Lokale Gleichgewichtszustände in der konformen Quantenfeldtheorie

Diplomarbeit

Vorgelegt von

Philipp Knake
aus Oldenburg

angefertigt im

Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation

Der Begriff des Gleichgewichtszustandes ist seit langem aus der Thermodynamik bekannt, in welcher bestimmte physikalische Systeme durch eine geeignete Menge weniger thermaler Observabler beschrieben werden. So wird ein System im globalen thermischen Gleichgewicht (bei Abwesenheit eines chemischen Potentials und von Phasenübergängen) allein durch die Temperatur charakterisiert. Globale Gleichgewichtszustände sind sowohl im Rahmen der klassischen Thermodynamik als auch in der quantenstatistischen Mechanik vollständig untersucht worden. Sie werden in Systemen endlichen Volumens durch das Gibbs-Ensemble und im thermodynamischen Limes durch die, seit den Sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts bekannte, KMS-Bedingung (für Kubo, Martin und Schwinger) charakterisiert (siehe [9]).

Deutlich schwieriger sind physikalische Systeme zu beschreiben, die nur lokal im thermodynamischen Gleichgewicht sind. Eine Möglichkeit wurde in der Arbeit von Buchholz, Ojima und Roos (siehe [1]) und der Arbeit von Buchholz (siehe [2]) vorgestellt.

Die zugrundeliegende Idee dort ist, einen gegebenen Zustand auf einer gewissen Menge lokaler thermaler Observablen mit globalen Gleichgewichtszuständen zu vergleichen. Dies wird wie folgt realisiert: Zu einem Punkt $x \in \mathbb{R}^m$ wählt man eine Menge lokaler thermaler Observablen $\mathcal{S}_x$. Dann vergleicht man die Erwartungswerte eines gegebenen Zustandes ω auf dieser Menge mit denen aller thermischen Referenzzustände (Gemische von Gleichgewichtszuständen). Gibt es einen thermischen Referenzzustand ω_x, so daß ω auf $\mathcal{S}_x$ mit ω_x übereinstimmt, so sind ω und ω_x bezüglich der Menge $\mathcal{S}_x$ nicht unterscheidbar, und man kann ω am Punkt x die mit $\mathcal{S}_x$ verbundenen thermischen Eigenschaften des Referenzzustandes zuordnen. Ein solcher Zustand ω wird $\mathcal{S}_x$-thermal genannt. Dieses Konzept läßt sich von einzelnen Raumzeitpunkten auf Gebiete in der Raumzeit ausdehnen. Wenn es zu jedem $x \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ einen Referenzzustand ω_x gibt, so daß ein gegebener Zustand ω von diesem auf $\mathcal{S}_x$ nicht unterschieden werden kann, so hat ω in ganz $\mathcal{O}$ eine thermale Interpretation, allerdings im allgemeinen an jedem Punkt eine andere, da ω an verschiedenen Punkten mit verschiedenen Referenzzuständen übereinstimmen kann. Die einem Zustand ω auf diese Weise zugeordneten thermischen Größen können also raumzeitlich variieren. In diesem Fall macht es Sinn zu sagen, der Zustand sei in $\mathcal{O}$ lokal im Gleichgewicht.

In diesem Rahmen ist es zudem möglich, zwei lokale Gleichgewichtszustände bezüglich ihrer thermalen Stabilität zu vergleichen. Wenn ein Zustand auf einer Menge $\mathcal{S}_x$ lokaler thermaler Observablen mit einem Referenzzustand übereinstimmt, ein anderer Zustand dies jedoch nur auf einer Teilmenge von $\mathcal{S}_x$ tut, so ist dieser weniger nah am globalen Gleichgewicht, als der erste. Der erste Zustand ist also thermal stabiler als der zweite.

In den oben erwähnten Arbeiten [1] und [2] wurden diese Ideen auf den Fall masseloser Bosonen im Minkowski-Raum angewandt. Es wurden dort die Eigenschaften lokaler Gleichgewichtszustände (im obigen Sinn) untersucht, wobei sich zeigte, daß sich durch die mikroskopische Dynamik Evolutionsgleichungen für die thermalen Observablen ergeben. Desweiteren wurde in [2] im Rahmen dieses Modells bewiesen, daß lokale Gleichgewichtszustände nicht in beliebigen Gebieten der Raumzeit lokal im thermodynamischen Gleichgewicht sein können, sondern daß diese Gebiete immer in einem Schnitt charakteristischer Halbebenen enthalten sind.

In den Arbeiten [17], [18] und [19] wurden die Methoden auf masselose Fermionen, das elektromagnetische Feld und massive Bosonen angewandt. In den beiden erstgenannten Fällen konnten ähnliche Ergebnisse wie in [2] erzielt werden, im Fall massiver Bosonen gab es deutliche Unterschiede.

In dieser Arbeit sollen diese Methoden nun auf erhaltene Ströme in 1+1 Dimensionen angewandt werden. In Kapitel 2 wird zunächst der allgemeine theoretische Rahmen vorgestellt. Im dritten Kapitel soll ein kurzer Überblick über konform invariante Theorien in 1+1 Dimensionen gegeben werden. In Kapitel 4 werden die thermischen Referenzzustände der Theorie sowie diejenigen der chiralen Subtheorien vorgestellt und ihre Eigenschaften untersucht. Im fünften Kapitel sollen die hier benutzten lokalen thermalen Observablen eingeführt werden, und es zeigt sich, daß wichtige thermale Größen wie Temperatur, Entropie und Phasenraum-Teilchendichte mithilfe dieser thermalen Observablen gemessen werden können. Im sechsten Kapitel werden Evolutionsgleichungen für die Makroobservablen hergeleitet. In Kapitel 7 schließlich sollen Beispiele lokaler Gleichgewichtszustände angegeben werden, von denen es in diesem Modell eine Vielzahl gibt.

2 Theorie

Im folgenden Teil soll kurz die dieser Arbeit zugrundeliegende allgemeine Theorie erläutert werden. Diese bewegt sich im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie. Die grundlegenden Objekte sind hierbei *lokale* observable Felder, welche mit Testfunktionen mit kompaktem Träger verschmiert werden. Sie werden im folgenden mit $\phi(f)$ bezeichnet (wobei f kompakten Träger in $\mathbb{R}^m$ hat). Eventuelle Tensorindices an den $\phi(f)$ werden zur Vereinfachung der Notation weggelassen.

Von den Testfunktionen erhalten die Felder eine kausale Struktur. Sind die Träger zweier Testfunktionen f und g raumartig getrennt, so gilt $[\phi(f), \phi(g)] = 0$.

Die Felder erzeugen über Produkt- und Summenbildung eine Algebra $\mathcal{A}$ mit Elementen

$$\mathcal{A} \ni A := \sum \phi(f_1)\phi(f_2)\cdots\phi(f_n).$$

Außerdem sollen in der Algebra auch Vielfache der $\mathbf{1}$ enthalten sein. Auf $\mathcal{A}$ definiert man eine Involution

$$* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^*$$

durch

$$\phi(f)^* := \phi^*(\bar{f}), \quad (AB)^* := B^*A^* \text{ und } \quad \mathbf{1}^* := \mathbf{1}$$

für alle Testfunktionen f und alle $A, B \in \mathcal{A}$ ($\bar{f}$ ist hierbei das komplex Konjugierte von f). Daß * tatsächlich wieder in die Algebra $\mathcal{A}$ abbildet, ist durch die Hermitizität der Felder ϕ gewährleistet, wegen der $\phi(f)^* = \phi(\bar{f})$ gilt. Mit dieser Involution ist $\mathcal{A}$ eine *-Algebra.

Außerdem definiert man eine Familie von Automorphismen auf $\mathcal{A}$, welche die Wirkung der (eigentlichen orthochronen) Poincaré-Gruppe (und in unserem Fall auch die Wirkung der Skalentransformationen) implementiert:
Für alle $\lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ gibt es

$$\alpha_\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

mit

$$\alpha_\lambda \phi(f) := \phi(f_\lambda)$$

sowie

$$\alpha_\lambda(A^*) := (\alpha_\lambda(A))^* \text{ und } \quad \alpha_\lambda(AB) := \alpha_\lambda(A)\alpha_\lambda(B).$$

Hierbei ist $f_\lambda(x) := D(\lambda)f(\lambda^{-1}x)$, mit einer zum Tensorcharakter von ϕ passenden Matrixdarstellung D von $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Falls λ eine reine Translation $\lambda = (1, a)$ ist, wird der zugehörige Automorphismus mit α_a bezeichnet.

Die Zustände des physikalischen Systems werden durch (komplex) lineare Funktionale

$$\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$$

beschrieben, welche außerdem noch den Bedingungen

$$\omega(\mathbf{1}) = 1 \qquad \text{(Normierung)}$$

und

$$\omega(A^*A) \geq 0 \text{ für alle } A \in \mathcal{A} \qquad \text{(Positivität)}$$

genügen sollen.

2.1 Thermische Referenzzustände

Die Idee von Buchholz, Ojima und Roos ist, Erwartungswerte von Observablen in Nichtgleichgewichtszuständen mit solchen in sogenannten thermischen Referenzzuständen zu vergleichen, welche Gleichgewichtszustände oder Gemische solcher Zustände sind (siehe [1]).

Globale Gleichgewichtszustände werden durch die KMS-Bedingung (nach Kubo, Martin und Schwinger) charakterisiert. Diese lautet:

Definition 2.1 *Sei $\beta := |\beta|\, e \in V_+$. Ein Zustand ω_β über der Algebra $\mathcal{A}$ heißt KMS-Zustand zur inversen Temperatur $|\beta| > 0$ im durch den Einheitsvektor $e \in V_+$ festgelegten Ruhsystem, falls es zu je zwei Operatoren $A, B \in \mathcal{A}$ eine Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, welche im Streifen $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} | 0 < \mathrm{Im} z < |\beta|\}$ analytisch und stetig an dessen Rand ist und außerdem*

$$F(t) = \omega_\beta(B\alpha_{te}(A)) \text{ und } \quad F(te + \mathrm{i}\beta) = \omega_\beta(\alpha_{te}(A)B)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Wir nehmen an, daß es zu jedem *Temperaturvektor* $\beta \in V_+$ einen eindeutigen KMS-Zustand gibt. Im Fall freier Theorien wie der, die hier behandelt werden soll, bedeutet diese Annahme keine wesentliche Einschränkung, da Uneindeutigkeiten als globale, äußere Einflüsse klassischer Felder interpretiert werden können, welche nach Umeichung keine Rolle mehr spielen, wenn wir Eichinvarianz der KMS-Zustände annehmen.

Die Eindeutigkeit bzgl. β zieht die Translationsinvarianz der KMS-Zustände nach sich. Sei ω_β ein KMS-Zustand zum Temperaturvektor β, dann gilt für den Poincaré-transformierten Zustand

$$\omega_\beta \circ \alpha_\lambda^{-1} = \omega_{\Lambda\beta}. \tag{2.1}$$

Man kann dies formal unter Zuhilfenahme der KMS-Bedingung sehen. Für alle A, B aus $\mathcal{A}$ ist

$$\begin{aligned}
\left(\omega_\beta \circ \alpha_\lambda^{-1}\right)(A\,B) &= \omega_\beta\left(\alpha_\lambda^{-1}(A)\alpha_\lambda^{-1}(B)\right) \\
&\overset{\text{KMS-Bed.}}{=} \omega_\beta\left(\alpha_\lambda^{-1}(B)\alpha_{\mathrm{i}\beta}\alpha_\lambda^{-1}(A)\right) \\
&= \omega_\beta\left(\alpha_\lambda^{-1}(B)\alpha_\lambda^{-1}\alpha_\lambda\alpha_{\mathrm{i}\beta}\alpha_\lambda^{-1}(A)\right) \\
&= \left(\omega_\beta \circ \alpha_\lambda^{-1}\right)\left(B\alpha_\lambda\alpha_{\mathrm{i}\beta}\alpha_\lambda^{-1}(A)\right) \\
&= \left(\omega_\beta \circ \alpha_\lambda^{-1}\right)\left(B\alpha_{\mathrm{i}\Lambda\beta}(A)\right),
\end{aligned}$$

denn

$$
\begin{aligned}
(\Lambda, a) \circ (\mathbf{1}, \mathrm{i}\beta) \circ \left(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a\right) &= (\mathbf{1}, a)\left(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a + \mathrm{i}\beta\right) \\
&= (\mathbf{1}, -a + \mathrm{i}\Lambda\beta + a) \\
&= (\mathbf{1}, \mathrm{i}\Lambda\beta)\,.
\end{aligned}
$$

Also erfüllt der Zustand die KMS-Bedingung zum Temperaturvektor $\Lambda\beta$. Wegen der Eindeutigkeit ist dies genau der zugehörige KMS-Zustand.
Neben den KMS-Zuständen, welche scharfe Temperatur haben, werden für unsere Belange auch noch Gemische solcher Zustände als Referenzzustände zugelassen (schließlich sind auch makroskopische Ensembles, bei denen die Temperatur nicht genau bestimmt ist, als Referenzsysteme von Interesse für uns). Für jede kompakte Teilmenge $B \in V_+$ definieren wir daher die Menge $\mathcal{C}_B$, welche die möglichen Gemische von Zuständen ω_β mit $\beta \in B$ enthält. Wir nehmen desweiteren an, daß die KMS-Zustände schwach stetig bzgl. β sind, also daß jede Funktion

$$\beta \mapsto \omega_\beta(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

stetig ist (dies sollte außer im Falle von Phasenübergängen erfüllt sein; diese sind jedoch aufgrund der Annahme von Eindeutigkeit ausgeschlossen). Die Gemische aus $\mathcal{C}_B$ können dann als

$$\omega_B(A) = \int \mathrm{d}\rho(\beta)\omega_\beta(A), \quad A \in \mathcal{A} \tag{2.2}$$

geschrieben werden, wobei ρ ein positives normiertes Maß mit Träger in B ist.

Die Menge aller solcher Gemische mit kompaktem Temperaturträger sei mit $\mathcal{C}$ bezeichnet und ergibt sich zu $\mathcal{C} := \bigcup_B \mathcal{C}_B$.

2.2 Messungen am Punkt

Da in dieser Arbeit thermale Eigenschaften von Zuständen an einem Raumzeitpunkt untersucht werden sollen, reichen die „verschmierten“ Felder $\phi(f)$ allein nicht mehr aus, da diese zu einer Messung im endlichen Raumzeitgebiet $\mathrm{supp}(f)$ korrespondieren. Es ist daher notwendig, Messungen an einem Punkt zu definieren. Dazu geht man von den verschmierten Feldern zu den unregularisierten Feldern $\phi(x)$ über, welche man durch den Übergang $f \to \delta_x$ erhält. Dieser Grenzwert ist nur noch im Sinne quadratischer Formen definiert, und es ist nicht zu erwarten, daß jeder Zustand über der Algebra $\mathcal{A}$ auch auf den unregularisierten Feldern ausgewertet werden kann. Für die (eindeutigen) KMS-Zustände ist dies jedoch möglich. Wegen (2.1) hängt für jeden KMS-Zustand ω_β und für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$ der Wert $\omega_\beta(\phi(f))$ nur vom Integral $\int f$ ab:

Lemma 2.1 *Sei $\varphi = \omega \circ \phi : \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ linear und stetig. φ sei invariant gegen Translationen, es gelte also*

$$\varphi(f_x) = \omega(\alpha_x(\phi(f))) = \omega(\phi(f)) = \varphi(f)$$

für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$*. Dann ist*

$$\varphi(f) = c \cdot \int dx\, f(x)$$

mit passendem $c \in \mathbb{C}$ *für alle* $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$*.*

Beweis: Sei $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$ so daß, $\int \mathrm{d}x\, \chi(x) = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \int \mathrm{d}x\, \chi(x)\varphi(f) \\ &\overset{\text{Trans.inv.}}{=} \int \mathrm{d}x\, \chi(x)\varphi(f_{-x}) \\ &= \varphi\left(\int \mathrm{d}x\, \chi(x) f(\cdot - x)\right) \\ &= \varphi(\chi * f) \\ &= \varphi(f * \chi) \\ &= \int \mathrm{d}x\, f(x)\varphi(\chi). \end{aligned}$$

Setzt man nun $\varphi(\chi) =: c$, so ist für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$

$$\varphi(f) = c \cdot \int \mathrm{d}x f(x).$$

□

Da mit den KMS-Zuständen auch deren Gemische translationsinvariant sind, kann man nach obigem Resultat die Referenzzustände auf die unregularisierten Felder fortsetzen indem man

$$\omega_B(\phi(x)) := \omega_B(\phi(\chi))$$

setzt, wobei $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$ mit $\int \chi = 1$. Der Ausdruck $\omega_B(\phi(x))$ hängt offenbar nicht von x ab.

2.3 Thermale Observable am Punkt

Der von den unregularisierten Feldern $\phi(x)$ aufgespannte lineare Raum wird wie in [1] mit $\mathcal{Q}_x$ bezeichnet. Unter Hinweis auf die Arbeit von Bostelmann (siehe [10]) wird dort gezeigt, daß dieser Raum in einem gewissen Sinne auch höhere Momente der Punktfelder enthält. Die Elemente von $\mathcal{Q}_x$ entsprechen Messungen am Punkt x. Nicht allen Elementen jedoch kann eine thermale Bedeutung zugeordnet werden; für unsere Belange ist der Raum zu groß. Die Idee in [1] ist, Messungen in einem beliebigen Zustand mit solchen in einem Referenzzustand zu vergleichen. Übereinstimmung zweier Zustände auf $\mathcal{Q}_x$ ist jedoch eine zu starke Forderung; z.B. ist mit $\phi(x)$ auch die Ableitung $\partial_x\phi(x)$ in $\mathcal{Q}_x$ enthalten. Wegen der Translationsinvarianz der Referenzzustände verschwinden jedoch die Erwartungswerte $\omega_B(\partial_x\phi(x))$ für alle B. Soll nun ein Zustand im Raumzeitgebiet $\mathcal{O}$ ebenfalls für $\partial_x \phi(x)$ und $x \in \mathcal{O}$ verschwinden, so müßte der Erwartungswert von $\phi(x)$ auf $\mathcal{O}$ konstant sein. Alle Erwartungswerte wären damit konstant auf $\mathcal{O}$, was viele interessante Fälle ausschlösse.

In [1] wird ein Teilraum von $\mathcal{Q}_x$ ausgewählt, dessen Elemente gerade zu Messungen thermaler Größen korrespondieren. Dieser Raum wird mit $\mathcal{T}_x$ bezeichnet, und es kann sogar gezeigt werden, daß $\mathcal{T}_x$ i.a. die Referenzzustände trennt, die Kenntnis aller Erwartungswerte $\omega_B(\phi(x))$ mit $\phi(x) \in \mathcal{T}_x$ also schon reicht, um den Zustand eindeutig zu bestimmen.

2.4 Makroobservable

Wie in [2] ausgeführt wird, enthalten die Punktfelder $\phi(x)$ dieselben Informationen über die thermischen Eigenschaften der Referenzzustände wie bestimmte makroskopische (zentrale) Observablen. Um dies zu sehen, betrachtet man eine Folge (f_n), $n \in \mathbb{N}$, von Testfunktionen mit kompaktem Träger, wobei

$$f_n(x) := n^{-m} f(n^{-1}x - x_n)$$

mit $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$, so daß $\int f = 1$ und (x_n) einer Folge von raumartigen Translationen, welche so schnell gegen unendlich gehen, daß der Träger von f_n für fast alle n im kausalen Komplement jeder gegebenen beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ liegt. Diese Folge von Testfunktionen definiert ihrerseits eine Folge $(\phi(f_n))$ in $\mathcal{A}$. Die Folgenglieder $\phi(f_n)$ vertauschen für fast alle n aufgrund der lokalen Kommutativität der Observablen mit jedem gegebenen $A \in \mathcal{A}$, die $\phi(f_n)$ bilden in $\mathcal{A}$ also eine zentrale Folge. Da $\int f_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und weil die Referenzzustände nur vom Integral über die Testfunktionen abhängen, existiert der Grenzwert $\Phi := \lim_{n\to\infty} \phi(f_n)$ in jedem Referenzzustand ω_B. Außerdem wird in [2] gezeigt, daß für alle $A \in \mathcal{A}$ und jedes ω_B

$$\omega_B(A^*\Phi A) := \lim_{n\to\infty} \omega_B(A^*\phi(f_n)A) = \int \mathrm{d}\rho(\beta)\omega_\beta(A^*A)\omega_\beta(\phi(x)).$$

Hiermit läßt sich zeigen, daß durch Φ in jeder GNS-Darstellung von $\mathcal{A}$, welche durch die ω_B gegeben ist (siehe [3]), eine translationsinvariante, dicht definierte und zentrale quadratische Form definiert wird.

Die stetige Funktion

$$\beta \mapsto \Phi(\beta) := \omega_\beta(\phi(x))$$

bestimmt die zentrale Zerlegung von Φ (siehe [4]) und wird als *thermale Funktion* von $\phi(x)$ bezeichnet. Sie ist unabhängig von x. Φ selbst wird als *Makroobservable* bezeichnet. Aufgrund der Gleichheit

$$\omega_B(\Phi) = \omega_B(\phi(x))$$

können den Auswertungen der Punktfelder in den Referenzzuständen also zentrale Größen zugeordnet werden.

2.5 Lokale Gleichgewichtszustände

Die grundlegende Idee von Buchholz, Ojima und Roos in [1] ist es, einem gegebenen Zustand gewisse thermische Eigenschaften zuzuordnen, wenn dessen Erwartungswerte auf einer Teilmenge von $\mathcal{T}_x$ mit denen eines Gleichgewichtszustandes übereinstimmen.

Sei $\mathcal{S}_x$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{T}_x$. Ein gegebener Zustand ω heißt $\mathcal{S}_x$-thermal, wenn es einen Zustand $\omega_B \in \mathcal{C}$ gibt, so daß

$$\omega(\phi(x)) = \omega_B(\phi(x)), \qquad \text{für alle} \quad \phi(x) \in \mathcal{S}_x.$$

ω und ω_B können also nicht durch Messungen in $\mathcal{S}_x$ voneinander unterschieden werden. Man kann daher ω am Punkt x die thermalen Eigenschaften von ω_B zuordnen, welche durch die zu $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$ gehörigen Makroobservablen Φ beschrieben werden. Also kann man umgekehrt einer Makroobservable Φ mit $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$ einen Erwartungswert im lokalen Gleichgewichtszustand ω am Punkt x zuordnen:

$$\omega(\Phi)(x) := \omega(\phi(x)) = \omega_B(\phi(x)) = \omega_B(\Phi).$$

Wegen

$$\omega(\Phi)(x) = \omega_B(\Phi) = \int \mathrm{d}\rho(\beta)\Phi(\beta)$$

kann $\omega(\cdot)(x)$ als lineares Funktional über den Makroobservablen aufgefaßt werden. Die Definition lokaler Thermalität läßt sich leicht auf Zustände ausdehnen, welche auf (offenen) Gebieten $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ im lokalen Gleichgewicht sind. Ist für festes $x_0 \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{S}_{x_0}$ gegeben, so wird durch $\alpha_{(x-x_0)}\mathcal{S}_{x_0} =: \mathcal{S}_x$ jedes andere $\mathcal{S}_x$ festgelegt. Ein Zustand ω heißt nun $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$-thermal, wenn es für jedes $x \in \mathcal{O}$ einen Zustand $\omega_{B_x} \in \mathcal{C}$ gibt, so daß $\omega(\phi(x)) = \omega_{B_x}(\phi(x_0)) = \omega_{B_x}(\Phi)$ für alle $\phi(x_0) \in \mathcal{S}_{x_0}$. Die Funktion

$$x \mapsto \omega(\Phi)(x) = \omega(\phi(x)), \quad \phi(x_0) \in \mathcal{S}_{x_0}$$

beschreibt dann das raumzeitliche Verhalten des „Lifts“ $\omega(\cdot)(x)$ für die Makroobservable Φ im Gebiet $\mathcal{O}$.

Wie in [2] werden auch in dieser Arbeit nur solche lokalen Gleichgewichtszustände betrachtet, für die $x \mapsto \omega(\phi(x)) = \omega_{B_x}(\phi(x))$ schwach integrabel ist und für die es zu jeder kompakten Teilmenge $U \subset \mathcal{O}$ eine kompakte Teilmenge $B \in V_+$ gibt, so daß $B_x \subset B$ für alle $x \in U$. Unter diesen zusätzlichen Annahmen sind die Funktionen $x \mapsto \omega(\Phi)(x)$ differenzierbar im Sinne von Distributionen. Desweiteren erfüllen sie

$$\left| \int \mathrm{d}x\, f(x)\omega(\Phi)(x) \right| \leq \|f\|_1 \, \|\Phi\|_B \tag{2.3}$$

für alle f mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}$, wobei $\|\cdot\|_1$ die L^1-Norm bezeichnet und $\|\Phi\|_B$ für alle Makroobservablen Φ gegeben ist durch

$$\|\Phi\|_B := \sup_{\beta \in B} |\Phi(\beta)|. \tag{2.4}$$

Durch $\{\|\cdot\|_B \,|B \subset V_+\}$ wird eine Familie von Halbnormen auf dem Raum der Makroobservablen definiert.

Es soll noch bemerkt werden, daß die „Größe“ (also die Dimension) von $\mathcal{S}_x$ offenbar angibt, wie nah ein $\mathcal{S}_x$-thermaler Zustand dem Gleichgewicht ist. Je größer $\mathcal{S}_x$, desto mehr Erwartungswerte eines $\mathcal{S}_x$-thermalen Zustandes stimmen mit denen eines Referenzzustandes überein und desto näher ist der $\mathcal{S}_x$-thermale Zustand daher dem Gleichgewicht. Diesem Gedanken folgend, sollte es möglich sein, lokale Gleichgewichtszustände mit größerer und kleinerer Nähe zum Gleichgewicht zu unterscheiden, ebenso jedoch einem lokalen Gleichgewichtszustand Regionen größerer und kleinerer Nähe zum Gleichgewicht zuzuordnen.

Außerdem scheint es zunächst nicht zwingend, daß $\mathcal{S}_x$ ein Unterraum von $\mathcal{T}_x$ sein muß. Dem obigen Konzept folgend, sollte jede Untermenge von $\mathcal{T}_x$ eine Charakterisierung von lokalem Gleichgewicht ermöglichen. Es zeigt sich aber, daß wichtigen thermalen Größen nicht direkt eine thermale Observable zugeordnet werden kann, sie jedoch durch Folgen thermaler Observabler approximiert werden können, wenn $\mathcal{S}_x$ groß genug ist.

3 Das Modell

Die konforme Quantenfeldtheorie ist ein Spezialfall relativistischer Quantenfeldtheorien mit einer größeren Symmetriegruppe. Die konforme Gruppe ist die Gruppe der winkeltreuen Transformationen; sie enthält neben den Poincaré-Transformationen $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ auch die Gruppe der *Dilatationen* $x \mapsto \lambda x$ (also die globalen Skalierungen), wird aber auch davon noch nicht voll ausgeschöpft.

In $1+1$ Raumzeitdimensionen zeigen einige Quantenfelder skaleninvarianter Theorien eine besondere Struktur, die als *Chiralität* bezeichnet wird, etwa erhaltene Ströme oder der erhaltene, symmetrische Energie-Impuls-Tensor zerfallen additiv in zwei vertauschende Quantenfelder, die jeweils nur von einer der *Lichtkegelkoordinaten* $x_+ = x^0 + x^1 \equiv t + x$ bzw. $x_- = x^0 - x^1 \equiv t - x$ abhängen. Die jeweiligen Teile der Quantenfelder bezeichnet man als *Rechts-* bzw. *Linksläufer.*

Im folgenden Teil sollen kurz die chiral zerfallenden Quantenfelder Strom und Energie-Impuls-Tensor eingeführt werden, anschließend werden die auftretenden Symmetrien diskutiert.

3.1 $U(1)$-Strom und Energie-Impuls-Tensor

In konform invarianten Theorien wird neben der Poincaré-Invarianz auch die Skaleninvarianz berücksichtigt. Die Gruppe der Automorphismen, welche die Symmetrietransformationen implementieren, wird um die Skalentransformationen erweitert. Ist λ eine Skalentransformation in einer m-dimensionalen Theorie und α_λ der zugehörige Automorphismus, so wirkt α_λ gemäß

$$\alpha_\lambda \phi(f) := \phi(f_\lambda)$$

mit $f_\lambda(x) := \lambda^{d-m} f(\lambda^{-1}x)$ und $\lambda > 0$. Die Größe d heißt *Skalendimension* von ϕ.

Sei $j = (j^0, j^1)$ ein erhaltener Strom, also $\partial_\mu j^\mu = 0$, in einer skaleninvarianten Theorie in $1+1$ Dimensionen. Man führt den zu j dualen Strom $^*j$ ein, dessen Komponenten durch

$$^*j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu$$

definiert sind, wobei $\epsilon^{\mu\nu}$ der vollständig antisymmetrische Tensor mit $\epsilon^{01} = 1$ ist. Falls es einen Ladungsoperator $Q := \int j^0 \mathrm{d}x^1$ gibt, der eine Symmetrie erzeugt, die mit den Skalentransformationen vertauscht, so ist auch der duale Strom erhalten (zum Beweis hierfür siehe [6]). Ein Strom, der zusammen mit seinem dualen erhalten ist, zerfällt chiral (siehe [5]).

Lemma 3.1 *Ein Strom j einer $1+1$-dimensionalen Theorie sei zusammen mit seinem dualen Strom $^*j$ erhalten. Dann zerfällt j gemäß*

$$j = (j^0, j^1) = (j_+ + j_-, j_+ - j_-),$$

wobei

$$j_+(x^0, x^1) = j_+(x^0 - x^1) \qquad \textit{und} \qquad j_-(x^0, x^1) = j_-(x^0 + x^1)$$

chirale Ströme sind.

