst für h aus dem in $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{2d})$ dichten Unterraum $\mathcal{S}_{+c}(\mathbb{R}^{2d})$ der Funktionen $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{2d})$ mit kompakten Trägern in $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1^d < x_2^d\}$.

Sei also $h \in \mathcal{S}_{+c}(\mathbb{R}^{2d})$, dann hat $h^* \times h$ einen in $\{x_1^d < x_2^d < 0 < x_3^d < x_4^d\}$ enthaltenen kompakten Träger K . Auf K ist G eine analytische Funktion, also insbesondere beschränkt und stetig. Da letzteres auch für h gilt, kann $G(h^* \times h)$ als ein Riemann-Integral über K und somit als Grenzwert von Riemann-Summen aufgefasst werden. Eine Zerlegung

$$\text{supp } h = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

induziert eine Zerlegung $\theta A_i \times A_j$ ⁴ von K , die zugehörige Riemann-Summe ist nach Voraussetzung nichtnegativ:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n G(\theta q_i, \theta p_i, p_j, q_j) \overline{h(p_i, q_i)} h(p_j, q_j) \text{vol}(A_i) \text{vol}(A_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \overline{\text{vol}(A_i) h(p_i, q_i)} \text{vol}(A_j) h(p_j, q_j) m_{ij} \geq 0 \quad \text{mit } (p_i, q_i) \in A_i. \end{aligned}$$

Dies gilt für jede solche Zerlegung und somit auch für das Riemann-Integral als Grenzwert: $G(h^* \times h) \geq 0$.

Da G ein stetiges Funktional ist und $\mathcal{S}_{+c}(\mathbb{R}^{2d})$ dicht in $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{2d})$ liegt, folgt die Behauptung. \square

⁴ $\theta A_i := \{(x_1, x_2) \mid (\theta x_2, \theta x_1) \in A_i\}$

Kapitel 3

Konforme Quantenfeldtheorie

3.1 Motivation

Grundlegend für die Wightman-Axiome ist die Forderung nach einer relativistischen Theorie. Eine solche Theorie respektiert die Poincaré-Invarianz des Minkowski-Raumes und somit die Struktur, die die Punktmenge \mathbb{R}^d durch die Lorentz-Metrik bekommt. Diese Struktur hat kausale und geometrische Aspekte: Mithilfe der Metrik können wir einen Vektor in die kausalen Klassen *zeitartig*, *lichtartig*, *raumartig* einteilen, wir können aber auch seine Länge bestimmen. Die kausale Struktur kann als fundamentaler angesehen werden. Bei masselosen Feldern etwa wird der Längenbegriff irrelevant, die kausale Struktur bleibt dagegen erhalten. Masselose Felder treten z. B. als Idealisierungen von Feldern im Hochenergie-Limes auf, dort spielen Ruhemassen eine untergeordnete Rolle.

Die Gruppe der Koordinatentransformationen, die zwar die kausale Struktur, aber nicht die Metrik selbst invariant lassen, ist die *konforme Gruppe* [Ha96]. Sie enthält natürlich die Poincaré-Gruppe, ein konformes Quantenfeld ist also insbesondere ein relativistisches. Wegen der größeren Symmetriegruppe – vor allem in zwei Dimensionen – ist im Rahmen der konformen Quantenfeldtheorie eine Vielfalt an Modellen und Aussagen über deren Struktur möglich. Physikalische Relevanz neben der solcher *toy models* ist etwa durch den bereits erwähnten Hochenergie-Limes gegeben.

3.2 Konforme Symmetrie im Minkowski-Raum

Die Invarianz der kausalen Struktur können wir als Forderung formulieren, dass die Form der Lichtkegelgleichung $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$ unter der Wirkung der konformen Gruppe nicht geändert werden soll. Hieraus lässt sich folgern, dass eine konforme Transformation $x \mapsto x'$ den metrischen Tensor bis auf einen ortsabhängigen Skalenfaktor invariant lässt,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)^2 g_{\mu\nu}(x), \quad (3.1)$$

was auch als Winkeltreue der Transformation gelesen werden kann. Transformationen mit dieser Eigenschaft sind z. B. Poincaré-Transformationen mit $\Lambda(x) = 1$, aber auch *Dilationen*

$$x' = \lambda x, \quad \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda(x) = \lambda^{-1}$$

und *spezielle konforme Transformationen*

$$x' = \frac{x^\mu - (x, x)c^\mu}{1 - 2(x, c) + (x, x)(c, c)} = (R \circ t_{-c} \circ R)x, \quad c \in \mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow \Lambda(x) = 1 - 2(x, c) + (x, x)(c, c)$$

mit der Translation $t_b : x \mapsto x + b$ und der *Inversion*

$$R : x \mapsto \frac{1}{(x, x)}x.$$

Tatsächlich wird die gesamte konforme Gruppe bereits durch diese Elemente erzeugt, wenn die Dimension d der Raumzeit größer als 2 ist. In $d = 2$ definiert dagegen jedes Paar von Diffeomorphismen auf den Lichtkegelkoordinaten eine konforme Transformation. Auf diese Besonderheit werden wir nicht weiter eingehen.

Bei näherer Betrachtung der speziellen konformen Transformationen fällt auf, dass sie auf der Hyperfläche, wo der Nenner verschwindet, singularär werden. Um diese Transformationen als globale Symmetrien definieren zu können, muss der Minkowski-Raum durch Hinzunahme von Punkten im Unendlichen kompaktifiziert werden.

Aber auch dann gibt es noch ein *Kausalitäts-Paradoxon*: Lokal wahren spezielle konforme Transformationen zwar die kausale Struktur, global können sie aber raumartig getrennte Punkte auf zeitartig getrennte abbilden. Lüscher und Mack haben gezeigt, dass sich dieses Paradoxon mithilfe des euklidischen Formalismus auflösen lässt, wo es keine Unterscheidung zwischen Raum und Zeit und somit auch kein Kausalitäts-Paradoxon gibt [LM75]. Beim Übergang zum Minkowski-Raum stellt sich heraus, dass dieser periodisch in die analytische Fortsetzung des kompaktifizierten euklidischen Raumes eingebettet ist, welche eine globale kausale Struktur besitzt. Ist das Quantenfeld auf dieser periodischen Überlagerung des Minkowski-Raumes definiert, so löst sich das Paradoxon auf.

3.3 Euklidische konforme Gruppe

Aus den oben genannten Gründen wird konforme Quantenfeldtheorie oft im euklidischen Rahmen formuliert, so wird es im Folgenden auch hier sein. Die euklidische konforme Gruppe setzt sich analog zur Minkowski'schen aus der euklidischen Gruppe, den Dilationen und den speziellen konformen Transformationen zusammen, wobei obige Formeln nach Ersetzung der Metrik ihre Gültigkeit behalten. Eine spezielle konforme Transformation wird nun nur noch in einem Punkt $x = Rc$ singularär. So kann durch Hinzunahme eines einzigen Punktes ∞ zu \mathbb{R}^d erreicht werden, dass eine konforme Transformation global als Diffeomorphismus operiert.

Bei manchen Betrachtungen zu konformer Symmetrie empfiehlt sich die folgende Konstruktion eines Raumes, auf dem die konforme Gruppe in Form linearer Abbildungen operiert. Auf \mathbb{R}^{d+2} führen wir zu den Koordinaten $z^a, a = 0, \dots, d+1$ die Metrik $\eta = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$ ein. Auf dem $d+1$ -dimensionalen Kegel

$$C := \left\{ z \in \mathbb{R}^{d+2} \mid \eta_{ab}z^a z^b = 0, z^{d+1} > 0 \right\}$$

operiert die Invarianzgruppe $SO_0(d+1, 1) := \left\{ M \in SO(d+1, 1) \mid M_{d+1}^{d+1} \geq 1 \right\}$ der Metrik η als Gruppe linearer Abbildungen. Durch Identifikation von $z \in C$ mit $\lambda z (\in C), \lambda > 0$

gelangen wir zu einer d -dimensionalen Menge C/\mathbb{R}_+ von Strahlen, auf der $SO_0(d+1, 1)$ wirkt. Über die *stereographische Projektion*

$$S : C/\mathbb{R}_+ \ni \lambda z \mapsto \left(\frac{z^\mu}{z^0 + z^{d+1}} \right)_{\mu=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^d$$

können wir diese Menge mit dem kompaktifizierten euklidischen Raum identifizieren, der Strahl $\mathbb{R}_+(-1, 0, \dots, 0, 1)$ entspricht ∞ . Auf diesem Raum ist die induzierte Wirkung von $SO_0(d+1, 1)$ die der konformen Gruppe, beide sind also isomorph [LM75] [Ha96]. Dies wird folgendermaßen plausibel: Wir definieren zu einer gegebenen Funktion $\Lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung

$$A_\Lambda : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \Lambda(x) \left(\frac{1 - (x)^2}{2}, x^1, \dots, x^d, \frac{1 + (x)^2}{2} \right) \in C, \quad (x)^2 := \sum_{\mu=1}^d (x^\mu)^2.$$

$\mathbb{R}_+ A_\Lambda$ ist invers zu S . A_Λ induziert auf \mathbb{R}^d die Metrik $\Lambda(x)^2 \delta_{\mu\nu}$, wie man leicht nachrechnet. Wir können die Metrik des euklidischen Raumes also als die von A_1 induzierte definieren. Ist nun $M \in SO_0(d+1, 1)$, so führt dies auf \mathbb{R}^d zu einem Koordinatenwechsel $x = M^* y$ mit $M^* S = S \circ M$. Die induzierte Metrik in den neuen Koordinaten y ist aus $z = A_1 x = A_1 M^* y$ zu berechnen. Wegen $S \circ A_1 = \text{id}$, $(A_1 \circ S)(z) = \frac{1}{z^0 + z^{d+1}} z =: \lambda(z) z$ folgt $z = \lambda(M A_1 y) M A_1 y = M A_{\lambda(M A_1 \cdot)} y$. Da die Metrik η des Einbettungsraumes aber invariant unter M ist, können wir M herauskürzen und erhalten als Metrik in den Koordinaten y die von $A_{\lambda(M A_1 \cdot)}$ induzierte. Diese unterscheidet sich von der in den Koordinaten x nur um den Faktor $\lambda(M A_1 y)^2$, somit ist M^* eine konforme Transformation.

Es ist leicht einzusehen, dass der Zeitspiegelung θ die Vorzeichenumkehr der z^d -Komponente entspricht und der Inversion R die Vorzeichenumkehr der z^0 -Komponente. Somit ist $\theta R \in SO_0(d+1, 1)$. Besitzt die zu behandelnde Theorie nun θ -Kovarianz, so muss sie auch kovariant unter der Inversion R sein. Umgekehrt folgt aus euklidischer Kovarianz und R -Kovarianz bereits die konforme Kovarianz, denn spezielle konforme Transformationen und Dilationen werden von $E_+(d)$ und R generiert.

3.4 Konforme Invarianten

Ist eine Menge x_1, x_2, \dots von Punkten gegeben, so stellt sich die Frage, welche skalaren, konformen Invarianten $f(x_1, x_2, \dots)$ daraus gebildet werden können. Wegen der Translations- und Rotationsinvarianz kann f nur von Beträgen $|x_i - x_j|$ abhängen, wegen der Skaleninvarianz nur von Quotienten $\frac{|x_i - x_j|}{|x_k - x_l|}$. Unter der Inversion¹ R transformiert sich ein Betrag wie

$$|Rx - Ry| = \frac{|x - y|}{|x| |y|},$$

ein solcher Quotient ist demnach nicht R -invariant, sondern erhält einen Faktor $\frac{|x_k| |x_l|}{|x_i| |x_j|}$, der aber durch einen geeigneten zweiten Quotienten kompensiert werden kann wie in

$$\frac{|x_i - x_j|}{|x_i - x_k|} \frac{|x_k - x_l|}{|x_j - x_l|}.$$

¹Wegen der θ -Invarianz der Beträge und $\theta R \in SO_0(d+1, 1)$ dürfen wir R -Invarianz benutzen.

Solche Verhältnisse sind konform invariant, offenbar benötigt man aber mindestens vier Punkte für eine nichttriviale Invariante. Tatsächlich gibt es für vier Punkte zwei unabhängige Invarianten, wir wählen im Folgenden stets die *anharmonischen Verhältnisse*

$$u := \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v := \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} \quad \text{mit } x_{ij} := x_i - x_j. \quad (3.2)$$

Die Menge der möglichen (u, v) -Paare ist ein „Streifen“ in der \sqrt{u} - \sqrt{v} -Ebene [LR92]:

Satz 3.1 *Im Bild von $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}^d$ liegen genau die Invarianten u, v , für die*

$$|1 - u - v| \leq 2\sqrt{uv}$$

gilt. Diese Menge ist der in Abbildung 3.1 gezeigte Streifen.

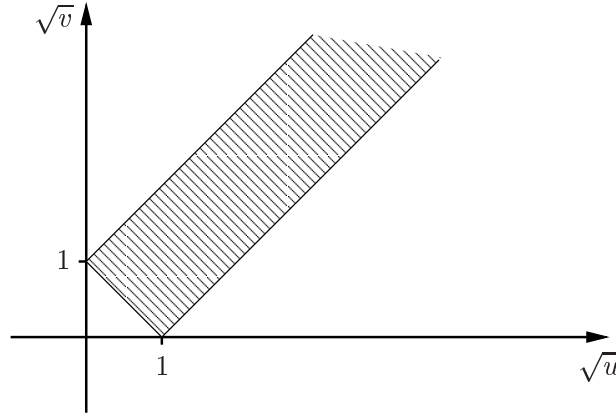


Abbildung 3.1: Mögliche (u, v) -Paare

Beweis. \Rightarrow : Seien x_1, \dots, x_4 gegeben. Wegen der konformen Invarianz können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 = 0, x_3 = \infty$ annehmen, denn wir können zunächst x_3 auf 0 verschieben, eine Inversion durchführen und danach x_1 auf 0 verschieben. Die Ausdrücke für u, v vereinfachen sich dann zu $u = \frac{x_2^2}{x_{24}^2}, v = \frac{x_4^2}{x_{24}^2}$, und es folgt mit Cauchy-Schwarz

$$|1 - u - v| = \frac{|x_{24}^2 - x_2^2 - x_4^2|}{x_{24}^2} = \frac{|-2(x_2, x_4)|}{x_{24}^2} \leq 2 \frac{|x_2| |x_4|}{x_{24}^2} = 2\sqrt{uv}.$$

Diese Ungleichung kann mit $s = \sqrt{u}, t = \sqrt{v}$ äquivalent zu drei linearen Ungleichungen umgeformt werden, welche zu dem abgebildeten Streifen führen.

$$\begin{aligned} |1 - s^2 - t^2| &\leq 2st \\ \Leftrightarrow -2st &\leq 1 - s^2 - t^2 \wedge 1 - s^2 - t^2 \leq 2st \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 1 - (s - t)^2 \wedge 1 - (s + t)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow |s - t| &\leq 1 \wedge |s + t| \geq 1 \\ \Leftrightarrow s &\leq 1 + t \wedge t \leq 1 + s \wedge s + t \geq 1 \end{aligned}$$

\Leftarrow : Seien u, v gegeben. Für $u = 0$ und somit $v = 1$ sind $x_1 = x_2 \neq x_3 = x_4$ vier passende Punkte, wir können also im Folgenden $u > 0$ annehmen. Für die Punkte $x_1 = 0, x_2 = (1, 0), x_3 = \infty, x_4 = (a, b)$ (es werden nur die ersten beiden Komponenten angegeben, die übrigen sind 0) berechnet man

$$1 - u - v = -2au, \quad v = (a^2 + b^2)u.$$

Aus der ersten Gleichung können wir a bestimmen und sodann aus der zweiten b , sofern $b^2 \geq 0$ oder

$$0 \leq 4b^2u^2 = 4uv - 4a^2u^2 = 4uv - (1 - u - v)^2$$

gilt. Dies ist aber nach Voraussetzung erfüllt. \square

Bemerkung. Der Rand des Steifens wird genau dann erreicht, wenn die vier Punkte auf einem Kreis liegen. Dann liegen sie nämlich vor der Inversion auf einem Kreis durch den Ursprung ($x_3 = 0$), welcher durch die Inversion² auf eine Gerade abgebildet wird, die nach der Verschiebung $x_1 = 0$ durch den Ursprung geht. x_2 ist dann folglich parallel zu x_4 , genau dann gilt aber die Gleichheit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

3.5 Konform kovariante n -Punkt-Funktionen

Die konforme Symmetrie eines Feldes äußert sich darin, dass es zu einer Darstellung der konformen Gruppe gehört. Für ein (klassisches) skalares Feld A bedeutet dies im Fall einer irreduziblen Darstellung das Verhalten einer *Dichte vom Gewicht Δ*

$$A(x) \mapsto A'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{\Delta}{d}} A(x)$$

unter einer konformen Transformation $x \mapsto x'$, wobei Δ die *Skalendimension* des Feldes A ist [FMS97]. Die Jacobi-Determinante einer konformen Transformation hängt mit dem Skalierungsfaktor der Metrik in (3.1) gemäß

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \Lambda(x)^{-d}$$

zusammen.

Das Transformationsverhalten eines klassischen Feldes führt für ein konformes Quantenfeld A zu einer Erweiterung des Axioms A4. Für Vakuum Erwartungswerte mehrerer Felder A_i mit Skalendimension Δ_i hat dies im Sinne von Distributionen die Konsequenz

$$\langle \Omega, A_1(x_1) \cdots A_n(x_n) \Omega \rangle = \Lambda(x_1)^{-\Delta_1} \cdots \Lambda(x_n)^{-\Delta_n} \langle \Omega, A_1(x'_1) \cdots A_n(x'_n) \Omega \rangle.$$

Hieraus lassen sich nun die möglichen Formen der n -Punkt-Funktionen bestimmen [FMS97]. Eine Zweipunktfunktion verschwindet nur dann nicht, wenn die Skalendimensionen beider beteiligter Felder übereinstimmen, ihre Form ist (ins Euklidische fortgesetzt)

$$\langle \Omega, A_1(x_1) A_2(x_2) \Omega \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}}, \quad \Delta = \Delta_1 = \Delta_2. \quad (3.3)$$

²Diese ist im Euklidischen die Inversion an der Einheitssphäre.

Eine Dreipunktfunktion hat die Form

$$\langle \Omega, A_1(x_1)A_2(x_2)A_3(x_3)\Omega \rangle = \frac{C_{123}}{|x_{12}|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} |x_{23}|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} |x_{31}|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}} \quad (3.4)$$

und schließlich eine Vierpunktfunktion

$$\langle \Omega, A_1(x_1)A_2(x_2)A_3(x_3)A_4(x_4)\Omega \rangle = \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{\frac{\Delta_1+\dots+\Delta_4}{3}-\Delta_i-\Delta_j} f(u, v).$$

Da man aus vier Punkten nichttriviale konforme Invarianten bilden kann, ist die Vierpunktfunktion als erste nicht bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Gilt $\Delta_1 = \Delta_2, \Delta_3 = \Delta_4$, so kann die Form der Vierpunktfunktion weiter zu

$$\langle \Omega, A_1(x_1)A_2(x_2)A_3(x_3)A_4(x_4)\Omega \rangle = \frac{f'(u, v)}{(x_{12}^2)^{\Delta_1}(x_{34}^2)^{\Delta_3}}$$

vereinfacht werden. Sind schließlich alle Skalendimensionen gleich, so können wir auch andere Beträge x_{ij}^2 abspalten. Wir werden im Folgenden stets die Konvention

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{f(u, v)}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} \quad (3.5)$$

benutzen, wenn nicht explizit ein anderer kovarianter Faktor abgespalten wird.

3.6 Zweipunkt- und freie Vierpunktfunktion

Die Zweipunktfunktion S_2 eines konformen, skalaren Feldes ist nach (3.3) bis auf eine Konstante eindeutig durch seine Skalendimension festgelegt:

$$S_2(x, y) = \frac{C_\Delta}{|x - y|^{2\Delta}}. \quad (3.6)$$

Vergleichen wir mit der Darstellung (2.1), so sehen wir, dass ein konformes Feld aus einem ganzem Massenkontinuum besteht. Mit $d\rho(m^2) = dm^2 m^{2\nu}$ ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= \int_0^\infty dm^2 m^{2\nu} \int d^d k \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty dm^2 m^{2\nu} \int d^d k \frac{e^{ik_1|x-y|}}{k^2 + m^2} \\ &= |x - y|^{-(d+2\nu)} \int_0^\infty dm^2 m^{2\nu} \int d^d k \frac{e^{ik_1}}{k^2 + m^2}, \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die $SO(d)$ -Symmetrie des Integrals ausgenutzt wurde und im zweiten beide Integrationen mit $|x - y|$ skaliert wurden. Mit $\Delta = \frac{d}{2} + \nu$ ist dies die konforme Zweipunktfunktion. An dieser Stelle können wir die *Unitaritätsschranke* ablesen [MT73]: Die Konvergenz des Integrals bei $m^2 = 0$ verlangt $\nu > -1$, bei $\nu = -1$ macht der Ausdruck mit

geeigneter Normierung distributiv gelesen noch Sinn, wir erhalten dann nämlich die Zweipunktfunktion eines masselosen Feldes. Für $\nu < -1$ jedoch ist keine positive Zweipunktfunktion mehr gegeben. Die Skalendimension eines konformen, skalaren Feldes ist somit durch $\nu \geq -1$ oder

$$\Delta \geq \frac{d-2}{2}$$

eingeschränkt. Für den Fall des masselosen Feldes mit $\nu = -1$ und der *kanonischen Skalendimension* $\Delta = \frac{d-2}{2}$ gilt der Satz 1.2, dass es sich notwendig um ein freies Feld handelt.

Aus der Zweipunktfunktion ergibt sich sofort die Vierpunktfunktion des freien konformen Feldes

$$\begin{aligned} S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= S_2(x_1, x_2)S_2(x_3, x_4) + S_2(x_1, x_3)S_2(x_2, x_4) + S_2(x_1, x_4)S_2(x_2, x_3) \\ &= C_\Delta^2 \left(\frac{1}{(x_{12}^2 x_{34}^2)^\Delta} + \frac{1}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} + \frac{1}{(x_{14}^2 x_{23}^2)^\Delta} \right) \\ &= C_\Delta^2 \left(\frac{1}{(x_{12}^2 x_{34}^2)^\Delta} + \frac{1}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} (1 + v^{-\Delta}) \right). \end{aligned}$$

Für die in (2.7) definierte Funktion G gilt im freien Fall somit

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{C_\Delta^2}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} (1 + v^{-\Delta}) \\ &= \frac{1}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} g(u, v) \quad \text{mit } g(u, v) = C_\Delta^2 (1 + v^{-\Delta}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.7 Positivitätsbedingungen

Als Positivitätsbedingung der Vierpunktfunktion wurde die Positiv-Semidefinitheit der aus

$$G(\theta q_i, \theta p_i, p_j, q_j), \quad p_i, q_i \in \mathbb{R}^d, p_i \neq q_i, p_i^d, q_i^d > 0$$

gebildeten Matrix (2.9) hergeleitet, siehe Satz 2.3 und die dortige zweite Bemerkung. Es müssen also sämtliche Unterdeterminanten der Matrix nichtnegativ sein, insbesondere die ersten beiden:

$$G(\theta q_1, \theta p_1, p_1, q_1) \geq 0, \quad (3.8)$$

$$G(\theta q_1, \theta p_1, p_1, q_1)G(\theta q_2, \theta p_2, p_2, q_2) \geq |G(\theta q_1, \theta p_1, p_2, q_2)|^2. \quad (3.9)$$

Dieses hat für alle zulässigen Wahlen von p_i, q_i zu gelten. Wünschenswert wäre eine Umformulierung dieser Positivitätsbedingungen für die konform invariante Funktion $g(u, v)$, nicht zuletzt weil dann die Anzahl der zu prüfenden Freiheitsgrade erheblich reduziert würde.

Sollen nun diese Bedingungen unter Ausnutzung der konformen Kovarianz von G vereinfacht und in eine nur noch von Invarianten u, v abhängige Form gebracht werden, könnte man zunächst denken, dass im Fall (3.8) das Resultat eine Ungleichung ohne Wahlfreiheit ist – aus zwei Punkten p_1, q_1 lässt sich keine Invariante bilden – und im Fall (3.9) eine Ungleichung, die für alle Wahlen der zwei Invarianten u, v zu gelten hat, die aus den vier Punkten p_1, \dots, q_2 gebildet werden können. Dies ist aber nicht so, da in den Ungleichungen θ involviert

ist, was ihre Invarianzgruppe verkleinert. Wie wir gleich sehen werden, muss (3.8) auf einer eindimensionalen und (3.9) auf einer vierdimensionalen Menge von Invarianten gelten.

Die Bedingung (3.8) lässt sich leicht umschreiben: Mit

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{(\theta q_1 - \theta p_1)^2 (p_1 - q_1)^2}{(\theta q_1 - p_1)^2 (\theta p_1 - q_1)^2} = \frac{(p_1 - q_1)^4}{(p_1 - \theta q_1)^4}, \\ v_{11} &= \frac{(\theta q_1 - q_1)^2 (\theta p_1 - p_1)^2}{(\theta q_1 - p_1)^2 (\theta p_1 - q_1)^2} = \frac{16 (p_1^d)^2 (q_1^d)^2}{(p_1 - \theta q_1)^4} \end{aligned} \quad (3.10)$$

wird aus ihr

$$\frac{g(u_{11}, v_{11})}{\left((p_1 - \theta q_1)^4\right)^\Delta} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(u_{11}, v_{11}) \geq 0.$$

Diese Ungleichung hat aber nicht für alle u_{11}, v_{11} zu gelten, denn diese sind voneinander abhängig:

$$\sqrt{u_{11}} + \sqrt{v_{11}} = \frac{(p_1 - q_1)^2}{(p_1 - \theta q_1)^2} + \frac{4p_1^d q_1^d}{(p_1 - \theta q_1)^2} = \frac{(p_1 - \theta q_1)^2}{(p_1 - \theta q_1)^2} = 1.$$

Hier wurde ausgenutzt, dass p_1^d und q_1^d positiv sind. Wegen $p_i \neq q_i, p_i^d, q_i^d > 0$ liegen u_{11} und v_{11} stets echt zwischen 0 und 1. Andererseits werden auch alle solchen Werte durchlaufen, wie man sich leicht an $p_1 = (\vec{0}, a), q_1 = (\vec{0}, 1), a \in (0, 1)$ überlegen kann.

Wir erhalten also mit $s = \sqrt{u_{11}}$ das

Korollar 3.2 *Die Positivität (3.8) der 1×1 -Unterdeterminante der Matrix (2.9) ist für alle zulässigen Wahlen von p_1, q_1 genau dann erfüllt, wenn*

$$g(s^2, (1-s)^2) \geq 0 \quad \forall s \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{g(u, v)}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} \quad (3.11)$$

gilt.

Die Umformulierung der 2×2 -Bedingung (3.9) ist naturgemäß schwieriger. Zunächst empfiehlt es sich, an dieser Stelle statt g die ebenfalls konform invariante Funktion

$$h(u, v) = u^\Delta g(u, v)$$

zu verwenden, mit der sich G als

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{h(u, v)}{(x_{12}^2 x_{34}^2)^\Delta} \quad (3.12)$$

schreiben lässt. Mit u_{11}, v_{11} wie oben und

$$\begin{aligned} u_{22} &= \frac{(p_2 - q_2)^4}{(p_2 - \theta q_2)^4}, & v_{22} &= \frac{16 (p_2^d)^2 (q_2^d)^2}{(p_2 - \theta q_2)^4}, \\ u_{12} &= \frac{(q_1 - p_1)^2 (p_2 - q_2)^2}{(\theta q_1 - p_2)^2 (\theta p_1 - q_2)^2}, & v_{12} &= \frac{(\theta q_1 - q_2)^2 (\theta p_1 - p_2)^2}{(\theta q_1 - p_2)^2 (\theta p_1 - q_2)^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ergibt sich aus (3.9) durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{h(u_{11}, v_{11})}{(p_1 - q_1)^{4\Delta}} \frac{h(u_{22}, v_{22})}{(p_2 - q_2)^{4\Delta}} &\geq \frac{|h(u_{12}, v_{12})|^2}{\left((q_1 - p_1)^2 (p_2 - q_2)^2\right)^{2\Delta}} \\ \Leftrightarrow h(u_{11}, v_{11})h(u_{22}, v_{22}) &\geq |h(u_{12}, v_{12})|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Doch für welche u, v muss diese Ungleichung erfüllt sein? Natürlich gilt wieder $\sqrt{u_{11}} + \sqrt{v_{11}} = 1$ und auch $\sqrt{u_{22}} + \sqrt{v_{22}} = 1$. Um Einschränkungen für die gemischten Invarianten u_{12} und v_{12} herzuleiten, benötigen wir einen Satz rein geometrischer Natur:

Satz 3.3 Für beliebige Punkte $x, y, z, w \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$|x - z| |y - w| + |x - w| |y - z| \geq |x - y| |z - w|. \quad (3.15)$$

Beweis. Die Ungleichung ist offensichtlich invariant unter der euklidischen Gruppe. Sie ist aber auch invariant unter der Inversion R , denn $|Ra - Rb| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$, so dass jeder Term der Ungleichung bei Inversion mit dem gleichen positiven Faktor $(x^2 y^2 z^2 w^2)^{-\frac{1}{2}}$ multipliziert wird, der sich folglich herauskürzt. Wir können daher den üblichen Trick anwenden, nämlich z. B. w zunächst auf 0 verschieben und durch eine Inversion nach ∞ schicken. Die w -abhängigen Beträge kürzen sich in der Ungleichung heraus, übrig bleibt die Dreiecksungleichung

$$|x - z| + |y - z| \geq |x - y|.$$

□

Bemerkung. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn x, z, y, w in dieser Reihenfolge auf einem Kreis liegen. Dann liegen diese Punkte nämlich vor der Inversion auf einem Kreis durch den Ursprung ($w = 0$), welcher durch die Inversion auf eine Gerade abgebildet wird, auf der x, z, y in dieser Reihenfolge liegen. Genau dann gilt aber die Gleichheit in der Dreiecksungleichung.

Eine Abschätzung von θ enthaltenden Beträgen durch solche ohne θ leistet das

Lemma 3.4 Für beliebige Punkte $x, y, z, w \in \mathbb{R}^d$ mit nichtnegativer d -Komponente gilt

$$|x - \theta z| |y - \theta w| \geq |x - z| |y - w| + 4\sqrt{x^d y^d z^d w^d}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |x - \theta z| |y - \theta w| &\geq |x - z| |y - w| + 4\sqrt{x^d y^d z^d w^d} \\ \Leftrightarrow \left((x - z)^2 + 4x^d z^d\right) \left((y - w)^2 + 4y^d w^d\right) &\geq (x - z)^2 (y - w)^2 + 16x^d y^d z^d w^d \\ &\quad + 8\sqrt{x^d y^d z^d w^d} |x - z| |y - w| \\ \Leftrightarrow 4y^d w^d (x - z)^2 + 4x^d z^d (y - w)^2 &\geq 8\sqrt{x^d y^d z^d w^d} |x - z| |y - w| \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist aber immer erfüllt, denn sie ist einfach die binomische Ungleichung $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Das Quadrieren der ersten Ungleichung ist eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten manifest positiv sind. □

Nun beweisen wir leicht

Korollar 3.5 Für beliebige Punkte $x, y, z, w \in \mathbb{R}^d$ mit nichtnegativer d -Komponente gilt

$$|x - \theta z| |y - \theta w| + |x - \theta w| |y - \theta z| \geq |x - \theta y| |z - \theta w| + 4\sqrt{x^d y^d z^d w^d}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & |x - \theta z| |y - \theta w| + |x - \theta w| |y - \theta z| \\ & \stackrel{\text{Lemma 3.4}}{\geq} |x - z| |y - w| + |x - \theta w| |y - \theta z| + 4\sqrt{x^d y^d z^d w^d} \\ & = |x - z| |\theta y - \theta w| + |x - \theta w| |\theta y - z| + 4\sqrt{x^d y^d z^d w^d} \\ & \stackrel{\text{Satz 3.3}}{\geq} |x - \theta y| |z - \theta w| + 4\sqrt{x^d y^d z^d w^d} \end{aligned}$$

□

Nun können wir die Menge der Invarianten angeben, für die die Ungleichung (3.14) erfüllt sein muss:

Satz 3.6 Seien die konformen Invarianten s_{ij}, t_{ij} durch die oben definierten u_{ij}, v_{ij} wie folgt gegeben:

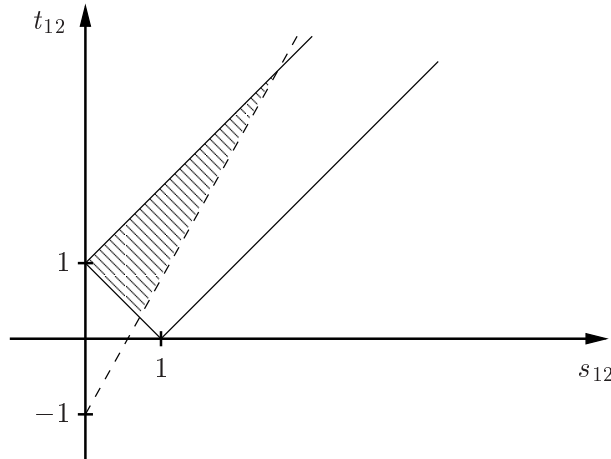
$$s_{ij} := \sqrt{u_{ij}}, \quad t_{ij} := \sqrt{v_{ij}}.$$

Dann liegen genau die Invarianten im Bild unter (3.10), (3.13) der Menge der Punkte $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{R}^d, p_i \neq q_i, p_i^d, q_i^d > 0$, für die

$$\begin{aligned} s_{11} + t_{11} &= 1, & s_{11} &\in (0, 1), \\ s_{22} + t_{22} &= 1, & s_{22} &\in (0, 1), \\ t_{12} &\leq 1 + s_{12}, & s_{12} + t_{12} &\geq 1, & s_{12} &> 0, \\ t_{12} &\geq \frac{1 + \sqrt{t_{11}t_{22}}}{\sqrt{s_{11}s_{22}}} s_{12} - 1 \end{aligned}$$

gilt.

Bemerkung. Vor dem Beweis des Satzes ist es nützlich, sich ein Bild von der Menge der Invarianten zu machen. Sind s_{11} und s_{22} aus $(0, 1)$ vorgegeben (und damit auch t_{ii}), so bildet die Menge der (s_{12}, t_{12}) ein Dreieck in der s, t -Ebene:



Die durchgezogenen Linien markieren den aus Satz 3.1 bekannten Streifen, die gestrichelte Linie ist die letzte der obigen Bedingungen. Deren Steigung $\frac{1+\sqrt{t_{11}t_{22}}}{\sqrt{s_{11}s_{22}}}$ ist wegen der Bedingungen an s_{ii}, t_{ii} stets echt größer als 1 und schneidet somit immer die linke untere sowie die obere Kante des Streifens, was zu dem eingezeichneten Dreieck möglicher Werte führt. Dessen linke Ecke ist ausgenommen, $s_{12} > 0$.

Beweis. Wird $x := p_1, y := q_1, z := p_2, w := q_2$ gesetzt, so lauten die Ausdrücke für die Invarianten

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{|x-y|^2}{|x-\theta y|^2}, & t_{11} &= \frac{4x^d y^d}{|x-\theta y|^2}, & s_{22} &= \frac{|z-w|^2}{|z-\theta w|^2}, & t_{22} &= \frac{4z^d w^d}{|z-\theta w|^2}, \\ s_{12} &= \frac{|x-y||z-w|}{|x-\theta w||y-\theta z|}, & t_{12} &= \frac{|x-\theta z||y-\theta w|}{|x-\theta w||y-\theta z|}. \end{aligned}$$

\Rightarrow : Die Einschränkungen an die Invarianten mit gleichen Indizes wurden bereits bei der Untersuchung der 1×1 -Determinante hergeleitet. Die ersten beiden Einschränkungen an die „gemischten“ Invarianten resultieren aus dem bereits in Satz 3.1 gefundenen Streifen. Die Bedingung $s_{12} > 0$ schließlich folgt daraus, dass stets $x \neq y, z \neq w$ gilt.

Es bleibt also noch, die letzte Ungleichung zu beweisen. Setzen wir die Ausdrücke für die Invarianten ein und multiplizieren mit dem positiven Nenner von t_{12} , so erhalten wir

$$\begin{aligned} |x-\theta z||y-\theta w| &\geq \frac{1+\sqrt{t_{11}t_{22}}}{\sqrt{s_{11}s_{22}}} |x-y||z-w| - |x-\theta w||y-\theta z| \\ &= (1+\sqrt{t_{11}t_{22}}) |x-\theta y||z-\theta w| - |x-\theta w||y-\theta z| \\ &= |x-\theta y||z-\theta w| + 4\sqrt{x^d y^d z^d w^d} - |x-\theta w||y-\theta z|. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Diese Ungleichung ist aber nach Korollar 3.5 stets erfüllt.

\Leftarrow : Zu zeigen ist, dass jeder Satz von Invarianten, der obigen Bedingungen genügt, das Bild eines Quadrupels x, y, z, w aus der Menge $\{x \neq y, z \neq w, x^d, y^d, z^d, w^d > 0\}$ der zulässigen Punkte ist. Seien zunächst s_{11}, s_{22} (und damit auch t_{ii}) gegeben, dann gibt es $a, b \in (0, 1)$ mit

$$s_{11} = \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2}, \quad s_{22} = \frac{(1-b)^2}{(1+b)^2}.$$

Die Punkte (hier und im Folgenden werden nur die 1- und d -Komponente angegeben, die übrigen sind 0)

$$x = (0, a), \quad y = (0, 1), \quad z = (0, b), \quad w = (0, 1)$$

sind zulässige Punkte, die zu diesen Invarianten führen. Die Untergruppe der konformen Gruppe, die aus Skalierungen, Translationen in 1-Richtung und der Inversion gebildet wird, lässt s_{ii} invariant, wenn sie auf z, w wirkt, und führt nicht aus der Menge zulässiger Punkte heraus. Führen wir nacheinander eine Translation c , eine Inversion, eine Skalierung $(b+c^2)\lambda$ sowie eine Translation $-c\lambda$ durch, so ergibt sich

$$z = \alpha v, \quad w = \beta \theta v \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{b}{b^2+c^2}, \quad \beta = -\frac{1}{1+c^2}, \quad v = \lambda \left((1-b)c, b+c^2 \right).$$

Auf dem Rechteck $\{(c, \lambda) \mid c \in \bar{\mathbb{R}}_+, \lambda \in [0, \sqrt{\frac{a}{b}}]\}$, wobei $\bar{\mathbb{R}}_+$ die kompaktifizierte positive reelle Achse ist, ist dies eine durch c, λ stetig parametrisierte Schar von Punkten. Für $\lambda > 0$

sind diese zulässig mit den fest vorgegebenen Invarianten s_{ii} , aber von den Parametern stetig abhängigen Invarianten s_{12}, t_{12} .

Es wird nun gezeigt, dass das Bild dieser Schar das gesamte Dreieck ist. Dazu betrachten wir die Kanten des Rechtecks und zeigen, dass sie den Kanten des Dreiecks entsprechen (abgesehen von der Rechteckkante $\lambda = 0$, die natürlich nur auf die linke Ecke des Dreiecks abgebildet wird).

Auf der Kante $c = 0$ gilt $z = (0, \lambda), w = (0, \lambda b)$, woraus sich

$$1 + s_{12} = 1 + \frac{(1-a)\lambda(1-b)}{(a+\lambda b)(1+\lambda)} = \frac{(a+\lambda)(1+\lambda b)}{(a+\lambda b)(1+\lambda)} = t_{12}$$

ergibt, d. h. die Kante $c = 0$ wird auf eine Teilmenge der oberen Kante des Dreiecks abgebildet.

Auf der Kante $c = \infty$ gilt dagegen $z = (0, \lambda b), w = (0, \lambda)$, hier erhalten wir

$$1 - s_{12} = 1 - \frac{(1-a)\lambda(1-b)}{(a+\lambda)(1+\lambda b)} = \frac{(a+\lambda b)(1+\lambda)}{(a+\lambda)(1+\lambda b)} = t_{12}.$$

Die Kante $c = \infty$ wird also auf eine Teilmenge der linken unteren Kante des Dreiecks abgebildet.

