

Die Funktionalintegrale
der
AdS-CFT-Korrespondenz

Diplomarbeit

vorgelegt von

Alexander Peter Grundmeier

aus

Detmold

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik

der

Georg-August-Universität Göttingen

September 2004

Die Funktionalintegrale der AdS-CFT-Korrespondenz
Alexander P. Grundmeier

Die Funktionalintegrale
der
AdS-CFT-Korrespondenz

Alexander Peter Grundmeier
Diplomarbeit



Institut für Theoretische Physik
Georg-August-Universität Göttingen
September 2004

Inhaltsverzeichnis

Notationen und Konventionen	IX
Einleitung	1
1. Die konforme Gruppe und der AdS-Raum	3
1.1. Die konforme Gruppe	3
1.2. Der Anti-de-Sitter-Raum	4
1.2.1. Der AdS-Raum mit Lorentz-Signatur	4
1.2.2. Der Euklidische AdS-Raum	11
1.3. Klassische Feldtheorie auf dem AdS-Raum	15
1.3.1. Skalarer Fall	16
1.3.2. Vektorieller Fall	16
1.3.3. Tensorieller Fall	19
1.4. Die AdS-CFT-Korrespondenz	30
2. Die Funktionalintegrale	31
2.1. Überblick	31
2.2. Zusammenfassung von [DR02]	32
2.3. Darstellungstheoretischer Hintergrund	37
2.4. Vorgehen in dieser Arbeit	39
3. Bestimmung der relativen Normierung von H und K	41
3.1. Die gemeinsame Struktur von H und K	41
3.1.1. Notation und nützliche Relationen	42
3.1.2. Skalarer Fall	45
3.1.3. Vektorieller Fall	48
3.1.4. Tensorieller Fall	53

3.2. Normierung von H	57
3.2.1. Skalarer Fall	57
3.2.2. Vektorieller Fall	59
3.2.3. Tensorieller Fall	63
3.3. Normierung von K	66
3.3.1. Skalarer Fall	66
3.3.2. Vektorieller Fall	67
3.3.3. Tensorieller Fall	68
3.4. Fazit	70
4. Zusammenfassung und Ausblick	71
A. Riemannsche Geometrie auf dem AdS-Raum: Definitionen, Konventionen, Formeln	73
A.1. Das Christoffelsymbol	73
A.2. Die kovariante Ableitung	74
A.3. Der Differentialoperator $D_\kappa D^\kappa$ auf dem AdS-Raum	75
A.3.1. $D_\kappa D^\kappa$ angewendet auf einen Skalar	75
A.3.2. $D_\kappa D^\kappa$ angewendet auf einen Vektor	75
A.3.3. $D_\kappa D^\kappa$ angewendet auf einen Tensor	77
A.4. Der Krümmungstensor	80
B. Berechnung der Integrale . . .	89
B.1. . . . für Abschnitt 3.2	89
B.1.1. Vektorieller Fall	89
B.1.2. Tensorieller Fall	92
B.2. . . . für Abschnitt 3.3	98
B.2.1. Vektorieller Fall	98
B.2.2. Tensorieller Fall	99
C. Wichtige Formeln	103
C.1. Die Gammafunktion	103
C.2. Fundamentallösung der Laplace-Gleichung im d -dimensionalen Euklidischen Raum	104
D. Die kovariante Ableitung einer Distribution	105

Literaturverzeichnis	107
Danksagung	109

Notationen und Konventionen

Für diese Arbeit sind bzgl. der Notation folgende Punkte zu beachten:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$
- $\sqrt{g} := \sqrt{|\det g|}$
- Wir verwenden folgende Definitionen des Krümmungstensors bzw. des Ricci-Tensors:

$$R^\lambda{}_{\kappa\nu\mu}\phi_\lambda := [D_\mu, D_\nu]\phi_\kappa$$
$$R_{\kappa\nu} := R^\mu{}_{\kappa\mu\nu}$$

(Vergleiche hierzu auch Abschnitt A.4 im Anhang.)

- Bei Ableitungen sind die Argumente nicht immer durch entsprechende Klammersetzung gekennzeichnet – teilweise aus Gründen der Übersichtlichkeit und Ästhetik, teilweise auch um die Notation bestimmter Ausdrücke aus der benutzten Literatur beizubehalten. Beispielsweise ist $z^{1+d}\partial_z z^{1-d}\phi$ als $z^{1+d}\partial_z(z^{1-d}\partial_z\phi)$ zu verstehen. In solchen Fällen sollte sich aber das Argument der Ableitung ohne Probleme aus dem Zusammenhang erschließen lassen. Teilweise wurde auch ein Punkt („·“) statt Klammern verwendet. Ein Beispiel hierfür wäre $D_\kappa u \cdot D^\kappa u$ statt $(D_\kappa u)D^\kappa u$.
- Falls nicht ausdrücklich anderes gesagt wird, ist, wenn von einem „Tensor“ die Rede ist, immer ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe gemeint.
- Da wir in dieser Arbeit größtenteils in einem formalen Rahmen arbeiten werden, sind die Testfunktionenräume nicht näher spezifiziert. Es wird

immer davon ausgegangen, daß die Testfunktionen so gewählt werden, daß die vorgenommenen mathematischen Operationen (wie z. B. partielle Integration oder Vertauschung von Limesbildung und Integration) problemlos möglich sind.

- Bei manchen Rechnungen, wie z. B. bei den Zerlegungssätzen in Abschnitt 1.3, wurden nicht die kritischen Werte für die Variablen angegeben (Division durch Null o. ä.). Der Ausschluß solcher Punkte wird immer stillschweigend vorausgesetzt.

Einleitung

Der sog. Anti-de-Sitter-Raum (kurz: AdS-Raum) ist eine maximal symmetrische Raumzeit, die ursprünglich als Lösung der Vakuum-Einsteingleichungen mit negativer konstanter Krümmung eingeführt worden ist. Bereits vor drei Jahrzehnten wurden freie Quantenfeldtheorien auf dem AdS-Raum konstruiert [Fro74]. Ab Mitte der 90iger Jahre des 20. Jahrhunderts erlangte Quantenfeldtheorie auf Grund der sog. AdS-CFT-Korrespondenz (CFT: Conformal Field Theory) verstärkte Aufmerksamkeit. Hiermit wird allgemein die Verbindung zwischen Theorien auf dem AdS-Raum selbst (dem „Bulk“) und konformen Theorien auf seinem Rand bezeichnet. Ausgehend von einer grundlegenden Arbeit aus dem Jahre 1997 von MALDACENA [Mal98] sowie daran anknüpfenden feldtheoretischen Modellen von WITTEN sowie GUBSER, KLEBANOV und POLYAKOV [Wit98, GKP98], die wir im engeren Sinne als AdS-CFT-Korrespondenz bezeichnen wollen, wurden in den darauf folgenden Jahren bis heute viele weitere Artikel über diesen Zusammenhang veröffentlicht.

Die vorliegende Diplomarbeit stellt die Erweiterung eines dieser Artikel dar, und zwar der von DÜTSCH und REHREN 2002 veröffentlichten Arbeit [DR02]. In ihr zeigen die beiden Autoren die Äquivalenz zweier in der AdS-CFT-Korrespondenz auftretender – auf den ersten Blick grundsätzlich verschiedener – formaler Funktionalintegrale sowie der durch die Funktionalintegrale erzeugten Felder. Dies geschieht jedoch allein für den Fall von Skalar- und Vektorfeldern. Wir werden in den folgenden Kapiteln nun die Äquivalenz im Falle symmetrischer Tensorfelder zweiter Stufe zeigen. Dieser ist wichtig, um mit der AdS-CFT-Korrespondenz Gravitationsfelder beschreiben zu können, die in MALDECENAS Vermutung eine zentrale Rolle spielen. Hierzu erarbeiten wir, ausgehend von allgemeinen Resultaten aus [DR02], ein für Tensorfelder beliebiger Stufe analog anwendbares Verfahren.

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Im ersten Kapitel sollen zuerst einige wichtige Begriffe definiert bzw. erläutert werden. Primär wird der (euklidische) Anti-de-Sitter-Raum und seine grundlegenden Eigenschaften betrach-

tet. In diesem Zusammenhang lernen wir auch die im weiteren benutzten Koordinaten kennen. Anschließend werden wir sowohl im skalaren, als auch im vektoriellen und tensoriellen Fall aus der jeweils allgemeinsten quadratischen Lagrangedichte für den euklidischen Anti-de-Sitter-Raum die entsprechende freie Feldgleichung bestimmen. Für den Vektor- und Tensorfall geben wir noch jeweils einen (in Kapitel 3 benötigten) Zerlegungssatz für die Lösungen der Feldgleichungen an. Schließlich werden wir genauer erklären, was unter dem Begriff „AdS-CFT-Korrespondenz“ zu verstehen ist.

Das zweite Kapitel wird die in dieser Arbeit zu betrachtenden Funktionalintegrale und Propagatoren einführen. Hierzu wird eine kurze Zusammenfassung der Arbeit von DÜTSCH und REHREN [DR02] gegeben. Ziel dieses Kapitels ist es, die im restlichen Teil der Arbeit zu verfolgende Strategie darzustellen und zu motivieren.

Das dritte Kapitel schließt direkt an das zweite an und konkretisiert die in diesem Teil der Arbeit dargelegte Strategie: Wir werden, nach Herleitung einiger nützlicher Formeln, für alle drei Fälle – also den skalaren, den vektoriellen und den tensoriellen Fall – die für die vermutete Äquivalenz entscheidende Eigenschaft der Propagatoren beweisen. (Es handelt sich dabei um eine relative Normierung, die wiederum die „richtige“ relative Normierung zwischen Zweipunkt- und n -Punkt-Schwingerfunktion sicherstellt.) Hierzu sind im Vektor- und Tensorfall einige längere Rechnungen nötig. Um die Übersicht zu wahren, sind deshalb nur im skalaren Fall alle Rechnungen komplett in den entsprechenden Abschnitten aufgeführt. Für die anderen beiden Fälle sind die Rechnungen je nach Schwierigkeit entweder nur stark gekürzt aufgeführt oder finden sich vollständig im Anhang.

Das vierte Kapitel beendet den Hauptteil der Arbeit mit einer Zusammenfassung. Gleichzeitig soll ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen des Resultates gegeben werden.

Der Anhang öffnet mit einem Kapitel über einige wichtige Ergebnisse und Begrifflichkeiten der Riemannschen Geometrie. Aus diesen werden Formeln für den Anti-de-Sitter-Raum hergeleitet, von denen im Haupttext häufig Gebrauch gemacht wird. Das dann folgende Kapitel B beschäftigt sich mit der Berechnung einiger Integrale, die für Kapitel 3 benötigt werden. Die letzten beiden Kapitel C und D des Anhanges schließlich enthalten einige weitere benötigte Formeln und geben an, wie bei kovarianten Ableitungen von tensorwertigen Distributionen zu verfahren ist.

1. Die konforme Gruppe und der AdS-Raum

1.1. Die konforme Gruppe

Die Elemente der Poincaré-Gruppe, also der Invarianzgruppe der d -dimensionalen Minkowski-Metrik, lassen sowohl den Abstand zwischen zwei Raumpunkten invariant als auch die kausale Struktur des Raumes. Im Gegensatz dazu stehen die sog. *konformen Transformationen* bzw. die *konforme Gruppe*:

Def. 1.1. Eine *konforme Transformation* $x \mapsto x'$ ist eine invertierbare Abbildung, die den metrischen Tensor $\eta_{\mu\nu}$ bis auf einen evtl. ortsabhängigen Skalenfaktor invariant läßt:

$$\eta'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)\eta_{\mu\nu}(x) \quad (1.1)$$

Die *konforme Gruppe* setzt sich aus diesen Transformationen zusammen.

Die konformen Transformationen erhalten die kausale Struktur der Raumzeit, lassen jedoch den Abstand i. a. nicht invariant. Die konforme Gruppe stellt also eine Verallgemeinerung der Poincaré-Gruppe dar und eröffnet damit neue Möglichkeiten. Speziell bietet sie sich bei der Betrachtung von masselosen Teilchen an, da bei diesen nur noch die kausale Struktur des Raumes wichtig ist. Die Feldtheorie, die im Gegensatz zur „normalen“ nicht auf der Poincaré-Gruppe, sondern auf der konformen Gruppe aufbaut, wird *konforme Feldtheorie* genannt.

Im folgenden seien wichtige Punkte bzgl. der konformen Gruppe aufgeführt:

- Die konforme Gruppe läßt den Lichtkegel invariant.
- Sie läßt beliebige Winkel invariant.
- Sie wird durch Lorentz-Transformationen ($\Lambda(x) = 1$), Translationen, Dilatationen und sog. *spezielle konforme Transformationen*

$$x' = \frac{x - bx^2}{1 - 2bx + b^2x^2} \quad (1.2)$$

erzeugt.

- Sie ist isomorph zu $SO(d, 2)$ bzw. euklidisch $SO(d + 1, 1)$.
- Die speziellen konformen Transformationen auf dem Minkowski-Raum sind nur lokal definiert.

1.2. Der Anti-de-Sitter-Raum

Der *Anti-de-Sitter-Raum*¹ (im folgenden auch kurz AdS-Raum) ist eine Lösung der Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.3)$$

mit negativer kosmologischer Konstante Λ . Er besitzt eine konstante negative Krümmung R und eignet sich auf Grund der daraus resultierenden Symmetrie (ähnlich wie der flache Raum) gut für Untersuchungen der Quantenfeldtheorie.

Anmerkung. Der AdS-Raum ist eine der drei maximal symmetrischen² Raumzeiten. Die anderen beiden sind der Minkowski-Raum mit $R = 0$ und der de-Sitter-Raum mit $R > 0$. \diamond

In den folgenden Abschnitten sollen zwei verschiedene Varianten des AdS-Raumes betrachtet werden. Leider kann hierbei nur auf sehr wenige Eigenschaften dieser interessanten Raumzeit eingegangen werden. Für weitere Details und Aspekte – auch bzgl. der AdS-CFT-Korrespondenz – sei auf die ziemlich umfangreiche Literatur zu diesem Bereich verwiesen (beispielsweise das ausführliche Review-Paper [AGM⁺00] oder auch [Gib00]).

1.2.1. Der AdS-Raum mit Lorentz-Signatur

Der AdS-Raum $\text{AdS}_{1,d}$ der Dimension $d + 1$ ist eine Raumzeit, die als ein in einen flachen $d + 2$ -dimensionalen Raum mit der Metrik

$$\eta := \text{diag}(1, -1, \dots, -1, 1) \quad (1.4)$$

¹benannt nach WILLEM DESITTER (1872-1934, holländischer Astronom und Kosmologe)

²Wir nennen eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit einen *maximal symmetrischen Raum*, falls sie $\frac{1}{2}d(d + 1)$ Killing-Vektoren besitzt.

(zwei Zeitrichtungen des Einbettungsraumes!) eingebettetes einschaliges Hyperboloid definiert werden kann. Seine Metrik ist durch die des Einbettungsraumes gegeben. Zusammengefaßt gelte also folgende Definition:³

Def. 1.2. Es sei η wie in (1.4) definiert. Dann sei

$$\text{AdS}_{1,d} := \left(\{z \in \mathbb{R}^{d+2} \mid \eta_{\mu\nu} z^\mu z^\nu = 1\}, \eta \right). \quad (1.5)$$

$\text{AdS}_{1,d}$ heißt *AdS-Raum mit Lorentz-Signatur*.⁴

Anmerkung. Der AdS-Raum wird in der Literatur häufig mit einer beliebigen Zahl aus \mathbb{R}^+ statt der 1 definiert. Der Einfachheit halber haben wir auf diese allgemeinere Definition verzichtet und den Raum gleich „normiert“. \diamond

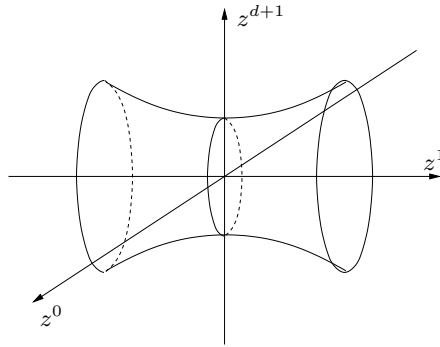


Abbildung 1.1.: Der $\text{AdS}_{1,d}$ -Raum

Man zeigt, daß der Krümmungsskalar des AdS-Raumes durch $R = -d(d+1)$ gegeben ist (siehe Kapitel A.4). Die kosmologische Konstante, mit der diese Raumzeit die Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen löst, ergibt sich dann aus der Relation (1.3) zu $\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2}$:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= 0 \\ \Rightarrow R - \frac{R}{2}(d+1) + \Lambda(d+1) &= 0 \end{aligned}$$

³Wir notieren hier und im folgenden eine Raumzeit als ein Paar bestehend aus einer Menge und einer (Pseudo-)Metrik.

⁴Der *de-Sitter-Raum* hingegen ist als die Hyperfläche $\{z \mid \eta_{\mu\nu} z^\mu z^\nu = -1\}$ definiert, wobei die Metrik hier (entgegen oben) die Minkowski-Metrik sei: $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(1, -1, \dots, -1, -1)$

$$\Leftrightarrow \Lambda = -\frac{d(d-1)}{2} \quad (1.6)$$

Im folgenden seien noch zwei für den AdS-Raum gebräuchliche Koordinatensysteme aufgeführt:

Globale Koordinaten

Es gelte

$$z_0 = \frac{\cos \tau}{\cos \rho}, \quad z_i = \omega_i \tan \rho, \quad z_{d+1} = \frac{\sin \tau}{\cos \rho} \quad (1.7)$$

mit

$$i \in \{1, \dots, d\}, \quad 0 \leq \tau < 2\pi, \quad 0 \leq \rho < \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq \omega_i \leq 1$$

($\Rightarrow 0 \leq \tan \rho < \infty$; $-1 \leq \sin \tau, \cos \tau \leq 1$; $0 \leq \cos \rho \leq 1$). Als Ausdrücke für τ und ρ bekommt man:

$$\tau = \arctan \frac{z_{d+1}}{z_0}, \quad \rho = \arccos \sqrt{\frac{1}{z_0^2 + z_{d+1}^2}} \quad (1.8)$$

Über letztere Gleichung lassen sich auch durch Einsetzen in $\omega_i = z_i / \tan \rho$ die anderen Variablen bestimmen.