Beweis: Es gelten

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_\mu^* j^\mu = -\partial_0 j^1 - \partial_1 j^0 = 0.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$(\partial_0 - \partial_1)(j^0 - j^1) = 0,$$

durch Subtraktion

$$(\partial_0 + \partial_1)(j^0 + j^1) = 0.$$

Damit hängen $\frac{1}{2}(j^0 + j^1) =: j_+$ nur von $x_- := x^0 - x^1$ und $\frac{1}{2}(j^0 - j^1) =: j_-$ nur von $x_+ := x^0 + x^1$ ab.

□

Die links- bzw. rechtslaufenden chiralen Komponenten des Stromes vertauschen miteinander

$$[j_+, j_-] = 0,$$

und erfüllen jeweils die Kommutatorrelation

$$[j(x), j(y)] = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\delta'(x-y) \tag{3.1}$$

im Sinne von Distributionen (siehe [5] oder [6]). Hierbei steht $j(x)$ jeweils für $j_\mp(x_\pm)$. Der chirale Strom j heißt $U(1)$-Strom, da der oben erwähnte Operator $Q = \int \mathrm{d}x j(x)$ der Erzeuger der globalen $U(1)$-Transformation $\psi \mapsto e^{\mathrm{i}\alpha}\psi$ ist.

Der $U(1)$-Strom j ist das chirale freie Bose-Feld. Er hat Skalendimension $d = 1$ (siehe [6]).

In einer skaleninvarianten Theorie in $1+1$ Dimensionen ist auch der Energie-Impuls-Tensor chiralem Zerfall unterworfen. Dies wurde 1976 von Lüscher und Mack bewiesen. Der Energie-Impuls-Tensor ist symmetrisch und erhalten, außerdem sind seine Komponenten die Dichten des Generators der Translationen. Nun sei jedes Tensorfeld, welches diese Eigenschaften hat, als Energie-Impuls-Tensor bezeichnet.

Satz 3.2 (Lüscher-Mack-Theorem) *Sei $T^{\mu\nu}$ ein symmetrisches, erhaltenes Tensorfeld in einer skaleninvarianten Theorie in $1+1$ Dimensionen, so daß $P^\mu := \int dx^1\, T^{\mu 0}$ der Generator der Translationen ist. Dann gilt:*

1. *Die Skalendimension ist $d = 2$.*
2. *$T^{\mu\nu}$ ist spurfrei.*
3. *$(T^{00} + T^{01})(x^0, x^1) = 2T_+(x^0 - x^1)$ und $(T^{00} - T^{01})(x^0, x^1) = 2T_-(x^0 + x^1)$ sind chirale Felder der Skalendimension $d_\pm = 2$.*

4. *Die chiralen Felder*

$$T(\cdot) = \begin{cases} T_+(x^0 - x^1) \\ T_-(x^0 + x^1) \end{cases}$$

erfüllen die Vertauschungsrelationen $[T_+, T_-] = 0$ *und*

$$[T(x), T(y)] = i\big(-T'(y)\delta(x-y) + 2T(y)\delta'(x-y) - \frac{c}{24\pi}\delta'''(x-y)\big)$$

mit einer Konstante $c > 0$ *(im Sinne von Distributionen).*

Einen Beweis des Theorems findet man bei [5] oder [6]. Die Konstante $c > 0$ wird *zentrale Ladung* genannt. Sie hängt mit der Amplitude der Zweipunktfunktion zusammen.

In der Form

$$\mathrm{i}[T(f), T(g)] = T\left(f'g - g'f\right) - \frac{c}{12\pi}\int \left(f'''g - g'''f\right)$$

können die Lüscher-Mack-Vertauschungsrelationen als zentrale Erweiterung der Lie-Algebra der Diffeomorphismen (Koordinatentransformationen) gesehen werden.

Ein Quantenfeld ϕ welches mit dem chiralen Energie-Impuls-Tensor im Sinne von Distributionen gemäß

$$-\mathrm{i}[T(x), \phi(x)] = -\phi'(x)\delta(x-y) + h\phi(y)\delta'(x-y)$$

($h \in \mathbb{R}$) vertauscht, heißt *primäres* Quantenfeld. h ist hierbei die Skalendimension, denn es gilt für eine Dilatation λ

$$\alpha_\lambda(\phi(f)) = \lambda^h \phi(f_\lambda).$$

Mithilfe solcher Felder lassen sich Darstellungsräume des Energie-Impuls-Tensors konstruieren, welche mit einer von den Parametern h und c abhängigen Sesquilinearform $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ ausgestattet ist. Friedan, Qiu und Shenker haben 1986 untersucht, für welche Parameterbereiche diese Sesquilinearform positiv (semi-)definit ist, also der Darstellungsraum ein Hilbert-Raum wird (siehe [8]). Für $c \geq 1$ und $h \geq 0$ ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ positiv definit (außer für $c = 1$ und $h = k^2/4$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, dort ist es positiv semidefinit, und für $c > 0$ und $h = 0$, dort ist es ebenfalls positiv semidefinit). Für $0 \leq c < 1$ ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ indefinit, außer wenn

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2,$$

dann ist es semidefinit („diskrete Serie"). Falls $c < 0$ oder $h < 0$, ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ indefinit.

Da der chirale $U(1)$-Strom ein bosonisches freies Feld ist, kann man sein Quadrat durch bosonische Normalordnung definieren. Es zeigt sich, daß der Sugawara-Tensor

$$T(x) := \frac{1}{2} : j^2 : (x) \tag{3.2}$$

alle Eigenschaften eines Energie-Impuls-Tensors mit zentraler Ladung $c = 1$ hat (siehe [5]). j vertauscht mit T wie ein primäres Feld mit Skalendimension $h = 1$ (siehe [6]). Also ist es in diesem Fall möglich, eine Darstellung von T zu finden, welche die Spektrumsbedingung respektiert.

3.2 Die Gruppe der konformen Transformationen

Die Gruppe der *konformen Transformationen* in m Dimensionen umfaßt definitionsgemäß alle winkeltreuen Koordinatentransformationen:

$$x^\mu \mapsto y^\mu(x)\,, \quad \text{so daß} \quad \mathrm{d}y_\mu \mathrm{d}y^\mu = \omega(x)^2 \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu.$$

Diese Gruppe enthält sowohl die Lorentz-Transformationen mit $\omega(x) = 1$ als auch die Skalentransformationen mit $\omega(x) = \lambda$. Außerdem sind in ihr die (singulären) speziellen konformen Transformationen enthalten:

$$y^\mu(x) = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2(bx) + b^2 x^2}$$

mit $\omega(x) = (1 - 2(bx) + b^2x^2)^{-1}$. Die speziellen Transformationen können endliche Punkte auf Unendlich und raumartig getrennte Punktpaare auf zeitartig getrennte abbilden. Dies würde bedeuten, daß die Kausalität von den speziellen Transformationen nicht respektiert wird, man nennt dies auch das „Kausalitätsparadoxon“. Es gibt jedoch eine Interpretation des konformen Transformationsgesetzes, in der das Kausalitätsparadoxon nicht auftritt. Man geht zur euklidischen Theorie über, die naturgemäß keine Kausalität und daher auch kein solches Paradoxon kennt. Dann klärt man die Minkowski-Situation, indem man von der euklidischen Theorie kommend die analytische Fortsetzung studiert. Hierbei stellt man fest, daß die Minkowski-Raumzeit $\mathbb{R}^m$ periodisch im Zylinder $S^{m-1} \times \mathbb{R}$ eingebettet ist. Spezielle Transformationen können also zu einem „Wechsel des Blattes“ führen. Lüscher und Mack haben 1975 gezeigt, daß die Überlagerung $\widetilde{M} = S^{m-1} \times \mathbb{R}$ eine globale kausale Struktur hat und die universelle Überlagerungsgruppe $\widetilde{SO(m,2)}$ auf $\widetilde{M}$ unter Beachtung der kausalen Struktur operiert (siehe [7]).

In $1+1$ Dimensionen ist die Gruppe der winkeltreuen Abbildungen wesentlich größer als $SO(2,2)$, denn es gilt

$$\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}(x^0 + x^1)\mathrm{d}(x^0 - x^1),$$

so daß jeder Diffeomorphismus $x^0 + x^1 = u \mapsto u'(u)$ und $x^0 - x^1 = v \mapsto v'(v)$ winkeltreu ist. Damit erhalten wir für jeden Lichtkegel $x^0 \pm x^1$ die Diffeomorphismengruppe von $\mathbb{R}$. Es kann gezeigt werden, daß die Diffeomorphismengruppe nicht mit einem invarianten Vektor dargestellt werden kann (siehe [6]). Die ungebrochene Symmetriegruppe (im Vakuum-Sektor von chiralen Feldern) ist nur die Möbius-Gruppe $SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}^2 \cong SU(1,1)/\mathbb{Z}^2 \subset \mathrm{Diff}(S^1)$. Diese ergibt sich als Einschränkung von $SO(2,2) \cong [SU(1,1) \times SU(1,1)]/\mathbb{Z}^2$.

4 Thermische Referenzzustände

Die thermischen Referenzzustände sind hier, wie eingangs erwähnt, die KMS-Zustände des Modells oder Gemische von solchen. Daher ist es nötig, die Eigenschaften dieser Zustände genauer zu untersuchen. Insbesondere lassen sich die Zweipunktfunktionen der KMS-Zustände der $1+1$-dimensionalen Theorien als Linearkombinationen von solchen der chiralen Subtheorien schreiben.

4.1 KMS-Zustände der Stromalgebra

Wie im Anhang in C.1 gezeigt wird, ist die Zweipunktfunktion eines KMS-Zustandes zum Temperaturvektor β in $1+1$ Dimensionen gegeben durch

$$\omega_\beta(j^\mu(f)j^\nu(g)) = \int \mathrm{d}p\, p\,\Big(\frac{\widetilde{f}(p,p)\widetilde{g}(-p,-p)}{1-e^{-|\beta|(e_0-e_1)p}} + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{g}(-p,p)}{1-e^{-|\beta|(e_0+e_1)p}}\Big). \quad (4.1)$$

Da wir Eichinvarianz der KMS-Zustände voraussetzen, verschwinden wegen

$$\begin{aligned}\omega_\beta(j^{\mu_1}(f_1)\cdots j^{\mu_{2n+1}}(f^{2n+1})) &= (\omega_\beta\circ\gamma)(j^{\mu_1}(f_1)\cdots j^{\mu_{2n+1}}(f_{2n+1}))\\ &= \omega_\beta(\gamma(j^{\mu_1}(f_1))\cdots\gamma(j^{\mu_{2n+1}}(f_{2n+1})))\\ &= (-1)^{2n+1}\,\omega_\beta(j^{\mu_1}(f_1)\cdots j^{\mu_{2n+1}}(f_{2n+1}))\end{aligned}$$

die $2n+1$-Punktfunktionen für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und alle $\beta\in V_+$. Damit zeigen wir nun folgendes

Lemma 4.1 *Sei ω_β ein eichinvarianter KMS-Zustand zum Temperaturvektor β über der Stromalgebra in $1+1$ Dimensionen. Dann ist ω_β durch die Zweipunktfunktion bestimmt.*

Beweis: Für jedes $A\in\mathcal{A}$ kann $\omega_\beta(A)$ als Linearkombination von n-Punktfunktionen dargestellt werden, welche aufgrund der Eichinvarianz jedoch nur gerade n-Punktfunktionen enthält. Daher reicht es zu zeigen, daß die $2n$-Punktfunktion durch die Zweipunktfunktion bestimmt ist.
Es gilt (wobei wir die Testfunktionen nicht mit anschreiben)

$$\begin{aligned}&\omega_\beta\big(j^{\mu_1}j^{\mu_2}\cdots j^{\mu_{2n-1}}(\alpha_{te}j^{\mu_{2n}})\big)\\ &\quad= \omega_\beta\big((\alpha_{te}j^{\mu_{2n}})j^{\mu_1}\cdots j^{\mu_{2n-1}}\big)\\ &\qquad+\sum_{m=1}^{2n-1}\omega_\beta\big(\big[j^{\mu_m},(\alpha_{te}j^{\mu_{2n}})\big]\big)\omega_\beta\big(j^{\mu_1}\cdots j^{\mu_{m-1}}j^{\mu_{m+1}}\cdots j^{\mu_{2n-1}}\big),\end{aligned}$$

wie man durch Vertauschen von $\alpha_{te}j^{\mu_m}$ mit allen anderen Strömen sieht (hierbei ist zu beachten, daß die auftretenden Kommutatoren von Strömen c-Zahlen sind). Wir definieren

$$F(t) := \omega_\beta\big(j^{\mu_1}\cdots j^{\mu_{2n-1}}(\alpha_{te}j^{\mu_{2n}})\big)$$

sowie

$$f_m(t) := \omega_\beta\big(j^{\mu_m}(\alpha_{te} j^{\mu_{2n}})\big).$$

Nach Anwendung der Fourier-transformierten Version der KMS-Bedingung (siehe Abschnitt C.1) ergibt sich

$$\left(1 - e^{-\beta(\cdot)}\right) \widetilde{F} = \left(1 - e^{-\beta(\cdot)}\right) \sum_{m=1}^{2n-1} \omega_\beta\big(j^{\mu_1} \cdots j^{\mu_{m-1}} j^{\mu_{m+1}} \cdots j^{\mu_{2n-1}}\big) \cdot \widetilde{f_m}$$

im Sinne von Distributionen über $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Also ist

$$F(\widetilde{u}) = \sum_{m=1}^{2n-1} \omega_\beta\big(j^{\mu_1} \cdots j^{\mu_{m-1}} j^{\mu_{m+1}} \cdots j^{\mu_{2n-1}}\big) \cdot f_m(\widetilde{u})$$

für alle $u \in \{u \in \mathscr{D} | u = (1 - e^{-\beta(\cdot)})h,\ h \in \mathscr{D}\}$. Die auftretenden Distributionen sind bis auf einen additiven δ-Term regulär (die Form der Distributionen auf der rechten Seite kann Abschnitt C.1 entnommen werden). Vernachlässigen wir diesen, so können wir F und f als Integralkerne auffassen und es gilt

$$\omega_\beta\big(j^{\mu_1} \cdots j^{\mu_{2n-1}}(\alpha_{te} j^{\mu_{2n}})\big) = \sum_{m=1}^{2n-1} \omega_\beta\big(j^{\mu_1} \cdots j^{\mu_{m-1}} j^{\mu_{m+1}} \cdots j^{\mu_{2n-1}}\big) \omega_\beta\big(j^{\mu_m}(\alpha_{te} j^{\mu_{2n}})\big)$$

als Gleichung zwischen Funktionen von t.

Man sieht, daß eine $2n$-Punktfunktion als Ausdruck geschrieben werden kann, welcher nur $(2n-2)$-Punktfunktionen und Zweipunktfunktionen enthält. Rekursiv läßt sich damit jede $2n$-Punktfunktion aus Zweipunktfunktionen zusammensetzen.

□

Ein eichinvarianter Zustand, der allein schon durch die Zweipunktfunktion definiert ist, ist *quasifrei* (siehe [11]). In dieser Arbeit werden wir, wann immer von einem quasifreien Zustand die Rede ist, damit einen solchen schon durch die Zweipunktfunktion bestimmten Zustand meinen.

Für die Zweipunktfunktionen (4.1) gilt

$$\omega_\beta(j^\mu(f) j^\mu(f)^*) = \int \mathrm{d}p\, p \left(\frac{|\widetilde{f}(p,p)|^2}{1 - e^{-|\beta|(e_0 - e_1)p}} + \frac{|\widetilde{f}(p,-p)|^2}{1 - e^{-|\beta|(e_0 + e_1)p}} \right),$$

denn $j^\mu(f)^* = j^\mu(\bar{f})$, aufgrund der Hermitizität des Stromes, und $\widetilde{\bar{f}}(\pm p, \pm p) = \overline{\widetilde{f}(\mp p, \mp p)}$. Da e zeitartig ist und daher $|e_0| > |e_1|$ gilt, ist

$$\frac{p}{(1 - e^{-|\beta|(e_0 - e_1)p})} > 0$$

für alle p. Also ist

$$\omega_\beta(j^\mu(f) j^\mu(f)^*) > 0$$

für alle f und μ und die Zweipunktfunktion daher positiv. Daraus folgt auch schon die Positivität der KMS-Zustände, da diese quasifrei sind (siehe [11]).

4.2 Chiralität der KMS-Zustände

Die Zweipunktfunktionen (4.1) zerfallen offenbar in zwei Teile die jeweils nur von $\beta_+ := |\beta|(e_0 + e_1)$ bzw. $\beta_- := |\beta|(e_0 - e_1)$ abhängen. Sie zerfallen also chiral. Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir die KMS-Zustände der $U(1)$-Stromalgebra. Diese sind ebenfalls quasifrei und werden charakterisiert durch die Zweipunktfunktion

$$\omega_\beta(j(f)j(g)) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p\, p\, \frac{\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta p}} \tag{4.2}$$

(siehe Abschnitt C.2). Hierbei ist β eine positive Zahl und j ein chiraler Strom. Wir notieren mit $\omega_\beta^{(2)}$ und $\omega_\beta^{(1)}$ KMS-Zustände der zweidimensionalen bzw. eindimensionalen Theorie. Dann ist offenbar

$$\omega_\beta^{(2)}(j^\mu(f)j^\nu(g)) = 2\pi\omega_{\beta_-}^{(1)}(j(f')j(g')) + 2\pi(-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\omega_{\beta_+}^{(1)}(j(f'')j(g'')), \tag{4.3}$$

wobei $\widetilde{f'}(p) = \widetilde{f}(p,p)$ und $\widetilde{g'}(p) = \widetilde{g}(p,p)$ sowie $\widetilde{f''}(p) = \widetilde{f}(p,-p)$ und $\widetilde{g''}(p) = \widetilde{g}(p,-p)$. Daß es Testfunktionen f', f'', g', g'' mit diesen Eigenschaften gibt, zeigt das folgende

Lemma 4.2 *Für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ gibt es $f', f'' \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß $\widetilde{f'}(p) = \widetilde{f}(p,p)$ bzw. $\widetilde{f''}(p) = \widetilde{f}(p,-p)$ gelten.*

Beweis: Setze

$$f'(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}y\, f(y, y-x)$$

und

$$f''(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}y\, f(y, x-y).$$

Wir zeigen die geforderten Eigenschaften für f', der Beweis für f'' verläuft dann völlig analog.
Wenn $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so daß $\mathrm{supp}(f) \subset [a,b] \times [c,d]$, und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}y\, \chi_{[a,b]}(y)\, \chi_{[c,d]}(y-x) f(y, y-x).$$

Dann jedoch ist offenbar $f'(x) = 0$, wenn $x > b - c$ oder $x < a - d$. Also ist $\mathrm{supp}(f') \subset [a-d, b-c]$. Desweiteren ist $f' \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\partial_x^n f'(x) = \int \mathrm{d}y\, (-1)^n\, (\partial_2^n f)\,(y, y-x),$$

da $|(\partial_2^n f)(y, y-x)| \leq |\sup_{u,v}(\partial_2^n f)(u,v)|\chi_{[a,b]}(y)$ für alle x, und dieser Ausdruck weiterhin integrabel ist. Also ist $f' \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Insbesondere existiert damit die Fourier-Transformierte von f'. Diese ergibt sich zu

$$\widetilde{f'}(p) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(y, y-x) e^{-\mathrm{i}px} = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}v\, f(u,v) e^{-\mathrm{i}p(u-v)} = \widetilde{f}(p,p),$$

so daß f' alle gewünschten Eigenschaften hat.

□

Es zeigt sich, daß die links- bzw. rechtslaufenden Ströme j_+ und j_- in den KMS-Zuständen unkorreliert sind.

Lemma 4.3 *Sei ω ein Zustand über der Stromalgebra in $1+1$ Dimensionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\omega\left(j_+(\cdot)j_-(\cdot\cdot)\right) = 0$.
2. $\omega\left(j^0(\cdot)j^0(\cdot\cdot)\right) = \omega\left(j^1(\cdot)j^1(\cdot\cdot)\right)$ *und* $\omega\left(j^0(\cdot)j^1(\cdot\cdot)\right) = \omega\left(j^1(\cdot)j^0(\cdot\cdot)\right)$.

Beweis: Wir zeigen zuerst (1.) $\Rightarrow$ (2.). Da $\omega(j_+(f)j_-(g)) = 0$ für alle f, g ist wegen $[j_+(f), j_-(g)] = 0$ für alle f, g auch $\omega(j_-(f), j_+(g)) = 0$ (durch Vertauschung der Bedeutung von f und g). Damit ist

$$0 = \omega(j_+(\cdot)j_-(\cdot\cdot)) = \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\omega\left(j^0(\cdot)j^0(\cdot\cdot)\right) - \omega\left(j^1(\cdot)j^1(\cdot\cdot)\right)}_{A(\cdot,\cdot\cdot)}$$

$$- \underbrace{\left(\omega\left(j^0(\cdot)j^1(\cdot\cdot)\right) - \omega\left(j^1(\cdot)j^0(\cdot\cdot)\right)\right)}_{B(\cdot,\cdot\cdot)}\Big] = \frac{1}{4}(A-B)(\cdot,\cdot\cdot).$$

Außerdem gilt

$$0 = \omega(j_-(\cdot)j_+(\cdot\cdot)) = \frac{1}{4}\Big[\omega\left(j^0(\cdot)j^0(\cdot)\right) - \omega\left(j^1(\cdot)j^1(\cdot)\right)$$

$$+ \omega\left(j^0(\cdot)j^1(\cdot\cdot)\right) - \omega\left(j^1(\cdot)j^0(\cdot\cdot)\right)\Big] = \frac{1}{4}(A+B)(\cdot,\cdot\cdot).$$

Also ist $A = 0$ und $B = 0$. Damit folgt (2.).
(2.) $\Rightarrow$ (1.) ergibt sich direkt durch Ausrechnen von

$$\omega(j_+(f)j_-(g)) = \frac{1}{4}\Big[\omega\left(j^0(f)j^0(g)\right) - \omega\left(j^0(f)j^1(g)\right)$$

$$+\omega\left(j^1(f)j^0(g)\right) - \omega\left(j^1(f)j^1(g)\right)\Big] = 0$$

für alle f, g.

□

Da die Zweipunktfunktionen (4.1) die Bedingung (2.) in Lemma 4.3 erfüllen, sind links- und rechstlaufende Ströme in den (quasifreien) KMS-Zuständen unkorreliert.

Mit Gleichung (4.3) zeigt sich außerdem

$$\begin{aligned}
\omega_\beta^{(2)}(j_+(f)j_+(g)) &= \frac{1}{4}\Big[\omega_\beta^{(2)}\left(j^0(f)j^0(g)\right) + \omega_\beta^{(2)}\left(j^0(f)j^1(g)\right) \\
&\quad +\omega_\beta^{(2)}\left(j^1(f)j^0(g)\right) + \omega_\beta^{(2)}\left(j^1(f)j^1(g)\right)\Big] \\
&= 2\pi\,\omega_{\beta_-}^{(1)}(j(f')j(g')).
\end{aligned}$$

Analog

$$\omega_\beta^{(2)}(j_-(f)j_-(g)) = 2\pi\,\omega_{\beta_+}^{(1)}(j(f'')j(g'')).$$

4.3 Vakuumzustand

Der Vakuumzustand der ein- bzw. zweidimensionalen Stromalgebren läßt sich durch den Übergang $|\beta| \to \infty$ in (4.2) bzw. (4.1) bestimmen. Im eindimensionalen Fall setzen wir für jedes f und g

$$\begin{aligned}
\omega_\infty^{(1)}(j(f)j(g)) &:= \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p\, p\,\frac{\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(-p)}{1-e^{-\beta p}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p\,\theta(p)\,p\,\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(-p), \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

wobei der Grenzübergang ins Integral gezogen werden kann, da für alle $\beta > \beta_0 > 0$ (mit festem β_0) und alle p

$$\frac{p}{1-e^{-\beta p}} < \frac{p}{1-e^{-\beta_0 p}}$$

gilt.
Analog ergibt sich im zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned}
\omega_\infty^{(2)}\left(j^\mu(f)j^\nu(g)\right) &:= \lim_{|\beta|\to\infty} \omega_\beta^{(2)}(j^\mu(f)j^\nu(g)) \qquad (4.5) \\
&= \int \mathrm{d}p\,\theta(p)\,p\,\left(\widetilde{f}(p,p)\widetilde{g}(-p,-p) + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{g}(-p,p)\right).
\end{aligned}$$

4.4 Stetigkeit der KMS-Zustände

Die KMS-Zustände ω_β sind stetig in β. Wir zeigen zunächst den eindimensionalen Fall. Sei (β_n) eine gegen $\beta > 0$ konvergente Folge positiver Zahlen. Dann gibt es eine Zahl $\beta_0 > 0$ mit $\beta_0 \leq \beta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie in obigem Abschnitt gilt damit $p(1-e^{-\beta_n p})^{-1} \leq p(1-e^{-\beta_0 p})^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle p. Also können Integration und Grenzprozeß vertauscht werden, und es folgt (wegen der Stetigkeit des Integranden für $\beta > 0$)

$$\lim_n \omega_{\beta_n}^{(1)}(j(f)j(g)) = \omega_\beta^{(1)}(j(f)j(g)).$$

Analog wird Stetigkeit der KMS-Zustände im zweidimensionalen Fall gezeigt.

4.5 Gemische

Wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, werden nicht nur reine KMS-Zustände sondern auch Gemische von ihnen als Referenzzustände zugelassen. Diese werden für jedes B mit ω_B bezeichnet und durch

$$\omega_B(A) = \int \mathrm{d}\rho(\beta)\omega_\beta(A)\,, \qquad A \in \mathcal{A}$$

definiert. ρ ist ein positives normiertes Maß mit Träger in B, wobei B eine kompakte Teilmenge von V_+ ist, wenn $\mathcal{A}$ die $1+1$-dimensionale Stromalgebra bezeichnet, und eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$, wenn $\mathcal{A}$ die $U(1)$-Algebra ist.

5 Thermale Observable und thermale Funktionen

5.1 Thermale Observable

Bei der Definition des Raumes der lokalen thermalen Observablen gehen wir vor wie in [1], und betrachten den linearen Raum, welcher durch die Wick-Quadrate der Ströme, deren balancierte Ableitungen und den Einheitsoperator erzeugt wird.

Definition 5.1 *Der Raum der lokalen thermalen Observablen am Punkt x ist gegeben durch*

$$\mathcal{S}_x := \text{span}\left\{\mathbf{1}, \eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x) | \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m), m \in \mathbb{N}, \mu_j = 0, 1\right\} \tag{5.1}$$

wobei

$$\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x) := \lim_{\substack{\zeta \to 0 \\ \zeta^2 < 0}} \partial_{\zeta_{\boldsymbol{\mu}}} \Big(j^\kappa(x+\zeta) j^\lambda(x-\zeta) - \omega_\infty(j^\kappa(x+\zeta) j^\lambda(x-\zeta))\mathbf{1}\Big) \tag{5.2}$$

die balancierten Ableitungen bezeichnet.

Auf dem Raum $\mathcal{S}_x$ ist a priori keine Topologie gegeben, es kann jedoch unter Zuhilfenahme der KMS-Zustände eine definiert werden. Die Auswertungen der lokalen thermalen Observablen in den KMS-Zuständen werden als thermale Funktionen bezeichnet, und mit ihnen kann eine Topologie auf $\mathcal{S}_x$ definiert werden. Wir werden dies in Abschnitt 5.3 tun.

5.1.1 Der Energie-Impuls-Tensor

Unter den lokalen thermalen Observablen ist auch der Energie-Impuls-Tensor. Seine chiralen Komponenten sind bestimmt durch die Sugawara-Formel

$$T(x) = \frac{1}{2} : j^2 : (x)$$

(siehe (3.2)). Die Komponenten des zweidimensionalen Energie-Impuls-Tensors sind

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= T_+(x_-) + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} T_-(x_+) \\ &= \frac{1}{2} : j_+^2 + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} j_-^2 : (x) \\ &= \frac{1}{8} : \big((j^0)^2 + j^0 j^1 + j^1 j^0 + (j^1)^2\big) \\ &\quad +(-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} \big(((j^0)^2 - j^0 j^1 - j^1 j^0 + (j^1)^2\big) : (x) \\ &= \frac{1}{4} : j^\mu j^\nu + j^{\bar\mu} j^{\bar\nu} : (x), \end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei $\delta_{\mu\bar\mu} = \delta_{\nu\bar\nu} = 0$. Der Energie-Impuls-Tensor ist wie erwartet spurfrei ($T^\mu_\mu = 0$) und symmetrisch ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$).
Es ist bemerkenswert, daß der Energie-Impuls-Tensor der Theorie in $\mathcal{S}_x$ liegt (dies war im Falle masseloser freier Bosonen in vier Raumzeitdimensionen nicht der Fall, siehe [1]).

5.2 Thermale Funktionen

Als *thermale Funktion* einer lokalen thermalen Observablen $\theta(x)$ wird die Abbildung

$$\beta \mapsto \omega_\beta(\theta(x))$$

bezeichnet. Wir werden im folgenden zeigen, daß diese Abbildung für die KMS-Zustände (4.1) wohldefiniert ist. Wie in [1] unter Hinweis auf [10] erklärt wird, können die Elemente aus $\mathcal{S}_x$ sinnvoll in Zuständen lokal beschränkter Energie definiert werden.

Die KMS-Zustände (4.1) lassen sich umschreiben zu

$$\begin{aligned}\omega_\beta\left(j^\mu(f)j^\nu(g)\right) &= \omega_\infty\left(j^\mu(f)j^\nu(g)\right)\\ &+\int \mathrm{d}p\int \mathrm{d}^2x\int \mathrm{d}^2y\, 2p\,\theta(p)f(x)g(y)\Big[\frac{e^{-\beta_- p}}{1-e^{-\beta_- p}}\cos((x_- - y_-)p)\\ &+(-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{e^{-\beta_+ p}}{1-e^{-\beta_+ p}}\cos((x_+ - y_+)p)\Big],\end{aligned}$$

wobei $x_\pm := x^0 \pm x^1$ und $y_\pm := y^0 \pm y^1$ Lichtkegelkoordinaten sind.