Die Kante $\lambda = \sqrt{\frac{a}{b}}$ schließlich wird auf die rechte untere Kante des Dreiecks abgebildet. Um das einzusehen, müssen wir zeigen, dass bei der Ungleichung (3.16) tatsächlich die Gleichheit gilt. Das direkte Einsetzen der Werte führt zu einer länglichen Rechnung, einfacher ist es, die Gleichheit in den Ungleichungen aus Satz 3.3 und Lemma 3.4 zu zeigen. Dies ist gemäß dem Beweis der Ungleichung (3.16) in Korollar 3.5 äquivalent zur Gleichheit dort.

Für die Gleichheit in Satz 3.3 müssen die Punkte $x, z, \theta y, \theta w$ in dieser Reihenfolge auf einem Kreis liegen. Dies ist der Fall: Ein Punkt m auf der Mittelsenkrechten von x und θy ist durch $m = \frac{1}{2}(x + \theta y) + p$ mit $p \perp (x - \theta y)$, also $p = (p^1, 0)$ gegeben. Ein Punkt q liegt genau dann auf dem Kreis um m durch x, y , wenn $(q - m)^2 = (x - m)^2$ gilt. Dies kann zu

$$0 = (q - x)(q - \theta y - p) = (q - x)(q - \theta y) - q^1 p^1$$

umgeformt werden. In unserem Fall sollen $z, \theta w$ beide auf einem solchen Kreis liegen. Wegen deren nichtverschwindender 1-Komponente bekommen wir zwei nach p^1 auflösbare Gleichungen, Gleichsetzen von p^1 liefert

$$\begin{aligned} (\theta w)^1(z - x)(z - \theta y) &= z^1(\theta w - x)(\theta w - \theta y) \\ \Leftrightarrow \beta v^1(\alpha v - x)(\alpha v - \theta y) &= \alpha v^1(\beta v - x)(\beta v - \theta y) \\ \Leftrightarrow \beta \alpha^2 |v|^2 + \beta x \cdot \theta y &= \alpha \beta^2 |v|^2 + \alpha x \cdot \theta y \\ \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha \beta |v|^2 - x \cdot \theta y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha \beta |v|^2 &= x \cdot \theta y = -a. \end{aligned}$$

Dies ist erfüllt, wie man leicht durch Einsetzen der Werte von α, β, v sowie $\lambda = \sqrt{\frac{a}{b}}$ einsieht. Damit liegen die Punkte $x, z, \theta y, \theta w$ auf einem Kreis, und zwar in dieser Reihenfolge, denn z hat eine positive 1-Komponente, θw eine negative.

Für die Gleichheit in Lemma 3.4 muss in der dortigen binomischen Ungleichung $a^2 + b^2 \geq 2ab$

die Gleichheit gelten, d. h. $a = b$ oder

$$\begin{aligned} x^d z^d (y - w)^2 &= y^d w^d (x - z)^2 \\ \Leftrightarrow a\alpha v^d (y - \beta\theta v)^2 = a\alpha v^d (y + \beta v)^2 &= -\beta v^d (ay - \alpha v)^2 \\ \Leftrightarrow a\alpha (1 + \beta^2 |v|^2) &= -\beta (a^2 + \alpha^2 |v|^2) \\ \Leftrightarrow (\alpha + a\beta) (a + \alpha\beta |v|^2) &= 0. \end{aligned}$$

Wie soeben bemerkt wurde, verschwindet der zweite Klammerausdruck. Damit ist auch diese Gleichheit gegeben, und wir haben gezeigt, dass die Kante $\lambda = \sqrt{\frac{a}{b}}$ auf die rechte untere Kante des Dreiecks abgebildet wird.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass Ecken des Rechtecks auf Ecken des Dreiecks abgebildet werden. Somit werden tatsächlich die gesamten Dreieckskanten durchlaufen und nicht nur Teilmengen. Wir betrachten nun eine Kurve, die einmal den Rechteckrand umläuft. Sie lässt sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen, da das Rechteck kein Loch enthält. Wegen der Stetigkeit der Parametrisierung geschieht im Bild dasselbe, d. h. eine Kurve, die einmal den Dreieckrand umläuft, wird dort stetig zu einem Punkt zusammengezogen. Dazu darf das Bild aber ebenfalls kein Loch enthalten, der Bildbereich der Parametrisierung ist folglich das gesamte Dreieck.

Entfernen wir nun vom Rechteck dessen $\lambda = 0$ -Kante, so wird im Bild nur die linke Ecke des Dreiecks herausgenommen. Für $\lambda > 0$ sind die parametrisierten Punkte z, w aber zulässig. \square

Nun können wir endlich die 2×2 -Positivitätsbedingung für die Vierpunktfunktion eines konformen Quantenfeldes formulieren. Ungleichung (3.14) und Satz 3.6 ergeben zusammen das

Korollar 3.7 *Die Positivität (3.9) der 2×2 -Unterdeterminante der Matrix (2.9) ist für alle zulässigen Wahlen von p_1, q_1, p_2, q_2 genau dann erfüllt, wenn*

$$h(s_{11}^2, (1 - s_{11})^2) h(s_{22}^2, (1 - s_{22})^2) \geq |h(s_{12}^2, t_{12}^2)|^2$$

für alle s_{ij}, t_{12} mit

$$\begin{aligned} s_{11}, s_{22} \in (0, 1), \quad s_{12} > 0, \quad t_{12} \leq 1 + s_{12}, \quad s_{12} + t_{12} \geq 1, \\ t_{12} \geq \frac{1 + \sqrt{(1 - s_{11})(1 - s_{22})}}{\sqrt{s_{11}s_{22}}} s_{12} - 1 \end{aligned}$$

gilt. Dabei ist h wie in (3.12) definiert.

Bemerkung. Diese Positivitätsbedingung ist noch nicht sensibel für die Raumdimension d , denn für den Nachweis, dass das gesamte Dreieck im Bild liegt, benötigten wir nur einen zweidimensionalen Raum von Punkten. Bei höheren Determinanten wird dies vermutlich anders sein: Dort wird die Menge der Invarianten, auf der die Positivität zu gelten hat, mit der Raumdimension wachsen.

Bemerkung. Eine Untersuchung der freien Vierpunktfunktion mit diesem Kriterium zeigt, dass die Ungleichung am „schlechtesten“ an den beiden rechten Ecken des Dreiecks erfüllt ist. Bei einem Positivitätstest einer Vierpunktfunktion mit Wechselwirkung empfiehlt sich daher zunächst ein Test an diesen beiden Ecken.

Kapitel 4

Konforme Partialwellenentwicklung

4.1 Motivation

Der *konformen Partialwellenentwicklung* liegt die Idee zugrunde, das komplizierte Objekt „ n -Punkt-Funktion“ in eine Summe einfacherer Objekte zu zerlegen. Das kann etwa in der konstruktiven Quantenfeldtheorie vorteilhaft sein, dort werden durch die Partialwellenentwicklung nichtlineare Integralgleichungen, die zwischen den n -Punkt-Funktionen bestehen, in algebraische Gleichungen überführt [Ma74], die sich wesentlich leichter lösen lassen. Die Partialwellenentwicklung ist aber ebenso ein wichtiges Werkzeug zur Analyse einer gegebenen n -Punkt-Funktion, wenn es etwa um Fragen nach dem Feldinhalt oder Positivität geht.

4.2 Herleitung der Entwicklung

Es soll im Folgenden die Partialwellenentwicklung der n -Punkt-Funktion eines konformen, skalaren Feldes plausibel gemacht werden, die Details sind in [Do77], [Ma74], [Ma75] zu finden.

Eine n -Punkt-Funktion

$$\mathcal{W}_n(f_1, \dots, f_n) = \langle \Omega, A(f_1) \cdots A(f_n) \Omega \rangle$$

können wir wegen der Hermitizität als das Skalarprodukt von Vektoren

$$\psi(g_1, \dots, g_m) := A(g_1) \cdots A(g_m) \Omega \in \mathcal{H}$$

schreiben:

$$\mathcal{W}_n(f_1, \dots, f_n) = \langle \psi(f_{n-2}, \dots, f_1), \psi(f_{n-1}, f_n) \rangle.$$

Die konforme Gruppe besitzt auf dem Hilbertraum \mathcal{H} die Darstellung U . Auf dem von Vektoren $\psi(f) = A(f)\Omega$ aufgespannten Unterraum ist diese Darstellung definitionsgemäß die irreduzible, skalare Darstellung mit Skalendimension Δ . Die Darstellung auf dem von $\psi(f_{n-1}, f_n)$ aufgespannten Unterraum \mathcal{H}_2 ist dagegen als Unterdarstellung einer Produktdarstellung im Allgemeinen reduzibel. Die Partialwellenentwicklung zerlegt nun diese Darstellung in ihre irreduziblen Anteile: Auf \mathcal{H}_2 gibt es eine Zerlegung der Eins mittels der Projektoren P_χ auf

irreduzible Darstellungen χ , die wegen der in den meisten Modellen zur Quantenfeldtheorie vorliegenden Separabilität des Hilbertraums \mathcal{H}_2 diskret ist:

$$\text{id}_{\mathcal{H}_2} = \sum_{\chi \in X} P_\chi.$$

Man erhält somit

$$\mathcal{W}_n(f_1, \dots, f_n) = \sum_{\chi \in X} \langle \psi(f_{n-2}, \dots, f_1), P_\chi \psi(f_{n-1}, f_n) \rangle. \quad (4.1)$$

Im Falle der Vierpunktfunktion eines skalaren Feldes treten in der Summe nur die triviale Darstellung $\chi = \text{id}$ sowie unitäre, vollständig symmetrische, spurfreie Tensorarstellungen der konformen Gruppe auf, die durch Tensorrang l und Skalendimension h gekennzeichnet sind:

$$X \subset \{\text{id}\} \cup \{\chi = [l, h] \mid l \in 2\mathbb{N}_0, h \in \mathbb{R}\}. \quad (4.2)$$

Die Projektoren sind in diesem Fall durch

$$P_\chi = \int d^d x d^d y |B_\alpha^\chi(x)\rangle \langle B^{\chi^* \alpha}(x), B^{\chi^* \beta}(y)\rangle \langle B_\beta^\chi(y)|, \quad \chi^* := [l, d-h]$$

gegeben, wobei über die Tensorindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l), \beta$ summiert wird. $B^\chi(x)$ gehört dabei zum Darstellungsraum von χ . Eingesetzt in die Zerlegung (4.1) ergibt sich unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen von B

$$\mathcal{W}_4(f_1, \dots, f_4) = \sum_{\chi \in X} \int d^d x d^d y \langle \psi(f_2, f_1), B_\alpha^\chi(x)\rangle \langle B^{\chi^* \alpha}(x), B^{\chi^* \beta}(y)\rangle \langle B_\beta^\chi(y), \psi(f_3, f_4)\rangle.$$

Im Integral tauchen nun nur noch Zwei- und Dreipunktfunktionen auf, welche aber durch die konforme Kovarianz bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt sind. Nennen wir die unbestimmten Faktoren $C(\chi, \Delta)$ für $\langle B^\chi, \psi \rangle$ und $C(\chi^*)$ für $\langle B^{\chi^*}, B^{\chi^*} \rangle$, so bekommen wir schließlich

$$\mathcal{W}_4(f_1, \dots, f_4) = \sum_{\chi \in X} |C(\chi, \Delta)|^2 C(\chi^*) \beta_M^\chi(f_1, \dots, f_4) =: \sum_{\chi \in X} c_\chi \beta_M^\chi(f_1, \dots, f_4). \quad (4.3)$$

Dabei sind die *Partialwellen* β_M^χ nun eindeutig bestimmt, lediglich die Entwicklungskoeffizienten c_χ sind a priori unbekannt. In ihnen ist die dynamische Information des Modells bezüglich der Vierpunktfunktion enthalten.

Die Partialwellenentwicklung hängt mit der *Operatorproduktentwicklung* zusammen. Diese ist eine asymptotische Entwicklung des Produktes zweier Felder in eine Summe weiterer Felder

$$A^i(x) A^j(-x) = \sum_k C_k^{ij}(x) A^k(0)$$

für nahe benachbarte Punkte, d. h. $x \rightarrow 0$. Eingesetzt in eine Vierpunktfunktion resultiert daraus gerade deren Partialwellenentwicklung. Die beitragenden χ der Partialwellenentwicklung erhalten daher die Interpretation in der Theorie enthaltener Felder der Darstellung χ . Im Falle einer konformen Theorie sind die Koeffizienten $C_k^{ij}(x)$ nicht unabhängig: Der Koeffizient eines Feldes legt bereits alle Koeffizienten solcher Felder fest, die durch Ableitungen aus diesem hervorgehen. Dies ist bei der Partialwellenentwicklung bereits berücksichtigt: Der Beitrag χ eines Nicht-Ableitungsfeldes (eines *quasi-primären* Feldes) enthält alle Deszendentenbeiträge, die durch Ableitungen gebildet werden können.

4.3 Euklidische Partialwellenentwicklung

Obige Betrachtungen waren in der Minkowski'schen Welt gültig. Als Endresultat einer Partialwellenentwicklung in der euklidischen Welt erwarten wir die analytische Fortsetzung von (4.3). Der Weg dorthin ist nun jedoch anders: Die unitären Darstellungen der euklidischen konformen Gruppe sind nicht die analytischen Fortsetzungen unitärer Darstellungen der Minkowski'schen konformen Gruppe. Erstere sind zwar wieder vollständig symmetrische, spurfreie Tensorarstellungen, aber für die Skalendimension gilt nun

$$h \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}.$$

In der oben angegebenen Literatur wird eine kontinuierliche Zerlegung der euklidischen Vierpunktfunktion nach euklidischen Partialwellen β^χ

$$S_4(f_1, \dots, f_4) = \int d\chi g(\chi) \beta^\chi(f_1, \dots, f_4) \quad (4.4)$$

mit (4.2) ähnlichen Trägereigenschaften von $d\chi$,

$$\int d\chi F(\chi) = F(\text{id}) + \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} dh c(\chi) F(\chi), \quad (4.5)$$

hergeleitet, wobei $c(\chi)$ das *Plancherel-Gewicht* ist, der Integrationsweg C_l parallel zur imaginären Achse von $\frac{d}{2} - i\infty$ nach $\frac{d}{2} + i\infty$ führt und für $l = 0$ noch zusätzlich die Stellen $h = d - \Delta$ gegen und $h = \Delta$ im Uhrzeigersinn umkreist. In Abhängigkeit von der modellspezifischen *Partialwellenamplitude* $g(\chi)$ ist es möglich, den Integrationsweg zu schließen. Aus dem Integral wird dann eine Summe über die Residuen, welche bei Vierpunktfunktionen eines Quantenfeldes nur bei reellen h liegen. Diese Summe entspricht der analytischen Fortsetzung der Minkowski'schen Zerlegung (4.3).

4.3.1 Bestimmung der Partialwellen

Um später eine konkrete Vierpunktfunktion entwickeln zu können, benötigen wir explizite Formeln für die Partialwellen β^χ . Sie sind zunächst gemäß [Ma74], [Ma75] als ein Integral

$$\beta^\chi(x_1, \dots, x_4) = \int d^d x_0 \sum_\alpha \Gamma_\alpha^\chi(x_1, x_2; x_0) \Gamma_\alpha^{\chi^*}(x_3, x_4; x_0), \quad \alpha \text{ Multiindex} \quad (4.6)$$

über euklidische Dreipunktfunktionen Γ^χ des zu entwickelnden, skalaren Feldes der Skalendimension Δ mit einem Feld der Darstellung $\chi = [l, h]$ gegeben.¹ Diese sind aufgrund ihrer konformen Kovarianz bis auf eine Normierung $N(\chi)$ festgelegt und lauten

$$\Gamma_\alpha^\chi(x_1, x_2; x_0) = 2^{\Delta + \frac{h+l}{2}} N(\chi) (x_{12}^2)^{\frac{h}{2} - \Delta} (x_{01}^2 x_{02}^2)^{-\frac{h}{2}} (e_{\alpha_1}^{12} \cdots e_{\alpha_l}^{12} - \text{Spuren}), \quad x_{ij} := x_i - x_j.$$

Dabei ist e^{12} ein Einheitsvektor und durch

$$e^{ij} = \frac{\xi^{ij}}{|\xi^{ij}|}, \quad \xi^{ij} = \frac{x_{0i}}{x_{0i}^2} - \frac{x_{0j}}{x_{0j}^2}$$

¹Dabei ist hier und im Folgenden bei solchen Integralen stets stillschweigend gemeint, sie in ihrem Konvergenzbereich auszurechnen und das Ergebnis für beliebige Werte der Parameter analytisch fortzusetzen.

definiert. Der Normierungsfaktor mit den für die Partialwellenentwicklung korrekten Eigenschaften findet sich in der angegebenen Literatur.

Um das Integral in (4.6) bestimmen zu können, ist zunächst die Kontraktion der spurfreien Anteile von $e_{\alpha_1}^{ij} \cdots e_{\alpha_l}^{ij}$ durchzuführen. Dies ist mithilfe der Gegenbauer-Polynome $C_l^\nu(z)$ [Er53] möglich, es gilt nämlich [HPR00]

$$\sum_{\alpha} (e_{\alpha_1}^{12} \cdots e_{\alpha_l}^{12} - \text{Spuren}) (e_{\alpha_1}^{34} \cdots e_{\alpha_l}^{34} - \text{Spuren}) = G_l^{\mu-1} (e^{12} \cdot e^{34}),$$

$$\mu = \frac{d}{2}, \quad G_l^\nu(z) = \frac{1}{c_{ll}^\nu} C_l^\nu(z).$$

Die Abkürzung $\mu = \frac{d}{2}$ wird von nun an durchgängig benutzt, ferner werden wir später gerade Raumdimension, d. h. $\mu \in \mathbb{N}$ annehmen. $c_{ll}^\nu = \frac{2^l(\nu)_l}{l!}$ ist der Koeffizient von z^l in $C_l^\nu(z)$. Für $\nu = 0 \Leftrightarrow d = 2$ gilt zunächst $C_l^\nu(z) = 0, l > 0$, durch die Normierung von G_l^ν erhält man aber nichtverschwindende, sinnvolle Ausdrücke beim Einsetzen von $\nu = 0$ in die für generisches ν bestimmten Polynome.

Wir können β^χ somit schreiben als

$$\beta^\chi(x_1, \dots, x_4) = 2^{2\Delta + \mu + l} N(\chi) N(\chi^*) \frac{1}{(x_{12}^2 x_{34}^2)^\Delta} (x_{12}^2)^{\frac{h}{2}} (x_{34}^2)^{\frac{d-h}{2}} \cdot \int d^d x_0 (x_{01}^2 x_{02}^2)^{-\frac{h}{2}} (x_{03}^2 x_{04}^2)^{-\frac{d-h}{2}} G_l^{\mu-1} (e^{12} \cdot e^{34}).$$

Dieses Integral kann nun ausgewertet werden, wenn das Gegenbauer-Polynom ausgeschrieben wird und die auftretenden Potenzen $(e^{12} \cdot e^{34})^m$ als Summen von Potenzen von x_{ij}^2 geschrieben werden [LR93] [HPR00]. Das Resultat ist eine Potenzreihe in den konformen Invarianten $u, 1 - v$, wobei die Koeffizienten explizit durch vierfache, endliche Summen gegeben sind.²

Für unsere Zwecke ist es einfacher, die Partialwellen rekursiv zu bestimmen [DO01]. Dies ist insbesondere dann angebracht, wenn die Partialwellenentwicklung in einem Computeralgebra-System implementiert werden soll, da bei der Rekursion – im Gegensatz zur expliziten Berechnung mittels der vierfachen Summe – die bereits bestimmten Koeffizienten effizient genutzt werden.

Die rekursive Berechnung wird durch die Rekursionsrelation der normierten Gegenbauer-Polynome

$$G_l^\nu(z) = z G_{l-1}^\nu(z) - \frac{(2\nu + l - 2)(l - 1)}{4(\nu + l - 2)(\nu + l - 1)} G_{l-2}^\nu(z)$$

ermöglicht. Führen wir nämlich die β^χ verallgemeinernde und nur von u, v abhängende Funk-

²Es sei noch bemerkt, dass man durch das Ersetzen von $G_l^{\mu-1} (e^{12} \cdot e^{34})$ durch die erzeugende Funktion der Gegenbauer-Polynome eine erzeugende Funktion für die Partialwellen bekommt. Das x_0 -Integral ist dann aber vermutlich nicht ausführbar.

tion

$$B^\chi(u, v, n_1, n_3) = (x_{12}^2)^{\mu - \delta_4} (x_{14}^2)^{\delta_1 + \delta_4 - \mu} (x_{24}^2)^{\delta_2 + \delta_4 - \mu} (x_{34}^2)^{\delta_3} \\ \cdot \int d^d x_0 \frac{2^l G_l^{\mu-1}(e^{12} \cdot e^{34})}{(x_{01}^2)^{\delta_1} (x_{02}^2)^{\delta_2} (x_{03}^2)^{\delta_3} (x_{04}^2)^{\delta_4}}$$

$$\text{mit } n_1, n_3 \in \mathbb{Z}, \delta_1 = \frac{h + n_1}{2}, \delta_2 = \frac{h - n_1}{2}, \delta_3 = \frac{d - h + n_3}{2}, \delta_4 = \frac{d - h - n_3}{2}$$

ein, so dass

$$\beta^\chi(x_1, \dots, x_4) = 2^{2\Delta + \mu} N(\chi) N(\chi^*) \frac{1}{(x_{12}^2 x_{34}^2)^\Delta} B^\chi(u, v, 0, 0) \quad (4.7)$$

gilt, dann geht die Rekursionsrelation der Gegenbauer-Polynome in eine der B über:

$$B^{[l,h]}(u, v, n_1, n_3) = B^{[l-1,h]}(+ -) + \frac{v}{u} B^{[l-1,h]}(- +) - \frac{1}{u} B^{[l-1,h]}(++) \\ - B^{[l-1,h]}(--) - \frac{(d+l-4)(l-1)}{(\mu+l-3)(\mu+l-2)} B^{[l-2,h]}(u, v, n_1, n_3). \quad (4.8)$$

Dabei meint \pm im Argument die Addition von ± 1 zum jeweiligen n_i . Zur Herleitung dieser Beziehung muss man zunächst das Skalarprodukt $z = e^{12} \cdot e^{34}$ durch Einsetzen und Ausnutzen von $2x_{ik} \cdot x_{jk} = x_{ik}^2 + x_{jk}^2 - x_{ij}^2$ ausrechnen:

$$2z = \frac{1}{\sqrt{x_{12}^2 x_{13}^2}} \left(\sqrt{\frac{x_{02}^2 x_{03}^2}{x_{01}^2 x_{04}^2}} x_{14}^2 + \sqrt{\frac{x_{01}^2 x_{04}^2}{x_{02}^2 x_{03}^2}} x_{23}^2 - \sqrt{\frac{x_{02}^2 x_{04}^2}{x_{01}^2 x_{03}^2}} x_{13}^2 - \sqrt{\frac{x_{01}^2 x_{03}^2}{x_{02}^2 x_{04}^2}} x_{24}^2 \right).$$

Diese Rekursionsrelation ermöglicht es uns, $\beta^\chi \sim B^\chi(\cdot, 0, 0)$ als eine endliche Summe aus $B^{[0,h]}(\cdot, n_1, n_3)$ mit $|n_i| \leq l, n_i - l \in 2\mathbb{Z}$ zu schreiben. $B^{[0,h]}$ ist in expliziter Form bereits von zahlreichen Autoren erhalten worden [LR92] [DO01], von Bedeutung ist dabei $\sum_i \delta_i = d$ [Sy72]. Diese Bedingung ermöglicht es, $B^{[0,h]}$ nach einer Feynman-Parametrisierung (A.11) als $\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\delta_1, \dots, \delta_4)} E(x_1, \delta_1, \dots, x_4, \delta_4)$ zu schreiben, wobei E in (A.12) definiert ist. Der explizite Ausdruck von E in (A.13) zeigt, dass sich die x_{ij}^2 -Potenzen gerade mit denen von $B^{[0,h]}$ aufheben und $B^{[0,h]}$ somit tatsächlich nur von u, v abhängt:

$$B^{[0,h]}(u, v, n_1, n_3) = \frac{\pi^{\mu+1}}{\Gamma(\delta_1, \dots, \delta_4)} \\ \cdot \left(\frac{E(\mu - \delta_2, \mu - \delta_1, \mu - \delta_4, \mu - \delta_3, u, v)}{\sin(\pi(\mu - h))} + \frac{E(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, u, v)}{\sin(\pi(h - \mu))} \right). \quad (4.9)$$

Dabei nehmen wir zunächst den generischen, nichtentarteten Fall $h - \mu \notin \mathbb{Z}$ an. Ersetzen wir für feste n_i h durch $h^* = d - h$, so bemerken wir, dass $\mu - \delta_2$ in δ_1 usw. übergeht. Folglich überführt diese Ersetzung den ersten E -Summanden – nennen wir ihn einschließlich Vorfaktor $B_+^{[0,h]}$ – in den zweiten, $B_-^{[0,h]}$, und umgekehrt. Wegen der Linearität der Rekursionsrelation können wir die Partialwellen daher dadurch erhalten, dass wir die Rekursion einmal mit $B_+^{[0,h]}$ und einmal mit $B_-^{[0,h]}$ statt $B^{[0,h]}$ als Rekursionsanfang durchführen und erst am Schluss die Summe bilden. Wegen des zu beachtenden, unter $h \mapsto h^*$ für $|n_1| \neq |n_3|$ nicht invarianten

Vorfaktors $\frac{\pi^{\mu+1}}{\Gamma(\delta_1, \dots, \delta_4)}$ ist es nicht offensichtlich, dass die beiden so erhaltenen Summanden β_{\pm}^{χ} selbst auch durch diese Ersetzung auseinander hervorgehen und somit $\beta^{\chi} = \beta_{+}^{\chi} + \beta_{+}^{\chi^*}$ gilt. Dies muss aber so sein, da β^{χ} unter $\chi \mapsto \chi^*$ invariant ist [Ma74] [Ma75]: Daraus folgt $\beta_{-}^{\chi} - \beta_{+}^{\chi^*} = \beta_{-}^{\chi^*} - \beta_{+}^{\chi}$. Wir wir aber an Rekursionsanfang $B_{+}^{[0,h]}$ (siehe (4.11)) und Rekursionsrelation sehen, sind β_{\pm}^{χ} gegeben durch bei $u = 0$ analytische Funktionen multipliziert mit einer Potenz $u^{\pm \frac{h}{2}}$ modulo einer halbzahligen Potenz. Die letzte Gleichung besagt dann, dass zwei analytische Funktionen multipliziert mit verschiedenen, für generisches h nichtganzzahligen u -Potenzen übereinstimmen, dann müssen sie aber beide 0 sein, d. h. $\beta_{+}^{\chi} = \beta_{-}^{\chi^*}$. Wir können uns daher auf die Bestimmung von β_{+}^{χ} einschränken und am Schluss symmetrisieren. Der Beitrag β_{-}^{χ} wird in der Literatur als *Schatterterm* bezeichnet.

Die Potenzreihenentwicklung für den ersten Summanden $B_{+}^{[0,h]}$ erhalten wir aus (A.16):

$$B_{+}^{[0,h]}(u, v, n_1, n_3) = \frac{\pi^{\mu+1} E(\mu - \delta_2, \mu - \delta_1, \mu - \delta_4, \mu - \delta_3, u, v)}{\sin(\pi(\mu - h)) \Gamma(\delta_1, \dots, \delta_4)} \quad (4.10)$$

$$= u^{\frac{h+n_3}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm}^{[0,h]}(n_1, n_3) u^n (1-v)^m, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} b_{nm}^{[0,h]}(n_1, n_3) &= \frac{\pi^{\mu+1} E_{nm}(\mu - \delta_2, \mu - \delta_1, \mu - \delta_4, \mu - \delta_3)}{\sin(\pi(\mu - h)) \Gamma(\delta_1, \dots, \delta_4)} \\ &= \frac{\pi^{\mu} \Gamma\left(\frac{h-n_3}{2}, \frac{h+n_3}{2}, \mu - h\right)}{\Gamma\left(\frac{d-h+n_3}{2}, \frac{d-h-n_3}{2}, h\right)} \\ &\quad \cdot \frac{\left(\frac{h-n_3}{2}\right)_n \left(\frac{h+n_3}{2}\right)_n \left(\frac{h+n_3}{2}\right)_{n+m} \left(\frac{h-n_1}{2}\right)_{n+m}}{(h - \mu + 1)_n (h)_{2n+m} n! m!}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Potenzreihendarstellung für allgemeines B_{+}^{χ} ist gegeben durch

Lemma 4.1 $B_{+}^{\chi}(u, v, n_1, n_3)$ besitzt die Potenzreihenentwicklung

$$B_{+}^{\chi}(u, v, n_1, n_3) = u^{\frac{h+n_3-l}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm}^{\chi}(n_1, n_3) u^n (1-v)^m,$$

wobei die Koeffizienten die Rekursionsrelation

$$\begin{aligned} b_{nm}^{\chi}(n_1, n_3) &= b_{nm}^{[l-1,h]}(+ -) + b_{nm}^{[l-1,h]}(- +) - b_{nm}^{[l-1,h]}(+ +) - b_{nm}^{[l-1,h]}(- -) \\ &\quad - b_{n-1 m-1}^{[l-1,h]}(- +) - \frac{(d+l-4)(l-1)}{(\mu+l-3)(\mu+l-2)} b_{n-1 m}^{[l-2,h]}(n_1, n_3) \end{aligned} \quad (4.13)$$

erfüllen und für $l = 0$ durch (4.12) gegeben sind. $b_{nm}^{\chi}(n_1, n_3)$ ist ein Polynom in n_1 höchstens vom Grad $m + 2n - l$, insbesondere gilt also $b_{nm}^{\chi}(n_1, n_3) = 0$ für $m + 2n < l$.

Beweis. Potenzreihendarstellung und Rekursionsrelation ergeben sich unmittelbar durch Induktion unter Verwendung der zugrunde liegenden Rekursionsrelation (4.8), wobei man dort $v = 1 - (1 - v)$ schreibt und beobachtet, dass die $\frac{1}{u}$ -Faktoren geeignet mit dem Erhöhen von n_3 korrelieren.

Die zweite Aussage beweist man ebenfalls durch Induktion. Für $l = 0$ gilt sie nach (4.12) offenbar. Gelte sie nun für alle $l' < l$, dann sehen wir, dass die letzten beiden Summanden in der Rekursionsrelation für $b_{nm}^\chi(n_1, n_3)$ nach dieser Induktionsvoraussetzung Polynome in n_1 höchstens vom Grad $m + 2n - l$ sind. Mit dem Polynom $P(n_1) = b_{nm}^{[l-1, h]}(n_1, n_3 - 1) - b_{nm}^{[l-1, h]}(n_1, n_3 + 1)$, das nach Induktionsvoraussetzung höchstens vom Grad $m + 2n - l + 1$ ist, lassen sich die übrigen vier Summanden als $P(n_1 + 1) - P(n_1 - 1)$ schreiben. In dieser Differenz kürzt sich die höchste n_1 -Potenz aber heraus. \square

Korollar 4.2 *Die Partialwellen lassen sich aufspalten in zwei Terme*

$$\beta^\chi = \beta_+^\chi + \beta_+^{\chi^*},$$

wobei β_+^χ die Potenzreihendarstellung

$$\begin{aligned} \beta_+^\chi(x_1, \dots, x_4) &= \frac{u^{\frac{h-l}{2}-\Delta}}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} \sum_{n,m=0}^{\infty} \beta_{nm}^\chi u^n (1-v)^m \\ \beta_{nm}^\chi &= 2^{2\Delta+\mu} N(\chi) N(\chi^*) b_{nm}^\chi(0, 0) \end{aligned} \quad (4.14)$$

besitzt.

Geschlossene Lösungen dieser Rekursionsrelationen existieren nur in Spezialfällen. In [DO01] werden sie für $d = 2$ und $d = 4$ erhalten und besitzen die Form einer Summe aus Produkten zweier hypergeometrischer Funktionen.

4.3.2 Durchführung der Entwicklung

Da nun Ausdrücke für die Partialwellen vorliegen, kann die Entwicklung gemäß (4.4) durchgeführt werden. Mit den Maßeigenschaften (4.5) ergibt sich

$$S_4(x_1, \dots, x_4) = g(\text{id}) G_2(x_1, x_2) G_2(x_3, x_4) + \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} dh c(\chi) g(\chi) \beta^\chi(x_1, \dots, x_4),$$

wobei das Produkt der Zweipunktfunktionen die Partialwelle zur trivialen Darstellung id ist und die Normierung der Zweipunktfunktion G_2 durch

$$G_2(x_1, x_2) = n_\Delta (x_{12}^2)^{-\Delta}, \quad n_\Delta = \frac{2^\Delta \Gamma(\Delta)}{(2\pi)^\mu \Gamma(\mu - \Delta)}$$

gegeben ist. In (2.7) wurde die Vierpunktfunktion G als Differenz von S_4 und dem Produkt der Zweipunktfunktionen S_2 eingeführt. Im Fall eines konformen Feldes ist S_2 aber nach (3.6) durch $S_2 = \frac{C_\Delta}{n_\Delta} G_2$ gegeben, so dass wir $g(\text{id}) = \frac{C_\Delta^2}{n_\Delta^2}$ ablesen und für G nach Abspaltung des konform kovarianten Faktors $(x_{13}^2 x_{24}^2)^{-\Delta}$ und Aufspaltung von β^χ die Entwicklung

$$g(u, v) = \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} dh c(\chi) g(\chi) \left(\beta_+^\chi(u, v) + \beta_+^{\chi^*}(u, v) \right).$$

Da die Integration wegen $h \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}$ symmetrisch unter $h \mapsto h^*$ ist und dasselbe für β^χ und $c(\chi)$ gilt, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch für die Partialwellenamplitude $g(\chi)$ die Symmetrie $g(\chi) = g(\chi^*)$ fordern. Dann können wir aber mit derselben Begründung den Schattenterm im Integranden weglassen, wenn wir ihn durch einen Vorfaktor 2 berücksichtigen. Wir erhalten somit

$$g(u, v) = 2 \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} dh c(\chi) g(\chi) \beta_+^\chi(u, v).$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, unnormierte Partialwellen q^χ einzuführen, deren Koeffizienten rein algebraische, Δ -unabhängige Ausdrücke sind:

$$\begin{aligned} q^\chi(u, v) &:= \frac{d-h-2}{d-h+l-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d-h+l}{2}\right)^2 \Gamma(h)}{\pi^\mu \Gamma\left(\frac{h-l}{2}\right)^2 \Gamma(\mu-h)} B_+^\chi(u, v, 0, 0) \\ \Rightarrow \beta_+^\chi(u, v) &= 2^{2\Delta+\mu} N(\chi) N(\chi^*) \frac{d-h+l-2}{d-h-2} \frac{\pi^\mu \Gamma\left(\frac{h-l}{2}\right)^2 \Gamma(\mu-h)}{\Gamma\left(\frac{d-h+l}{2}\right)^2 \Gamma(h)} u^{-\Delta} q^\chi(u, v). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dass die Koeffizienten q_{nm}^χ hierdurch wirklich algebraische Ausdrücke werden, ist leicht einzusehen: Sie sind aufgrund der Rekursionsrelation (4.13) von b_{nm}^χ eine Summe aus $b_{nm}^{[0,h]}(n_1, n_3)$ mit $|n_i| \leq l, n_i - l \in 2\mathbb{Z}$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{d-h-2}{d-h+l-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d-h+l}{2}\right)^2 \Gamma(h)}{\pi^\mu \Gamma\left(\frac{h-l}{2}\right)^2 \Gamma(\mu-h)} b_{nm}^{[0,h]}(n_1, n_3) \\ &\sim \frac{d-h-2}{d-h+l-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d-h+l}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{h-l}{2}\right)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{h-n_3}{2}, \frac{h+n_3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-h+n_3}{2}, \frac{d-h-n_3}{2}\right)} \\ &= \frac{d-h-2}{d-h+l-2} \left(\frac{h-l}{2}\right)_{\frac{l-n_3}{2}} \left(\frac{h-l}{2}\right)_{\frac{l+n_3}{2}} \left(\frac{d-h+n_3}{2}\right)_{\frac{l-n_3}{2}} \left(\frac{d-h-n_3}{2}\right)_{\frac{l+n_3}{2}}, \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die offensichtlich algebraischen Ausdrücke von $b_{nm}^{[0,h]}(n_1, n_3)$ in (4.12) weggelassen wurden. Die Pochhammer-Symbole dieser Formel sind wegen der nichtnegativen Indizes reguläre algebraische Ausdrücke. Der Faktor $\frac{d-h-2}{d-h+l-2}$ ist für $l=0$ 1, für $l>0$ kürzt sich sein Nenner mit einem Faktor eines der letzten beiden Pochhammer-Symbole, so dass durch ihn keine Singularität eingeführt werden kann. Die weggelassenen Ausdrücke für $h > \mu - 1$ sowie – mit etwas Nachdenken – der Vorfaktor in der Rekursionsformel sind ebenfalls reguläre algebraische Ausdrücke. Für $h > \mu - 1$ sind die Partialwellen q^χ somit durch Potenzreihen gegeben, deren Koeffizienten reguläre algebraische Ausdrücke in h sind.

Fassen wir alle Vorfaktoren im Integral sowie zusätzlich noch den Vorfaktor n_Δ^{-2} der Zweipunktfunktion zu $M_\Delta(\chi)$ zusammen, so erhalten wir schließlich die Partialwellenentwicklung ausgedrückt durch q^χ :

$$\begin{aligned} g(u, v) &= 2 \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} dh c(\chi) g(\chi) \beta_+^\chi(u, v) \\ &= u^{-\Delta} \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} dh (n_\Delta^2 g(\chi)) M_\Delta(\chi) q^\chi(u, v). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dabei ist das Produkt der Vorfaktoren laut Literatur für gerade Raumdimension d durch

$$\begin{aligned}
M_{\Delta}(\chi) &= 2c(\chi)2^{2\Delta+\mu}N(\chi)N(\chi^*)\frac{d-h+l-2}{d-h-2}\frac{\pi^{\mu}\Gamma\left(\frac{h-l}{2}\right)^2\Gamma(\mu-h)}{n_{\Delta}^2\Gamma\left(\frac{d-h+l}{2}\right)^2\Gamma(h)} \\
&= \frac{(h+l-1)(d-h+l-2)_2\Gamma\left(\mu+l,\Delta-\frac{h-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{h-l}{2}\right)^2}{(h-1)\Gamma\left(h-\mu,\mu-\Delta+\frac{h+l}{2}\right)\Gamma(\Delta)^2l!} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma\left(d-h-2,\Delta-\frac{d-h-l}{2}\right)\Gamma(\mu-\Delta)^2}{\Gamma\left(\mu-\Delta+\frac{d-h+l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-h+l}{2}\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

festgelegt.³

Bei gegebener Partialwellenamplitude $g(\chi)$ lässt sich die zugehörige Vierpunktfunktion nach (4.16) bestimmen. Für vernünftige Amplituden lässt sich die Integration in der rechten Halbebene schließen, und der Integrand enthält nur einfache Pole bei reellen h . Das Ergebnis der Integration ist dann eine Summe über die Residuen, welche selbst proportional zu den Partialwellen q^{χ} sind, also zu Potenzreihen in $u, 1-v$ mit der Potenz $u^{\frac{h-l}{2}}$ als Vorfaktor. Treten dagegen Pole der Ordnung $k+1$ auf, so ergeben sich wegen des bei der Bestimmung der Residuen nötigen k -fachen Ableitens von $u^{\frac{h-l}{2}}$ nach h zusätzliche Beiträge mit $(\ln u)^k$ -Faktoren.

Dass sich die Integration gerade in der rechten Halbebene schließen lässt, liegt am Ersetzen des Schattenterms $\beta_{+}^{\chi^*}$ durch das für große, positive $\text{Re } h$ schnell abfallende β_{+}^{χ} . Hätten wir nur den Schattenterm übrig behalten, so hätten wir den Integrationsweg nur in der linken Halbebene schließen können mit demselben Endresultat.