Mit $z_0^2 - z_1^2 - \dots - z_d^2 + z_{d+1}^2 = 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sec^2 \rho - \tan^2 \rho \cdot \sum_{i=1}^d \omega_i^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 - \sin^2 \rho \cdot \sum_{i=1}^d \omega_i^2 &= \cos^2 \rho \\ \Leftrightarrow \sin^2 \rho \left(1 - \sum_{i=1}^d \omega_i^2\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^d \omega_i^2 &= 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Es gilt also:

$$\{(\omega_1, \dots, \omega_d)\} = \mathbb{S}^{d-1} \quad (1.10)$$

Die ω_i lassen sich folglich bei einer konkreten Rechnung durch durch $d - 1$ Winkel, angeben (Bsp. $d = 2$: $\omega_1 = \cos \theta$; $\omega_2 = \sin \theta$). τ, ρ und diese $d - 1$ Winkel sind die sog. *globalen Koordinaten*. Im folgenden gelte die Bezeichnung

$$d\Omega^2 := \sum_{i=1}^d d\omega_i^2. \quad (1.11)$$

Man erhält nun

$$dz_0 = -\frac{\sin \tau}{\cos \rho} d\tau + \frac{\cos \tau \sin \rho}{\cos^2 \rho} d\rho \quad (1.12a)$$

$$dz_i = \sec^2 \rho \omega_i d\rho + \tan \rho d\omega_i \quad (1.12b)$$

$$dz_{d+1} = \frac{\cos \tau}{\cos \rho} d\tau + \frac{\sin \tau \sin \rho}{\cos^2 \rho} d\rho \quad (1.12c)$$

und damit:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sec^2 \rho d\tau^2 - \sec^4 \rho d\rho^2 - \tan^2 \rho d\Omega^2 - \\ &\quad - \sec^2 \rho \tan \rho d\rho \cdot \underbrace{2 \sum_{i=1}^d \omega_i d\omega_i}_{=d \sum_{i=1}^d \omega_i^2 = 0} + \tan^2 \rho \sec^2 \rho d\rho^2 \\ &= \sec^2 \rho d\tau^2 - \sec^2 \rho d\rho^2 - \tan^2 \rho d\Omega^2 \\ &= \sec^2 \rho (d\tau^2 - d\rho^2 - \sin^2 \rho d\Omega^2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Um eine bessere Anschauung vom AdS-Raum zu gewinnen, wird manchmal der Definitionsbereich der globalen Koordinaten in Form eines Zylinders – des sog. *AdS-Zylinders* – aufgetragen. In Abbildung 1.2 ist ein Schnitt durch diesen Zylinder für den Fall $d = 2$ zu sehen.

Auf Grund von Hinweisen, daß eine Quantenfeldtheorie auf dem wie hier durch Einbettung definierten AdS-Raum keine Wechselwirkung zuläßt [BFS00], ist es ratsam, zu einem Überlagerungsraum überzugehen:

Die *universelle Überlagerung* $CAdS_{1,d}$ des $AdS_{1,d}$ ergibt sich durch periodisches Fortsetzen des AdS-Zylinders, τ geht also jetzt von $-\infty$ bis $+\infty$. Man beachte, daß sich die gefundene Metrik (1.13) nur bis auf einen Faktor von der Metrik

$$d\tilde{s}^2 = -d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho d\Omega^2 \quad (1.14)$$

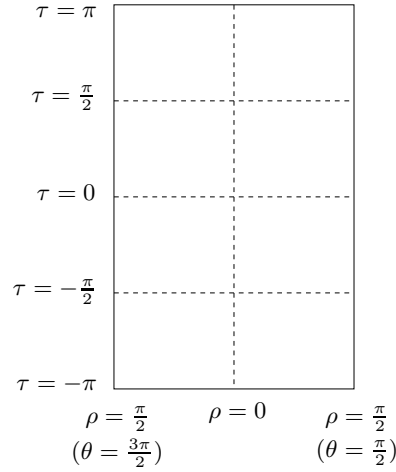


Abbildung 1.2.:

Vertikaler Schnitt durch den AdS-Zylinder im Fall $d = 2$. Dieser ist durch den Definitionsbereich der durch $z_0 = \cos \tau \sec \rho$, $z_1 = \cos \theta \tan \rho$, $z_2 = \sin \theta \tan \rho$ und $z_3 = \sin \tau \sec \rho$ gegebenen globalen Koordinaten τ, ρ, θ definiert.

des statischen Einstein-Universums unterscheidet. Wir haben also gezeigt, daß der AdS-Raum konform einer Hälfte (da $0 \leq \rho < \frac{\pi}{2}$ und nicht $0 \leq \rho \leq \pi$) dieser Raumzeit entspricht. Der Schnitt durch den AdS-Zylinder in Abbildung 1.2 kann also als Penrose-Diagramm des AdS-Raumes interpretiert werden. Ein solches ist auch in Abbildung 1.3 mit einer Auswahl zeitartiger und raumartiger Geodäten zu sehen (vgl. [Car04], S. 327).

Poincaré-Koordinaten

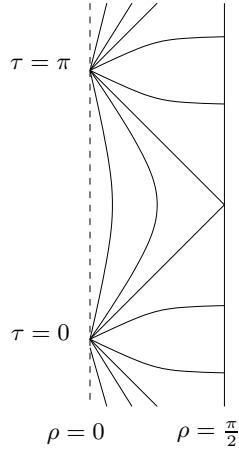
Man definiert

$$z_+ := z_d + z_{d+1}, \quad u := 1/z_+, \quad x_i := z_i/z_+. \quad (1.15)$$

Die Größen u, x_0, \dots, x_{d-1} mit $x_i \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^+$ sind die sog. *Poincaré-Koordinaten*. Auf Grund der Einschränkung $u > 0$ decken diese nur die Hälfte des AdS-Raumes ab.

Es gilt

$$z_0^2 - z_1^2 - \dots - z_d^2 + z_{d+1}^2 = 1$$


Abbildung 1.3.:

Penrose-Diagramm für den AdS-Raum mit eingetragenen beispielhaften Geodäten.

$$\Leftrightarrow x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_d^2 + x_{d+1}^2 = u^2. \quad (1.16)$$

Die Koordinatentransformation läßt sich folgendermaßen wieder umkehren:

$$z_i = \frac{x_i}{u} \quad \text{für } i \in \{0, \dots, d-1\} \quad (1.17a)$$

$$z_d = \frac{x_d}{u} = -\frac{1}{2u}(u^2 - x_0^2 + \dots + x_{d-1}^2 - 1) \quad (1.17b)$$

$$z_{d+1} = \frac{x_{d+1}}{u} = +\frac{1}{2u}(u^2 - x_0^2 + \dots + x_{d-1}^2 + 1) \quad (1.17c)$$

Zur Herleitung der letzten beiden Ausdrücke wurde (1.16) und

$$x_d + x_{d+1} = 1 \quad (1.18)$$

verwendet. Weiterhin ergibt sich:

$$dx_d = dx_{d+1} \quad (1.19)$$

$$dz_+ = -\frac{1}{u^2} du \quad (1.20)$$

$$dz_i = \frac{1}{u} dx_i - \frac{x_i}{u^2} du \quad (1.21)$$

Aus der letzten Gleichung erhält man

$$dz_i^2 = \frac{1}{u^2} dx_i^2 - 2\frac{x_i}{u^3} dx_i du + \frac{x_i^2}{u^4} du^2. \quad (1.22)$$

Nun läßt sich ds^2 durch die neuen Variablen ausdrücken:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dz_0^2 - dz_1^2 - \dots - dz_d^2 + dz_{d+1}^2 \\ &= \frac{1}{u^2} [dx_0^2 - \dots - dx_{d-1}^2 - \underbrace{dx_d^2 + dx_{d+1}^2}_{=0} - \\ &\quad - \frac{1}{u} \underbrace{(2x_0 dx_0 - \dots - 2x_d dx_d + 2x_{d+1} dx_{d+1})}_{=d(u^2)=2udu} du + \\ &\quad + \frac{1}{u^2} \underbrace{(x_0^2 - \dots - x_d^2 + x_{d+1}^2)}_{=u^2} du^2] \\ &= \frac{1}{u^2} (-du^2 + dx_0^2 - \dots - dx_{d-1}^2) \end{aligned} \quad (1.23)$$

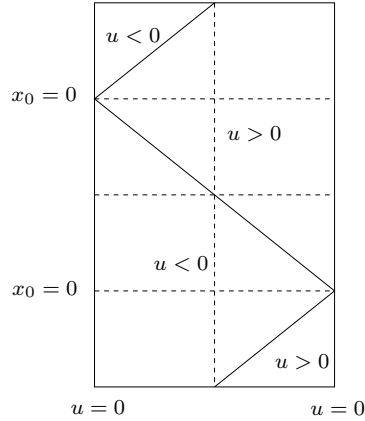
In Abb. 1.4 ist derselbe Schnitt durch den AdS-Zylinder wie in Abb. 1.2 zu sehen, diesmal mit den durch die Poincaré-Koordinaten u, x_0, x_1 im Fall $u > 0$ und $u < 0$ abgedeckten Bereiche gekennzeichnet. Die Grenzfläche, die diese Bereiche im AdS-Zylinder voneinander trennt, ist im Fall $d = 2$ gegeben durch die Lösungsmenge der Gleichung $\sin \tau + \sin \rho \sin \theta = 0$.

Ein wichtiger Punkt ist, daß der Rand $\rho = \pi/2$ bzw. $u = 0$ mit dem Rand des AdS identifiziert wird; jede der beiden sich durch die Einteilung des AdS-Zylinders ergebenden rautenförmigen Hälften der Zylinderoberfläche entspricht dem flachen Minkowski-Raum.

Zum Schluß dieses Abschnittes sei auf zwei Tatsachen hingewiesen, die beim AdS-Raum mit Lorentz-Signatur Probleme bereiten:

- Zum einen besitzt er auf Grund der zwei Zeitrichtungen des Einbettungsraumes (z^0 und z^{d+1}) keine globale kausale Struktur. So sind Kreise parallel zur z^0 - z^{d+1} -Ebene geschlossene zeitartige Kurven, die einer solchen kausalen Struktur widersprechen.
- Zum anderen ist er nicht global hyperbolisch, d. h. es existiert keine Cauchy-Fläche⁵. Dies ist aber notwendig für die Existenz klassischer Feld-

⁵Eine *Cauchy-Fläche* ist eine Untermannigfaltigkeit, deren Tangentialräume raumartig sind, und die von jeder kausalen, maximal fortgesetzten Kurve genau einmal geschnitten wird.


Abbildung 1.4.:

Derselbe Schnitt durch den AdS-Zylinder wie oben mit eingetragenen Poincaré-Koordinaten u, x_0, x_1 . (Es gilt $z_0 = x_0/u, z_1 = x_1/u, z_2 = -(u^2 - x_0^2 + x_1^2 - 1)/2u, z_2 = (u^2 - x_0^2 + x_1^2 + 1)/2u$.) Die Grenze zwischen diesen Bereichen (die Diagonalen) erhält man im Fall $u = \pm\infty$.

gleichungen, da man Cauchy-Daten auf einer Cauchy-Fläche vorgeben will.

Das Problem der Kausalität läßt sich recht einfach dadurch umgehen, daß man die universelle Überlagerung $CAdS_{1,d}$ des $AdS_{1,d}$ bildet. Allerdings ist auch $CAdS_{1,d}$ nicht global hyperbolisch. Dieses zweite Problem läßt sich lösen, indem man ausnutzt, daß sich – wie oben gezeigt – $CAdS_{1,d}$ konform in eine Hälfte des global hyperbolischen statischen Einstein-Universums einbetten läßt [AIS78].

1.2.2. Der Euklidische AdS-Raum

Neben dem AdS-Raum mit Lorentz-Signatur $AdS_{d,1}$ benutzt man häufig noch den sog. *Euklidischen Anti-de-Sitter-Raum*, der eine analytische Fortsetzung von $AdS_{d,1}$ darstellt. Wir definieren:

Def. 1.3. Es sei

$$\eta := \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1). \quad (1.24)$$

Die Raumzeit

$$AdS_{d+1} := \left(\{z \in \mathbb{R}^{d+2} \mid \eta_{\mu\nu} z^\mu z^\nu = -1, z^{d+1} > 0\}, \eta \right) \quad (1.25)$$

heißt *Euklidischer AdS-Raum*.

Der Euklidische AdS-Raum hat die Form einer einzelnen Schale eines zweiseitigen Hyperboloids (vgl. Abbildung 1.5). Seine Isometriegruppe ist $SO(d+1, 1)$.

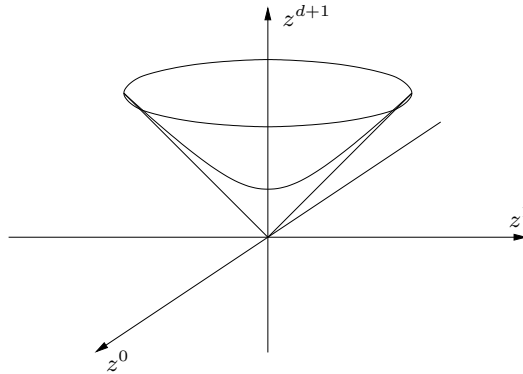


Abbildung 1.5.: Der AdS_{d+1} -Raum

Im folgenden werden wir stets den Euklidischen AdS-Raum benutzen. Wir definieren hierfür Koordinaten ganz analog zu den Poincaré-Koordinaten des $AdS_{1,d}$ (s. o.) über

$$z_+ := z_d + z_{d+1}, \quad z := 1/z_+, \quad x_i := z_i/z_+, \quad (1.26)$$

wobei z, x_0, \dots, x_{d-1} mit $x_i \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^+$ die eigentlichen Koordinaten darstellen und z_+, x_d, x_{d+1} Hilfsvariable sind. Es gilt

$$\begin{aligned} z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_d^2 - z_{d+1}^2 &= -1 \\ \Leftrightarrow x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_d^2 - x_{d+1}^2 &= -z^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Mit $x := (x^0, \dots, x^{d-1})$ und somit $x^2 = \sum_{i=0}^{d-1} x_i^2$ erhalten wir folgende Formeln zur Umkehr der Koordinatentransformation:

$$z_i = \frac{x_i}{z} \quad \text{für } i \in \{0, \dots, d-1\} \quad (1.28a)$$

$$z_d = \frac{x_d}{z} = -\frac{1}{2z}(z^2 + x^2 - 1) \quad (1.28b)$$

$$z_{d+1} = \frac{x_{d+1}}{z} = \frac{1}{2z}(z^2 + x^2 + 1) \quad (1.28c)$$

Hierbei wurde (1.27) und

$$x_d + x_{d+1} = 1 \quad (1.29)$$

verwendet. Weiterhin ergibt sich:

$$dx_d = dx_{d+1} \quad (1.30)$$

$$dz_+ = -\frac{1}{z^2} dz \quad (1.31)$$

$$dz_i = \frac{1}{z} dx_i - \frac{x_i}{z^2} du \quad (1.32)$$

Aus der letzten Gleichung folgert also:

$$dz_i^2 = \frac{1}{z^2} dx_i^2 - 2\frac{x_i}{z^3} dx_i dz + \frac{x_i^2}{z^4} dz^2 \quad (1.33)$$

Wir drücken nun ds^2 durch die neuen Variablen aus:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta \\ &= dz_0^2 + dz_1^2 + \dots + dz_d^2 - dz_{d+1}^2 \\ &= \frac{1}{z^2} [dx_0^2 + \dots + dx_{d-1}^2 + \underbrace{dx_d^2 - dx_{d+1}^2}_{=0} - \\ &\quad - \frac{1}{z} \underbrace{(2x_0 dx_0 + \dots + 2x_d dx_d - 2x_{d+1} dx_{d+1})}_{=-d(z^2)=-2z dz} dz + \\ &\quad + \frac{1}{z^2} \underbrace{(x_0^2 + \dots + x_d^2 - x_{d+1}^2)}_{=-z^2} dz^2] \\ &= \frac{1}{z^2} (dz^2 + dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_{d-1}^2) \\ &= \frac{1}{z^2} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (1.34)$$

Hierbei ist $\mu, \nu \in \{z, 0, 1, \dots, d-1\}$ und $x^z := z$. Die Metrik des Euklidischen AdS-Raumes ist also gegeben durch

$$g_{\mu\nu} := \frac{1}{z^2} \delta_{\mu\nu}, \quad (1.35)$$

und wir erhalten damit

$$g^{\mu\nu} = z^2 \delta_{\mu\nu} \quad (1.36)$$

sowie

$$\sqrt{g} = z^{-1-d}. \quad (1.37)$$

Dem Rand $\{z^{d+1} = \infty\}$ des einschaligen Hyperboloids entspricht $\{z = 0\} \cup \{z = \infty\}$, wobei es sich bei $\{z = \infty\}$ nur um einen einzelnen Punkt handelt, was aus der für $z = \infty$ verschwindenden Metrik folgt (siehe [Wit98]). Wir können den Rand also mit einer Sphäre \mathbb{S}^d identifizieren. Ein wichtiger Punkt ist nun, daß die Isometriegruppe $SO(d+1, 1)$ des AdS_{d+1} auf dem Rand wie die konforme Gruppe wirkt. (Dies gilt auch für den AdS-Raum mit Lorentz-Signatur.) Für die späteren Berechnungen bestimmen wir nun noch eine Invariante dieser Gruppe:

Das Abstandskadrat $\tilde{u} := \eta_{\alpha\beta}(\tilde{z} - \tilde{z}')^\alpha(\tilde{z} - \tilde{z}')^\beta$ zweier Punkte $\tilde{z}, \tilde{z}' \in \text{AdS}_{d+1}$ im Einbettungsraum (also das Quadrat der Länge der Sehne, die zwei Punkte auf dem AdS miteinander verbindet) ist invariant unter der Isometriegruppe $SO(d+1, 1)$. (Eine solche Invarianz werden wir von nun an auch als *AdS-Invarianz* bezeichnen.) Wir erhalten mit $\tilde{z}_\alpha \tilde{z}^\alpha = \tilde{z}'_\alpha \tilde{z}'^\alpha = -1$ für diese Größe:

$$\tilde{u} = -2 - 2\tilde{z}_\alpha \tilde{z}'^\alpha \quad (1.38)$$

Wir werden das Ergebnis nun mit Hilfe der Formeln (1.28) in den neuen Koordinaten (z, x) bzw. (z', x') ausdrücken. Hierzu berechnen wir

$$\tilde{z}_\alpha \tilde{z}'^\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{d-1} x_i x'_i - \frac{1}{2}(z^2 + x^2 + z'^2 + x'^2)}{zz'} \quad (1.39)$$

und bekommen somit:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{-2zz' - 2\sum_{i=0}^{d-1} x_i x'_i + z^2 + x^2 + z'^2 + x'^2}{zz'} \\ &= \frac{(z - z')^2 + (x - x')^2}{zz'} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Um Übereinstimmung mit z. B. [DR02] und [DFM⁺99] zu erzielen, werden wir im folgenden

$$u := \frac{1}{2}\tilde{u} = \frac{(z - z')^2 + (x - x')^2}{2zz'} \quad (1.41)$$

als Invariante benutzen.

Anmerkung. Die Größe u (bzw. \tilde{u}) ist eine (monotone) Funktion des geodätischen Abstandes s . Es gilt :

$$u = 2 \sinh^2 \frac{s}{2} \quad (1.42)$$

◇

1.3. Klassische Feldtheorie auf dem AdS-Raum

In diesem Kapitel werden wir die für den weiteren Verlauf der Arbeit benötigten kovarianten freien Feldgleichungen auf dem Euklidischen AdS-Raum herleiten. Des weiteren werden wir zeigen, daß sich die auf Grund der Kovarianz der Feldgleichungen AdS-invarianten Lösungsräume im vektoriellen und tensoriellen Fall zerlegen lassen. Diese Tatsache können wir im weiteren Verlauf der Arbeit ausnutzen.