Für Folgen von Testfunktionen $(\delta_n^\pm)$, derart daß

$$\lim_n \int \mathrm{d}^2y\, \delta_n^\pm(y)f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x\pm\zeta)$$

für alle stetigen f, gilt

$$\begin{aligned}&\omega_\beta\left(j^\mu(x+\zeta)j^\nu(x-\zeta)\right) - \omega_\infty\left(j^\mu(x+\zeta)j^\nu(x-\zeta)\right)\\ &:= \lim_n\left[\omega_\beta\left(j^\mu(\delta_n^+)j^\nu(\delta_n^-)\right) - \omega_\infty\left(j^\mu(\delta_n^+)j^\nu(\delta_n^-)\right)\right] \qquad (5.4)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p\,\theta(p)\,2p\left[\frac{e^{-\beta_- p}}{1-e^{-\beta_- p}}\cos(2\zeta_- p) + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{e^{-\beta_+ p}}{1-e^{-\beta_+ p}}\cos(2\zeta_+ p)\right].\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist wegen der Integrabilität von

$$\theta(p)\,(2p)^n\,\frac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}$$

für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und nach Anwendung des Satzes über dominierte Konvergenz offenbar eine C^∞-Funktion in ζ.

Damit läßt sich nun $\omega_\beta(\theta(x))$ für $\theta(x) \in \mathcal{S}_x$ sinnvoll definieren. Man setzt

$$\begin{aligned}\omega_\beta\left(\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)\right) &:= \lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \zeta^2<0}} \partial_{\zeta_{\boldsymbol{\mu}}}\Big[\omega_\beta\left(j^\kappa(x+\zeta)j^\lambda(x-\zeta)\right) \qquad (5.5)\\ &\qquad -\omega_\infty\left(j^\kappa(x+\zeta)j^\lambda(x-\zeta)\right)\Big].\end{aligned}$$

Da (5.4) nur von den Koordinaten $\zeta_\pm$ abhängt, kann $\partial_{\zeta_{\boldsymbol{\mu}}}$ gemäß $\partial_{\zeta_0} = \partial_{\zeta_+} + \partial_{\zeta_-}$ bzw. $\partial_{\zeta_1} = \partial_{\zeta_+} - \partial_{\zeta_-}$ zerlegt werden. Damit ergibt sich

$$\omega_\beta\left(\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)\right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \zeta^2<0}} \int \mathrm{d}p\, \theta(p)\, 2p \left[\frac{e^{-\beta_- p}}{1-e^{-\beta_- p}} (-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1}\, \partial^m_{\zeta_-} \cos(2\zeta_- p) \right.$$
$$\left. +(-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1} \frac{e^{-\beta_+ p}}{1-e^{-\beta_+ p}} \partial^m_{\zeta_+} \cos(2\zeta_+ p)\right],$$

wobei $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ und $|\boldsymbol{\mu}|_1$ der Anzahl der Indices μ_j mit $\mu_j = 1$ entspricht. Für ungerade m ist $\partial^m_{\zeta_\pm} \cos(2p\zeta_\pm)$ proportional zu $\sin(2p\zeta_\pm)$ und verschwindet daher beim Grenzübergang $\zeta \to 0$. Es interessiert also nur der Fall gerader m. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir im Folgenden $2m$ anstelle von m.

Nach Ausführen von Ableitungen und Grenzprozeß in (5.5) erhält man

$$\omega_\beta\left(\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)\right) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}p\, \theta(p)\, (2p)^{2m+1} (-1)^m \left[(-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1} \frac{e^{-\beta_- p}}{1-e^{-\beta_- p}} \right.$$
$$\left. +(-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1} \frac{e^{-\beta_+ p}}{1-e^{-\beta_+ p}}\right]. \tag{5.6}$$

Da $e^{-\beta_\pm p} < 1$ ist, gilt

$$\frac{e^{-\beta_\pm p}}{1-e^{-\beta_\pm p}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta_\pm p}.$$

In obigem Ausdruck ist jedes Folgenglied der Folge von Partialsummen kleiner als der Grenzwert, daher können nach dem Satz über dominierte Konvergenz Integration und Reihenbildung in (5.6) vertauscht werden:

$$\omega_\beta\left(\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}p\, \theta(p)\, (2p)^{2m+1} (-1)^m \left[(-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1} e^{-n\beta_- p} \right.$$
$$\left. +(-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1} e^{-n\beta_+ p}\right].$$

Die auftretenden Integrale ergeben sich zu

$$\int \mathrm{d}p\, \theta(p)\, p^{2m+1} e^{-n\beta_\pm p} = \frac{(2m+1)!}{(n\beta_\pm)^{2m+2}}.$$

Desweiteren gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2m+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2m+2)!} (2\pi)^{2m+2} \left|B_{2m+2}\right|,$$

wobei B_{2m+2} die $(2m{+}2)$-te Bernoulli-Zahl bezeichnet.

Damit ist schließlich für $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_M)$

$$\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{\kappa\lambda}(\beta) := \omega_\beta\left(\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)\right) = c_M \left[(-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1} \beta_-^{-(M+2)} + (-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1} \beta_+^{-(M+2)}\right] \tag{5.7}$$

mit

$$c_M = \begin{cases} 0 & \text{falls } M = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{(-1)^m (4\pi)^{2m+1}}{2} \frac{|B_{2m+2}|}{2m+2} & \text{falls } M = 2m,\ m \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Die thermalen Funktionen, die Elementen von $\mathcal{S}_x$ zugeordnet werden, ergeben sich aufgrund der Linearität der KMS-Zustände daher als Linearkombinationen von Ausdrücken (5.7) und komplexen Zahlen (da $\omega_\beta(c \cdot \mathbf{1}) = c$).
Wegen $\beta_- = |\beta|(e_0 - e_1)$ bzw. $\beta_+ = |\beta|(e_0 + e_1)$ sind die thermalen Funktionen offenbar Polynome in $|\beta|^{-2}$.

5.3 Topologie auf $\mathcal{S}_x$

Mithilfe der thermalen Funktionen kann $\mathcal{S}_x$ topologisiert werden. Auf den thermalen Funktionen definieren wir für jedes $B \subset V_+$ die Seminorm $\|\cdot\|_B$

$$\|\Theta(\beta)\| := \sup_{\beta \in B} |\Theta(\beta)| = \sup_{\beta \in B} |\omega_\beta(\theta(x))|. \tag{5.9}$$

Dies definiert nun auch auf $\mathcal{S}_x$ eine Familie von schwachen Halbnormen.

5.4 Chiraler Zerfall auf den thermalen Funktionen

Wir haben in Abschnitt 4.2 bereits gesehen, daß die Zweipunktfunktionen (4.1) der KMS-Zustände chiral zerfallen. Offenbar tun dies (5.7) zufolge auch die thermalen Funktionen.

Legt man die eindimensionale Theorie zugrunde und definiert für diesen Fall den Raum der lokalen thermalen Observablen $\mathcal{S}_x^{(1)}$ analog zum zweidimensionalen Fall, jedoch nun mit chiralen Strömen (und unter Weglassung der Bedingung, daß die ζ in den balancierten Ableitungen raumartig sind), so kann man völlig analog zum zweidimensionalen Fall die thermalen Funktionen bestimmen. Sie ergeben sich zu Null, falls der Grad der balancierten Ableitung ungerade ist und ansonsten zu

$$\omega_\beta\left(\eth^{2m}) : j^2 : (x)\right) = \frac{(-1)^m (4\pi)^{2m}}{2m+2} |B_{2m+2}| \beta^{-(2m+2)}. \tag{5.10}$$

Die Frage ist nun, ob auch die nur von β_- bzw. β_+ abhängigen Teile in (5.7) wirklich als thermale Funktionen der eindimensionalen Theorie interpretiert werden können. Um die thermalen Funktionen bestimmen zu können, betrachtete man Ausdrücke der Form

$$\omega_\beta^{(2)}\left(j^\mu(\delta_n^+) j^\nu(\delta_n^-)\right)$$

wobei $\delta_n^\pm \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, so daß $\delta_n^\pm \xrightarrow{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_{x \pm \zeta}$ im schwachen Sinn. Nach (4.3) gilt

$$\omega_\beta^{(2)}\left(j^\mu(\delta_n^+) j^\nu(\delta_n^-)\right) = 2\pi\, \omega_{\beta_-}^{(1)}\left(j((\delta_n^+)') j((\delta_n^-)')\right)$$
$$+ (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} 2\pi\, \omega_{\beta_+}^{(1)}\left(j((\delta_n^+)'') j((\delta_n^-)'')\right),$$

mit

$$(\delta_n^{\pm})'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}v\, \delta_n^{\pm}(v, v-u)$$

und

$$(\delta_n^{\pm})''(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}v\, \delta_n^{\pm}(v, u-v).$$

Wir zeigen das folgende

Lemma 5.1 *Sei* $\left(\delta_n^{(2)}\right)$ *eine Folge in* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, *mit*

$$\lim_n \int dy^1\, dy^0\, \delta_n^{(2)}(y^0, y^1) f(y^0, y^1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x^0, x^1)$$

für alle $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. *Dann gilt mit der Folge* $\left(\delta_n^{(1),\pm}\right) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *definiert durch*

$$\delta_n^{(1),\pm}(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dv\, \delta_n^{(2)}(v, \pm(u-v)),$$

daß

$$\lim_n \int du\, f(u) \delta_n^{(1),\pm}(u) = \frac{1}{2\pi} f(x^0 \pm x^1)$$

für alle $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Beweis: Sei $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_n \int \mathrm{d}u\, f(u) \delta_n^{(1),\pm}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_n \int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}v\, f(u) \delta_n^{(2)}(v, \pm(u-v)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_n \int \mathrm{d}y^1 \int \mathrm{d}y^0\, f(y^0 \pm y^1) \delta_n^{(2)}(y^0, y^1) \\
&= \frac{1}{2\pi} f(x^0 \pm x^1).
\end{aligned}$$

□

Mit diesem Resultat läßt sich konsistent schreiben:

$$\begin{aligned}
&\omega_\beta^{(2)} \left(j^\mu(x+\zeta) j^\nu(x-\zeta)\right) - \omega_\infty^{(2)} \left(j^\mu(x+\zeta) j^\nu(x-\zeta)\right) \\
&\quad = 2\pi \Big[\omega_{\beta_-}^{(1)} \left(j\big((x+\zeta)_-\big) j\big((x-\zeta)_-\big)\right) - \omega_\infty^{(1)} \left(j\big((x+\zeta)_-\big) j\big((x-\zeta)_-\big)\right)\Big] \\
&\qquad + 2\pi\, (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} \Big[\omega_{\beta_+}^{(1)} \left(j\big((x+\zeta)_+\big) j\big((x-\zeta)_+\big)\right) \\
&\qquad\qquad - \omega_\infty^{(1)} \left(j\big((x+\zeta)_+\big) j\big((x-\zeta)_+\big)\right)\Big].
\end{aligned}$$

Führt man die Berechnung der eindimensionalen thermalen Funktionen fort, so bestimmen die nur von x_- abhängigen Summanden des Ausdrucks den von β_- abhängigen Teil, die von x_+ abhängigen den von β_+ abhängigen Teil der zweidimensionalen thermalen Funktion. Umgekehrt heißt dies, daß der vordere Teil in (5.7) von einer thermalen Observable der eindimensionalen Theorie aus dem Raum $\mathcal{S}_{x_-}^{(1)}$ stammt, der hintere von einer aus dem Raum $\mathcal{S}_{x_+}^{(1)}$. Daher korrespondieren zu jeder thermalen Observable $\theta(x) \in \mathcal{S}_x$ der zweidimensionalen Theorie zwei thermale Observablen $\theta_+(x_-) \in \mathcal{S}_{x_-}^{(1)}$ bzw. $\theta_-(x_+) \in \mathcal{S}_{x_+}^{(1)}$ der eindimensionalen Theorie.

Dies sieht man auch, wenn man

$$\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x) = \eth^{\boldsymbol{\mu}} : j_+ j_+ + (-1)^{\delta_{\kappa 1}} j_+ j_+ + -(1)^{\delta \lambda 1} j_+ j_- + (-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1} j_- j_- : (x)$$

schreibt. Da nach Lemma 4.3 j_+ und j_- in den KMS-Zuständen unkorreliert sind, haben die beiden mittleren Summanden keinen Einfluß auf die zu $\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)$ korrespondierende thermale Funktion.

Jede thermale Observable aus $\mathcal{S}_x$ läßt sich also als Summe eines rechtslaufenden, eines linkslaufenden und eines gemischten Anteils schreiben,

$$\theta(x) = \theta_+(x_-) + \theta_-(x_+) + \hat{\theta}(x_-, x_+),$$

wobei der gemischte Anteil nicht in die zweidimensionale thermale Funktion eingeht.

Die Chiralität überträgt sich auch auf Integrale über thermale Funktionen:

Lemma 5.2 *Sei ρ ein normiertes Maß auf dem $\mathbb{R}^2$ mit kompaktem Träger in $B \subset V_+$. Das durch $(\beta_0, \beta_1) \mapsto (\beta_+, \beta_-)$ transformierte Maß $\widetilde{\rho}$ erfülle*

$$\int d\widetilde{\rho}(\beta_+, \beta_-) = \int \sum_{n=1}^{N} \rho_n(\beta_+, \beta_-)\, d\Big(\widetilde{\rho^n}_- \times \widetilde{\rho^n}_+\Big)(\beta_+, \beta_-) \tag{5.11}$$

mit meßbaren ρ_n und Maßen $\widetilde{\rho^n}_\pm$ auf $\Sigma(\mathbb{R})$. Dann gibt es normierte Maße ρ_+ und ρ_- auf $\Sigma(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}_+$, so daß

$$\omega_B(\theta(x)) = 2\pi \int d\rho_+(\beta_-)\omega_{\beta_-}^{(1)}(\theta_+(x_-)) + 2\pi \int d\rho_-(\beta_+)\omega_{\beta_+}^{(1)}(\theta_-(x_+)) \tag{5.12}$$

für alle $\theta(x) \in \mathcal{S}_x$.

Beweis: Da ρ normiert ist, gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \int \mathrm{d}\rho(\beta) \\
&= \int \mathrm{d}\widetilde{\rho}(\beta_+, \beta_-) \\
&= \int \sum_{n=1}^{N} \rho_n(\beta_+, \beta_-)\, \mathrm{d}\Big(\widetilde{\rho^n}_- \times \widetilde{\rho^n}_+\Big)(\beta_+, \beta_-) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int \rho_n(\beta_+, \beta_-)\, \mathrm{d}\Big(\widetilde{\rho^n}_- \times \widetilde{\rho^n}_+\Big)(\beta_+, \beta_-) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int \rho_n^\pm(\beta_\mp)\, \mathrm{d}\widetilde{\rho^n}_\pm(\beta_\mp),
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini, wobei $\rho_n^{\pm}(\beta_{\mp}) = \int \rho_n(\beta_+, \beta_-)\, \mathrm{d}\widetilde{\rho^n}_{\mp}(\beta_{\pm})$,

$$= \int \sum_{n=1}^{N} \rho_n^{\pm}(\beta_{\mp})\, \mathrm{d}\widetilde{\rho^n}_{\pm}(\beta_m p)$$
$$= \int \mathrm{d}\rho^{\pm}(\beta_{\mp}).$$

Damit impliziert unter der Voraussetzung (5.11) das Maß ρ ein normiertes Maß $\rho^{\pm}$ auf $\Sigma(\mathbb{R})$. Wir zeigen, daß dieses Maß ebenfalls kompakten Träger hat. Die Transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(\beta_0, \beta_1) \mapsto (\beta_+, \beta_-)$ bildet V_+ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ab. Da T stetig ist, ist das Bild von B kompakt. Damit gibt es $R > 0$, so daß $[0, R] \times [0, R] \supset T(B)$. Also ist

$$\int \mathrm{d}\widetilde{\rho}(\beta_+, \beta_-) = \int \chi_{[0,R]}(\beta_+)\chi_{[0,R]}(\beta_-)\mathrm{d}\widetilde{\rho}(\beta_+, \beta_-)$$
$$= \int \chi_{[0,R]}(\beta_{\mp})\mathrm{d}\rho^{\pm}(\beta_{\mp}) = \int \mathrm{d}\rho^{\pm}(\beta_{\mp}),$$

und $\rho^{\pm}$ hat kompakten Träger in $\mathbb{R}_+$. Mit diesen Maßen ergibt sich (5.12) dann sofort wegen der Linearität des Integrals und

$$\omega_\beta(\theta(x)) = 2\pi\omega^{(1)}_{\beta_-}(\theta_+(x_-)) + 2\pi\omega^{(1)}_{\beta_+}(\theta_-(x_+))$$

für alle $\theta(x) \in \mathcal{S}_x$.

□

Setzt man

$$\int \mathrm{d}\rho_{\pm}(\beta_{\mp})\omega^{(1)}_{\beta_{\mp}}(\theta_{\pm}(x_{\mp})) =: \omega^{(1)}_{B_{\pm}}(\theta_{\pm}(x_{\mp})),$$

so schreibt sich der chirale Zerfall konvexer Linearkombinationen von thermalen Funktionen als

$$\omega^{(2)}_B(\theta(x)) = 2\pi\omega^{(1)}_{B_-}(\theta_+(x_-)) + \omega^{(1)}_{B_+}(\theta_-(x_+)). \qquad (5.13)$$

5.5 Zulässige Makroobservable

Wir werden nun die zulässigen Makroobservablen bestimmen. Dies sind diejenigen, die sich in der oben definierten Topologie durch lokale Observable aus $\mathcal{S}_x$ approximieren lassen. Da die Auswertungen der Elemente aus $\mathcal{S}_x$ in den (lokalen) Gleichgewichtszuständen, wie in Abschnitt 2.4 erwähnt, zu zentralen Größen korrespondieren, also eine klassische Interpretation haben, können auch die zulässigen Makroobservablen als klassische Größen interpretiert werden.

Es gibt eine große Klasse von Funktionen, die durch die thermalen Funktionen approximiert werden können. Dies sind genau die auf V_+ stetigen Funktionen, die ebenfalls chiralen Zerfall zeigen (bis auf Differenzierbarkeit also die Lösungen der zweidimensionalen Wellengleichung). Um dies zu zeigen benötigen wir zunächst folgendes

Lemma 5.3 *Jede stetige Funktion $f : [b, B] \to \mathbb{R}$ mit $0 < b < B$ läßt sich auf ihrem Definitionsbereich gleichmäßig durch chirale thermale Funktionen approximieren.*

BEWEIS: Sei $g : \left[\frac{1}{B}, \frac{1}{b}\right] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(y) := f(1/y)$. g läßt sich stetig bis in die Null fortsetzen. Durch Spiegelung erhält man die gerade stetige Funktion $\hat{g} : \left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right] \to \mathbb{R}$. Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz läßt sich $\hat{g}$ auf $\left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right]$ gleichmäßig durch Polynome nähern. Da $\hat{g}$ außerdem gerade ist, reichen hierfür gerade Polynome. Daher gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ Koeffizienten $c_1^\varepsilon, \ldots, c_N^\varepsilon$, so daß

$$\left| \hat{g}(y) - \sum_{n=0}^{N} c_n^\varepsilon \, y^{2n} \right| < \varepsilon$$

für alle $y \in \left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right]$. Insbesondere gilt also

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n^\varepsilon \, x^{-2n} \right| = \left| g\left(\frac{1}{x}\right) - \sum_{n=0}^{N} c_n^\varepsilon \, x^{-2n} \right| < \varepsilon$$

für alle $x \in [b, B]$. Also kann f auf $[b, B]$ gleichmäßig durch inverse gerade Polynome approximiert werden, welche wegen (5.10) gerade den chiralen thermalen Funktionen entsprechen.
Damit läßt sich f in der $\|\cdot\|_{[b,B]}$-Topologie durch chirale thermale Funktionen nähern.

□

Bemerkung 5.4 *Die chiralen thermalen Funktionen trennen die Zustände in $\mathcal{C}_B$.*

BEWEIS: Nach obigem Lemma liegt die Menge der thermalen Funktionen

$$\mathcal{M} := \left\{ \Phi : [b, B] \to \mathbb{R} \middle| \Phi = \omega_{(\cdot)}(\phi(x)), \ \phi(x) \in \mathcal{S}_x \right\}$$

bzgl. $\| \cdot \|_{[b,B]}$ dicht in der Menge $C([b, B], \mathbb{R})$, den stetigen Funktionen auf $[b, B]$. Für jeden Referenzzustand $\omega_{[b,B]}$ gilt

$$\left| \omega_{[b,B]}(\Phi) \right| = \left| \int \mathrm{d}\rho(\beta) \, \Phi(\beta) \right| \leq \|\Phi\|_{[b,B]}$$

für alle $\Phi \in \mathcal{M}$, daher ist $\omega_{[b,B]}$ auf $\mathcal{M}$ stetig und kann nach dem Satz von Hahn-Banach (siehe [13]) stetig auf $C([b, B], \mathbb{R})$ fortgesetzt werden. Wegen der Dichtheit von $\mathcal{M}$ ist diese Fortsetzung eindeutig. Dem Darstellungsatz von Riesz (siehe [14]) zufolge gibt es damit ein eindeutig bestimmtes, positives Maß ρ, so daß

$$\omega_{[b,B]}(\Phi) = \int \mathrm{d}\rho(\beta) \, \Phi(\beta)$$

für alle $\Phi \in C([b, B], \mathbb{R})$.
Die Kenntnis von $\omega_{[b,B]}$ auf $\mathcal{M}$ reicht also, um ρ zu bestimmen.

□

Mit Hilfe von Lemma 5.3 läßt sich zeigen, daß alle chiral zerfallenden Funktionen durch thermale Funktionen approximiert werden können.

Lemma 5.5 *Sei $B \subset V_+$ kompakt. Für jedes $\beta = |\beta|e = |\beta|(e_0, e_1) \in B$ benutzen wir weiterhin die Bezeichnung*

$$\beta_\pm = |\beta|(e_0 \pm e_1).$$

Darüber hinaus setzen wir

$$B_\pm := \left[\min_{\beta\in B} |\beta|(e_0 \pm e_1), \max_{\beta in B} |\beta|(e_0 \pm e_1)\right].$$

Jede stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ welche für alle $\beta \in B$

$$f(\beta) = f^+(\beta_-) + f^-(\beta_+)$$

mit $f^\pm : B_\mp \to \mathbb{R}$ erfüllt, kann durch thermale Funktionen

$$\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{\lambda\kappa}(\beta) = c_m \left((-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1} \left(\frac{1}{\beta_-}\right)^{m+2} + (-1)^{\delta_{\lambda\kappa}+1} \left(\frac{1}{\beta_+}\right)^{m+2} \right),$$

mit c_m wie in (5.8), auf B gleichmäßig approximiert werden.

Beweis: Für jedes $\boldsymbol{\mu}$ ist

$$\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{00}(\beta) + \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{01}(\beta) = 2 \cdot (-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1} c_m \left(\frac{1}{\beta_-}\right)^{m+2} =: \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_+(\beta_-)$$

und

$$\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{11}(\beta) - \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{10}(\beta) = 2 \cdot c_m \left(\frac{1}{\beta_+}\right)^{m+2} =: \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_-(\beta_+).$$

Nach Lemma 5.3 können $f^\pm : B_\mp \to \mathbb{R}$ durch die $\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_\pm$ gleichmäßig genähert werden. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es daher endlich viele $c^\pm_{\boldsymbol{\mu}} \neq 0$, so daß

$$\left\| f_\pm - \sum_\mu c^\pm_{\boldsymbol{\mu}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_\pm \right\|_{B_\mp} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \|f^+ - \sum_{\boldsymbol{\mu}} c^+_{\boldsymbol{\mu}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_+ \|_{B_+} + \|f^- - \sum_{\boldsymbol{\mu}} c^-_{\boldsymbol{\mu}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_- \|_{B_-} \\
&\geq \|f^+ + f^- - \sum_{\boldsymbol{\mu}} \left(c^+_{\boldsymbol{\mu}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_+ + c^-_{\boldsymbol{\mu}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_-\right) \|_B \\
&\geq |f - \sum_{\boldsymbol{\mu}} \left[c^+_{\boldsymbol{\mu}} \left(\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{00} + \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{01}\right) + c^-_{\boldsymbol{\mu}} \left(\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{11} - \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{10}\right)\right] \|_B \\
&\geq \|f - \sum_{\boldsymbol{\mu}\lambda\kappa} c^{\boldsymbol{\mu}}_{\lambda\kappa} \Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{\lambda\kappa} \|_B
\end{aligned}$$

mit $c^{\boldsymbol{\mu}}_{00} = c^{\boldsymbol{\mu}}_{01} = c^+_{\boldsymbol{\mu}}$ und $c^{\boldsymbol{\mu}}_{11} = -c^{\boldsymbol{\mu}}_{10} = c^-_{\boldsymbol{\mu}}$. Daher kann f auf B gleichmäßig approximiert werden.

□

Korollar 5.6 *Für jede stetig differenzierbare solche Funktion, ist also auch ihre Ableitung approximierbar.*

Es gilt auch das umgekehrte Resultat. Nicht nur sind alle stetigen Funktionen mit chiralen Zerfallseigenschaften approximierbar, sie sind auch die einzigen approximierbaren Funktionen.

Lemma 5.7 *Sei $B \subset V_+$ kompakt und $f : B \to \mathbb{R}$ werde auf B gleichmäßig durch thermale Funktionen approximiert. Dann ist f stetig und es gilt für $\beta \in B$*

$$f(\beta) = f^+(\beta_-) + f^-(\beta_+) \tag{5.14}$$

mit $f^\pm : B_\mp \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Wir benutzen dieselbe Notation wie im Beweis zuvor. Da die thermalen Funktionen chiral zerfallen, gilt dies auch für die Summen

$$\sum c^{\boldsymbol{\mu}}_{\lambda\kappa}\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{\lambda\kappa}(\beta) = \sum c^+_{\boldsymbol{\mu}}\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_+(\beta_-) + \sum c^-_{\boldsymbol{\mu}}\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_-(\beta_+).$$

Wir definieren die Transformation

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (\beta^0, \beta^1) \mapsto (\beta_-, \beta_+)$$

und setzen $F_n(\beta) := \sum c^{\boldsymbol{\mu}}_{\lambda\kappa}\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_{\lambda\kappa}(\beta)$ und $F^\pm_n(\beta_\mp) := \sum c^\pm_{\boldsymbol{\mu}}\Theta^{\boldsymbol{\mu}}_\pm(\beta_\mp)$. Hierbei bezeichnet n die Anzahl der Summanden, und f werde gleichmäßig durch die Folge (F_n) approximiert. Es ist $F_n = (F^+_n + F^-_n)\circ T$. Da f gleichmäßig durch (F_n) approximiert wird und jedes Folgeglied als Summe thermaler Funktionen stetig ist, ist auch f stetig.

Wir definieren nun g durch $f(\beta) =: g(\beta_-, \beta_+)$ also $g = f \circ T^{-1}$. Sei $(\beta^-_0, \beta^+_0) \in T(B)$. Dann ist für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ und n hinreichend groß

$$\begin{aligned}
\|g(\cdot, \beta^+_0) - F^+_n(\cdot) - F^-_n(\beta^+_0)\|_{T(B)} &= \|g \circ T - (F^+_n + F^-_n)\circ T\|_B \\
&= \|f - F_n\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

und ebenso

$$\|g(\beta^-_0, \cdot) - F^+_n(\beta^-_0) - F^-_n(\cdot)\|_{T(B)} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.16}$$

Wir definieren die Funktion G durch

$$G(\beta_-, \beta_+) := g(\beta_-, \beta^+_0) + g(\beta^-_0, \beta_+) - g(\beta^-_0, \beta^+_0).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|G \circ T - F_n\|_B &= \|G - F^+_n - F^-_n\|_{T(B)} \\
&= \|g(\cdot, \beta^+_0) + g(\beta^-_0, \cdot\cdot) - g(\beta^-_0, \beta^+_0) - F^+_n(\cdot) - F^-_n(\cdot\cdot)\|_{T(B)} \\
&\le \|g(\cdot, \beta^+_0) - F^+_n(\cdot) - F^-_n(\beta^+_0)\|_{T(B)} \\
&\qquad + \|g(\beta^-_0, \cdot\cdot) - F^+_n(\beta^-_0) - F^-_n(\cdot\cdot)\|_{T(B)} \\
&\qquad\qquad + \|g(\beta^-_0, \beta^+_0) - F^+_n(\beta^-_0) - F^-_n(\beta^+_0)\|_{T(B)} \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

wegen (5.15) und (5.16) und weil (F_n) auch punktweise gegen $g \circ T$ konvergiert. Damit konvergiert F_n gleichmäßig gegen $G \circ T$ und da für alle kompakten B $\|\cdot\|_B$ eine Norm auf $\mathcal{C}(B, \mathbb{R})$ ist, gilt somit $g = G$. Also hat f die Form (5.14).

□

Wir werden nun die Definition für *zulässige Makroobservable* geben, welche klassisch zu interpretierende Meßgrößen sind.

Definition 5.2 *Eine Funktion $\Xi : V_+ \to \mathbb{R}$ heißt* zulässige Makroobservable, *wenn sie auf allen Kompakta $B \subset V_+$ gleichmäßig durch thermale Funktionen approximiert werden kann.*

Wie in Lemma 5.5 und 5.7 gezeigt wurde, sind die zulässigen Makroobservablen gerade die stetigen Funktionen, die chiral zerfallen (also bis auf Differenzierbarkeit gerade die Lösungen der Wellengleichung).