Umgekehrt lässt sich bei gegebener Vierpunktfunktion auf das Verhalten der Partialwellenamplitude $g(\chi)$ bei ihren Polen schließen. Dazu ist zunächst die Potenzreihenentwicklung von $g(u, v)$ in $u, 1-v$ zu bestimmen. Die höchste auftretende $\ln u$ -Potenz bestimmt nach dem eben Gesagten die höchste auftretende Ordnung der Pole. Die Entwicklung von $g(u, v)$ muss sich als Summe von Residuen der Partialwellen β_{+}^{χ} schreiben lassen, welche ebenfalls durch Potenzreihen gegeben sind. Durch Koeffizientenvergleich der Potenzreihen können wir nun die auftretenden Partialwellen identifizieren und somit die Polstruktur der Amplitude gewinnen. Im Detail werden wir dies im Abschnitt 4.5.2 untersuchen.

4.4 Positivität

Nachdem nun eine Entwicklung der Vierpunktfunktion in Partialwellen hergeleitet wurde, stellt sich die Frage, ob diese Entwicklung Aussagen über die Osterwalder-Schrader-Positivität machen kann. Wüssten wir etwa, dass Partialwellen für sich die Positivitätsbedingung einer Vierpunktfunktion erfüllen, dann erfüllte eine Vierpunktfunktion, die sich als Summe von Partialwellen mit positiven Vorfaktoren schreiben lässt, auch diese Positivitätsbedingung.

Tatsächlich gilt die Aussage, dass die unnormierten Partialwellen ohne Schattenterm

$$\frac{\Gamma(\mu-h)}{N(\chi)N(\chi^*)}\beta_{+}^{\chi} = 2^{2\Delta+\mu}\frac{d-h+l-2}{d-h-2}\frac{\pi^{\mu}\Gamma\left(\frac{h-l}{2}\right)^2\Gamma(\mu-h)^2}{\Gamma\left(\frac{d-h+l}{2}\right)^2\Gamma(h)}u^{-\Delta}q^{\chi}(u, v) \tag{4.18}$$

³In ungerader Raumdimension ändert sich das Plancherel-Gewicht [Ma74] [Do77].

für sich die Positivitätsbedingung (2.6) erfüllen, sofern sie zu einer Darstellung $\chi = [l, h]$ gehören, deren Skalendimension h reell und größer als die Unitaritätsschranke ist, wenn also

$$h > \frac{d-2}{2}, l = 0 \quad \text{oder} \quad h > d-2+l, l > 0 \quad (4.19)$$

gilt [Ma75].⁴ Diese Einschränkung ist plausibel, da das Auftreten einer Partialwelle für die Minkowski-Seite das Vorhandensein des entsprechenden Feldes bedeutet. Ein solches Feld muss aber die Unitaritätsschranke erfüllen.

Ist die Unitarität (4.19) gegeben, so ist auch der Vorfaktor von q^χ in (4.18) positiv. Folglich erfüllt q^χ unter obigen Bedingungen ebenfalls die Osterwalder-Schrader-Positivität. Ist nun eine Vierpunktfunktion eine Summe

$$g(u, v) = u^{-\Delta} \sum_{\chi \in X} c_\chi q^\chi(u, v)$$

aus (4.19) genügenden Partialwellen q^χ mit positiven Entwicklungskoeffizienten c_χ – insbesondere dürfen also nur einfache Pole im Integranden der Entwicklung auftreten –, so erfüllt sie die Positivitätsbedingung (2.6), d. h. wir haben eine hinreichende Bedingung gefunden. Umgekehrt ist die Positivität der Koeffizienten einer solchen Summenentwicklung auch notwendig. Dies kann man sich an (4.3) plausibel machen: c_χ ist das Produkt eines positiven Quadrates mit dem Normierungsfaktor der Zweipunktfunktion des der Partialwelle entsprechenden Feldes. Ist dieses Feld positiv, so gilt das auch für dessen Normierungsfaktor und somit für c_χ .

Eine andere Herleitung der Notwendigkeit positiver Vorfaktoren benutzt die Tatsache, dass Partialwellen konstruktionsgemäß Eigenfunktionen zu den Casimir-Operatoren C_n der konformen Gruppe in der Produktdarstellung auf \mathcal{H}_2 sind, wenn diese als Differentialoperatoren auf die Koordinaten x_1, x_2 oder x_3, x_4 wirken. Die Eigenwerte hängen von χ ab, für den Casimir-Operator C_2 zweiter Ordnung etwa sind sie $c_2(\chi) = l(l+d-2) - h(d-h)$ [Do77]. Für endliche Mengen X_2, X_3 von Darstellungen χ ist der auf Partialwellen wirkende Differentialoperator

$$D = \prod_{\chi \in X_2} (C_2 - c_2(\chi)) \prod_{\chi \in X_3} (C_3 - c_3(\chi))$$

wohldefiniert und annihiliert in einer Summe aus Partialwellen mindestens diejenigen mit $\chi \in X_2 \cup X_3$, alle anderen werden mit einem Eigenwert $d(\chi)$ reproduziert. Dieses hilft uns bei der Konstruktion solcher Testfunktionen für die Positivität (2.6), die vorgegebene Partialwellen prüfen. Betrachten wir nämlich zu einer Testfunktion $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{2d})$ die Testfunktion $D^* f$ ⁵

⁴Die in [Ma75] vorgenommene Aufspaltung von Γ^X in zwei Q^X -Anteile resultiert nach den dortigen Integralmanipulationen in einer Summe über Residuen eines zu β_+^X proportionalen Integranden, über den die Positivitätsaussage gemacht wird.

⁵ D^* ist der zu D adjungierte Differentialoperator.

und setzen diese in (2.6) ein, so erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned}
0 &\leq G((D^*f)^* \otimes D^*f) \\
&= G(D^*f^* \otimes D^*f) \\
&= \int d^d x_1 \cdots d^d x_4 G(x_1, \dots, x_4) (D_{12}^* f^*(x_1, x_2)) (D_{34}^* f(x_3, x_4)) \\
&= \int d^d x_1 \cdots d^d x_4 (D_{12} D_{34} G(x_1, \dots, x_4)) f^*(x_1, x_2) f(x_3, x_4) \\
&= \int d^d x_1 \cdots d^d x_4 \sum_{\chi \in X} c_\chi d(\chi)^2 q^\chi(x_1, \dots, x_4) f^*(x_1, x_2) f(x_3, x_4) \\
&= \sum_{\chi \in X} c_\chi d(\chi)^2 q^\chi(f^* \otimes f), \quad d(\chi) = 0 \text{ für } \chi \in X_2 \cup X_3.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, dass D^* mit der $*$ -Operation auf Testfunktionen vertauscht (θ ist ja Element der konformen Gruppe $O(d+1, 1)$) und Partialwellen symmetrisch bezüglich der Permutation $x_1, x_2 \leftrightarrow x_3, x_4$ sind. Approximieren wir nun mit f eine Summe von δ -Funktionen wie in Abschnitt 2.7, so erhalten wir die dort hergeleiteten Determinantenbedingungen. Tatsächlich reicht zum Herleiten der Notwendigkeit von $c_\chi \geq 0$ bereits der Spezialfall der 1×1 -Determinante

$$g(s^2, (1-s)^2) \geq 0 \quad \forall s \in (0, 1)$$

aus Korollar 3.2 und hier speziell der Limes $s \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{\chi \in X} c_\chi d(\chi)^2 q^\chi(s^2, (1-s)^2) \\
&= \sum_{\chi \in X} c_\chi d(\chi)^2 s^{h-l-2\Delta} \sum_{n,m=0}^{\infty} q_{nm}^\chi s^{2n} (2s-s^2)^m \\
&= \sum_{\chi \in X} c_\chi d(\chi)^2 s^{h-2\Delta} \left(\sum_{m+2n=l} 2^m q_{nm}^\chi + \mathcal{O}(s) \right).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $q_{nm}^\chi = 0$ für $m+2n < l$ benutzt. Das für $s \rightarrow 0$ führende Verhalten ist offenbar durch die Partialwelle mit kleinstem h und $c_\chi d(\chi)^2 \neq 0$ gegeben. Wäre nun ein $c_\chi < 0$, so ließe sich durch geschickte Wahl der Mengen X_2, X_3 die zugehörige Partialwelle zur im Limes führenden machen, was aber wegen $\sum_{m+2n=l} 2^m q_{nm}^\chi > 0$ (ohne Beweis) die Positivitätsbedingung verletzte.

In [FJ96] wird eine ähnliche Technik benutzt, um in einem $s \rightarrow 0$ vergleichbaren Limes einen Projektor auf eine irreduzible Darstellung der konformen Gruppe zu erhalten.

Verglichen mit den Determinantenbedingungen des letzten Kapitels, welche jeweils auf einer ganzen Menge von Punkten bzw. konformen Invarianten zu gelten haben, besteht dieser Positivitätstest aus einer Folge definitiver Bedingungen ohne die zusätzliche Notwendigkeit der Wahl von Punkten. Man kann sich diese Bedingungen als komplexe Ausdrücke wie etwa Determinanten mit dicht beieinander liegenden Punkten vorstellen, denn dieses wäre die Situation bei Approximation des Differentialoperators durch einen Differenzenoperator. Bevor man jedoch in der Lage ist, diese Bedingungen zu prüfen, muss die Partialwellenentwicklung erst einmal erhalten werden.

4.5 Anwendung

4.5.1 Freies Feld

Beim freien Feld ist die Partialwellenamplitude laut der angegebenen Literatur einfach die konstante Funktion $n_{\Delta}^2 g(\chi) = C_{\Delta}^2$. Die Pole des Integranden sind die einfachen Pole des Faktors $\Gamma(\Delta - \frac{h-l}{2})$ im Vorfaktor $M_{\Delta}(\chi)$ aus (4.17), sie liegen bei $h = 2\Delta + l + 2t, t \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $\text{Res}_{h=2\Delta+l+2t} \Gamma(\Delta - \frac{h-l}{2}) = 2 \frac{(-1)^{t+1}}{t!}$, somit haben wir nach dem Residuensatz die Entwicklung

$$\begin{aligned} g(u, v) &= C_{\Delta}^2 u^{-\Delta} \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0, t \in \mathbb{N}_0} 2 \frac{(-1)^t}{t!} \frac{M_{\Delta}([l, h])}{\Gamma(\Delta - \frac{h-l}{2})} q^{[l, h]}(u, v) \Big|_{h=2\Delta+l+2t} \\ &= C_{\Delta}^2 \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0, t \in \mathbb{N}_0} 2 \frac{(-1)^t}{t!} \frac{M_{\Delta}([l, h])}{\Gamma(\Delta - \frac{h-l}{2})} u^t \sum_{n, m=0}^{\infty} q_{nm}^{[l, h]} u^n (1-v)^m \Big|_{h=2\Delta+l+2t}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wegen der mathematisch negativen Richtung des Integrationsweges kommt hier ein zusätzliches Vorzeichen zustande.

Gemäß der Herleitung der Partialwellen gilt diese Formel zunächst nur, falls für alle $h = 2\Delta + l + 2t$ die Bedingung $h - \mu \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Delta \notin \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Ansonsten tritt in (4.9) eine Entartung auf, die sich allerdings nicht mit l'Hôpital wie in (A.17) aufklären lässt, da einige zusätzliche Pole und Nullstellen in den Vorfaktoren auftreten. Die einfachste Analyse des entarteten Falls ist die Untersuchung des Entwicklungskoeffizienten in (4.20), sie hat als Ergebnis, dass sich dort alle Pole mit Nullstellen kompensieren und somit für Skalendimensionen $h = 2\Delta + l + 2t, l \in 2\mathbb{N}_0$ gar keine Entartung vorliegt: Der Koeffizient ist nach einigen Umformungen und unter Berücksichtigung von $l \in 2\mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} c_{lt}^0(\Delta) &= 2 \frac{(-1)^t}{t!} \frac{M_{\Delta}([l, h])}{\Gamma(\Delta - \frac{h-l}{2})} \Big|_{h=2\Delta+l+2t} \\ &= \frac{2(h+l-1)(\Delta)_t^2 (\Delta - \mu + 1)_t^2}{t!(h-1)(h-t-\mu)_t (\mu+l)_t! (2\Delta+t-d+1)_t (2\Delta+2t-d+3)_l}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dabei soll die Unitaritätsschranke gelten, also $\Delta \geq \mu - 1, h \geq l + 2t + d - 2$. Zur weiteren Untersuchung ist eine Fallunterscheidung angebracht: Für $t = 0$ erhalten wir

$$c_{l0}^0(\Delta) = \frac{2(h+l-1)}{(h-1)!(2\Delta-d+3)_l}, \quad (4.22)$$

was für $l \in 2\mathbb{N}_0$ wegen der Unitaritätsschranke echt positiv und endlich ist.⁶ Für $t > 0$ sind zunächst einmal alle geklammerten Terme des Bruchs nichtnegativ, der Koeffizient selbst ist somit nichtnegativ. Sein Zähler hat an der Unitaritätsschranke eine zweifache Nullstelle für $d \geq 4$, eine vierfache für $d = 2$. Sein Nenner hat ebenfalls nur an der Unitaritätsschranke eine Nullstelle und zwar nur für $t = 1$, nämlich eine zweifache für $d = 2, l = 0$, eine einfache sonst.

In jedem Fall ist der Koeffizient also endlich und nichtnegativ. An der Unitaritätsschranke verschwindet er für $t > 0$, ist jedoch für $t = 0$ echt positiv. Die Partialwellen q^{χ} sind für

⁶Ohne den Faktor $\frac{d-h-2}{d-h+l-2}$ in der Definition von q^{χ} hätten wir an dieser Stelle für $\Delta = \mu - 1, l > 0$ einen singulären Koeffizienten und $q^{\chi} = 0$.

$h > \mu - 1$ ebenfalls endlich, was alle Fälle außer $d = 2, \Delta = 0, l = t = 0$ abdeckt. Die einzige tatsächliche Singularität in (4.20) gibt es also an der Unitaritätsschranke in zwei Dimensionen, was aber zu erwarten ist: Ein masseloses Feld in zwei Dimensionen existiert nicht.

Die Positivität der Entwicklungskoeffizienten überrascht nicht, denn das freie Feld erfüllt ja die Osterwalder-Schrader-Positivität. Die Unitaritätsschranke geht erwartungsgemäß ganz wesentlich ein: Einmal sorgt sie für die Unitarität $h > \frac{d-2}{2}, l = 0$ und $h > d - 2 + l, l > 0$ der Partialwellen ($h = 2\Delta + l + 2t > d - 2 + l + 2t$), einmal für die Positivität der Koeffizienten.

Die beitragenden $\chi = [l, 2\Delta + l + 2t]$ besitzen nach dem in 4.2 Gesagten die Interpretation im freien Fall vorhandener Felder (des *Feldinhalts*), welche aus dem freien Feld A gebildet werden können und sich nicht als Ableitung eines Feldes darstellen lassen. Der Beitrag $[0, 2\Delta]$ rührt von $:AA:$ her: So ein Produkt hat gerade die doppelte Skalendimension. Der Beitrag $[2, 2\Delta + 2]$ lässt sich modulo Ableitungsterme, die die konforme Kovarianz herstellen, mit $:\partial_\mu A \partial_\nu A:$ identifizieren, denn eine Ableitung ∂_μ erhöht die Skalendimension um 1. $:\partial_\mu A \partial_\nu A:$ lässt sich nicht als Ableitung schreiben. Den Beitrag $[0, 2\Delta + 2]$ schließlich erhalten wir durch Kontraktion des vorigen, $:\partial_\mu A \partial^\mu A:$ (mod Abl.). Auf diese Weise lässt sich jeder Beitrag als ein Produkt zweier mehrfacher Ableitungen von A verstehen, wobei $l + 2t$ die Gesamtzahl der Ableitungen und t die Anzahl der Kontraktionen ist. Das Verschwinden der Beiträge mit $t > 0$ an der Unitaritätsschranke lässt sich vor diesem Hintergrund gut erklären: Dort ist A das freie, masselose Feld, so dass $\partial_\mu \partial^\mu A = 0$ gilt. Dann lässt sich z. B. der Beitrag $l = 0, t = 1$ als Ableitung schreiben,

$$:\partial_\mu A \partial^\mu A: = \partial_\mu :A \partial^\mu A: - :A \partial_\mu \partial^\mu A: = \partial_\mu :A \partial^\mu A: = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu :AA:,$$

so dass er bereits im Beitrag von $:AA:$ enthalten ist. Eine solche Betrachtung ist für jedes $t > 0$ durchführbar.

Wir sehen an der Entwicklung (4.20), dass wegen $h - l \in 2\Delta + 2\mathbb{N}_0$ nur ganze, nichtnegative Potenzen von u auftreten. In der Summe müssen sie sich alle aufheben, denn für die freie Vierpunktfunktion gilt ja nach (3.7) $g(u, v) = C_\Delta^2 (1 + v^{-\Delta})$. Dass dem tatsächlich so ist, verifizieren wir für die ersten Partialwellen in Anhang B mittels Computeralgebra. An dieser Stelle wollen wir der Einfachheit halber nur untersuchen, ob die beiden ersten Terme $2 + \Delta(1 - v)$ in

$$1 + v^{-\Delta} = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta)_m}{m!} (1 - v)^m = 2 + \Delta(1 - v) + \mathcal{O}((1 - v)^2) \quad (4.23)$$

reproduziert werden. Einen konstanten Term in (4.20) können wir offenbar nur für $t = n = m = 0$ erhalten, $q_{00}^{[l, h]}$ ist nach Lemma 4.1 aber nur für $l = 0$ von null verschieden und hat dann nach (4.12) und (4.15) den Wert $q_{00}^{[0, 2\Delta]} = 1$. Der Entwicklungskoeffizient ist nach (4.22) $c_{00}^0 = 2$, so dass der konstante Term der rechten Seite von (4.20) wie gewünscht 2 ist. Ein Term $1 - v$ ergibt sich in (4.20) nur für $t = n = 0, m = 1$. $q_{01}^{[l, h]}$ ist nur für $l = 0, 1$ von null verschieden. Da nur gerade l beitragen, muss die bereits für den konstanten Term benötigte Partialwelle $[0, 2\Delta]$ auch den Term proportional $1 - v$ liefern. Der Koeffizient unterscheidet sich von dem des konstanten Terms um $\frac{b_{01}^{[0, 2\Delta]}(0, 0)}{b_{00}^{[0, 2\Delta]}(0, 0)} = \frac{\Delta}{2}$, ist also wie gewünscht Δ .

4.5.2 Feld mit Wechselwirkung

Im freien Fall lässt sich die Vierpunktfunktion (4.23) als eine Potenzreihe in $u, 1-v$ schreiben (tatsächlich nur in $1-v$) und somit in Partialwellen mit ganzzahligen u -Exponenten, d. h. $h = 2\Delta + l + 2t, t \in \mathbb{N}_0$, entwickeln. Die Potenzreihenentwicklung der Vierpunktfunktion eines konformen Feldes mit Wechselwirkung enthält dagegen im Allgemeinen nichtganzzahlige u -Exponenten und ist von der Form [HMR00]

$$g(u, v) = \sum_i u^{\gamma_i} \sum_{n,m=0}^{\infty} g_{nm}^i u^n (1-v)^m, \quad (4.24)$$

d. h. eine Summe aus Potenzreihen mit Potenzen u^{γ_i} als Vorfaktoren. Dabei lassen sich die *kritischen Exponenten* γ_i nach ihrer Abhängigkeit von der Wechselwirkung in Klassen einteilen: Ist die Stärke der Wechselwirkung durch eine Kopplungskonstante λ gegeben, so dass für $\lambda = 0$ keine Wechselwirkung vorliegt, dann gehören alle solchen $\gamma_i(\lambda)$ zu einer Klasse, deren Terme nullter Ordnung $\gamma_i(0)$ untereinander ganzzahlige Differenzen besitzen.

Die Partialwellenentwicklung einer Funktion $g(u, v)$ der obigen Form muss wegen des Fehlens logarithmischer Terme durch einfache Pole des Integranden zustande kommen, also eine Summe von Partialwellen der Form (4.14) sein. Da diese Potenzreihen mit Vorfaktoren $u^{\frac{h-l}{2}-\Delta(\lambda)}$ sind,⁷ müssen sich die kritischen Exponenten in den Skalendimensionen h der auftretenden Partialwellen manifestieren. Jede Klasse kritischer Exponenten k führt zu „Türmen“ von Beiträgen $\chi = [l, 2\Delta(\lambda) + l + 2t + 2\gamma^k + \mathcal{O}(\lambda)], l \in 2\mathbb{N}_0, t \in \mathbb{N}_0$ mit λ -abhängigen, so genannten *anomalen Skalendimensionen* und einem klassenspezifischen γ^k , denn für solche χ ist der u -Exponent der Partialwellen nach (4.14) $\gamma_{lt}^k = \gamma^k + t + \mathcal{O}(\lambda)$, so dass Differenzen in nullter Ordnung ganzzahlig sind. Beim freien Feld tritt offenbar gerade eine solche Klasse k mit $\gamma^k = 0$ auf.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Partialwellenentwicklung einer in erster Ordnung in λ vorliegenden Vierpunktfunktion obiger Form für die Klasse mit $\gamma^k = 0$ durchzuführen ist. Die Behandlung anderer Klassen lässt sich ähnlich durchführen, wird in dieser Arbeit aber nicht benötigt. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass der freie Anteil der Vierpunktfunktion alleine zur Klasse $\gamma^k = 0$ gehört.

Bezeichnet $g_\lambda^0(u, v)$ den Anteil der Klasse $\gamma^k = 0$ an der Vierpunktfunktion und $g_\lambda(\chi)$ dessen Partialwellenamplitude, so gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{g_\lambda^0(u, v)}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^{\Delta(\lambda)}} &= \frac{\sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} dh (n_{\Delta(\lambda)^2} g_\lambda(\chi)) M_{\Delta(\lambda)}(\chi) u^{-\Delta(\lambda)} q^\chi(u, v)}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^{\Delta(\lambda)}} \\ &= \frac{\sum_{l \in 2\mathbb{N}_0, t \in \mathbb{N}_0} C_{\Delta(\lambda), \lambda}^2 c_{lt}(\Delta(\lambda), \lambda) u^{-\Delta(\lambda)} q^{\chi_{lt}(\Delta(\lambda), \lambda)}(u, v)}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^{\Delta(\lambda)}}, \quad (4.25) \\ \chi_{lt}(\Delta, \lambda) &= 2\Delta + l + 2t + 2\delta_{lt}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned}$$

Es geht die Annahme ein, dass im Integranden nur einfache Pole bei $\chi_{lt}(\Delta(\lambda), \lambda)$ auftreten, d. h. die Partialwellenamplitude verschiebt die Pole der freien Entwicklung bei $\chi_{lt}(\Delta(\lambda), 0)$

⁷Man beachte, dass im Allgemeinen die Skalendimension Δ des Feldes selbst von der Kopplungskonstanten abhängt.

um einen Term der Ordnung λ . Da die Klasse $\gamma^k = 0$ die freie Vierpunktfunktion enthält, muss

$$\begin{aligned} g_\lambda^0(u, v) &= C_{\Delta(\lambda), \lambda}^2 \left(1 + v^{-\Delta(\lambda)}\right) + s_{4\lambda}^{T_0}(u, v), \quad s_{4\lambda}^{T_0}(u, v) = \mathcal{O}(\lambda), \\ c_{lt}(\Delta, \lambda) &= c_{lt}^0(\Delta) + \mathcal{O}(\lambda) \end{aligned}$$

gelten. Beim Entwickeln von (4.25) bis zur ersten Ordnung in λ ist dann die Gleichheit der nullten Ordnungen beider Seiten erfüllt, außerdem heben sich auf beiden Seiten all jene Terme erster Ordnung weg, die vom freien Anteil, d. h. nicht vom Entwickeln von $s_{4\lambda}^{T_0}$ bzw. $c_{lt}(\Delta, \lambda)q^{\chi_{lt}(\Delta, \lambda)}(u, v)$ herrühren. Übrig bleibt mit den Notationen $\Delta(\lambda) = \Delta + \mathcal{O}(\lambda)$, $h_{lt} = 2\Delta + l + 2t$ und $\chi_{lt} = [l, h_{lt}]$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} s_{4\lambda}^{T_0}(u, v) \\ = u^{-\Delta} C_{\Delta, 0}^2 \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0, t \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\partial c_{lt}}{\partial \lambda}(\Delta, 0) q^{\chi_{lt}}(u, v) + 2\delta_{lt} c_{lt}^0(\Delta) \left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{h=h_{lt}} q^{[l, h]}(u, v) \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Da kritische Exponenten der Klasse $\gamma^k = 0$ von der Form $n + \mathcal{O}(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind, lesen wir aus (4.24) für die linke Seite dieser Gleichung die Entwicklung

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} s_{4\lambda}^{T_0}(u, v) = \sum_{n, m=0}^{\infty} (a_{nm} + b_{nm} \ln u) u^n (1-v)^m \quad (4.27)$$

ab. Die Aufgabe ist nun, aus den Koeffizienten a_{nm}, b_{nm} die auftretenden Partialwellen einschließlich der ersten Ordnung ihrer kritischen Exponenten bzw. anomalen Dimensionen zu bestimmen, d. h. die Größen $c_{lt}' := \frac{\partial c_{lt}}{\partial \lambda}(\Delta, 0)$, δ_{lt} . Dieses läuft auf einen Koeffizientenvergleich in (4.26) hinaus, denn dort ist auch die rechte Seite eine Potenzreihe in $u, 1-v$ mit zusätzlichen $\ln u$ -Termen, die durch das Ableiten der in q^χ enthaltenen Potenz $u^{\frac{h-l}{2}}$ nach h zustande kommen. Offenbar handelt es sich bei diesem Koeffizientenvergleich um zwei (unendlichdimensionale) lineare Gleichungssysteme für c_{lt}', δ_{lt} , die sich allerdings leicht auf eine Dreiecksgestalt bringen lassen und somit systematisch lösbar sind. Um dieses einzusehen, stellen wir die Gleichungssysteme zunächst einmal auf: Mit der Potenzreihenentwicklung

$$q^\chi(u, v) = u^{\frac{h-l}{2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} q_{nm}^\chi u^n (1-v)^m$$

ergibt der Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} b_{nm} &= C_{\Delta, 0}^2 \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \sum_{t=0}^n q_{n-t, m}^{\chi_{lt}} c_{lt}^0 \delta_{lt}, \\ a_{nm} &= C_{\Delta, 0}^2 \sum_{l \in 2\mathbb{N}_0} \sum_{t=0}^n \left(q_{n-t, m}^{\chi_{lt}} c_{lt}' + 2 \left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{h=h_{lt}} \left(q_{n-t, m}^{[l, h]} \right) c_{lt}^0 \delta_{lt} \right). \end{aligned}$$

Auf den Indexpaaren $(m, n), (l, t) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ führen wir eine lexikographische Ordnung

$$(m, n) < (p, q) \quad :\Leftrightarrow \quad (m + 2n < p + 2q) \vee (m + 2n = p + 2q \wedge n < q)$$

ein [HPR00]. Die Indexpaare lassen sich dann anordnen,

$$(0, 0) < (1, 0) < (2, 0) < (0, 1) < (3, 0) < (1, 1) < (4, 0) < (2, 1) < (0, 2) < \dots,$$

und eineindeutig durch ihre Position $\nu((m, n)) \in \mathbb{N}_0$ in dieser Liste angeben. Gilt $(m, n) < (l, t)$, so folgt $m + 2(n - t) < l$ oder $n < t$. In beiden Fällen ist der entsprechende Summand in den Gleichungssystemen null, denn im ersten Fall verschwindet $q_{n-t}^{\chi_{lt} m}$ wegen Lemma 4.1, und der zweite Fall tritt ohnehin nicht auf, da nur bis n summiert wird. Die mit $i = \nu((m, n))$, $j = \nu((l, t))$ durch

$$\begin{aligned} Q_{ij} &:= q_{n-t}^{\chi_{lt} m}, \\ D_{ij} &:= 2 \frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=h_{lt}} q_{n-t}^{[l, h] m} \end{aligned}$$

definierten Matrizen sind somit von unterer Dreiecksgestalt ($Q_{ij} = 0, i < j$), ferner ist Q invertierbar.⁸ Fassen wir a_{nm}, b_{nm}, c'_{lt} sowie das komponentenweise Produkt $c'_{lt} \delta_{lt}$ entsprechend als Vektoren auf, so nehmen obige Gleichungssysteme die einfache Form

$$QC_{\Delta, 0}^2 c^0 \delta = b, \quad QC_{\Delta, 0}^2 c' = a - DC_{\Delta, 0}^2 c^0 \delta \quad (4.28)$$

an und lassen sich sukzessive lösen:

$$Qv = w \quad \Leftrightarrow \quad v_i = \frac{1}{Q_{ii}} \left(w_i - \sum_{j=0}^{i-1} Q_{ij} v_j \right).$$

Hierbei ist a priori klar, dass Komponenten mit ungeradem l null sein müssen. Beim konkreten Durchführen einer Entwicklung kann dies vorausgesetzt oder aber zwecks Konsistenzprüfung verifiziert werden. Die Lösung δ des Gleichungssystems gibt die erste Ordnung der Skalendimensionen $h = 2\Delta + l + 2t + \lambda \delta_{lt} + \mathcal{O}(\lambda^2)$ an. In Abschnitt 6.3.4 wird eine solche Untersuchung durchgeführt, in Anhang B wird eine Implementierung der Partialwellenentwicklung in erster Ordnung mit einem Computeralgebra-System vorgestellt.

Ein wichtiger und interessanter Punkt bei dieser Entwicklung ist die Tatsache, dass zur Bestimmung der anomalen Dimensionen in erster Ordnung nur die nullte Ordnung von $\Delta(\lambda)$ bekannt sein muss, also die Skalendimension Δ des freien Feldes. Zusammen mit diesem Δ bestimmt die erste Ordnung der trunkierten Vierpunktfunktion alleine die erste Ordnung der anomalen Dimensionen.

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit aus dieser Koeffizientenbestimmung erster Ordnung Positivitätsaussagen gewonnen werden können. Kennen wir die Koeffizienten $c_\chi(\lambda)$ der Partialwellen q^χ , so muss $c_\chi(\lambda) \geq 0$ gelten, d. h. in erster Ordnung

$$c_\chi(0) + \lambda c'_\chi(0) \geq 0.$$

Dies ist für $c_\chi(0) > 0$ in erster Ordnung stets erfüllt. Eine Aussage – nämlich die Fixierung des Vorzeichens von λ – können wir also nur für solche χ erwarten, die in nullter Ordnung nicht beitragen, d. h. für Felder in der Operatorproduktentwicklung, die erst bei Wechselwirkung

⁸Die Invertierbarkeit, d. h. $Q_{ii} = q_{0l}^{\chi_{lt}} \neq 0$, folgt daraus, dass $q^\chi(u, v)$ ohne den Vorfaktor $u^{\frac{h-l}{2}}$ für $u = 0$ proportional zu $(1-v)^l F\left(\frac{h+l}{2}, \frac{h+l}{2}; h+l; 1-v\right)$ ist [DO01].

entstehen. Wie wir gesehen haben, wird der Anteil der Klasse $\gamma^k = 0$ oberhalb der Unitaritätsschranke bereits vollständig vom freien Feld ausgeschöpft, $c_{\chi t}(0) = C_{\Delta,0}^2 c_{lt}^0 > 0$. Die Situation $c_\chi(0) = 0$ tritt also nur an der Unitaritätsschranke (für $t > 0$) oder bei Beiträgen mit anderen kritischen Exponenten auf, die wir bisher nicht betrachtet haben.

Uns interessiert daher die erste Ordnung der Entwicklungskoeffizienten $c_{\chi t}(\lambda)$ insbesondere an der Unitaritätsschranke, wobei wir uns dabei auf $d > 2$ einschränken müssen, da für $d = 2$ die nullte Ordnung – das freie, masselose Feld – nicht existiert. Zunächst einmal ist nach (4.25)

$$\begin{aligned} c_{\chi t}(\lambda) &= C_{\Delta(\lambda),\lambda}^2 c_{lt}(\Delta(\lambda), \lambda) \\ &= C_{\Delta,0}^2 c_{lt}^0 + \lambda \left(c_{lt}^0 \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} C_{\Delta(\lambda),\lambda}^2 + C_{\Delta,0}^2 \left(\Delta'(0) \frac{\partial c_{lt}}{\partial \Delta}(\Delta, 0) + \frac{\partial c_{lt}}{\partial \lambda}(\Delta, 0) \right) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= C_{\Delta,0}^2 c_{lt}^0 + \lambda \left(c_{lt}^0 \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} C_{\Delta(\lambda),\lambda}^2 + C_{\Delta,0}^2 \left(\Delta'(0) \frac{\partial c_{lt}^0}{\partial \Delta} + c'_{lt} \right) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned}$$

wobei $\frac{\partial c_{lt}}{\partial \lambda}(\Delta, 0) = \frac{\partial c_{lt}^0}{\partial \Delta}$ wegen $c_{lt}(\Delta, \lambda) = c_{lt}^0(\Delta) + \mathcal{O}(\lambda)$ gilt. Die Bestimmung der ersten Ordnung der Entwicklungskoeffizienten erfordert somit zusätzlich zur Kenntnis der ersten Ordnung der trunkierten Vierpunktfunktion die Kenntnis der beiden Größen $\Delta'(0)$, $\frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} C_{\Delta(\lambda),\lambda}^2$, die die erste Ordnung des freien Anteils einer konformen Vierpunktfunktion vollständig festlegen. Für die Positivitätsprüfung interessieren aber nur solche Beiträge mit $c_{lt}^0 = 0$, das Kriterium lautet dann

$$\lambda \left(\Delta'(0) \frac{\partial c_{lt}^0}{\partial \Delta} + c'_{lt} \right) \geq 0.$$

Hier tritt nun nur noch die nicht aus der trunkierten Vierpunktfunktion bestimmbare Größe $\Delta'(0)$ auf. Ihr Vorzeichen hängt allerdings mit dem von λ zusammen: Für endliches λ muss $\Delta(\lambda) > \Delta$ sein, denn an der Unitaritätsschranke existiert nach Satz 1.2 nur das freie Feld, unterhalb gar keines. Das Vorzeichen von $\Delta'(0)$ muss daher mit dem von λ übereinstimmen, nur $\Delta'(0) = 0$ ist mit einem unbestimmten Vorzeichen von λ vereinbar. Wie wir in 4.5.1 gesehen haben, ist c_{lt}^0 oberhalb der Unitaritätsschranke echt positiv und verschwindet an der Unitaritätsschranke mit einfacher Nullstelle für $t = 1$ und doppelter für $t \geq 2$. Es gilt somit $\frac{\partial c_{lt}^0}{\partial \Delta} > 0$ und $\frac{\partial c_{lt}^0}{\partial \Delta} = 0, t \geq 2$. Ohne Kenntnis von $\Delta'(0)$ erhalten wir daher die Positivitätsbedingungen

$$c'_{lt} > 0 \Rightarrow \lambda \geq 0, \quad c'_{lt} < 0 \Rightarrow \lambda \leq 0, \quad t \geq 2,$$

die alle zusammen $\lambda \geq 0$, $\lambda \leq 0$ oder $\lambda = 0$ fixieren können. Diese Bedingung erhalten wir zusätzlich für $t = 1$ nur, wenn $\Delta'(0) = 0$ gilt.

Das hier vorgestellte Verfahren zur Bestimmung der Partialwellenkoeffizienten in erster Ordnung findet sich auch in [HPR00], allerdings wurde dort eine mögliche λ -Abhängigkeit des freien Anteils der Vierpunktfunktion nicht berücksichtigt, d. h. dort gilt vereinfachend $\Delta'(0) = 0$, $\frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} C_{\Delta(\lambda),\lambda}^2 = 0$. Die Entwicklung bis zur ersten Ordnung wurde darüberhinaus nicht konsequent durchgeführt: Erstens wurde die Aufteilung von $c_{lt}(\lambda)$ in nullte und erste Ordnung nicht explizit angegeben, und zweitens wurde bei der Ableitung von q^λ nur die für die Logarithmen verantwortliche Potenz $u^{\frac{h-l}{2}-\Delta}$ berücksichtigt, nicht jedoch die h - und damit λ -Abhängigkeit der Koeffizienten der Partialwellen-Potenzreihe. Eine Anwendung der so

erhaltenen Formeln führt zwar noch zu den richtigen anomalen Dimensionen, aber die Koeffizienten $c'_{lt}(0)$ werden falsch bestimmt. Insbesondere tragen Partialwellen mit ungeradem l bei. Da das Verfahren in [HPR00] jedoch nicht angewandt wurde, entstanden keine Folgefehler.

Teil II

AdS-CFT-Korrespondenz

Kapitel 5

Anti-de-Sitter-Raum

5.1 Motivation

Die Formulierung einer Quantenfeldtheorie mithilfe der Wightman-Axiome, aber auch viele andere Zugänge zur Quantenfeldtheorie setzen als zugrunde liegende Raumzeit den flachen Minkowski-Raum voraus. In den Axiomen geht dies ganz wesentlich ein, etwa in Form der Poincaré-Gruppe als Symmetriegruppe und der Spektrumsbedingung. Wie wir bei der konformen Quantenfeldtheorie gesehen haben, ist bei einer Erweiterung der Symmetriegruppe eine Vielzahl neuer Aussagen zur Struktur der Theorie möglich.

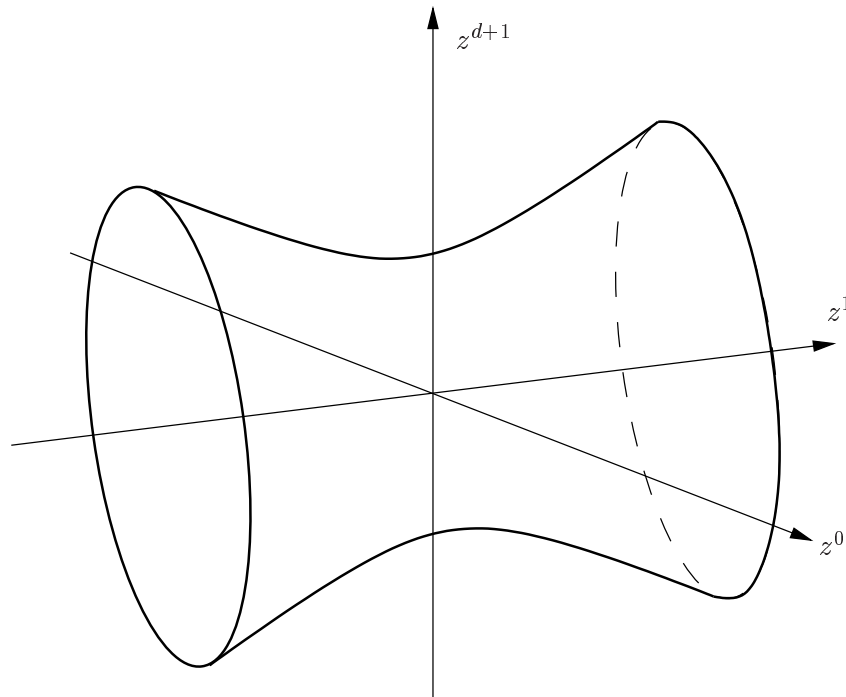
Ganz anders wird die Situation dagegen bei einer Reduktion der Symmetriegruppe, nämlich wenn man Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten definieren und untersuchen möchte. Hier gibt es im Allgemeinen keine solchen globalen Symmetrien der Raumzeit, was eine Quantisierung erschwert. Ausnahmen bilden Raumzeiten mit konstanter Krümmung. Wegen deren hoher Symmetrie lassen sich dort Untersuchungen zur Quantenfeldtheorie gut durchführen. Eine konstante negative Krümmung besitzt der *Anti-de-Sitter-Raum*, der Gegenstand dieses Kapitels ist.