Die Wirkung S hängt mit der Langrangedichte \mathcal{L} über

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\phi^i, D_\mu \phi^i) = \int d^d x \sqrt{g} \tilde{\mathcal{L}}(\phi^i, D_\mu \phi^i) \quad (1.43)$$

zusammen. (Das Symbol ϕ^i kennzeichnet hierbei ein Tensorfeld beliebiger Stufe.) Da wir den Euklidischen AdS-Raum mit den im letzten Kapitel eingeführten Koordinaten betrachten wollen, wird (1.43) zu

$$S = \int dz d^d x \sqrt{g} \tilde{\mathcal{L}}(\phi^i, D_\mu \phi^i). \quad (1.44)$$

Aus $\tilde{\mathcal{L}}$ wird mit Hilfe der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi^i} - D_\mu \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (D_\mu \phi^i)} \right) = 0 \quad (1.45)$$

die Feldgleichung bestimmt.

In allen folgenden Fällen werden wir jeweils vom allgemeinsten kovarianten $\tilde{\mathcal{L}}$ ausgehen, wobei wir im vektoriellen und tensoriellen Fall, um einen besseren Vergleich mit der Literatur zu ermöglichen, $\tilde{\mathcal{L}}$ jeweils mit Hilfe der entsprechenden Feldstärketensoren notieren.

1.3.1. Skalarer Fall

$\tilde{\mathcal{L}}$ ist hier gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}M^2\phi^2. \quad (1.46)$$

Hiermit ergibt sich

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi} = M^2\phi \quad (1.47)$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}(g^{\nu\kappa}\partial_\nu\phi\partial_\kappa\phi) \\ &= \frac{1}{2}g^{\nu\kappa}(\delta_\nu^\mu\partial_\kappa\phi + \partial_\nu\phi\delta_\kappa^\mu) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\mu\kappa}\partial_\kappa\phi + g^{\nu\mu}\partial_\nu\phi) \\ &= g^{\mu\kappa}\partial_\kappa\phi. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Man erhält also als Feldgleichung die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$(-\square_g + M^2)\phi = 0, \quad (1.49)$$

wobei $\square_g\phi := D_\kappa D^\kappa\phi = \sqrt{g}^{-1}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\kappa}\partial_\kappa\phi)$.

1.3.2. Vektorieller Fall

Hier betrachten wir

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\alpha(D_\mu\phi^\mu)^2 + \frac{1}{2}\beta\phi_\mu\phi^\mu \quad (1.50)$$

mit

$$F_{\mu\nu} = D_\mu\phi_\nu - D_\nu\phi_\mu. \quad (1.51)$$

Es ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi^\nu} &= \frac{1}{2}\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\nu}(\phi^\kappa\phi^\mu g_{\kappa\mu}) \\ &= \frac{1}{2}\beta g_{\kappa\mu}(\delta_\nu^\kappa\phi^\mu + \phi^\kappa\delta_\nu^\mu) \\ &= \beta g_{\mu\nu}\phi^\mu \end{aligned} \quad (1.52)$$

Nun berechnen wir den zweiten Teil $D_\mu \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (D_\mu \phi^\nu)} \right)$ der Euler-Lagrange-Gleichung. Hierzu formen wir zuerst $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ um:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= D_\mu \phi_\nu D^\mu \phi^\nu - D_\mu \phi_\nu D^\nu \phi^\mu - D_\nu \phi_\mu D^\mu \phi^\nu + D_\nu \phi_\mu D^\nu \phi^\mu \\ &= 2D_\mu \phi_\nu D^\mu \phi^\nu - 2D_\mu \phi_\nu D^\nu \phi^\mu \end{aligned} \quad (1.53)$$

Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (D_\mu \phi^\nu)} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) &= \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial (D_\mu \phi^\nu)} (g_{\beta\kappa} g^{\alpha\rho} D_\alpha \phi^\kappa D_\rho \phi^\beta - D_\alpha \phi^\beta D_\beta \phi^\alpha) \\ &= 2 [g_{\beta\kappa} g^{\alpha\rho} (\delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\kappa D_\rho \phi^\beta + D_\alpha \phi^\kappa \delta_\rho^\mu \delta_\nu^\beta) - \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\beta D_\beta \phi^\alpha - D_\alpha \phi^\beta \delta_\beta^\mu \delta_\nu^\alpha] \\ &= 4F^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (D_\mu \phi^\nu)} (D_\kappa \phi^\kappa)^2 &= \frac{\partial}{\partial (D_\mu \phi^\nu)} (D_\kappa \phi^\kappa D_\rho \phi^\rho) \\ &= \delta_\kappa^\mu \delta_\nu^\kappa D_\rho \phi^\rho + D_\kappa \phi^\kappa \delta_\rho^\mu \delta_\nu^\rho \\ &= 2D_\kappa \phi^\kappa \delta_\nu^\mu \end{aligned} \quad (1.55)$$

Man bekommt mit diesen Ergebnissen:

$$D_\mu \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (D_\mu \phi^\nu)} \right) = D_\mu D^\mu \phi_\nu - D_\mu D_\nu \phi^\mu + \alpha D_\nu D_\kappa \phi^\kappa \quad (1.56)$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, benutzen wir die Kommutatorrelation (A.27).⁶ Nach dieser gilt

$$D_\mu D_\nu \phi^\mu = D_\nu D_\mu \phi^\mu - dg_{\mu\nu} \phi^\mu, \quad (1.57)$$

und wir können (1.56) folglich zu

$$D_\mu \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (D_\mu \phi^\nu)} \right) = (D_\kappa D^\kappa + d)g_{\mu\nu} \phi^\mu + (\alpha - 1)D_\nu D_\mu \phi^\mu, \quad (1.58)$$

⁶Die folgende „Zusammenfassung“ der Terme hätte alternativ auch schon beim Wirkungsintegral mit Hilfe partieller Integration geschehen können. Dasselbe gilt auch für eine ähnliche Situation im weiter unten beschriebenen tensoriellen Fall.

umformen. Schlußendlich erhalten wir also für die Feldgleichung:

$$(-D_\kappa D^\kappa + \beta - d)g_{\mu\nu}\phi^\mu + (1 - \alpha)D_\nu D_\mu \phi^\mu = 0 \quad (1.59)$$

Wir führen nun noch eine Umbenennung der Parameter durch:

$$(-D_\kappa D^\kappa + M^2)g_{\mu\nu}\phi^\mu + aD_\nu D_\mu \phi^\mu = 0 \quad (1.60)$$

Nun betrachten wir den Lösungsraum der Differentialgleichung. Nach dem folgenden Satz kann man diesen in zwei Teile zerlegen:

Satz 1.1. *Die Vektorfunktion ϕ_μ erfülle die Differentialgleichung (1.60). Dann läßt sich ϕ_μ in zwei Summanden V_μ und $D_\mu\varphi$ zerlegen, wobei V_μ divergenzfrei ist:*

$$\phi_\mu = V_\mu + D_\mu\varphi \quad \text{mit} \quad D_\kappa V^\kappa = 0 \quad (1.61)$$

Die Funktion φ ist hierbei gegeben durch

$$\varphi = \frac{1-a}{M^2+d}D_\nu\phi^\nu \quad (1.62)$$

und V_μ folglich durch

$$V_\mu = \phi_\mu - \frac{1-a}{M^2+d}D_\mu D_\nu\phi^\nu. \quad (1.63)$$

Des weiteren sind V_μ und φ Lösungen zweier Klein-Gordon-Gleichungen:

$$\left(-D_\kappa D^\kappa + \frac{M^2+d}{1-a}\right)\varphi = 0 \quad (1.64a)$$

$$(-D_\kappa D^\kappa + M^2)V_\mu = 0 \quad (1.64b)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $\left(-D_\kappa D^\kappa + \frac{M^2+d}{1-a}\right)\varphi = 0$. Hierzu gehen wir von der ursprünglichen Feldgleichung (1.60) aus:

$$\begin{aligned} & (-D_\kappa D^\kappa + M^2)g_{\mu\nu}\phi^\mu + aD_\nu D_\mu \phi^\mu = 0 \\ \Rightarrow & -D^\nu D_\kappa D^\kappa \phi_\nu + M^2 D^\nu \phi_\nu + aD^\nu D_\nu D_\mu \phi^\mu = 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

Mit (A.36) erhalten wir also:

$$\begin{aligned} & -D_\kappa D^\kappa D^\nu \phi_\nu + d D^\nu \phi_\nu + M^2 D^\nu \phi_\nu + aD^\nu D_\nu D_\mu \phi^\mu = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(-D_\kappa D^\kappa + \frac{M^2+d}{1-a}\right)\varphi = 0 \quad \checkmark \end{aligned} \quad (1.66)$$

Als nächstes soll $(-D_\kappa D^\kappa + M^2)V_\mu = 0$ gezeigt werden, wobei wir im zweiten Schritt auf die Differentialgleichung (1.60) zurückgreifen und später noch die Kommutatorrelation (A.31) verwenden:

$$\begin{aligned}
 & (-D_\kappa D^\kappa + M^2)V_\mu = \\
 & = (-D_\kappa D^\kappa + M^2)\left(\phi_\mu - \frac{1-a}{M^2+d}D_\mu D_\nu \phi^\nu\right) \\
 & = -aD_\mu D_\nu \phi^\nu - (-D_\kappa D^\kappa + M^2)\frac{1-a}{M^2+d}D_\mu D_\nu \phi^\nu \\
 & = -\left(a + \frac{M^2(1-a)}{M^2+d}\right)D_\mu D_\nu \phi^\nu + \frac{1-a}{M^2+d}D_\kappa D^\kappa D_\mu D_\nu \phi^\nu \\
 & = -\left(a + \frac{M^2(1-a)}{M^2+d}\right)D_\mu D_\nu \phi^\nu + \frac{1-a}{M^2+d}(D_\mu D_\kappa D^\kappa D_\nu \phi^\nu - dD_\mu D_\nu \phi^\nu) \\
 & = D_\mu\left(-1 + \frac{1-a}{M^2+d}D_\kappa D^\kappa\right)D_\nu \phi^\nu \\
 & = D_\mu\left(D_\kappa D^\kappa - \frac{M^2+d}{1-a}\right)\varphi \\
 & = 0 \quad \checkmark
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

Zum Schluß beweisen wir noch die Behauptung, daß V_μ divergenzfrei ist:

$$\begin{aligned}
 D_\kappa V^\kappa & = D_\kappa \phi^\kappa - \frac{1-a}{M^2+d}D_\kappa D^\kappa D_\nu \phi^\nu \\
 & = \left(-D_\kappa D^\kappa + \frac{M^2+d}{1-a}\right)\varphi \\
 & = 0 \quad \checkmark
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

□

Anmerkung. Man vergleiche diesen Satz mit dem aus der Elektrodynamik bekannten Zerlegungssatz, daß Vektorfelder, die einschließlich ihrer Ableitungen im Unendlichen mit hinreichend hoher Ordnung gegen Null streben, geschrieben werden können als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Anteiles (siehe hierzu z. B. [Nol00], S. 33 ff.). ◇

1.3.3. Tensorieller Fall

Wir setzen hier

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{L}} & = \frac{1}{12}F_{\mu\nu\kappa}F^{\mu\nu\kappa} + \alpha D_\mu \phi_\nu{}^\nu D^\mu \phi_\kappa{}^\kappa + \beta D_\mu \phi^\mu{}_\nu D^\nu \phi_\kappa{}^\kappa + \\
 & \quad + \gamma D_\mu \phi^\mu{}_\nu D_\kappa \phi^{\kappa\nu} + \delta \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} + \varepsilon (\phi_\mu{}^\mu)^2
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

mit

$$F_{\mu\nu\kappa} = D_\mu\phi_{\nu\kappa} + D_\nu\phi_{\kappa\mu} + D_\kappa\phi_{\mu\nu} \quad (1.70)$$

an, wobei $\phi_{\mu\nu} = \phi_{\nu\mu}$ gelte.

Zuerst werden wir $\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi^{\nu\kappa}}$ berechnen. Hierfür nutzen wir

$$\frac{\partial\phi^{\alpha\beta}}{\partial\phi^{\nu\kappa}} = \frac{1}{2}(\delta_\nu^\alpha\delta_\kappa^\beta + \delta_\nu^\beta\delta_\kappa^\alpha). \quad (1.71)$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\phi^{\nu\kappa}}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial\phi^{\nu\kappa}}(g_{\rho\alpha}g_{\lambda\beta}\phi^{\rho\lambda}\phi^{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}g_{\rho\alpha}g_{\lambda\beta}(\delta_\nu^\rho\delta_\kappa^\lambda + \delta_\nu^\lambda\delta_\kappa^\rho)\phi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\rho\alpha}g_{\lambda\beta}\phi^{\rho\lambda}(\delta_\nu^\alpha\delta_\kappa^\beta + \delta_\nu^\beta\delta_\kappa^\alpha) \\ &= 2\phi_{\nu\kappa} \end{aligned} \quad (1.72)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\phi^{\nu\kappa}}(\phi_\alpha^\alpha)^2 &= \frac{\partial}{\partial\phi^{\nu\kappa}}(\phi_\alpha^\alpha\phi_\beta^\beta) \\ &= \frac{\partial}{\partial\phi^{\nu\kappa}}(\phi^{\rho\alpha}\phi^{\lambda\beta}g_{\rho\alpha}g_{\lambda\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(\delta_\nu^\rho\delta_\kappa^\alpha + \delta_\nu^\alpha\delta_\kappa^\rho)\phi^{\lambda\beta}g_{\rho\alpha}g_{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\phi^{\rho\alpha}(\delta_\nu^\lambda\delta_\kappa^\beta + \delta_\nu^\beta\delta_\kappa^\lambda)g_{\rho\alpha}g_{\lambda\beta} \\ &= 2g_{\nu\kappa}\phi_\alpha^\alpha \end{aligned} \quad (1.73)$$

Also:

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi^{\nu\kappa}} = 2\delta\phi_{\nu\kappa} + 2\varepsilon g_{\nu\kappa}\phi_\gamma^\gamma \quad (1.74)$$

Als nächstes soll $D_\mu\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(D_\mu\phi^{\nu\kappa})}\right)$ bestimmt werden. Es gilt folgende Identität:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu\kappa}F^{\mu\nu\kappa} &= D_\mu\phi_{\nu\kappa}D^\mu\phi^{\nu\kappa} + D_\mu\phi_{\nu\kappa}D^\nu\phi^{\kappa\mu} + D_\mu\phi_{\nu\kappa}D^\kappa\phi^{\mu\nu} + \\ &\quad + D_\nu\phi_{\kappa\mu}D^\mu\phi^{\nu\kappa} + D_\nu\phi_{\kappa\mu}D^\nu\phi^{\kappa\mu} + D_\nu\phi_{\kappa\mu}D^\kappa\phi^{\mu\nu} + \\ &\quad + D_\kappa\phi_{\mu\nu}D^\mu\phi^{\nu\kappa} + D_\kappa\phi_{\mu\nu}D^\nu\phi^{\kappa\mu} + D_\kappa\phi_{\mu\nu}D^\kappa\phi^{\mu\nu} \\ &= 3D_\mu\phi_{\nu\kappa}D^\mu\phi^{\nu\kappa} + 3D_\mu\phi_{\nu\kappa}D^\nu\phi^{\kappa\mu} + 3D_\mu\phi_{\nu\kappa}D^\kappa\phi^{\mu\nu} \\ &= 3D_\mu\phi_{\nu\kappa}D^\mu\phi^{\nu\kappa} + 6D_\mu\phi_{\nu\kappa}D^\nu\phi^{\kappa\mu} \end{aligned} \quad (1.75)$$

Der letzte Schritt ist hierbei durch

$$D_\mu \phi_{\nu\kappa} D^\kappa \phi^{\mu\nu} = D^\kappa \phi^{\mu\nu} D_\mu \phi_{\nu\kappa} = D_\kappa \phi_{\mu\nu} D^\mu \phi^{\nu\kappa} = D_\mu \phi_{\nu\kappa} D^\nu \phi^{\kappa\mu} \quad (1.76)$$

begründet. Mit diesem Ergebnis berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial(D_\mu \phi^{\nu\kappa})} F_{\alpha\beta\gamma} F^{\alpha\beta\gamma} = \\ & = \frac{\partial}{\partial(D_\mu \phi^{\nu\kappa})} (3D_\alpha \phi^{\beta\gamma} D_\lambda \phi^{\rho\sigma} g^{\lambda\alpha} g_{\rho\beta} g_{\sigma\gamma} + 6D_\alpha \phi^{\beta\gamma} D_\beta \phi^{\rho\alpha} g_{\rho\gamma}) \\ & = \frac{3}{2} \delta_\alpha^\mu (\delta_\nu^\beta \delta_\kappa^\gamma + \delta_\nu^\gamma \delta_\kappa^\beta) D_\lambda \phi^{\rho\sigma} g^{\lambda\alpha} g_{\rho\beta} g_{\sigma\gamma} + \\ & \quad + \frac{3}{2} D_\alpha \phi^{\beta\gamma} \delta_\lambda^\mu (\delta_\nu^\rho \delta_\kappa^\sigma + \delta_\nu^\sigma \delta_\kappa^\rho) g^{\lambda\alpha} g_{\rho\beta} g_{\sigma\gamma} + \\ & \quad + \frac{6}{2} \delta_\alpha^\mu (\delta_\nu^\beta \delta_\kappa^\gamma + \delta_\nu^\gamma \delta_\kappa^\beta) D_\beta \phi^{\rho\alpha} g_{\rho\gamma} + \\ & \quad + \frac{6}{2} D_\alpha \phi^{\beta\gamma} \delta_\beta^\mu (\delta_\nu^\rho \delta_\kappa^\alpha + \delta_\nu^\alpha \delta_\kappa^\rho) g_{\rho\gamma} \\ & = 6F^\mu{}_{\nu\kappa} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Weiterhin erhalten wir für die restlichen drei relevanten Terme:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial(D_\mu \phi^{\nu\kappa})} (D_\alpha \phi^\beta{}_\gamma D^\alpha \phi^\gamma{}_\beta) = \\ & = \frac{\partial}{\partial(D_\mu \phi^{\nu\kappa})} (D_\alpha \phi^{\rho\beta} D_\sigma \phi^{\lambda\gamma} g_{\rho\beta} g^{\sigma\alpha} g_{\lambda\gamma}) \\ & = \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu (\delta_\nu^\rho \delta_\kappa^\beta + \delta_\nu^\beta \delta_\kappa^\rho) D_\sigma \phi^{\lambda\gamma} g_{\rho\beta} g^{\sigma\alpha} g_{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} D_\alpha \phi^{\rho\beta} \delta_\sigma^\mu (\delta_\nu^\lambda \delta_\kappa^\gamma + \delta_\nu^\gamma \delta_\kappa^\lambda) g_{\rho\beta} g^{\sigma\alpha} g_{\lambda\gamma} \\ & = 2g_{\nu\kappa} D^\mu \phi_\gamma{}^\gamma \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial(D_\mu \phi^{\nu\kappa})} (D_\alpha \phi^\alpha{}_\beta D^\beta \phi^\gamma{}_\gamma) = \\ & = \frac{\partial}{\partial(D_\mu \phi^{\nu\kappa})} (D_\alpha \phi^{\alpha\beta} D_\beta \phi^{\lambda\gamma} g_{\lambda\gamma}) \\ & = \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu (\delta_\nu^\alpha \delta_\kappa^\beta + \delta_\nu^\beta \delta_\kappa^\alpha) D_\beta \phi^{\lambda\gamma} g_{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} D_\alpha \phi^{\alpha\beta} \delta_\beta^\mu (\delta_\nu^\lambda \delta_\kappa^\gamma + \delta_\nu^\gamma \delta_\kappa^\lambda) g_{\lambda\gamma} \\ & = \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu D_\kappa \phi_\gamma{}^\gamma + \frac{1}{2} \delta_\kappa^\mu D_\nu \phi_\gamma{}^\gamma + g_{\nu\kappa} D_\alpha \phi^{\alpha\mu} \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial(D_\mu \phi^{\nu\kappa})} (D_\alpha \phi^\alpha{}_\beta D_\gamma \phi^{\gamma\beta}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}_\mu \phi^{\nu\kappa})} (\mathbb{D}_\alpha \phi^{\alpha\beta} \mathbb{D}_\gamma \phi^{\gamma\lambda} g_{\lambda\beta}) \\
&= \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu (\delta_\nu^\alpha \delta_\kappa^\beta + \delta_\nu^\beta \delta_\kappa^\alpha) \mathbb{D}_\gamma \phi^{\gamma\lambda} g_{\lambda\beta} + \frac{1}{2} \mathbb{D}_\alpha \phi^{\alpha\beta} \delta_\gamma^\mu (\delta_\nu^\gamma \delta_\kappa^\lambda + \delta_\nu^\lambda \delta_\kappa^\gamma) g_{\lambda\beta} \\
&= \delta_\nu^\mu \mathbb{D}_\gamma \phi^{\gamma\kappa} + \delta_\kappa^\mu \mathbb{D}_\gamma \phi^{\gamma\nu}
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Fassen wir die letzten Ergebnisse zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
D_\mu \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\mathbb{D}_\mu \phi^{\nu\kappa})} \right) &= \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}^\mu \phi_{\nu\kappa} + \frac{1}{2} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\kappa \phi_\nu^\mu + \frac{1}{2} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\nu \phi_\kappa^\mu + 2\alpha g_{\nu\kappa} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}^\mu \phi_\lambda^\lambda + \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta (\delta_\nu^\mu \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\kappa \phi_\lambda^\lambda + \delta_\kappa^\mu \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\nu \phi_\lambda^\lambda + 2g_{\nu\kappa} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\lambda \phi^{\lambda\mu}) + \\
&\quad + \gamma (\delta_\nu^\mu \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\lambda \phi_\kappa^\lambda + \delta_\kappa^\mu \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\lambda \phi_\nu^\lambda) \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}^\mu \phi_{\nu\kappa} + \frac{1}{2} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\kappa \phi_\nu^\mu + \frac{1}{2} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\nu \phi_\kappa^\mu + 2\alpha g_{\nu\kappa} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}^\mu \phi_\lambda^\lambda + \\
&\quad + \beta (\mathbb{D}_\nu \mathbb{D}_\kappa \phi_\lambda^\lambda + g_{\nu\kappa} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\lambda \phi^{\lambda\mu}) + \\
&\quad + \gamma (\mathbb{D}_\nu \mathbb{D}_\lambda \phi_\kappa^\lambda + \mathbb{D}_\kappa \mathbb{D}_\lambda \phi_\nu^\lambda)
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Hierbei haben wir $[\mathbb{D}_\nu, \mathbb{D}_\kappa] \phi_\lambda^\lambda = 0$ ausgenutzt.