5.6 Ausgewählte Makroobservable

Im folgenden sollen die wichtigen makroobservablen Größen Energie-Impuls-Tensor, Entropiestromdichte und Phasenraum-Teilchendichte bestimmt werden. Nur im Falle des Energie-Impuls-Tensors korrespondiert zu dieser Makroobservable tatsächlich eine lokal thermale Observable, also ein Element aus $\mathcal{S}_x$. Die anderen Makroobservablen können jedoch durch zu Elementen aus $\mathcal{S}_x$ korrespondierende thermale Funktionen approximiert werden, und daher durch Folgen in $\mathcal{S}_x$ genähert werden.

5.6.1 Energie-Impuls-Tensor

Die Makroobservable Energie-Impuls-Tensor ergibt sich einfach als thermale Funktion des Energie-Impuls-Tensors (5.3). Diese ist

$$\begin{aligned}
\omega_\beta\left(T^{\mu\nu}(x)\right) &= \frac{1}{4}\,\omega_\beta\left(:j^\mu j^\nu + j^{\bar\mu} j^{\bar\nu}:(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\omega_\beta\left(:j^\mu j^\nu:(x)\right),
\end{aligned}$$

wegen der Linearität von ω_β und $\omega_\beta(j^\mu j^\nu) = \omega_\beta(j^{\bar\mu} j^{\bar\nu})$,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\left[\left(\frac{1}{\beta_-}\right)^2 + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\left(\frac{1}{\beta_+}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\frac{1}{|\beta|^2}\left[\frac{(e_0+e_1)^2 + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}(e_0-e_1)^2}{(e_0^2-e_1^2)^2}\right],
\end{aligned}$$

da $\beta_\pm = |\beta|(e_0 \pm e_1)$,

$$= \frac{\pi}{3}\frac{1}{|\beta|^2}e^\mu e^\nu - \frac{\pi}{6}\frac{1}{|\beta|^2}g^{\mu\nu}, \tag{5.17}$$

da $e_0^2 - e_1^2 = 1$.
$E^{\mu\nu}(\beta) := \omega_\beta(T^{\mu\nu}(x))$ ist offenbar eine zulässige Makroobservable, da $E^{\mu\nu}$ stetig in β ist und die Form (5.14) hat.

5.6.2 Entropiestromdichte und freie Energiedichte

Wie in [12] im vierten Kapitel beschrieben wird, hat im relativistischen Gleichgewichtsfall der Energie-Impuls-Tensor die Form

$$E^{\mu\nu}(\beta) = Q(\beta^2)e^\mu e^\nu - P(\beta^2)g^{\mu\nu}.$$

In unserem Fall gilt also

$$Q(\beta^2) = \frac{\pi}{3}\frac{1}{\beta^2} \quad \text{und} \quad P(\beta^2) = \frac{\pi}{6}\frac{1}{\beta^2}.$$

Die Entropiestromdichte ergibt sich dann laut [12] zu

$$S^\mu(\beta) := \left(\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} Q(\beta^2)e^\mu = \frac{\pi}{3}\frac{1}{|\beta|}e^\mu, \tag{5.18}$$

und die freie Energiedichte ist gegeben durch

$$F^{\mu\nu}(\beta) := -P(\beta^2)g^{\mu\nu} = -\frac{\pi}{6}\frac{1}{\beta^2}g^{\mu\nu}. \tag{5.19}$$

Mit den chiralen Entropiestromdichten

$$S^\pm(\beta_\mp) := \frac{\pi}{6}\frac{1}{\beta_\mp}$$

schreibt sich (5.18) wiederum mit $e_0^2 - e_1^1 = 1$ als

$$S^\mu(\beta) = S^+(\beta_-) + (-1)^{\delta_{\mu 1}} S^-(\beta_+).$$

Diese Funktion ist stetig und hat die Form (5.14), also ist die Entropiestromdichte eine zulässige Makroobservable.

(5.19) schreibt sich als

$$F^{\mu\nu}(\beta) = -\frac{\pi}{6}\frac{1}{\beta_- \, \beta_+}g^{\mu\nu}$$

und kann daher offenbar nicht durch thermale Funktionen approximiert werden. Also ist die freie Energiedichte keine zulässige Makroobservable für die hier betrachteten $\mathcal{S}_x$-thermalen Zustände.

5.6.3 Phasenraum-Teilchendichte

Eine Makroobservable von besonderer Bedeutung ist die Phasenraum-Teilchendichte $N_{\mathbf{q}}$ welche die Dichte der Teilchen mit Impuls $\mathbf{q} = (|q|, q)$ mißt. Wir werden sie durch eine Folge von Operatoren aus $\mathcal{A}$ definieren, deren Grenzwert in den KMS-Zuständen existiert.

Sei $(f_{\mathbf{q},n})$ eine Folge von Testfunktionen aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ definiert durch

$$f_{\mathbf{q},n}(x) := n^{-\frac{1}{2}-\kappa}\, g(n^{-\kappa}x^0)\, h(n^{-1}x^1)\, e^{\mathrm{i}\mathbf{q}x}$$

mit $0<\kappa<1$ und $\int g(x)dx = 1$ sowie $\int |h(y)|^2 dy = 1$, $g,h\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Die Testfunktionen wurden nicht mit κ indiziert, da sich herausstellen wird, daß die interessierenden Objekte unabhängig von diesem (Hilfs-)Parameter sind. Mit diesen Funktionen definieren wir nun die Folge $\left({}_{\mu\nu}N^n_{\mathbf{q}}\right)\subset\mathcal{A}$ durch

$${}_{\mu\nu}N^n_{\mathbf{q}} := \frac{1}{|q|} j^\mu(f_{\mathbf{q},n})^* j^\nu(f_{\mathbf{q},n}).$$

Es zeigt sich, daß für alle β der Grenzwert

$$\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}}) := \lim_n \omega_\beta({}_{\mu\nu}N^n_{\mathbf{q}})$$

existiert.

Wir betrachten zunächst den Fall $q>0$. Dann ist

$$f_{\mathbf{q},n}(x) = n^{-\frac{1}{2}-\kappa} g(n^{-\kappa}x^0)\, h(n^{-1}x^1)\, e^{\mathrm{i}q(x^0-x^1)}.$$

Mit den KMS-Zuständen (4.1) ist dann

$$\begin{aligned}
\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}}) &= \lim_n \frac{1}{|q|}\int \mathrm{d}p\, p\, \Big[\frac{\widetilde{\overline{f_{\mathbf{q},n}}}(p,p)\widetilde{f_{\mathbf{q},n}}(-p,-p)}{1-e^{-\beta_- p}} \\
&\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{\widetilde{\overline{f_{\mathbf{q},n}}}(p,-p)\widetilde{f_{\mathbf{q},n}}(-p,p)}{1-e^{-\beta_+ p}}\Big] \\
&= \lim_n \frac{1}{|q|}\int \mathrm{d}p\, p\, n |\widetilde{g}\,(-n^\kappa(q+p))|^2 \Big[\frac{|\widetilde{h}(n(q+p))|^2}{1-e^{-\beta_- p}} \\
&\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{|\widetilde{h}(n(q-p))|^2}{1-e^{-\beta_+ p}}\Big],
\end{aligned}$$

da $\widetilde{\overline{f}}(\mathbf{p}) = \overline{\widetilde{f}(-\mathbf{p})}$. Wir setzen

$$[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_\pm := \lim_n \frac{1}{|q|}\int \mathrm{d}p\, p\cdot n\, |\widetilde{g}\,(-n^\kappa(q+p))|^2\, \frac{|\widetilde{h}(n(q\pm p))|^2}{1-e^{-\beta_\mp p}}.$$

In $[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_+$ führt die Substitution $z = n(q+p)$ auf

$$[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_+ = \lim_n \frac{1}{|q|}\int z\, \left(\frac{z}{n}-q\right) |\widetilde{g}(-n^{\kappa-1}z)|^2 \frac{|\widetilde{h}(z)|^2}{1-e^{-\beta_-(n^{-1}z-q)}}.$$

Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist $\left|(n^{-1}z-q)\cdot\left(1-e^{-\beta_-(n^{-1}z-q)}\right)^{-1}\right| \le M\cdot|z|^l$ für geeignetes M und l, ebenso $\left|\widetilde{g}(-n^{\kappa-1}z)\right| < M_g$ weil $g\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Da auch $h\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, ist $z\mapsto$

$|z|^l \left|\widetilde{h}(z)\right|^2$ integrabel, und es kann der Satz über dominierte Konvergenz angewandt werden. Damit ergibt sich wegen der Stetigkeit von $\widetilde{g}$, $\kappa < 1$ sowie $\widetilde{g}(0) = (2\pi)^{-1/2}$ und $\int |h|^2 = 1$

$$\begin{aligned}
[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_+ &= \frac{1}{|q|}\int \mathrm{d}z\, q\, \frac{1}{e^{\beta_- q}-1}|\widetilde{g}(0)|^2|\widetilde{h}(z)|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{q}{|q|}\frac{1}{e^{\beta_- q}-1}.
\end{aligned}$$

In $[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_-$ führt die Variablentransformation $z = n(q-p)$ hin zu

$$[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_- = \lim_n \frac{1}{|q|}\int z\left(\frac{z}{n}-q\right)|\widetilde{g}(-2n^\kappa q + n^{\kappa-1}z)|^2 \frac{|\widetilde{h}(z)|^2}{1-e^{\beta_+(n^{-1}z-q)}}.$$

Wiederum greift der Satz über majorisierte Konvergenz analog zum obigen Fall. Mit diesem ist

$$[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_- = \frac{1}{|q|}\int z\, \frac{q}{e^{-\beta_+ q}-1}|\widetilde{h}(z)|^2\,|\lim_n \widetilde{g}(-2n^\kappa q + n^{\kappa-1}z)|^2.$$

Da $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ und $0 < \kappa < 1$ ist jedoch $\lim_n \widetilde{g}(-n^\kappa q + n^{\kappa-1}z) = 0$. Also ist $[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_- = 0$.

Im Fall $q < 0$ ist

$$f_{\mathbf{q},n}(x) = n^{-\frac{1}{2}-\kappa} g(n^{-\kappa}x^0)\, h(n^{-1}x^1)\, e^{-\mathrm{i}q(x^0+x^1)}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}}) &= \lim_n \frac{1}{|q|}\int \mathrm{d}p\, p\cdot n\, |\widetilde{g}\,(-n^\kappa(q-p))|^2 \left[\frac{|\widetilde{h}(n(q+p))|^2}{1-e^{-\beta_- p}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +(-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{|\widetilde{h}(n(q-p))|^2}{1-e^{-\beta_+ p}}\right].
\end{aligned}$$

Wir nehmen in den Teilen $[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_\pm$ dieselben Substitutionen vor wie im Fall $q > 0$ und folgen auch sonst der obigen Argumentation. In diesem Fall ergibt sich jedoch

$$[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_+ = 0$$

und

$$\begin{aligned}
[\omega_\beta({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}})]_- &= \frac{1}{2\pi}\frac{q}{|q|}\frac{1}{1-e^{-\beta_+ q}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{q}{|q|}\frac{e^{\beta_+ q}}{e^{\beta_+ q}-1}.
\end{aligned}$$

Faßt man die Ergebnisse für $q>0$ und $q<0$ zusammen, erhält man

$$\omega_\beta\left({}_{\mu\nu}N_q(\beta)\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{q}{|q|}\left[\Theta(q)\frac{1}{e^{\beta_- q}-1}+(-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\Theta(-q)\frac{e^{\beta_+ q}}{e^{\beta_+ q}-1}\right].$$

Damit haben wir nun folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 5.8 *Sei $(f_{\mathbf{q},n})\subset\mathscr{D}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ eine Folge von Testfunktionen mit*

$$f_{\mathbf{q},n}(x):=n^{-\frac{1}{2}-\kappa}g(n^{-\kappa}x^0)h(n^{-1}x^1)e^{i\mathbf{q}x} \tag{5.20}$$

wobei $\mathbf{q}=(|q|,q)$, $0<\kappa<1$ und $g,h\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ Testfunktionen, die $\int|h|^2=\int g=1$ erfüllen. Der Grenzwert der Folge $({}_{\mu\nu}N^n_{\mathbf{q}})\subset\mathcal{A}$ definiert durch

$${}_{\mu\nu}N^n_{\mathbf{q}}:=\frac{1}{|q|}j^\mu(f_{\mathbf{q},n})^*j^\nu(f_{\mathbf{q},n}) \tag{5.21}$$

existiert in den KMS-Zuständen und es gilt

$$\begin{aligned}\omega({}_{\mu\nu}N_{\mathbf{q}}) &:= \lim_n \omega({}_{\mu\nu}N^n_{\mathbf{q}})\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{q}{|q|}\left[\Theta(q)\frac{1}{e^{\beta_- q}-1}+(-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\Theta(-q)\frac{e^{\beta_+ q}}{e^{\beta_+ q}-1}\right].\end{aligned} \tag{5.22}$$

Von einer Phasenraum-Teilchendichte wird man Positivität erwarten, und die zugehörige Folge sollte hermitesche Folgeglieder haben. Daher ist es sinnvoll, Folgen (5.21) mit $\mu=\nu$ zu betrachten und ihren Grenzwert als Phasenraum-Teilchendichte aufzufassen.

Definition 5.3 *Es ist $N^n_{\mathbf{q}}:={}_{\mu\mu}N^n_{\mathbf{q}}$ und $\omega_\beta(N_{\mathbf{q}}):=\lim_n\omega_\beta({}_{\mu\mu}N^n_{\mathbf{q}})$ für $\mu=0,1$. Die* Phasenraum-Teilchendichte *ist definiert durch*

$$N_{\mathbf{q}}(\beta):=\omega_\beta(N_{\mathbf{q}})=\frac{1}{2\pi}\frac{q}{|q|}\left[\Theta(q)\frac{1}{e^{\beta_- q}-1}+\Theta(-q)\frac{e^{\beta_+ q}}{e^{\beta_+ q}-1}\right]. \tag{5.23}$$

$N_{\mathbf{q}}$ ist durch die Planck-Formel gegeben, wie man durch folgende Rechnung sieht:

$$\begin{aligned}N_{\mathbf{q}}(\beta) &= \frac{1}{2\pi}\frac{q}{|q|}\left[\Theta(q)\frac{1}{e^{\beta_- q}-1}+\Theta(-q)\frac{e^{\beta_+ q}}{e^{\beta_+ q}-1}\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\Theta(q)\frac{1}{e^{\beta_0 q-\beta_1 q}-1}-\Theta(-q)\frac{1}{1-e^{-(\beta_0 q+\beta_1 q)}}\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\Theta(q)\frac{1}{e^{\beta_0|q|-\beta_1 q}-1}+\Theta(-q)\frac{1}{e^{\beta_0|q|-\beta_1 q}-1}\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{e^{\beta_0|q|-\beta_1 q}-1}\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{e^{\beta\mathbf{q}}-1}.\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß der Grenzwert der Folge $\left(N^n_{\mathbf{q}}\right)$ in allen thermalen Referenzzuständen existiert und gemäß

$$\lim_n \omega_B(AN^n_{\mathbf{q}}B) = \int \mathrm{d}\rho(\beta)\omega_\beta(AB)\omega_\beta(N_{\mathbf{q}})$$

zentral zerlegt werden kann.

Damit wir diesen Beweis führen können, etablieren wir zunächst zwei Lemmata. In diesen sei $f_{\mathbf{q},n}$ wie in (5.20).

Lemma 5.9 *Sei $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ $f \neq f_{\mathbf{q},n}$. Dann ist für alle μ, ν*

$$\lim_n \omega_\beta(j^\mu(f)j^\nu(f_{\mathbf{q},n})) = 0.$$

Beweis: Für $|q| = \pm q$ ist

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(j^\mu(f)j^\nu(f_{\mathbf{q},n})) &= \int \mathrm{d}p\, p \Big[\frac{\widetilde{f}(p,p)\widetilde{f_{\mathbf{q},n}}(-p,-p)}{1-e^{-\beta_- p}} \\
&\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{f_{\mathbf{q},n}}(-p,p)}{1-e^{-\beta_+ p}}\Big] \\
&= \int \mathrm{d}p\, p\, n^{1/2}\, \widetilde{g}(-n^\kappa(p \pm q))\Big[\frac{\widetilde{f}(p,p)\widetilde{h}(n(q+p))}{1-e^{-\beta_- p}} \\
&\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{h}(n(q-p))}{1-e^{-\beta_+ p}}\Big].
\end{aligned}$$

Nach Substitution von $z = n(q+p)$ im vorderen und $z = n(q-p)$ im hinteren Integralteil ergibt sich

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(j^\mu(f)j^\nu(f_{\mathbf{q},n})) &= \int \mathrm{d}z \left(\frac{z}{n} - q\right) n^{-1/2}\widetilde{h}(z)\Big[\frac{\widetilde{g}(a(z,n))\widetilde{f}(\frac{z}{n}-q, \frac{z}{n}-q)}{1-e^{-\beta_-(n^{-1}z-q)}} \\
&\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{\widetilde{g}(b(z,n))\widetilde{f}(q-\frac{z}{n}, \frac{z}{n}-q)}{1-e^{-\beta_+(q-n^{-1}z)}}\Big]
\end{aligned}$$

mit passenden a und b. Da $n^{-1/2} \leq 1$ für alle $n \geq 1$, gibt es M und l so daß

$$\left|(n^{-1}z - q)n^{-1/2}\left(1 - e^{\pm\beta_\pm(n^{-1}z-q)}\right)^{-1}\right| \leq M\,|z|^l$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sind $|\widetilde{g}(\cdot)| < M_g$ und $|\widetilde{f}(\cdot)| < M_f$. $z \mapsto |z|^l \left|\widetilde{h}(z)\right|$ ist integrabel da $\widetilde{h} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Also kann der Satz über dominierte Konvergenz angewandt werden:

$$\begin{aligned}
\lim_n \omega_\beta(j^\mu(f)j^\nu(f_{\mathbf{q},n})) &= \int \mathrm{d}p \lim_n \Bigg(\left(\frac{z}{n} - q\right) n^{-1/2}\widetilde{h}(z)\Big[\frac{\widetilde{g}(a(z,n))\widetilde{f}(\frac{z}{n}-q, \frac{z}{n}-q)}{1-e^{-\beta_-(n^{-1}z-q)}} \\
&\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\frac{\widetilde{g}(b(z,n))\widetilde{f}(q-\frac{z}{n}, \frac{z}{n}-q)}{1-e^{-\beta_+(q-n^{-1}z)}}\Big]\Bigg) \\
&= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

da $\widetilde{g}$ und $\widetilde{f}$ stetig und $\lim_n n^{-1/2} = 0$.

□

Bemerkung 5.10 *Das Resultat von Lemma 5.9 gilt weiterhin, wenn man die Ströme in $\omega_\beta(j^\mu(f)j^\nu(f_{\mathbf{q},n}))$ vertauscht und/oder einen oder beide adjungiert.*

Lemma 5.11 *Es gilt für alle μ, ν*

$$\lim_n \omega_\beta(j^\mu(f_{\mathbf{q},n})j^\nu(f_{\mathbf{q},n})) = \lim_n \omega_\beta(j^\mu(f_{\mathbf{q},n})^* j^\nu(f_{\mathbf{q},n})^*) = 0.$$

Beweis: Es ist für $|q| = \pm q$

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(j^\mu(f_{\mathbf{q},n})j^\nu(f_{\mathbf{q},n})) &= \omega_\beta(j^\mu(f_{\mathbf{q},n})^* j^\nu(f_{\mathbf{q},n})^*) \\
&= \int \mathrm{d}p\, p\, n\, \widetilde{g}(n^\kappa(p \mp q))\widetilde{g}(-n^\kappa(p \pm q))\widetilde{h}(n(q-p)) \times \\
&\quad \times \widetilde{h}(n(q+p)) \Big[\frac{1}{1-e^{-\beta_- p}} + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} \frac{1}{1-e^{-\beta_+ p}} \Big] \\
&= \int \mathrm{d}z \left(\frac{z}{n} - q \right) \widetilde{g}(a(n,z))\widetilde{g}(b(n,z))\widetilde{h}(2nq-z)\widetilde{h}(z) \times \\
&\quad \times \Big[\frac{1}{1-e^{-\beta_-(n^{-1}z-q)}} + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} \frac{1}{1-e^{-\beta_+(n^{-1}z-q)}} \Big]
\end{aligned}$$

nach Substitution $z = n(q+p)$ mit geeigneten a und b. Es gelten dieselben Abschätzungen wie im Beweis von Lemma 5.9. Daher kann auch hier der Satz über majorisierte Konvergenz angewandt werden, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_n \omega_\beta(j^\mu(f_{\mathbf{q},n})j^\nu(f_{\mathbf{q},n})) &= \lim_n \omega_\beta(j^\mu(f_{\mathbf{q},n})^* j^\nu(f_{\mathbf{q},n})^*) \\
&\quad \int \mathrm{d}z \lim_n \Big[\cdots \Big] \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

da alle auftretenden Ausdrücke stetig sind und $\lim_n \widetilde{h}(2nq - z) = 0$.

□

Mit diesen Hilfssätzen können wir nun die folgende Aussage beweisen:

Lemma 5.12 *Für alle Referenzzustände ω_B und alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\lim_n \omega_B(A N^n_{\mathbf{q}} B) = \int d\rho(\beta)\, \omega_\beta(AB)\omega_\beta(N_{\mathbf{q}}).$$

Beweis: ω_β ist quasifrei, daher läßt sich $\omega_\beta(A N^n_{\mathbf{q}} B)$ als Summe von Produkten von Zweipunktfunktionen schreiben. Für jede Zweipunktfunktion $\omega_\beta\big(j^\mu(f)j^\nu(f_{\mathbf{q},n})\big)$ gilt nach der Cauchy-Scharz'schen Ungleichung

$$|\omega_\beta\big(j^\mu(f)j^\nu(f_{\mathbf{q},n})\big)|^2 \leq \omega_\beta\big(j^\mu(f)^* j^\mu(f)\big)\omega\big(j^\nu(f_{\mathbf{q},n})^* j^\nu(f_{\mathbf{q},n})\big).$$

Wegen

$$\left|\omega_\beta\left(N^n_{\mathbf{q}}\right)\right| \leq \int \mathrm{d}z\, M\, |z|^l \left|\widetilde{h}(z)\right|^2 \leq C$$

(siehe Herleitung der Phasenraum-Teilchendichte), kann der Betrag jeder solchen Zweipunktfunktion durch

$$\left|\omega_\beta\big(j^\mu(f) j^\nu(f_{\mathbf{q},n})\big)\right| \leq \sqrt{\omega_\beta\big(j^\mu(f)^* j^\mu(f)\big)|\mathbf{q}|C}$$

abgeschätzt werden (falls $f = f_{\mathbf{q},n}$, so kann sie durch $|\mathbf{q}|C$ abgeschätzt werden). Wendet man auf $|\omega_\beta(AN^n_{\mathbf{q}}B)|$ die Dreiecksungleichung und auf alle Zweipunktfunktionen die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung an, so ist die so gewonnene Abschätzung eine integrable Majorante von $|\omega_\beta(AN^n_{\mathbf{q}}B)|$, da $\omega_\beta(VW)$ für jedes V, W stetig in β ist und ρ kompakten Träger hat.
Also kann der Satz über dominierte Konvergenz angewandt werden:

$$\lim_n \omega_B(AN^n_{\mathbf{q}}B) = \int \mathrm{d}\rho(\beta)\, \lim_n \omega_\beta(AN^n_{\mathbf{q}}B).$$

Wegen der Quasifreiheit von ω_β (also da ω_β eine Summe von Produkten von Zweipunktfunktionen ist) und der Lemmata 5.8 – 5.11, gilt zudem

$$\lim_n \omega_\beta(AN^n_{\mathbf{q}}B) = \omega_\beta(AB)\omega_\beta(N_{\mathbf{q}}),$$

und es folgt die Behauptung.

□

Desweiteren läßt sich eine Aussage über die Zentralität der Folge $(N^n_{\mathbf{q}})$ treffen.

Lemma 5.13 *Sei $\omega_B \in \mathcal{C}_B$. Sei $\mathcal{H}$ der per GNS-Konstruktion zu ω_B gewonnene Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\cdot \rangle$ und $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$ die zugehörige Darstellung. Dann bilden die Darsteller $\big(\pi(N^n_{\mathbf{q}})\big)$ eine zentrale Folge in $\pi(\mathcal{A})$.*

Beweis: Falls für alle $A, B \in \mathcal{A}$

$$\lim_n \omega_B\left((N^n_{\mathbf{q}}AB - AN^n_{\mathbf{q}}B)^*(N^n_{\mathbf{q}}AB - AN^n_{\mathbf{q}}B)\right) = 0$$

gilt, so ist wegen der Form des Skalarproduktes in der GNS-Konstruktion (siehe [3])

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_n \omega_B\left((N^n_{\mathbf{q}}AB - AN^n_{\mathbf{q}}B) * (N^n_{\mathbf{q}}AB - AN^n_{\mathbf{q}}B)\right) \\ &= \lim_n \langle [N^n_{\mathbf{q}}AB - AN^n_{\mathbf{q}}B]_{\mathcal{H}}, [N^n_{\mathbf{q}}AB - AN^n_{\mathbf{q}}B]_{\mathcal{H}} \rangle, \end{aligned}$$

wobei $[\cdot]_{\mathcal{H}}$ Vektoren aus $\mathcal{H}$ bezeichne. Dann ist wegen der Wirkung der Darstellung in der GNS-Konstruktion für alle $A, B \in \mathcal{A}$

$$\lim_n [N^n_{\mathbf{q}}AB - AN^n_{\mathbf{q}}B]_{\mathcal{H}} = \lim_n \left(\pi(N^n_{\mathbf{q}})\pi(A) - \pi(A)\pi(N^n_{\mathbf{q}})\right)[B]_{\mathcal{H}} = 0.$$

Dann bilden die $\pi(N_{\mathbf{q}}^n)$ (auf dem allen Darstellern gemeinsamen, dichten Definitionsbereich) eine zentrale Folge in $\pi(\mathcal{A})$.
Es bleibt zu zeigen, daß $\omega_B\left((N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)^*(N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)\right) \xrightarrow{n} 0$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$. Es ist

$$\lim_n \omega_B\left((N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)^*(N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)\right)$$

$$= \lim_n \int \mathrm{d}\rho(\beta)\omega_\beta\left((N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)^*(N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)\right).$$

ω_β ist quasifrei, und nach Anwendung von Dreiecksungleichung auf den Betrag des Integranden und Cauchy-Schwarz'scher Ungleichung auf die Zweipunktfunktionen folgt (wie in obigem Lemma), daß $\left|\omega_\beta\left((N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)^*(N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)\right)\right|$ majorisiert werden kann. Also kann der Satz über dominierte Konvergenz angewandt werden:

$$\begin{aligned}
&\lim\nolimits_n \omega_B\left((N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)^*(N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)\right) \\
&\quad = \int \mathrm{d}\rho(\beta) \lim_n \Big[\omega_\beta(B^*A^*N_{\mathbf{q}}^n N_{\mathbf{q}}^n AB) - \omega_\beta(B^*A^*N_{\mathbf{q}}^n AN_{\mathbf{q}}^n B) \\
&\qquad\qquad - \omega_\beta(B^*N_{\mathbf{q}}^n A^*N_{\mathbf{q}}^n AB) + \omega_\beta(B^*N_{\mathbf{q}}^n A^*AN_{\mathbf{q}}^n B)\Big].
\end{aligned}$$

Da ω_β quasifrei ist und wegen der Lemmata 5.8 - 5.11 zerfällt jeder der Summanden zu $\sum_m \omega_\beta({}_{01}N_{\mathbf{q}})^{k_m}\omega_\beta(N_{\mathbf{q}})^{l_m}\omega_\beta(G_m)$ (mit geeigneten G_m, k_m und l_m), so daß der Integrand verschwindet. Damit gilt

$$\lim_n \omega_B\left((N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)^*(N_{\mathbf{q}}^n AB - AN_{\mathbf{q}}^n B)\right) = 0.$$

□

6 Transportgleichungen

Im nachfolgenden Kapitel sollen Evolutionsgleichungen für zulässige thermale Observable in lokalen Gleichgewichtszuständen angegeben werden. Insbesondere werden Transportgleichungen für die Phasenraum-Teilchendichte abgeleitet und deren Konsequenzen für die chiralen Komponenten studiert. Anschließend wird gezeigt, daß man mit Hilfe der Phasenraum-Teilchendichte quasifreie Funktionale konstruieren kann, die unter gewissen Umständen lokale Gleichgewichtszustände sind.

6.1 Evolutionsgleichungen von Makroobservablen

Um Evolutionsgleichungen für die Makroobservablen herleiten zu können, benötigen wir zunächst das folgende

Lemma 6.1 *Sei ω $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$-thermal und Ξ eine zulässige Makroobservable. Es gilt:*

1. *Falls $\Xi(\beta) = \Xi^{\pm}(\beta_{\mp})$ so ist $\omega(\Xi)(x) = \omega(\Xi^{\pm})(x_{\mp})$.*
2. *$\omega(\Xi)(x) = \omega(\Xi^{+})(x_{-}) + \omega(\Xi^{-})(x_{+})$.*

Beweis: In der ersten Aussage gilt

$$\omega(\Xi)(x) = \omega(\Xi^{\pm})(x) = \omega_B(\Xi^{\pm}) = \int d\rho(\beta)\Xi^{\pm}(\beta_{\mp}) = \int d\rho(\beta) \sum_n \omega_\beta\left(\theta_n^{\pm}(x_{\mp})\right),$$

da $\Xi(\beta) = \Xi^{\pm}(\beta_{\mp}) = \sum_n \Theta_n^{\pm}(\beta_{\mp}) = \sum_n \omega_\beta\left(\theta_n^{\pm}(x_{\mp})\right)$, wegen der Zulässigkeit von Ξ und mit $\theta_n^{\pm}(x_{\mp})$ der zu $\Theta_n^{\pm}(\beta_{\mp})$ korrespondierenden thermalen Observablen. Also hängt $\omega(\Xi^{\pm})(x)$ nur von $x_{\mp}$ ab, und es folgt die erste Aussage.
Zur zweiten Aussage: da Ξ zulässig ist, gilt $\Xi = \Xi^{+} + \Xi^{-}$. Wegen der Linearität von ω und mit (1.) gilt daher

$$\omega(\Xi)(x) = \omega(\Xi^{+})(x) + \omega(\Xi^{-})(x) = \omega(\Xi^{+})(x_{-}) + \omega(\Xi^{-})(x_{+}).$$

□

Hiermit lassen sich nun die Evolutionsgleichungen von zulässigen Makroobservablen in lokalen Gleichgewichtszuständen bestimmen.