5.2 Geometrie

Der Anti-de-Sitter-Raum der Dimension $d + 1$ lässt sich im $d + 2$ -dimensionalen Raum eingebettet als einschaliges Hyperboloid wie in Abbildung 5.1 definieren. Sind nämlich im Einbettungsraum \mathbb{R}^{d+2} Koordinaten z^a , $a = 0, \dots, d + 1$ und Metrik $\eta = \text{diag}(1, -1, \dots, -1, 1)$ gegeben, dann setzen wir

$$\text{AdS}_{1,d} := \left\{ z \mid \eta_{ab} z^a z^b = 1 \right\}$$

und stattdessen $\text{AdS}_{1,d}$ mit der induzierten Metrik aus. Der Ricci-Tensor dieses Raumes ist das $-d$ -fache der Metrik, der Krümmungsskalar ist somit konstant $R = -d(d + 1)$. Mit der kosmologischen Konstanten $\Lambda = -d$ ist der Anti-de-Sitter-Raum eine Lösung der Vakuum-Einsteingleichungen. Die Längenskala wurde dabei durch die 1 in obiger Definition gesetzt.

Abbildung 5.1: Einschaliges Hyperboloid $\text{AdS}_{1,d}$

5.3 Quantenfeldtheorie auf $\text{AdS}_{1,d}$

Für die Quantisierung eines Feldes auf einer gekrümmten Raumzeit wie $\text{AdS}_{1,d}$ sind zwei Eigenschaften von entscheidender Bedeutung: Erstens muss die Raumzeit eine kausale Struktur besitzen, d. h. für jeden Punkt eine konsistente Einteilung der Raumzeit in Vergangenheit und Zukunft. Insbesondere dürfen keine geschlossenen, zeitartigen Kurven auftreten. Zweitens muss die Raumzeit *global hyperbolisch* sein, d. h. es muss in ihr eine *Cauchy-Fläche* geben, die von jeder zukunftsgerichteten, maximal fortgesetzten Kurve genau einmal geschnitten wird. Diese Eigenschaft ist notwendig für die Existenz klassischer Lösungen zu Feldgleichungen, wenn Cauchy-Daten auf der Cauchy-Fläche beliebig vorgebar sein sollen. Die klassischen Lösungen können sodann in der Quantisierung verwendet werden.

Die $\text{AdS}_{1,d}$ -Raumzeit besitzt zunächst einmal keine dieser beiden Eigenschaften. Da im Einbettungsraum z^0 und z^{d+1} zeitartig sind, sind Kreise parallel zur z^0 - z^{d+1} -Ebene geschlossene, zeitartige Kurven in $\text{AdS}_{1,d}$. Die durch Aufschneiden des Hyperboloids und periodische Fortsetzung gebildete universelle Überlagerung $C\text{AdS}_{1,d}$ von $\text{AdS}_{1,d}$ löst dieses Problem, sie ist aber nach wie vor nicht global hyperbolisch [Fr74] [AIS78]. Jedoch lässt sich $C\text{AdS}_{1,d}$ konform in die Hälfte des statischen Einstein-Universums einbetten, welches global hyperbolisch ist. Einer Cauchy-Fläche im Einstein-Universum entsprechen dabei zwei getrennte Flächen in $\text{AdS}_{1,d}$. Besitzt die Quantisierung im Einstein-Universum nun solche Symmetrien, dass sie über $\text{AdS}_{1,d}$ faktorisiert, hat man eine Quantisierung für $\text{AdS}_{1,d}$ gefunden.

5.4 Euklidischer Anti-de-Sitter-Raum

Um den euklidischen AdS-Raum als analytische Fortsetzung des AdS-Raumes mit Lorentz-Signatur zu erhalten, müssen wir in der Metrik des einbettenden Raumes das relative Vorzeichen von η_{00} umkehren. Wir gelangen so zu dem bereits aus Abschnitt 3.3 über die euklidische konforme Gruppe bekannten Einbettungsraum mit Metrik $\eta = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$ und definieren

$$\text{AdS}_{d+1} := \left\{ z \mid \eta_{ab} z^a z^b = -1, z^{d+1} > 0 \right\}.$$

Die Invarianzgruppe $SO_0(d+1, 1)$ des umgebenden Raumes operiert auf AdS_{d+1} als Invarianzgruppe der induzierten Metrik. AdS_{d+1} ist die Schale des zweischaligen Hyperboloids, die in den Kegel C aus Abschnitt 3.3 eingeschrieben ist, siehe Abbildung 5.2. An dieser Stelle wird bereits die für das nächste Kapitel wichtige Beobachtung verständlich, dass der Rand des AdS_{d+1} -Raumes die Struktur eines euklidischen Raumes hat, auf dem die AdS_{d+1} -Symmetriegruppe $SO_0(d+1, 1)$ wie die konforme Gruppe wirkt: Hyperboloid und Kegel treffen sich im Unendlichen, Strahlen des Kegels sind aber gerade Punkte des euklidischen Raumes.

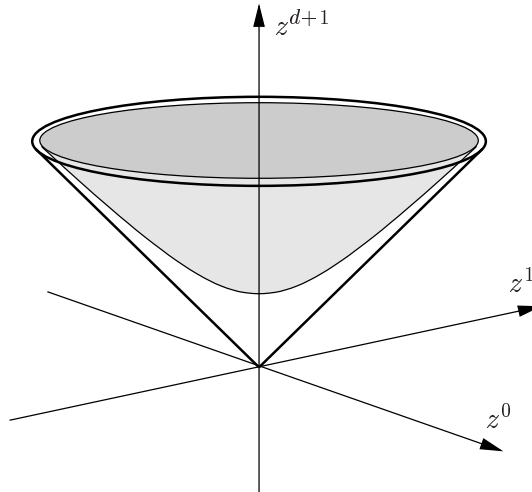


Abbildung 5.2: Kegel C und eingeschriebenes Hyperboloid AdS_{d+1}

In Anlehnung an die stereographische Projektion definieren wir die folgenden Koordinaten x^μ , $\mu = 0, \dots, d$ auf dem Hyperboloid:

$$x^0 := \frac{1}{z^0 + z^{d+1}} \in (0, \infty), \quad x^i := \frac{z^i}{z^0 + z^{d+1}} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (5.1)$$

Einen Koordinatenpunkt x teilen wir gemäß $x = (x^0, \underline{x})$ in seine 0- und i -Komponenten auf ($i = 1, \dots, d$).

Die Umkehrung der Koordinatenabbildung lautet

$$z^0 = \frac{1 - (x)^2}{2x^0}, \quad z^i = \frac{x^i}{x^0}, \quad z^{d+1} = \frac{1 + (x)^2}{2x^0}, \quad (x)^2 := (x^0)^2 + \underline{x}^2 := \sum_{\mu=0}^d (x^\mu)^2.$$

Damit bestimmen wir die induzierte Metrik g in den Koordinaten x^μ zu

$$\begin{aligned} \eta_{ab} dz^a dz^b &= \eta_{ab} \partial_\mu z^a dx^\mu \partial_\nu z^b dx^\nu = \dots = \frac{1}{(x^0)^2} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ \Rightarrow g_{\mu\nu} &= \frac{1}{(x^0)^2} \delta_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = (x^0)^2 \delta^{\mu\nu}, \quad \det g = (x^0)^{-2(d+1)}. \end{aligned}$$

Dem Rand $\{z^{d+1} = \infty\} \simeq S^d$ des Hyperboloids entspricht der Rand $\{x^0 = 0\} \simeq \mathbb{R}^d$ der Koordinaten sowie ein einzelner Punkt bei $x^0 = \infty$ – dass es sich dabei tatsächlich um einen einzelnen Punkt handelt, sieht man am Verschwinden der Metrik [Wi98]. $x^0 = \infty$ wird mit $x^0 = 0, \underline{x} = \infty$ identifiziert. Diese Konstruktion des Randes entspricht dem von Penrose eingeführten Begriff des *konformen Randes* einer Mannigfaltigkeit [PR86]: Die Metrik der Mannigfaltigkeit AdS_{d+1} ist $\frac{\tilde{g}}{f^2}$ mit einer endlichen Metrik $\tilde{g} = \delta$ und einer am Rand mit einfacher Nullstelle verschwindenden Funktion $f = x^0$, die Metrik des konformen Randes ist die Einschränkung von \tilde{g} .

Da AdS_{d+1} wie der euklidische Raum eine maximale Symmetriegruppe besitzt, lässt sich aus zwei Punkten genau eine unabhängige Invariante bilden. Im euklidischen Raum ist dies einfach der euklidische Abstand, für AdS_{d+1} ist es die Länge der Sehne im Einbettungsraum: Sind nämlich zwei Punkte z, w auf dem Hyperboloid gegeben, so wird ihr Abstand in der Metrik η durch die AdS_{d+1} -Symmetriegruppe $SO_0(d+1, 1)$ ja gerade nicht geändert. Wir haben somit die invariante *Sehnenlänge* bzw. ihr Quadrat [CR75]

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &:= (z - w)^2 = z_a z^a - 2z_a w^a + w_a w^a = -2 - 2z_a w^a = \dots \\ &= \frac{\sum_{\mu=0}^d (x^\mu - y^\mu)^2}{x^0 y^0} \end{aligned}$$

wobei x, y die AdS_{d+1} -Koordinaten der Punkte z, w auf dem Hyperboloid sind.

Längliche Rechnungen ergeben folgende Wirkungen von Differentialoperatoren auf das Quadrat der Sehnenlänge [CR75] [F99C]:

$$\square_x^g \sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \sqrt{g} \partial^\mu \sigma = (1+d)(\sigma+2), \quad \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma = \sigma(\sigma+4).$$

Damit können wir die Wirkung des d'Alembert-Operators auf Funktionen von σ ausrechnen:

$$\square_x^g f(\sigma) = f'(\sigma) \square_x^g \sigma + f''(\sigma) \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma = (1+d)(\sigma+2)f'(\sigma) + \sigma(\sigma+4)f''(\sigma). \quad (5.2)$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch kurz einen Spezialfall des Satzes von Stokes in den x -Koordinaten angeben: Durch partielle Integration ergibt sich

$$\int_{\text{AdS}} d^{d+1} x (\partial_\mu f) g^\mu = - \int_{\text{AdS}} d^{d+1} x f \partial_\mu g^\mu - \int d^d x (f g^0) \Big|_{x^0=0}, \quad (5.3)$$

sofern $f g^\mu$ bei ∞ verschwindet.

5.5 Klassische Feldtheorie auf AdS_{d+1}

Im Kapitel zur AdS-CFT-Korrespondenz werden wir die Verknüpfung eines klassischen Feldes auf dem Anti-de-Sitter-Raum mit einem Quantenfeld auf dessen Rand untersuchen. In

diesem Abschnitt wollen wir uns schon einmal mit klassischer Feldtheorie auf AdS_{d+1} vertraut machen. Der Ausgangspunkt ist die euklidische Wirkung

$$I = \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) \right) = \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \mathcal{L}$$

eines skalaren Feldes φ mit Masse m im Potential $V = o(\varphi^2)$. Wir wollen auch $m^2 < 0$ zulassen, was etwa dadurch Legitimität erhält, dass beim AdS-Raum als gekrümmter Raumzeit bereits implizit eine Masse im Hintergrund vorhanden ist [BF82]. Die Feldgleichung erhalten wir aus dem Prinzip der stationären Wirkung

$$\frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi},$$

deren Lösung die Vorgabe eines Randwerts f für φ erfordert. Die obige Wirkung eingesetzt ergibt die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_\mu \sqrt{g} \partial^\mu \varphi &= \sqrt{g} (m^2 \varphi + V'(\varphi)) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \sqrt{g} \partial^\mu \varphi &= m^2 \varphi + V'(\varphi) \\ \Leftrightarrow (\square^g - m^2) \varphi &= V'(\varphi). \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.5.1 Lösung der freien Feldgleichung

Um zu sehen, in welcher Weise ein Randwert vorgeschrieben werden kann, studieren wir nun zunächst das Randverhalten von Lösungen der freien Feldgleichung ($V = 0$) in den Koordinaten (5.1) mit der Abkürzung $z = x^0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_\mu z^{1+d} \partial_\mu z^{1-d} \partial_\mu - m^2 \right) \varphi \\ &= \left(z^2 \partial_z^2 + (1-d)z \partial_z + z^2 \left(\sum_{i=1}^d \partial_i^2 \right) - m^2 \right) \varphi. \end{aligned}$$

Für $m^2 \neq 0$ ist es offenbar nicht möglich, einen Randwert f in der naiven Weise $\varphi(0, \underline{x}) = f(\underline{x})$ vorzuschreiben. Ist φ am Rand $z = 0$ nämlich zweimal stetig differenzierbar, so lautet die Gleichung dort wegen der z -Vorfaktoren $m^2 \varphi = 0$, also $\varphi(0, \underline{x}) = 0$. Alternativ könnte φ ein so singuläres Verhalten am Rand zeigen, dass die z -Vorfaktoren durch ∂_z kompensiert werden. Dann erwartet man aber nicht, dass endliche Werte am Rand erreicht werden.

Diese beiden möglichen Verhaltensweisen, die wir heuristisch der Differentialgleichung entnommen haben, ergeben sich quantitativ bei alleiniger Betrachtung der z -Abhängigkeit:

$$(z^2 \partial_z^2 + (1-d)z \partial_z - m^2) u(z) = 0.$$

Eine solche Differentialgleichung wird durch Potenzen z^Δ gelöst, wobei man durch Einsetzen die Bedingung

$$\Delta(\Delta - d) = m^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}, \quad \Delta_- + \Delta_+ = d$$

und daraus die allgemeine Lösung

$$u(z) = A_- z^{\Delta_-} + A_+ z^{\Delta_+} \quad (5.5)$$

erhält (wir nehmen an, dass die Wurzel echt positiv ist, $m^2 > -\frac{d^2}{4}$). Der +-Anteil verschwindet stets am Rand. Der --Anteil ist dort dominant und verschwindet für $m^2 < 0$, nimmt A_- an für $m^2 = 0$ und divergiert für $m^2 > 0$.

Um einen Randwert f für φ vorschreiben zu können, muss also $\frac{\varphi(z, \underline{x})}{z^{\Delta_{\pm}}} \rightarrow f(\underline{x})$ verlangt werden. Wir führen zu einer Wahl $\Delta = \Delta_{\pm}$

$$\Delta^* := d - \Delta = \Delta_{\mp} \quad \Rightarrow \quad m^2 = \Delta(\Delta - d) = -\Delta^* \Delta$$

ein. Die Vorschrift für den Randwert wird nun formalisiert:

Definition 5.1 *Der Randwert einer Funktion $\varphi : \text{AdS}_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist*

$$(B_{\Delta} \varphi)(\underline{x}) := \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\varphi(z, \underline{x})}{z^{\Delta^*}}.$$

Die Abspaltung des Faktors z^{Δ^*} wahrt nicht die Symmetrie des Hyperboloids um die z^{d+1} -Achse. Um anschließend Bedingungen an Randwerte und Funktionen auf AdS_{d+1} stellen zu können, die diese Symmetrie wahren, führen wir noch folgende zwei Abbildungen ein:

Definition 5.2

$$\begin{aligned} (T_{\Delta} f)(\underline{x}) &:= (1 + \underline{x}^2)^{\Delta^*} f(\underline{x}), \quad f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ (Z_{\Delta} h)(x) &:= \left(\frac{1 + (x)^2}{x^0} \right)^{\Delta^*} h(x), \quad h : \text{AdS}_{d+1} \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

Der bei Z_{Δ} abgespaltene Faktor $\frac{1+(x)^2}{x^0}$ ist gerade $2z^{d+1}$, Z_{Δ} wahrt also die Symmetrie um die z^{d+1} -Achse. Es gilt $(T_{\Delta} B_{\Delta} h)(\underline{x}) = \lim_{z \rightarrow 0} (Z_{\Delta} h)(z, \underline{x})$.

Mit den soeben gewonnenen Einsichten in das Randverhalten können wir nun tatsächlich die freie Feldgleichung

$$(\square^g - m^2) \varphi = 0, \quad B_{\Delta} \varphi = f \quad (5.6)$$

lösen. Dazu wird der Poisson-Kern $K_{\Delta}(x, \underline{y})$ (*bulk-to-boundary propagator*) mit den Eigenschaften

$$(\square_x^g - m^2) K_{\Delta} = 0, \quad B_{\Delta} K_{\Delta}(\cdot, \underline{y}) = \delta(\cdot - \underline{y})$$

benötigt, denn mit ihm kann die Lösung von (5.6) als $\varphi(x) = \int d^d y K_{\Delta}(x, \underline{y}) f(\underline{y})$ angegeben werden. Der explizite Ausdruck für K_{Δ} lautet [Wi98]

Definition 5.3

$$\begin{aligned} K_{\Delta}(x, \underline{y}) &= \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \left(\frac{x^0}{(\underline{x} - \underline{y})^2 + (x^0)^2} \right)^{\Delta} =: \kappa_{\Delta} k_{\Delta}(x, \underline{y}), \quad (5.7) \\ (K_{\Delta} f)(x) &:= \int d^d y K_{\Delta}(x, \underline{y}) f(\underline{y}), \quad f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Zwischen K_Δ und dem Quadrat σ der Sehnenlänge gilt der nützliche Zusammenhang $K_\Delta(x, \underline{y}) = \kappa_\Delta (\sigma(x, y)y^0)^{-\Delta} \Big|_{y^0=0}$.

Doch unter welchen Voraussetzungen an f existiert das Integral, und löst $K_\Delta f$ wirklich die freie Feldgleichung? Diese Fragen beantwortet Satz 5.6, für den wir noch zwei Definitionen benötigen:

Definition 5.4 Ein Randwert $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Δ -stetig, wenn sich die Funktion $T_\Delta f$ stetig auf die Einpunktkompaktifizierung $\overline{\mathbb{R}^d}$ fortsetzen lässt. $(T_\Delta f)(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (T_\Delta f)(\lambda \underline{x}) \in \mathbb{R}$ muss also unabhängig von der Wahl der Richtung $\underline{x} \neq 0$ sein.

Definition 5.5 Eine Funktion $h : \text{AdS}_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Δ -stetig, wenn sich die Funktion $Z_\Delta h$ stetig auf $\overline{\text{AdS}_{d+1}}$ fortsetzen lässt. Es muss also $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (Z_\Delta h)((\lambda, \underline{x})) \in \mathbb{R}$ existieren und $(Z_\Delta h)(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (Z_\Delta h)((\lambda, \underline{x})) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (Z_\Delta h)((x^0, \lambda \underline{y})) \in \mathbb{R}$ unabhängig von $\underline{y} \neq 0, \underline{x}, x^0$ sein.

Satz 5.6 Sei f ein Δ -stetiger Randwert und $\Delta > \frac{d}{2}$. Dann ist die Funktion $\varphi = K_\Delta f$ Δ -stetig auf AdS_{d+1} , C^∞ -glatt im Inneren und löst die Gleichungen

$$(\square^g - m^2) \varphi = 0, \quad B_\Delta \varphi = f.$$

Beweis. Zunächst befassen wir uns mit der Stetigkeit. Mit $x = (z, \underline{x})$ gilt

$$(Z_\Delta \varphi)(x) = \kappa_\Delta \left(\frac{1 + (x)^2}{z} \right)^{\Delta^*} \int d^d y \left(\frac{z}{(\underline{x} - \underline{y})^2 + z^2} \right)^\Delta f(\underline{y}) \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\underline{y} \rightarrow z\underline{y} + \underline{x}}{\underline{y} = \underline{x}} \kappa_\Delta \int d^d y \frac{(1 + (x)^2)^{d-\Delta}}{(1 + \underline{y}^2)^\Delta} f(z\underline{y} + \underline{x}) \\ & = \kappa_\Delta \int d^d y \frac{(T_\Delta f)(z\underline{y} + \underline{x})}{(1 + \underline{y}^2)^\Delta} \left(\frac{1 + z^2 + \underline{x}^2}{1 + (z\underline{y} + \underline{x})^2} \right)^{d-\Delta}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei $T_\Delta f$ stetig auf $\overline{\mathbb{R}^d}$ ist, also insbesondere beschränkt. Die Formel für $Z_\Delta \varphi$ in (5.8) ist zunächst nur für $z \in (0, \infty)$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ gültig, die Formel (5.9) stellt dagegen die stetige Fortsetzung von $Z_\Delta \varphi$ auf $z \in [0, \infty]$, $\underline{x} \in \overline{\mathbb{R}^d}$ dar. Um dieses nachzuweisen, wird eine Majorante des Integranden benötigt. Hierzu muss eine Fallunterscheidung gemacht werden: Im ersten Fall ist $\Delta \geq d$. Wegen $1 + (z\underline{y} + \underline{x})^2 \leq 2(1 + \underline{y}^2)(1 + z^2 + \underline{x}^2)$ und der Beschränktheit von $T_\Delta f$ gibt es ein C , so dass der Absolutwert des Integranden für alle $z \in [0, \infty]$, $\underline{x} \in \overline{\mathbb{R}^d}$ durch die integrable Funktion $C \frac{(1 + \underline{y}^2)^{\Delta-d}}{(1 + \underline{y}^2)^\Delta}$ nach oben abgeschätzt werden kann. Da der Integrand fast überall (Ausnahme $z = \infty, \underline{y} = 0$) stetig von z, \underline{x} abhängt, ist das aus (5.9) resultierende $Z_\Delta \varphi$ überall stetig.

Für die Behandlung des zweiten Falls $\Delta < d$ wählen wir zunächst $Z, R > 0$. Für $z < Z, \underline{x}^2 < R^2$ ist $\left(\frac{1 + z^2 + \underline{x}^2}{1 + (z\underline{y} + \underline{x})^2} \right)^{d-\Delta}$ beschränkt, und wir haben eine Majorante $\frac{C}{(1 + \underline{y}^2)^\Delta}$ des Integranden,

die für $\Delta > \frac{d}{2}$ (wie vorausgesetzt) integrabel ist. Da Z, R beliebig waren, ist $Z_\Delta \varphi$ aus (5.9) für $z \in [0, \infty)$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ stetig.

Aus der in beiden Fällen vorliegenden Stetigkeit von (5.9) auf $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ können wir die stetige Fortsetzbarkeit bei ∞ schließen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (K_\Delta f)(Rx) &= \kappa_\Delta \int d^d y (\sigma(Rx, y) y^0)^{-\Delta} \Big|_{y^0=0} \frac{(T_\Delta f)(y)}{(1 + \underline{y}^2)^{\Delta^*}} \\ &\stackrel{\underline{y} \rightarrow Ry}{=} \kappa_\Delta \int \frac{d^d y}{(\underline{y}^2)^d} \left(\sigma(Rx, Ry) \frac{y^0}{(y)^2} \right)^{-\Delta} \Big|_{y^0=0} \frac{(T_\Delta f)(Ry)}{(1 + \frac{1}{\underline{y}^2})^{\Delta^*}} \\ &= \int d^d y K_\Delta(x, \underline{y}) \frac{(T_\Delta f)(Ry)}{(1 + \underline{y}^2)^{\Delta^*}} = (K_\Delta T_\Delta^{-1} R^* T_\Delta f)(x), \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Inversion R eine AdS_{d+1} -Symmetrie ist (Vorzeichenumkehr der z^0 -Koordinate) und somit σ invariant lässt. Die stetige Fortsetzbarkeit bei ∞ folgt daher aus der bei 0, der Wert dort ist $(T_\Delta f)(R0) = (T_\Delta f)(\infty)$. Das direkte Einsetzen von $z = \infty$ oder $\underline{x} = \infty$ in (5.9) führt zum selben Ergebnis, (5.9) definiert somit auch dort bereits die stetige Fortsetzung, obwohl für $\Delta < d$ keine Majorante bei ∞ existiert.

φ hat f als Randwert: In (5.9) dürfen wir $z = 0$ einsetzen und erhalten

$$(Z_\Delta \varphi)((0, \underline{x})) = \kappa_\Delta (T_\Delta f)(\underline{x}) \int d^d y \frac{1}{(1 + \underline{y}^2)^\Delta} = (T_\Delta f)(\underline{x})$$

oder $B_\Delta \varphi = f$. Für die Konvergenz des Integrals wird $\Delta > \frac{d}{2}$ benötigt.

Für die C^∞ -Glattheit betrachten wir

$$\varphi(x) = \kappa_\Delta \int d^d y z^\Delta ((\underline{x} - \underline{y})^2 + z^2)^{-\Delta} (1 + \underline{y}^2)^{\Delta-d} (T_\Delta f)(\underline{y})$$

für x aus einer vom Rand getrennten Umgebung im Inneren. Das Integral besitzt zu einer solchen Umgebung eine integrable Majorante $C(1 + \underline{y}^2)^{-d}$. Für jeden durch mehrfaches Ableiten nach z oder x gebildeten Integranden gilt, dass ein weiteres Ableiten nach z das für $|\underline{y}| \rightarrow \infty$ führende Verhalten nicht ändert und ein weiteres Ableiten nach x das führende Verhalten um eine Potenz „konvergenter“ macht. Somit darf φ beliebig oft, und zwar unter dem Integral, differenziert werden. Das Erfüllen der freien Feldgleichung folgt dann aus

$$\begin{aligned} \square_x^g \sigma(x, y)^{-\Delta} &\stackrel{(5.2)}{=} \left(-\frac{\Delta}{\sigma} (1+d)(\sigma+2) + \frac{\Delta(\Delta+1)}{\sigma^2} \sigma(\sigma+4) \right) \sigma^{-\Delta} \\ &= \left(-\Delta(1+d) \left(1 + \frac{2}{\sigma} \right) + \Delta(\Delta+1) \left(1 + \frac{4}{\sigma} \right) \right) \sigma^{-\Delta} \end{aligned}$$

und daher für $y^0 = 0$, d. h. $\sigma = \infty$

$$\square_x^g k_\Delta = (-\Delta(1+d) + \Delta(\Delta+1)) k_\Delta = \Delta(\Delta-d) k_\Delta = m^2 k_\Delta.$$

□

Dass dieses Verfahren nur für $\Delta > \frac{d}{2}$ anwendbar ist, verwundert nicht. Der Fall $\Delta < \frac{d}{2}$ entspricht der Wahl von Δ_+ als führendem Randverhalten in (5.5). Da dort aber der $--$ -Term den

+ -Term dominiert, muss der $-$ -Term am ganzen Rand verschwinden. Dies ist eine zusätzliche Randbedingung, die das Randwertproblem überbestimmt und somit im Allgemeinen unlösbar macht. Für $\Delta > \frac{d}{2}$ können wir explizit an der Lösung φ einsehen, dass die analoge Bedingung eines verschwindenden $+$ -Terms verletzt ist: Dazu betrachten wir einen Randwert f , der in einer Umgebung um \underline{x} verschwindet. Das Randverhalten der Lösung bei \underline{x} ist dann

$$\varphi(z, \underline{x}) = \kappa_\Delta \int d^d y \left(\frac{z}{(\underline{x} - \underline{y})^2 + z^2} \right)^\Delta f(\underline{y}) \stackrel{z \rightarrow 0}{\cong} \kappa_\Delta z^\Delta \int d^d y \frac{1}{(\underline{x} - \underline{y})^{2\Delta}} f(\underline{y}).$$

z^Δ entspricht aber gerade dem $+$ -Term, es werden also beide Terme benötigt. Wir nehmen daher für den Rest dieses Kapitels $\Delta = \Delta_+ > \frac{d}{2}$ an.

Satz 5.7 Sei φ eine Lösung von $(\square^g - m^2)\varphi = 0, B_\Delta\varphi = f$ mit $m^2 < 0$. Dann gilt das Maximumsprinzip

$$\max(Z_\Delta\varphi_\pm) = \max(T_\Delta f_\pm),$$

wobei \pm den negativen und positiven Anteil bezeichnen, $g_\pm(x) := \max(\pm g(x), 0)$. Insbesondere ist die Lösung der freien Feldgleichung eindeutig.

Beweis. Wir bestimmen zunächst die Wirkung von $\square^g - m^2$ auf $Z_\Delta^{-1}\phi$. Nach etwas Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} L_\Delta &:= Z_\Delta (\square^g - m^2) Z_\Delta^{-1} \\ &= z^2 \left(\sum_{\mu=0}^d \partial_\mu^2 - \frac{4\Delta^*}{1+(x)^2} x^\mu \partial_\mu - \frac{4\Delta^*(\Delta^*+1)}{(1+(x)^2)^2} \right) + (2\Delta^* + 1 - d)z\partial_z. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hat nun $\phi = Z_\Delta\varphi$ ein Maximum bei x im Inneren von AdS_{d+1} , so muss notwendig $\partial_\mu\phi = 0, \sum_{\mu=0}^d \partial_\mu^2\phi \leq 0$ gelten. Aus (5.10) lesen wir dann

$$0 = (L_\Delta\phi)(x) \leq -4\Delta^*(\Delta^*+1) \left(\frac{z}{1+(x)^2} \right)^2 \phi(x)$$

ab. Da aber $\Delta^* > 0$ wegen $m^2 < 0$ gilt, folgt $\phi(x) \leq 0$: ϕ nimmt ein Maximum im Inneren nur bei negativen Werten an, somit muss ein positives globales Maximum auf dem Rand angenommen werden. Dort hat ϕ aber den Wert $T_\Delta f$. Die Behauptungen folgen. \square

5.5.2 Perturbative Lösung der Feldgleichung mit Potential

Mit Potential $V \neq 0$ ergibt sich die semilineare, elliptische partielle Differentialgleichung (5.4)

$$(\square^g - m^2)\varphi = V'(\varphi).$$

Belassen wir es auch mit Potential bei der Randbedingung $B_\Delta\varphi = f$, so können wir versuchen, uns iterativ der Lösung zu nähern:

$$\begin{aligned} (\square^g - m^2)\varphi_0 &= 0, & B_\Delta\varphi_0 &= f, \\ (\square^g - m^2)\varphi_{n+1} &= V'(\varphi_n), & B_\Delta\varphi_{n+1} &= f. \end{aligned}$$

Bei hinreichend kleinem V' erwartet man eine Konvergenz der Folge φ_n gegen die Lösung der Feldgleichung. Die Iteration beinhaltet offenbar die Lösung der inhomogenen, partiellen Differentialgleichung

$$(\square^g - m^2) \varphi = h, \quad B_\Delta \varphi = f,$$

die wir durch Abzug der Lösung φ_0 der freien Feldgleichung vereinfachen können:

$$(\square^g - m^2) \psi = h, \quad B_\Delta \psi = 0, \quad \varphi = \varphi_0 + \psi.$$

Die Green'sche Funktion $G_\Delta(x, y)$ (*bulk-to-bulk propagator*) dieses Randwertproblems muss

$$(\square_x^g - m^2) G_\Delta(x, y) = \frac{\delta(x - y)}{\sqrt{g}}, \quad B_\Delta G_\Delta(\cdot, y) = 0$$

erfüllen, dann nämlich lautet die Lösung $\psi(x) = \int_{\text{AdS}} d^{d+1}y \sqrt{g} G_\Delta(x, y) h(y)$. G_Δ kann als AdS_{d+1} -invariante Funktion zweier Punkte nur vom Quadrat $\sigma(x, y)$ der Sehnenlänge abhängen und ist explizit durch

Definition 5.8

$$G_\Delta(\sigma) = -\frac{\Gamma(\Delta)\Gamma(\alpha)}{(4\pi)^{\frac{d+1}{2}}\Gamma(2\alpha)} \left(\frac{4}{\sigma}\right)^\Delta F\left(\Delta, \alpha; 2\alpha; -\frac{4}{\sigma}\right), \quad \alpha := \Delta - \frac{d}{2} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$(G_\Delta h)(x) := \int_{\text{AdS}} d^{d+1}y \sqrt{g} G_\Delta(x, y) h(y), \quad h : \text{AdS}_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben [CR75] [BL85] [F99C]. Die Analyse der Existenz des Integrals sowie der Lösung der Differentialgleichung ist hier naturgemäß schwieriger als bei K_Δ . Wir untersuchen nur die noch verhältnismäßig einfache Frage der Existenz des Integrals:

Satz 5.9 *Gelte $\frac{d}{2} < \Delta < d$ und folglich $\Delta^* > 0$. Sei h eine $\tilde{\Delta}$ -stetige Funktion auf AdS_{d+1} mit $\tilde{\Delta}^* > \Delta^*$. Dann ist die Funktion $\psi = G_\Delta h$ Δ -stetig auf AdS_{d+1} , und $Z_\Delta \psi$ verschwindet am Rand. Gilt $\tilde{\Delta}^* > \Delta$, so ist ψ sogar Δ^* -stetig.*

Beweis. Um die hypergeometrische Funktion im Propagator abschätzen zu können, verwenden wir (A.6),

$$F\left(\Delta, \alpha; 2\alpha; -\frac{4}{\sigma}\right) = \left(\frac{\sigma+4}{\sigma}\right)^{-\alpha} F\left(\alpha, 2\alpha - \Delta; 2\alpha; \frac{4}{\sigma+4}\right),$$

und bemerken, dass diese hypergeometrische Funktion beschränkt ist: Die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ konvergiert auf dem ganzen Einheitskreis für $\text{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ [Er53], wegen $\Delta - \alpha = \frac{d-1}{2} > 0$ und $0 \leq \frac{4}{\sigma+4} \leq 1$ liegt dieser Fall hier vor. Mit geeignetem C_1 gilt somit $|G_\Delta(\sigma)| < \frac{C_1}{\sigma^{\Delta-\alpha}(\sigma+4)^\alpha}$. Schätzen wir noch $|h(w, \underline{y})|$ durch $C_2 \left(\frac{w}{1+w^2+\underline{y}^2}\right)^{\tilde{\Delta}^*}$ ab, erhalten wir insgesamt

$$|(Z_\Delta \psi)(z, \underline{x})| < C_3 (1 + z^2 + \underline{x}^2)^{\Delta^*}$$

$$\cdot \int d^d y dw \frac{w^{\tilde{\Delta}^* - d - 1 + \Delta} z^{\Delta - \Delta^*}}{((\underline{x} - \underline{y})^2 + (z - w)^2)^{\Delta - \alpha} ((\underline{x} - \underline{y})^2 + (z + w)^2)^\alpha (1 + w^2 + \underline{y}^2)^{\tilde{\Delta}^*}}.$$

Zum Beweis der Stetigkeit beschränken wir uns auf von ∞ getrennte Umgebungen, die Stetigkeit bei ∞ folgt dann wie oben wegen der Inversionssymmetrie. Auf solchen Umgebungen ist der Vorfaktor des Integrals beschränkt. Nach der Substitution $\underline{y} \mapsto z\underline{y} + \underline{x}$ folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_4} |(Z_\Delta \psi)(z, \underline{x})| \\ & < \int d^d y dw \frac{w^{\tilde{\Delta}^* - \Delta^* - 1}}{(\underline{y}^2 + (1 - w/z)^2)^{\Delta - \alpha} (\underline{y}^2 + (1 + w/z)^2)^\alpha (1 + w^2 + (z\underline{y} + \underline{x})^2)^{\tilde{\Delta}^*}} \\ & \leq \int d^d y dw \frac{w^{\tilde{\Delta}^* - \Delta^* - 1}}{(\underline{y}^2)^{\Delta - \alpha} (1 + \underline{y}^2)^\alpha (1 + w^2)^{\tilde{\Delta}^*}}. \end{aligned}$$

Dieses Integral faktorisiert, die Konvergenzbedingungen für die y -Integration lauten $d - 2\Delta < 0 < d - 2\Delta + 2\alpha = 1$ und sind erfüllt, für die w -Integration lauten sie $-\tilde{\Delta}^* - \Delta^* < 0 < \tilde{\Delta}^* - \Delta^*$ und sind nach Voraussetzung ebenfalls erfüllt. Wir haben somit eine von z, \underline{x} unabhängige, integrable Majorante gefunden, was die Δ -Stetigkeit beweist. Das Verschwinden am Rand $z = 0$ sehen wir durch Einsetzen in die vorletzte Zeile.

Da G_Δ ein Randverhalten $\sim z^\Delta$ besitzt, erwartet man von ψ nicht nur eine Δ -Stetigkeit, sondern sogar eine Δ^* -Stetigkeit. Analoge Schritte führen zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_5} |(Z_{\Delta^*} \psi)(z, \underline{x})| \\ & < \int d^d y dw \frac{w^{\tilde{\Delta}^* - d - 1 + \Delta}}{((\underline{x} - \underline{y})^2 + (z - w)^2)^{\Delta - \alpha} ((\underline{x} - \underline{y})^2 + (z + w)^2)^\alpha (1 + w^2 + \underline{y}^2)^{\tilde{\Delta}^*}} \\ & \leq \int d^d y dw \frac{w^{\tilde{\Delta}^* - \Delta - 1}}{(\underline{y}^2)^{\Delta - \alpha} (1 + \underline{y}^2)^\alpha (1 + w^2)^{\tilde{\Delta}^*}}, \end{aligned}$$

wobei hier $\underline{y} \mapsto w\underline{y} + \underline{x}$ substituiert wurde. Die Konvergenzbedingungen der y -Integration haben sich offenbar nicht geändert, die der w -Integration lauten nun $-\tilde{\Delta}^* - \Delta < 0 < \tilde{\Delta}^* - \Delta$, was aber nur für $\tilde{\Delta}^* > \Delta$ erfüllt ist. Erst dann hat ψ das nach der Form von G_Δ erwartete Randverhalten. \square

Bemerkung. Die Einschränkung $\Delta^* > 0 \Leftrightarrow \Delta < d \Leftrightarrow m^2 < 0$ lässt sich heuristisch gut verstehen. Ist nämlich $V'(\varphi) = \lambda\varphi^p, p > 1$ ein Monom, so lautet der $z = x^0$ -Anteil der Feldgleichung am Rande

$$(z^2 \partial_z^2 + (1 - d)z \partial_z - m^2) u(z) = \lambda u(z)^p = cz^{p\Delta^*} (1 + o(1)),$$

wenn das dominante Randverhalten immer noch durch z^{Δ^*} gegeben sein soll. Die Lösung ist

$$u(z) = A_- z^{\Delta^*} + A_+ z^\Delta + \frac{c}{p\Delta^*(p\Delta^* - d) - m^2} z^{p\Delta^*} + \dots,$$

was nur für $p\Delta^* > \Delta^* \Leftrightarrow \Delta^* > 0$ konsistent ist. Allgemein wäre jeder Ansatz z^b mit $b < 0$ inkonsistent, das Randverhalten müsste also singulärer als jede negative Potenz sein.

Satz 5.10 Sei h eine $\tilde{\Delta}$ -stetige Funktion auf AdS_{d+1} mit $\tilde{\Delta}^* > \Delta^* > 0$. Dann gilt

$$\max |Z_\Delta G_\Delta h| \leq C(\Delta, \tilde{\Delta}) \max |Z_{\tilde{\Delta}} h|$$

mit einer endlichen Funktion $C(\Delta, \tilde{\Delta})$.