Unser Ziel ist es nun, den zweiten und dritten Summanden von (1.81) mit dem γ -Term zu verrechnen.⁷ Aus (A.29) ergibt sich

$$\mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\nu \phi_\kappa^\mu = \mathbb{D}_\nu \mathbb{D}_\mu \phi_\kappa^\mu - (d+1) \phi_{\nu\kappa} + g_{\nu\kappa} \phi_\mu^\mu \tag{1.82}$$

und damit

$$\mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\kappa \phi_\nu^\mu + \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\nu \phi_\kappa^\mu = \mathbb{D}_\nu \mathbb{D}_\mu \phi_\kappa^\mu + \mathbb{D}_\kappa \mathbb{D}_\mu \phi_\nu^\mu - 2(d+1) \phi_{\nu\kappa} + 2g_{\nu\kappa} \phi_\mu^\mu. \tag{1.83}$$

Mit dieser Gleichung läßt sich (1.81) schreiben als

$$\begin{aligned}
D_\mu \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\mathbb{D}_\mu \phi^{\nu\kappa})} \right) &= \\
&= \frac{1}{2} (\mathbb{D}_\mu \mathbb{D}^\mu - 2d - 2) \phi_{\nu\kappa} + 2\alpha g_{\nu\kappa} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}^\mu \phi_\lambda^\lambda + \\
&\quad + \beta (\mathbb{D}_\nu \mathbb{D}_\kappa \phi_\lambda^\lambda + g_{\nu\kappa} \mathbb{D}_\mu \mathbb{D}_\lambda \phi^{\lambda\mu}) + \\
&\quad + \frac{1}{2} (2\gamma + 1) (\mathbb{D}_\nu \mathbb{D}_\lambda \phi_\kappa^\lambda + \mathbb{D}_\kappa \mathbb{D}_\lambda \phi_\nu^\lambda) + 2g_{\nu\kappa} \phi_\lambda^\lambda.
\end{aligned} \tag{1.84}$$

⁷Siehe Fußnote im vektoriellen Fall.

Die gesuchte Feldgleichung ergibt sich hiermit und mit (1.74) also schließlich zu

$$\begin{aligned}
 & (-D_\mu D^\mu + 4\delta + 2d + 2)\phi_{\nu\kappa} - 4\alpha g_{\nu\kappa} D_\mu D^\mu \phi_\lambda^\lambda - \\
 & - 2\beta(D_\nu D_\kappa \phi_\lambda^\lambda + g_{\nu\kappa} D_\mu D_\lambda \phi^{\lambda\mu}) - \\
 & - (2\gamma + 1)(D_\nu D_\lambda \phi_\kappa^\lambda + D_\kappa D_\lambda \phi_\nu^\lambda) + (4\varepsilon - 2)g_{\nu\kappa} \phi_\lambda^\lambda = 0.
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

Auch hier benennen wir wie im vektoriellen Fall noch die Parameter um:

$$\begin{aligned}
 & (-D_\kappa D^\kappa + M^2)g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\phi^{\rho\sigma} + ag_{\mu\nu}D_\kappa D^\kappa g_{\rho\sigma}\phi^{\rho\sigma} + \\
 & + b(D_\mu D_\nu g_{\rho\sigma} + g_{\mu\nu}D_\rho D_\sigma)\phi^{\rho\sigma} + \\
 & + c(D_\mu D_\rho g_{\nu\sigma} + D_\nu D_\sigma g_{\mu\rho})\phi^{\rho\sigma} + eg_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\phi^{\rho\sigma} = 0
 \end{aligned} \tag{1.86}$$

Anmerkung. Erstaunlicherweise erhalten wir aus der allgemeinsten Lagrange-dichte nicht die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung, bei der wir für $D_\mu D_\nu g_{\rho\sigma}$ und $g_{\mu\nu}D_\rho D_\sigma$ unterschiedliche Koeffizienten ansetzen würden. \diamond

Es läßt sich nun zeigen, daß der Lösungsraum der Feldgleichung wie im vektoriellen Fall in mehrere Anteile zerfällt:

Satz 1.2. *Die symmetrische Tensorfunktion $\phi_{\mu\nu}$ erfülle die Differentialgleichung (1.86). Dann läßt sich $\phi_{\mu\nu}$ in vier Summanden $C_{\mu\nu}$, $D_\mu B_\nu + D_\nu B_\mu$, $D_\mu D_\nu A_1$ und $g_{\mu\nu}A_2$ zerlegen, wobei $C_{\mu\nu}$ eine Divergenz- und spurfreie symmetrische Tensorfunktion und B_μ eine Divergenzfreie Vektorfunktion ist; die Größen A_1 und A_2 sind skalare Funktionen:*

$$\phi_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} + D_\mu B_\nu + D_\nu B_\mu + D_\mu D_\nu A_1 + g_{\mu\nu}A_2 \tag{1.87}$$

mit

$$D^\mu C_{\mu\nu} = 0, \quad C_\mu{}^\mu = 0, \quad C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}, \quad D^\mu B_\mu = 0 \tag{1.88}$$

Sowohl $C_{\mu\nu}$ als auch B_μ lösen Klein-Gordon-Gleichungen:

$$(-D_\kappa D^\kappa + M^2)C_{\mu\nu} = 0 \tag{1.89a}$$

$$\left(-D_\kappa D^\kappa + \frac{2+M^2}{1-c} + d\right)B_\mu = 0 \tag{1.89b}$$

Des weiteren lassen sich die Funktionen A_1 und A_2 darstellen als Linearkombinationen von Lösungen $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ zweier Klein-Gordon-Gleichungen,⁸ also

$$A_1 = \alpha_1 \tilde{\varphi}_1 + \alpha_2 \tilde{\varphi}_2, \quad A_2 = \beta_1 \tilde{\varphi}_1 + \beta_2 \tilde{\varphi}_2 \quad (1.90)$$

mit

$$(-D_\kappa D^\kappa + m_1^2) \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad (-D_\kappa D^\kappa + m_2^2) \tilde{\varphi}_2 = 0. \quad (1.91)$$

Hierbei sind $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ selbst und somit auch A_1, A_2 darstellbar als Linearkombinationen der Größen $\phi_\mu{}^\mu$ und $D_\mu D_\nu \phi^{\mu\nu}$.

Beweis. Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß eine Zerlegung der Art (1.87) existiert, wobei wir die Eigenschaften (1.88) bis (1.91) fordern. Hierzu bilden wir zuerst die Spur der Differentialgleichung (1.86):

$$\begin{aligned} & [-1 + a(d+1) + b] D_\kappa D^\kappa \phi_\mu{}^\mu + [M^2 + e(d+1)] \phi_\mu{}^\mu + \\ & + [b(d+1) + 2c] D_\mu D_\nu \phi^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (1.92)$$

Wenden wir hingegen D^μ auf die Differentialgleichung an, so erhalten wir mit den entsprechenden Kommutatorrelationen (A.40), (A.31) und (A.27) die Gleichung:

$$\begin{aligned} & (c-1) D_\kappa D^\kappa D^\mu \phi_{\mu\nu} + [2 + M^2 + d(1-c)] D^\kappa \phi_{\kappa\nu} + \\ & + (e + ad - 2) D_\nu \phi_\kappa{}^\kappa + (a+b) D_\kappa D^\kappa D_\nu \phi_\rho{}^\rho + (b+c) D_\nu D_\rho D_\sigma \phi^{\rho\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (1.93)$$

Und nach Anwenden von D^ν auf dieses Ergebnis bekommen wir mit (A.36):

$$\begin{aligned} & (-1 + b + 2c) D_\kappa D^\kappa D_\mu D_\nu \phi^{\mu\nu} + (2d + 2 + M^2 - 2cd) D_\mu D_\nu \phi^{\mu\nu} + \\ & + (e - 2 - bd) D_\kappa D^\kappa \phi_\mu{}^\mu + (a+b) D_\kappa D^\kappa D_\rho D^\rho \phi_\mu{}^\mu = 0 \end{aligned} \quad (1.94)$$

Wir haben also zwei gekoppelte Differentialgleichungen (1.92) und (1.94) bzgl. $\phi_\mu{}^\mu$ und $D_\mu D_\nu \phi^{\mu\nu}$ bekommen. Bevor wir weiterrechnen schreiben wir diese mit den Abkürzungen

$$\varphi_1 := \phi_\mu{}^\mu, \quad \varphi_2 := D_\mu D_\nu \phi^{\mu\nu}, \quad (1.95)$$

$$M_1^2 := \frac{M^2 + e(d+1)}{1 - a(d+1) - b}, \quad M_2^2 := \frac{2d + 2 + M^2 - 2cd}{1 - b - 2c}, \quad (1.96)$$

⁸Zur genauen Bedeutung der Symbole siehe Beweis.

$$A := \frac{b(d+1) + 2c}{1 - a(d+1) - b}, \quad B := \frac{e - 2 - bd}{1 - b - 2c}, \quad C := \frac{a + b}{1 - b - 2c} \quad (1.97)$$

in einer übersichtlicheren Form:

$$(-D_\kappa D^\kappa + M_1^2)\varphi_1 + A\varphi_2 = 0 \quad (1.98)$$

$$(-D_\kappa D^\kappa + M_2^2)\varphi_2 + BD_\kappa D^\kappa \varphi_1 + CD_\kappa D^\kappa D_\rho D^\rho \varphi_1 = 0 \quad (1.99)$$

Nun lösen wir die erste der beiden Gleichungen nach φ_2 auf und setzen das Ergebnis in die zweite ein. Wir erhalten damit folgende Differentialgleichung für φ_1 :

$$\left(-D_\kappa D^\kappa + \frac{M_1^2 + M_2^2 + AB}{1 - AC}\right)D_\rho D^\rho \varphi_1 - \frac{M_1^2 M_2^2}{1 - AC} \varphi_1 = 0 \quad (1.100)$$

Oder anders geschrieben

$$(-D_\kappa D^\kappa + m_1^2)(-D_\rho D^\rho + m_2^2)\varphi_1 = 0 \quad (1.101)$$

mit

$$m_1^2 + m_2^2 := \frac{M_1^2 + M_2^2 + AB}{1 - AC} \quad \text{und} \quad m_1^2 m_2^2 := \frac{M_1^2 M_2^2}{1 - AC}. \quad (1.102)$$

Wir machen nun den Ansatz

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 \quad (1.103)$$

mit

$$(-D_\kappa D^\kappa + m_1^2)\tilde{\varphi}_1 = 0, \quad (-D_\kappa D^\kappa + m_2^2)\tilde{\varphi}_2 = 0. \quad (1.104)$$

Weiterhin berechnen wir hiermit und mit Gleichung (1.98):

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -A^{-1}(-D_\kappa D^\kappa + M_1^2)(\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2) \\ &= \frac{m_1^2 - M_1^2}{A} \tilde{\varphi}_1 + \frac{m_2^2 - M_1^2}{A} \tilde{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (1.105)$$

Mit den Gleichungen (1.103) und (1.105) lassen sich nun $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ als Linearkombinationen von φ_1 und φ_2 angeben:

$$\tilde{\varphi}_1 = +\frac{m_2^2 - M_1^2}{m_2^2 - m_1^2} \varphi_1 - \frac{A}{m_2^2 - m_1^2} \varphi_2 \quad (1.106)$$

$$\tilde{\varphi}_2 = -\frac{m_1^2 - M_1^2}{m_2^2 - m_1^2} \varphi_1 + \frac{A}{m_2^2 - m_1^2} \varphi_2 \quad (1.107)$$

Man überzeugt sich mit Hilfe der Relationen (1.98) und (1.101) leicht, daß $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ tatsächlich Lösungen der Klein-Gordon-Gleichungen (1.104) sind.

Wie mit Hilfe von $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ die Funktionen A_1 und A_2 dargestellt werden können, werden wir weiter unten sehen. Vorher werden wir jedoch versuchen, einen Ausdruck für B_μ zu finden:

Aus Gleichung (1.93) ergibt sich mit

$$M_v^2 := \frac{2 + M^2}{1 - c} + d \quad (1.108)$$

und $i = 1, 2$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & (-D_\kappa D^\kappa + M_v^2) D^\mu \phi_{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{c-1} [(e + ad - 2) D_\nu \phi_\kappa{}^\kappa + (a + b) D_\kappa D^\kappa D_\nu \phi_\rho{}^\rho + (b + c) D_\nu D_\rho D_\sigma \phi^{\rho\sigma}] \\ &= \frac{1}{c-1} D_\nu \left[(e + ad - 2) \phi_\kappa{}^\kappa + (a + b) (D_\kappa D^\kappa - d) \phi_\rho{}^\rho + \right. \\ &\quad \left. + (b + c) \left(\frac{m_1^2 - M_1^2}{A} \tilde{\varphi}_1 + \frac{m_2^2 - M_1^2}{A} \tilde{\varphi}_2 \right) \right] \\ &= \sum_i \frac{1}{c-1} \underbrace{\left[e - bd - 2 + (a + b)m_i^2 + (b + c) \frac{m_i^2 - M_1^2}{A} \right]}_{:=a_i} D_\nu \tilde{\varphi}_i \quad (1.109) \end{aligned}$$

Diese formen wir mit Hilfe von

$$\begin{aligned} & (-D_\kappa D^\kappa + M_v^2) D_\nu \tilde{\varphi}_i = D_\nu (-D_\kappa D^\kappa + M_v^2 + d) \tilde{\varphi}_i \\ &= (M_v^2 + d - m_i^2) D_\nu \tilde{\varphi}_i \\ &\Leftrightarrow D_\nu \tilde{\varphi}_i = \frac{1}{M_v^2 + d - m_i^2} (-D_\kappa D^\kappa + M_v^2) D_\nu \tilde{\varphi}_i \quad (1.110) \end{aligned}$$

weiter um:

$$(-D_\kappa D^\kappa + M_v^2) \left(\underbrace{D^\mu \phi_{\mu\nu} - \frac{a_1}{M_v^2 + d - m_1^2} D_\nu \tilde{\varphi}_1 - \frac{a_2}{M_v^2 + d - m_2^2} D_\nu \tilde{\varphi}_2}_{:=X_\nu} \right) = 0 \quad (1.111)$$

Wir werden nun $D^\nu X_\nu = 0$ zeigen. Hierzu rechnen wir:

$$\begin{aligned}
 D^\nu X_\nu &= \\
 &= \varphi_2 - \frac{a_1}{M_v^2 + d - m_1^2} D^\nu D_\nu \tilde{\varphi}_1 - \frac{a_2}{M_v^2 + d - m_2^2} D^\nu D_\nu \tilde{\varphi}_2 \\
 &= \left(\frac{m_1^2 - M_1^2}{A} - \frac{a_1 m_1^2}{M_v^2 + d - m_1^2} \right) \tilde{\varphi}_1 + \left(\frac{m_2^2 - M_1^2}{A} \tilde{\varphi}_2 - \frac{a_2 m_2^2}{M_v^2 + d - m_2^2} \right) \tilde{\varphi}_2
 \end{aligned} \tag{1.112}$$

Man kann nun durch eine längere, aber mathematisch unproblematische Rechnung zeigen, daß sich für die Koeffizienten Null ergibt.⁹ Es gilt also wie vermutet

$$D^\nu X_\nu = 0. \tag{1.113}$$

Die Vektorfunktion X_μ löst folglich die Klein-Gordon-Gleichung bzgl. der Masse M_v und ist divergenzfrei, sie ist also ein guter Kandidat für B_μ . Es besteht allerdings noch die Frage bzgl. der Normierung.

Wir setzen nun

$$B_\mu := \frac{1}{M_v^2 - d} X_\mu \tag{1.114}$$

an und zeigen, daß dies tatsächlich die richtige Wahl für B_μ ist. Hierzu betrachten wir

$$C_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} - (D_\mu B_\nu + D_\nu B_\mu) - D_\mu D_\nu \underbrace{(\alpha_1 \tilde{\varphi}_1 + \alpha_2 \tilde{\varphi}_2)}_{=A_1} - g_{\mu\nu} \underbrace{(\beta_1 \tilde{\varphi}_1 + \beta_2 \tilde{\varphi}_2)}_{=A_2} \tag{1.115}$$

unter der Prämisse der Spur- und Divergenzfreiheit. Die Tensorfunktion $C_{\mu\nu}$ sollte, die richtigen α_i und β_i vorausgesetzt, die Klein-Gordon-Gleichung bzgl. der Masse M lösen.