Lemma 6.2 *Sei ω $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$-thermal und Ξ eine zulässige Makroobservable. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{O}$*

$$\Box\omega(\Xi)(x) = 0 \tag{6.1}$$

und

$$\partial_\nu \omega(\partial^\nu \Xi)(x) = 0. \tag{6.2}$$

Beweis: Die erste Aussage folgt direkt aus dem vorigen Lemma, denn

$$\Box\omega(\Xi)(x) = \partial_+\partial_- \left[\omega(\Xi^+)(x_-) + \omega(\Xi^-)(x_+)\right] = 0.$$

Die zweite Aussage schreibt sich mit $\partial_0 = \partial_+ + \partial_-$ und $\partial_1 = \partial_+ - \partial_-$ wegen der Linearität von ω als

$$\begin{aligned}\partial_\nu\omega(\partial^\nu\Xi)(x) &= (\partial_+ + \partial_-)\omega((\partial_+ + \partial_-)(\Xi)(x) \\ &\qquad -(\partial_+ - \partial_-)\omega((\partial_+ - \partial_-)\Xi)(x) \\ &= 2\left[\partial_-\omega(\partial_+\Xi)(x) + \partial_+\omega(\partial_-\Xi)(x)\right].\end{aligned}$$

Da Ξ zulässig ist, gilt $\Xi(\beta) = \Xi(\beta_-)^+ + \Xi^-(\beta_+)$ und daher

$$\partial_\pm\Xi(\beta) = \partial_\pm\Xi^\mp(\beta_\pm).$$

Die Ableitung einer zulässigen Observable ist nach Korollar 5.6 ebenfalls zulässig. Mit obigem Lemma ist dann

$$\omega(\partial_\pm\Xi)(x) = \omega(\partial_\pm\Xi^\mp)(x_\pm)$$

und es ergibt sich

$$\partial_\mp\omega(\partial_\pm\Xi)(x) = 0.$$

$\Box$

6.2 Transportgleichungen für Phasenraum-Teilchendichte

Aus den Evolutionsgleichungen für die Makroobservablen in $\mathcal{S}_\mathcal{O}$-thermalen Zuständen lassen sich Transportgleichungen für die Phasenraum-Teilchendichte herleiten. Wir zeigen das

Lemma 6.3 *Für $x \in \mathcal{O}$ gilt mit $\mathbf{p} = (p^0, p^1) = (|p|, p)$*

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \omega(N_\mathbf{p})(x) = 0 \tag{6.3}$$

in jedem $\mathcal{S}_\mathcal{O}$-thermalen Zustand ω.

Beweis: Wir definieren die Funktion $L_\mathbf{p}$ durch

$$L_\mathbf{p}(\beta) := \frac{1}{\pi}\left[\Theta(p)\log(1 - e^{-\beta_- p}) + \Theta(-p)\log(e^{\beta_+ p} - 1)\right]$$

deren korrespondierende Makroobservable offenbar zulässig ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\partial_- L_\mathbf{p}(\beta) &= \frac{1}{\pi}\, p\,\Theta(p)\frac{1}{e^{\beta_- p} - 1} \\ &= \frac{2|p|}{2\pi}\frac{p}{|p|}\,\Theta(p)\frac{1}{e^{\beta_- p} - 1} \\ &= (|p| + p)\frac{1}{2\pi}\frac{p}{|p|}\,\Theta(p)\frac{1}{e^{\beta_- p} - 1} \\ &= (|p| + p)N_\mathbf{p}(\beta).\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
\partial_+ L_{\mathbf{p}}(\beta) &= \frac{1}{\pi}\, p\, \Theta(-p) \frac{e^{\beta_+ p}}{e^{\beta_+ p} - 1} \\
&= \frac{2|p|}{2\pi} \frac{p}{|p|}\, \Theta(-p) \frac{e^{\beta_+ p}}{e^{\beta_+ p} - 1} \\
&= (|p| - p) \frac{1}{2\pi} \frac{p}{|p|}\, \Theta(-p) \frac{e^{\beta_+ p}}{e^{\beta_+ p} - 1} \\
&= (|p| - p) N_{\mathbf{p}}(\beta).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \omega(N_{\mathbf{p}})(x) &= [|p|(\partial_+ + \partial_-) + p\,(\partial_+ - \partial_-)]\, \omega(N_{\mathbf{p}})(x) \\
&= [(|p| + p)\partial_+ + (|p| - p)\partial_-]\, \omega(N_{\mathbf{p}})(x) \\
&= \partial_+ \omega(\partial_- L_{\mathbf{p}})(x) + \partial_- \omega(\partial_+ L_{\mathbf{p}})(x) \\
&= 2\partial_\nu \omega(\partial^\nu L_{\mathbf{p}})(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

nach der Evolutionsgleichung (6.2).

$\square$

Bemerkung 6.4 *Wegen Gleichung (6.1) gilt auch $\Box\omega(N_{\mathbf{p}})(x) = 0$ für $x \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$-thermale Zustände ω.*

Korollar 6.5 *Für die chiralen Komponenten $N_p^{\pm}$ von $N_{\mathbf{p}}$ gilt in lokalen Gleichgewichtszuständen ω und für $x \in \mathcal{O}$*

$$\partial_+ \omega(N_p^-)(x_+) = 0 \quad \textit{falls} \quad p > 0$$

und

$$\partial_- \omega(N_p^+)(x_-) = 0 \quad \textit{falls} \quad p < 0. \tag{6.4}$$

Beweis: Da $N_{\mathbf{p}}$ zulässig ist, gilt nach Lemma 6.1 $\omega(N_{\mathbf{p}})(x) = \omega(N_p^+)(x_-) + \omega(N_p^-)(x_+)$. Also ist nach (6.3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \omega(N_{\mathbf{p}})(x) &= [(|p| + p)\partial_+ + (|p| - p)\partial_-]\left(\omega(N_p^+)(x_-) + \omega(N_p^-)(x_+)\right) \\
&= (|p| + p)\partial_+ \omega(N_p^-)(x_+) + (|p| - p)\partial_- \omega(N_p^+)(x_-) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für $p > 0$ ist daher

$$2|p|\partial_+ \omega(N_p^-)(x_+) = 0$$

und für $p < 0$

$$2|p|\partial_- \omega(N_p^+)(x-_) = 0.$$

□

Die chiralen Komponenten von $\omega(N_{\mathbf{p}})$ verschwinden also jeweils auf der einen oder anderen Impuls-Halbachse. Wir gehen im folgenden vor wie in [1]. Wir definieren die Funktion $\bar{N} : B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\bar{N}(x,p) := \omega(N_{\mathbf{p}})(x). \tag{6.5}$$

Wegen $\Box_x \bar{N}(x,p) = 0$ zerfällt sie als Funktion von x chiral. Aufgrund von (6.4) hat $\bar{N}$ die Form

$$\bar{N}(x,p) = \Theta(p)\bar{N}^+(x_-,p) + \Theta(-p)\bar{N}^-(x_+,p) + C(p).$$

Damit ist (6.3) automatisch auch für $\bar{N}$ erfüllt.

6.3 Konstruktion von Funktionalen aus Phasenraum-Teilchendichten

Es zeigt sich, daß sich schon unter sehr schwachen Forderungen aus den chiralen Komponenten der Phasenraum-Teilchendichte quasifreie Funktionale konstruieren lassen, welche sowohl die Kommutatorrelationen der Ströme als auch die Adjunktionsrelationen erhalten.

Lemma 6.6 *Sei $\bar{N}$ eine nichtnegative Funktion $(x,p) \mapsto \bar{N}(x,p)$ welche in x und p schwach integrabel ist. Dann definiert*

$$\begin{aligned} \varphi(j(f)j(g)) \;&:=\; \omega_\infty(j(f)j(g)) \\ &\quad + \int dp\,|p| \int dx \int dy\, \bar{N}\left(\frac{x+y}{2}, p\right) 2\cos((x-y)p) f(x) g(y) \end{aligned} \tag{6.6}$$

ein quasifreies, eichinvariantes und normiertes Funktional, welches die Kommutatorrelationen der Ströme und die Adjunktionsrelationen erhält.

Beweis: Linearität, Quasifreiheit und Eichinvarianz sind nach Definition klar. Für den Kommutator gilt

$$\varphi\left([j(f), j(g)]\right) = \omega_\infty\left([j(f), j(g)]\right),$$

da der Integrand im hinteren Integral symmetrisch unter Vertauschung von x und y ist. Da $[j(f), j(g)]$ eine c-Zahl ist und ω_∞ normiert, gilt demnach

$$\varphi\left([j(f), j(g)]\right) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int \mathrm{d}y\, f'(y) g(y)$$

und somit $\varphi(\mathbf{1}) = 1$. Außerdem ist

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(j(f)j(g)^*\right) &= \varphi\left(j(f)j(\bar{g})\right) \\
&= \omega_\infty(j(f)j(\bar{g})) \\
&\quad + \int \mathrm{d}p\, < p| \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \bar{N}\left(\frac{x+y}{2}, p\right) 2\cos((x-y)p) f(x)\overline{g(y)} \\
&= \overline{\omega_\infty(j(\bar{f})j(g))} \\
&\quad \overline{+ \int \mathrm{d}p\, |p| \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \bar{N}\left(\frac{x+y}{2}, p\right) 2\cos((x-y)p) \overline{f(x)} g(y)},
\end{aligned}
$$

da sowohl $\bar{N}$ als auch cos reell sind und ω_∞ die Adjunktionsrelation erhält,

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\varphi(j(\bar{f})j(g))} \\
&= \overline{\varphi(j(f)^* j(g))}.
\end{aligned}
$$

Also erhält φ auch die Adjunktionsrelation.

$\square$

Unter Umständen sind diese Funktionale $\mathcal{S}_\mathcal{O}$-thermal mit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$. Von Interesse ist dann, welche dieser lokalen Gleichgewichtsfunktionale Zustände definieren, d.h. welche von ihnen positiv sind. Im nächsten Kapitel sollen Beispiele solcher Funktionale konstruiert werden.

7 Beispiele lokaler Gleichgewichtszustände

Der Begriff eines lokalen Gleichgewichtszustandes ist sowohl für die zweidimensionale als auch für die eindimensionale Stromalgebra definiert. Es zeigt sich jedoch, daß schon die Kenntnis der eindimensionalen Theorie ausreichend viel Information über die zweidimensionale enthält, um auch darauf lokale Gleichgewichtszustände konstruieren zu können. Zu quasifreien lokalen Gleichgewichtszuständen der eindimensionalen Theorie welche scharfe Temperatur haben lassen sich auf kanonische Weise lokale Gleichgewichtszustände mit scharfer Temperatur für die zweidimensionale Theorie finden.

Lemma 7.1 *Seien $\alpha : \mathbb{R} \supset \mathbb{D}(\alpha) \to \mathbb{R}_+$ und $\gamma : \mathbb{R} \supset \mathbb{D}(\gamma) \to \mathbb{R}_+$. Sei $\omega_\alpha^{(1)}$ ein quasifreier, $\mathcal{S}_{\mathbb{D}(\alpha)}$-thermaler Zustand über der eindimensionalen Stromalgebra mit scharfer Temperatur $\alpha(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}(\alpha)$. Ebenso sei $\omega_\gamma^{(1)} : \mathcal{A}^{(1)} \to \mathbb{C}$ quasifrei, $\mathcal{S}_{\mathbb{D}(\gamma)}$-thermal mit scharfer Temperatur $\gamma(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}(\gamma)$. Dann ist das auf der zweidimensionalen Stromalgebra definierte, quasifreie Funktional $\omega : \mathcal{A}^{(2)} \to \mathbb{C}$ gegeben durch*

$$\omega\left(j^\kappa(f)j^l(g)\right) := 2\pi\omega_\alpha^{(1)}(j(f')j(g')) + (-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1}2\pi\omega_\gamma^{(1)}(j(f'')j(g'')) \tag{7.1}$$

(mit f', g', f'' und g'' wie im Beweis von Lemma 4.2) positiv. Darüberhinaus hat es scharfe Temperatur für jedes $x \in T^{-1}(\mathbb{D}(\alpha) \times \mathbb{D}(\gamma)) =: \mathcal{O}$, wobei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad (x^0, x^1) \mapsto 1/2(x^0 - x^1, x^0 + x^1) =: (x_-, x_+)$.

Beweis: Die Positivität von ω folgt nach [11] aus der Positivität seiner Zweipunktfunktion und diese wiederum ergibt sich direkt aus der Positivität von $\omega_\alpha^{(1)}$ und $\omega_\gamma^{(1)}$, denn für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ ist

$$\begin{aligned}
\omega\left(j^\kappa(f)j^\kappa(f)^*\right) &= \omega\left(j^\kappa(f)j^\kappa(\bar{f})\right) \\
&= 2\pi\omega_\alpha^{(1)}(j(f')j(\overline{f'})) + 2\pi\omega_\gamma^{(1)}(j(f'')j(\overline{f''})) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

(da $\overline{f'(u)} = \overline{(2\pi)^{-1/2}\int dv\, f(v, v-u)} = (2\pi)^{-1/2}\int dv\, \overline{f(v, v-u)}$ und ebenso $\overline{f''(u)} = (2\pi)^{-1/2}\int dv\, \overline{f(v, u-v)}$).

Für die Erwartungswerte von $\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)$ in ω ergibt sich

$$\begin{aligned}
\omega\left(\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)\right) &= \lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \zeta^2<0}} \partial_{\zeta_{\boldsymbol{\mu}}} \left[\omega\left(j^\kappa(x+\zeta)j^\lambda(x_\zeta)\right) - \omega_\infty\left(j^\kappa(x+\zeta)j^\lambda(x-\zeta)\right)\right] \\
&\overset{Abschn.\ 5.4}{=} 2\pi \lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \zeta^2<0}} \partial_{\zeta_{\boldsymbol{\mu}}} \Big[\omega_\alpha^{(1)}\big(j((x+\zeta)_-)j((x-\zeta)_-)\big) \\
&\qquad -\omega_\infty^{(1)}\big(j((x+\zeta)_-)j((x-\zeta)_-)\big) \\
&\qquad +(-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1}\Big(\omega_\gamma^{(1)}\big(j((x+\zeta)_+)j((x-\zeta)_+)\big) \\
&\qquad -\omega_\infty^{(1)}\big(j((x+\zeta)_+)j((x-\zeta)_+)\big)\Big)\Big] \\
&= 2\pi(-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1} \lim_{\zeta_-\to 0} \partial_{\zeta_-}^{|\boldsymbol{\mu}|}\Big(\omega_\alpha^{(1)}\big(j((x+\zeta)_-)j((x-\zeta)_-)\big) \\
&\qquad -\omega_\infty^{(1)}\big(j((x+\zeta)_-)j((x-\zeta)_-)\big)\Big) \\
&\qquad +2\pi(-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1} \lim_{\zeta_+\to 0} \partial_{\zeta_+}^{|\boldsymbol{\mu}|}\Big(\omega_\gamma^{(1)}\big(j((x+\zeta)_+)j((x-\zeta)_+)\big) \\
&\qquad -\omega_\infty^{(1)}\big(j((x+\zeta)_+)j((x-\zeta)_+)\big)\Big) \\
&= 2\pi(-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1}\omega_\alpha^{(1)}\left(\eth^{|\boldsymbol{\mu}|} : j^2 : (x_-)\right) \\
&\qquad +2\pi(-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1}\omega_\gamma^{(1)}\left(\eth^{|\boldsymbol{\mu}|} : j^2 : (x_+)\right) \\
&= c_{|\boldsymbol{\mu}|}\left[(-1)^{|\boldsymbol{\mu}|_1}\left(\frac{1}{\alpha(x_-)}\right)^{|\boldsymbol{\mu}|+2} + (-1)^{\delta_{\kappa\lambda}+1}\left(\frac{1}{\gamma(x_+)}\right)^{|\boldsymbol{\mu}|+2}\right] \\
&\overset{(4.3)}{=} \omega_\beta^{(2)}\left(\eth^{\boldsymbol{\mu}} : j^\kappa j^\lambda : (x)\right)
\end{aligned}$$

mit $\beta = \beta(x) = 1/2\big(\gamma(x_+) + \alpha(x_-), \gamma(x_+) - \alpha(x_-)\big)$. Die chiralen Ausdrücke in obiger Gleichungskette sind für $x_- \in \mathbb{D}(\alpha)$ und $x_+ \in \mathbb{D}(\gamma)$ definiert. Daher stimmt ω zumindest für alle $(x_-, x_+) \in \mathbb{D}(\alpha) \times \mathbb{D}(\gamma)$, also für alle $x \in T^{-1}(\mathbb{D}(\alpha) \times \mathbb{D}(\gamma))$, mit $\omega_{\beta(x)}$ auf $\mathcal{S}_x$ überein.

□

Es sollen im folgenden Beispiele für quasifreie lokale Gleichgewichtszustände scharfer Temperatur gegeben werden. Dabei werden wir uns (den obigen Überlegungen folgend) auf die eindimensionale Theorie beschränken.

Zunächst soll gezeigt werden, daß der bereits in [1], [2], [17] und [18] behandelte Hot-Bang-Zustand auch hier auftritt. Wie dort hat er auch hier nur eine thermale Interpretion in einem Vorwärtslichtkegel. Im Gegensatz zu den oben genannten Arbeiten, in denen die Hot-Bang-Zustände die einzig möglichen lokalen Gleichgewichtszustände mit scharfer Temperaturverteilung waren, wird sich hier herausstellen, daß es eine Fülle weiterer lokaler Gleichgewichtszustände scharfer Temperatur gibt.

Wir werden einige Klassen von Funktionen angegeben, die als inverse Temperaturverteilungen interpretiert und daher mit einem lokalen Gleichgewichtszustand verbunden werden können. Allen diesen Funktionen ist gemein, daß sie (um eine Interpretation als inverse Temperatur zu ermöglichen) strikt positiv sind und dies bereits ausreicht, um sie einem lokalen Gleichgewichstfunktional zuzuordnen. Um solchen Funktionalen physikalische Bedeutung geben zu können, bleibt dann zu untersuchen, für welche inversen Temperaturverteilungen diese positiv definit sind, also einen Zustand definieren.

Da bei beliebig vorgegebener Temperaturverteilung das zugeordnete Funktional schwierig auf Positivität zu untersuchen ist, werden wir zunächst zu der etwas stärkeren Bedingung der Positivität eines anderen Funktionals übergehen, welche diejenige des ursprünglichen Funktionals impliziert. Es zeigt sich, daß dieses neue Funktional nicht auf ganz $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ positiv sein kann, bei geeigneter Wahl der inversen Temperaturfunktion jedoch zumindest auf Unterräumen. Auf diesen ist dann natürlich auch das eigentlich interessierende Funktional positiv.

7.1 Der Hot-Bang-Zustand

Als erstes Beispiel eines chiralen quasifreien lokalen Gleichgewichtszustandes werden wir den Hot-Bang-Zustand angeben, der eine ähnliche Form wie in [1] bzw. [2] hat. Dieser Zustand wird auf die in Lemma 6.6 beschriebene Weise aus den chiralen Teilen der Phasenraum-Teilchendichte gewonnen.

Lemma 7.2 *Sei $\gamma > 0$. Das quasifreie Funktional $\omega : \mathcal{A}^{(1)} \to \mathbb{C}$, gegeben durch die Zweipunktfunktion*

$$\omega(j(f)j(g)) := (2\pi)^{-2} \int dp \int dx \int dy f(x)g(y) \frac{p}{1-e^{-\gamma(x+y)p}}\, e^{-i(x-y)p} \tag{7.2}$$

für alle $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, ist $\mathcal{S}_x$-thermal für alle $x \in \mathbb{R}_+$ und ein Zustand für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$.

Bemerkung 7.3 *Die Zweipunktfunktion (7.2) wird auf die in Lemma 6.6 beschriebene Weise konstruiert, in dem man von der Phasenraum-Teilchendichte $p(2\pi|p|)^{-1}\theta(p)$ $(e^{\gamma xp}-1)^{-1}$ ausgeht. $\mathscr{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ ist die Menge aller Testfunktionen mit kompaktem Träger auf der positiven reellen Achse.*

Beweis: Zum Beweis von Lemma 7.2 sind mehrere Dinge zu zeigen. Wir zeigen zunächst die $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+}$-Thermalität des Funktionals, dann dessen Positivität. Eichinvarianz ist aufgrund der Forderung nach Quasifreiheit klar, Konsistenz mit den Kommutatorrelationen und Normiertheit nach Lemma 6.6 ebenfalls.
Um die Elemente von $\mathcal{S}_x$ für a priori beliebiges $x \in \mathbb{R}$ im Zustand (7.2) auszuwerten, berechnet man:

$$\begin{aligned}\omega\left(\eth^m : j^2 : (x)\right) &= \lim_{\zeta\to 0} \partial_\zeta^m \left[\omega(j(x+\zeta)j(x-\zeta)) - \omega_\infty(j(x+\zeta)j(x-\zeta))\right] \\ &= (2\pi)^{-2} \lim_{\zeta\to 0} \partial_\zeta^m 2 \int \mathrm{d}p\, \theta(p) \frac{p}{e^{2\gamma xp}-1} \cos(2\zeta p).\end{aligned}$$

Für ungerade Ableitungen verschwindet der Integralausdruck offenbar im Grenzübergang $\zeta \to 0$, da der Integrand dann proportional zu $\sin(2\zeta p)$ ist. Also betrachten wir nur gerade Ableitungen, zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $2m$ statt m. Ableitungen und Grenzwert lassen sich unter das Integral ziehen, und es ist dann

$$\begin{aligned}\omega\left(\eth^{2m} : j^2 : (x)\right) &= (-1)^m (2\pi)^{-2}\, 2^{2m+1} \int \mathrm{d}p\, \theta(p)\, p^{2m+1} \frac{1}{e^{2\gamma x p} - 1} \\ &= (-1)^m (2\pi)^{-2}\, 2^{2m+1} \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^{2m+1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\gamma x p n}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt nur noch für $x > 0$, da sonst die Reihe im obigen Ausdruck nicht definiert ist. Die Folge der Partialsummen wird von ihrem Grenzwert dominiert, so daß der Grenzprozeß nach der Integration ausgeführt werden kann. Die Integrale $\int \mathrm{d}p\, \theta(p)\, p^{2m+1} e^{-2\gamma x p n}$ lassen sich elementar berechnen, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} &= (-1)^m (2\pi)^{-2}\, 2^{2m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2m+1)!}{(2\gamma x n)^{2m+2}} \\ &= (-1)^m (2\pi)^{-2}\, \frac{1}{2} (\gamma x)^{-(2m+2)} (2m+1)! \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{2m+2} \\ &= (-1)^m (2\pi)^{2m} \frac{|B_{2m+2}|}{4\,(2m+2)} (\gamma x)^{-(2m+2)},\end{aligned}$$

wobei B_{2m+2} die Bernoulli-Zahlen bezeichnet. Die Erwartungswerte der $\eth^m : j^2 : (x)$ in ω stimmen also mit denen in einem KMS-Zustand mit $\beta = \gamma x$ überein (siehe (5.10). Damit definiert (7.2) ein $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+}$-thermales Funktional, da die einzige Bedingung $x > 0$ war und es für jedes $x > 0$ einen KMS-Zustand mit $\beta = \gamma x$ gibt.
Es bleibt noch zu beweisen, daß das Hot-Bang-Funktional positiv ist. Dazu reicht es, die Positivität der Zweipunktfunktion zu zeigen (siehe [11]). Es ist

$$\begin{aligned}\omega(j(f)j(f)^*) &= \omega(j(f)j(\bar{f})) \\ &= (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}p \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \frac{p\, e^{-\mathrm{i}(x-y)p}}{1 - e^{-\gamma(x+y)p}} f(x)\overline{f(y)} \\ &= \omega_\infty(j(f)j(f)^*) + (2\pi)^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}p \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, p\, \theta(p) \Big(e^{\mathrm{i}(x-y)p} \\ &\qquad + e^{-\mathrm{i}(x-y)p} \Big) e^{-n\gamma(x+y)p} f(x)\overline{f(y)},\end{aligned}$$

wie sich nach einiger Rechnung ergibt. Die Zweipunktfunktion des Vakuums ist positiv, also muß nur noch der hintere Teil des Ausdrucks betrachtet werden. Es ist

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y e^{\pm\mathrm{i}(x-y)p} e^{-n\gamma(x+y)p} f(x)\overline{f(y)} &= \int \mathrm{d}x e^{\pm\mathrm{i}xp} e^{-n\gamma x p} f(x) \overline{\int \mathrm{d}y e^{\pm\mathrm{i}yp} e^{-n\gamma y p} f(y)} \\ &= \left| \int \mathrm{d}x e^{\pm\mathrm{i}xp} e^{-n\gamma x p} f(x) \right|^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

für alle f und alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist natürlich auch die Reihe positiv, und es folgt die Positivität der Zweipunktfunktion.

□

Wie wir gesehen haben, sind die Erwartungswerte von Elementen aus $\mathcal{S}_x$ im Hot-Bang-Zustand für alle $x > 0$ definiert. Die Funktionen $x \mapsto \omega\left(\eth^{2m} : j^2 : (x)\right)$ haben bei $x = 0$ einen Pol, dort werden die Erwartungswerte unendlich groß. x ist eine chirale Variable, $x = 0$ bedeutet also $x_0 = x_1$ oder $x_0 = -x_1$. Erwartungswerte der thermalen Observablen im zum Hot-Bang-Zustand korrespondierenden zweidimensionalen Funktional (dessen Zweipunktfunktion sich als Summe zweier Hot-Bang-Zweipunktfunktionen, die jeweils nur von der einen oder anderen chiralen Koordinate abhängen, schreibt) divergieren also am Rand des Vorwärtslichtkegels. Dies erlaubt eine analoge Interpretation des Hot-Bang-Zustandes wie in [2].

7.2 Lokale Gleichgewichtsfunktionale mit scharfer Temperatur

Der Hot-Bang-Zustand ist nicht das einzige lokale Gleichgewichtsfunktional zu scharfer Temperatur. Es stellt sich heraus, daß in (7.2) der Ausdruck $\gamma(x+y)$ viel zu einschränkend gewählt ist. Statt einer linearen führt schon jede positive Funktion auf ein lokales Gleichgewichtsfunktional mit scharfer Temperatur.

Lemma 7.4 *Sei $\beta : \mathbb{D}(\beta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Dann ist das quasifreie Funktional $\omega : \mathcal{A}^{(1)} \to \mathbb{C}$, gegeben durch die Zweipunktfunktion*

$$\omega(j(f)j(g)) := (2\pi)^{-2} \int dp \int dx \int dy \frac{p}{1 - e^{-\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)p}} e^{-i(x-y)p} f(x)g(y) \tag{7.3}$$

für alle $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\mathcal{S}_x$-thermal für alle $x \in \mathbb{D}(\beta)$.

Beweis: Der Beweis des Lemmas folgt demjenigen von Lemma 7.2. Es ergibt sich (mit analoger Rechnung wie im Beweis von 7.2):

$$\omega\left(\eth^{2m+1} : j^2 : (x)\right) = 0$$

und

$$\omega\left(\eth^{2m} : j^2 : (x)\right) = (-1)^m (2\pi)^{2m} \frac{|B_{2m+2}|}{4\,(2m+2)} (\beta(x))^{-(2m+2)}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Erwartungswerte der thermalen Observablen sind also dieselben wie in einem KMS-Zustand zur Temperatur $\beta(x)$. Die Einschränkung $x > 0$ entfällt aufgrund der geforderten strikten Positivität von β. Damit ist ω $\mathcal{S}_{\mathbb{D}(\beta)}$-thermal.

□

Es gibt also eine sehr große Klasse thermaler Funktionale. Es stellt sich nun die Frage, für welche Funktionen β diese Funktionale einen Zustand definieren, also positiv sind. Wegen der Quasifreiheit ist dies genau dann der Fall, wenn $\omega\left(j(\overline{f})j(f)\right)$

positiv für alle Testfunktionen f ist. Da (7.3) schwierig auf Positivität zu untersuchen ist, werden wir zunächst zu einer etwas stärkeren Forderung übergehen. Es wird sich jedoch im nächsten Kapitel zeigen, daß das mit dieser Forderung verbundene Funktional nicht auf ganz $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ positiv sein kann.

ω bezeichne im folgenden das durch die Zweipunktfunktion (7.3) bestimmte lokal thermale Funktional. Es gilt das folgende

Lemma 7.5 *Sei β eine positive Funktion. Falls*

$$\varphi^\alpha(f,f) := \int dx \int dy\, \overline{f(x)}\, f(y)\, e^{-\alpha\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)} \geq 0 \tag{7.4}$$

für alle $\alpha > 0$ und alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, so ist auch $\omega\left(j(\overline{f})j(f)\right) \geq 0$ für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Beweis: Wähle $\alpha = n \cdot |p|$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{R}$. Desweiteren sei $f := e^{\mathrm{i}p(\cdot)}g$ mit $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Dann ist

$$\varphi^\alpha(f,f) = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{g(x)}\, g(y) e^{-n|p|\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)} e^{-\mathrm{i}(x-y)p} > 0.$$

Da n und p beliebig waren, gilt dies für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $p \in \mathbb{R}$. Für $p > 0$ ist

$$p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{p}{1 - e^{-\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)p}}\,,$$

für $p < 0$ gilt

$$|p| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n|p|\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)} = |p| \cdot \frac{e^{-|p|\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)}}{1 - e^{-|p|\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)}} = \frac{p}{1 - e^{-\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)p}}.$$

Nach dem Satz über dominierte Konvergenz ist somit

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{g(x)}\, g(y) \frac{p}{1 - e^{-\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)p}}\, e^{-\mathrm{i}(x-y)p} \geq 0$$

für alle $p \in \mathbb{R}$. Nach Integration über p folgt die Behauptung, da g beliebig war.