Beweis. Zunächst überlegen wir uns, dass G_Δ stets nichtpositiv ist. Dazu wenden wir (A.6) erneut auf die hypergeometrische Funktion des Propagators an, diesmal aber mit vertauschten Argumenten α, β (diese gehen ja symmetrisch in F ein):

$$F\left(\Delta, \alpha; 2\alpha; -\frac{4}{\sigma}\right) = \left(\frac{\sigma+4}{\sigma}\right)^{-\Delta} F\left(\Delta, \alpha; 2\alpha; \frac{4}{\sigma+4}\right).$$

Nun sind die Parameter positiv, das Argument liegt im Intervall $[0, 1]$. Die hypergeometrische Funktion ist dann manifest positiv, wegen des zusätzlichen Vorzeichens und der Positivität der sonstigen Faktoren ist G_Δ nichtpositiv. Es folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(Z_\Delta G_\Delta h)(x)| &\leq -Z_\Delta \int_{\text{AdS}} d^{d+1}y \sqrt{g} G_\Delta(x, y) |h(y)| \\ &\leq -\max |Z_{\tilde{\Delta}} h| Z_\Delta \int_{\text{AdS}} d^{d+1}y \sqrt{g} G_\Delta(x, y) \left(\frac{y^0}{1+(y)^2}\right)^{\tilde{\Delta}^*} \\ &=: \max |Z_{\tilde{\Delta}} h| \Psi(x). \end{aligned}$$

Nach Satz 5.9 ist $\Psi(x)$ stetig auf AdS_{d+1} und verschwindet am Rand. Die von h unabhängige Funktion

$$C(\Delta, \tilde{\Delta}) := \max \Psi$$

ist somit wohldefiniert und endlich. \square

Bemerkung. Durch Ausrechnen des Integrals ließe sich das globale Maximum von Ψ bestimmen. Nehmen wir an, dass der Propagator G_Δ in diesem einen Spezialfall wirklich das tut, was er soll,

$$((\square^g - m^2) Z_\Delta^{-1} \Psi)(x) = -\left(\frac{x^0}{1+(x)^2}\right)^{\tilde{\Delta}^*},$$

so können wir im Fall $\tilde{\Delta}^* \geq \Delta^* + 2$ ohne Rechnung eine Abschätzung für das Maximum erhalten. Mit L_Δ aus (5.10) lautet die letzte Gleichung

$$(L_\Delta \Psi)(x) = -Z_\Delta \left(\frac{x^0}{1+(x)^2}\right)^{\tilde{\Delta}^*} = -\left(\frac{x^0}{1+(x)^2}\right)^{\tilde{\Delta}^* - \Delta^*}.$$

Hat Ψ nun bei x im Inneren ein Maximum, so folgt wie in Satz 5.7

$$\begin{aligned} -\left(\frac{x^0}{1+(x)^2}\right)^{\tilde{\Delta}^* - \Delta^*} &= (L_\Delta \Psi)(x) \leq -4\Delta^*(\Delta^* + 1) \left(\frac{x^0}{1+(x)^2}\right)^2 \Psi(x) \\ \Rightarrow \Psi(x) &\leq \frac{1}{4\Delta^*(\Delta^* + 1)} \left(\frac{x^0}{1+(x)^2}\right)^{\tilde{\Delta}^* - \Delta^* - 2} \leq \left(2^{\tilde{\Delta}^* - \Delta^*} \Delta^*(\Delta^* + 1)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Diese für $\tilde{\Delta}^* - \Delta^* \geq 2$ gültige Abschätzung für innere Maxima überträgt sich auf ganz AdS_{d+1} , da Ψ am Rand verschwindet. Es gilt somit

$$C(\Delta, \tilde{\Delta}) \leq \left(2^{\tilde{\Delta}^* - \Delta^*} \Delta^* (\Delta^* + 1)\right)^{-1}, \quad \tilde{\Delta}^* \geq \Delta^* + 2.$$

Nun ist es ein Leichtes, die Konvergenz der Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zu beweisen. Führen wir auf der Menge \mathcal{B}_Δ der Δ -stetigen Funktionen auf AdS_{d+1} die Norm

$$\|h\|_\Delta := \max |Z_\Delta h|$$

ein, so wird aus dieser Menge ein Banachraum. Es ist zu zeigen, dass es eine abgeschlossene Teilmenge gibt, auf der die Abbildung

$$T : \mathcal{B}_\Delta \rightarrow \mathcal{B}_\Delta, \quad \varphi \mapsto \varphi_0 + G_\Delta V'(\varphi)$$

als Kontraktion wirkt, denn dann folgt die Konvergenz aus dem Banach'schen Fixpunktsatz. Satz 5.10 besagt $\|G_\Delta h\|_\Delta \leq C(\Delta, \tilde{\Delta}) \|h\|_{\tilde{\Delta}}$. Ist das Potential nun so beschaffen, dass

$$V' : \mathcal{B}_\Delta \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{\Delta}}, \quad \varphi \mapsto V' \circ \varphi, \quad \tilde{\Delta}^* > \Delta^* \quad (5.11)$$

gilt und es $q \in (0, 1)$, $M > 0$ gibt, so dass für Funktionen φ, ψ aus der abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{B}_\Delta(M) := \{\varphi \in \mathcal{B}_\Delta \mid \|\varphi\|_\Delta \leq M\}$ die Abschätzung

$$\|V'(\varphi) - V'(\psi)\|_{\tilde{\Delta}} \leq \frac{q}{C(\Delta, \tilde{\Delta})} \|\varphi - \psi\|_\Delta \quad (5.12)$$

gilt, dann folgt die Kontraktionseigenschaft

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\|_\Delta = \|G_\Delta (V'(\varphi) - V'(\psi))\|_\Delta \leq C \|V'(\varphi) - V'(\psi)\|_{\tilde{\Delta}} \leq q \|\varphi - \psi\|_\Delta.$$

T ist in diesem Fall insbesondere stetig. Gilt $\|\varphi_0\|_\Delta \leq (1 - q)M$, so führt T nicht aus $\mathcal{B}_\Delta(M)$ heraus:

$$\|T(\varphi)\|_\Delta = \|\varphi_0 + G_\Delta V'(\varphi)\|_\Delta \leq \|\varphi_0\|_\Delta + C \|V'(\varphi)\|_{\tilde{\Delta}} \leq (1 - q)M + q \|\varphi\|_\Delta \leq M.$$

Hier wurde $V'(0) = 0$ angenommen, was bei üblichen Potentialen zutrifft. Die Bedingung $\|\varphi_0\|_\Delta \leq (1 - q)M$ ist nach Satz 5.7 aber eine an den Randwert f , nämlich $\max |T_\Delta f| \leq (1 - q)M$. Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 5.11 *Gibt es $q \in (0, 1)$, $M > 0$, so dass V' (5.11), (5.12) erfüllt, und ist der Randwert durch $\max |T_\Delta f| \leq (1 - q)M$ beschränkt, so konvergiert die durch*

$$\varphi_0 = K_\Delta f, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_0 + G_\Delta V'(\varphi_n)$$

definierte Folge gegen ein $\varphi \in \mathcal{B}_\Delta(M)$, welches die Integralgleichung $\varphi = \varphi_0 + G_\Delta V'(\varphi)$ löst.

Bemerkung. Da wir uns nicht mit der Frage beschäftigt haben, wann $G_\Delta h$ differenzierbar ist und $(\square^g - m^2)G_\Delta h = h$ gilt, ist offen, ob die Folge der φ_n gegen eine Lösung der Feldgleichung konvergiert. Bei C^∞ -glattem Randwert f ist es aber in Analogie zu den Green'schen Funktionen des Laplace-Operators zu erwarten: Die Anwendung von G_Δ wird die Differenzierbarkeit um 1 erhöhen, die Addition des C^∞ -glaten φ_0 ändert an den Differenzierbarkeitseigenschaften nichts. Wegen des Erfüllens der Integralgleichung folgt dann für φ aus der nullmaligen Differenzierbarkeit – nämlich der bewiesenen Δ -Stetigkeit des Grenzwerts – die C^∞ -Glattheit und das Erfüllen der Feldgleichung.

Offen ist auch die Frage, ob die Lösung der Feldgleichung eindeutig ist. Im Allgemeinen gilt dieses für nichtlineare partielle Differentialgleichungen nicht.

Lemma 5.12 *Ein global in eine Taylorreihe entwickelbares Potential $V = \mathcal{O}(\varphi^p)$ mit $p \geq 3$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.11.*

Beweis. Es ist $V'(\varphi) = \mathcal{O}(\varphi^{p-1})$, mit $\tilde{\Delta}^* = (p-1)\Delta^*$ ist (5.11) erfüllt. Für den Nachweis von (5.12) schreiben wir

$$Z_{\tilde{\Delta}}(V'(\varphi) - V'(\psi)) = \left(Z_{\Delta}^{p-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V^{(n+1)}(\psi)}{n!} (\varphi - \psi)^{n-1} \right) (Z_{\Delta}(\varphi - \psi)).$$

Die nach Voraussetzung absolut konvergente Summe besteht aus Monomen $\varphi^n \psi^m$ mit $n+m \geq p-2 \geq 1$, so dass sie einschließlich Z_{Δ}^{p-2} für $\varphi, \psi \in \mathcal{B}_{\Delta}(M)$ beschränkt ist und für $M \rightarrow 0$ gegen null geht. Zu jedem $q \in (0, 1)$ gibt es folglich ein M mit

$$\|V'(\varphi) - V'(\psi)\|_{\tilde{\Delta}} \leq \frac{q}{C(\Delta, \tilde{\Delta})} \|\varphi - \psi\|_{\Delta}.$$

Für ein monomiales Potential $V(\varphi) = \frac{\lambda}{p} \varphi^p$ gilt z. B.

$$\|V'(\varphi) - V'(\psi)\|_{\tilde{\Delta}} = \left\| \lambda(\varphi - \psi) \sum_{n=0}^{p-2} \varphi^n \psi^{p-2-n} \right\|_{\tilde{\Delta}} \leq |\lambda| (p-1) M^{p-2} \|\varphi - \psi\|_{\Delta}.$$

□

Im Falle eines polynomialen Potentials lassen sich die Näherungen φ_n in einer graphischen Notation darstellen. Wir betrachten dazu zunächst den einfachsten Fall eines Monoms $V(\varphi) = \frac{\lambda}{p} \varphi^p$, dann ist φ_n durch

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \lambda \int_{\text{AdS}} d^{d+1}y \sqrt{g} G_{\Delta}(x, y) \varphi_{n-1}(y)^{p-1}$$

gegeben. Durch fortgesetztes Anwenden dieser Vorschrift können wir φ_n schließlich als eine Summe mehrfacher Integrale über Produkte aus G_{Δ} und $K_{\Delta}f$ schreiben. Jeder Term dieser Summe lässt sich als ein zusammenhängender *Witten-Graph* darstellen. Dabei wird in einem solchen Graph der AdS_{d+1} -Raum als eine Kreisscheibe symbolisiert, die Integrationen werden durch Vertizes und Linien angegeben. Für jeden Vertex im Kreisinneren wird über AdS_{d+1}

integriert, für jeden Vertex auf dem Kreisrand wird über den AdS_{d+1} -Rand mit dem Randwert f verschmiert. Eine Linie zwischen inneren Vertizes entspricht G_Δ , eine vom Inneren zum Rand K_Δ . Bei einem φ^p -Potential führen jeweils p Linien zu einem inneren Vertex.

Für $V(\varphi) = \frac{\lambda}{3}\varphi^3$ ergibt sich etwa

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \text{---} \circ \text{---}, \\ \varphi_1(x) &= \text{---} \circ \text{---} + \lambda \text{---} \circ \text{---}, \\ \varphi_2(x) &= \text{---} \circ \text{---} + \lambda \text{---} \circ \text{---} + 2\lambda^2 \text{---} \circ \text{---} + \lambda^3 \text{---} \circ \text{---}\end{aligned}$$

und für $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\varphi^4$

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \text{---} \circ \text{---}, \\ \varphi_1(x) &= \text{---} \circ \text{---} + \lambda \text{---} \circ \text{---}, \\ \varphi_2(x) &= \text{---} \circ \text{---} + \lambda \text{---} \circ \text{---} + 3\lambda^2 \text{---} \circ \text{---} + 3\lambda^3 \text{---} \circ \text{---} + \lambda^4 \text{---} \circ \text{---}.\end{aligned}$$

Dabei entspricht der Punkt dem Argument x . Falls das Potential kein Monom, sondern ein echtes Polynom ist, so treten verschiedene Vertizes auf.

Man kann auch eine andere Lösungsstrategie verfolgen, die zu einer Störungsreihe in λ führt. Der Ansatz

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \varphi^{(n)}$$

führt beim monomialen Potential durch Koeffizientenvergleich zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}(\square^g - m^2) \varphi^{(0)} &= 0, & B_\Delta \varphi^{(0)} &= f, \\ (\square^g - m^2) \varphi^{(1)} &= \left(\varphi^{(0)}\right)^{p-1}, & B_\Delta \varphi^{(1)} &= 0, \\ (\square^g - m^2) \varphi^{(2)} &= 2(p-1) \left(\varphi^{(0)}\right)^{p-2} \varphi^{(1)}, & B_\Delta \varphi^{(2)} &= 0, \\ &\dots &&\end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned}
 V(\varphi) = \frac{\lambda}{3}\varphi^3: \quad & \varphi^{(0)}(x) = \text{---} \circ, \quad \varphi^{(1)}(x) = \text{---} \circ \text{---} \circ, \quad \varphi^{(2)}(x) = 2^2 \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ, \\
 & \varphi^{(3)}(x) = 2 \cdot 3 \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ + 2^3 \cdot 3 \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ, \\
 V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\varphi^4: \quad & \varphi^{(0)}(x) = \text{---} \circ, \quad \varphi^{(1)}(x) = \text{---} \circ \text{---} \circ, \quad \varphi^{(2)} = 2 \cdot 3 \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ, \\
 & \varphi^{(3)}(x) = 2 \cdot 3^2 \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ + 2 \cdot 3^3 \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ.
 \end{aligned}$$

Konstruktionsgemäß enthält die n -te iterativ bestimmte Lösungsapproximation φ_n alle Terme der Störungsreihe bis zur Ordnung n und darüber hinaus noch (unvollständige) höhere Ordnungen in λ .

5.5.3 Bestimmung der stationären Wirkung

Nachdem nun die Lösungen der Feldgleichung des Variationsproblems zur Wirkung bestimmt wurden, stellt sich die Frage nach dem Wert der Wirkung auf diesen Lösungen. Einfache heuristische Überlegungen bezüglich der Konvergenz des Wirkungsintegrals am Rande weisen darauf hin, dass dieser Wert im Allgemeinen nicht endlich ist: Das Einsetzen des Randverhaltens $\varphi(z, \underline{x}) \sim z^{\Delta^*}$, $\partial_z \varphi \sim z^{\Delta^* - 1}$ führt zu

$$\begin{aligned}
 I(\varphi) &= \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) \right) \\
 &= \int d^d x dz z^{-(1+d)} \left(\frac{1}{2} z^2 \left(\underbrace{(\partial_z \varphi)^2}_{\sim z^{2\Delta^* - 2}} + \underbrace{\sum (\partial_i \varphi)^2}_{\sim z^{2\Delta^*}} \right) + \frac{1}{2} m^2 \underbrace{\varphi^2}_{\sim z^{2\Delta^*}} + \underbrace{V(\varphi)}_{\sim z^{>2\Delta^*}} \right) \\
 &\sim \int dz z^{2\Delta^* - 1 - d}.
 \end{aligned}$$

Die Konvergenz bei $z = 0$ verlangt aber $2\Delta^* - d > 0 \Leftrightarrow 2\Delta < d$, was bereits bei der Betrachtung der Lösbarkeit der freien Feldgleichung ausgeschlossen werden musste.

Es ist aber möglich, das Wirkungsintegral durch Abzug eines Randterms zu regularisieren [KW99]. Dazu spaltet man zunächst das Randverhalten z^{Δ^*} gemäß

$$\varphi(z, \underline{x}) =: z^{\Delta^*} \chi(z, \underline{x})$$

ab. Die AdS_{d+1} -Wirkung für χ lautet

$$\begin{aligned} I(\chi) &= \int d^d x dz z^{-(1+d)} \left(\frac{1}{2} z^2 \sum (\partial_\mu z^{\Delta^*} \chi)^2 + \frac{1}{2} m^2 (z^{\Delta^*} \chi)^2 + V(z^{\Delta^*} \chi) \right) \\ &= \int d^d x dz z^{2\Delta^* - 1 - d} \left(\frac{1}{2} z^2 \left((\partial_z \chi)^2 + \sum (\partial_i \chi)^2 \right) + \Delta^* \chi z \partial_z \chi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta^* (2\Delta^* - d) \chi^2 + z^{-2\Delta^*} V(z^{\Delta^*} \chi) \right) \\ &= \int d^d x dz \left(z^{2\Delta^* - 1 - d} \left(\frac{1}{2} z^2 \sum (\partial_\mu \chi)^2 + z^{-2\Delta^*} V(z^{\Delta^*} \chi) \right) + \partial_z \left(\frac{\Delta^*}{2} z^{2\Delta^* - d} \chi^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Dies können wir mit einem neuen „metrischen Tensor“ h für χ ,¹

$$h_{\alpha\beta} = z^{-2\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \quad \gamma = 1 - \frac{2\Delta^*}{d-1} = \frac{2\Delta^* - d - 1}{d-1},$$

in der Form

$$I(\chi) = \int d^d x dz \left(\sqrt{h} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \chi \partial^\alpha \chi + z^{-2\Delta^* \frac{d+1}{d-1}} V(z^{\Delta^*} \chi) \right) + \partial_z \left(\frac{\Delta^*}{2} z^{2\Delta^* - d} \chi^2 \right) \right)$$

schreiben. Die Wirkung für χ setzt sich somit aus dem üblichen kinetischen Term zur Metrik h und einem (allerdings bezüglich der Symmetrien von h nicht mehr invarianten) Potential zusammen, außerdem gibt es noch eine Ableitung erster Ordnung. Bei dieser handelt es sich aber um einen Randterm, der bei erfülltem Konvergenzkriterium $2\Delta^* > d$ für das Wirkungsintegral am Rand $z = 0$ verschwindet, bei $2\Delta^* < d$ dagegen divergent ist. Die Regularisierung des Wirkungsintegrals besteht nun darin, diesen Randterm wegzulassen, d. h. von nun an ist die Wirkung durch

$$I_R(\chi) = \int_{\text{AdS}} d^{d+1} x \sqrt{h} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \chi \partial^\alpha \chi + (x^0)^{-2\Delta^* \frac{d+1}{d-1}} V((x^0)^{\Delta^*} \chi) \right)$$

gegeben. Da nur ein Randterm abgezogen wurde, ist die aus der regularisierten Wirkung resultierende Feldgleichung für χ dieselbe wie die ursprüngliche für φ nach der Substitution $\varphi = z^{\Delta^*} \chi$.

Wir sehen, dass die Situation für $\gamma = 0 \Leftrightarrow \Delta = \frac{d+1}{2}$ besonders einfach wird: h ist dann die Metrik des flachen Raumes und somit \square^h der Laplace-Operator. Die Feldgleichung ist die Laplace-Gleichung mit einem nichtlinearen Zusatz. Dieses äußert sich natürlich auch im Propagator G_Δ : Abgesehen von z -Potenzen wird aus ihm die übliche Green'sche Funktion des Laplace-Operators mit der Randbedingung, bei $z = 0$ zu verschwinden.

I_R ist im freien Fall konvergent für $\frac{d}{2} < \Delta < \frac{d}{2} + 1$ [KW99], was man sich mit heuristischen Überlegungen leicht plausibel machen kann. Durch Anwendung des Satzes von Stokes (5.3) und Ausnutzung der Feldgleichung lässt sich I_R auf Lösungen der Feldgleichung zum Randwert f als

$$I_R(f) = -\frac{1}{2} \int d^d x (\sqrt{h} \chi \partial^0 \chi) \Big|_{x^0=0} + \int_{\text{AdS}} d^{d+1} x \sqrt{g} \left(V(z^{\Delta^*} \chi) - \frac{1}{2} z^{\Delta^*} \chi V'(z^{\Delta^*} \chi) \right) \quad (5.13)$$

¹ h ist zwar ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe, lässt sich aber im generischen Fall nicht als metrischer Tensor einer Mannigfaltigkeit interpretieren. Der Krümmungsskalar wäre am Rand überall unendlich.

schreiben, woraus im freien Fall

$$I_R(f) = -\pi^{\frac{d}{2}} \left(\Delta - \frac{d}{2} \right) \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \int d^d x_1 d^d x_2 \frac{f(\underline{x}_1) f(\underline{x}_2)}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|^{2\Delta}} \quad (5.14)$$

wird [KW99]. Liegt eine Wechselwirkung $V(\varphi) = \mathcal{O}(\varphi^p)$ mit $p > 2$ und $\Delta < \left(1 - \frac{1}{p}\right) d$ vor, so wurde bereits gezeigt, dass die Korrekturen zur Δ -stetigen freien Lösung Δ^* -stetig sind und somit am Rand schneller als die freie Lösung verschwinden. In diesem Fall wird das Integral über den Rand in (5.13) bereits korrekt durch das für den freien Fall berechnete (5.14) beschrieben.

Wenden wir auf die ursprüngliche Wirkung den Satz von Stokes formal an,

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{\text{AdS}} d^{d+1} x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x (\sqrt{g} \varphi \partial^0 \varphi) \Big|_{x^0=0} + \int_{\text{AdS}} d^{d+1} x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} (m^2 \varphi^2 - \varphi \square^g \varphi) + V(\varphi) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x (\sqrt{g} \varphi \partial^0 \varphi) \Big|_{x^0=0} + \int_{\text{AdS}} d^{d+1} x \sqrt{g} \left(V(\varphi) - \frac{1}{2} \varphi V'(\varphi) \right) \\ &=: I_0(f) + I_V(f), \end{aligned} \quad (5.15)$$

wobei φ die Lösung der Feldgleichung zum Randwert f ist, so können wir den Effekt der vorgenommenen Regularisierung offenbar dadurch erreichen, dass (5.14) als Wert für den ersten Term I_0 in (5.15) genommen, das AdS-Integral I_V aber unverändert übernommen wird. Letzteres ist bezüglich der Konvergenz unproblematisch, sofern für $V(\varphi) = \mathcal{O}(\varphi^p)$ die Bedingung $\Delta < \left(1 - \frac{1}{p}\right) d \Leftrightarrow p\Delta^* > d$ eingehalten wird: $V(\varphi) - \frac{1}{2} \varphi V'(\varphi)$ lässt sich dann durch $C \left(\frac{z}{1+z^2+\underline{x}^2} \right)^{p\Delta^*}$ abschätzen, es folgt

$$\begin{aligned} |I_V(f)| &= \left| \int_{\text{AdS}} d^{d+1} x \sqrt{g} \left(V(\varphi) - \frac{1}{2} \varphi V'(\varphi) \right) \right| < C \int d^d x dz \frac{z^{p\Delta^* - d - 1}}{(1 + z^2 + \underline{x}^2)^{p\Delta^*}} \\ &\sim \int d^d x \frac{1}{(1 + \underline{x}^2)^{\frac{d+p\Delta^*}{2}}}. \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt wurde (A.9) benutzt, was wegen $p\Delta^* > d$ legitim ist. Das übrig gebliebene x -Integral ist konvergent.

Die Störungsreihe für φ führt zu einer Störungsreihe für $I_V(f)$, welche sich ebenfalls durch Witten-Graphen darstellen lässt. Der Einfachheit halber betrachten wir wieder ein monomiales

Potential $V(\varphi) = \frac{\lambda}{p}\varphi^p$:

$$\begin{aligned}
I_V(f) &= \lambda \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} \varphi^p = -\lambda \frac{p-2}{2p} \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \varphi^{(n)} \right)^p \\
&= -\frac{p-2}{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \sum_{n_1+\dots+n_p=k} \frac{1}{n_1! \dots n_p!} \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} \prod_{i=1}^p \varphi^{(n_i)} \\
&= -\frac{p-2}{2p} \lambda \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} (K_{\Delta} f)^p \\
&\quad - \lambda^2 \frac{p-2}{2} \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} ((K_{\Delta} f)^{p-1} G_{\Delta} ((K_{\Delta} f)^{p-1})) + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Für $p = 3$ lautet dieses in graphischer Notation

$$I_V = -\frac{1}{6}\lambda \text{ (3-lobed circle) } - \frac{1}{2}\lambda^2 \text{ (circle with 3 internal lines) } - \frac{3}{2}\lambda^3 \text{ (circle with 4 internal lines) } - \frac{2}{3}\lambda^4 \text{ (circle with 5 internal lines) } - 4\lambda^4 \text{ (circle with 6 internal lines) } + \mathcal{O}(\lambda^5),$$

für $p = 4$ schließlich

$$I_V = -\frac{1}{4}\lambda \text{ (circle with 4 internal lines) } - \lambda^2 \text{ (circle with 5 internal lines) } - \frac{9}{2}\lambda^3 \text{ (circle with 6 internal lines) } - 4\lambda^4 \text{ (circle with 7 internal lines) } - 18\lambda^4 \text{ (circle with 8 internal lines) } + \mathcal{O}(\lambda^5).$$

In der Entwicklung der klassischen Wirkung als Funktional des Randwerts können nur Baumgraphen, aber keine Schleifengraphen auftreten.

Kapitel 6

AdS-CFT-Korrespondenz

6.1 Einführung

1997 wurde von Maldacena die Vermutung aufgestellt, dass gewisse Supergravitations- und Stringtheorien auf dem Produkt eines $d + 1$ -dimensionalen Anti-de-Sitter-Raumes mit einem kompakten Raum wie S^n äquivalent zu konform invarianten Quantenfeldtheorien auf dem d -dimensionalen Rand des Anti-de-Sitter-Raumes sind [Ma98]. Die betrachteten konformen Quantenfeldtheorien waren dabei durch den Limes großer N von Super-Yang-Mills-Theorien mit Eichgruppe $SU(N)$ gegeben. Als zugrunde liegendes Bild mag man sich den Anti-de-Sitter-Raum als eine approximative Lösung zur Supergravitation nahe des Horizontes eines schwarzen Loches vorstellen. Der Horizont ist der Rand des Anti-de-Sitter-Raumes, Quantenfelder auf ihm sind nach der Vermutung äquivalent oder *dual* zu Theorien auf dem höherdimensionalen, umgebenden Raum. Ein solches *holographisches Prinzip* wurde 1993 von 't Hooft mit heuristischen Überlegungen für Quantengravitationsfelder auf der Planck-Skala motiviert: Die Anzahl der Freiheitsgrade innerhalb eines Volumens ist dort an dessen Oberfläche und nicht an das Volumen selbst gekoppelt [Ho93].

Maldacenas Arbeit ließ ausdrücklich die genaue und allgemeine Ausformulierung der Korrespondenzvermutung offen, bereits kurz nach deren Veröffentlichung gab es aber Präzisierungen und Verallgemeinerungen mehrerer Autoren. Witten stellte eine praktikable Korrespondenzvorschrift im Euklidischen auf, die zu einer durch die Partitionsfunktion gegebenen Supergravitations- oder Stringtheorie auf dem Anti-de-Sitter-Raum eine konforme Quantenfeldtheorie auf dessen Rand induziert [Wi98], Gubser, Klebanov und Polyakov machten einen ähnlichen Ansatz [GKP98]. Die Witten'sche Vorschrift lässt sich unmittelbar auf den Fall einer Quantenfeldtheorie auf dem Anti-de-Sitter-Raum erweitern. Bemerkenswert ist die Formulierung der Korrespondenz in einem bestimmtem Limes, in dem eine *klassische* Stringtheorie auf dem Anti-de-Sitter-Raum mit einer konformen Quantenfeldtheorie verbunden wird [K199].

In der Folge entstand eine Vielzahl verschiedenster Arbeiten zu dem Komplex der *AdS-CFT-Korrespondenz*, von denen viele auf Wittens Korrespondenzvorschrift mit einer klassischen Theorie auf der AdS-Seite aufbauen – nicht zuletzt da die Vorschrift in dieser Form gut zum Studium expliziter Modelle geeignet ist. In dieser Arbeit wird diese Formulierung der Korrespondenz ebenso die Grundlage sein und am Beispiel untersucht, inwieweit eine klassische AdS-Theorie eine konforme Quantenfeldtheorie induzieren kann oder ob nicht doch – im

strengen Sinne der Wightman-Axiome – die klassische Version der Korrespondenzvorschrift allenfalls die erste Ordnung einer axiomatischen Anforderungen genügenden Vorschrift sein kann.

Fundamental für den holographischen Zusammenhang zwischen Theorien auf dem Anti-de-Sitter-Raum und konformen auf seinem Rand ist die Übereinstimmung der Symmetriegruppen beider Seiten, beide sind $SO_0(2, d)$. In 5.4 wurde dieser Zusammenhang bei der Betrachtung des $d + 2$ -dimensionalen Einbettungsraumes deutlich: Dessen homogene Symmetriegruppe operiert einmal auf dem eingebetteten Hyperboloid als die AdS-Symmetriegruppe, einmal auf den Strahlen des asymptotischen Kegels als die konforme Gruppe. Die Strahlen treffen im Unendlichen auf den Rand des Hyperboloids.

Diese grundlegende Beobachtung ist rein geometrischer Natur und legt es nahe, das holographische Prinzip nicht nur zwischen Supergravitation oder Stringtheorie auf der einen und Quantenfeldtheorie auf der anderen Seite zu sehen, sondern auch zwischen Theorien gleichen Typs beiderseits. Tatsächlich ist es für solche Fälle möglich, eine Korrespondenz auf mathematisch rigorose Weise zu etablieren:

- Ist auf der Anti-de-Sitter-Seite ein Quantenfeld durch seine Wightman-Distributionen gegeben, so können unter bestimmten Voraussetzungen aus diesen – im Wesentlichen durch Einschränkung auf den Rand – Wightman-Distributionen eines konformen Quantenfeldes gewonnen werden [Be00].
- Im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie ist sogar eine echte Umsetzung des holographischen Prinzips möglich, d. h. nicht nur die Projektion einer AdS-Theorie auf den Rand – die Herstellung des Hologramms, um im Bild zu bleiben –, sondern auch umgekehrt die Rekonstruktion der AdS-Theorie anhand eines niederdimensionalen Hologramms der Form einer konformen Theorie [Re00]. Grundlage dieser algebraischen Holographie ist die Beobachtung, dass es eine 1:1-Korrespondenz zwischen raumartigen AdS-Keilen und Doppelkegeln auf dem Rand gibt, die mit Netzstruktur und Symmetriegruppe verträglich ist. Durch Identifikation der auf korrespondierenden Gebieten lokalisierten Observablen gelangt man von einem Netz zum anderen.

Im Gegensatz zu der Witten'schen Korrespondenzvorschrift setzen diese beiden Vorschriften keine durch eine konkrete Partitionsfunktion, Feldgleichungen oder Ähnliches gegebene Theorie auf der AdS-Seite voraus, sondern nur die als fundamental anzusehende Gültigkeit der jeweiligen Axiome. Diese überträgt sich in beiden Fällen auf die Theorie der CFT-Seite. Offen bleibt dabei natürlich das grundsätzliche Problem, überhaupt nichttriviale, den Axiomen genügende Theorien für die Anwendung der Holographie zu finden.

Dass die algebraische Holographie eine natürliche 1:1-Korrespondenz herstellt, muss betont werden. Die Korrespondenz in beiden Richtungen liegt in der Intention von Maldacenas Arbeit, wird aber in den meisten Folgearbeiten zum Thema auf die Projektion reduziert. Dabei ist das Erstaunliche ja gerade die Rekonstruktion einer höherdimensionalen Theorie aus einer niederdimensionalen, in diesem Fall die Reduktion der Freiheitsgrade einer AdS-Theorie auf die einer konformen Feldtheorie des Randes. Dies erst rechtfertigt den Begriff der Holographie.

6.2 Korrespondenz über Funktionale

Die Witten'sche Vorschrift stellt die (Projektionsrichtung der) Korrespondenz über die Identifikation zweier Funktionale her. Man beginnt mit der Partitionsfunktion $Z(f)$ einer euklidischen AdS-Theorie, wobei die auf dem Rand definierte Funktion f den Randwert des Feldes φ der Theorie in einer zu spezifizierenden Weise vorgibt [Wi98]. Im einfachen Fall ist die AdS-Theorie eine klassische, so dass

$$Z(f) = e^{-I(\varphi)} \quad (6.1)$$

mit der klassischen Wirkung $I(\varphi)$ der Theorie gilt. φ ist hierbei Lösung der klassischen Feldgleichungen mit Randwert f , d. h. stationärer Punkt der Wirkung. Sollte die klassische Theorie keine adäquate Korrespondenzvorschrift ergeben, so schlägt Witten die Einbeziehung von String- oder Quantenkorrekturen vor, ohne Genaueres anzugeben. Man kann etwa an die Erweiterung von (6.1) zu einem Funktionalintegral denken,

$$Z(f) = \int D\phi e^{-I(\phi)} \delta(\partial\phi - f),$$

wobei $\delta(\partial\phi - f)$ die Integration auf solche ϕ einschränkt, die den Randwert f in definierter Weise ∂ annehmen.

Die AdS-Symmetrie der Wirkung hat zur Folge, dass $Z(f)$ als Funktional auf den Randwerten f die Symmetrie eines erzeugenden Funktionals $S(f)$ für Schwinger-Funktionen eines konformen Quantenfeldes besitzt. Der Witten'sche Ansatz

$$S(f) \stackrel{!}{=} \frac{Z(f)}{Z(0)} \Leftrightarrow \langle e^{A(f)} \rangle \stackrel{!}{=} \frac{1}{Z(0)} \int D\phi e^{-I(\phi)} \delta(\partial\phi - f) \quad (6.2)$$

ist daher naheliegend. $\langle e^{A(f)} \rangle$ meint dabei den ins Euklidische fortgesetzten Vakuumerwartungswert von $e^{A(f)}$ mit dem Wightman-Feld A .

An dieser Stelle ist es angebracht, sich an die im strengen axiomatischen Rahmen gültige Korrespondenzvorschrift [Be00] für Wightman-Distributionen zu erinnern. Offen blieb dabei die Herkunft der Wightman-Distributionen des AdS-Quantenfeldes. Eine übliche Methode zur Konstruktion der Schwinger-Funktionen ist die in 2.4 vorgestellte über das erzeugende Funktional (2.2). Setzen wir für das Maß $d\mu(\phi)$ wie üblich $\frac{1}{Z} D\phi e^{-I(\phi)}$ an mit geeigneter Normierung Z , so erhalten wir als erzeugendes Funktional für das AdS-Feld B

$$S_{\text{AdS}}(F) = \langle e^{B(F)} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-I(\phi)} e^{\phi(F)}. \quad (6.3)$$

Erfüllt das hierdurch definierte Feld B alle Wightman-Axiome, so stellt die Einschränkung $S_{\text{AdS}}(F)$ auf den Rand nach [Be00] ein erzeugendes Funktional für die Schwinger-Funktionen eines konformen Quantenfeldes A dar. Die Einschränkung auf den Rand erfolgt durch die Einschränkung des Trägers von F auf den Rand unter Berücksichtigung des bereits aus 5.5 bekannten singulären Randverhaltens, $F \sim \delta_{\partial\text{AdS}} \cdot f$, und läuft auf die Ersetzung von $\phi(F)$ durch $\partial\phi(f)$ in (6.3) hinaus. Mithin legt die quantenfeldtheoretische Betrachtung statt (6.2) die Korrespondenzvorschrift

$$S(f) = \langle e^{A(f)} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-I(\phi)} e^{\partial\phi(f)} \quad (6.4)$$

nahe. Der Vergleich beider Vorschriften zeigt, dass das stringtheoretisch motivierte Vorschreiben von Randwerten in (6.2) modulo eines i -Faktors gerade zum fouriertransformierten Funktional vom quantenfeldtheoretisch motivierten (6.4) führt. Von letzterem wissen wir, dass es eine vernünftige Vorschrift liefert. Es stellt sich daher die Frage, ob das auch noch nach Fouriertransformation gelten kann. In [DR02] wurde eine Antwort auf diese Frage gegeben: Beide Funktionale definieren tatsächlich Graph für Graph der Störungsreihe dieselbe Theorie, sofern das Randverhalten der ϕ , über die integriert wird, in (6.2) in der Notation von 5.5 durch z^{Δ^*} und in (6.4) durch z^Δ , $\Delta > \frac{d}{2}$ festgelegt ist. Vor diesem Hintergrund wird verständlich, warum die auf den ersten quantenfeldtheoretischen Blick nicht manifest positive Vorschrift (6.2) ein Funktional $S(f)$ erzeugt, dessen n -Punkt-Funktionen beim genauen Studium viele vernünftige Eigenschaften aufweisen.

6.2.1 Klassische Näherung

Es soll nun der Witten'sche Ansatz in der klassischen Version näher beleuchtet werden. Wie bereits beschrieben stellt dieser die AdS-CFT-Korrespondenz her über die Identifikation

$$S(f) = e^{-I(\varphi)}, \quad \partial\varphi = f, I(\varphi) \text{ stationär.}$$

Es soll dabei nur eine Lösung des Prinzips der stationären Wirkung geben, oder wenigstens sollte $S(f)$ für alle möglichen Lösungen gleich sein. Mit (2.4) kann das erzeugende Funktional der trunkierten Schwinger-Funktionen einfach als das Negative der Wirkung geschrieben werden,

$$S^T(f) = -I(\varphi). \quad (6.5)$$

Die mathematischen Grundlagen zur Bestimmung einer Wirkung eines skalaren Feldes φ der Form

$$I(\varphi) = \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) \right)$$

auf Lösungen der Feldgleichung zum Randwert f wurden bereits in 5.5 gelegt. Der Randwertoperator ∂ ist B_Δ , wobei $\Delta(\Delta - d) = m^2$ gilt. Werden Lösungen im Raum zweimal stetig differenzierbarer Funktionen verlangt, so muss $\frac{d}{2} < \Delta < d$ gelten, in anderen Fällen gibt es keine solchen Lösungen. Mithilfe von Legendre-Transformationen kann man eine Erweiterung des Δ -Bereichs vornehmen [KW99], oder aber man betrachtet die für den zulässigen Bereich gewonnenen n -Punkt-Funktionen mittels analytischer Fortsetzung für allgemeines Δ .

6.2.2 Skalare Zweipunktfunktion

Nach 5.5.3 ist der im Randwert f bilineare Anteil des Wirkungsfunktionals nach Regularisierung durch (5.14) gegeben, woraus sich gemäß (6.5) die Zweipunktfunktion

$$S_2^T(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 2\pi^{\frac{d}{2}} \left(\Delta - \frac{d}{2} \right) \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \frac{1}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|^{2\Delta}}$$

ergibt. Wir sehen, dass dies die Form einer Zweipunktfunktion eines konformen Feldes hat, wobei die Skalendimension Δ nach 5.5 mit der Masse des AdS-Feldes über $\Delta(\Delta - d) = m^2$ zusammenhängt. Im Allgemeinen ist Δ weder ganzzahlig noch kanonisch.

Der Normierungsfaktor C_Δ ist oberhalb der Unitaritätsschranke positiv mit einer doppelten Nullstelle bei $\Delta = \frac{d}{2}$ – ein Fall, der bei dieser Form der AdS-CFT-Korrespondenz ohnehin ausgeschlossen werden muss.

6.2.3 Skalare Vierpunktfunktion

Für spätere Anwendungen ist es nützlich, die aus vier Propagatoren K_Δ mit verschiedenen Δ gebildete Vierpunktfunktion zu bestimmen. Mit den Abkürzungen $x_0 = (z, \underline{x}_0)$, $x_{ij} = \underline{x}_i - \underline{x}_j$, $\Sigma = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$ berechnet man

$$\begin{aligned}
D_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) &= \begin{array}{c} \underline{x}_1 \qquad \qquad \underline{x}_4 \\ \diagdown \qquad \diagup \\ \Delta_1 \qquad \Delta_4 \\ \diagup \qquad \diagdown \\ \underline{x}_2 \qquad \qquad \underline{x}_3 \end{array} = \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x_0 \sqrt{g} \prod_{i=1}^4 k_{\Delta_i}(x_0, \underline{x}_i) \\
&= \int d^d x_0 dz z^{\Sigma-d-1} \prod_{i=1}^4 (z^2 + x_{0i}^2)^{-\Delta_i} \\
&= \frac{\Gamma(\Sigma)}{\prod \Gamma(\Delta_i)} \int d^d x_0 dz \prod \left(d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \right) \delta(1 - \sum \alpha_i) \frac{z^{\Sigma-d-1}}{(\sum \alpha_i (z^2 + x_{0i}^2))^\Sigma} \\
&\stackrel{\text{(A.9)}, \sum \alpha_i=1}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{\Sigma-d}{2}, \frac{\Sigma+d}{2}\right)}{2 \prod \Gamma(\Delta_i)} \int d^d x_0 \prod \left(d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \right) \delta(1 - \sum \alpha_i) (\sum \alpha_i x_{0i}^2)^{-\frac{\Sigma+d}{2}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\Sigma-d}{2}, \frac{\Sigma+d}{2}\right)}{2 \prod \Gamma(\Delta_i)} E(\underline{x}_1, \Delta_1, \dots, \underline{x}_4, \Delta_4). \tag{6.6}
\end{aligned}$$

E ist explizit in (A.13) gegeben, wobei dort im entarteten Fall $\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ (A.17) Anwendung findet. Dieser Fall enthält etwa $\Delta_1 = \Delta_2, \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_1 - k, k \in \mathbb{Z}$ sowie $\Delta_1 = \Delta_3, \Delta_2 = \Delta_4$ und $\Delta_1 = \Delta_4, \Delta_3 = \Delta_4$.