Wir werden zuerst die Koeffizienten α_i, β_i aus den Forderungen $D^\mu C_{\mu\nu} = 0$ und $C_\mu{}^\mu = 0$ bestimmen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 D^\mu C_{\mu\nu} &= \\
 &= D^\mu \phi_{\mu\nu} + \frac{1}{d - M_v^2} (D^\mu D_\mu X_\nu + D^\mu D_\nu X_\mu) - \\
 &\quad - (D_\nu D^\mu D_\mu - d D_\nu) (\alpha_1 \tilde{\varphi}_1 + \alpha_2 \tilde{\varphi}_2) - D_\nu (\beta_1 \tilde{\varphi}_1 + \beta_2 \tilde{\varphi}_2)
 \end{aligned}$$

⁹Hier, genauso wie bei ähnlichen Rechnungen später im Beweis, bietet sich die Verwendung eines Computer-Algebraprogrammes an.

$$\begin{aligned}
&= D^\mu \phi_{\mu\nu} + \frac{1}{d - M_v^2} (M^2 X_\nu - d X_\nu) - \\
&\quad - \alpha_1 (m_1^2 - d) D_\nu \tilde{\varphi}_1 - \alpha_2 (m_2^2 - d) D_\nu \tilde{\varphi}_2 - \beta_1 D_\nu \tilde{\varphi}_1 - \beta_2 D_\nu \tilde{\varphi}_2 \\
&= b_1 D_\nu \tilde{\varphi}_1 + b_2 D_\nu \tilde{\varphi}_2 - \\
&\quad - [\alpha_1 (m_1^2 - d) + \beta_1] D_\nu \tilde{\varphi}_1 - [\alpha_2 (m_2^2 - d) + \beta_2] D_\nu \tilde{\varphi}_2,
\end{aligned} \tag{1.116}$$

wobei im letzten Schritt

$$X_\nu = D^\mu \phi_{\mu\nu} - b_1 D_\nu \tilde{\varphi}_1 - b_2 D_\nu \tilde{\varphi}_2 \tag{1.117}$$

mit

$$b_i := \frac{\alpha_i}{M_v^2 + d - m_i^2} \tag{1.118}$$

benutzt wurde. Es muß also auf Grund der Divergenzfreiheit

$$\alpha_i (m_i^2 - d) + \beta_i = b_i \tag{1.119}$$

gelten. Für die Spur von $C_{\mu\nu}$ erhält man hingegen:

$$\begin{aligned}
C_\mu{}^\mu &= \phi_\mu{}^\mu - (m_1^2 \alpha_1 \tilde{\varphi}_1 + m_2^2 \alpha_2 \tilde{\varphi}_2) - (d + 1) (\beta_1 \tilde{\varphi}_1 + \beta_2 \tilde{\varphi}_2) \\
&= \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 - [m_1^2 \alpha_1 + (d + 1) \beta_1] \tilde{\varphi}_1 - [m_2^2 \alpha_2 + (d + 1) \beta_2] \tilde{\varphi}_2
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Wir bekommen also als weitere Forderung an die Koeffizienten

$$m_i^2 \alpha_i + (d + 1) \beta_i = 1. \tag{1.121}$$

Auflösen des so erhaltenden Gleichungssystems liefert:

$$\alpha_i = \frac{(d + 1) b_i - 1}{d m^2 - d^2 - d}, \quad \beta_i = \frac{m^2 (1 - b_i) - d}{d m^2 - d^2 - d} \tag{1.122}$$

Nun wenden wir den Klein-Gordon-Operator bzgl. der Masse M auf $C_{\mu\nu}$ an. Es sollte sich unserer Vermutung nach Null ergeben. Dabei benutzen wir die Kommutatorrelationen (A.33) und (A.34) aus dem Anhang:

$$\begin{aligned}
&(-D_\kappa D^\kappa - M^2) C_{\mu\nu} = \\
&= (-D_\kappa D^\kappa - M^2) \phi_{\mu\nu} + \frac{1}{d - M_v^2} (-D_\kappa D^\kappa + M^2) (D_\mu X_\nu + D_\nu X_\mu) - \\
&\quad - \sum_i (-D_\kappa D^\kappa + M^2) (\alpha_i D_\mu D_\nu \tilde{\varphi}_i + \beta_i g_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-D_\kappa D^\kappa - M^2)\phi_{\mu\nu} + \\
 &+ \frac{1}{d-M_v^2}[D_\mu(-D_\kappa D^\kappa + M^2 + 2 + d)X_\nu + D_\nu(-D_\kappa D^\kappa + M^2 + 2 + d)X_\mu] - \\
 &- \sum_i \{ \alpha_i[-m_i^2 D_\mu D_\nu \tilde{\varphi}_i + 2(d+1)D_\mu D_\nu \tilde{\varphi}_i - 2g_{\mu\nu}m_i^2 \tilde{\varphi}_i + M^2 D_\mu D_\nu \tilde{\varphi}_1] + \\
 &+ \beta_i g_{\mu\nu}(-m_i^2 - M^2)\tilde{\varphi}_i \} = (*) \tag{1.123}
 \end{aligned}$$

Benutzt man die ursprüngliche Differentialgleichung (1.86), um den ersten Summanden zu ersetzen, so erhält man unter Verwendung von $\frac{M^2 - M_v^2 + 2 + d}{d - M_v^2} = c$ weiter:

$$\begin{aligned}
 (*) &= -c(D_\mu D_\kappa \phi^\kappa_\nu + D_\nu D_\kappa \phi^\kappa_\mu) - b(D_\mu D_\nu \phi^\kappa_\kappa + g_{\mu\nu} D_\mu D_\nu \phi^{\mu\nu}) \\
 &- ag_{\mu\nu} D_\kappa D^\kappa \phi^\mu_\mu - eg_{\mu\nu} \phi^\kappa_\kappa + \frac{M^2 - M_v^2 + d + 2}{d - M_v^2} (D_\mu X_\nu + D_\nu X_\mu) + \\
 &+ \sum_i \{ \alpha_i [m_i^2 - 2(d+1) - M^2] D_\mu D_\nu \tilde{\varphi}_i + \\
 &+ 2\alpha_i m_i^2 g_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_i - \beta_i (M^2 - m_i^2) g_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_i \} \\
 &= \sum_i \{ [-b + \alpha_i (m_i^2 - 2(d+1) - M^2) - 2cb_i] D_\mu D_\nu \tilde{\varphi}_i + \\
 &+ [-b \frac{m_i^2 - M_i^2}{A} - am_i^2 - e + 2\alpha_i m_i^2 - \beta_i (M^2 - m_i^2)] g_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_i \} \tag{1.124}
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck läßt sich nun durch Einsetzen der Resultate für m_i sowie α_i und β_i bestimmen. Es ergibt sich, daß die Koeffizienten der $D_\mu D_\nu \tilde{\varphi}_i$ - und der $g_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_i$ -Terme tatsächlich identisch Null sind.¹⁰ Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

¹⁰Zur Berechnung der Koeffizienten wurde Mathematica eingesetzt.

1.4. Die AdS-CFT-Korrespondenz

1997 postulierte MALDACENA in [Mal98] eine Äquivalenz zwischen Supergravitations- bzw. Stringtheorien auf dem Produkt eines $d + 1$ -dimensionalen AdS-Raumes mit einer kompakten Mannigfaltigkeit und konform invarianten Quantenfeldtheorien auf dem d -dimensionalen Rand des AdS-Raumes. Ein Beispiel hierfür, auf das auch [Mal98] aufbaut, ist eine Super-Yang-Mills-Theorie in vier Dimensionen, die äquivalent zu einer Typ-IIB-Superstring-Theorie auf dem $\text{AdS} \times \mathbb{S}^5$ ist. Dieses Konzept der Dualität zwischen dem AdS-Raum selbst und seinem Rand, das von MALDACENA noch nicht vollständig ausformuliert worden war, wurde in recht schnell folgenden Arbeiten von WITTEN [Wit98] und GUBSER, KLEBANOV, POLYAKOV [GKP98] weiter ausgearbeitet.

Später stellte sich heraus, daß diese Dualität auch zwischen Theorien desselben Typs existent ist, also beispielsweise für Quantenfeldtheorien sowohl auf dem AdS-Raum selbst als auch auf seinem Rand. Genauer ergab sich, daß wenn auf dem AdS-Raum ein Quantenfeld durch Wightman-Distributionen gegeben ist, Wightman-Distributionen eines konformen Quantenfeldes auf dem Rand gewonnen werden können (siehe hierzu die Arbeit von BERTOLA, BROS, MOSCHELLA und SCHAEFFER [BBMS00]). Und andersherum wurde in [Reh00] von REHREN gezeigt, daß auch die Rekonstruktion einer AdS-Theorie anhand einer konformen Theorie auf dem Rand möglich ist („Algebraische Holographie“).

Heute versteht man unter „AdS-CFT-Korrespondenz“ den gesamten Komplex von Äquivalenzen zwischen Theorien auf dem AdS-Raum und seinem Rand. Absolut grundlegend für alle diese Zusammenhänge ist die Tatsache, daß die Symmetriegruppe des AdS-Raumes $SO(d, 2)$ bzw. euklidisch $SO(d + 1, 1)$ der konformen Gruppe des Randes entspricht.

2. Die Funktionalintegrale

2.1. Überblick

Formale euklidische Funktionalintegrale der Form

$$Z(f) = \int D\phi e^{-I(\phi)} \delta(\phi_0 - f), \quad (2.1)$$

wobei ϕ_0 der Randwert von ϕ ist, dienen gemäß [GKP98, Wit98] in der AdS-CFT-Korrespondenz als erzeugende Funktionale

$$\langle e^{\int \mathcal{O} f} \rangle = Z(f)/Z(0) \quad (2.2)$$

zur Konstruktion von Korrelationsfunktionen für das konforme Quantenfeld \mathcal{O} auf dem Rand des AdS-Raumes, dem sog. *dualen Feld*.

Anmerkung. Funktionalintegrale der Form (2.1) stammen ursprünglich aus der String-Theorie. \diamond

Es kann gezeigt werden, daß die sog. Bulk-to-Boundary-Propagatoren, die man aus dieser dualen Beschreibung erhält, mit den sog. Bulk-to-Bulk-Propagatoren bis auf konstante Vorfaktoren übereinstimmen, wenn man eine der Bulk-Koordinaten gegen den Rand streben läßt (siehe z. B. [BDHM98]). Anders ausgedrückt sind die dualen Greenschen Funktionen Randlimiten von Greenschen Funktionen des Bulks, was impliziert, daß auch die dualen konformen Felder Randlimiten der Bulk-Felder sind. (Auf Grund des Auftretens von Randwerten im Funktionalintegral muß, im Gegensatz zu „normalen“ Funktionalintegralen auf dem Minkowski-Raum, zwischen verschiedenen Propagatorarten unterschieden werden. Was genau unter „Bulk-to-Boundary-Propagatoren“ und „Bulk-to-Bulk-Propagatoren“ zu verstehen ist, werden wir weiter unten sehen.)

Da die Korrelationsfunktionen, die mit dieser dualen Beschreibung berechnet werden, alle Eigenschaften „normaler“ Korrelationsfunktionen zu besitzen

scheinen (siehe z. B. [Kni02] oder auch die Einleitung von [DR02] und die dort angegebene Literatur), ergibt sich die Vermutung, daß das erzeugende Funktional evtl. auch darstellbar ist als ein Funktional, bei dem das Feld auf die in der Feldtheorie gewöhnliche Art und Weise an eine Quelle gekoppelt ist, also

$$\langle e^{\int \phi_0 f} \rangle = \tilde{Z}(f)/\tilde{Z}(0) \quad (2.3)$$

mit

$$\tilde{Z}(f) = \int D\phi e^{-I(\phi)} e^{\int \phi_0 f}. \quad (2.4)$$

2.2. Zusammenfassung von [DR02]

Die sich nun ergebene Frage ist, inwieweit die beiden, auf den ersten Blick sehr verschiedenen, formalen Funktionalintegrale (2.1) und (2.4), und damit auch die Felder \mathcal{O} und ϕ_0 miteinander zusammenhängen. Dieses Problem wurde von DÜTSCH und REHREN in [DR02] behandelt. Das Vorgehen in diesem Artikel und die Resultate wollen wir nun zusammenfassen:

In [DR02] wird zuerst der AdS-Raum durch ein Gitter und die reellen Funktionen $\phi_\alpha(x)$ (mit einem Multiindex α) durch ein N -Tupel $\phi = (\phi_i)_{i=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^N$ ersetzt. Durch diesen Trick werden formale Funktionalintegrale zu wohldefinierten endlichdimensionalen (Gaußschen) Integralen, die die folgenden Schritte rigoros rechtfertigen. Dabei wird die Numerierung so gewählt, daß $i = 1, \dots, n$ die Boundary-Variablen und $i = n+1, \dots, N$ die Bulk-Variablen kennzeichnen. Mit

$$e = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times n}, \quad (2.5)$$

also $e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, wird eine Einbettung der Randwerte des Feldes in den Raum der Integrationsvariablen definiert und weiterhin mit

$$e^t = (\mathbb{1}_n \quad 0) \in \mathbb{R}^{n \times N} \quad (2.6)$$

die Adjungierte von e gekennzeichnet; es gilt also $\phi_0 = e^t \phi \in \mathbb{R}^n$.

Die Wirkung ist gegeben durch

$$I(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, A\phi) + V(\phi), \quad (2.7)$$

wobei ihr quadratischer Anteil durch eine symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ gegeben ist, und ein beliebiges Potential der Form

$$V(\phi) = \sum_i v(\phi_i) \quad (2.8)$$

angesetzt wird.

Für die Funktionalintegrale $\tilde{Z}(f)$ und $Z(f)$ mit $f \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich hiermit nach einiger Umformung

$$\tilde{Z}(f) = e^{\frac{1}{2}(f, \alpha f)} \int D\phi' e^{-\frac{1}{2}(A\phi', \phi') - V(\phi' + A^{-1}ef)} \quad (2.9)$$

bzw.

$$Z(f) = e^{-\frac{1}{2}(f, \alpha^{-1}f)} \int D(E^\perp \phi) e^{-\frac{1}{2}(E^\perp \phi, AE^\perp \phi) - V(E^\perp \phi + A^{-1}(e\alpha^{-1}f))} \quad (2.10)$$

mit

$$\alpha := e^t A^{-1} e \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.11)$$

sowie

$$E^\perp := \mathbb{1}_N - E, \quad \text{wobei} \quad E := ee^t. \quad (2.12)$$

E ist die Projektion auf den Rand, E^\perp die auf den Bulk. Es läßt sich also schreiben:

$$\phi = E\phi + E^\perp \phi = e\phi_0 + E^\perp \phi \quad (2.13)$$

Aus dieser Darstellung der Funktionalintegrale können die diagrammatischen Regeln abgelesen werden (siehe hierzu auch Abbildung 2.1):

Die Vertizes sind durch die polynomiale Struktur des Potentials gegeben. Jeder Vertex besitzt (bedingt durch die Verschiebung des Argumentes von V) innere Linien, die den Zusammenhang mit der Integrationsvariablen symbolisieren, sowie äußere Linien für externe Variable f . Der *Bulk-to-Bulk-Propagator* verbindet in den Graphen zwei Vertizes miteinander und ist gegeben durch das Inverse der Matrix im Skalarprodukt im Argument der Exponentialfunktion des entsprechenden Integrals. Der *Bulk-to-Boundary-Propagator*, der diagrammatisch durch äußere Linien (also Linien die f mit einem Vertex verbinden) repräsentiert wird, entspricht dem Koeffizienten von f im Argument von V . Die *Tree-Level-Zweipunktfunktion* schließlich ist die Matrix im Skalarprodukt

der Vorfaktoren der Integrale und wird symbolisiert durch eine einzelne Linie, die zwei f miteinander verbindet.

Für $\tilde{Z}(f)$ ergeben sich der Bulk-to-Bulk-Propagator und der Bulk-to-Boundary-Propagator zu

$$G = A^{-1} \quad \text{bzw.} \quad H = Ge. \quad (2.14)$$

Weiterhin gilt

$$\alpha = e^t H. \quad (2.15)$$

Für $Z(f)$ muß beachtet werden, daß, da über $E^\perp \phi$ integriert wird, der Bulk-to-Bulk-Propagator verschwindende Rand-Komponenten besitzen muß:

$$E\Gamma = 0 = \Gamma E \quad (2.16)$$

Auf dem Bulk $E^\perp \mathbb{R}^N$ sollte er jedoch das Inverse von A sein:

$$E^\perp A\Gamma = E^\perp = \Gamma A E^\perp \quad (2.17)$$

Hiermit kann Γ zu

$$\Gamma = G - Ge\alpha^{-1}e^t G \quad (2.18)$$

bestimmt werden. Weiterhin ist der Bulk-to-Bulk-Propagator durch

$$K = Ge\alpha^{-1} = H\alpha^{-1} \quad (2.19)$$

gegeben, was äquivalent zu den Bedingungen

$$e^t K = \mathbb{1}_n \quad \text{und} \quad E^\perp AK = 0 \quad (2.20)$$

ist. Letztere Formel gilt auch für H , was sich direkt durch Einsetzen von $H = Ge$ ergibt:

$$E^\perp AH = 0 \quad (2.21)$$

Die über diese diskrete Betrachtung des Problems gewonnenen Formeln werden nun in [DR02] auf den kontinuierlichen Fall skalarer bzw. vektorieller Felder ϕ übertragen. A wird zu einem Differentialoperator und $G = A^{-1}$ zur zugehörigen Greenschen Funktion $G(z, x; z', x')$ (mit den Koordinaten z, x bzw. z', x' wie in Abschnitt 1.2.2 definiert), für die sich zwei Möglichkeiten G_+ und G_- ergeben.