□

Die Positivität des durch (7.4) definierten Funktionals φ^α für jedes $\alpha > 0$ ist demnach hinreichend für die Positivität eines der Funktion β zugeordneten thermalen Funktionals. Wie bereits weiter oben erwähnt, wird sich herausstellen, daß die Forderung (7.4) nicht für alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sondern nur für solche mit Träger in einem bestimmten Gebiet erfüllt werden kann. Das obige Lemma gilt jedoch auch dann noch, wenn nur Testfunktionen mit Träger in einer gegebenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ betrachtet werden:

Korollar 7.6 *Sei B eine offene Untermenge von $\mathbb{R}$. Gilt (7.4) für alle $\alpha > 0$ und alle $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit supp$(f) \subset B$, so folgt $\omega\left(j(\bar{f})j(f)\right) \geq 0$ für alle solchen f.*

Beweis: Der Beweis läuft völlig analog zu dem des vorigen Lemmas, da für alle $p \in \mathbb{R}$ und alle $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $\mathrm{supp}(g) \subset B$ auch $\mathrm{supp}\left(e^{\mathrm{i}p(\cdot)}g\right) \subset B$.

□

Der lineare Raum der komplexwertigen Testfunktionen, welche Träger in $B \subset \mathbb{R}$ haben, wird von nun an (in Anlehnung an $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) mit $\mathscr{D}(B, \mathbb{C})$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathscr{D}(B, \mathbb{C})$ seien auf $\mathbb{R} \setminus B$ durch Null fortgesetzt, womit $\mathscr{D}(B, \mathbb{C}) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt.

7.3 Eine notwendige Bedingung für die Positivität von φ^α

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit von (7.4) die Konkavität der Funktion β ist. Dazu betrachten wir allgemeine Ausdrücke der Form

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{f(x)} f(y) A(x+y).$$

Es stellt sich heraus, daß solche Integrale, deren Kern A nur von der Summe $x+y$ abhängt, nur dann positiv für alle Testfunktionen sein können, wenn $A : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{R}_+$ eine konvexe Funktion ist. Indem man den Fall $A(x+y) = e^{-\alpha\beta((x+y)/2)}$ betrachtet, kann dann auf die Konkavität von β geschlossen werden.

Die Konkavität von β impliziert überdies, daß φ^α nicht positiv (semi)definit auf ganz $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sein kann.

Sei $A : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{R}_+$. Es gebe Zahlen $a, b, c \in \mathbb{D}(A)$ mit $a = b + c$, wobei $b \neq c$, und es gelte

$$A(2b) + A(2c) < 2A(a).$$

Wir untersuchen das Integral

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{f(x)} f(y) A(x+y) \tag{7.5}$$

mit Testfunktionen f aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auf Positivität. Mit U_ε^y sei eine ε-Umgebung von y bezeichnet. Wir wählen nun eine Testfunktion $f = g_b - g_c$, wobei $g_{b,c} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ so, daß $g_{b,c}(x) = 1$ für $x \in U_\varepsilon^{b,c}$ und $\mathrm{supp}(g_{b,c}) \subset U_{2\varepsilon}^{b,c}$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{f(x)} f(y) A(x+y) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}x \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}y\, \big[A(2b+x+y) + A(2c+x+y) \\ &\qquad -2A(a+x+y)\big] + R(\varepsilon). \end{aligned}$$

Bei festgehaltenem ε kann $|R(\varepsilon)|$ durch eine geeignete Wahl von g_b und g_c beliebig klein gemacht werden. Da auch ε beliebig klein sein kann, wird für stetige A der

Integrand wegen $A(2b) + A(2c) < 2A(a)$ negativ für alle $(x, y) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, daher ist dann auch (7.5) negativ.

Demnach gilt, daß für jede positive und stetige Funktion $A : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{R}_+$ die Bedingung

$$A(2b) + A(2c) \geq A(a) \quad \text{für alle} \quad a, b, c \in \mathbb{D}(A),\ a = b + c,\ b \neq c \tag{7.6}$$

notwendig ist für

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{f(x)} f(y) A(x + y) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \tag{7.7}$$

Es sei o.B.d.A. $b < c$. Wegen $a = b + c$ ist dann $2b < a < 2c$. Mit $c = a - b$ erhält man

$$2c - a = 2a - 2b - a = a - 2b =: \eta.$$

Die Bedingung (7.6) wird damit zu

$$A(x - \eta) + A(x + \eta) \geq 2A(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{D}(A) \text{ und } \eta > 0.$$

Für stetige A ist diese Bedingung äquivalent zu Konvexität:

Lemma 7.7 *Sei* $A : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{R}_+$ *eine positive, stetige Funktion.* A *ist genau dann konvex, wenn*

$$A(x + \eta) + A(x - \eta) \geq 2A(x) \tag{7.8}$$

für alle $x \in \mathbb{D}(A)$ *und* $\eta > 0$ *(so daß* $x \pm \eta \in \mathbb{D}(A)$*).*

Beweis: Wenn A konvex ist, so ist

$$A((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)A(x) + tA(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{D}(A)$ und $t \in [0, 1]$ erfüllt. Damit ist auch

$$A(x) = A\left(\frac{1}{2}(x + \eta) + \frac{1}{2}(x - \eta)\right) \leq \frac{1}{2}A(x + \eta) + \frac{1}{2}A(x - \eta).$$

Zum Beweis der anderen Richtung der Äquivalenz sei angenommen, A wäre nicht konvex. Dann gäbe es Punkte $x, y, z_0 \in \mathbb{D}(A)$ mit $x < z_0 < y$ so, daß

$$A(z_0) > \frac{y - z_0}{y - x} A(x) + \frac{z_0 - x}{y - x} A(y), \tag{7.9}$$

$(z_0, A(z_0))$ läge also oberhalb der Geraden durch $(x, A(x))$ und $(y, A(y))$. Falls $y - z_0 = z_0 - x$ ergibt sich sofort ein Widerspruch zu (7.8). Für den Fall, daß $y - z_0 \neq z_0 - x$ beruht die Beweisführung auf einem Spiegelungsalgorithmus. Zum zuletzt bestimmten Punkt z_n (beginnend mit z_0) wird der nächstliegende von den bereits zuvor bestimmten Punkten gesucht:

$$z^n := \left\{ z \middle| \min_{z'} \left(\operatorname{dist}(z', z_n)\right) = \operatorname{dist}(z, z_n), z' = x, y, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1} \right\}.$$

Dann ergibt sich z_{n+1} durch Spiegelung des Punktes z^n an z_n:

$$z_{n+1} = 2z_n - z^n.$$

z_{n+1} (und alle nachfolgenden Folgeglieder) liegen im Innern des Intervalls zwischen dem linken Nachbarn von z_n und z_n oder dem rechten Nachbarn von z_n und z_n. Diese Intervalle werden von Schritt zu Schritt kleiner; ihre Länge unterschreitet jeden beliebigen positiven Wert. Daher konvergiert die Folge (z_n) gegen ein $z \in (x, y)$. Wegen (7.8) muß

$$A(z_{n+1}) \geq 2A(z_n) - A(z^n)$$

gelten. Wegen (7.9) gibt es dem Algorithmus zufolge damit ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $A(z_N)$ größer ist, als die Funktionswerte seines linken und rechten Nachbarn, welche mit z_L bzw. z_R bezeichnet seien. Dann jedoch ist für jedes $n > N$ wegen (7.8)

$$A(z_{n+1}) - A(z_n) \geq A(z_n) - A(z_{n-1}) \geq \cdots \geq \min_{z'=z_R,z_l} \big(A(z_N) - A(z')\big) =: c > 0.$$

Daher ist $A(z_n) \geq A(z_N) + (n - N) \cdot c$. Damit aber ist $\lim_n A(z_n) = \infty \neq A(z)$ im Widerspruch zur Stetigkeit von A.

$\square$

Für stetige A ist Konvexität also notwendig für (7.7). Wir betrachten die Funktion $A_\alpha : \mathbb{D}(\beta) \to (0, 1)$, definiert durch $A_\alpha(x) := e^{-\alpha\beta(x/2)}$ mit auf $\mathbb{D}(\beta)$ positivem und stetigem β. $\mathbb{D}(\beta)$ sei zusammenhängend. $A_\alpha(x + y)$ ist der Integralkern aus (7.4). Damit φ^α für jedes $\alpha > 0$ positiv (semi)definit sein kann, muß den obigen Überlegungen zufolge A_α für jedes $\alpha > 0$ konvex sein.

Lemma 7.8 *A_α ist genau dann konvex für alle $\alpha > 0$, wenn β konkav ist.*

Beweis: Sei A_α konvex für alle $\alpha > 0$. Dann ist für alle $0 \leq t \leq 1$ und alle $x, y \in \mathbb{D}(\beta)$ mit $x < y$

$$A_\alpha\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)A_\alpha(x) + tA_\alpha(y).$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind echt positiv und wir können ihre Logarithmen betrachten:

$$-\alpha\,\beta\Big((1-t)\frac{x}{2} + t\frac{y}{2}\Big) \leq \log\Big[(1-t)e^{-\alpha\beta(x/2)} + te^{-\alpha\beta(y/2)}\Big].$$

Also gilt

$$\beta\left((1-t)\frac{x}{2} + t\frac{y}{2}\right) \geq -\frac{1}{\alpha}\log\Big[(1-t)e^{-\alpha\beta(x/2)} + te^{-\alpha\beta(y/2)}\Big]$$

für alle $\alpha > 0$. Die rechte Seite der Ungleichung läßt sich bezüglich α (rechts)stetig in die Null fortsetzen. Dort hat sie den Wert

$$\lim_{\alpha\to 0} -\frac{1}{\alpha}\log\left[(1-t)e^{-\alpha\beta(x/2)} + te^{-\alpha\beta(y/2)}\right] = (1-t)\beta(x/2) + t\beta(y/2).$$

Folglich gilt auch in einer Umgebung der Null

$$\beta\Big((1-t)\frac{x}{2} + t\frac{y}{2}\Big) \geq (1-t)\beta\Big(\frac{x}{2}\Big) + t\,\beta\Big(\frac{y}{2}\Big)$$

und β ist konkav.

Sei umgekehrt β konkav. Dann ist wegen der Positivität von β für jedes $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} A_\alpha\big((1-t)x + ty\big) &= e^{-\alpha\beta\big((1-t)(x/2)+t(y/2)\big)} \\ &\leq e^{-\alpha\big[(1-t)\beta(x/2)+t\beta(y/2)\big]} \\ &\leq (1-t)e^{-\alpha\beta(x/2)} + te^{-\alpha\beta(y/2)}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung wegen der Konvexität der Exponentialfunktion gilt. Also ist für jedes $\alpha > 0$

$$A_\alpha\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)A_\alpha(x) + tA(y)$$

und A_α konvex.

□

Damit φ^α für jedes $\alpha > 0$ positiv (semi)definit ist, muß β also eine konkave Funktion sein. Falls β keine konstante Funktion ist, kann sie dann jedoch nicht positiv auf ganz $\mathbb{R}$ sein:

Lemma 7.9 *Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konkave Funktion, nicht jedoch konstant. Dann ist β nicht strikt positiv.*

Beweis: Da β nicht konstant ist, gibt es $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $\beta(x) \neq \beta(y)$. Für alle $z_1 \in (x, y)$ gilt wegen der Konkavität von β

$$\beta(z) \geq z\left(\frac{\beta(y)-\beta(x)}{y-x}\right) + \frac{y\beta(x) - x\beta(y)}{y-x}, \tag{7.10}$$

die Funktionswerte liegen also alle oberhalb der Geraden durch $(x, \beta(x))$ und $(y, \beta(x))$.

Angenommen β wäre strikt positiv. Wir betrachten den Fall $\beta(y) > \beta(x) > 0$. Angenommen es gäbe ein $z_0 < x$, dessen Funktionswert über der durch die rechte Seite von (7.10) definierten Geraden liegt, also

$$\beta(z_0) > z_0\left(\frac{\beta(y)-\beta(x)}{y-x}\right) + \frac{y\beta(x) - x\beta(y)}{y-x}. \tag{7.11}$$

Sei $z_1 \in (x, y)$. Dann ist wegen der Konkavität von β und wegen (7.10) und (7.11) für alle $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\beta\big((1-t)z_0 + tz_1\big) \quad &> \quad (1-t)\left[z_0\left(\frac{\beta(y)-\beta(x)}{y-x}\right) + \frac{y\beta(x)-x\beta(y)}{y-x}\right] \\ &\qquad + t\left[z_1\left(\frac{\beta(y)-\beta(x)}{y-x}\right) + \frac{y\beta(x)-x\beta(y)}{y-x}\right].\end{aligned}$$

Es ist $x \in (z_0, z_1)$ und damit

$$\begin{aligned}\beta(x) \quad &> \quad \frac{z_1-x}{z_1-z_0} z_0 \frac{\beta(y)-\beta(x)}{y-x} + \frac{z_1-x}{z_1-z_0} \frac{y\beta(x)-x\beta(y)}{y-x} \\ &\qquad + \frac{x-z_0}{z_1-z_0} z_1 \frac{\beta(y)-\beta(x)}{y-x} + \frac{x-z_0}{z_1-z_0} \frac{y\beta(x)-x\beta(y)}{y-x} \\ &= \quad \frac{\beta(y)-\beta(x)}{y-x}\left(\frac{z_1-x}{z_1-z_0} z_0 + \frac{x-z_0}{z_1-z_0} z_1\right) + \frac{y\beta(x)-x\beta(y)}{y-x} \\ &= \quad \beta(x),\end{aligned}$$

und es ergibt sich ein Widerspruch. Daher liegen die Funktionswerte $\beta(z)$ für alle $z < x$ unterhalb oder auf der durch (7.10) definierten Geraden. Da $\beta(y) > \beta(x)$, gibt es ein $z_\beta < x$, so daß diese Gerade für alle $z < z_\beta$ negative Werte annimmt und es ergibt sich ein Widerspruch zur strikten Positivität von β.

Der Fall $\beta(x) > \beta(y) > 0$ wird analog behandelt, wobei angenommen wird, es gäbe ein $z_0 > y$, dessen Funktionswert oberhalb der durch (7.10) definierten Geraden liegt.

□

Eine nichtkonstante Funktion kann also nicht auf ganz $\mathbb{R}$ positiv und konkav sein. Positivität von β ist jedoch notwendig für die Interpretation des zugehörigen Funktionals als lokales Gleichgewichtsfunktional, Konkavität für die Gültigkeit von (7.4).

Um die Möglichkeit einer thermalen Interpretation aufrechtzuerhalten, werden wir im folgenden von auf ganz $\mathbb{R}$ definierten und dort positiven Funktionen β ausgehen. Es ist nach dem gerade gezeigten Lemma klar, daß diese nicht global konkav sein können und daher das zugeordnete Funktional φ^α nicht positiv (semi)definit auf ganz $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; die betrachteten Testfunktionen müssen geeigneten Träger haben.

Sei $B \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Falls $\varphi^\alpha(f, f) \geq 0$ für alle $f \in \mathscr{D}(B, \mathbb{C})$ und alle $\alpha > 0$ gilt, so muß den obigen Überlegungen folgend die Funktion β zumindest auf

$$\left\{ z \middle| z = \frac{x+y}{2}, \quad x, y \in B \right\} = B$$

konkav sein (da im Integral wegen $\mathrm{supp}(f) \subset B$ nur die Funktionswerte von β in diesem Bereich eine Rolle spielen).
Wir fassen das bisher Gezeigte in einem Satz zusammen.

Satz 7.10 *Sei β eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, positive Funktion. Sei $B \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.*

1. *Falls $\varphi^\alpha(f,f) \geq 0$ für alle $f \in \mathscr{D}(B,\mathbb{C})$ und alle $\alpha > 0$, so ist β auf B konkav.*

2. *Für jedes $\alpha > 0$ gibt es ein $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, so daß $\varphi^\alpha(f,f) < 0$.*

Wir werden uns in Zukunft auf solche Funktionen β beschränken, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und positiv sind, und auf einem offenen Intervall $B \subset \mathbb{R}$ zudem stetig und konkav. Diejenigen Funktionen, die auf einen lokalen Gleichgewichtszustand führen (also für die φ^α positiv (semi)definit ist) sollen als *inverse Temperaturfunktionen* bezeichnet werden.

Auch die Menge der betrachteten Testfunktionen soll noch geeignet eingeschränkt werden. Für alle Testfunktionen aus $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mit Träger in B, ist die notwendige Bedingung aus Satz 7.10 (*1.*) für die Positivität von $\varphi^\alpha(f,f)$ für alle $\alpha > 0$ offenbar erfüllt. Da B von β abhängt, definieren wir daher als Menge der zulässigen Testfunktionen

$$\mathscr{D}_\beta(\mathbb{C}) := \mathscr{D}(B,\mathbb{C}). \tag{7.12}$$

Wenn (7.4) für alle $f \in \mathscr{D}_\beta(\mathbb{C})$ erfüllt ist, so ist auch das ursprüngliche Funktional (7.3) positiv (semi)definit auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{C})$, also ist es ein lokaler Gleichgewichtszustand mit thermaler Interpretation in B.

Wir wollen das Kapitel mit einigen Bemerkungen abschließen.

Wenn β_- und β_+ zwei (zweimal stetig differenzierbare) positive, konkave Funktionen sind, die auf lokale Gleichgewichtszustände führen, so wird diesen nach Lemma 7.1 ein lokaler Gleichgewichtszustand der zweidimensionalen Theorie zugeordnet. Für die Temperatur im Thermalitätsgebiet dieses Zustandes gilt (mit $x = (x_0, x_1)$)

$$T(x)^2 = \frac{1}{|\beta(x)|^2} = \frac{1}{\beta_+(x_+)\beta_-(x_-)}.$$

Da $\beta_\pm$ positiv und konkav sind, ist $x_\pm \mapsto \big(\beta_\pm(x_\pm)\big)^{-1}$ konvex. Daher ist $T(x)^2$ bezüglich jeder der chiralen Komponenten konvex. Im Thermalitätsgebiet kann die Temperatur daher in lichtartigen Richtungen nur entweder monoton steigen oder fallen, oder sie hat ein Minimum.

Beispiel 7.11 *Die Funktion $x \mapsto \beta(x) := C^2 - x^2$ mit $C > 0$ führt zu einer Temperaturverteilung mit Minimum im Thermalitätsgebiet des zugeordneten lokalen Gleichgewichtszustandes.*

Für $f \in \mathscr{D}((-C,C),\mathbb{C})$ ist mit diesem β nämlich

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{f(x)} f(y) e^{-\alpha\beta((x+y)/2)} &= e^{-\alpha C^2} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{f(x)} f(y) e^{(\alpha/4)(x^2+2xy+y^2)} \\
&= e^{-\alpha C^2} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \overline{f(x)} f(y) e^{\alpha(x^2/4)} e^{\alpha(y^2/4)} \sum_n \frac{\alpha^n}{2^n n!} x^n y^n \\
&= e^{-aC^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{2^n n!} \left| \int \mathrm{d}x\, f(x) e^{a(x^2/4)} x^n \right|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Also ist φ^α für dieses β positiv definit. Demzufolge führt β auf einen lokalen Gleichgewichtszustand mit Thermalitätsgebiet $(-C, C)$. $\beta(x)$ ist für $x = 0$ maximal. Der lokale Gleichgewichtszustand der zweidimensionalen Theorie, der über Lemma 7.1 mit $\beta_\pm(x_\pm) = C^2 - x_\pm^2$ gebildet wird, hat als Thermalitätsgebiet einen Doppelkegel, in dessen Mitte die Temperatur ein Minimum annimmt (da dort $\beta_- \cdot \beta_+$ maximal ist).

Das Phänomen eines Minimums der Temperatur im Innern des Thermalitätsgebietes ist bemerkenswert, da es in den bisher behandelten Modellen nicht auftritt (siehe [2], [17], [18], [19]).

Die Notwendigkeit der Konkavität von β ist nur für die Positivität von φ^α für alle $\alpha > 0$ gezeigt worden. Wenn man diese Bedingung auch auf die Positivität des ursprünglichen Funktionals (7.3) ausweiten könnte, so würde auf diese Weise ein Singularitätentheorem ähnlich dem in [2] etabliert. Es wäre dann wegen Lemma 7.9 nicht möglich, daß (7.3) auf ganz $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ positiv (semi)definit ist, daher gäbe es keine $\mathbb{R}^2$-thermalen lokalen Gleichgewichtszustände scharfer Temperatur. Es ist bisher jedoch noch nicht gelungen, die Notwendigkeit der Konkavität von β für die Positivität des Funktionals (7.3) nachzuweisen. Daher ist nicht ausgeschlossen, daß es in der Theorie nichttriviale lokale Gleichgewichtszustände scharfer Temperatur mit thermaler Interpretation im gesamten zweidimensionalen Minkowski-Raum gibt.

Eine letzte Bemerkung. Es ist möglich, andere Funktionen β als die genannten als mögliche Kandidaten für inverse Temperaturfunktionen zuzulassen. Beispielsweise könnte man Funktionen betrachten, die nicht auf einem offenen Intervall stetig und konkav sind, sondern auf mehreren (abzählbar vielen) offenen Intervallen. Als zulässige Testfunktionen könnte man dann all diejenigen wählen, welche Träger in einem dieser Intervalle haben. Ein lokaler Gleichgewichtszustand, der einer solchen inversen Temperaturfunktion zugeordnet wäre, schiene dann aber nur eine thermale Interpretation in diesen Intervallen zu haben, nicht jedoch dazwischen, was nicht natürlich erscheint.

7.4 Konstruktion von inversen Temperaturfunktionen

Im folgenden Teil sollen einige Klassen von Funktionen β konstruiert werden, für welche φ^α positiv auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{C})$ ist, und die somit eine Interpretation des ihnen zugeordneten Funktionals ω als lokalen Gleichgewichtszustand zulassen.

Zunächst wird bemerkt, daß es reicht, sich auf reellwertige Funktionen aus $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{C})$ einzuschränken, deren Gesamtheit mit $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$ bezeichnet werden soll.

Danach werden wir die Bedingung an Positivität noch etwas verstärken, indem der Integralkern $e^{-\alpha\beta}$ als Grenzwert $\lim_n(1-(\alpha/n)\beta)^n$ aufgefaßt wird, und der Kern $1-(\alpha/n)\beta$ für große n auf Positivität untersucht wird.

Im Anschluß werden wir inverse Temperaturfunktionen konstruieren, indem wir die Laplace-Transformierten geeigneter positiver Maße untersuchen. Es zeigt sich, daß die so konstruierten Funktionen sämtlich monoton wachsend sind und auf lokale Gleichgewichtszustände mit unendlich ausgedehnten Thermalitätsgebieten führen.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß man sich bei der Untersuchung der Positivität des Funktionals φ^α auf reellwertige Testfunktionen einschränken kann. Dies ist eine Folge der Symmetrie des Integralkerns $e^{-\alpha\beta((x+y)/2)}$. Wir zerlegen die Testfunktion $f \in \mathscr{D}_\beta(\mathbb{C})$ gemäß

$$f(x) = \mathrm{Re}(f)(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)(x).$$

Dann ist

$$\varphi^\alpha(f,f) = \varphi^\alpha\big(\mathrm{Re}(f),\mathrm{Re}(f)\big) + \varphi^\alpha\big(\mathrm{Im}(f),\mathrm{Im}(f)\big),$$

da der imaginäre Teil dieses Ausdrucks aufgrund der Invarianz des Integralkerns unter Vertauschung von x und y verschwindet. Real- und Imaginärteil von f sind unabhängig, daher ist φ^α genau dann positiv auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{C})$, wenn

$$\varphi^\alpha(f,f) \geq 0$$

für jedes reellwertige $f \in \mathscr{D}_\beta(\mathbb{C})$. Wir wollen die Menge dieser Funktionen mit $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$ bezeichnen und uns in allen weiteren Betrachtungen auf sie einschränken.

Als nächstes soll die Positivitätsbedingung (7.4) noch etwas verschärft werden, indem wir zeigen, daß für die Positivität von

$$\varphi^\alpha(f,f) = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(x)f(y)e^{-\alpha\beta(\frac{x+y}{2})}$$

auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$ für alle $\alpha > 0$ diejenige von

$$\varphi_\varepsilon(f,f) := \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(x)f(y)\left(1-\varepsilon\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \tag{7.13}$$

auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$ für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$ hinreichend ist.
Dazu betrachtet man

$$\lim_n \left(1-\frac{\alpha}{n}\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^n = e^{-\alpha\beta(\frac{x+y}{2})}$$

und bemerkt, daß

$$
\begin{aligned}
\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\,|f(x)f(y)|\left|1-\frac{\alpha}{n}\beta\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right|^n &\le \int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\,|f(x)f(y)|\left(1+\frac{\alpha}{n}\beta\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right)^n \\
&\le \int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y|f(x)f(y)|e^{\alpha\beta(\frac{x+y}{2})} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (wobei die Ungleichungen bereits für die Integranden gelten und das letzte Integral existiert, weil f kompakten Träger hat). Also ist wegen des Satzes über majorisierte Konvergenz

$$\varphi^\alpha(f,f) = \lim_n \int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\,f(x)f(y)\left(1-\frac{\alpha}{n}\beta\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right)^n. \tag{7.14}$$

Wenn ein Integralkern $K(x,y)$ positiv semidefinit ist, so gilt dies auch für $K(x,y)^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (siehe [15]). Wenn es daher ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\varphi_{\alpha/n}$ aus (7.13) für alle $n > N$ auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$ positiv semidefinit ist, so ist auch

$$\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\,f(x)f(y)\left(1-\frac{\alpha}{n}\beta\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right)^n \ge 0$$

für alle $n > N$ und $f \in \mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$, und wegen (7.14) ist dann φ^α positiv (semi)definit auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$.

Wir haben damit das Positivitätsproblem (7.4) auf die Untersuchung der Positivität von φ_ε reduziert:

Lemma 7.12 *Wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $\varphi_{\varepsilon'}$ für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ positiv semidefinit auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$ ist, so gilt dies auch für φ^α mit beliebigem $\alpha > 0$.*

Beweis: Diese Aussage folgt aus den obigen Überlegungen, denn für gegebenes $\alpha > 0$ gibt es immer ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\alpha/n < \varepsilon$ für alle $n > N$.

□

Nun sollen mithilfe der Laplace-Transformation geeigneter Funktionen inverse Temperaturfunktionen konstruiert werden, die den Positivitätsbedingungen genügen.

Sei μ eine auf $(0,\infty)$ positive und dort lokal integrable Funktion, und es gebe $K, k, \delta > 0$, so daß für alle $\gamma > k$

$$\mu(\gamma) \le Ke^{\delta\gamma}. \tag{7.15}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert die *Laplace-Transformierte* $L(\mu)$ von μ gegeben durch

$$L(\mu)(z) := \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma\,\mu(\gamma)e^{-\gamma z} \tag{7.16}$$

für alle $z \geq \delta + \varepsilon$ und ist dort beschränkt, denn

$$\begin{aligned} |L(\mu)(z)| &= \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma) e^{-\gamma z} \\ &\leq \int_0^k \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma) e^{-\gamma z} + K \int_k^\infty \mathrm{d}\gamma\, e^{\gamma(\delta - z)} \\ &\leq \int_0^k \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma) + K \int_k^\infty \mathrm{d}\gamma\, e^{-\varepsilon\gamma} \\ &= \int_0^k \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma) + \frac{K}{\varepsilon} e^{-\varepsilon k}, \end{aligned}$$

wobei das Integral in der letzten Zeile aufgrund der lokalen Integrabilität von μ existiert.
Da μ als positiv angenommen wurde, ist auch die Laplace-Transformierte positiv.

Beispiel 7.13 *Sei $\varepsilon > 0$ und μ polynomial beschränkt. Dann existiert $L(\mu)$ auf $[\varepsilon, \infty)$.*

Die Gesamtheit aller auf $(0, \infty)$ positiven und lokal integrablen Funktionen, die (7.15) erfüllen, soll mit $\mathscr{L}$ bezeichnet werden.

Die Laplace-Transformierte von Funktionen μ mit obigen Eigenschaften ist beliebig oft differenzierbar, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma \left| \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \mu(\gamma) e^{-\gamma z} \right) \right| &= \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma \left| \mu(\gamma)(-\gamma)^n e^{-\gamma z} \right| \\ &\leq \int_0^k \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma)\gamma^n + K \int_k^\infty \mathrm{d}\gamma\, \gamma^n e^{-\varepsilon\gamma} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

und daher existiert

$$\big(\partial_z^n L(\mu)\big)(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \mu(\gamma) e^{-\gamma z} \right) = (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma)\gamma^n e^{-\gamma z}.$$

Sei nun

$$z \mapsto \beta(z) := C - L(\mu)(z) \tag{7.17}$$

mit einer Funktion $\mu \in \mathscr{L}$ und einer positiven Konstanten C. Da es ein $c > 0$ gibt, so daß $L(\mu)$ für $z \geq c$ definiert und dort beschränkt ist, ist β (bei hinreichend großem C) positiv für alle $z \geq c$. Desweiteren ist

$$\beta''(z) = -\int_0^\infty \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma)\gamma^2 e^{-\gamma z} \leq 0,$$

da der Integrand positiv ist. Also ist β konkav und positiv auf (c, ∞).