Da $E_4(\Delta_i, u, v)$ in (A.15) als Potenzreihe in $u, 1-v$ mit der Potenz u^{Δ_3} als Vorfaktor gegeben ist, sind ebenso sämtliche skalaren Vierpunktfunktionen als Potenzreihen mit Koeffizienten E_{nm} gegeben. Im entarteten Fall treten zusätzliche $\ln u$ -Terme sowie Ableitungen der E_{nm} auf.

Solche und ähnliche Darstellungen skalarer Vierpunktfunktionen wurden von mehreren Autoren erhalten, umfangreiche Darstellungen finden sich etwa in den Arbeiten [F99A] – [F99D]. Dort werden allgemeinere Vierpunktfunktionen berechnet, deren Diagramme nicht nur aus skalaren Linien bestehen, sondern auch aus tensoriellen wie etwa Ableitungen. Sie lassen sich aber auf Summen skalarer Vierpunktfunktionen zurückführen.

6.2.4 Übergang zum Funktionalintegral

Von der klassischen Version der AdS-CFT-Korrespondenz kann man realistischere nur erwarten, dass sie allenfalls eine erste Näherung einer aus quantenfeldtheoretischer Sicht haltbaren Korrespondenz liefert. Ohne Rechnung können wir dies für einfache AdS-Modelle wie

eine skalare φ^p -Theorie mit $p > 4$ aus dem Satz 1.1 von Baumann schließen: Da das klassische Wirkungsfunktional nur Baumgraphen in seiner Entwicklung besitzt, hat ein solcher Graph mindestens p Linien an den Rand. Für $p > 4$ wird daher die trunkierte Vierpunkt-funktion $S_4^T = 0$ induziert, was nach Satz 1.1 nur mit einem verallgemeinerten freien Feld verträglich ist. Das liegt aber nicht vor, da es höhere und nicht verschwindende trunkierte Schwinger-Funktionen wie etwa S_p^T gibt.

Ein konformes Quantenfeld mit allen erforderlichen Eigenschaften wird möglicherweise nach dem Übergang zum Funktionalintegral,

$$Z(f) = \int D\phi e^{-I(\phi)} \delta(\partial\phi - f),$$

induziert, selbst wenn die klassische Näherung nicht diese Eigenschaften aufweist. Genau genommen müssten wir im Funktional ja noch \hbar schreiben,

$$Z_{\hbar}(f) = \int D\phi e^{-\hbar^{-1}I(\phi)} \delta(\partial\phi - f),$$

der klassische Limes ist dann

$$Z_C(f) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} (Z_{\hbar}(f))^{\hbar} = e^{-\min_{\partial\phi=f} I(\phi)}.$$

Bei diesem Grenzprozess übertragen sich für $\hbar > 0$ vorhandene Eigenschaften von Z_{\hbar} wie etwa die Positivität nicht automatisch auf den Grenzwert Z_C , da noch mit \hbar potenziert werden muss. Natürliche Potenzen erzeugender Funktionale wahren nach Abschnitt 2.4 die Positivität, jedoch nicht beliebige Potenzen wie $\hbar \rightarrow 0$.

Die Vorschrift, wie das Funktionalintegral auszurechnen ist, wird eine Renormierung erfordern. Formal beginnt man damit, den Exponenten um die Lösung der freien Feldgleichung oder um die (klassische) Lösung der tatsächlichen Feldgleichung zu entwickeln und die Integration so auf Gauß'sche Integrationen zurückzuführen. Das Resultat werden zusätzliche Schleifengraphen in der Entwicklung des Funktionals sein, wie sie in den Abbildungen 6.1, 6.2 zu sehen sind.

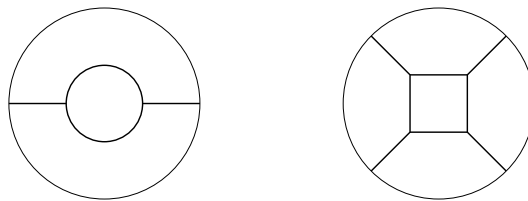
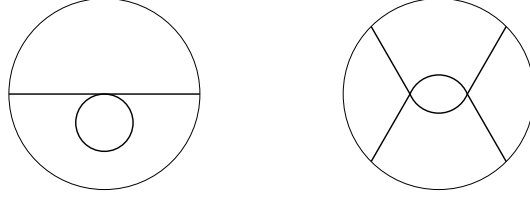


Abbildung 6.1: Schleifenkorrekturen zu Zwei- und Vierpunkt-funktion bei φ^3 -Potential

Bisher gibt es kaum Arbeiten, die sich mit der Definition des Funktionalintegrals oder dem Bestimmen der resultierenden nächsthöheren Ordnungen befassen. In [HMR00] wird der „AdS-Box-Graph“ aus Abbildung 6.1 im Hinblick auf seine kritischen Exponenten untersucht, in [Jo02] wird formal das korrekte Transformationsverhalten der Graphen aus Abbildung 6.2 verifiziert.

Abbildung 6.2: Schleifenkorrekturen zu Zwei- und Vierpunktfunktion bei φ^4 -Potential

6.3 φ^4 -Modell

Wir wollen nun am einfachen Beispiel des klassischen AdS- φ^4 -Modells die via Korrespondenz induzierte konforme Feldtheorie hinsichtlich ihrer quantenfeldtheoretischen Eigenschaften prüfen. Das Potential ist $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\varphi^4$, über (6.5) liefert uns (5.16) mit $p = 4$ das erzeugende Funktional für die trunkierten Schwinger-Funktionen.

6.3.1 Vierpunktfunktion

Der Beitrag in (5.16) zur Vierpunktfunktion S_4^T ist offenbar

$$\begin{aligned} S_4^T(f^{\otimes 4}) &= 4! \frac{\lambda}{4} \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} (K_\Delta f)^4 \\ \Rightarrow S_4^T(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) &= 6\lambda \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x_0 \sqrt{g} \prod_{i=1}^4 K_\Delta(x_0, \underline{x}_i) \\ &= 6\lambda \kappa_\Delta^4 D_{\Delta\Delta\Delta\Delta}(\underline{x}_i). \end{aligned}$$

Es liegt der entartete Fall (A.22) von D vor,

$$\begin{aligned} D_{\Delta\Delta\Delta\Delta}(\underline{x}_i) &= \frac{\pi^\mu \Gamma(2\Delta - \frac{d}{2})}{2\Gamma(\Delta)^4} \frac{1}{(x_{12}^2 x_{34}^2)^\Delta} \\ &\quad \cdot \frac{d}{d\Delta_3} \Big|_{\Delta_3=\Delta} \left(E_2(\Delta, \Delta_3, u, v) - E_2(\Delta_3, \Delta, u, v) \right) \\ &= \frac{\pi^\mu \Gamma(2\Delta - \frac{d}{2})}{2\Gamma(\Delta)^4} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \Delta_3} - \frac{\partial}{\partial \Delta_1} \right) \Big|_{\Delta_i=\Delta} E_2(\Delta_1, \Delta_3, u, v)}{(x_{12}^2 x_{34}^2)^\Delta}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Aus der Potenzreihenentwicklung (A.21) von E_2 folgt die von $D_{\Delta\Delta\Delta\Delta}$:

$$\begin{aligned} D_{\Delta\Delta\Delta\Delta}(\underline{x}_i) &= \frac{\pi^\mu \Gamma(2\Delta - \frac{d}{2})}{2\Gamma(\Delta)^4} \frac{1}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} \\ &\quad \cdot \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d\Delta_3} - \frac{d}{d\Delta_1} - \ln u \right) \Big|_{\Delta_i=\Delta} E_{nm}(\Delta_3, \Delta_3, \Delta_1, \Delta_1) u^n (1-v)^m. \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.3.2 Positivitätsuntersuchung

Da nun die Vierpunktfunktion in expliziter Form vorliegt, stellt sich die Frage nach der Positivität (2.6). Das Korollar 3.7 liefert eine einfach zu testende notwendige Bedingung, die besonders scharf im Limes $u, 1 - v \rightarrow 0$ wird. In diesem Limes können wir aufgrund der Potenzreihenentwicklung (6.8) die volle Vierpunktfunktion einschließlich des freien Anteils $1 + v^{-\Delta}$ schreiben als

$$g(u, v) = A + B \ln u + \mathcal{O}(u \ln u) + \mathcal{O}((1 - v) \ln u) \quad (6.9)$$

mit $B \sim \lambda E_{00}(\Delta, \Delta, \Delta, \Delta), E_{00}(\Delta, \Delta, \Delta, \Delta) \neq 0$. Bereits diese recht allgemeine Form reicht zur Widerlegung der Positivität:

Lemma 6.1 *Sei g eine konforme Vierpunktfunktion der Form (6.9) mit $B \neq 0$. Dann ist die Osterwalder-Schrader-Positivität verletzt.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Korollar 3.7 wählen wir

$$s_{11} = \varepsilon, t_{11} = 1 - \varepsilon, s_{22} = 4\varepsilon, t_{22} = 1 - 4\varepsilon, s_{12} = 2\varepsilon, t_{12} = 1.$$

Diese konformen Invarianten erfüllen für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Bedingungen des Korollars, wie man leicht einsieht. Das Korollar formuliert nun eine Bedingung an die Funktion $h(u, v) = u^\Delta g(u, v)$, die für g umgeschrieben

$$g(s_{11}^2, (1 - s_{11})^2) g(s_{22}^2, (1 - s_{22})^2) \geq \left(\frac{s_{12}^2}{s_{11} s_{22}} \right)^{2\Delta} |g(s_{12}^2, t_{12}^2)|^2$$

lautet. Der Vorfaktor der rechten Seite ist hier einfach 1. Es gilt $1 - v_{ij} = 1 - t_{ij}^2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$, so dass sich die Ungleichung unter Benutzung von (6.9) zu

$$(A + 2B \ln \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon)) (A + 2B \ln 4\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon)) \geq (A + 2B \ln 2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon))^2$$

vereinfacht. Benutzen wir nun noch $\ln \varepsilon \mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon) = o(1), (\mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon))^n = o(1), n = 1, 2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (A + 2B \ln \varepsilon)(A + 2B \ln 4\varepsilon) &\geq (A + 2B \ln 2\varepsilon)^2 + o(1) \\ \Leftrightarrow (A + 2B \ln \varepsilon)(A + 2B \ln \varepsilon + 4B \ln 2) &\geq (A + 2B \ln \varepsilon + 2B \ln 2)^2 + o(1) \\ \Leftrightarrow (A + 2B \ln \varepsilon + 2B \ln 2)^2 - (2B \ln 2)^2 &\geq (A + 2B \ln \varepsilon + 2B \ln 2)^2 + o(1) \\ \Leftrightarrow -(2B \ln 2)^2 &\geq o(1). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite aber für $\varepsilon \rightarrow 0$ beliebig klein wird, ist diese Bedingung für ein endliches $\varepsilon > 0$ verletzt. \square

Da für $\lambda \neq 0$ der Koeffizient B von null verschieden ist, liefert die AdS-CFT-Korrespondenz mit einer klassischen φ^4 -Feldtheorie auf dem AdS-Raum folglich keine n -Punkt-Funktionen, die sich als zu einem Quantenfeld im Rahmen der Wightman-Axiome gehörend interpretieren lassen. Das Auftreten logarithmischer Terme ist aber ein generisches Verhalten klassischer AdS-Vierpunktfunktionen, so dass allgemein die induzierte konforme Feldtheorie keine vernünftige Quantenfeldtheorie sein wird. Es grenzte ja auch ein Wunder, wenn es mit einer so einfach definierbaren klassischen Feldtheorie möglich wäre, auf ebenso einfachem Wege eine Quantenfeldtheorie zu generieren, wo letzteres doch in den letzten Jahrzehnten viel Kopfzerbrechen bereitet hat.

6.3.3 Deutung der Logarithmen

Nachdem wir nun die logarithmischen Terme als Ursache für die Positivitätsverletzung ausgemacht haben, können wir uns fragen, ob diese Terme beim Übergang zu einer Quantenfeldtheorie auf dem AdS-Raum verschwinden. Der Übergang erfordert die Berücksichtigung von Schleifengraphen bei der Bestimmung der Vierpunktfunktion. Solche Graphen sind von höherer Ordnung K in λ (jeder innere Vertex liefert ja einen Faktor λ) und enthalten außerdem höhere Potenzen von $\ln u$ [HPR00], sind also von der Form

$$\lambda^K \sum_{k=0}^K (\ln u)^k \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}^k u^n (1-v)^m.$$

Die Summe aller zur Vierpunktfunktion beitragenden Graphen ist demnach von der Form

$$g(u, v) = \sum_{K=0}^{\infty} (\ln u)^K \sum_{n,m=0}^{\infty} G_{nm}^K(\lambda) u^n (1-v)^m, \quad g_{nm}^K(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^K).$$

Bei einer solchen Summe gibt es im günstigen Fall die Möglichkeit, die Logarithmen ähnlich wie in

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!} (\ln u)^K = u^\lambda$$

zu λ -abhängigen Potenzen aufzusummieren. Das Resultat wird dann eine Summe aus Potenzreihen mit verschiedenen solchen u -Potenzen als Vorfaktoren sein, wie wir sie bereits in Abschnitt 4.5.2 kennen gelernt haben:

$$g(u, v) = \sum_i u^{\gamma_i(\lambda)} \sum_{n,m=0}^{\infty} g_{nm}^i(\lambda) u^n (1-v)^m.$$

Diese Summe hat die Chance, Osterwalder-Schrader-positiv zu sein, selbst wenn keine einzige der Partialsummen der Störungsreihe in λ diese Eigenschaft für kleine λ besitzt. Das ist analog zu obigem Beispiel: Natürlich gilt $u^\lambda > 0$ für jedes $u > 0$, aber für jede ungerade Partialsumme der linken Seite gibt es ein u , so dass sie negativ wird.

Die λ -abhängigen u -Potenzen $u^{\gamma_i(\lambda)}$ können mithilfe der Partialwellenentwicklung gemäß Abschnitt 4.5.2 als von anomalen Skalendimensionen herrührend interpretiert werden. Dies erlaubt uns, von der Warte der Partialwellen aus in umgekehrter Richtung einzusehen, woher die logarithmischen Terme kommen. Tritt nämlich in der Partialwellenentwicklung eine anomale Skalendimension auf, hat also die Partialwellenamplitude $g_\lambda(\chi)$ einen einfachen Pol bei einem λ -abhängigen $\chi = [l, H(\lambda)]$, dann lässt sich die Amplitude in einer Umgebung um diesen Pol als

$$g_\lambda([l, h]) = \frac{f(\lambda, h)}{h - H(\lambda)}, \quad f(\lambda, H(\lambda)) \neq 0$$

schreiben und besitzt die Entwicklung

$$g_\lambda(\chi) = \frac{f(\lambda, h)}{h - H(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{H(\lambda) - H(0)}{h - H(0)} \right)^k.$$

Hier treten nun bei $h = H(0)$ Pole jeder Ordnung $k + 1$ auf, wobei zu einem Pol der Ordnung $k + 1$ wegen $H(\lambda) - H(0) = \mathcal{O}(\lambda)$ die Ordnung k in λ gehört. Nach Ausführen der Partialwellenintegration mittels Residuensatz erhalten wir dann wegen des nötigen Ableitens die $(\ln u)^k$ -Terme der Ordnung λ^k zurück, die Ausgangspunkt dieser Überlegungen waren.

6.3.4 Partialwellenentwicklung

Nach Abschnitt 4.5.2 können wir mit der ersten Ordnung der trunkierten Vierpunktfunktion Aussagen über die erste Ordnung der bei der tatsächlichen Vierpunktfunktion auftretenden anomalen Dimensionen erhalten. Wichtig ist dabei, dass die erste Ordnung der Zweipunktfunktion, d. h. eine Korrektur der Skalendimension Δ des Feldes, nicht benötigt wird. Deren Berechnung erforderte bereits die Bestimmung eines Schleifengraphen, sofern nicht aus anderen Gründen eine perturbative Korrektur zur Zweipunktfunktion ausgeschlossen werden kann (etwa durch *non-renormalization*-Theoreme [F99A] [F99C]).

Die Vierpunktfunktion ist von der Form (4.27), d. h. alle kritischen Exponenten sind von der Klasse $\gamma^k = 0$. Die Durchführung der Partialwellenentwicklung mit dem in 4.5.2 beschriebenen Verfahren mittels Computeralgebra zeigt, dass sich nur Partialwellenbeiträge mit $l = 0$ in erster Ordnung ändern. Diese Einsicht erlaubt uns, die Partialwellenentwicklung geschlossen vorzunehmen, denn $l = 0$ -Partialwellen liegen in beliebigen Dimensionen d in geschlossener Form vor. Aus (4.9) und (4.15) erhalten wir mit $z = \frac{ut}{(1+t)(1+vt)}$

$$q^{[0,h]}(u, v) = m(h)\Gamma(h - \mu + 1)E_2\left(\frac{h}{2}, \frac{d-h}{2}, u, v\right), \quad (6.10)$$

$$m(h) = \frac{\Gamma(h)}{\Gamma\left(\frac{h}{2}\right)^4},$$

$$\Gamma(h - \mu + 1)E_2\left(\frac{h}{2}, \frac{d-h}{2}, u, v\right) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \Gamma\left(\frac{h}{2}\right)^2 z^{\frac{h}{2}} F\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}; h - \mu + 1; z\right).$$

Die zu entwickelnde Funktion hat nach (6.7) und (A.20) eine ähnliche Form: Mit dem Normierungsfaktor $s_\Delta = \frac{6\Gamma(2\Delta - \frac{d}{2})}{\pi^{\frac{3}{2}d}\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})^4}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} s_{4\lambda}^T(u, v) &= s_\Delta u^{-\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta_3}\Big|_{\Delta_3=\Delta} - \frac{\partial}{\partial \Delta} \right) E_2(\Delta, \Delta_3, u, v) \\ &= s_\Delta u^{-\Delta} \left(\frac{d}{d\Delta_3}\Big|_{\Delta_3=\Delta} - \frac{d}{d\Delta} \right) \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\Gamma(\Delta)^2}{\Gamma(\Delta - \Delta_3 + 1)} z^\Delta F(\Delta, \Delta; \Delta - \Delta_3 + 1; z). \end{aligned}$$

Dabei kann dieses E_2 durch eine Summe der E_2 aus $q^{[0,h]}(u, v)$ dargestellt werden:

$$E_2(\Delta, \Delta_3, u, v) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t(\Delta, \Delta_3) q^{[0,2\Delta+2t]}(u, v),$$

$$a_t(\Delta, \Delta_3) = \frac{(\Delta + \Delta_3 - \mu)_t}{m(2\Delta + 2t)\Gamma(\Delta - \Delta_3 + 1 + t)(2\Delta + t - \mu)_t!}.$$

Dies beweisen wir durch Koeffizientenvergleich im Integranden. Der Koeffizient von $z^{\Delta+n}$ der

linken Seite ist $e_n = \frac{\Gamma(\Delta+n)^2}{\Gamma(\Delta-\Delta_3+1+n)n!}$, der der rechten Seite

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^n \frac{(\Delta + \Delta_3 - \mu)_t}{\Gamma(\Delta - \Delta_3 + 1 + t)(2\Delta + t - \mu)_t t!} \frac{\Gamma(\Delta + t)^2 (\Delta + t)_{n-t}^2}{(2\Delta + 2t - \mu + 1)_{n-t} (n-t)!} \\
&= \frac{\Gamma(\Delta + n)^2}{\Gamma(\Delta - \Delta_3 + 1)(2\Delta - \mu + 1)_n n!} \\
& \quad \cdot \sum_{t=0}^n \frac{(\Delta + \Delta_3 - \mu)_t (2\Delta - \mu)_t (\Delta - \frac{\mu}{2} + 1)_t (-n)_t (-1)^t}{(\Delta - \Delta_3 + 1)_t (2\Delta - \mu + 1 + n)_t (\Delta - \frac{\mu}{2})_t t!} \\
&= \frac{e_n (\Delta - \Delta_3 + 1)_n}{(2\Delta - \mu + 1)_n} {}_4F_3 \left(a, 1 + \frac{a}{2}, b, -n; \frac{a}{2}, 1 + a - b, 1 + a + n; -1 \right) = e_n \\
& \quad \text{mit } a = 2\Delta - \mu, \quad b = \Delta + \Delta_3 - \mu.
\end{aligned}$$

Dabei wurde eine im vorliegenden Spezialfall gültige Formel für den Wert der hypergeometrischen Funktion ${}_4F_3$ bei -1 benutzt, die in [Er53] zu finden ist.

Nun kann die Partialwellenentwicklung explizit gelöst werden. (4.25) lautet hier unter der Annahme, dass es nur Beiträge mit $l = 0$ gibt,

$$\begin{aligned}
& s_\Delta \left(\frac{\partial}{\partial \Delta_3} \Big|_{\Delta_3=\Delta} - \frac{\partial}{\partial \Delta} \right) E_2(\Delta, \Delta_3, u, v) \\
&= s_\Delta \left(\frac{d}{d\Delta_3} \Big|_{\Delta_3=\Delta} - \frac{d}{d\Delta} \right) \sum_{t=0}^{\infty} a_t(\Delta, \Delta_3) q^{[0, 2\Delta+2t]}(u, v) \\
&= s_\Delta \sum_{t=0}^{\infty} \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial \Delta_3} \Big|_{\Delta_3=\Delta} - \frac{\partial}{\partial \Delta} \right) a_t(\Delta, \Delta_3) \right) q^{[0, h_t]}(u, v) \right. \\
& \quad \left. - 2a_t(\Delta, \Delta) \frac{\partial q^{[0, h]}(u, v)}{\partial h}(h_t) \right] \\
&\stackrel{!}{=} C_\Delta^2 \sum_{t=0}^{\infty} \left(c'_{0t} q^{[0, h_t]}(u, v) + 2\delta_{0t} c_{0t}^0 \frac{\partial q^{[0, h]}(u, v)}{\partial h}(h_t) \right), \quad h_t = 2\Delta + 2t.
\end{aligned}$$

Da $q^{[0, h_t]}$ eine mit $u^{\Delta+t}$ beginnende Potenzreihe ist, muss die Gleichheit summandenweise gelten. Da ferner die Ableitungen von $q^{[0, h]}$ nach h die einzigen in u enthaltenden Terme sind, müssen sie separat gleich sein. Die anomalen Dimensionen lassen sich daher unmittelbar ablesen:

$$\begin{aligned}
\delta_{0t} &= -\frac{s_\Delta a_t(\Delta, \Delta)}{C_\Delta^2 c_{0t}^0} \\
&= -\frac{(2\Delta - \mu)_t (\mu)_t (2\Delta - d + 1 + t)_t (\Delta)_t^2 \Gamma(\Delta)^4 s_\Delta}{2t! (\Delta - \mu + 1)_t^2 (2\Delta)_{2t} \Gamma(2\Delta) C_\Delta^2}. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Der Vorfaktor von $\frac{s_\Delta}{C_\Delta^2}$ ist wegen der Unitaritätsschranke $\Delta > \mu - 1$ faktorweise positiv mit Ausnahme von $-(2\Delta - \mu)_t$. Für $\Delta > \frac{\mu}{2}$ ist dieser Faktor stets negativ, für $\mu - 1 < \Delta < \frac{\mu}{2}$ dagegen negativ für $t = 0$, positiv sonst. Der letzte Fall ist nur mit $d < 4$ möglich. Die anomalen Dimensionen δ_t haben somit das entgegengesetzte Vorzeichen von $\frac{s_\Delta}{C_\Delta^2}$, es sei denn es gilt $\Delta < \frac{d}{4}, t > 0$.

Die Lösungen für c'_{0t} führen wegen der Ableitungen zu einigen ψ -Funktionen, siehe Anhang:

$$\begin{aligned} c'_{0t} &= \frac{s_\Delta}{C_\Delta^2} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta_3} \Big|_{\Delta_3=\Delta} - \frac{\partial}{\partial \Delta} \right) a_t(\Delta, \Delta_3) \\ &= -2 \frac{s_\Delta}{C_\Delta^2} a_t(\Delta, \Delta) \left(2\psi(\Delta + t) - \psi(2\Delta + 2t) - \psi(1 + t) \right. \\ &\quad \left. - \psi(2\Delta + 2t - \mu) + \psi(2\Delta + t - \mu) \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Das Gleichungssystem der Partialwellenentwicklung ist nun gelöst, was im Nachhinein die Annahme rechtfertigt, dass sich nur Partialwellen mit $l = 0$ in erster Ordnung ändern.

Positivitätsaussagen erster Ordnung können wir nach 4.5.2 nur an der Unitaritätsschranke in mehr als zwei Dimensionen und nur bei $t > 0$ erwarten, da dort der führende Beitrag des freien Feldes verschwindet. Ein Blick auf die anomalen Dimensionen (6.11) zeigt aber, dass diese für $t > 0$ an der Unitaritätsschranke eine mindestens einfache Polstelle besitzen (Ausnahme $\mu = 2, t = 1$), was bedeutet, dass zu den entsprechenden Partialwellen zwar logarithmische Anteile erster Ordnung in der Vierpunktfunktion vorhanden sind, aber keine passenden nullter Ordnung $-a + \lambda \ln u$ lässt sich eben konsistent nur für $a \neq 0$ als erste Ordnung von $au^{\frac{\Delta}{a}}$ interpretieren. Nichtsdestotrotz können wir die durch c'_{0t} gegebenen Positivitätsbedingungen prüfen, etwa in der Hoffnung, dass die vorgenommene Entwicklung der anomalen Skalendimensionen in λ zwar nicht erlaubt ist,¹ die Entwicklung der Koeffizienten dagegen korrekt ist.

Setzen wir in c'_{0t} die kanonische Skalendimension $\Delta = \mu - 1$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} c'_{0t} &= -2 \frac{s_\Delta}{C_\Delta^2} \frac{(\mu - 2)_t \Gamma(\mu - 1 + t)^4}{\Gamma(2\mu - 2 + 2t)(\mu - 2 + t)_t!^2} \\ &\quad \cdot \left(2\psi(\mu - 1 + t) - \psi(2\mu - 2 + 2t) - \psi(1 + t) - \psi(\mu - 2 + 2t) + \psi(\mu - 2 + t) \right). \end{aligned}$$

Dabei nehmen wir an, dass s_Δ, C_Δ^2 durch Umnormierung von Wirkung und λ an der Unitaritätsschranke keine Singularitäten aufweisen. Gilt für ein $t \geq 2$ $c'_{0t} \geq 0$, so folgt nach 4.5.2 die Positivitätsbedingung $\lambda \geq 0$. Wegen $\mu \geq 2$ sind für $t > 0$ alle geklammerten Ausdrücke in c'_{0t} echt positiv mit Ausnahme von $(\mu - 2)_t$ bei $\mu = 2$. Folglich sind alle Γ - und ψ -Funktionen und damit c'_{0t} endlich, in vier Dimensionen verschwinden sogar alle $c'_{0t}, t > 0$. Dort ergibt sich daher keine Einschränkung an das Vorzeichen von λ . In mehr als vier Dimensionen, $\mu \geq 3$, gilt

$$\begin{aligned} \text{sgn } c'_{0t} &= \text{sgn } s_\Delta \text{sgn } g(\mu, t), \\ g(\mu, t) &= -2\psi(\mu - 1 + t) + \psi(2\mu - 2 + 2t) + \psi(1 + t) + \psi(\mu - 2 + 2t) - \psi(\mu - 2 + t). \end{aligned}$$

Wegen (A.1) verschwinden im Limes $t \rightarrow \infty$ Differenzen $\psi(t + n) - \psi(t)$, es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(\mu, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (2\psi(2t) - 2\psi(t)) \stackrel{(A.2)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\psi\left(t + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 - \psi(t) \right) = 2 \ln 2 > 0.$$

Unabhängig von μ gibt es daher stets ein t , so dass c'_{0t} das Vorzeichen von s_Δ hat. Das Vorzeichen von λ ist hierdurch dann festgelegt. Für $\mu \geq 7$ gibt es zusätzlich Koeffizienten $c'_{0t}, t \geq 2$ mit umgekehrtem Vorzeichen. So ist etwa

$$g(\mu, 2) = \psi(2\mu + 2) + \psi(3) + \psi(\mu + 2) - \psi(\mu) - 2\psi(\mu + 1)$$

¹Es könnte z. B. eine anomale Skalendimension die nicht Taylor-entwickelbare Form $\gamma \sim \sqrt{\lambda}$ haben.

eine streng monoton fallende Funktion mit Nullstelle bei $\mu \approx 6.45$, wie die Auftragung der Funktion in Abbildung 6.3 zeigt. Für $\mu \leq 6$ ist dagegen $g(\mu, t), t \geq 2$ stets positiv, wovon man sich durch Nachrechnen oder ebenfalls in der Auftragung überzeugen kann. Wir gelangen folglich insgesamt mit der Annahme, dass wenigstens die Entwicklung der Koeffizienten konsistent ist, zu der Aussage, dass an der Unitaritätsschranke die Positivitätsbedingungen erster Ordnung zu $t \geq 2$ für $\mu \geq 7, d \geq 14$ nur $\lambda = 0$ zulassen, für $\mu = 3, \dots, 6, d = 6, \dots, 12$ λ das Vorzeichen von s_Δ haben muss und für $\mu = 2, d = 4$ keine Einschränkung an λ vorliegt.

Nehmen wir $\Delta'(0) = 0$ an, was durch Auswertung des Funktionalintegrals der Wirkung nach Renormierung geprüft werden kann oder aus der Existenz eines *non-renormalization*-Theorems für die Zweipunktfunktion folgt, so liefert uns c'_{01} ein weiteres Kriterium (siehe 4.5.2): Die Funktion $g(\mu, 1)$ ist ebenfalls streng monoton fallend mit Nullstelle bei $\mu \approx 4.71$, so dass mit $\Delta'(0) = 0$ für $\mu = 5, 6, d = 10, 12$ ebenfalls $\lambda = 0$ folgt.

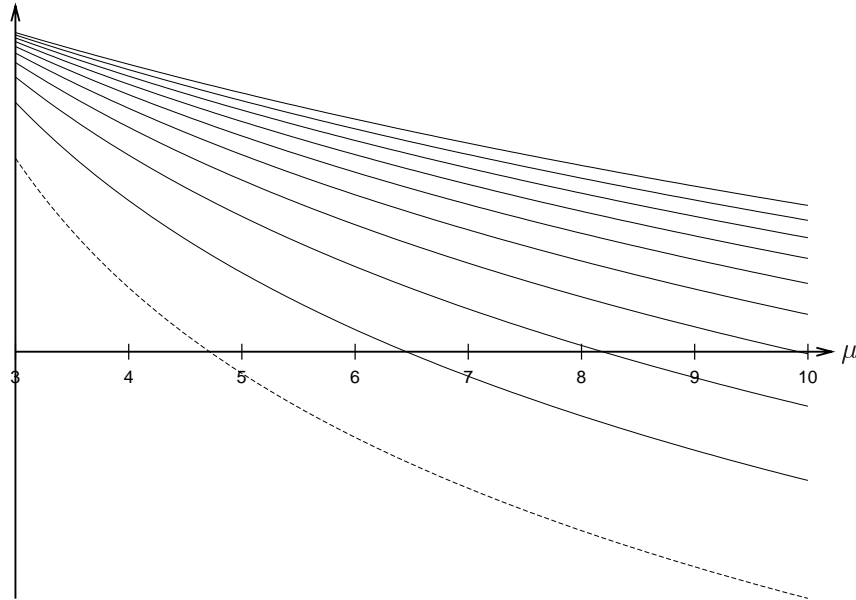


Abbildung 6.3: Auftragung von $g(\mu, t)$ für $t = 1$ (gestrichelt) und $t = 2, \dots, 10$ (durchgezogen)

6.4 φ^3 -Modell

Das φ^4 -Modell induziert die einfachste denkbare und nichttriviale Vierpunktfunktion S_4^T , es ist uns gelungen, diese Vierpunktfunktion mittels der Partialwellenentwicklung geschlossen zu analysieren. Das nächst einfache Modell ist das klassische AdS- φ^3 -Modell, das wir in diesem Abschnitt untersuchen wollen. Es wird sich zeigen, dass hier die Vierpunktfunktion eine wesentlich komplexere Struktur hat, die zu jeder Partialwelle des freien Feldes einen Wechselwirkungsbeitrag enthält und darüber hinaus einen weiteren Beitrag zu einem neuen kritischen Exponenten. Bei der Partialwellenentwicklung werden wir wegen der Komplexität auf Computeralgebra zurückgreifen.

6.4.1 Vierpunktfunktion

Der Beitrag in (5.16) zur Vierpunktfunktion S_4^T ist nun

$$\begin{aligned}
S_4^T(f^{\otimes 4}) &= 4! \frac{\lambda^2}{2} \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} ((K_\Delta f)^2 G_\Delta ((K_\Delta f)^2)) \\
\Rightarrow S_4^T(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) &= 12 \lambda^2 \kappa_\Delta^4 \int_{\text{AdS}} d^{d+1}y_1 \sqrt{g(y_1)} d^{d+1}y_2 \sqrt{g(y_2)} k_\Delta(y_1, \underline{x}_1) \\
&\quad \cdot k_\Delta(y_1, \underline{x}_2) G_\Delta(y_1, y_2) k_\Delta(y_2, \underline{x}_3) k_\Delta(y_2, \underline{x}_4) \Big|_{\text{symm.}}.
\end{aligned}$$

Das Ausrechnen dieses Integrals für generisches Δ als Potenzreihe in $u, 1-v$ ist äußerst aufwändig [HPR00]. Wesentlich einfacher wird das Problem bei geradem $\Delta = 2\nu > \mu$. In [F99D] wird für diesen Fall die folgende Zerlegung der zu bestimmenden Vierpunktfunktion in solche ohne innere Linie, also ohne Propagator G_Δ hergeleitet, wobei *bulk-to-boundary*-Linien hier k_Δ und nicht K_Δ darstellen:

$$\begin{aligned}
B_3(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) &= \begin{array}{c} \underline{x}_1 \quad \underline{x}_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \underline{x}_2 \quad \underline{x}_3 \end{array} = b_\Delta \sum_{s=0}^{\nu-1} a_s (x_{12}^2)^{s-\nu} \begin{array}{c} \underline{x}_1 \quad \underline{x}_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \nu+s \quad \Delta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \nu+s \quad \Delta \\ \underline{x}_2 \quad \underline{x}_3 \end{array} \\
&= b_\Delta \sum_{s=0}^{\nu-1} a_s (x_{12}^2)^{s-\nu} D_{\nu+s, \nu+s, \Delta, \Delta}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4), \tag{6.13}
\end{aligned}$$

$$b_\Delta = -\frac{\Gamma(\nu)^3 (2\nu - \mu + 1)_{\nu-1}}{4\Gamma(2\nu)^2}, \tag{6.14}$$

$$a_s = \frac{(\nu)_s^2}{(2\nu - \mu + 1)_s s!}. \tag{6.15}$$

Die Vierpunktfunktion $D_{\nu+s, \nu+s, \Delta, \Delta}$ haben wir bereits in (6.6) bestimmt. Es liegt der entartete Fall aus (A.22) vor, es folgt

$$\begin{aligned}
(x_{12}^2)^{s-\nu} D_{\nu+s, \nu+s, \Delta, \Delta}(\underline{x}_i) &= \frac{(-1)^{s-\nu} \pi^\mu \Gamma(3\nu - \mu + s) u^{-\Delta}}{2\Gamma(\nu+s, \Delta)^2 (x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} \\
&\quad \cdot \frac{d}{d\Delta} \left(E_2(\nu+s, \Delta, u, v) - E_2(\Delta, \nu+s, u, v) \right). \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Beim Ableiten nach Δ ist ν als unabhängige Variable zu betrachten. $E_2(\Delta_1, \Delta_3, u, v)$ ist nach (A.21) eine Potenzreihe in $u, 1-v$ mit Vorfaktor u^{Δ_1} , daher führt der erste E_2 -Beitrag der letzten Formel insgesamt zu einer Potenzreihe mit Vorfaktor $u^{-\nu+s}$. Der zweite E_2 -Beitrag enthält dagegen insgesamt keinen solchen Vorfaktor mehr, stattdessen aber $\ln u$ -Terme. Er hat somit die nun schon mehrfach aufgetretene Form der ersten Ordnung einer Vierpunktfunktion der Klasse $\gamma^k = 0$,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} (a_{nm} + b_{nm} \ln u) u^n (1-v)^m. \tag{6.17}$$

Zur Bestimmung der trunkierten Vierpunktfunktion S_4^T des φ^3 -Modells muss man B_3 noch symmetrisieren:

$$S_4^T(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4) = 4\lambda^2 \kappa_\Delta^4 (B_3(1234) + B_3(1324) + B_3(1432)).$$

Der erste Beitrag wurde soeben als Potenzreihe in $u, 1 - v$ bestimmt (oft als *direkter Kanal* bezeichnet). Wollte man diese Potenzreihe für die anderen beiden Beiträge benutzen (*gekreuzte Kanäle*), um sie ebenfalls als Potenzreihe in $u, 1 - v$ zu erhalten, so müsste man sie zuvor analytisch fortsetzen, denn der zweite Beitrag führt beim Einsetzen zu einer Potenzreihe in $\frac{1}{u}, 1 - \frac{v}{u}$, der dritte zu einer Potenzreihe in $v, 1 - u$. Diese analytische Fortsetzung können wir aber aufgrund der Darstellung als Summe skalarer Vierpunktfunktionen D leicht dadurch erhalten, dass wir dort Argumentenpaare (x_i, Δ_i) vertauschen, was wegen der Symmetrie der D nichts ändert:

$$\begin{aligned} B_3(\underline{x}_1, \underline{x}_3, \underline{x}_2, \underline{x}_4) &= b_\Delta \sum_{s=0}^{\nu-1} a_s (x_{13}^2)^{s-\nu} D_{\nu+s}{}_{\nu+s}{}_{\Delta\Delta}(\underline{x}_1, \underline{x}_3, \underline{x}_2, \underline{x}_4) \\ &= b_\Delta \sum_{s=0}^{\nu-1} a_s (x_{13}^2)^{s-\nu} D_{\nu+s}{}_{\Delta\nu+s}{}_{\Delta}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} B_3(\underline{x}_1, \underline{x}_4, \underline{x}_3, \underline{x}_2) &= b_\Delta \sum_{s=0}^{\nu-1} a_s (x_{14}^2)^{s-\nu} D_{\nu+s}{}_{\nu+s}{}_{\Delta\Delta}(\underline{x}_1, \underline{x}_4, \underline{x}_3, \underline{x}_2) \\ &= b_\Delta \sum_{s=0}^{\nu-1} a_s (x_{14}^2)^{s-\nu} D_{\nu+s}{}_{\Delta\Delta\nu+s}{}_{\Delta}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4). \end{aligned} \quad (6.19)$$

In dieser Form können wir die gekreuzten B -Beiträge mit den Formeln aus dem Anhang als Potenzreihen in $u, 1 - v$ schreiben. In beiden Fällen liegt der entartete Fall (A.18) vor. Es folgt

$$\begin{aligned} (x_{13}^2)^{s-\nu} D_{\nu+s}{}_{\Delta\nu+s}{}_{\Delta}(\underline{x}_i) &= \frac{\pi^\mu \Gamma(3\nu - \mu + s) u^{-\nu-s}}{2\Gamma(\nu+s, \Delta)^2 (x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} \\ &\cdot \left(\frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \frac{\partial}{\partial \Delta_2} - \frac{\partial}{\partial \Delta_3} - \frac{\partial}{\partial \Delta_4} \right) \Big|_{\Delta_1=\Delta_3=\nu+s, \Delta_2=\Delta_4=\Delta} E_4(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, u, v) \end{aligned} \quad (6.20)$$

und

$$\begin{aligned} (x_{14}^2)^{s-\nu} D_{\nu+s}{}_{\Delta\Delta\nu+s}{}_{\Delta}(\underline{x}_i) &= \frac{\pi^\mu \Gamma(3\nu - \mu + s) u^{-\Delta}}{2\Gamma(\nu+s, \Delta)^2 (x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} \\ &\cdot \left(\frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \frac{\partial}{\partial \Delta_2} - \frac{\partial}{\partial \Delta_3} - \frac{\partial}{\partial \Delta_4} \right) \Big|_{\Delta_1=\Delta_4=\nu+s, \Delta_2=\Delta_3=\Delta} E_4(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, u, v). \end{aligned} \quad (6.21)$$

$E_4(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, u, v)$ ist nach (A.15) eine Potenzreihe in $u, 1 - v$ mit Vorfaktor u^{Δ_3} . Dieser kürzt sich in beiden Fällen heraus, insgesamt ergibt sich für die gekreuzten Beiträge wieder die Form (6.17).