Anmerkung. Die Existenz zweier Greenscher Funktionen ist essentiell für das vorliegende Problem, da wir durch die Wahl der Greenschen Funktion festlegen, über welchen Funktionenraum bei den Funktionalintegralen integriert wird. Dabei wird zu beachten sein, daß bei den beiden Funktionalintegralen über unterschiedliche Funktionenräume integriert wird, um wohldefinierte Feynman-Regeln zu erhalten. \diamond

Weiterhin gelten folgende Entsprechungen, die wir später benötigen werden:

<i>Gitter</i>	\implies	<i>Kontinuum</i>	
$H = Ge$	\implies	$\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{n-\Delta_+} P' G_+ = H_+$	(2.22a)
$e^t K = 0$	\implies	$\lim_{z \rightarrow 0} z^{n-\Delta_-} P K_- = \delta$	(2.22b)
$E^\perp AK = 0$	\implies	$(-D_\kappa D^\kappa + M^2) K_- = 0$ auf Bulk	(2.22c)
bzw. $E^\perp AH = 0$	\implies	$(-D_\kappa D^\kappa + M^2) H_+ = 0$ auf Bulk	(2.22d)

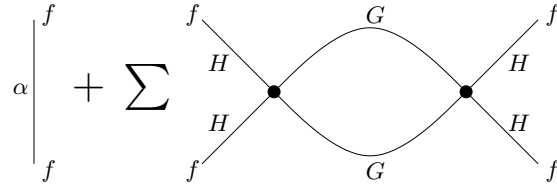
Hierbei ist $\lim_{z \rightarrow 0} z^{n-\Delta_\pm}$ bzw. $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{n-\Delta_\pm}$ der sog. *AdS-(Rand-)Limes* im Falle von Tensorfeldern n -ter Stufe, und P ist die Projektion auf die Komponenten der ungestrichenen Bulk-Koordinaten sowie P' die auf die Komponenten der gestrichenen. Die Größe Δ_\pm hat die Bedeutung einer Skalendimension der Randfelder (vergleiche hierzu Abschnitt 3.1). Es gilt

$$\Delta_\pm := \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + M^2 + n}. \quad (2.23)$$

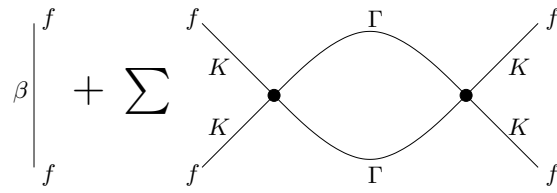
Warum ein solcher Limes gewählt wird, werden wir im nächsten Kapitel in Abschnitt 3.1 sehen, wo wir den skalaren, den vektoriellen und den tensoriellen Fall einzeln behandeln werden. (Zur Definition der Masse siehe die entsprechenden Feldgleichungen in Abschnitt 1.3.) Das Symbol δ steht hier für die an den AdS-Raum und den jeweiligen Fall angepasste δ -Funktion (die sich aus mehreren „normalen“ δ -Funktionen zusammensetzt).

Zu einer Abweichung zum diskreten Fall kommt es bei der Bestimmung von Γ bzw. K . Es wird nicht $\beta := -\alpha^{-1}$ berechnet, da dieser Schritt mit divergenten Integrationen verbunden wäre, sondern stattdessen auf die oben angegebenen charakterisierenden Gleichungen zurückgegriffen.

Schließlich kann in [DR02] gezeigt werden, daß alle Propagatoren bis auf



(a) Graphen für $\tilde{Z}(f)$



(b) Graphen für $Z(f)$

Abbildung 2.1.: Typische Graphen für $\tilde{Z}(f)$ bzw. $Z(f)$

Faktoren identisch sind:

$$\Gamma_-(z, x; z', x') = G_+(z, x; z', x') \quad (\text{Bulk-to-Bulk-Propagatoren}) \quad (2.24a)$$

$$K_-(z, x; x') = cH_+(z, x; x') \quad (\text{Bulk-to-Boundary-Propagatoren}) \quad (2.24b)$$

$$\beta_-(x; x') = c^2\alpha_+(x; x') \quad (\text{Tree-Level-Zweipunktfunktionen}) \quad (2.24c)$$

Folglich wird also bei beiden Integralen nicht nur über dieselben Graphen, sondern auch – bis auf Faktoren – dieselben Propagatoren summiert (vgl. Abbildung 2.1). Da bei den Koeffizienten c^k die Potenz k genau der Anzahl der jeweiligen Quellterme f entspricht, ergibt sich

$$Z^-(f) = \tilde{Z}^+(c \cdot f) \quad \text{und damit} \quad \mathcal{O}^-(x) = c \cdot \phi_0^+(x). \quad (2.25)$$

In [DR02] gelingt es, diese Äquivalenz der Propagatoren auf eine Bedingung an $c(\Delta)$ zu reduzieren (wobei c zu einer Funktion der Skalendimension der Randfelder Δ_+ fortgesetzt wurde), nämlich

$$c(d - \Delta_+) = -c(\Delta_+). \quad (2.26)$$

Dies ist die Forderung an $c(\Delta)$, die erfüllt sein muß, damit (2.24c) gilt. Die anderen beiden Relationen (2.24a) und (2.24b) können aus den im diskreten Fall gewonnenen algebraischen Gleichungen hergeleitet werden und sind somit automatisch richtig. Interessanterweise ergibt sich sowohl im skalaren als auch im vektoriellen Fall dieselbe Formel

$$c = c(\Delta_+) = 2\Delta_+ - d, \quad (2.27)$$

mit der die Eigenschaft (2.26) garantiert ist.

2.3. Darstellungstheoretischer Hintergrund

Der Bulk-to-Boundary-Propagator K hat darstellungstheoretische Bedeutung: Er kann als ein Intertwiner zwischen zwei Darstellungsräumen der Gruppe $SO(d+1,1)$, nämlich dem Raum der Funktionen ϕ , die die Klein-Gordon-Gleichung lösen, und dem Raum der Randfelder ϕ_0 , verstanden werden. Genauer läßt sich mit Hilfe von K aus einem Randfeld ein Bulkfeld konstruieren. Andersherum ergibt sich aus einem Bulkfeld durch Limesbildung ein Randfeld. Diese Betrachtungsweise wird in einem Artikel [Dob99] von DOBREV dargelegt.¹ Wir werden sie im folgenden für den skalaren Fall skizzieren:

Wir betrachten eine skalare Funktion $\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem euklidischen AdS-Raum, für die

$$(-\square_g + M^2)\phi(z, x) = 0 \quad (2.28)$$

gilt. Der Lösungsraum \mathcal{L} der Klein-Gordon-Gleichung zerfällt in zwei Teile (zugeordnet der entsprechenden Greenschen Funktion G_+ oder G_- bzw. dem Randverhalten der Lösung ϕ ; vergleiche hierzu auch Abschnitt 3.1.2):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_- \quad (2.29)$$

Man kann nun auf dem Raum \mathcal{L}_\pm eine Darstellung

$$T_g^M := T^M(g) : \mathcal{L}_\pm \longrightarrow \mathcal{L}_\pm. \quad (2.30)$$

der AdS-Symmetriegruppe $SO(d+1,1)$ mit $g \in SO(d+1,1)$ über

$$(T_g^M \phi)(z, x) := \phi(g^{-1}(z, x)). \quad (2.31)$$

¹Eine Zusammenfassung dieser Arbeit bietet der Artikel [Dob02] vom selben Autor.

definieren.

Weiterhin sei der Randwert des Feldes $\phi \in \mathcal{L}_\pm$ mit ϕ_0 bezeichnet, also

$$\phi_0(x) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta_\pm} \phi(z, x), \quad (2.32)$$

und ℓ_\pm sei die Menge aller so definierten ϕ_0 . Dann läßt sich eine Darstellung t der konformen Gruppe $SO(d+1, 1)$ des Randes M_d folgendermaßen definieren:

$$t_g := t(g) : \ell_\pm \longrightarrow \ell_\pm \quad (2.33)$$

mit

$$(t_g \phi_0)(x) := \left| \frac{\partial g^{-1}(x)}{\partial x} \right|^{\Delta_\pm/d} \phi_0(g^{-1}(x)) \quad (2.34)$$

Nun können wir wie angekündigt Intertwiner E und F zwischen den Darstellungsräumen \mathcal{L}_\pm und ℓ_\pm einführen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} E : \mathcal{L}_\pm &\longrightarrow \ell_\pm \\ \phi &\longmapsto \phi_0 \quad \text{mit} \quad \phi_0(x) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta_\pm} \phi(z, x) \end{aligned} \quad (2.35)$$

bzw.

$$\begin{aligned} F : \ell_\pm &\longrightarrow \mathcal{L}_\pm \\ \phi_0 &\longmapsto \phi \quad \text{mit} \quad \phi(z, x) = \int d^d y K(z, x; y) \phi_0(y) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Hierbei werden die speziellen Eigenschaften des Bulk-to-Boundary-Propagators K , also

$$(-\square_g + M^2)K(z, x; y) = 0 \quad (2.37)$$

und

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta_\pm} K(z, x; y) = \delta^d(x - y), \quad (2.38)$$

wichtig. Durch diese wird erreicht, daß ϕ wirklich in \mathcal{L}_\pm enthalten ist, und auch $E \circ F = \text{id}$ gilt. Man erhält nämlich (formal gerechnet)

$$\begin{aligned} (-\square_g + M^2)\phi(z, x) &= (-\square_g + M^2) \int d^d y K(z, x; y) \phi_0(y) \\ &= \int d^d y \underbrace{(-\square_g + M^2)K(z, x; y)}_{=0} \phi_0(y) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta \pm} \phi(z, x) &= \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta \pm} \int d^d y K(z, x; y) \phi_0(y) \\
&= \int d^d y \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta \pm} K(z, x; y) \phi_0(y) \\
&= \int d^d y \delta^d(x - y) \phi_0(y) \\
&= \phi_0(x).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

2.4. Vorgehen in dieser Arbeit

Die Frage, die sich stellt, ist, ob Formel (2.27) auch für Tensorfelder beliebiger Stufe gilt. Um der Lösung dieses Problems näher zu kommen, werden wir in der vorliegenden Arbeit einen anderen Weg als in [DR02] eingeschlagen. Dies geschieht, um die Bestimmung der Greenschen Funktion G zu umgehen, da G i. a. aus gekoppelten Differentialgleichungen bestimmt und mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen angegeben werden muß, was sehr mühselige Rechnungen erfordert.

Statt von der Greenschen Funktion werden wir im folgenden von den recht einfach strukturierten Bulk-to-Boundary-Propagatoren K_- bzw. H_+ ausgehen (die mit Hilfe der in [DR02] gezeigten und oben aufgeführten Eigenschaften (2.22) gewonnen werden können) und ihre relative Normierung $c(\Delta)$ bestimmen, um (2.27) zu überprüfen. Auf diese Weise kann das Ergebnis aus [DR02] relativ leicht reproduziert und auch auf Tensorfelder erweitert werden.

Anmerkung. Um Schwierigkeiten mit divergenten Integralen und Positivitätsprobleme zu vermeiden, werden wir uns auf den Fall der in (2.24) angegebenen Vorzeichenkombination der Propagatoren beschränken, d. h. wir werden z. B. nicht K_+ und H_- betrachten. \diamond

3. Bestimmung der relativen Normierung von H und K

Nach den einführenden Betrachtungen im letzten Kapitel soll es nun um die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors c gehen, insbesondere für den tensoriellen Fall. Wie in Abschnitt 2.4 schon erwähnt, werden wir folgende Vermutung beweisen:

Vermutung 3.1. *Für Tensorfelder zweiter Stufe gilt*

$$c(\Delta_+) = 2\Delta_+ - d. \tag{3.1}$$

Hierzu werden wir zunächst die (gemeinsame) Struktur der Integralkerne K_- und H_+ bestimmen.¹ Danach brauchen wir nur noch ihre jeweilige Normierung zu berechnen, da sich nach (2.24b) der Faktor c durch Division der beiden Normierungen ergibt (siehe auch Abbildung 3.1). Diese ist für H_+ fixiert durch die Normierung der Greenschen Funktion G_+ , und für K_- durch die Forderung, daß $e^t K = \delta$ gelten soll (vgl. 2.22). Das Symbol δ kennzeichnet hierbei die Kontinuumsversion der Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$, die im wesentlichen aus δ -Funktionen besteht. Wie jetzt der Limes e bzw. e^t und auch δ im Einzelnen aussehen, werden wir in den jeweiligen Fällen sehen. Im folgenden werden wir immer die in Abschnitt 1.2.2 eingeführten Koordinaten (z, x) benutzen.

3.1. Die gemeinsame Struktur von H und K

Wie oben angekündigt werden wir in diesem Abschnitt versuchen, die gemeinsame Struktur der Bulk-to-Boundary-Propagatoren H und K zu finden, wir werden also beide Propagatoren bis auf konstante Faktoren bestimmen.

¹Die Symbole G , H , K und Δ stehen in Abschnitt 3.1 für G_\pm , H_\pm , K_\mp bzw. Δ_\pm , danach jedoch ausschließlich für G_+ , H_+ , K_- bzw. Δ_+ .

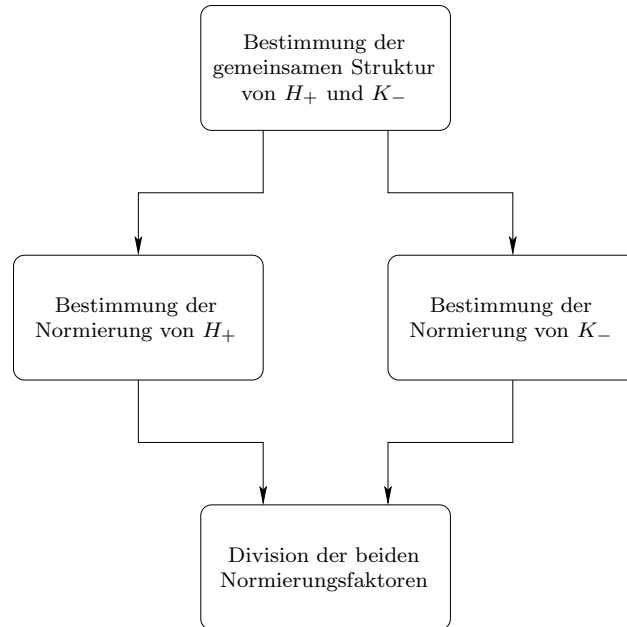


Abbildung 3.1.:

Die einzelnen durchzuführenden Schritte zur Gewinnung der relativen Normierung c

Da H und K jedoch aus einer Greenschen Funktion G hervorgehen, müssen wir zuerst diese betrachten, wobei wir G im Gegensatz zu [DR02], wie im letzten Kapitel schon gesagt, nicht exakt bestimmen werden; uns soll es hier nur um den allgemeinen Aufbau gehen, den wir für die Herleitung von H bzw. K inklusive Normierung benötigen.

3.1.1. Notation und nützliche Relationen

Für die folgenden Rechnungen definieren wir folgende Symbole:

Def. 3.1.

$$x_z := z \quad \text{bzw.} \quad x'_z := z' \quad (3.2a)$$

$$u := \frac{(z - z')^2 + (x - x')^2}{2zz'} \quad (\text{wie in 1.2.2}) \quad (3.2b)$$

$$v := \lim_{z' \rightarrow 0} z' u = \frac{z^2 + (x - x')^2}{2z} \quad (3.2c)$$

$$w_\mu := \partial_\mu v \quad (3.2d)$$

$$\sum_\mu := \sum_{\mu \in \{z, 0, 1, \dots, d-1\}} \quad (3.2e)$$

Falls $z' = 0$ gesetzt wurde, wie im Falle von v , so gelte auch $x'_z = 0$. Des weiteren benutzen wir griechische Buchstaben für Indizes, falls diese Werte aus $\{z, 0, 1, \dots, d-1\}$ annehmen können, und lateinische, falls nur Werte aus $\{0, 1, \dots, d-1\}$ erlaubt sind.

Mit Hilfe von

$$\partial_\mu u = \frac{(x - x')_\mu}{zz'} - \frac{u}{z} \delta_{\mu z}, \quad (3.3a)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu u = \frac{1}{zz'} \delta_{\mu\nu} - \frac{(x - x')_\nu}{z^2 z'} \delta_{\mu z} - \frac{(x - x')_\mu}{z^2 z'} \delta_{\nu z} + 2 \frac{u}{z^2} \delta_{\mu z} \delta_{\nu z} \quad (3.3b)$$

werden wir nun zuerst ein paar wichtige Relationen für die AdS-invariante Größe u herleiten:²

Satz 3.2. *Es gilt:*

$$D_\kappa u \cdot D^\kappa u = u(u + 2) \quad (3.4a)$$

$$D_\mu D_\nu u = g_{\mu\nu}(u + 1) \quad (3.4b)$$

$$D_\kappa D^\kappa u = (d + 1)(u + 1) \quad (3.4c)$$

Beweis. • Zu (3.4a): Mit $\sum_\kappa \frac{(x - x')_\kappa^2}{z^2} = \frac{2u}{zz'}$ erhält man:

$$\begin{aligned} D_\kappa u \cdot D^\kappa u &= \left(\frac{(x - x')_\kappa}{zz'} - \frac{u}{z} \delta_{\kappa z} \right) \left(\frac{(x - x')^\kappa}{zz'} - \frac{u}{z} z^2 \delta_z^\kappa \right) \\ &= z^2 \left(\frac{u^2}{z^2} - 2 \frac{u(z - z')}{z^2 z'} + \sum_\kappa \frac{(x - x')_\kappa^2}{z^2} \right) \\ &= u(u + 2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

²Weitere nützliche Relationen für u finden sich in [DFM⁺99]. Diese werden im folgenden jedoch nicht benötigt, da wir größtenteils mit v arbeiten werden. Jedoch lassen sich aus den Formeln nach Einschränkung auf die Bulk-Indizes bei den gestrichenen Koordinaten auf Grund von $\lim_{z' \rightarrow 0} z' u = v$ die Formeln aus Satz 3.3 herleiten (siehe hierzu auch Beweise für die Formeln (3.6a) und (3.6d)).