Wir betrachten für $f \in \mathscr{D}((c,\infty),\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(f,f) &= \int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\, f(x)f(y)\Big[1-\varepsilon\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)\Big]\\ &= \int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\, f(x)f(y)[1-\varepsilon C] + \varepsilon\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\int_0^\infty\mathrm{d}\gamma\, f(x)f(y)\mu(\gamma)e^{-\gamma(x+y)/2}\\ &= \left(\int\mathrm{d}x\, f(x)\right)^2[1-\varepsilon C] + \varepsilon\int_0^\infty\mathrm{d}\gamma\,\mu(\gamma)\Big(\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\, f(x)f(y)e^{-\gamma(x+y)/2}\Big)\,,\end{aligned}$$

wobei die Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini vertauscht werden kann, da jedes der iterierten Integrale existiert und

$$(x,y,\gamma)\mapsto f(x)f(y)\mu(\gamma)e^{-\gamma((x+y)/2)} \in \mathrm{L}^1\big((c,\infty)\times(c,\infty)\times\mathbb{R}_+\big).$$

Der erste Term in der letzten Zeile ist für alle $0<\varepsilon\le 1/C$ positiv, der hintere für jedes $\varepsilon>0$, da der Kern $e^{-\gamma(x+y)/2}$ für jedes $\gamma>0$ einen positiv semidefiniten Kern auf $\mathscr{D}((c,\infty),\mathbb{R})$ definiert. Der Beweis hierzu verläuft analog zum Positivitätsbeweis des Hot-Bang-Funktionals, es gilt

$$\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\, f(x)f(y)e^{-\gamma(x+y)/2} = \left(\int\mathrm{d}x\, f(x)e^{-\gamma(x/2)}\right)^2 \ge 0.$$

Also ist $1-\varepsilon\beta\big((x+y)/2\big)$ für $0<\varepsilon\le 1/C$ ein positiv semidefiniter Kern. Wir fassen das bisher Gezeigte in einem Satz zusammen:

Satz 7.14 *Sei $\mu\in\mathscr{L}$. Dann gibt es ein $C>0$ und ein $c>0$, so daß die Funktion*

$$z\mapsto\beta(z) := C - L(\mu)(z)$$

auf (c,∞) stetig, positiv und konkav ist. Das β zugeordnete Funktional φ_ε ist für alle $0<\varepsilon<1/C$ positiv semidefinit auf $\mathscr{D}((c,\infty),\mathbb{R})$.

Man kann also, durch Vorgabe einer auf $(0,\infty)$ positiven, lokal integrablen und exponentiell beschränkten Funktion zu einer Funktion β gelangen, die einen lokalen Gleichgewichtszustand scharfer Temperatur definiert. Ungleich schwieriger ist es jedoch, einer gegebenen inversen Temperaturverteilung die Form (7.17) nachzuweisen, da hierzu die Existenz der inversen Laplace-Transformierten von $C-\beta$ gezeigt werden muß. Es ist einer Funktion β daher nicht leicht „anzusehen", ob sie in der gerade beschriebenen Klasse von Funktionen liegt.

Beispiel 7.15 *Wählt man $\mu(\gamma) := \gamma^n$ für $n\in\mathbb{N}$ und $c>0$, so ist $L(\mu)(z) = n!\,z^{-n-1}$ für jedes $z\ge c$ definiert. Die Funktion*

$$z\mapsto\beta(z) := n!\left(\frac{1}{c^{n+1}}-\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

kann dann für jedes n und c als inverse Temperaturfunktion interpretiert werden.

Für die Positivität von φ_ε auf $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$ ist eine notwendige Bedingung, daß $1 - \varepsilon\beta(z) \geq 0$ für alle genügend kleinen ε und alle z im Konkavitätsgebiet von β. Damit kann β in seinem Konkavitätsgebiet nicht unbeschränkt sein. Für Funktionen $\mu \in \mathscr{L}$ und β von der Form (7.17) ist dies gewährleistet. Es wäre jedoch auch interessant, Beispiele für unbeschränkte inverse Temperaturfunktionen zu finden, da diese mit lokalen Gleichgewichtszuständen mit irgendwo verschwindender Temperatur verbunden wären.

Um Beispiele von unbeschränkten Funktionen β zu finden, die lokalen Gleichgewichtszuständen zugeordnet sind, wollen wir statt des Kerns $1 - \varepsilon\beta((x+y)/2)$ nun wieder den Kern $e^{-\alpha\beta((x+y)/2)}$ mit einer positiven Konstanten α betrachten und uns somit wieder dem Problem der Positivität von φ^α zuwenden.
Auch in diesem Fall ist ein Zugang über die Laplace-Transformation hilfreich. Sei β eine in einem offenen Intervall $B \subset (0, \infty)$ positive und konkave Funktion. Wenn es für jedes $\alpha > 0$ eine Funktion $\mu_\alpha \in \mathscr{L}$ gibt, so daß auf B

$$L(\mu_\alpha)(z) = e^{-\alpha\beta(z)} \tag{7.18}$$

(mit der Laplace-Transformation (7.16)) gilt, so ist für jedes $\alpha > 0$

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \, f(x) f(y) e^{-\alpha\beta((x+y)/2)} = \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma \, \mu_\alpha(\gamma) \left(\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \, f(x) f(y) e^{-\gamma(x+y)/2} \right) \geq 0$$

für alle $f \in \mathscr{D}(B, \mathbb{R})$.

Beispiel 7.16 *Sei*

$$\mu_\alpha(\gamma) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma^{\alpha-1}.$$

Da $\alpha > 0$, ist μ_α lokal integrabel und genügt (7.15). Für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ existiert die Laplace-Transformierte $L(\mu_\alpha)$ auf $[\varepsilon, \infty)$. Sie ergibt sich zu

$$L(\mu_\alpha)(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma \, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma^{\alpha-1} e^{-\gamma z} = z^{-\alpha}$$

(siehe [16]). Da $z > 0$ ist, gilt

$$L(\mu_\alpha)(z) = e^{-\alpha \log(z)}.$$

Die auf $(1, \infty)$ positive und konkave Funktion $z \mapsto \beta(z) = \log(z)$ erfüllt also (7.18) und kann daher einem lokalen Gleichgewichtszustand zugeordnet werden.

Beispiel 7.17 *Formal ist $e^{-\alpha z} = L\big(\delta(\cdot - \alpha)\big)(z)$. Ließe man also statt lokal integrabler Funktionen μ_α auch ebensolche Maße zu (die jedoch weiterhin ab einem $k > 0$ genügend schwach wachsen), so kann auf diese Weise auch die inverse Temperaturverteilung des Hot-Bang-Zustandes konstruiert werden.*

Es ist (wie auch schon bei den Betrachtungen zum Kern $1-\varepsilon\beta$) schwierig, einer gegebenen Funktion β die Gültigkeit der Gleichung (7.18) für alle $\alpha > 0$ nachzuweisen. Man kann jedoch aus einem gegebenen $\mu \in \mathscr{L}$ eine positive und konkave Funktion β die (7.18) genügt konstruieren. Eine solche Funktion μ muß allerdings noch eine weitere Bedingung erfüllen - sie muß für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ als m-fache Faltung einer anderen positiven Funktion $\mu_{1/m} \in \mathscr{L}$ dargestellt werden können.
Sei β eine Funktion die (7.18) erfüllt und $\mu_1 \in \mathscr{L}$ die Funktion, für die

$$L(\mu_1)(z) = e^{-\beta(z)}$$

gilt. Dann ist μ_n für $n \in \mathbb{N}$ (bis auf Nullmengen) bereits festgelegt, da

$$L(\mu_n)(z) = e^{-n\beta(z)} = \left(e^{-\beta(z)}\right)^n = \big(L(\mu_1)(z)\big)^n = L(\underbrace{\mu_1 * \cdots * \mu_1}_{n-\text{mal}})(z)$$

(die n-te Potenz der Laplace-Transformierten einer Funktion ist die Laplace-Transformierte der n-fachen Faltung dieser Funktion, siehe [16]). Ebenso ist für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$L(\underbrace{\mu_{1/m} * \cdots * \mu_{1/m}}_{m-\text{mal}})(z) = \big(L(\mu_{1/m})(z)\big)^m = \left(e^{-(1/m)\beta(z)}\right)^m = e^{-\beta(z)} = L(\mu_1)(z),$$

also auch $\mu_{1/m}$ durch μ_1 festgelegt. Wir zeigen den folgenden

Satz 7.18 *Sei $\mu \in \mathscr{L}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gebe es eine Funktion $\mu_{1/m} \in \mathscr{L}$ für deren m-fache Faltung $\mu_{1/m} * \cdots * \mu_{1/m} = \mu$ gilt. Dann gibt es ein $k_\beta > 0$ und eine auf (k_β, ∞) positive und konkave Funktion β, so daß*

$$\varphi^\alpha(f,f) = \int dx \int dy\, f(x) f(y) e^{-\alpha\beta((x+y)/2)} \geq 0$$

für alle $\alpha > 0$ und alle $f \in \mathscr{D}((k_\beta, \infty), \mathbb{R})$.

Beweis: Wie bereits weiter oben gezeigt, gibt es ein $c > 0$, so daß die Laplace-Tranformierte der Funktion μ auf $[c, \infty)$ existiert und dort positiv und beschränkt ist, sowie auf (c, ∞) beliebig oft differenziert werden kann. Es ist

$$L(\mu)(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma) e^{-\gamma z} \leq \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma) e^{-\gamma c} < \infty$$

(wobei die Ungleichung bereits für die Integranden gilt) und daher nach dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$\lim_{z\to\infty} L(\mu)(z) = 0.$$

Also gibt es ein $k_\beta > 0$, so daß $0 < L(\mu)(z) < 1$ für alle $z \geq k_\beta$. Wir definieren die Funktion β auf (k_β, ∞) durch

$$\beta(z) := -\log\big(L(\mu)(z)\big). \tag{7.19}$$

Da $L(\mu)(z) < 1$ ist sie positiv. Desweiteren gilt

$$\log(L(\mu))''(z) = \frac{L(\mu)''(z)L(\mu)(z) - (L(\mu)'(z))^2}{(L(\mu))^2} \geq 0,$$

da

$$\begin{aligned}
L(\mu)''(z)L(\mu)(z) - (L(\mu)'(z))^2 &= \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma_1\, \gamma_1^2 \mu(\gamma_1) e^{-\gamma_1 z} \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma_2\, \mu(\gamma_2) e^{-\gamma_2 z} \\
&\quad - \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma_1\, \gamma_1 \mu(\gamma_1) e^{-\gamma_1 z} \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma_2\, \gamma_2 \mu(\gamma_2) e^{-\gamma_2 z} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma_1 \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma_2\, \mu(\gamma_1)\mu(\gamma_2)[\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2] e^{-(\gamma_1+\gamma_2)z} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma_1 \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma_2\, \mu(\gamma_1)\mu(\gamma_2)[\gamma_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2] e^{-(\gamma_1+\gamma_2)z}
\end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile durch Umbenennung der Variablen aus der vorletzten hervorgeht. Da $\gamma_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2 = (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \geq 0$ ist der Integrand der letzten Zeile positiv und damit auch $\log\big(L(\mu)\big)''(z)$. Also ist β auf (k_β, ∞) konkav.
$\varphi^\alpha(f, f)$ ist stetig in α, denn für jede konvergente Folge (α_n) positiver Zahlen ist

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \left| f(x)f(y)e^{-\alpha_n \beta((x+y)/2)} \right| \leq \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \left| f(x)f(y) \right| < \infty$$

da $\alpha_n\beta((x + y)/2) > 0$, so daß Grenzprozeß und Integration vertauscht werden können. Da jede relle Zahl Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist, gilt mithin

$$\varphi^\alpha(f, f) = \lim_{k\to\infty} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(x)f(y)e^{-(q_k/p_k)\beta((x+y)/2)}$$

wobei $q_k, p_k \in \mathbb{N}$ so daß $\lim_k q_k/p_k = \alpha$. Mit (7.19) folgt weiter

$$\begin{aligned}
\varphi^\alpha(f, f) &= \lim_{k\to\infty} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(x)f(y) \left(L(\mu)\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \right)^{q_k/p_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(x)f(y) \left(L(\underbrace{\mu_{1/p_k} * \cdots * \mu_{1/p_k}}_{q_k-\text{mal}})\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \right),
\end{aligned}$$

da es nach Voraussetzung ein μ_{1/p_k} mit $L(\mu) = L(\mu_{1/p_k} * \cdots * \mu_{1/p_k}) = (L(\mu_{1/p_k}))^{p_k}$ gibt. Wir setzen

$$\mu_{\alpha_k} := L(\underbrace{\mu_{1/p_k} * \cdots * \mu_{1/p_k}}_{q_k-\text{mal}}).$$

Da die q_k-fache Faltung einer positiven Funktion aus $\mathscr{L}$ wieder positiv ist und weiterhin in $\mathscr{L}$ liegt (siehe [16]), gilt schlußendlich

$$\varphi^\alpha(f, f) = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{d}\gamma\, \mu_{\alpha_k}(\gamma) \left(\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(x)f(y)e^{-\gamma(x+y)/2} \right) \geq 0$$

für alle $f \in \mathscr{D}((k_b, \infty), \mathbb{R})$.

$\square$

Alle über Laplace-Transformation gewonnenen inversen Temperaturfunktionen β führen immer auf lokale Gleichgewichtszustände mit unbeschränktem Thermalitätsgebiet. Dies ist eine Folge der Nullstellenfreiheit von $L(\mu)$ auf der positiven rellen Achse. $L(\mu)$ ist in seinem Definitionsbereich strikt positiv (für $\mu \neq 0$). Daher ist das Konkavitätsgebiet der hier konstruierten Funktionen β auf denen diese positiv sind, immer von der Form (k_β, ∞).

Bemerkung 7.19 *Wenn β_- und β_+ zwei auf die oben vorgestellte Weise konstruierte inverse Temperaturfunktionen sind, mit Konkavitätsgebieten (k_{β_-}, ∞) bzw. (k_{β_+}, ∞), so gehören alle $x_- > k_{\beta_-}$ bzw. $x_+ > k_{\beta_+}$ zum jeweiligen Thermalitätsgebiet. Mit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_0, x_1) \mapsto 1/2(x_0 - x_1, x_0 + x_1) = (x_-, x_+)$ ist*

$$T^{-1}\big((k_{\beta_-}, \infty) \times (k_{\beta_+}, \infty)\big) = \big(k_{\beta_+} + k_{\beta_-}, k_{\beta_+} - k_{\beta_-}\big) + V_+.$$

Nach Lemma 7.1 enthält damit das Thermalitätsgebiet des zu β_- und β_+ korrespondierenden lokalen Gleichgewichtszustandes der zweidimensionalen Theorie einen zeitartig verschobenen offenen Vorwärtslichtkegel.

Alle in diesem Kapitel konstruierten inversen Temperaturfunktionen sind monoton steigend, denn

$$\partial_z\big(C - L(\mu)(z)\big) = \int \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma)\gamma e^{-\gamma z} \geq 0$$

und

$$\partial_z\big(-\log(L(\mu)(z))\big) = \frac{1}{L(\mu)(z)} \int \mathrm{d}\gamma\, \mu(\gamma)\gamma e^{-\gamma z} \geq 0.$$

Daher werden zu solchen Funktionen korrespondierende lokale Gleichgewichtszustände der zweidimensionalen Theorie eine in lichtarige Richtungen monoton fallende Temperaturverteilung im Thermalitätsgebiet besitzen.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Die Ideen von Buchholz, Ojima und Roos zur Charakterisierung lokaler Gleichgewichtszustände (siehe [1]) wurden auf erhaltene Ströme in der 1+1-dimensionalen Minkowskiraumzeit angewandt.

Als Referenzzustände wurden Gemische von KMS-Zuständen mit kompakten Temperaturträgern verwendet, welche aufgrund nicht vorhandener Korrelation von links- und rechtslaufenden Strömen in den KMS-Zuständen als Linearkombinationen von Gemischen der chiralen Subtheorien aufgefaßt werden können.

Als lokale thermale Observable wurden balancierte Ableitungen Wick-geordneter Ströme verwendet. Die ihnen zugeordneten thermalen Funktionen sind Polynome des Temperaturquadrats. Zulässige Makroobservable sind gerade die stetigen, chiral zerfallenden Funktionen, also bis auf Differenzierbarkeit die Lösungen der Wellengleichung. Unter ihnen sind wichtige makroobservable Größen wie Energie-Impuls-Tensor, Entropiestromdichte und Phasenraum-Teilchendichte.

Hierbei ist bemerkenswert, daß der Energie-Impuls-Tensor der Theorie im Raum der lokalen thermalen Observablen liegt. Im Fall masseloser Bosonen in vier Raumzeitdimensionen war dies nicht der Fall; dort war der Energie-Impuls-Tensor die Summe eines Elementes aus dem Raum der lokalen thermalen Observablen und eines Ableitungs-Terms, der nicht in die thermale Funktion einging. Im Gegensatz zur Theorie masseloser Bosonen in vier Raumzeitdimensionen scheint die Energie in der hier betrachteten vollständig thermaler Natur zu sein.

Wegen des chiralen Zerfalls der Makroobservablen lassen sich für diese in $\mathcal{S}_\mathcal{O}$-thermalen Zuständen die Evolutionsgleichungen

$$\Box\omega(\Xi)(x) = 0$$

und

$$\partial_\nu\omega(\partial^\nu\Xi)(x) = 0$$

etablieren, welche schon aus [2] bekannt sind. Desweiteren gilt die ebenfalls von den freien masselosen Bosonen im Minkowskiraum bekannte Transportgleichung für die Phasenraum-Teilchendichte

$$\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\partial}\omega(N_\mathbf{p})(x) = 0$$

in $\mathcal{S}_\mathcal{O}$-thermalen Zuständen.

Während in den anderen bisher behandelten Fällen die einzig möglichen lokalen Gleichgewichtszustände scharfer Temperatur durch $\beta(x) = \lambda x + c$ gegeben sind (siehe [1],[2],[17] und [18]), konnten hier neben solchen Zuständen eine Reihe weiterer lokaler Gleichgewichtszustände scharfer Temperatur konstruiert werden. Deren chirale Komponenten haben jeweils zumindest die Intervalle $(k_\beta, \infty) \subset \mathbb{R}_+$ als Thermalitätsgebiet. Das Thermalitätsgebiet des zugehörigen lokalen Gleichgewichtszustandes der zweidimensionalen Theorie ist dann (mindestens) ein geeignet zeitartig verschobener offener Vorwärtslichtkegel.

Desweiteren gibt es in der Theorie lokale Gleichgewichtszustände, deren Temperaturverteilung im Innern des Thermalitätsgebietes ein Minimum annimmt. Dieses Phänomen trat in den bisher behandelten Modellen nicht auf.

Es gibt also eine Fülle von nichttrivialen lokalen Gleichgewichtszuständen scharfer Temperatur, was jedoch aufgrund der hohen Symmetrie des Modells zu erwarten war. Jede chiral zerfallende Funktion erfüllt automatisch die Wellengleichung, an die chiralen Komponenten gibt es keine weiteren Einschränkungen mehr.

Es konnte kein Singularitätentheorem etabliert werden. Es ist daher eine offene Frage, ob es ein solches Theorem in diesem Modell gibt, oder ob vielleicht sogar lokale Gleichgewichtszustände mit nichttrivialer scharfer Temperaturverteilung existieren, deren Thermalitätsgebiet der gesamte $\mathbb{R}^2$ ist.

Falls die Konkavität der inversen Temperaturfunktionen sich jedoch als notwendig für die Positivität lokaler Gleichgewichtsfunktionale erwiese, wäre die Existenz eines Singularitätentheorems bewiesen.

Die in Kapitel 7 beschriebenen Methoden eignen sich, um Funktionen zu konstruieren, die als inverse Temperaturverteilungen interpretiert werden können. Der umgekehrte Weg ist jedoch schwieriger. Es wäre wünschenswert, handfestere Kriterien zu haben, die es ermöglichen einer gegebenen Funktion die Interpretierbarkeit als inverse Temperaturfunktion nachzuweisen. Ein solcher Ansatz wurde verfolgt (siehe Anhang B), konnte jedoch bisher nicht zu einem zufriedenstellenden Abschluß gebracht werden.

A Konventionen

In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten benutzt, in denen

$$\hbar = k_B = c = 1$$

gilt.

Die zweidimensionale Raumzeit wird durch $\mathbb{R}^2$, versehen mit der Minkowski-Metrik, beschrieben. In dieser Arbeit wird die Einstein'sche Summenkonvention benutzt

$$a_\mu b^\mu := \sum_{\mu,\nu=0,1} a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} = a_0 b_0 - a_1 b_1,$$

wobei g der metrische Tensor

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist. Falls der Zusammenhang klar ist, schreiben wir

$$ab = a_\mu b^\mu.$$

Die Fouriertransformation ist gemäß

$$\widetilde{f}(p) := \int \mathrm{d}^2 x\, f(x) e^{-\mathrm{i} p_\mu x^\mu}$$

definiert, mit Rücktransformation

$$f(x) = \int \mathrm{d}^2 p\, \widetilde{f}(p) e^{\mathrm{i} p_\mu x^\mu},$$

wobei die Integrationen über den ganzen Raum ausgeführt werden.

Zu jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ werden chirale Komponenten durch

$$x_+ := \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$$

und

$$x_- := \frac{1}{2}(x_0 - x_1)$$

definiert. Mit diesen ist

$$x^2 = x_\mu x^\mu = 4 x_- x_+.$$

B Zugang über Diskretisierung

Neben der Laplace-Transformation geeigneter Maße wurde noch ein weiterer Ansatz zur Konstruktion inverser Temperaturfunktionen verfolgt, der jedoch bisher zu keinem zufriedenstellenden Abschluß gebracht werden konnte. Hierbei wird Integrabilität der betrachteten inversen Temperaturfunktionen angenommen. Indem man $\varphi_\varepsilon(f,f)$ als Grenzwert Riemann'scher Summen auffaßt, kann das Problem der positiven Definitheit von φ_ε auf ein solches bestimmter *Hankel-Matrizen* (siehe [20]) zurückgeführt werden, dessen vollständige Untersuchung hier jedoch an unklaren Konvergenzproblemen scheitert.

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) := (x+y)/2$. Wir fordern im folgenden $\beta \circ h \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Da $\beta > 0$ heißt das

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \beta\left(\frac{x+y}{2}\right) < \infty,$$

was bereits $\beta \in L^1(\mathbb{R})$ impliziert.
Wir betrachten weiterhin nur solche positiven Funktionen β, die auf einem offenen Intervall B konkav und dort stetig sind. Da die Funktionswerte außerhalb dieses Intervalls in unseren Betrachtungen keine Rolle spielen (da alle Integrationen mit Testfunktionen aus $\mathscr{D}_\beta(\mathbb{R})$ durchgeführt werden), setzen wir alle behandelten Funktionen β außerhalb ihrer Konkavitätsgebiete durch Null fort.
Wir zeigen zunächst das folgende

Lemma B.1 *Sei $B \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, auf dem die Funktion β konkav, echt positiv und stetig ist. Wenn $\beta \in L^1(\mathbb{R})$, so ist B beschränkt.*

Beweis: Angenommen, B wäre unbeschränkt (o.B.d.A. auf der positiven reellen Achse, wir setzen $B = (c, \infty)$). Da $\beta \in L^1(\mathbb{R})$ und stetig auf B ist, gibt es ein $C > 0$, so daß $\beta(x) < C(1/x)$ für alle $x > c$. Wäre β auf B monoton wachsend, so gäbe es $x_0 \in B$ mit $\beta(x) \geq \beta(x_0) > 0$ für alle $x > x_0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\beta(y) < C(1/y)$ für alle $y \in (c, \infty)$.
Also gibt es $x_1, x_2 \in (c, \infty)$ mit $x_1 < x_2$ und $\beta(x_1) > \beta(x_2)$. Wegen der Konkavität von β liegen die Funktionswerte $\beta(y)$ für alle $y > x_2$ unterhalb oder auf der Geraden durch $(x_1, \beta(x_1))$ und $(x_2, \beta(x_2))$ (siehe Beweis zum Lemma 7.9), welche für alle $y > (x_1\beta(x_2) - x_2\beta(x_1))(\beta(x_2) - \beta(x_1))^{-1}$ negative Werte annimmt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Positivität von β auf B. Also ist B nicht unbeschränkt auf der positiven reellen Achse.
Der Fall $B = (-\infty, c)$ wird analog behandelt.

□

Wegen der Beschränktheit von B setzen wir ab nun $B = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Für jede Testfunktion $f \in \mathscr{D}(B, \mathbb{R})$ betrachten wir

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(f,f) &= \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(x)f(y) \left[1 - \varepsilon\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{d}y\, f(x)f(y) \left[1 - \varepsilon\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Die beiden Integrationen können nach Belieben vertauscht werden, der Integrand ist stetig, und $\varphi_\varepsilon(f,f)$ existiert als Riemann-Integral, ebenso wie jedes der beteiligten Integrale für sich. Es ist damit

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(f,f) &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{d}y\, f(x)f(y) \left[1 - \varepsilon\beta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] \qquad \text{(B.1)} \\ &= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + \frac{b-a}{m} i\right) \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \times \\ &\qquad \times \left[1 - \varepsilon\beta\left(a + \frac{b-a}{2}\left(\frac{i}{m} + \frac{j}{n}\right)\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \times \\ &\qquad \times \left[1 - \varepsilon\beta\left(a + \frac{b-a}{2}\frac{i+j}{n}\right)\right],\end{aligned}$$

wobei äquidistante Stützstellen gewählt wurden. Wir setzen

$$v_j := f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$$

und

$$B_{ij}^n := \beta\left(a + (i+j)\frac{b-a}{2n}\right)$$

und definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ Vektoren $\mathbf{v} := (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ und eine symmetrische Matrix $\mathbf{B}_n := \left(B_{ij}^n\right)_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mit $\mathbf{1}_n$ sei die $n \times n$-Matrix bezeichnet, die nur Einsen als Einträge hat: $(\mathbf{1}_n)_{ij} = 1$. Wenn gezeigt werden kann, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder zumindest für alle genügend großen n) und alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ die Operatoren $\mathbf{1}_n - \varepsilon'\mathbf{B}_n$ positiv semidefinit auf $\mathbb{R}^n$ sind, so ist jede der Riemann'schen Summen für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ positiv und damit auch (B.1).
Wir werden also im folgenden die Operatoren $\mathbf{K}_n^\varepsilon := \mathbf{1}_n - \varepsilon\mathbf{B}_n$ auf Positivität untersuchen.

B_{ij}^n hängt nur von der Summe $i+j$ ab, die Einträge von $\mathbf{B}_n$ auf den Gegendiagonalen sind also alle gleich. Die $n \times n$ Matrix $\mathbf{B}_n$ hat demnach nur $2n-1$ verschiedene, positive Einträge $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n-2}$, wobei

$$\lambda_{i+j} := B_{ij}^n = \beta\left(a + (i+j) \cdot \frac{b-a}{2n}\right) \qquad \text{(B.2)}$$

ist und die λ_k damit weiterhin explizit von n abhängen. Die Matrix $\mathbf{B}_n$ hat dann die Form

$$\mathbf{B_n} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \lambda_{n+1} & \cdots & \lambda_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Solche Matrizen werden *Hankel-Matrizen* genannt. Sie treten z.B. in der Behandlung des Hamburger-Momentenproblems auf (siehe [20], [13]).

Wir untersuchen zunächst, ob es für gegebenes $\mathbf{B}_n$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ die Operatoren $\mathbf{K}_n^{\varepsilon'}$ positiv sind. Der $\mathbb{R}^n$ zerfällt in zwei orthogonale Unterräume: den Raum der Vektoren, deren Komponenten zu Null addieren und dessen orthogonales Komplement, der vom Vektor

$$e_0 := \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1) \tag{B.3}$$

aufgespannte Unterraum.

Wir wollen hierfür kurz den Beweis skizzieren. Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathbf{1}_n v = (\sum_i v_i)\sqrt{n} e_0$. Also wird Bild$(\mathbf{1}_n)$ von e_0 aufgespannt, und ist damit eindimensional. In Kern$(\mathbf{1}_n)$ liegen offenbar diejenigen $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_i v_i = 0$, also gerade diejenigen, deren Komponenten zu Null addieren. Damit ist dieser Raum $n-1$-dimensional. Sei $w \in$ Kern$(\mathbf{1}_n)$ und $v \in$ Bild$(\mathbf{1}_n)$. Dann ist w von der Form $w = \big(-(\sum_{i=1}^{n-1} w_i), w_1, \dots, w_{n-1}\big)$, v ist gegeben durch $v = ce_0$ mit $c \in \mathbb{R}$. Mit dem Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist $(v, w) = c(-(\sum_{i=1}^{n-1} w_i) + w_1 + \dots + w_{n-1}) = 0$.

Es sei $\mathbf{E}_0$ der Projektor auf den von e_0 aufgespannten, eindimensionalen Unterraum, $\mathbf{E}_0^\perp$ derjenige auf den Raum der Vektoren, deren Komponenten zu Null addieren. Es ist $\mathbf{1}_n = n\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{id} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^\perp$. Damit läßt sich $\mathbf{K}_n^\varepsilon$ schreiben als

$$\mathbf{K}_n^\varepsilon = n\mathbf{E}_0 - \varepsilon \mathbf{E}_0 \mathbf{B}_n \mathbf{E}_0 - \varepsilon \mathbf{E}_0^\perp \mathbf{B}_n \mathbf{E}_0^\perp - \varepsilon \mathbf{E}_0 \mathbf{B}_n \mathbf{E}_0^\perp - \varepsilon \mathbf{E}_0^\perp \mathbf{B}_n \mathbf{E}_0. \tag{B.4}$$

Notwendig für die Positivität von $\mathbf{K}_n^\varepsilon$ ist, daß der Operator $\mathbf{E}_0^\perp \mathbf{B}_n \mathbf{E}_0^\perp$ negativ semidefinit ist, denn für beliebiges $v \in \mathbf{E}_0^\perp \mathbb{R}^n$ ist

$$\big(v, \mathbf{K}_n^\varepsilon v\big) = -\varepsilon\big(v, \mathbf{E}_0^\perp \mathbf{B}_n \mathbf{E}_0^\perp v\big) = -\varepsilon\big(v, \mathbf{B}_n v\big)$$

nur dann immer positiv (oder Null), wenn $\mathbf{B}_n$ auf $\mathbf{E}_0^\perp \mathbb{R}^n$ negativ semidefinit ist. Wie sich herausstellen wird, ist dies bereits durch die Konkavität von β gewährleistet (siehe Lemma B.2).