Die trunkierte Vierpunktfunktion S_4^T hat somit die Struktur der ersten Ordnung einer Vierpunktfunktion der Klasse $\gamma^k = 0$ mit zusätzlichen negativen u -Potenzen bis $u^{-\nu}$, die dem ersten E_2 -Summanden des direkten Kanals entstammen. Diese negativen u -Potenzen deuten

darauf hin, dass die Wechselwirkung hier im Gegensatz zum φ^4 -Modell zu Beiträgen mit kritischen Exponenten führt, die im freien Fall noch nicht existieren. Somit werden neue, im freien Fall nicht vorhandene Partialwellen beitragen. Dass die Differenz der kritischen Exponenten von $\gamma^k = 0$ und dem $u^{-\nu}$ -Beitrag hier ganzzahlig ist, liegt an der vorgenommenen Einschränkung $\nu \in \mathbb{N}$. Tatsächlich gibt es diesen Beitrag auch für generisches ν [HPR00], so dass es sich wirklich um eine neue Klasse kritischer Exponenten handelt.

Das explizite Ausführen der s -Summationen ist auch im Fall eines geraden Δ aufwändig. Wir beschränken uns darauf, den Anteil zum kritischen Exponenten $-\nu$ explizit zu bestimmen und dort auch nur die Koeffizienten c_{nm} mit $n < \nu$. Nach Abspaltung des Faktors

$$\beta_\Delta = b_\Delta \frac{\pi^\mu \Gamma(3\nu - \mu)}{2\Gamma(\nu, \Delta)^2} = -\frac{\pi^\mu \Gamma(\nu) \Gamma(3\nu - \mu)^2}{8\Gamma(\Delta)^4 \Gamma(2\nu - \mu + 1)}$$

erhalten wir aus (6.16)

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{d}{d\Delta} \sum_{s=0}^n (-1)^{s-\nu} \frac{a_s (3\nu - \mu)_s}{(\nu)_s^2} E_{n-s m}(\Delta, \Delta, \nu + s, \nu + s) \\ &= \frac{d}{d\Delta} (-1)^\nu \frac{\Gamma(\nu + n, \nu + n + m)^2}{\Gamma(\nu - \Delta + 1 + n, 2\nu + 2n + m) n! m!} \sum_{s=0}^n \frac{(3\nu - \mu)_s (-n)_s}{(2\nu - \mu + 1)_s s!} \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(\nu + n, \nu + n + m)^2 (\nu - 1 - n)!}{\Gamma(2\nu + 2n + m) n! m!} F(3\nu - \mu, -n; 2\nu - \mu + 1; 1) \\ &= \frac{\Gamma(\nu, \nu + n, \nu + n + m)^2}{(2\nu - \mu + 1)_n \Gamma(2\nu + 2n + m) n! m!} \\ &= \Gamma(\nu, 2\nu - \mu + 1) E_{nm}(\mu - \nu, \mu - \nu, \nu, \nu). \end{aligned}$$

Dabei wurde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \Gamma(x - n)^{-1} = (-1)^n n!$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $F(\alpha, -n; \gamma; 1) = \frac{(\gamma - \alpha)_n}{(\gamma)_n}$ benutzt. Die nicht bestimmten Koeffizienten $n \geq \nu$ führen zu Potenzen $u^{n-\nu} = u^N$, $N \geq 0$ und lassen sich somit im Beitrag der Form (6.17) subsumieren.

Insgesamt folgt die Entwicklung der trunkierten Vierpunktfunktion

$$S_4^T(\underline{x}_i) = \frac{4\lambda^2 \kappa_\Delta^4 \beta_\Delta}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^\Delta} \left(\Gamma(\nu, 2\nu - \mu + 1) u^{-\Delta} E_2(\nu, \mu - \nu, u, v) + s_4^{T0}(u, v) \right) \quad (6.22)$$

in einen Anteil zum kritischen Exponenten $-\nu$ und einen zum kritischen Exponenten 0, der von der Form (6.17) ist:

$$\begin{aligned} s_4^{T0}(u, v) &= \sum_{n, m=0}^{\infty} u^n (1-v)^m \left[\sum_{s=0}^{\nu-1} \frac{(3\nu - \mu)_s}{(2\nu - \mu + 1)_s s!} \left[\right. \right. \\ &\quad (-1)^{s-\nu} \left(\frac{d}{d\Delta} E_{\nu+n-s m}(\Delta, \Delta, \nu + s, \nu + s) - \left(\frac{d}{d\Delta} + \ln u \right) E_{nm}(\nu + s, \nu + s, \Delta, \Delta) \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \frac{\partial}{\partial \Delta_2} - \frac{\partial}{\partial \Delta_3} - \frac{\partial}{\partial \Delta_4} - \ln u \right) \Big|_{\Delta_1 = \Delta_3 = \nu + s, \Delta_2 = \Delta_4 = \Delta} E_{nm}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \frac{\partial}{\partial \Delta_2} - \frac{\partial}{\partial \Delta_3} - \frac{\partial}{\partial \Delta_4} - \ln u \right) \Big|_{\Delta_1 = \Delta_4 = \nu + s, \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta} E_{nm}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \\ &\quad \left. \left. \right] - \Gamma(\nu, 2\nu - \mu + 1) E_{\nu+n m}(\mu - \nu, \mu - \nu, \nu, \nu) \right]. \quad (6.23) \end{aligned}$$

Die letzte Zeile berücksichtigt, dass in (6.22) der volle Beitrag von E_2 zum kritischen Exponenten $-\nu$ genommen wurde und nicht nur die Potenzen bis u^{-1} .

6.4.2 Partialwellenentwicklung

Die Vierpunktfunktion (6.22) ist unmittelbar noch nicht für die Anwendung des Verfahrens aus 4.5.2 zur Partialwellenentwicklung geeignet, da sie einen Beitrag zum kritischen Exponenten $-\nu$ enthält. Dieser Beitrag lässt sich aber leicht als eine einzige Partialwelle zu $\chi = [0, \Delta]$ identifizieren: Etwa nach (6.10) sehen wir

$$\beta_\Delta \Gamma(\nu, 2\nu - \mu + 1) E_2(\nu, \mu - \nu, u, v) = -\frac{\pi^\mu \Gamma(\nu)^6 \Gamma(3\nu - \mu)^2}{8\Gamma(\Delta)^5 \Gamma(2\nu - \mu + 1)} q^{[0, \Delta]}(u, v).$$

Der in Übereinstimmung mit [HPR00] bestimmte Koeffizient der Partialwellenentwicklung

$$c_{[0, \Delta]} = -\lambda^2 \kappa_\Delta^4 \frac{\pi^\mu \Gamma(\nu)^6 \Gamma(3\nu - \mu)^2}{2\Gamma(\Delta)^5 \Gamma(2\nu - \mu + 1)}$$

ist nun für alle die Unitaritätsschranke $2\nu > \mu - 1$ währenden ν manifest negativ. Das φ^3 -Modell in dieser Form induziert somit für kleine λ definitiv *kein* konformes Quantenfeld, auch nicht in der aufsummierten Störungsreihe. Man kann allerdings an eine mögliche andere Regularisierungsvorschrift des Wirkungsintegrals denken, die das Vorzeichen von S_4^T umdreht, so dass der Koeffizient $c_{[0, \Delta]}$ positiv wird.

Diese Positivitätsaussage hätten wir auch aus der 1×1 -Determinantenbedingung 3.2 erhalten können. Die 2×2 -Determinantenbedingung 3.7 führt im Gegensatz zum φ^4 -Modell zu keiner Aussage bei $u, 1 - v \approx 0$, da die logarithmischen Terme hier durch die negativen u -Potenzen der Partialwelle $[0, \Delta]$ dominiert werden.

Die Negativität des Beitrages $[0, \Delta]$ lässt sich auf die Negativität des Propagators G_Δ zurückführen: In Satz 5.10 wurde gezeigt, dass er stets negative Werte annimmt. Der Propagator K_Δ nimmt dagegen manifest nur positive Werte an, so dass der Wert des Graphen von S_4^T für alle $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_4$ negativ ist. Im Limes $u \rightarrow 0$ wird die Partialwelle $[0, \Delta]$ der führende Beitrag zu S_4^T , sie muss daher mit einem negativen Koeffizienten eingehen.

Das Auftreten des Beitrages $[0, \Delta]$ wurde in [HPR00] dahingehend gedeutet, dass kubische Vertizes der AdS-Theorie unmittelbar zu entsprechenden Vertizes korrespondierender Darstellungen in der konformen Theorie führen, siehe Abbildung 6.4. Solche konformen Vertizes sind als die jeweiligen Dreipunktfunktionen zu lesen, Linien zwischen Vertizes als inverse Zweipunktfunktionen mit Integrationen über die Endpunkte.

Der CFT-Graph der rechten Seite ist gerade eine Partialwelle, da in (4.6) die Dreipunktfunktion Γ^{χ^*} zur konjugierten Darstellung gerade das Integral über die Dreipunktfunktion Γ^χ mit der inversen Zweipunktfunktion zur Darstellung χ ist. Die Autoren von [HPR00] vermuten nun, dass diese am Modell gemachte Beobachtung eine allgemeine Eigenschaft der AdS-CFT-Korespondenz ist, die auch für Tensorvertizes gilt. Ein Beweis hierzu fehlt allerdings noch.

Sinnvollerweise erst nach einem Vorzeichenwechsel von S_4^T untersuchen wir die Partialwellenentwicklung des Anteils $s_4^{T_0}$ unter Zuhilfenahme von Computeralgebra, siehe B.6. Wenn überhaupt möglich, wäre das geschlossene Durchführen der Entwicklung wegen der komplexeren

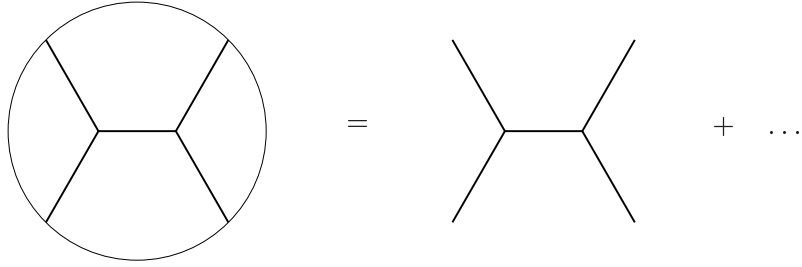


Abbildung 6.4: Kubische Vertizes bleiben erhalten

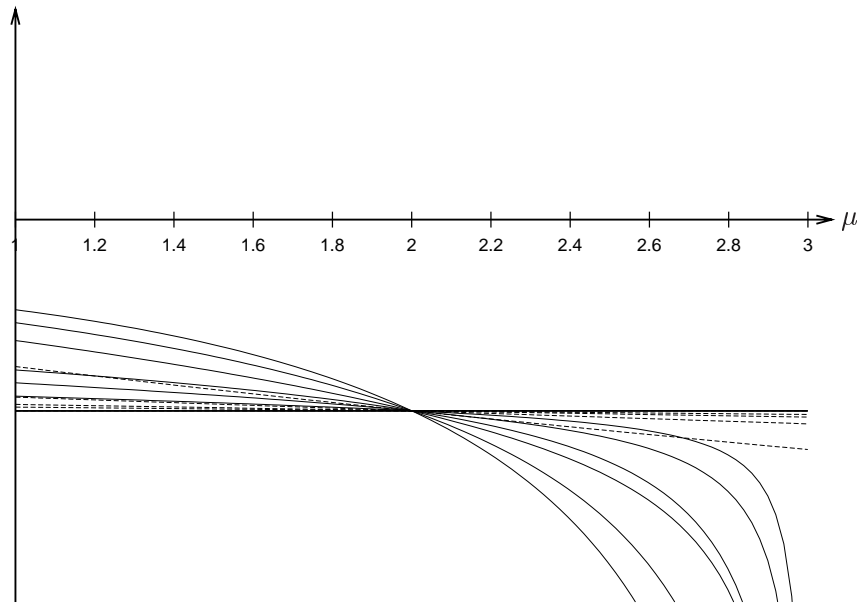
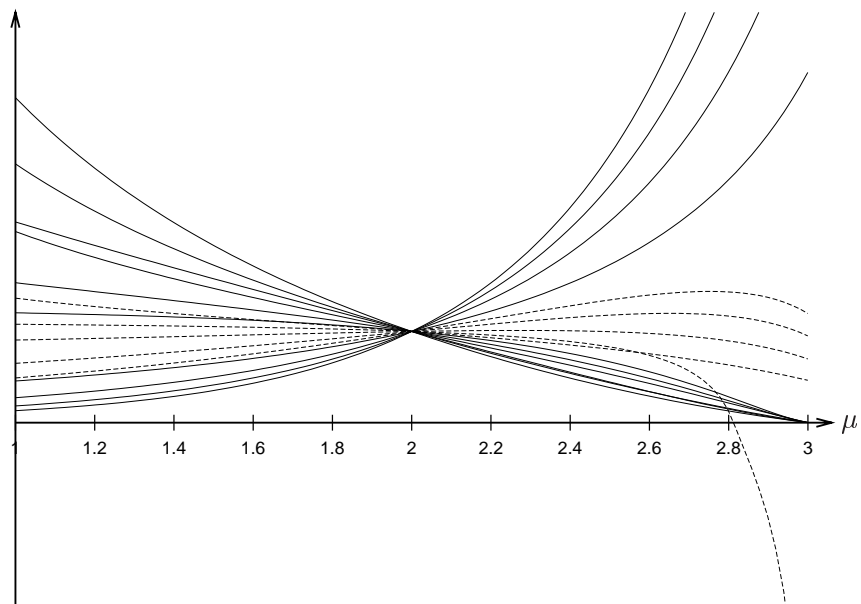
Vierpunktfunktion s_4^{T0} und des Beitrags von Partialwellen mit $l > 0$ ungleich aufwändiger als beim φ^4 -Modell. Um das Verfahren aus 4.5.2 anwenden zu können, muss man dort λ durch λ^2 ersetzen, da sowohl die trunkierte Vierpunktfunktion als auch Korrekturen zur Zweipunktfunktion (siehe Abbildung 6.1) von zweiter Ordnung in λ sind.

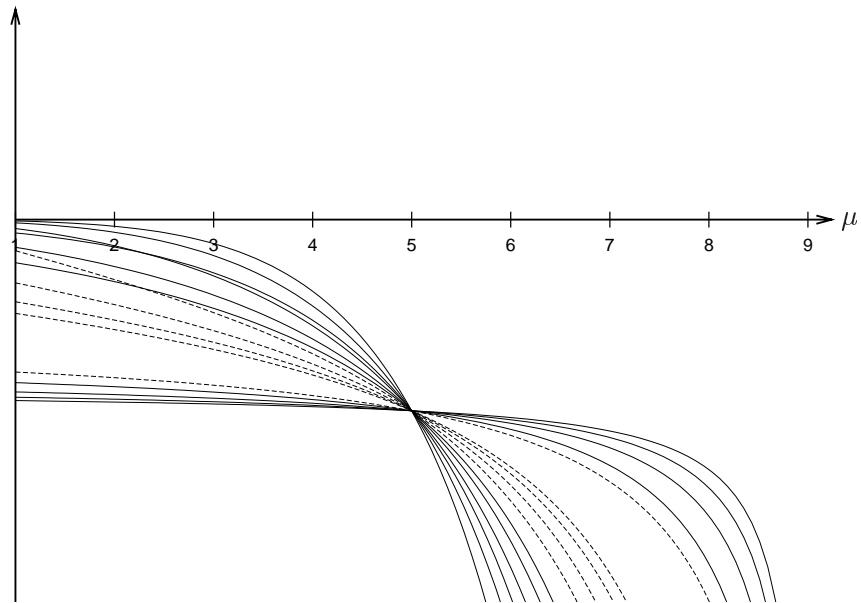
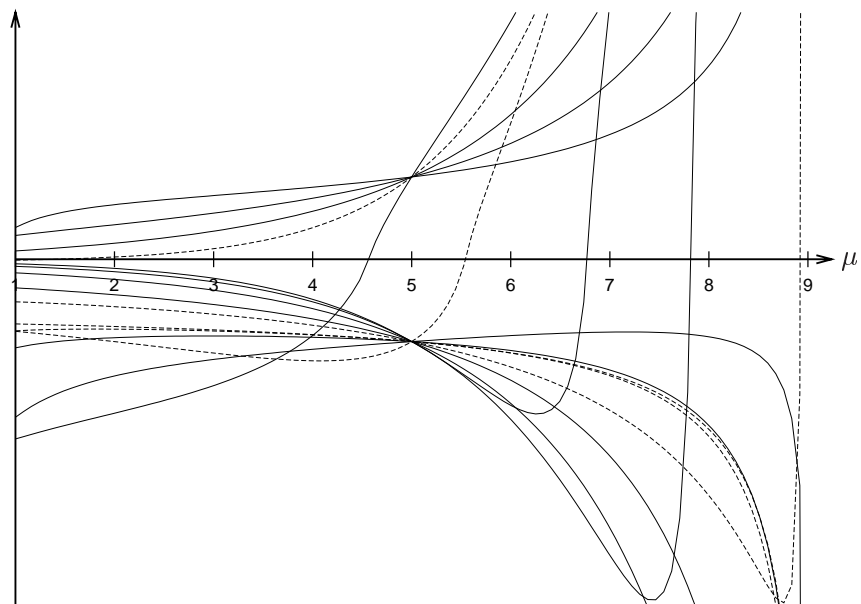
In B.6 ist die Partialwellenentwicklung exemplarisch für $\nu = 1, \Delta = 2$ durchgeführt worden. Das Resultat sind die noch von der halben Raumdimension μ abhängenden Koeffizienten δ_{lt}, c'_{lt} , die für ungerade l konsistenterweise verschwinden, aber für jedes gerade l von 0 verschieden sind. s_t^{T0} enthält folglich Beiträge zu jeder beim freien Feld auftretenden Darstellung χ_{lt} .

Die Diskussion der Partialwellenentwicklung führen wir für die Beispiele $\nu = 1, \Delta = 2$ und $\nu = 4, \Delta = 8$ anhand von Auftragungen der Koeffizienten der ersten 25 Partialwellen durch, siehe die Abbildungen 6.5 – 6.8. Die Herleitung der Potenzreihenentwicklung von s_4^{T0} setzte zwar $2\nu > \mu$ voraus, wir tragen die Koeffizienten trotzdem im Geiste formaler Rechnung oder analytischer Fortsetzung von $\mu = 1$ bis zur Unitaritätsschranke $\mu = 2\nu + 1$ auf. Der Beitrag $l = 0, t = 0$ wird grau gestrichelt dargestellt, Beiträge $l > 0, t = 0$ grau durchgezogen, Beiträge $t = 1$ schwarz gestrichelt, die übrigen mit $t \geq 2$ schwarz durchgezogen. Die schwarz dargestellten Beiträge sind somit diejenigen, deren nullte Ordnung an der Unitaritätsschranke verschwindet. Um die Auftragung in ein gemeinsames Diagramm zu erleichtern, wurden die Beiträge bei $\mu = \nu + 1$ auf 1 normiert und große Werte außerdem gestaucht. Verlässt ein Graph den Bereich des Diagramms, so ist er an der Unitaritätsschranke divergent.

Bei $\Delta = 2$ sind die anomalen Skalendimensionen für $t = 0$ offenbar konstant negativ, für $t > 0$ divergieren sie an der Unitaritätsschranke $\mu = 3$. Dieses Verhalten ist vom φ^4 -Modell bekannt. Die Koeffizienten c'_{lt} für $t > 0$ sind wie beim φ^4 -Modell mit $\mu \leq 4$ an der Unitaritätsschranke endlich und nichtnegativ, so dass die dortige Positivitätsbedingung $\lambda^2 c'_{lt} \geq 0$ erfüllt ist.

Bei $\Delta = 8$ liegt ein gänzlich anderes Verhalten vor: Erstens divergieren nun alle δ_{lt} und c'_{lt} , zweitens gibt es für alle μ positive und für alle μ negative Koeffizienten $c'_{lt}, t \geq 2$. Wenn also angesichts der Divergenzen überhaupt eine Positivitätsaussage gemacht werden kann, dann die, dass an der Unitaritätsschranke $\mu = 9$ $\lambda = 0$ zu gelten hat. Bei $\Delta = 4, \mu = 5$ und $\Delta = 6, \mu = 7$ tritt dieser Fall im Gegensatz zum φ^4 -Modell noch nicht auf.

Abbildung 6.5: Anomale Skalendimensionen δ_{lt} für $\nu = 1, \Delta = 2$ Abbildung 6.6: Koeffizienten c'_{lt} für $\nu = 1, \Delta = 2$

Abbildung 6.7: Anomale Skalendimensionen δ_{lt} für $\nu = 4, \Delta = 8$ Abbildung 6.8: Koeffizienten c'_{lt} für $\nu = 4, \Delta = 8$

Kapitel 7

Zusammenfassung und Diskussion

Im ersten Teil der Arbeit haben wir die nötigen Grundlagen für die Analyse quantenfeldtheoretischer Eigenschaften einer euklidischen, konformen Vierpunktfunktion vorgestellt, wobei seit langem bekannte Aussagen und Techniken in eine leicht anwendbare Form gebracht wurden. So wurden zwei einfach zu testende Positivitätsbedingungen einer konformen Vierpunktfunktion hergeleitet, die Spezialfälle der Osterwalder-Schrader-Positivität alleine durch konforme Invarianten formuliert darstellen. Für die Partialwellenentwicklung erster Ordnung wurde ein systematisches Verfahren angegeben und mittels Computeralgebra umgesetzt. Diese Entwicklung ermöglicht die Bestimmung anomaler Skalendimensionen erster Ordnung sowie die Angabe sensibler Positivitätsbedingungen.

Im zweiten Teil der Arbeit wurden einige Aspekte der AdS-CFT-Korrespondenz untersucht. Zunächst haben wir Kriterien gefunden, unter denen die Feldtheorie eines klassischen Skalars auf dem Anti-de-Sitter-Raum aus einer wohlgestellten Randwertaufgabe besteht, für die eine Lösung der entsprechenden Integralgleichung existiert, indem wir ein konstruktives, konvergentes Verfahren zur Bestimmung einer Lösung angegeben haben. Bei gegebenem Potential lässt sich die Lösung als eine Störungsreihe in der Kopplungskonstanten schreiben, deren Glieder durch Witten-Graphen dargestellt werden. Die Konvergenz der Iterationsfolge ist möglicherweise nützlich für rigorose, modellunabhängige Beweise von Aspekten der AdS-CFT-Korrespondenz, wurde in dieser Arbeit aber nicht weiter benutzt.

Im Kapitel zur AdS-CFT-Korrespondenz haben wir zu den klassischen AdS-Modellen φ^4 und φ^3 die gemäß Witten'scher Korrespondenzvorschrift induzierten Vierpunktfunktionen eines konformen Feldes berechnet und mit den im ersten Teil der Arbeit entwickelten Verfahren der Positivitätsprüfung und Partialwellenentwicklung analysiert. Bei dem φ^4 -Modell ergab sich eine λ -unabhängige Positivitätsverletzung aufgrund des Auftretens führender logarithmischer Terme. Diese legt es nahe, mit klassischen AdS-Modellen induzierte n -Punkt-Funktionen stets nur als erste Ordnung tatsächlicher n -Punkt-Funktionen zu verstehen, welche im besten Fall den Anforderungen der Osterwalder-Schrader-Axiome genügen. Mit dieser Hypothese ließ sich eine Partialwellenentwicklung erster Ordnung bei beiden Modellen konsistent durchführen, die im Fall des φ^4 -Modells für generische Skalendimensionen keine Positivitätsverletzung mehr aufwies, an der Unitaritätsschranke bei kleinen Raumdimensionen allerdings nur $\lambda \geq 0$ zuließ. Diese Einschränkung des Vorzeichens ist aber sinnvoll interpretierbar: Sie bedeutet eine Beschränktheit des AdS-Potentials nach unten, was für die Konstruktion einer Quantenfeldtheorie wichtig ist. So existiert das vergleichbare φ^4 -Modell des flachen, zweidimensionalen Raums

nur für $\lambda \geq 0$.

Das φ^3 -Modell wies dagegen bei der Partialwellenanalyse eine Positivitätsverletzung auf, deren Ursache sich zurückverfolgen ließ bis zum negativen Vorzeichen des *bulk-to-boundary*-Propagators G_Δ . Wir vermuten, dass dieses eine allgemeine Eigenschaft ungerader AdS-Potentiale ist: Man überlegt sich leicht, dass jeder zur Vierpunktfunktion beitragende Baum- oder Schleifengraph mit positivem Koeffizienten eingeht (S_4^T ist das Negative der Wirkung, die selbst eine Summe negativer Graphen ist, (5.16)) und bei ungeraden Potentialen eine ungerade Anzahl an G_Δ enthält. Der Beitrag zur Vierpunktfunktion ist somit insgesamt als Funktion der \underline{x}_i stets negativ (sofern für Schleifengraphen notwendige Renormierungen am Vorzeichen nichts ändern). Gibt es nun wie beim φ^3 -Modell einen im Limes $u \rightarrow 0$ führenden Partialwellenbeitrag, der nicht schon beim freien Feld vorhanden ist, so muss dieser zwangsläufig einen negativen Entwicklungskoeffizienten besitzen und somit einem Geist in der Operatorproduktentwicklung entsprechen. Ob und inwieweit hierfür ursächlich die Unbeschränktheit des AdS-Potentials nach unten verantwortlich gemacht werden kann, ist eine offene Frage. Im Anti-de-Sitter-Raum hat ein nach unten unbeschränktes Potential nicht grundsätzlich eine Instabilität zur Folge [BF82].

Mit der Annahme, dass es eine das Vorzeichen von S_4^T umkehrende Regularisierung der AdS-Wirkung gibt, konnten wir mittels Computeralgebra eine Partialwellenentwicklung durchführen, die keine Positivitätsverletzung aufzeigte. Eine solche Regularisierung erscheint aber eher künstlich: Betrachten wir das φ^4 -Modell und nehmen an, dass der Schleifengraph aus Abbildung 6.2 wegen der auftretenden G_Δ -Propagatoren analog zum beim φ^3 -Modell berechneten Graph neue, im Limes $u \rightarrow 0$ führende Partialwellen besitzt, so gehen diese nach Vorzeichenwechsel von S_4^T unabhängig von λ mit negativem Koeffizienten ein, da der Graph selbst eine positive Funktion der Punkte ist. Was wir somit beim φ^3 -Modell gewonnen haben, geht beim φ^4 -Modell verloren.

Beim φ^4 -Modell konnte die Bedingung $\lambda \geq 0$ nur an der Unitaritätsschranke abgeleitet werden. Interessant wäre daher die Berechnung des (renormierten) Schleifengraphen aus Abbildung 6.2: Nach dem eben Gesagten ist zu erwarten, dass er neue Partialwellen und somit Positivitätskriterien einführt. Außerdem könnte er die Bestimmung der anomalen Dimensionen verfeinern: Vereinfacht dargestellt haben wir ja aus

$$1 + a_1 \lambda + b_1 \lambda \ln u$$

den tatsächlichen Term in der aufsummierten Störungsreihe

$$(1 + a_1 \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)) u^{b_1 \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)} \quad (7.1)$$

mit anomaler Skalendimension b_1 geschlossen. Der Schleifengraph führt nun unter anderem zu einem Beitrag zweiter Ordnung proportional $(\ln u)^2$,

$$1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + b_1 \lambda \ln u + b_2 \lambda^2 \ln u + c_2 \lambda^2 (\ln u)^2. \quad (7.2)$$

Nur für $c_2 = \frac{b_1^2}{2}$ können wir mit (7.1) weiterarbeiten, ansonsten liegt eine Aufspaltung in mindestens zwei Anteile vor,

$$\sum_i (a_0^i + a_1^i \lambda + a_2^i \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)) u^{b_1^i \lambda + b_2^i \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)},$$

so dass die in erster Ordnung bestimmte anomale Skalendimension tatsächlich nur der Mittelwert

$$b_1 = \sum_i a_0^i b_1^i$$

ist. Die Koeffizienten in der Summe sind leider selbst bei nur zwei Summanden durch die Entwicklung (7.2) unterbestimmt. Ergibt die Analyse des Schleifengraphen nun $c_2 \neq \frac{b_1^2}{2}$, so können wir aber immerhin schließen, dass ein Beitrag der Partialwellenentwicklung und somit ein Feld in der Operatorproduktentwicklung aufgrund der Wechselwirkung in mehrere Felder aufspaltet.

Der Schleifengraph wäre auch bei der Untersuchung eines $\lambda(c\varphi^3 + \varphi^4)$ -Modells mit einer Konstanten c der Größenordnung eins interessant: Dieses Potential ist für $\lambda \geq 0$ nach unten beschränkt, so dass die Hoffnung besteht, keine Positivitätsverletzung zu erhalten. Dann muss aber der φ^4 -Schleifengraph ein *ghost killer* für den φ^3 -Baumgraphen gleicher Ordnung in λ sein, d. h. der Koeffizient des Schleifengraphen zu $[0, \Delta]$ muss den negativen des φ^3 -Graphen überkompensieren.

All diese modellspezifischen Untersuchungen der AdS-CFT-Korrespondenz können wir als Einschränkung auf den Rand von Untersuchungen zur AdS-Quantenfeldtheorie verstehen, da das erzeugende Funktional nach [DR02] eine solche Einschränkung eines AdS-Funktional darstellt.¹ [DR02] gibt uns daher eine natürliche feldtheoretische Erklärung für die positiven Befunde, die wir in erster Ordnung erhalten haben. Dieses war eines der Anliegen der Autoren von [DR02].

Man mag es daher als natürlicher ansehen, sich mit der vollen AdS-Theorie zu befassen und notwendige quantenfeldtheoretische Eigenschaften dort nachzuweisen. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass in manchen Modellen die durch a priori-Einschränkung auf den Rand erhaltene konforme Theorie als Quantenfeldtheorie existiert, ohne das Hologramm einer AdS-Quantenfeldtheorie zu sein. Eine a priori-Einschränkung auf den Rand stellt daher in jedem Fall eine praktikable Möglichkeit der Lagrange'schen perturbativen Formulierung einer konformen Quantenfeldtheorie dar, was intrinsisch nicht möglich ist, da konforme Felder nicht über Langrangedichten im d -dimensionalen Raum beschrieben werden können.

¹siehe die Diskussion in Abschnitt 6.2

Anhang A

Formelsammlung

A.1 Spezielle Funktionen

Volumen der Einheitssphäre im d -dimensionalen Raum

$$\text{vol } S^{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

Digamma-Funktion (ψ -Funktion) [Er53]

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \\ \psi(z+n) - \psi(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+k}, \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\psi(nz) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi\left(z + \frac{k}{n}\right) + \ln n, \quad n \in \mathbb{N}\tag{A.2}$$

Pochhammer-Symbol

$$\begin{aligned}(z)_n &= \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} \stackrel{n \in \mathbb{N}}{=} z(z+1) \cdots (z+n-1) \\ \frac{d(z)_n}{dz} &= (\psi(z+n) - \psi(z)) (z)_n\end{aligned}$$

Mehrfache Γ -Funktion

$$\Gamma(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \Gamma(z_i)$$

Euler'sche Beta-Funktion [Er53]

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} u^{x-1} (1+u)^{-x-y} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \text{Re } x, \text{Re } y > 0\tag{A.3}$$

Hypergeometrische Funktion [Er53]

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n, \quad |z| < 1 \quad (\text{A.4})$$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1-z) = \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^{\infty} u^{\beta-1} (1+u)^{\alpha-\gamma} (1+zu)^{-\alpha} du, \\ \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \beta > 0, z \notin (-\infty, 0] \quad (\text{A.5})$$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha; \gamma; \frac{z}{z-1}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\Gamma(\alpha, \beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta; \gamma; 1-\frac{1}{z}) = \frac{\Gamma(\alpha, \beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} z^{\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta; \alpha-\beta+1; z) \\ + \frac{\Gamma(\beta, \alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} z^{\beta} F(\beta, \gamma-\alpha; \beta-\alpha+1; z) \quad (\text{A.7})$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1-k} \frac{\Gamma(\alpha, \beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\alpha+k, \beta+k)}{k!} z^k F(\alpha+k, \beta+k; k+1; z), \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.8})$$

A.2 Bestimmte Integrale

$$\int_0^{\infty} t^{2x-1} (t^2+c)^{-x-y} dt \stackrel{t^2 \mapsto cu}{=} \frac{c^{-y}}{2} \int_0^{\infty} u^{x-1} (u+1)^{-x-y} du \\ = \frac{1}{2} B(x, y) c^{-y}, \quad \operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y, c > 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} (at+b)^{-x-y} dt \stackrel{t \mapsto \frac{b}{a}u, \dots}{=} B(x, y) a^{-x} b^{-y}, \quad \operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y, a, b > 0 \quad (\text{A.10})$$

A.3 Feynman-Parametrisierung

Ein Produkt mehrerer Potenzen $q_i^{-\Delta_i}$ kann mithilfe einer *Feynman-Parametrisierung* in ein Integral über eine Summe der q_i umgewandelt werden:

$$\prod_{i=1}^n q_i^{-\Delta_i} = \frac{\Gamma(\sum \Delta_i)}{\prod \Gamma(\Delta_i)} \int_0^{\infty} \left(\prod d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i-1} \right) \delta(1-\sum \alpha_i) (\sum \alpha_i q_i)^{-\sum \Delta_i}. \quad (\text{A.11})$$

Für die Gültigkeit dieser Formel müssen alle Δ_i echt positiv sein. Der Beweis ist leicht per Induktion über n zu führen. Für $n=1$ ist die Gültigkeit trivial, für $n=2$ wird (A.11) zu (A.10), wenn man dort $\alpha = \frac{t}{1+t}$ substituiert. Der Fall $n > 2$ lässt sich unter Benutzung der Formel für $n=2$ auf den Fall $n-1$ reduzieren.