3. Bestimmung der relativen Normierung von H und K

- Zu (3.4b): Diese Gleichung erhalten wir aus Formel (3.3a) und dem Ausdruck für das Christoffelsymbol (A.2):

$$\begin{aligned}
D_\mu D_\nu u &= \\
&= \partial_\mu \partial_\nu u - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda u \\
&= \frac{1}{zz'} \delta_{\mu\nu} - \frac{(x-x')_\nu}{z^2 z'} \delta_{\mu z} - \frac{(x-x')_\mu}{z^2 z'} \delta_{\nu z} + 2 \frac{u}{z^2} \delta_{\mu z} \delta_{\nu z} - \\
&\quad - \frac{1}{z} \left(\frac{z-z'}{zz'} \delta_{\mu\nu} - \frac{u}{z} \delta_{\mu\nu} - \frac{(x-x')_\nu}{zz'} \delta_{\mu z} - \frac{(x-x')_\mu}{zz'} \delta_{\nu z} + 2 \frac{u}{z} \delta_{\mu z} \delta_{\nu z} \right) \\
&= \frac{1}{zz'} \delta_{\mu\nu} - \frac{z-z'}{z^2 z'} \delta_{\mu\nu} + \frac{u}{z^2} \delta_{\mu\nu} \\
&= g_{\mu\nu} (u+1) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

- Zu (3.4c): Folgt durch Kontraktion direkt aus (3.4b). □

Weiterhin ergeben sich mit

$$w_\mu = \frac{(x-x')_\mu}{z} - \frac{v}{z} \delta_{\mu z}, \quad (3.5a)$$

$$\partial_\nu w_\mu = \frac{1}{z} (\delta_{\mu\nu} - w_\mu \delta_{\nu z} - w_\nu \delta_{\mu z}) \quad (3.5b)$$

die folgenden äußerst nützlichen Identitäten, die die späteren Rechnungen um einiges vereinfachen werden:

Satz 3.3. *Es gilt:*

$$D_\kappa v \cdot D^\kappa v = v^2 \quad (3.6a)$$

$$D_\kappa v \cdot D^\kappa \partial'_i v = v \partial'_i v \quad (3.6b)$$

$$D_\kappa \partial'_i v \cdot D^\kappa \partial'_j v = \delta_{ij} + \partial'_i v \cdot \partial'_j v \quad (3.6c)$$

$$D_\mu D_\nu v = g_{\mu\nu} v \quad (3.6d)$$

$$D_\kappa D^\kappa v = (d+1)v \quad (3.6e)$$

$$D_\kappa D^\kappa D_\mu v = D_\mu v \quad (3.6f)$$

Beweis. • Zu (3.6a): In diesem Fall benutzen wir das analoge Ergebnis (3.4a) für u :

$$D_\kappa v \cdot D^\kappa v = \lim_{z' \rightarrow 0} z'^2 D_\kappa u \cdot D^\kappa u = \lim_{z' \rightarrow 0} (z'^2 u^2 + 2z' u) = v^2 \quad \checkmark$$

- Zu (3.6b): Für diese Formel brauchen wir nach einer kleinen Umformung nur die gerade bewiesene Relation (3.6a) zu benutzen:

$$D_\kappa v \cdot D^\kappa \partial'_i v = \frac{1}{2} \partial'_i (D_\kappa v \cdot D^\kappa v) = \frac{1}{2} \partial'_i v^2 = v \partial'_i v \quad \checkmark$$

- Zu (3.6c): Hierbei hilft uns die weiter oben gezeigte Formel (3.5b) für $\partial_\mu w_\nu$, wenn wir die Relation $\partial'_i v = -w_i$ beachten:

$$\begin{aligned} D_\kappa \partial'_i v \cdot D^\kappa \partial'_j v &= \sum_\mu (\delta_{i\mu} - w_i \delta_{\mu z})(\delta_{j\mu} - w_j \delta_{\mu z}) \\ &= \delta_{ij} + \partial'_i v \cdot \partial'_j v \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Zu (3.6d): Wie oben können wir zum Beweis dieser Formel auf das entsprechende Ergebnis (3.4b) für u zurückgreifen:

$$D_\mu D_\nu v = \lim_{z' \rightarrow 0} z' D_\mu D_\nu u = \lim_{z' \rightarrow 0} (z' u + z') = g_{\mu\nu} v \quad \checkmark$$

- Zu (3.6e): Ergibt sich durch Kontraktion aus (3.6d). Alternativ erhält man das Ergebnis natürlich auch aus (3.4c).
- Zu (3.6f): Die gewünschte Identität ergibt sich sofort bei Benutzen der Kommutatorrelation (A.31) und anschließendem Anwenden von (3.6e):

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa D_\mu v &= D_\mu D_\kappa D^\kappa v - d D_\mu v \\ &= (d+1) D_\mu v - d D_\mu v \\ &= D_\mu v \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

3.1.2. Skalarer Fall

Die zu betrachtende Distribution $G(z, x; z', x')$ ist eine Greensche Funktion der Klein-Gordon-Gleichung:

$$(-\square_g + M^2)G(z, x; z', x') = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(z - z') \delta^d(x - x') \quad (3.7)$$

Diese Gleichung lautete im diskreten Fall $AG = \mathbb{1}_N$, wobei wir im folgenden mit A auch den Klein-Gordon-Operator $-\square_g + M^2$ bezeichnen. (Auch im vektoriellen und tensoriellen Fall werden wir den entsprechenden Differentialoperator A nennen.)

Wie sieht nun dieses G aus? Um diese Frage zu beantworten erinnern wir uns, daß eine Greensche Funktion invariant unter der Isometriegruppe des Raumes ist. G muß also invariant unter $SO(d+1,1)$, der Isometriegruppe des AdS-Raumes sein. Wie in Abschnitt 1.2.2 erwähnt, ist

$$u(z, x; z', x') = \frac{(z - z')^2 + (x - x')^2}{2zz'} \quad (3.8)$$

AdS-invariant. Wir können also G als eine Funktion von u ansetzen:

$$G(z, x; z', x') = f(u(z, x; z', x')) \quad (3.9)$$

Nun haben wir von G den Randlimes eG zu bilden. Es stellt sich hier die Frage, wie e im kontinuierlichen Fall sinnvoll zu definieren ist. Nehmen wir einmal an, wir würden einfach die z -Koordinate gegen 0 gehen lassen, um den Randwert zu bilden, also $e = \lim_{z \rightarrow 0}$ setzen. Nehmen wir des weiteren an, eine in $z = 0$ zweimal nach z stetig differenzierbare Funktion $\varphi = \varphi(z, x)$ erfülle die Klein-Gordon-Gleichung, d. h.

$$\begin{aligned} (-\square_g + M^2)\varphi(z, x) &= \\ &= \left(-z^{1+d}\partial_z z^{1-d}\partial_z - z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 + M^2 \right) \varphi(z, x) \\ &= \left[(d-1)z\partial_z - z^2\partial_z^2 - z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 + M^2 \right] \varphi(z, x) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dann bekommen wir wegen $\lim_{z \rightarrow 0} z^p \partial_z^n \varphi(z, x) = 0$ mit $n = 0, 1, 2$ und $\partial_z^0 := \text{id}$ für $p > 0$ durch Bilden des Limes aus dieser Gleichung

$$M^2 \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z, x) = 0 \quad (3.11)$$

und somit $M = 0$ oder $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z, x) = 0$. Wir erhalten folglich für den Fall $M \neq 0$ immer Null als Randwert.

Da wir aber auch Randwerte ungleich Null haben wollen, ist der normale Limes $\lim_{z \rightarrow 0}$ nicht geeignet, um für Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung einen Randwertbegriff zu definieren. Der „Trick“ besteht nun darin, stattdessen einen skalierten Limes zu definieren, d. h. wir multiplizieren unsere Funktion φ zuerst mit einer Potenz von z und bilden dann erst den Limes z gegen 0:

$$\varphi_0(x) = e\varphi(z, x) := \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \varphi(z, x) \quad (3.12)$$

Für ein geeignet gewähltes $\Delta > 0$ sollte dieser Limes das Abfallverhalten für z gegen 0 in einer Art und Weise aufheben, daß sich für φ_0 eine Funktion ungleich der Nullfunktion ergibt. Um dieses Δ zu bestimmen betrachten wir die Klein-Gordon-Gleichung für kleine z und machen einen Lösungsansatz der Form $\varphi(z, x) = A(x)z^\Delta$, also:

$$(-z^{1+d}\partial_z z^{1-d}\partial_z + M^2)A(x)z^\Delta = 0 \quad (3.13)$$

Hieraus ergibt sich $\Delta(\Delta-d) = M^2$. Es existieren also zwei Möglichkeiten für Δ :

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + M^2} \quad (3.14)$$

(Insbesondere gilt also $\Delta_+ + \Delta_- = d$ und $-\Delta_+ \cdot \Delta_- = M^2$.) Wir müssen folglich e aus dem diskreten Fall durch die Vorschrift $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta_\pm}$ ersetzen.

Des weiteren folgert, daß der Lösungsraum der Klein-Gordon-Gleichung in zwei Teile zerfällt, die durch das Randverhalten definiert sind. Entsprechend gibt es auch zwei Greensche Funktion G_\pm mit dem Randverhalten $\sim z^{\Delta_\pm}$. Wir bilden also den Limes $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta_\pm}$ von unserem Ansatz für G (bzw. G_\pm); das Ergebnis bezeichnen wir mit H_\pm :

$$H_\pm(z, x; x') := \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta_\pm} f(u(z, x; z', x')) \quad (3.15)$$

Da u und damit $G = f \circ u$ eine homogene Funktion von Ordnung 0 ist, muß unser gesuchtes H_\pm ebenfalls homogen sein, allerdings durch den AdS-Limes nicht mehr von Ordnung 0, sondern von Ordnung $-\Delta_\pm$. Dies ermöglicht uns, folgenden Ansatz zu machen:

$$H_\pm(z, x; x') = \gamma v^{-\Delta_\pm} \quad (3.16)$$

Die Größe $\gamma \in \mathbb{R}$ ist hierbei die später noch zu bestimmende Konstante.

Aus dem diskreten Fall wissen wir, daß H die Klein-Gordon-Gleichung „auf dem Bulk“ löst ($E^\perp AH = 0$, wobei E^\perp die Projektion auf den Bulk war). Was bedeutet dies im kontinuierlichen Fall? Um diese Frage zu beantworten, notieren wir (3.7) mit Hilfe von Testfunktionen f :³

$$\forall f : \int dz d^d x \sqrt{g} G_\pm(z, x; z', x') (-\square_g + M^2) f(z, x) = f(z', x') \quad (3.17)$$

³Zur Begründung dieser Darstellungsweise siehe Anhang D. Hierbei sind wir (im Gegensatz zu dem, was Anhang D evtl. impliziert) auf Grund des Abfallverhaltens der Greenschen Funktion nicht auf Testfunktionen angewiesen, die für z gegen 0 verschwinden. (Dies gilt auch für den vektoriellen und tensoriellen Fall.)

Bilden wir nun den Randwert, d. h. wenden wir $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta \pm}$ an, so ergibt sich:

$$\forall f : \int dz d^d x z^{-1-d} H_{\pm}(z, x; x') (-\square_g + M^2) f(z, x) = \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta \pm} f(z', x') \quad (3.18)$$

Wir sprechen nun davon, daß H_{\pm} die Klein-Gordon-Gleichung auf dem Bulk löst, wenn die Relation (3.18) für alle Testfunktionen mit dem Randwert 0 erfüllt ist. In diesem Fall ist die rechte Seite von (3.18) also gleich Null („homogene“ Bedingung an H_{\pm}). Daß dies tatsächlich der Fall ist, zeigt auch der folgende

Satz 3.4. *Der Bulk-to-Boundary-Propagator $H = \gamma v^{-\Delta}$ löst die Klein-Gordon-Gleichung bzgl. M auf dem Bulk.*

Beweis. Die (formale) Rechnung gestaltet sich nun mit Hilfe der zu Beginn gezeigten Relationen (3.6a) und (3.6e) sehr einfach:

$$\begin{aligned} D_{\kappa} D^{\kappa} v^{-\Delta} &= -\Delta [-(\Delta + 1) v^{-\Delta-2} D_{\kappa} v \cdot D^{\kappa} v + v^{-\Delta-1} D_{\kappa} D^{\kappa} v] \\ &= -\Delta [-(\Delta + 1) v^{-\Delta-2} v^2 + v^{-\Delta-1} (d + 1) v] \\ &= M^2 v^{-\Delta} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Hierbei haben wir die Relation $\Delta(\Delta - d) = M^2$ ausgenutzt. \square

Anmerkung. Hier und bei den noch folgenden ähnlichen formalen Rechnungen sollte immer im Hinterkopf behalten werden, daß die Gleichungen für Testfunktionenräume gelten, deren Elemente einen verschwindenden Randwert besitzen. Wir kennzeichnen dies durch die Floskel „auf dem Bulk“. \diamond

3.1.3. Vektorieller Fall

Wieder beginnen wir mit einer Betrachtung der Greenschen Funktion, die diesmal die Form eines Bivektors hat:

$$A_{\mu}{}^{\nu} G_{\nu\alpha}(z, x; z', x') = g_{\mu\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(z - z') \delta^d(x - x') \quad (3.20)$$

mit

$$A_{\mu\nu} = (-D_{\kappa} D^{\kappa} + M^2) g_{\mu\nu} + a D_{\mu} D_{\nu} \quad (3.21)$$

bzw.

$$A_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu(-D_\kappa D^\kappa + M^2) + aD_\mu D^\nu \quad (3.21')$$

Die Greensche Funktion im Vektorfall $G_{\nu\alpha}(z, x; z', x')$ besitzt eine kompliziertere Struktur als die im skalaren Fall: Um den (Bi-)Vektoraspekt einzubringen, stehen uns zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Zum einen können wir Terme der Form $\partial_\mu \partial'_\rho u$, zum anderen der Art $\partial_\mu u \cdot \partial'_\rho u$ benutzen. Beide sind AdS-kovariant (sowohl bzgl. der gestrichenen als auch der ungestrichenen Koordinaten). Es ist zu beachten, daß Terme, in denen $\dots D_\kappa D^\kappa \dots u$ oder auch $\dots D_\kappa \dots u \dots D^\kappa \dots u$ vorkommt, auf Grund der Formeln (3.4a) und (3.4c) (sowie der entsprechenden Kommutatorrelationen) in diesen beiden Ausdrücken enthalten sind. Gleiches gilt für den noch zu behandelnden tensoriellen Fall.

Wir können also für die Greensche Funktion ansetzen:

$$G_{\mu\rho}(u) = f_1(u)\partial_\mu \partial'_\rho u + f_2(u)\partial_\mu u \cdot \partial'_\rho u \quad (3.22)$$

Dies ist die allgemeinste Form eines AdS-invarianten Bivektors.

Wieder stellt sich nun die Frage, wie der Randlimes zu bilden ist. Da der zu betrachtende Differentialoperator zusätzlich zum Klein-Gordon-Operator $-D_\kappa D^\kappa + M^2$ auch noch einen zweiten Term, nämlich $aD_\mu D^\mu$, enthält, erwarten wir, daß das Abfallverhalten der Lösungen der Differentialgleichung nicht „einheitlich“ wie im skalaren Fall ist (Aufspalten des Lösungsraumes in zwei Teile!). Entsprechend wird auch ein AdS-Limes, wie im vorherigen Abschnitt verwendet, problematisch sein. Wir umgehen diese Schwierigkeit, indem wir bei der Betrachtung der Greenschen Funktion den Raum der Testfunktionen auf die divergenzfreien einschränken. Dies hat zur Folge, daß der a -Term des Differentialoperators wegfällt, und auch die Greensche Funktion $G_{\mu\rho}^v$ auf einen, nach Satz 1.1 gegebenen, divergenzfreien Anteil $G_{\mu\rho}^v := G_{\mu\rho} - G_{\mu\rho}^s$ mit $G_{\mu\rho}^s := \frac{1-a}{M^2+d} D_\mu D_\kappa G_{\rho}^\kappa$ reduziert werden kann:

Gleichung (3.20) lautet mit Hilfe von Testfunktionen geschrieben:⁴

$$\forall f^\mu : \int dz d^d x \sqrt{g} G_{\nu\alpha}(z, x; z', x') {}^t A_\mu{}^\nu f^\mu(z, x) = f_\alpha(z', x') \quad (3.23)$$

Betrachten wir nur divergenzfreie Testfunktionen f^μ , so ergibt sich durch Ausnutzen der Divergenzfreiheit und mittels partieller Integration (bzw. genauer

⁴Die Bedeutung des Symboles ${}^t A$ wird in Anhang D erläutert.

Satz von Stokes, siehe Anhang D):

$$\begin{aligned}
\forall f^\mu : f_\alpha(z', x') &= \\
&= \int dz d^d x \sqrt{g} G_{\nu\alpha}(z, x; z', x') (-D_\kappa D^\kappa + M^2) f^\nu(z, x) \\
&\stackrel{\text{P.I.}}{=} \int dz d^d x \sqrt{g} (-D_\kappa D^\kappa + M^2) (G_{\nu\alpha}^v(z, x; z', x') + G_{\nu\alpha}^s(z, x; z', x')) f^\nu(z, x)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Der zweite Summand ist auf Grund der Divergenzfreiheit der Testfunktionen identisch Null:

$$\begin{aligned}
&\int dz d^d x \sqrt{g} (-D_\kappa D^\kappa + M^2) G_{\nu\alpha}^s(z, x; z', x') f^\nu(z, x) = \\
&= \int dz d^d x \sqrt{g} D_\nu (-D_\kappa D^\kappa + M^2 - d) \frac{1-a}{M^2+d} D_\rho G^\rho_\alpha f^\nu(z, x) \\
&\stackrel{\text{P.I.}}{=} 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Hierbei haben wir die Kommutatorrelation (A.36) benutzt.

Wir müssen also allein nur noch $G_{\nu\alpha}^v$ und den Klein-Gordon-Operator bzgl. der Masse M betrachten und können folglich auch einen AdS-Limes äquivalent zum letzten Kapitel benutzen. Analog zum Skalaren erwarten wir zwei, sich durch ihr Randverhalten unterscheidende Möglichkeiten $G_{\pm, \nu\alpha}^v$ für diese neue Greensche Funktion.

Um dieses Vorgehen noch einmal anders zu motivieren, betrachten wir den Beweis des schon einmal erwähnten Satz 1.1. Führt man die dortigen Rechnungen statt für Lösungen der Differentialgleichung für eine Greensche Funktion durch (d. h. ersetzt man die Null durch die entsprechenden δ -Terme), so kommt man zu folgenden Ergebnissen:

$$(-D_\kappa D^\kappa + M^2) G_{\nu\alpha}^v = \frac{1}{M^2+d} D_\nu D_\alpha \delta + g_{\nu\alpha} \delta \tag{3.26}$$

$$D_\kappa G^{v, \kappa}_\alpha = \frac{1}{M^2+d} D_\alpha \delta \tag{3.27}$$

Hierbei ist $\delta := \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(z - z') \delta^d(x - x')$ und, wie oben schon definiert, $G_{\nu\alpha} = G_{\nu\alpha}^v + G_{\nu\alpha}^s$ mit $G_{\nu\alpha}^s = \frac{1-a}{M^2+d} D_\nu D_\kappa G^\kappa_\alpha$.

Wir sehen also auch hier, daß die Distribution $G_{\nu\alpha}^v$ bzgl. dem Raum der divergenzfreien Testfunktionen einer Greenschen Funktion des Klein-Gordon-

Operators $-D_\kappa D^\kappa + M^2$ entspricht. Wir definieren $H_{\mu j}$ nun als den AdS-Limes $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{1-\Delta_\pm}$ von $G_{\mu j}^v$. Es ergibt sich aus $D_\kappa G_{\alpha}^{v,\kappa} = \frac{1}{M^2+d} D_\alpha \delta$, daß $H_{\mu j}$ auf dem Bulk divergenzfrei ist.

Beim gerade eingeführten AdS-Limes ist die Bezeichnung von $1 - \Delta_\pm$ für den Exponenten (statt $-\Delta_\pm$ wie im Skalaren) dadurch begründet, daß so Δ_\pm der Skalendimension der Randfelder entspricht. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß die Greensche Funktion homogen von Ordnung -2 sein muß (da die Metrik, die mit den δ -Termen multipliziert wird, diese Homogenität besitzt), und somit die Zweipunktfunktion $\alpha_{\pm,ij} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{1-\Delta_\pm} \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{1-\Delta_\pm} G_{\pm,ij}^v$ homogen von Ordnung $-2\Delta_\pm$ ist.

Es ist außerdem zu beachten, daß wir vor Ausführung des Limes eine Projektion P' auf die Bulk-Komponenten $G_{\nu j}$ der gestrichenen Koordinaten durchzuführen haben, da wir bei der Limesbildung die z -Koordinate verlieren werden. Es gilt also:

$$H_{\pm,\mu j} = e_\pm G_{\pm,\mu\rho} := \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{1-\Delta_\pm} P' G_{\pm,\mu\rho} \quad (3.28)$$

Im Gegensatz zum skalaren Fall werden wir Δ_\pm erst weiter unten aus der Forderung bestimmen, daß $H_{\mu j}$ die Klein-Gordon-Gleichung lösen soll.