Die Operatoren $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_0^\perp$, $\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_n \mathbf{E}_0$ und $\mathbf{E}_0^\perp \mathbf{B}_n \mathbf{E}_0^\perp$ kommutieren offenbar und können daher gemeinsam diagonalisiert werden. Wir wählen als orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$ die Menge $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ mit e_0 aus (B.3) und $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ einer Orthonormalbasis von $\mathbf{E}_0^\perp \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{(k+1)k}}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-\text{mal}}, -k, 0, \dots, 0)$$

für $k = 1, \ldots, n-1$. Sei die orthogonale Abbildung $\mathbf{U}$ gegeben durch

$$\mathbf{U} := \left(e_0^{\mathrm{T}} | e_1^{\mathrm{T}} | \cdots | e_{n-1}^{\mathrm{T}}\right),$$

wobei $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ die Transposition einer Matrix oder eines Vektors ist (die e_k^{T} sind also Spaltenvektoren). Es ist

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0^{\perp}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathbf{B}'_n = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_n\mathbf{U}$. Dann ist

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_n\mathbf{U} = n\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0\mathbf{U} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0\mathbf{B}_n\mathbf{E}_0\mathbf{U} = \left(\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0\mathbf{U}\right)\mathbf{B}'_n\left(\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0\mathbf{U}\right) = \begin{pmatrix} (B'_n)_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0^{\perp}\mathbf{B}_n\mathbf{E}_0^{\perp}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (B'_n)_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (B'_n)_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (B'_n)_{n-1\,n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0\mathbf{B}_n\mathbf{E}_0^{\perp}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & (B'_n)_{01} & \cdots & (B'_n)_{0\,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

und

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0^{\perp}\mathbf{B}_n\mathbf{E}_0\mathbf{U} = \left(\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_0\mathbf{B}_n\mathbf{E}_0^{\perp}\mathbf{U}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (B'_n)_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (B'_n)_{0\,n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Hiermit hat das orthogonal transformierte $\mathbf{K}_n^\varepsilon$ die Form

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_n^\varepsilon\mathbf{U} = \begin{pmatrix} n-\varepsilon(B_n')_{00} & -\varepsilon(B_n')_{01} & -\varepsilon(B_n')_{02} & \cdots & -\varepsilon(B_n')_{0\,n-1} \\ -\varepsilon(B_n')_{01} & -\varepsilon(B_n')_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ -\varepsilon(B_n')_{02} & 0 & -\varepsilon(B_n')_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varepsilon(B_n')_{0\,n-1} & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon(B_n')_{n-1\,n-1} \end{pmatrix}. \tag{B.5}$$

Wie bereits erwähnt, ist $\mathbf{E}_0^\perp\mathbf{B}_n\mathbf{E}_0^\perp$ notwendig negativ semidefinit, daher muß $(B_n')_{jj} \leq 0$ für jedes $j = 1,\ldots,n-1$ gelten. Es zeigt sich, daß dies jedoch schon durch die Konkavität von β impliziert wird.
Diese führt nämlich auf

$$\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \leq 0 \tag{B.6}$$

(für jedes $k = 0,\ldots,2n-4$), denn mit (B.2) ist

$$\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} = \beta\bigl(x-\eta\bigr) - 2\beta\bigl(x\bigr) + \beta\bigl(x+\eta\bigr),$$

(wobei $x := a+(k+1)\cdot(b-a)/(2n)$ und $\eta := (b-a)/(2n)$), und wegen der Konkavität von β gilt

$$2\beta(x) = 2\,\beta\!\left(\frac{1}{2}(x-\eta) + \frac{1}{2}(x+\eta)\right) \geq \beta(x-\eta) + \beta(x+\eta).$$

Die Eigenwerte von $\mathbf{E}_0^\perp\mathbf{B}_n\mathbf{E}_0^\perp$ haben die Form

$$\begin{aligned} (B_n')_{jj} &= (\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_n\mathbf{U})_{jj} \\ &= \frac{1}{(j+1)j}\bigl[\lambda_0 + 2\lambda_1 + \cdots + (j-1)\lambda_{j-2} + j\lambda_{j-1} + (j-1)\lambda_j + \ldots \\ &\qquad \cdots + 2\lambda_{2j-3} + \lambda_{2j-2} - 2j(\lambda_j + \lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_{2j-1}) + j^2\lambda_{2j}\bigr] \\ &= \frac{1}{(j+1)j}\bigl[\lambda_0 + 2\lambda_1 + \cdots + j\lambda_{j-1} - (j+1)\lambda_j - (j+2)\lambda_{j+1} - \ldots \\ &\qquad \cdots - 2j\lambda_{2j-1} + j^2\lambda_{2j}\bigr]. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Desweiteren benötigen wir noch die Teleskopsumme

$$\sum_{k=0}^{j-1} 2(1+k)\bigl[\lambda_{j+k} - 2\lambda_{j+k+1} + \lambda_{j+k+2}\bigr] = 2\lambda_j - 2(j+1)\lambda_{2j} + 2j\lambda_{2j+1}. \tag{B.8}$$

Hiermit zeigen wir nun das

Lemma B.2 *Für $j = 1,\ldots,n-1$ ist $(B_n')_{jj} \leq 0$.*

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach j. Es ist $(B'_n)_{11} = 1/2(\lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$ wegen (B.6). Sei nun $(B'_n)_{jj} \leq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}(j+1)(j+2)(B'_n)_{j+1\,j+1} &= j(j+1)(B'_n)_{jj} + 2(j+1)\lambda_j \\ &\qquad -(j+1)^2\lambda_{2j} - 2(j+1)\lambda_{2j+1} + (j+1)^2\lambda_{2j+2}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$(j+1)\big[2\lambda_j - (j+1)\lambda_{2j} - 2\lambda_{2j+1} + (j+1)\lambda_{2j+2}\big]$$

$$= (j+1)\left[\sum_{k=0}^{j-1} 2(1+k)\big[\lambda_{j+k} - 2\lambda_{j+k+1} + \lambda_{j+k+2}\big] + (j+1)\big[\lambda_{2j} - 2\lambda_{2j+1} + \lambda_{2j+2}\big]\right]$$

mit der Teleskopsumme (B.8). Dieser Ausdruck ist eine Summe von Termen der Form $C_k(\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2})$ (mit positivem C_k), welche wegen (B.6) alle negativ sind. Daher ist $(B'_n)_{j+1\,j+1} \leq 0$.

□

$\mathbf{K}_n^\varepsilon$ ist genau dann positiv definit auf $\mathbb{R}^n$, wenn die Matrix (B.5) positiv definit ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn die Determinanten all ihrer linken oberen $m \times m$-Untermatrizen $\mathbf{M}_\mathbf{K}^m$ positiv sind. Diese Matrizen können durch elementare Zeilenumformungen alle in untere Dreiecksmatrizen überführt werden, und für die Determinanten ergibt sich

$$\begin{aligned}\det\big(\mathbf{M}_\mathbf{K}^m\big) &= \left(n - \varepsilon(B'_n)_{00} + \varepsilon\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\big((B'_n)_{0j}\big)^2}{(B'_n)_{jj}}\right)\varepsilon^{m-1}(-1)^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}(B'_n)_{jj} \\ &= \left(n - \varepsilon(B'_n)_{00} - \varepsilon\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\big((B'_n)_{0j}\big)^2}{|(B'_n)_{jj}|}\right)\varepsilon^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}|(B'_n)_{jj}|,\end{aligned}$$

da die $(B'_n)_{jj}$ alle negativ sind. Das Produkt im hinteren Teil dieses Ausdrucks ist positiv, und der Summenausdruck im vorderen Teil wächst monoton mit m. Wenn es also ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$

$$\det(\mathbf{M}_\mathbf{K}^{n-1}) = \det(\mathbf{K}_n^{\varepsilon'}) > 0$$

gilt, so sind auch die Determinanten aller $m \times m$-Untermatrizen positiv. Desweiteren impliziert $\det(\mathbf{K}_n^\varepsilon) > 0$ natürlich schon $\det(\mathbf{K}_n^{\varepsilon'}) > 0$ für $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Für die positive Definitheit von $\mathbf{K}_n^{\varepsilon'}$ für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ist demnach schon die Positivität der Determinante von $\mathbf{K}_n^\varepsilon$ hinreichend.

Um auf die Positivität von $\varphi_{\varepsilon'}(f,f)$ für alle $f \in \mathscr{D}(B,\mathbb{R})$ und $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ schließen zu können, muß es ein $\varepsilon > 0$ geben, so daß $\det(\mathbf{K}_n^\varepsilon) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Damit ergibt sich schlußendlich folgende Bedingung:

Lemma B.3 *Sei $\varepsilon > 0$. Falls*

$$1 - \varepsilon \frac{1}{n} (B'_n)_{00} - \varepsilon \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\big((B'_n)_{0j}\big)^2}{|(B'_n)_{jj}|} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\varphi_{\varepsilon'}$ für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ positiv (semi)definit auf $\mathscr{D}(K, \mathbb{R})$.

Es ist $(B'_n)_{00} = (1/n) \sum_{ij} B^n_{ij} > 0$ und daher Lemma B.3 genau dann erfüllt, wenn es $M \in (0, \infty)$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} (B'_n)_{00} < M \tag{B.9}$$

und

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\big((B'_n)_{0j}\big)^2}{|(B'_n)_{jj}|} < M. \tag{B.10}$$

Mit (B.2) ist

$$\lim_n \frac{1}{n} (B'_n)_{00} = \lim_n \frac{1}{n^2} \sum_{ij} B^n_{ij} = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{d}y \, \beta\left(\frac{x+y}{2}\right) < \infty,$$

nach Voraussetzung der Integrabilität von $(x, y) \mapsto \beta\big((x+y)/2\big)$. Damit ist (B.9) erfüllt.
Zu überprüfen bleibt für gegebenes β daher noch die Bedingung (B.10), also die Beschränktheit der Summe für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, wobei $(B'_n)_{jj}$ für $j = 1, \ldots, n-1$ die Form (B.7) hat und

$$(B'_n)_{0j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \sum_{k=1}^{j} k(\lambda_{k-1} - \lambda_{n+k-1}) \tag{B.11}$$

gilt.

Die Bedingung (B.10) ist nicht sehr gut zu handhaben. Außerdem scheint sie schon für einfache Beispiele inverser Temperaturfunktionen, wie die aus Beispiel 7.11 bekannte Funktion $x \mapsto \beta(x) = C^2 - x^2$, nicht mehr erfüllbar zu sein.
Es stellt sich die Frage, ob man zum gewünschten Ergebnis gelangen könnte, indem man die Bedingung im Sinne von Distributionen liest (der Überlegung folgend, daß die Riemann'schen Summen formal Integrale über geeignete Summen von δ-Funktionen sind).

C KMS-Zustände

C.1 Konstruktion der KMS-Zustände der Stromalgebra in $1+1$ Dimensionen

Sei α_a ein Automorphismus, der über

$$\alpha_a j^\mu(f) := j^\mu(f_a) \text{ mit } f_a(x) := f(x-a)$$

die Raumzeittranslationen implementiert. Wir sind interessiert an den α_{te}-KMS-Zuständen zur inversen Temperatur $|\beta|$, wobei $e \in V_+$ ein Einheitsvektor ist.

Wir konstruieren einen KMS-Zustand zur inversen Temperatur $|\beta|$ mit Hilfe der Kommutatorrelationen der Ströme

$$[j^\mu(f), j^\nu(g)] = \int \mathrm{d}p\, p \left[\widetilde{f}(p,p)\, \widetilde{g}(-p,-p) + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\, \widetilde{f}(-p,p)\, \widetilde{g}(p,-p)\right],$$

wobei f und g Testfunktionen sind. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\omega_\beta\left((\alpha_{te} j^\mu(f))\, j^\nu(g)\right) &= \omega_\beta\left(j^\nu(g)\, (\alpha_{te} j^\mu(f)\right) + \omega_\beta\left([\alpha_{te} j^\mu(f), j^\nu(g)]\right) \\
&= \omega_\beta\left(j^\nu(g)\, (\alpha_{te} j^\mu(f)\right) + \int \mathrm{d}p\, p \big[e^{-\mathrm{i}t(e_0-e_1)p} \widetilde{f}(p,p)\, \widetilde{g}(-p,-p) \\
&\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\, e^{\mathrm{i}t(e_0+e_1)p} \widetilde{f}(-p,p)\, \widetilde{g}(p,-p)\big].
\end{aligned}$$

Die Fourier-transformierte KMS-Bedingung lautet (siehe [9])

$$\mathfrak{F}\big(\omega_\beta\left(j^\nu(g)\, (\alpha_{te} j^\mu(f))\right)\big) = e^{\beta(\cdot)}\, \mathfrak{F}\big(\omega_\beta\left((\alpha_{te} j^\mu(f))\, j^\nu(g)\right)\big)$$

im Sinne von Distributionen über $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$$\sigma_{te}(f,g) := [\alpha_{te} j^\mu(f), j^\nu(g)]$$

definiert eine bzgl. t reguläre Distribution. Da die Fouriertransformation für Distributionen durch $\widetilde{T}(f) := T(\widetilde{f})$ definiert ist, gilt demnach

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1-e^{\beta(\cdot)}\right) \mathfrak{F}\big(\omega_\beta\left((\alpha_{et} j^\mu(f)) j^\nu(g)\right)\big)\right](h) = \textstyle\int \mathrm{d}t\, \sigma_{te}(f,g)\, \widetilde{h}(t) \\
&\quad = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}p\, p \Big[e^{-\mathrm{i}t(e_0-e_1)p} \widetilde{f}(p,p)\, \widetilde{g}(-p,-p) \\
&\qquad\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\, e^{\mathrm{i}t(e_0+e_1)p} \widetilde{f}(-p,p)\, \widetilde{g}(p,-p)\Big] \widetilde{h}(t),
\end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung wegen des schnellfallenden Verhaltens der Testfunktionen jedes der auftretenden Integrale im L^1-Sinn existiert. Dem Satz von Fubini folgend kann die Integrationsreihenfolge vertauscht werden:

$$\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}p \int \mathrm{d}t\, p \Big[e^{-\mathrm{i}t(e_0-e_1)p} \widetilde{f}(p,p)\, \widetilde{g}(-p,-p) \\
&\qquad\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\, e^{\mathrm{i}t(e_0+e_1)p} \widetilde{f}(-p,p)\, \widetilde{g}(p,-p)\Big] \widetilde{h}(t) \\
&= \int \mathrm{d}p \sqrt{2\pi} \Big[h(-(e_0-e_1)p) \widetilde{f}(p,p) \widetilde{g}(-p,-p) \\
&\qquad\qquad + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} h(-(e_0+e_1)p) \widetilde{f}(p,-p) \widetilde{g}(-p,p)\Big].
\end{aligned}$$

Ist $p \in \mathcal{C}^\infty$ und $T \in \mathscr{D}^*$ so ist das Produkt definiert durch

$$(\bar{p}T)(f) := T(pf).$$

Löst T die Gleichung

$$(\bar{p}T)(f) = G(f),$$

so gilt dies offenbar auch für $T + \sum_n d_n \delta_n$ (wobei δ_n Träger in einer Nullstelle von p hat), denn $\sum_n d_n \delta_n(pf) = 0$. Setzt man $u := pf$, so kann die Gleichung offenbar als

$$T(u) = G(p^{-1}u) + \sum_n c_n \, \delta_n(u)$$

geschrieben werden, wobei T zunächst nur auf $\{u \in \mathscr{D} | \, u = pf, f \in \mathscr{D}\}$ definiert ist. In unserem Fall ergibt sich

$$\mathfrak{F}\big(\omega_\beta((\alpha_{te} j^\mu(f))j^\nu(g))\big)(u) = \int \mathrm{d}p \sqrt{2\pi} \Big[u(-(e_0 - e_1)p) \frac{\widetilde{f}(p,p)\widetilde{g}(-p,-p)}{1 - e^{-\beta(e_0 - e_1)p}}$$

$$+ (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} u(-(e_0 + e_1)p) \frac{\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{g}(-p,p)}{1 - e^{-\beta(e_0+e_1)p}} \Big] + c^{\mu\nu}(f,g)\delta_0(u)$$

$$= \int \mathrm{d}p \, p \int \mathrm{d}t \, \widetilde{u}(t) \Big[\frac{\widetilde{f}(p,p)\widetilde{g}(-p,-p)}{1 - e^{-\beta(e_0 - e_1)p}} e^{-\mathrm{i}t(e_0 - e_1)p}$$
$$+ (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} \frac{\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{g}(-p,p)}{1 - e^{-\beta(e_0+e_1)p}} e^{-\mathrm{i}t(e_0+e_1)p} \Big] + \int \mathrm{d}t \, c^{\mu\nu}(f,g)\widetilde{u}(t).$$

Wiederum können auftretende Integrationen vertauscht werden, und es ergibt sich

$$\omega_\beta((\alpha_{te} j^\mu(f))j^\nu(g))(\widetilde{u}) = \int \mathrm{d}t \, \widetilde{u}(t) \Big[\int \mathrm{d}p \, p \Big(\frac{\widetilde{f}(p,p)\widetilde{g}(-p,-p)}{1 - e^{-\beta(e_0 - e_1)p}} e^{-\mathrm{i}t(e_0 - e_1)p}$$

$$+ (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} \frac{\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{g}(-p,p)}{1 - e^{-\beta(e_0+e_1)p}} e^{-\mathrm{i}t(e_0+e_1)p} \Big) + c^{\mu\nu}(f,g) \Big].$$

Der Ausdruck $[\cdots]$ in obiger Gleichung ist polynomial beschränkt in t und definiert eine reguläre Distribution. Daher ist der Definitionsbereich von $\omega_\beta((\alpha_{te} j^\mu(f))j^\nu(g))$ ganz $\mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Die Regularität rechtfertigt auch

$$\omega_\beta((\alpha_{te} j^\mu(f))j^\nu(g)) = \int \mathrm{d}p \, p \Big(\frac{\widetilde{f}(p,p)\widetilde{g}(-p,-p)}{1 - e^{-\beta(e_0 - e_1)p}} e^{-\mathrm{i}t(e_0 - e_1)p}$$

$$+ (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} \frac{\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{g}(-p,p)}{1 - e^{-\beta(e_0+e_1)p}} e^{-\mathrm{i}t(e_0+e_1)p} \Big) + c^{\mu\nu}(f,g)$$

im Funktionensinn zu schreiben.
Die Uneindeutigkeit $c^{\mu\nu}(f,g)$ ist im wesentlichen die Einpunktfunktion, entsprechend einem äußeren klassischen Feld (*hier eine Referenz*). Da wir Eichinvarianz voraussetzen, wählen wir $c^{\mu\nu} = 0$. Damit ist die Zweipunktfunktion der KMS-Zustände der Strom-Algebra in $1+1$ Dimensionen gegeben durch

$$\omega_\beta(j^\mu(f)j^\nu(g)) = \int \mathrm{d}p\, p \left(\frac{\widetilde{f}(p,p)\widetilde{g}(-p,-p)}{1-e^{-\beta(e_0-e_1)p}} + (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1} \frac{\widetilde{f}(p,-p)\widetilde{g}(-p,p)}{1-e^{-\beta(e_0+e_1)p}} \right).$$

Die Forderung nach Eichinvarianz führt dazu, daß die KMS-Zustände schon durch ihre Zweipunktfunktion bestimmt sind (siehe Lemma 4.1), sie sind *quasifrei.*

C.2 KMS-Zustände der $U(1)$-Algebra

Die KMS-Zustände der chiralen Subtheorien der 1+1-dimensionalen Stromalgebra werden analog zum zweidimensionalen Fall konstruiert. Hierbei ist zu beachten, daß die „Raumzeit“ nun eindimensional ist. Daher entsprechen Raumzeittranslationen einfach Verschiebungen auf der reellen Achse. Es kann also nicht mehr zwischen einer Raum- und einer Zeittranslation unterschieden werden. Geht man bei der Konstruktion genauso wie oben vor, so ergibt sich für die Zweipunktfunktion eines KMS-Zustandes zur inversen Temperatur $\beta > 0$ über der $U(1)$-Algebra

$$\omega_\beta(j(f)j(g)) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}p\, p\, \frac{\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(-p)}{1-e^{-\beta p}}.$$

Auch für die KMS-Zustände der eindimensionalen Theorie fordert man Eichinvarianz, auch sie sind also durch ihre Zweipunktfunktion schon bestimmt.

D Symbolverzeichnis

$\Box$	D'Alembert-Operator $\partial_0^2 - \partial_1^2$.
∂_μ^n	Die Ableitung $\frac{\partial^n}{\partial x_\mu^n}$.
$\partial_\pm$	Ableitung nach den chiralen Komponenten.
$\eth^{\boldsymbol{\mu}}$	Balancierte Ableitung.
$\mathbf{1}$	Identitätsoperator.
α_λ	Automorphismus, der die Wirkung des Elements $\lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ auf $\mathcal{A}$ implementiert.
α_a	Eine reine Translation.
$\mathcal{A}$	Die Stromalgebra der ein- bzw. zweidimensionalen Theorie.
$\mathcal{A}^{(1)}$	Die chirale Stromalgebra.
$\mathcal{A}^{(2)}$	Die Stromalgebra der zweidimensionalen Theorie.
β	Inverser Temperaturvektor, wobei $\beta = \|\beta\|e$ mit $\|\beta\| = 1/(k_B T)$ und $e \in V_+$ mit $e^2 = 1$. Wird im eindimensionalen Fall synonym mit $\beta_\pm$ verwendet, und bezeichnet auch die raumzeitliche Temperaturverteilung (inverse Temperaturfunktion).
$\beta_\pm$	Chirale Komponenten des inversen Temperaturvektors: $\beta_\pm = \|\beta\|(e_0 \pm e_1)$.
B	Kompakte Teilmenge des Vorwärtslichtkegels.
$[b, B]$	Kompaktes Intervall auf $\mathbb{R}_+$.
$C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	Menge der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
$C([b, B], \mathbb{C})$	Menge der stetigen Funktionen $[b, B] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
$C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$	Menge der belibig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$.
$C_0^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$	Menge der komplexwertigen, beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger.
$\mathcal{C}_B$	Menge der thermischen Referenzzustände mit kompaktem Temperaturträger in B.
$\mathcal{C}$	$\mathcal{C} = \bigcup_B \mathcal{C}_B$.
$\mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$	$C_0^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \equiv \mathscr{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$.
$\mathscr{D}(B, \mathbb{R})$	Die Menge aller reellwertigen, beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in B.
$\mathscr{D}_\beta(\mathbb{C})$	Menge der zulässigen Testfunktionen.
j^μ	Komponente des zweidimensionalen Stromes. Manchmal synonym mit j.
$j_\pm$	Chirale Stromkomponenten. Manchmal synonym mit j.
$L(\mu)$	Laplace-Transformierte von μ.
$\mathbb{N}$	Die natürlichen Zahlen ohne Null.
$\mathbb{N}_0$	Die natürlichen Zahlen mit Null.
ω	Ein Zustand über $\mathcal{A}$.
ω_β	KMS-Zustand zum inversen Temperaturvektor β.
$\omega_\beta^{(1)}$	KMS-Zustand in der eindimensionalen Theorie.
$\omega_\beta^{(2)}$	KMS-Zustand in der zweidimensionalen Theorie.
ω_B	Thermischer Referenzzustand mit Temperaturträger in B.

ω_∞	Vakuum-Zustand.
$\omega_\infty^{(1)}$	Vakuum-Zustand in der eindimensionalen Theorie.
$\omega_\infty^{(2)}$	Vakuum-Zustand in der zweidimensionalen Theorie.
φ^α	Integraloperator mit dem Kern $e^{-\alpha\beta((x+y)/2)}$.
φ_ε	Integraloperator mit dem Kern $1-\varepsilon\beta((x+y)/2)$.
$\Phi(\beta)$	$\Phi(\beta)=\omega_\beta(\phi(x))$, mit $\phi(x)\in\mathcal{S}_x$. Thermale Funktion.
$\mathcal{P}_+^\uparrow$	Die eigentliche orthochrone Poincaré-Gruppe.
$\mathbb{R}_+$	Die positiven reellen Zahlen ohne Null.
$\mathcal{S}_x$	Raum der thermalen Observablen bei x.
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})$	Raum der beliebig oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen, die zusammen mit allen Ableitungen schneller als polynomial im Unendlichen abfallen.
$T^{\mu\nu}$	Komponente des zweidimensionalen Energie-Impuls-Tensors.
$T_\pm$	Chirale Komponenten des Energie-Impuls-Tensors. Manchmal synonym mit T.
V_+	Der offene Vorwärtslichtkegel.

Literatur

[1] Buchholz, D., Ojima, I., Roos, H.J.: *Thermodynamic Properties of Non-Equilibrium States in Quantum Field Theory.* Annals Phys. **297**, 219 (2002)

[2] Buchholz, D.: *On Hot Bangs and the Arrow of Time in Relativistic Quantum Field Theory.* Comm. Math. Phys. **237**, 271 (2003)

[3] Haag, R.: *Local quantum physics: fields, particles, algebras.* Springer-Verlag (1992)

[4] Bratteli, O., Robinson, D.W.: *Operator algebras and quantum statistical mechanics. Vol. 2.: Equilibrium states.* Springer-Verlag (1996)

[5] Furlan, P., Sotkov, G.M., Todorov, I.T.: *Two-dimensional conformal quantum field theory.* Riv. del Nuovo Cimento **12**, 1 (1989)

[6] Rehren, K.-H.: *Konforme Quantenfeldtheorie.* Vorlesungsskript, online unter `http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/~rehren/vorl/ws9798.html`

[7] Lüscher, M., Mack, G.: *Global conformal invariance in quantum field theory.* Comm. Math. Phys. **41** 203 (1975)

[8] Friedan, D., Qiu, Z., Shenker, S.: *Details of the non-unitarity proof for highest weight representations of the Virasoro algebra.* Comm. Math. Phys. **107** 535 (1986)

[9] Haag, R., Hugenholtz, N.M., Winnink, M.: *On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics.* Comm. Math. Phys. **5**, 215 (1967)

[10] Bostelmann, H.: *Lokale Algebren und Operatorprodukte am Punkt.* Dissertation, Universität Göttingen (2000)

[11] Petz, D.: *An invitation to the algebra of canonical commutation relations.* Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics, Leuven Univ. Press (1990)

[12] Dixon, W.G.: *Special Relativity.* Cambridge Univ. Press (1978)

[13] Reed, M., Simon, B.: *I: Functional analysis.* Academic Press (1980)

[14] Rudin, W.: *Real and complex analysis.* McGraw-Hill (1987)

[15] Parthasarathy, K.R., Schmidt, K.: *Positive Definite Kernels, Continous Tensor Products, and Central Limit Theorems of Probability Theory.* Lecture Notes in Mathematics **272** (1972)

[16] Doetsch, G.: *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation.* Springer-Verlag (1974)

[17] Bahr, B.: *Lokale Gleichgewichtszustände masseloser Fermionen*. Diplomarbeit, Universität Göttingen (2004)

[18] Uecker, M.: *Lokale Gleichgewichtszustände des elektromagnetischen Feldes*. Diplomarbeit, Universität Göttingen (2005)

[19] Hübener, R.: *Lokale Gleichgewichtszustände massiver Bosonen*. Diplomarbeit, Universität Göttingen (2005)

[20] Gantmacher, F.R.: *Matrizentheorie* Springer-Verlag (1986)

Danksagungen

Zunächst möchte ich Professor Buchholz für die Aufgabenstellung und die vielen freitäglichen Gespräche danken. Ohne die zahlreichen Anregungen zum Thema Positivität wäre diese Arbeit wohl nie fertiggestellt worden.
Profesor Rehren gilt mein Dank dafür, daß er sich bereit erklärt hat, die Kokorrektur dieser Arbeit zu übernehmen.
Frau Mesecke, Frau Schubert, Frau Glormann und Frau Lütge-Hampe möchte ich meinen Dank aussprechen dafür, daß sie mir durch den organisatorischen Dschungel geholfen haben, vor allem in der Zeit kurz vor Abgabe der Arbeit.
Besonderer Dank gilt meinen Kollegen. Wir haben viele Diskussionen (fachlicher und anderer Natur) geführt, die ich oft als sehr anregend empfand, und wir haben viel gelacht. Keiner kann den "Schlemmer-Spezial" so großartig ausführen wie Jan, niemand kann so schön über den Weltuntergang philosophieren wie Robert und keiner kann Gandalf beim Nachschuß das Wasser reichen. Auch Martins buddistische Gelassenheit, Bennis Spieltrieb und Ulrichs erstaunliche Internet-Rätsel werde ich nicht vergessen, genausowenig wie meine Schachpartien gegen Ansgar, die "Herum-Hankelei" mit Helmut und Wojciechs Versuche, mir das polnische Wahlsystem zu erklären.
Ich danke auch allen anderen Mitgliedern des Instituts, die durch ihre umgängliche und kollegiale Art für ein sehr angenehmes Arbeitsklima gesorgt haben.
Zu guter Letzt möchte ich meiner Familie für ihre liebevolle und unermüdliche Unterstützung danken.