A.4 Vierpunktfunktion E

Als Resultat einer Feynman-Parametrisierung bekommen wir an manchen Stellen die durch ein Integral gegebene Vierpunktfunktion

$$E(\underline{x}_1, \Delta_1, \dots, \underline{x}_4, \Delta_4) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^4 \left(d\alpha_i \alpha_i^{\Delta_i - 1} \right) \delta(1 - \sum \alpha_i) \int d^d x_0 \left(\sum \alpha_i x_{0i}^2 \right)^{-\frac{\Sigma+d}{2}}, \quad (\text{A.12})$$

wobei $x_{ij} := \underline{x}_i - \underline{x}_j$ und $\Sigma = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$ gesetzt wurde. Wegen $\sum \alpha_i = 1$ im Integranden und der daraus folgenden Identität

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i x_{0i}^2 = \left(\underline{x}_0 - \sum \alpha_i \underline{x}_i \right)^2 + \sum_{0 < i < j} \alpha_i \alpha_j x_{ij}^2$$

kann die x_0 -Integration nach Verschiebung um $\sum \alpha_i \underline{x}_i$ leicht ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \int d^d x_0 \left(\sum \alpha_i x_{0i}^2 \right)^{-\frac{\Sigma+d}{2}} &= \text{vol } S^{d-1} \int dt t^{d-1} \left(t^2 + \sum_{0 < i < j} \alpha_i \alpha_j x_{ij}^2 \right)^{-\frac{\Sigma+d}{2}} \\ &\stackrel{(\text{A.9})}{=} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{\Sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\Sigma+d}{2}\right)} \left(\sum_{0 < i < j} \alpha_i \alpha_j x_{ij}^2 \right)^{-\frac{\Sigma}{2}}. \end{aligned}$$

Nach der Substitution $\alpha_i = \alpha_1 \beta_i$, $i \geq 2$ kann die Integration über α_1 unmittelbar ausgeführt werden und ergibt 1. Man erhält somit

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{\Sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\Sigma+d}{2}\right)} \int_0^\infty \prod_{i=2}^4 \left(d\beta_i \beta_i^{\Delta_i - 1} \right) \left(\sum_{j=2}^4 \beta_j x_{1j}^2 + \sum_{1 < i < j} \beta_i \beta_j x_{ij}^2 \right)^{-\frac{\Sigma}{2}} \\ &\stackrel{(\text{A.10})}{=} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, \Delta_3\right)}{\Gamma\left(\frac{\Sigma+d}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{d\beta_2}{\beta_2} \frac{d\beta_4}{\beta_4} \beta_2^{\Delta_2} \beta_4^{\Delta_4} \frac{(x_{13}^2 + \beta_2 x_{23}^2 + \beta_4 x_{34}^2)^{-\Delta_3}}{(\beta_2 x_{12}^2 + \beta_4 x_{14}^2 + \beta_2 \beta_4 x_{24}^2)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3}}. \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $\beta_2 \mapsto \frac{x_{14}^2}{x_{24}^2} t$, $\beta_4 \mapsto \frac{x_{13}^2}{x_{34}^2} s$ wird das Integral selbst nur noch abhängig von den konformen Invarianten u, v aus (3.2):

$$\begin{aligned} E &\sim \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{ds}{s} \left(\frac{x_{14}^2}{x_{24}^2} t \right)^{\Delta_2} \left(\frac{x_{13}^2}{x_{34}^2} s \right)^{\Delta_4} \frac{(x_{13}^2 (1 + vt + s))^{-\Delta_3}}{\left(\frac{x_{13}^2 x_{14}^2}{x_{34}^2} (ut + s + st) \right)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3}} \\ &= \frac{(x_{14}^2)^{\Delta_2 + \Delta_3 - \frac{\Sigma}{2}} (x_{34}^2)^{-\Delta_4 - \Delta_3 + \frac{\Sigma}{2}}}{(x_{13}^2)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_4} (x_{24}^2)^{\Delta_2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{ds}{s} t^{\Delta_2} s^{\Delta_4} \frac{(1 + vt + s)^{-\Delta_3}}{(ut + (1+t)s)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3}}. \end{aligned}$$

Wird die s -Integration mit $1 + vt$ skaliert, so können wir sie gemäß (A.5) ausführen:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dt ds}{t s} t^{\Delta_2} (1 + vt)^{\Delta_4 - \Delta_3} s^{\Delta_4} \frac{(1 + s)^{-\Delta_3}}{\left(ut \left(1 + \frac{(1+t)(1+vt)}{ut} s \right) \right)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3}} \\ &= u^{\Delta_3 - \frac{\Sigma}{2}} B \left(\Delta_4, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_4 \right) \\ & \quad \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\Delta_2 + \Delta_3 - \frac{\Sigma}{2}} (1 + vt)^{\Delta_4 - \Delta_3} F \left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, \Delta_4; \frac{\Sigma}{2}; 1 - \frac{(1+t)(1+vt)}{ut} \right). \end{aligned}$$

Alles zusammen ergibt mit der Abkürzung $z = \frac{ut}{(1+t)(1+vt)}$

$$\begin{aligned} & E(\underline{x}_1, \Delta_1, \dots, \underline{x}_4, \Delta_4) \\ &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma \left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, \Delta_3, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_4, \Delta_4 \right)}{\Gamma \left(\frac{\Sigma+d}{2}, \frac{\Sigma}{2} \right)} \\ & \quad \cdot (x_{12}^2)^{\Delta_4 - \frac{\Sigma}{2}} (x_{14}^2)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_1 - \Delta_4} (x_{24}^2)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_2 - \Delta_4} (x_{34}^2)^{-\Delta_3} u^{\Delta_3 - \Delta_4} \\ & \quad \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\Delta_2 + \Delta_3 - \frac{\Sigma}{2}} (1 + vt)^{\Delta_4 - \Delta_3} F \left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, \Delta_4; \frac{\Sigma}{2}; 1 - \frac{(1+t)(1+vt)}{ut} \right) \\ & \stackrel{(A.7)}{=} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma \left(\Delta_3, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_4 \right)}{\Gamma \left(\frac{\Sigma+d}{2} \right)} (x_{12}^2)^{\Delta_4 - \frac{\Sigma}{2}} (x_{14}^2)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_1 - \Delta_4} (x_{24}^2)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_2 - \Delta_4} (x_{34}^2)^{-\Delta_3} \\ & \quad \cdot u^{\Delta_3 - \Delta_4} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\Delta_2 + \Delta_3 - \frac{\Sigma}{2}} (1 + vt)^{\Delta_4 - \Delta_3} \\ & \quad \cdot \left[\frac{\Gamma \left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, \Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} \right)}{\Gamma(\Delta_3)} z^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3} F \left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_4; \frac{\Sigma}{2} - \Delta_3 - \Delta_4 + 1; z \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Gamma \left(\Delta_4, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_3 - \Delta_4 \right)}{\Gamma \left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_4 \right)} z^{\Delta_4} F \left(\Delta_4, \Delta_3; \Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} + 1; z \right) \right] \\ &= \frac{\pi^{\frac{d}{2} + 1} (x_{12}^2)^{\Delta_4 - \frac{\Sigma}{2}} (x_{14}^2)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_1 - \Delta_4} (x_{24}^2)^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_2 - \Delta_4} (x_{34}^2)^{-\Delta_3}}{\sin \left(\pi \left(\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} \right) \right) \Gamma \left(\frac{\Sigma+d}{2} \right)} \\ & \quad \cdot \left(E_4 \left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_2, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_1, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_4, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, u, v \right) - E_4(\Delta_1, \dots, \Delta_4, u, v) \right). \end{aligned} \tag{A.13}$$

Dabei wurde $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ benutzt. Die konform invariante Funktion E_4 lautet

$$\begin{aligned} E_4(\Delta_1, \dots, \Delta_4, u, v) &= u^{\Delta_3 - \Delta_4} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\Delta_2 + \Delta_3 - \frac{\Sigma}{2}} (1 + vt)^{\Delta_4 - \Delta_3} \\ & \quad \cdot \frac{\Gamma(\Delta_4, \Delta_3)}{\Gamma \left(\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} + 1 \right)} z^{\Delta_4} F \left(\Delta_4, \Delta_3; \Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} + 1; z \right). \end{aligned} \tag{A.14}$$

Diese Darstellung eignet sich zur Entwicklung in eine Potenzreihe um $u = 0$: Unabhängig von t gilt $z \leq u$, so dass für kleine u die hypergeometrische Funktion entwickelt werden kann. Die

noch von v abhängenden Koeffizienten dieser Entwicklung können sodann als Potenzreihe in $1 - v$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& E_4(\Delta_1, \dots, \Delta_4, u, v) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\Delta_4 + n, \Delta_3 + n)}{\Gamma(\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} + 1 + n) n!} u^{\Delta_3 + n} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^{\frac{\Sigma}{2} - \Delta_1 + n}}{(1+t)^{\Delta_4 + n} (1+vt)^{\Delta_3 + n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\Delta_4 + n, \Delta_3 + n)}{\Gamma(\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} + 1 + n) n!} u^{\Delta_3 + n} B\left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_1 + n, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_2 + n\right) \\
&\quad \cdot F\left(\Delta_3 + n, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_1 + n; \Delta_3 + \Delta_4 + 2n; 1 - v\right) \\
&= u^{\Delta_3} \sum_{n,m=0}^{\infty} E_{nm}(\Delta_1, \dots, \Delta_4) u^n (1 - v)^m, \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$E_{nm}(\Delta_1, \dots, \Delta_4) = \frac{\Gamma(\Delta_4 + n, \Delta_3 + n + m, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_1 + n + m, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_2 + n)}{\Gamma(\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} + 1 + n, \Delta_3 + \Delta_4 + 2n + m) n! m!}. \tag{A.16}$$

(A.13) ist direkt nur im nichtentarteten Fall $\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} \notin \mathbb{Z}$ anwendbar. Gilt dagegen $\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} = -k, k \in \mathbb{Z}$, so verschwindet in (A.13) der Nenner des Vorfaktors. Allerdings verschwindet dort auch die Differenz der E_4 im Zähler, denn für $k \geq 0$ ist $E_4(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, u, v)$ in (A.14) mittels (A.8) zu lesen mit dem Ergebnis $E_4(\Delta_1 - k, \Delta_2 - k, \Delta_3 + k, \Delta_4 + k, u, v) = E_4(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_2, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_1, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_4, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, u, v)$, für $k \leq 0$ wendet man (A.8) in umgekehrter Reihenfolge an. Im entarteten Fall kann (A.13) folglich mit l'Hôpital ausgewertet werden mit dem Resultat

$$\begin{aligned}
E(\underline{x}_i, \Delta_i) &= (-1)^k \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{\Sigma+d}{2})} \frac{(x_{14}^2)^{\Delta_2 - \Delta_4 - k} (x_{24}^2)^{\Delta_1 - \Delta_4 - k}}{(x_{12}^2)^{\Delta_3 + k} (x_{34}^2)^{\Delta_3}} \\
&\quad \cdot \frac{d}{d\Delta_3} \left(E_4\left(\frac{\Sigma}{2} - \Delta_2, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_1, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_4, \frac{\Sigma}{2} - \Delta_3, u, v\right) - E_4(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, u, v) \right). \tag{A.17}
\end{aligned}$$

Man beachte beim Ableiten die Δ_3 -Abhängigkeit von Σ . Da $E_4(\Delta_i, u, v)$ in (A.15) als Potenzreihe in $u, 1 - v$ mit der Potenz u^{Δ_3} als Vorfaktor gegeben ist, erhalten wir aus dieser Formel im entarteten Fall ebensolche Potenzreihen, aber mit zusätzlichen $\ln u$ -Termen als Folge des Ableitens von u^{Δ_3} . Diese Potenzreihenentwicklungen wurden zahlreich in der Literatur hergeleitet, oftmals allerdings nur Spezialfälle, wie sie etwa bei der Partialwellenentwicklung oder der AdS-CFT-Korrespondenz auftreten. Unter Verwendung bekannter Reihenentwicklungen der hypergeometrischen Funktion im entarteten Fall $\Delta_3 + \Delta_4 - \frac{\Sigma}{2} \in \mathbb{Z}$ [Er53] lässt sich das Endresultat mit den logarithmischen Termen auch direkt gewinnen, die Darstellung als Ableitung erweist sich aber als nützlich.

Im Spezialfall $k = 0$ sind die Argumente beider E_4 -Summanden gleich, wir können dann

$$\begin{aligned}
E(\underline{x}_i, \Delta_i) &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{\Sigma+d}{2})} \frac{(x_{14}^2)^{\Delta_2 - \Delta_4} (x_{24}^2)^{\Delta_1 - \Delta_4}}{(x_{12}^2 x_{34}^2)^{\Delta_3}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \frac{\partial}{\partial \Delta_2} - \frac{\partial}{\partial \Delta_3} - \frac{\partial}{\partial \Delta_4} \right) E_4(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, u, v) \tag{A.18}
\end{aligned}$$

schreiben.

Ein anderer, nicht notwendig entarteter Spezialfall ist $\Delta_1 = \Delta_2$, $\Delta_3 = \Delta_4$. Im nichtentarteten Fall gilt nach (A.13)

$$E(\underline{x}_1, \Delta_1, \underline{x}_2, \Delta_1, \underline{x}_3, \Delta_3, \underline{x}_4, \Delta_3) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}+1}}{\sin(\pi(\Delta_3 - \Delta_1)) \Gamma\left(\frac{\Sigma+d}{2}\right)} \frac{1}{(x_{12}^2)^{\Delta_1} (x_{34}^2)^{\Delta_3}} \left(E_2(\Delta_1, \Delta_3, u, v) - E_2(\Delta_3, \Delta_1, u, v) \right) \quad (\text{A.19})$$

mit

$$\begin{aligned} E_2(\Delta_1, \Delta_3, u, v) &= E_4(\Delta_3, \Delta_3, \Delta_1, \Delta_1, u, v) \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\Gamma(\Delta_1)^2}{\Gamma(\Delta_1 - \Delta_3 + 1)} z^{\Delta_1} F(\Delta_1, \Delta_1; \Delta_1 - \Delta_3 + 1; z) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$= u^{\Delta_1} \sum_{n,m=0}^{\infty} E_{nm}(\Delta_3, \Delta_3, \Delta_1, \Delta_1) u^n (1-v)^m, \quad (\text{A.21})$$

im entarteten Fall $\Delta_3 - \Delta_1 = -k$

$$E(\underline{x}_1, \Delta_1, \underline{x}_2, \Delta_1, \underline{x}_3, \Delta_3, \underline{x}_4, \Delta_3) = (-1)^{\Delta_3 - \Delta_1} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\Sigma+d}{2}\right)} \frac{1}{(x_{12}^2)^{\Delta_1} (x_{34}^2)^{\Delta_3}} \frac{d}{d\Delta_3} \left(E_2(\Delta_1, \Delta_3, u, v) - E_2(\Delta_3, \Delta_1, u, v) \right). \quad (\text{A.22})$$

Anhang B

Partialwellenentwicklung mit Maple

Das in Abschnitt 4.5.2 vorgestellte Verfahren zur Bestimmung der Partialwellenentwicklung einer in erster Ordnung vorliegenden Vierpunktfunktion der Form (4.27) ist gut für die Implementierung in einem Computeralgebra-System geeignet. Zwar ist es grundsätzlich wünschenswert, wie in 6.3.4 geschlossene Formeln für die Koeffizienten der Partialwellenentwicklung zu erhalten, dies ist jedoch nicht immer möglich oder aber erst dann, wenn die explizite Rechnung „zu Fuß“ – und dies sinnvollerweise mit Unterstützung durch Computeralgebra – Hinweise auf die Struktur der Partialwellenentwicklung zeigt. In diesem Kapitel wird eine Implementierung der Partialwellenentwicklung mit Maple vorgestellt.

B.1 Aufbereitung der Formeln

Die Partialwellenentwicklung nach Formel (4.28) setzt die Kenntnis der Matrizen Q und D und somit der zugrunde liegenden Koeffizienten $b_{nm}^X(n_1, n_3)$ voraus. Letzere ergeben sich aus der Rekursionsrelation (4.13). Damit das dortige Aufsummieren für Maple möglichst einfach und somit schnell ausführbar wird, werden aus diesen Koeffizienten gemeinsame Faktoren herausgezogen:

$$b_{nm}^X(n_1, n_3) =: \frac{\pi^\mu \Gamma(\mu - h)}{\Gamma(h)(h - \mu + 1)_n (h)_{2n+m}} c_{nm}^X(n_1, n_3).$$

Für die Koeffizienten c_{nm}^X ergeben sich für Startwert und Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned} c_{nm}^{[0,h]}(n_1, n_3) &= \frac{\Gamma\left(\frac{h-n_3}{2} + n, \frac{h+n_3}{2} + n + m\right)}{\Gamma\left(\frac{d-h+n_3}{2}, \frac{d-h-n_3}{2}\right) n!m!} \left(\frac{h+n_1}{2}\right)_n \left(\frac{h-n_1}{2}\right)_{n+m} \\ c_{nm}^X(n_1, n_3) &= c_{nm}^{[l-1,h]}(+ -) + c_{nm}^{[l-1,h]}(- +) - c_{nm}^{[l-1,h]}(+ +) - c_{nm}^{[l-1,h]}(- -) \\ &\quad - (h + 2n + m - 1) \left(c_{nm-1}^{[l-1,h]}(- +) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(h + 2n + m - 2)(h - \mu + n)(d + l - 4)(l - 1)}{(\mu + l - 3)(\mu + l - 2)} c_{n-1}^{[l-2,h]}(n_1, n_3) \right). \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten q_{nm}^χ erfolgt nun über (4.15):

$$q_{nm}^\chi = \frac{d-h-2}{d-h+l-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d-h+l}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{h-l}{2}\right)^2 (h-\mu+1)_n (h)_{2n+m}} c_{nm}^\chi(0,0).$$

Diese Koeffizienten sind algebraische Ausdrücke in h .

B.2 Indizierung der Indexpaare

Zum Durchführen der Partialwellenentwicklung benötigen wir die Position $\nu((m,n))$ des Indexpaares (m,n) in der lexikographischen Anordnung sowie die Umkehrabbildung. Dazu betrachten wir zunächst statt (m,n) das Indexpaar $(p,q) := (m+2n,n)$. Die lexikographische Ordnung auf (m,n) wird für (p,q) zur üblichen lexikographischen Ordnung

$$(p,q) < (r,s) \quad \Leftrightarrow \quad (p < r) \vee (p = r \wedge q < s)$$

auf Wörtern der Länge 2, die aus dem geordneten Alphabet \mathbb{N}_0 gebildet werden, allerdings kommen nur Indexpaare mit $p \geq 2q$ in Betracht. Mit etwas Nachdenken erhält man für die Position eines solchen Indexpaares in der angeordneten Liste

$$\nu((p,q)) = \left[\left(\frac{p+1}{2} \right)^2 \right] + q$$

und für die Umkehrung

$$p(\nu) = \lceil \sqrt{1+4\nu} \rceil - 1, \quad q(\nu) = \nu - \nu((p(\nu), 0)).$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar die entsprechenden Abbildungen für das Indexpaar (m,n) .

B.3 Koeffizientenbestimmung der nullten Ordnung

Nach der Theorie sind die Koeffizienten der nullten Ordnung der Vierpunktfunktion, also der freien Vierpunktfunktion, zwar alle $C_\Delta^2 c_{lt}^0$, zwecks Konsistenzprüfung wollen wir dies aber nicht voraussetzen, sondern die Bestimmung der Koeffizienten c_{lt}^0 der nullten Ordnung in das Verfahren aus 4.5.2 einbauen. Dies ist problemlos möglich, ist nämlich

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm} u^n (1-v)^m$$

die Entwicklung der nullten Ordnung, d. h. nach (4.23)

$$f_{00} = 2C_\Delta^2, \quad f_{0m} = C_\Delta^2 \frac{(\Delta)_m}{m!}, m > 0, \quad f_{nm} = 0 \quad \text{sonst,}$$

so erhalten wir die zusätzliche Gleichung

$$QC_\Delta^2 c^0 = f.$$

B.4 Quelltext

Der Quelltext stellt die unmittelbare Umsetzung der hergeleiteten Formeln dar, die Bezeichnungen aus den Formeln wurden übernommen.

```
# Partialwellenentwicklung mit Maple

# Statt der Raumdimension d wird durchgängig mu = d/2 benutzt.

# Rekursive Berechnung der Koeffizienten c^[l,h]_nm. Die Abhängigkeit von
# n_1, n_3 wird durch die Abhängigkeit von den zugehörigen Skalendimensionen
# delta_1, ..., delta_4 parametrisiert. Einmal berechnete Koeffizienten
# werden in cs gespeichert, damit anschließend schnell ohne erneute
# Berechnung auf sie zurückgegriffen werden kann.

c := proc (l, n, m)
  global cs;
  local t;
  if (assigned(cs[l, n, m])) then
    RETURN(cs[l, n, m]);
  elif (l < 0) or (n < 0) or (m < 0) or (m+2*n < 1) then
    RETURN(0);
  elif (l = 0) then
    t := (GAMMA(mu-d3+n) * GAMMA(mu-d4+n+m))
          / (GAMMA(d3) * GAMMA(d4) * n! * m!)
          * expand(pochhammer(d1, n)) * expand(pochhammer(d2, n+m));
  else
    t := c(l-1, n, m);
    t := subs(d1=d1+1/2, d2=d2-1/2, d3=d3-1/2, d4=d4+1/2, t)
          + subs(d1=d1-1/2, d2=d2+1/2, d3=d3+1/2, d4=d4-1/2, t)
          - subs(d1=d1+1/2, d2=d2-1/2, d3=d3+1/2, d4=d4-1/2, t)
          - subs(d1=d1-1/2, d2=d2+1/2, d3=d3-1/2, d4=d4+1/2, t)
          - (h+2*n+m-1) * (subs(d1=d1-1/2, d2=d2+1/2, d3=d3+1/2, d4=d4-1/2,
                               c(l-1, n, m-1))
                          + (h+2*n+m-2) * (h-mu+n) * (2*mu+1-4) * (l-1)
                          / ((mu+1-3) * (mu+1-2)) * c(l-2, n-1, m));
  fi;
  cs[l, n, m] := factor(t);
end:

# Berechnung der Koeffizienten q^[l,h]_nm. Sie sind algebraische Ausdrücke.

q := (l, n, m) ->
  factor(simplify(subs(d1=h/2, d2=h/2, d3=mu-h/2, d4=mu-h/2, c(l, n, m))
                  * GAMMA(mu+(1-h)/2)^2 / GAMMA((h-1)/2)^2
                  * (2*mu-h-2) / ((2*mu-h+1-2) * expand(pochhammer(h-mu+1, n))
                  * expand(pochhammer(h, 2*n+m))))):

# Entwicklungskoeffizienten des freien Feldes

c0 := (l, t) -> 2 * (2*Delta+2*1+2*t-1) * pochhammer(Delta, t)^2
  * pochhammer(Delta-mu+1, t)^2
  / (t! * (2*Delta+1+2*t-1) * pochhammer(2*Delta+1+t-mu, t))
```

```

* pochhammer(mu+1, t) * 1! * pochhammer(2*Delta+t-2*mu+1, t)
* pochhammer(2*Delta+2*t-2*mu+3, 1)):

# pw gibt die Partialwelle zu l als Potenzreihe bis zur Ordnung k zurück.
# Die Koeffizienten sind dabei q, also algebraische Ausdrücke.

pw := (l, k) -> u^((h-1)/2-Delta)
* sum('sum('q(l, n, m)*(1-v)^m', 'm'=0..k-n) * u^n', 'n'=0..k):

# Umrechnung zwischen Indexpaar und Position in der geordneten Liste. Um
# mit der Maple-Konvention bei 1 beginnender Indizes kompatibel zu sein,
# muss zu nu noch eine 1 addiert werden.

nu := (m, n) -> trunc(((m+2*n+1)/2)^2) + n + 1:
P := i -> trunc(sqrt(1+4*(i-1))) - 1:
N := i -> i - nu(P(i),0):
M := i -> P(i) - 2 * N(i):

# Die Prozedur cpwe führt die Partialwellenentwicklung aus.
# f, a, b sind auf Indexpaaren (n,m) definierte Abbildungen und geben die
# Koeffizienten der nullten, ersten und ersten logarithmischen Ordnung an.
# k gibt die Anzahl der Partialwellen an, deren Koeffizienten bestimmt
# werden sollen. ccp schließlich ist ein boolescher Wert und bestimmt, ob
# die Koeffizienten c' der Partialwellenentwicklung berechnet werden
# sollen. Dies ist wegen des nötigen Ableitens und der länglichen Terme
# recht zeitintensiv. Sollen die Koeffizienten c' nicht berechnet werden,
# so ist auch keine Angabe von a nötig, d.h. man kann "null" als
# Argument angeben. Ist Delta0 "null", so wird angenommen, dass die
# Skalendimension in f, a, b durch das Symbol Delta parametrisiert wird.
# Ist Delta0 angegeben, so wird die Skalendimension dadurch festgelegt.
#
# cpwe gibt eine Liste aus den Lösungsvektoren C_Delta^2, delta, c' zurück.
# C_Delta^2 sollte konstant sein für gerades l und 0 sonst.
# Die Reihenfolge innerhalb der Vektoren ist durch die Anordnung nu gegeben.
#
# Die Matrizen Q und D werden in qm und dm gespeichert. Einmal berechnete
# Einträge müssen so nicht erneut berechnet werden.

cpwe := proc (f, a, b, k, ccp, Delta0)
  global qm, dm;
  local i, j, m, n, l, t, z, c, delta, cp, qm2, dm2, cd2;
  for i from 1 to k do
    for j from 1 to i do
      if ((not assigned(qm[i, j]))
        or (ccp and not assigned(dm[i, j]))) then
        m := M(i); n := N(i);
        l := M(j); t := N(j);
        z := q(l, n-t, m);
        if (not assigned(qm[i, j])) then
          qm[i, j] := factor(simplify(subs(h=2*Delta+2*t+1, z)));
        fi;
        if (ccp and not assigned(dm[i, j])) then
          dm[i, j] := factor(2 * simplify(subs(h=2*Delta+2*t+1, diff(z,h))));
        fi;
      fi;
    fi;
  fi;
end proc;

```

```

        fi;
    fi;
    if (Delta0 <> null) then
        qm2[i, j] := subs(Delta=Delta0, qm[i, j]);
        if (ccp) then dm2[i, j] := subs(Delta=Delta0, dm[i, j]); fi;
    fi;
od;
od;
if (Delta0 = null) then qm2 := qm; dm2 := dm; fi;
c := array(1..k);
delta := array(1..k);
cp := array(1..k);
for i from 1 to k do
    m := M(i); n := N(i);
    z := f(n, m);
    for j from 1 to i-1 do z := z - qm2[i, j] * c[j]; od;
    c[i] := factor(simplify(z / qm2[i, i]));
    z := b(n, m);
    for j from 1 to i-1 do z := z - qm2[i, j] * delta[j]; od;
    delta[i] := factor(simplify(z / qm2[i, i]));
    if (ccp) then
        z := a(n, m);
        for j from 1 to i do z := z - dm2[i, j] * delta[j]; od;
        for j from 1 to i-1 do z := z - qm2[i, j] * cp[j]; od;
        cp[i] := factor(expand(simplify(z / qm2[i, i])));
    fi;
od;
cd2 := simplify(c[1] / c0(0, 0));
for i from 1 to k do
    if (delta[i] <> 0) then
        if (c[i] = 0) then
            delta[i] := infinity;
        else
            delta[i] := simplify(delta[i] / c[i]);
        fi;
    fi;
    if (ccp) then cp[i] := cp[i] / cd2; fi;
    z := c0(M(i), N(i));
    if (Delta0 <> null) then
        z := subs(Delta=Delta0, z);
    fi;
    if (z <> 0) then
        c[i] := simplify(c[i] / z);
    fi;
od;
if (ccp) then
    [evalm(c), evalm(delta), evalm(cp)];
else
    [evalm(c), evalm(delta)];
fi;
end:

```

Obwohl der Quelltext gelegentlich an Programmierübungen zur Numerik erinnert, handelt

es sich doch stets um von Maple symbolisch durchgeführte Rechnungen, wie man sie auch mühsam und fehlerträchtig mit Bleistift und Papier machen könnte.

B.5 Verifikation beim φ^4 -Modell

```
> read "pw.m";
```

Definition der Koeffizienten der nullten (f), ersten (a4) und ersten logarithmischen Ordnung (b4).

```
> f := (n, m) -> 'if'(n > 0, 0,
'if'(m = 0, 2, expand(pochhammer(Delta, m)/m!))):
> b4 := (n, m) -> -GAMMA(Delta+n)^2 * GAMMA(Delta+n+m)^2
/ (GAMMA(2*Delta+2*n+m) * n!^2 * m!):
> a4 := (n, m) -> -2*b4(n, m)
* (Psi(n+1)+Psi(2*(n+Delta)+m)-Psi(n+Delta)-Psi(n+Delta+m)):
```

Berechnung der ersten k Partialwellenkoeffizienten. Zunächst wird eine Liste ausgegeben, die die Reihenfolge der (l,t)-Paare angibt. Danach werden die Partialwellenkoeffizienten bestimmt und in C geschrieben. Die Koeffizienten c' werden nicht ausgegeben, da sie sehr lange Ausdrücke sind, sondern stattdessen eine 1 für $c' \neq 0$, eine 0 für $c' = 0$. Das Ergebnis ist konsistent: Für ungerade l verschwinden alle Koeffizienten, für gerade l ist C_{Δ}^2 konstant 1. In Übereinstimmung mit der geschlossenen Lösung gibt es in erster Ordnung nur Beiträge mit $l = 0$.

```
> k := 16:
seq([i, M(i), N(i)], i=1..k);
C := cpwe(f, a4, b4, k, true, null):
[C[1], C[2], [seq('if'(C[3][i] <> 0,1,0), i=1..k)]];
```

```
[1, 0, 0], [2, 1, 0], [3, 2, 0], [4, 0, 1], [5, 3, 0], [6, 1, 1], [7, 4, 0], [8, 2, 1], [9, 0, 2],
[10, 5, 0], [11, 3, 1], [12, 1, 2], [13, 6, 0], [14, 4, 1], [15, 2, 2], [16, 0, 3]
```

```
[[1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [-1/2 * Gamma(Delta)^4 / Gamma(2*Delta), 0, 0,
-1/2 * Delta * (2*Delta - mu) * Gamma(Delta)^4 * mu / ((2*Delta + 1) * Gamma(2*Delta) * (Delta - mu + 1)), 0, 0, 0, 0,
-1/8 * (Delta + 1) * Delta * (2*Delta - mu + 1) * (2*Delta - mu) * Gamma(Delta)^4 * (mu + 1) * (-2*mu + 2*Delta + 3) * mu / ((2*Delta + 1) * (2*Delta + 3) * Gamma(2*Delta) * (-mu + Delta + 2) * (Delta - mu + 1)^2), 0, 0,
0, 0, 0, 0, -1/24 * ((Delta + 2) * (Delta + 1) * Delta * (2*Delta + 2 - mu) * (2*Delta - mu) * (2*Delta - mu + 1) *
Gamma(Delta)^4 * (-2*mu + 2*Delta + 5) * (mu + 1) * (mu + 2) * mu) / (
(2*Delta + 5) * (2*Delta + 3) * (2*Delta + 1) * Gamma(2*Delta) * (-mu + Delta + 3) * (-mu + Delta + 2) * (Delta - mu + 1)^2)
], [1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]]
```

Vergleich der Koeffizienten mit denen der geschlossenen Lösung delta4, cp4: Sie sind identisch.

```
> delta4 := t -> -pochhammer(2*Delta-mu, t) * pochhammer(mu, t)
* pochhammer(2*Delta-2*mu+1+t, t) * GAMMA(Delta)^2
* GAMMA(Delta+t)^2
```

```

/ (2 * t! * pochhammer(Delta-mu+1, t)^2 * GAMMA(2*Delta+2*t)):

g := t -> -2*Psi(Delta+t) + Psi(2*Delta+2*t) + Psi(1+t)
+ Psi(2*Delta+2*t-mu) - Psi(2*Delta+t-mu):

cp4 := t -> 2 * g(t) * pochhammer(2*Delta-mu, t)
* GAMMA(Delta+t)^4
/ (t!^2 * pochhammer(2*Delta+t-mu, t) * GAMMA(2*Delta+2*t)):

seq(simplify(C[2][nu(0,t)] - delta4(t)), t=0..3);
seq(simplify(C[3][nu(0,t)] - factor(expand(cp4(t))))), t=0..3);

0, 0, 0, 0

0, 0, 0, 0

```

B.6 Anwendung beim φ^3 -Modell

```
> read "pw.m";
```

Entwicklungskoeffizienten der Funktionen E4 und E2.

```

> E4 := (n, m, Delta1, Delta2, Delta3, Delta4) -> GAMMA(Delta4+n)
* GAMMA(Delta3+n+m) * GAMMA((Delta2+Delta3+Delta4-Delta1)/2+n+m)
* GAMMA((Delta1+Delta3+Delta4-Delta2)/2+n)
/ (GAMMA((Delta3+Delta4-Delta1-Delta2)/2+1+n)
* GAMMA(Delta3+Delta4+2*n+m) * n! * m!):
E2 := unapply(E4(n, m, Delta3, Delta3, Delta1, Delta1),
(n, m, Delta1, Delta3)):

```

Berechnung der Koeffizienten der nullten (f3), ersten (a3) und ersten logarithmischen Ordnung (b3) zur halben Skalendimension nu nach den hergeleiteten Formeln.

```

> f3 := (n, m, nu) -> 'if'(n > 0, 0, 'if'(m = 0, 2,
expand(pochhammer(2*nu,m)/m!))):

a31 := (n, m, nu) -> factor(simplify((-1)^nu
* sum('pochhammer(3*nu-mu,s) / (pochhammer(2*nu-mu+1,s)*s!)
* (-1)^s * E2(nu+n-s,m,nu+s,Delta)', 's'=0..nu-1)
/ (2*nu-Delta)) * (2*nu-Delta)):

a32 := (n, m, nu) -> simplify((-1)^nu * sum('pochhammer(3*nu-mu,s)
/ (pochhammer(2*nu-mu+1,s)*s!) * (-1)^s * E2(n,m,Delta,nu+s)',
's'=0..nu-1)):

a3 := (n, m, nu) -> simplify(subs(Delta=2*nu, diff(a31(n, m, nu)
- a32(n, m, nu), Delta))
+ sum('pochhammer(3*nu-mu,s) / (pochhammer(2*nu-mu+1,s)*s!)
* ((D[3](E4)+D[4](E4)-D[5](E4)-D[6](E4))(n,m,nu+s,2*nu,nu+s,2*nu)
+ (D[3](E4)+D[4](E4)-D[5](E4)-D[6](E4))(n,m,nu+s,2*nu,2*nu,nu+s))',
's'=0..nu-1)
- GAMMA(nu) * GAMMA(2*nu-mu+1) * E2(nu+n, m, nu, mu-nu)):

```

```

b3 := (n, m, nu) -> -simplify(subs(Delta=2*nu, a32(n, m, nu))
+ sum('pochhammer(3*nu-mu,s) / (pochhammer(2*nu-mu+1,s)*s!)
* (E4(n,m,nu+s,2*nu,nu+s,2*nu) + E4(n,m,nu+s,2*nu,2*nu,nu+s))',
's'=0..nu-1)):

```

C gibt das von cpwe berechnete Ergebnis der Partialwellenentwicklung zur halben Skalendimension nu bis zur Ordnung k zurück.

```

> C := (nu, k) -> cpwe((n,m)->f3(n,m,nu), (n,m)->a3(n,m,nu),
(n,m)->b3(n,m,nu), k, true, 2*nu):

```

Partialwellenentwicklung zur Skalendimension Delta = 2 bis zur 9. Ordnung. Das Ergebnis ist konsistent: Für ungerade l verschwinden alle Koeffizienten, für gerade l ist C_Delta^2 konstant 1. Es gibt zu jeder Partialwelle mit geradem l einen Beitrag erster Ordnung.

```

> C(1, 9);

```

$$\begin{aligned}
& \left[[1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1], \left[\frac{-5}{12}, 0, \frac{-1}{12}, -\frac{1}{15}\mu - \frac{1}{12}, 0, 0, \frac{-1}{30}, -\frac{1}{180}\mu - \frac{2}{45}, \right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{1}{2520} \frac{22\mu^3 - 27\mu^2 - 49\mu - 336}{-3 + \mu} \right], \left[\frac{1}{18} \frac{-45 + 16\mu}{-3 + \mu}, 0, \right. \right. \\
& \left. \frac{1}{3600} \frac{958\mu^2 - 8025\mu + 16562}{(2\mu - 7)^2 (\mu - 4)^2}, \right. \\
& \left. \frac{1}{450} \frac{143\mu^4 - 1901\mu^3 + 7261\mu^2 - 5035\mu - 11100}{\mu(-5 + \mu)^2 (\mu - 4)}, 0, 0, \frac{1}{705600} \right. \\
& \left. \frac{9252\mu^4 - 169604\mu^3 + 1153983\mu^2 - 3455531\mu + 3843770}{(2\mu - 9)^2 (-5 + \mu)^2 (2\mu - 7)^2 (\mu - 4)^2}, \right. \\
& \left. \frac{1}{88200} \frac{2474\mu^5 - 37271\mu^4 + 47425\mu^3 + 1602779\mu^2 - 8625039\mu + 12723480}{(2\mu - 9)^2 (\mu + 2) (-7 + \mu)^2 (-5 + \mu)^2} \right. \\
& \left. , \frac{1}{29400} ((-3 + \mu)(11516\mu^8 - 354144\mu^7 + 4229067\mu^6 \right. \\
& \left. - 24731025\mu^5 + 72022047\mu^4 - 95559387\mu^3 + 111300070\mu^2 \right. \\
& \left. - 424346664\mu + 645059520)) / (\right. \\
& \left. (\mu + 1) (2\mu - 7)^2 \mu (-7 + \mu)^2 (\mu - 6)^2 (-5 + \mu) \right) \left. \right]]
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [AIS78] S. J. Avis, C. J. Isham, D. Storey, *Quantum field theory in anti-de Sitter space-time*, Physical Review D **18** (1978), 3565–3576
- [Ba75] K. Baumann, *When is a field theory a generalized free field?*, Commun. Math. Phys. **43** (1975), 221–223
- [Be00] M. Bertola, J. Bros, U. Moschella, R. Schaeffer, *A general construction of conformal field theories from scalar anti-de Sitter quantum field theories*, Nuclear Physics B **587** (2000), 619–644 [hep-th/9908140]
- [BF82] P. Breitenlohner, D. Z. Freedman, *Positive energy in anti-de Sitter backgrounds and gauged extended supergravity*, Physics Letters B **115** (1982), 197–201
- [BL85] C. P. Burgess, C. A. Lütken, *Propagators and effective Potentials in anti-de Sitter space*, Physics Letters B **153** (1985), 137–141
- [CR75] P. Candelas, D. J. Raine, *General-relativistic quantum field theory: An exactly soluble model*, Physical Review D **12** (1975), 965–974
- [Do77] V. K. Dobrev et al., *Harmonic Analysis on the n -Dimensional Lorentz Group and Its Application to Conformal Quantum Field Theory*, Lecture Notes in Physics **63**, Springer, 1977
- [DO01] F. A. Dolan, H. Osborn, *Conformal four point functions and the operator product expansion*, Nuclear Physics B **599** (2001), 459–496 [hep-th/0011040]
- [DR02] M. Dütsch, K.-H. Rehren, *A comment on the dual field in the scalar AdS-CFT correspondence*, hep-th/0204123 (2002)
- [Er53] A. Erdélyi et al., *Higher Transcendental Functions, Volume I*, McGraw-Hill, 1953
- [F99A] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, L. Rastelli, *Correlation functions in the CFT_d/AdS_{d+1} correspondence*, Nuclear Physics B **546** (1999), 96–118 [hep-th/9804058]
- [F99B] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, L. Rastelli, *Comments on 4-point functions in the CFT/AdS correspondence*, Physics Letters B **452** (1999), 61–68 [hep-th/9808006]

- [F99C] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, L. Rastelli, *Graviton exchange and complete 4-point functions in the AdS/CFT correspondence*, Nuclear Physics B **562** (1999), 353–394 [hep-th/9903196]
- [F99D] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, L. Rastelli, *AdS/CFT 4-point-functions: How to succeed at z-integrals without really trying*, Nuclear Physics B **562** (1999), 395–411 [hep-th/9905049]
- [FJ96] K. Fredenhagen, M. Jörß, *Conformal Haag-Kastler nets, pointlike localized fields and the existence of operator product expansions*, Commun. Math. Phys. **176** (1996), 541–554
- [FMS97] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, 1997
- [Fr74] C. Fronsdal, *Elementary particles in a curved space. II*, Physical Review D **10** (1974), 589–598
- [GJ87] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, 2. Auflage, Springer, 1987
- [GKP98] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from non-critical string theory*, Physics Letters B **428** (1998), 105–114 [hep-th/9802109]
- [GW64] I. M. Gelfand, N. J. Wilenkin, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) IV*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1964
- [Ha58] R. Haag, *Quantum field theory with composite particles and asymptotic conditions*, Physical Review **112** (1958), 669–673
- [Ha96] R. Haag, *Local Quantum Physics*, 2. Auflage, Springer, 1996
- [HMR00] L. Hoffmann, L. Mesref, W. Rühl, *AdS box graphs, unitarity and operator product expansions*, Nuclear Physics B **589** (2000), 337–355 [hep-th/0006165]
- [Ho93] G. 't Hooft, *Dimensional reduction in quantum gravity*, in A. Ali et al. (Hrsg.), *Abdus-Salam Festschrift*, World Scientific, 1993, 284–296 [gr-qc/9310026]
- [HPR00] L. Hoffmann, A. C. Petkou, W. Rühl, *Aspects of the conformal operator product expansion in AdS/CFT correspondence*, Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2000), 571–615 [hep-th/0002154]
- [Jo65] R. Jost, *The General Theory of Quantized Fields*, American Mathematical Society, 1965
- [Jo02] M. Jona-Lasinio, *Beyond the tree level in the AdS/CFT correspondence*, hep-th/0203069 (2002)
- [K199] I. R. Klebanov, *Introduction to the AdS/CFT correspondence*, in J. Harvey et al. (Hrsg.), *TASI 99: Strings, Branes and Gravity*, Boulder, 1999, 615–650 [hep-th/0009139]
- [KW99] I. R. Klebanov, E. Witten, *AdS/CFT correspondence and symmetry breaking*, Nuclear Physics B **556** (1999), 89–114 [hep-th/9905104]

- [LM75] M. Lüscher, G. Mack, *Global conformal invariance in quantum field theory*, Commun. Math. Phys. **41** (1975), 203–234
- [LR92] K. Lang, W. Rühl, *The critical $O(N)$ σ -model at dimension $2 < d < 4$ and order $1/N^2$: Operator product expansions and renormalization*, Nuclear Physics B **377** (1992), 371-404
- [LR93] K. Lang, W. Rühl, *The critical $O(N)$ σ -model at dimension $2 < d < 4$: Fusion coefficients and anomalous dimensions*, Nuclear Physics B **400** (1993), 597-623
- [Ma74] G. Mack, *Group theoretical approach to conformal invariant quantum field theory*, in E. R. Caianiello (Hrsg.), *Renormalization and Invariance in Quantum Field Theory*, Plenum Press, 1974, 123–158
- [Ma75] G. Mack, *Osterwalder-Schrader positivity in conformal invariant quantum field theory*, in H. Rollnik, K. Dietz (Hrsg.), *Trends in Elementary Particle Theory, Lecture Notes in Physics 37*, Springer, 1975, 66-91
- [Ma98] J. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 231-252 [hep-th/9711200]
- [MT73] G. Mack, I. T. Todorov, *Conformal-invariant Green functions without ultraviolet divergence*, Physical Review D **8** (1973), 1764-1787
- [OS73] K. Osterwalder, R. Schrader, *Axioms for euclidean Green's functions*, Commun. Math. Phys. **31** (1973), 83–112
- [OS75] K. Osterwalder, R. Schrader, *Axioms for euclidean Green's functions II*, Commun. Math. Phys. **42** (1975), 281–305
- [Po69] K. Pohlmeyer, *The Jost-Schroer theorem for zero-mass fields*, Commun. Math. Phys. **12** (1969), 204–211
- [PR86] R. Penrose, W. Rindler, *Spinors and Spacetime*, vol. 2, Cambridge University Press, 1986
- [Re00] K.-H. Rehren, *Algebraic holography*, Annales Henri Poincaré **1** (2000), 607–623 [hep-th/9905179]
- [Si79] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979
- [SW64] R. F. Streater, A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, W. A. Benjamin, 1964
- [Sy72] K. Symanzik, *On calculations in conformal invariant field theories*, Lett. Nuovo Cimento **3** (1972), 734–738
- [Wi98] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 253-291 [hep-th/9802150]

Danksagung

Es haben viele Menschen auf ihre Art zu meinem erfüllten Studium und schließlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ihnen allen gilt mein herzlicher Dank.

Herr Prof. Dr. Karl-Henning Rehren hat mir die Arbeit in einem spannenden Themenfeld und zwei lehrreiche Vortragserfahrungen „in der Fremde“ ermöglicht. Dafür, für das damit verbundene Vertrauen und für seine engagierte Betreuung mit viel Geduld, großer Kompetenz und guten Ratschlägen möchte ich mich bei ihm bedanken. Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Detlev Buchholz für die Übernahme des Korreferats und die damit verbundenen Mühen sowie bei der Arbeitsgruppe „Quantenfeldtheorie und Statistische Mechanik“ für die lebendige Atmosphäre.

Für die sehr schöne Zeit in Göttingen vom Propädeutikum bis zum Diplom geht mein Dank an meine Kommilitonen, die Universität und die Stadt.

Schließlich, aber nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern dafür bedanken, dass sie mir diese Zeit ermöglicht haben.