Wir können nun, ausgehend von Gleichung (3.22), schreiben:

$$H_{\mu j}(v) = \tilde{f}_1(v) \partial_\mu \partial'_j v + \tilde{f}_2(v) \partial_\mu v \cdot \partial'_j v \quad (3.29)$$

Da – wie oben schon erwähnt – die Greensche Funktion homogen von Ordnung -2 ist, muß $H_{\mu j}$ folglich eine Homogenität von Ordnung $-1 - \Delta_\pm$ haben. (Der Limes ändert die Homogenität um $1 - \Delta_\pm$.) Unter Beachtung dieser Forderung erhalten wir schließlich (wobei im folgenden auf das \pm verzichtet wird)

$$H_{\mu j}(z, x; x') = -\gamma_1 v^{-\Delta} \partial_\mu \partial'_j v - \gamma_2 v^{-\Delta-1} \partial'_j v \cdot \partial_\mu v \quad (3.30)$$

als gemeinsamen Ansatz für die Bulk-to-Boundary-Propagatoren H und K .⁵

Unser Ziel ist es nun, den Zusammenhang zwischen γ_1 und γ_2 zu bestimmen.

Satz 3.5. *Es sei $d + 1 - \Delta \neq 0$. Der Bulk-to-Boundary-Propagator $H_{\mu j}$ ist genau dann auf dem Bulk divergenzfrei, d. h. es gilt*

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, d-1\} : D^\mu H_{\mu j}(z, x; x') = 0, \quad (3.31)$$

wenn $\gamma_1 = -\gamma_2$ gilt.

⁵Das Minuszeichen wurde benutzt, um Übereinstimmung mit [DR02] zu erzielen.

Beweis. Ausgehend von (3.30) ergibt sich mit Hilfe von (3.6a), (3.6b) sowie (3.6e):

$$\begin{aligned}
 D^\mu H_{\mu j} &= \\
 &= -\gamma_1[-\Delta v^{-\Delta-1} D^\mu v \cdot \partial_\mu \partial'_j v + v^{-\Delta} D^\mu \partial_\mu \partial'_j v] - \\
 &\quad - \gamma_2[-(\Delta + 1)v^{-\Delta-2} D^\mu v \cdot \partial'_j v \cdot \partial_\mu v + v^{-\Delta-1} D^\mu \partial'_j v \cdot \partial_\mu v + \\
 &\quad \quad + v^{-\Delta-1} \partial'_j v \cdot D^\mu \partial_\mu v] \\
 &= -(\gamma_1 + \gamma_2)(d + 1 - \Delta)v^{-\Delta} \partial'_j v
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Der Bulk-to-Boundary-Propagator $H_{\mu j}$ ist also im Falle $d + 1 - \Delta \neq 0$ genau dann divergenzfrei, wenn $\gamma_1 = -\gamma_2$ gilt. \square

Der Wert der Potenz Δ läßt sich nun bequem aus der Tatsache herleiten, daß $H_{\mu j}$ die Klein-Gordon-Gleichung löst:

Satz 3.6. *Der Bulk-to-Boundary-Propagator $H_{\mu j}$ löst die Klein-Gordon-Gleichung bzgl. der Masse M auf dem Bulk genau dann, wenn $\Delta(\Delta - d) - 1 = M^2$ gilt.*

Beweis. Erneut starten wir mit (3.30). Aus Gründen der Übersichtlichkeit wenden wir $D_\kappa D^\kappa$ getrennt auf die beiden Summanden an, wobei wir bei den Rechnungen die Relationen (3.6b), (3.6d), (3.6e), (3.6f) und (3.19) benutzen. Für den ersten Summanden ergibt sich hiermit

$$\begin{aligned}
 D_\kappa D^\kappa (v^{-\Delta} \partial_\mu \partial_j v) &= \\
 &= (\Delta^2 - d\Delta + 1)v^{-\Delta} \partial_\mu \partial_j v - 2\Delta v^{-\Delta-1} \partial_j v \cdot \partial_\mu v,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

und für den zweiten Summanden bekommen wir

$$\begin{aligned}
 D_\kappa D^\kappa (v^{-\Delta-1} \partial_j v \cdot \partial_\mu v) &= \\
 &= (\Delta^2 - 2\Delta - d\Delta - 1)v^{-\Delta-1} \partial_j v \cdot \partial_\mu v + 2v^{-\Delta} \partial_\mu \partial_j v.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Einsetzen dieser Ergebnisse in die Klein-Gordon-Gleichung liefert die Behauptung. \square

Wir haben also die Skalendimension der Randfelder zu

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + M^2 + 1} \tag{3.35}$$

bestimmt.

3.1.4. Tensorieller Fall

Wie gehabt gehen wir von der Greenschen Funktion aus. Zu betrachten ist die Gleichung

$$A_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} G_{\rho\sigma\alpha\beta}(z, x; z', x') = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} z^{1+d} \delta(z - z') \delta^d(x - x') \quad (3.36)$$

mit

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\rho\sigma} = & (-D_\kappa D^\kappa + M^2) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + a g_{\mu\nu} D_\kappa D^\kappa g_{\rho\sigma} + \\ & + b(D_\mu D_\nu g_{\rho\sigma} + g_{\mu\nu} D_\rho D_\sigma) + \\ & + c(D_\mu D_\rho g_{\nu\sigma} + D_\nu D_\sigma g_{\mu\rho}) + e g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (3.37)$$

bzw.

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = & (-D_\kappa D^\kappa + M^2) \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma + a g_{\mu\nu} D_\kappa D^\kappa g^{\rho\sigma} + \\ & + b(D_\mu D_\nu g^{\rho\sigma} + g_{\mu\nu} D^\rho D^\sigma) + \\ & + c(D_\mu D^\rho \delta_\nu^\sigma + D_\nu D^\sigma \delta_\mu^\rho) + e g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (3.37')$$

Die Greensche Funktion $G_{\mu\nu\rho\sigma}$ muß die AdS-invariante Form

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_i f_i(u) \tilde{D}_{i,\mu\nu\rho\sigma} u \quad (3.38)$$

besitzen, wobei die $\tilde{D}_{i,\mu\nu\rho\sigma}$ alle möglichen Operatoren sind, die aus kovarianten Ableitungen nach den gestrichenen oder den ungestrichenen Koordinaten sowie $g_{\mu\nu}$ bzw. $g'_{\rho\sigma}$ erzeugt werden können. Genauer bestehen folgende Möglichkeiten für $\tilde{D}_{i,\mu\nu\rho\sigma} u$:

$$\begin{aligned} & D_\mu D'_\rho u \cdot D_\nu D'_\sigma u + D_\nu D'_\rho u \cdot D_\mu D'_\sigma u \\ & g_{\mu\nu} D'_\rho u \cdot D'_\sigma u \\ & g_{\mu\nu} g'_{\rho\sigma} \\ & D_\mu u \cdot D_\nu u \cdot D'_\rho u \cdot D'_\sigma u \\ & D_\mu u \cdot D_\nu D'_\rho u \cdot D'_\sigma u + D_\nu u \cdot D_\mu D'_\rho u \cdot D'_\sigma u + \\ & \quad + D_\mu u \cdot D_\nu D'_\sigma u \cdot D'_\rho u + D_\nu u \cdot D_\mu D'_\sigma u \cdot D'_\rho u \\ & D_\mu u \cdot D_\nu u \cdot g'_{\rho\sigma} \\ & D_\mu D_\nu u \cdot D'_\rho D'_\sigma u \end{aligned}$$

3. Bestimmung der relativen Normierung von H und K

Folgende Terme müssen hierbei nicht direkt vorkommen, da sie auf Grund von Gleichung (3.4b) in entsprechenden Termen mit $g_{\mu\nu}$ bzw. $g'_{\rho\sigma}$ enthalten sind:

$$\begin{aligned}
& D_\mu D_\nu u \cdot g'_{\rho\sigma} \\
& g_{\mu\nu} D'_\rho D'_\sigma u \\
& D_\mu D_\nu u \cdot D'_\rho u \cdot D'_\sigma u \\
& D_\mu u \cdot D_\nu u \cdot D'_\rho D'_\sigma u \\
& D_\mu D_\nu D'_\rho u \cdot D'_\sigma u + D_\mu D_\nu D'_\sigma u \cdot D'_\rho u \\
& D_\mu u \cdot D_\nu D'_\rho D'_\sigma u + D_\nu u \cdot D_\mu D'_\rho D'_\sigma u \\
& D_\mu D_\nu D'_\rho D'_\sigma u
\end{aligned}$$

Wie im vektoriellen Fall schränken wir den Raum der Testfunktionen ein, um die Wahl des Limes eindeutig zu machen: Wir werden im folgenden nur noch spur- und divergenzfreie symmetrische Testfunktionen betrachten. Dies hat zur Folge, daß – analog zum vektoriellen Fall – wir nur noch den Klein-Gordon-Operator bzgl. der Masse M und den nach Satz 1.2 gegebenen spur- und divergenzfreien Anteil $G_{\pm, \mu\nu\rho\sigma}^c$ der Greenschen Funktion $G_{\pm, \mu\nu\rho\sigma}$ zu betrachten brauchen. Wir definieren $H_{\pm, \mu\nu ij}$ folglich als den Limes $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{2-\Delta_\pm}$ von $G_{\pm, \mu\nu ij}^c$, d. h.

$$H_{\pm, \mu\nu ij} = e_\pm G_{\pm, \mu\nu\rho\sigma}^c := \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{2-\Delta_\pm} P' G_{\pm, \mu\nu\rho\sigma}^c, \quad (3.39)$$

wobei P' wieder die Projektion auf die Komponenten der gestrichenen Bulk-Koordinaten ist, und wir Δ_\pm erst später bestimmen werden. Durch die Definition des Limes wird auch hier – wie im vektoriellen Fall – erreicht, daß $-2\Delta_\pm$ der Homogenität der Zweipunktfunktion entspricht. Ebenfalls analog zum vektoriellen Fall ist $H_{\mu\nu ij}$ auf dem Bulk spur- und divergenzfrei.

Nutzt man wie im letzten Abschnitt die Homogenität und zusätzlich die Symmetrie von $H_{\mu\nu ij}$ aus, und beachtet man, daß $g'_{\rho\sigma}$ zu δ_{ij} wird, so kommt

man auf folgenden Ansatz (wobei wir ab jetzt wieder das \pm weglassen):

$$\begin{aligned}
 H_{\mu\nu ij}(z, x; x') &= \\
 &= \gamma_1 v^{-\Delta} (\partial_\mu \partial'_i v \cdot \partial_\nu \partial'_j v + \partial_\nu \partial'_i v \cdot \partial_\mu \partial'_j v) + \\
 &\quad + \gamma_2 v^{-\Delta} g_{\mu\nu} \partial'_i v \cdot \partial'_j v + \\
 &\quad + \gamma_3 v^{-\Delta} g_{\mu\nu} \delta_{ij} + \\
 &\quad + \gamma_4 v^{-\Delta-1} (\partial_\mu v \cdot \partial_\nu \partial'_i v \cdot \partial'_j v + \partial_\nu v \cdot \partial_\mu \partial'_i v \cdot \partial'_j v + \\
 &\quad \quad + \partial_\mu v \cdot \partial_\nu \partial'_j v \cdot \partial'_i v + \partial_\nu v \cdot \partial_\mu \partial'_j v \cdot \partial'_i v) + \\
 &\quad + \gamma_5 v^{-\Delta-2} \partial_\mu v \cdot \partial_\nu v \cdot \partial'_i v \cdot \partial'_j v + \\
 &\quad + \gamma_6 v^{-\Delta-2} \partial_\nu v \cdot \partial_\mu v \cdot \delta_{ij}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Die Divergenz- und Spurfreiheit von $H_{\mu\nu ij}$ hilft schließlich bei der Bestimmung der Parameter γ_i :

Satz 3.7. *Es sei $d + 3 - \Delta \neq 0$. Der Bulk-to-Boundary-Propagator $H_{\mu\nu ij}$ ist genau dann auf dem Bulk divergenz- und spurfrei, d. h.*

$$\forall i, j \in \{0, 1, \dots, d-1\} : D^\mu H_{\mu\nu ij} = 0 \quad \wedge \quad H^\mu_{\mu ij} = 0, \tag{3.41}$$

wenn

$$\gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -\frac{2}{d}\gamma_1, \quad \gamma_4 = -\gamma_1, \quad \gamma_5 = 2\gamma_1, \quad \gamma_6 = \frac{2}{d}\gamma_1 \tag{3.42}$$

gilt.

Beweis. Wieder machen wir intensiven Gebrauch von den in Satz 3.3 aufgelisteten Formeln sowie Gleichung (3.19). Das Ausrechnen der Spur und der Divergenz von $H_{\mu\nu ij}$, gegeben durch Gleichung (3.40), erweist sich hiermit zwar immer noch als verhältnismäßig langwierig, aber einfach. Man erhält schließlich

$$H^\mu_{\mu ij} = [2\gamma_1 + (d+1)\gamma_3 + \gamma_6] v^{-\Delta} \delta_{ij} + [2\gamma_1 + (d+1)\gamma_2 + 4\gamma_4 + \gamma_5] v^{-\Delta} \partial'_i v \cdot \partial'_j v \tag{3.43}$$

für die Spur und

$$\begin{aligned}
 D^\mu H_{\mu\nu ij} &= \\
 &= [(d+2-\Delta)(\gamma_1 + \gamma_4) + \gamma_2] v^{-\Delta} (\partial'_i v \cdot \partial_\nu \partial'_j v + \partial'_j v \cdot \partial_\nu \partial'_i v) + \\
 &\quad + [-\Delta\gamma_2 + (4+2d-2\Delta)\gamma_4 + (d+2-\Delta)\gamma_5] v^{-\Delta-1} \partial_\nu v \cdot \partial'_i v \cdot \partial'_j v + \\
 &\quad + [-\Delta\gamma_3 + 2\gamma_4 + (d-\Delta)\gamma_6] v^{-\Delta-1} \partial_\nu v \delta_{ij}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

für die Divergenz.

Lösen des sich bei Nullsetzen der beiden Ausdrücke ergebenden Gleichungssystems liefert unter der Bedingung $d + 3 - \Delta \neq 0$ das oben angegebene Ergebnis. \square

Schließlich bestimmen wir noch die Potenz Δ :

Satz 3.8. *Der Bulk-to-Boundary-Propagator $H_{\mu\nu ij}$ löst genau dann die Klein-Gordon-Gleichung bzgl. M auf dem Bulk, wenn $M^2 = \Delta(\Delta - d) - 2$ gilt.*

Beweis. Mit Satz 3.3 und Gleichung (3.19) können wir ausgehend von (3.40) recht einfach $D_\kappa D^\kappa H_{\mu\nu ij}$ bestimmen. Man erhält nach längeren Rechnungen folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}
 D_\kappa D^\kappa H_{\mu\nu ij} = & \\
 = & [(\Delta^2 - d\Delta + 2)\gamma_1 + 4\gamma_4]v^{-\Delta}(\partial_\mu \partial'_i v \cdot \partial_\nu \partial'_j v + \partial_\nu \partial'_i v \cdot \partial_\mu \partial'_j v) + \\
 & + [4\gamma_1 + (\Delta^2 - d\Delta - 4\Delta + 2d + 4)\gamma_2 + 8\gamma_4 + 2\gamma_5]v^{-\Delta}g_{\mu\nu}\partial'_i v \cdot \partial'_j v + \\
 & + [2\gamma_2 + (\Delta^2 - d\Delta + 2\Delta - d + 1)\gamma_3 + 2\gamma_6]v^{-\Delta}g_{\mu\nu}\delta_{ij} + \\
 & + [-2\Delta\gamma_1 + (\Delta^2 - d\Delta - 2\Delta + 2)\gamma_4 + 2\gamma_5]v^{-\Delta-1} \times \\
 & \quad \times (\partial_\mu v \cdot \partial_\nu \partial'_i v \cdot \partial'_j v + \partial_\nu v \cdot \partial_\mu \partial'_i v \cdot \partial'_j v + \\
 & \quad + \partial_\mu v \cdot \partial_\nu \partial'_j v \cdot \partial'_i v + \partial_\nu v \cdot \partial_\mu \partial'_j v \cdot \partial'_i v) + \\
 & + [-8(\Delta + 1)\gamma_4 + (\Delta^2 - d\Delta - 4\Delta - 6)\gamma_5]v^{-\Delta-2}\partial_\mu v \cdot \partial_\nu v \cdot \partial'_i v \cdot \partial'_j v + \\
 & + [\gamma_5 + (\Delta^2 - d\Delta - 2d - 2)\gamma_6]v^{-\Delta-2}\partial_\nu v \cdot \partial_\mu v \cdot \delta_{ij}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Das aus der Forderung $D_\kappa D^\kappa H_{\mu\nu ij} = M^2 H_{\mu\nu ij}$ resultierende Gleichungssystem liefert mit den im vorherigen Satz bewiesenen Relationen für die γ_i sofort die Behauptung. (Hierbei ist Δ offenbar überbestimmt, jedoch ergeben sich keine Widersprüche.) \square

Die Skalendimension der Randfelder ist also im tensoriellen Fall gegeben durch

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + M^2 + 2}. \tag{3.46}$$

3.2. Normierung von H

In diesem Kapitel soll die Normierung von H bestimmt werden – wieder für den skalaren, den vektoriellen und den tensoriellen Fall. Wir werden das prinzipielle Vorgehen ausführlich im skalaren Fall beschreiben; der vektorielle und der tensorielle Fall gestalten sich analog, so daß wir in den entsprechenden Abschnitten speziell auf die Besonderheiten eingehen werden und ansonsten auf größere Erklärungen verzichten können.

3.2.1. Skalarer Fall

Die Normierung von H ist bestimmt durch die Normierung der Greenschen Funktion G , wobei H über den Grenzwertprozeß

$$\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta} G(z, x; z', x') = H(z, x; x') \quad (3.47)$$

aus G hervorgeht. Um die Normierungskonstante γ von

$$H(z, x; x') = \gamma \left(\frac{z}{z^2 + (x - x')^2} \right)^\Delta \quad (3.48)$$

zu bestimmen, gehen wir von der definierenden Gleichung

$$(-\square_g + M^2)G(z, x; z', x') = \underbrace{z^{1+d}}_{=1/\sqrt{g}} \delta(z - z') \delta^d(x - x') \quad (3.49)$$

der Greenschen Funktion G aus, die ausführlich mittels Testfunktionen notiert

$$\forall f : \int dz d^d x \sqrt{g} G(z, x; z', x') (-\square_g + M^2) f(z, x) = f(z', x') \quad (3.50)$$

lautet. Bilden des Randwertes, d. h. Anwenden von $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta}$, ergibt:

$$\forall f : \int dz d^d x z^{-1-d} H(z, x; x') (-\square_g + M^2) f(z, x) = \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta} f(z', x') \quad (3.51)$$

Um γ bestimmen zu können, müssen Testfunktionen f betrachtet werden, deren Träger auch den Rand umfaßt, was meint, daß $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta} f(z', x') \neq 0$. Anderenfalls (also wenn Testfunktionen f mit dem Bulk als Träger verwendet würden, d. h. $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{-\Delta} f(z', x') = 0$) würden wir an H nur die Forderung

stellen, daß es die Klein-Gordon-Gleichung auf dem Bulk löst, eine Tatsache, die auf Grund der dann auftretenden Null auf der rechten Seite der Gleichung bei der Fixierung von γ nicht weiterhilft. Wir setzen

$$f(z, x) = z^\Delta \tilde{f}(x - x'), \quad (3.52)$$

wobei \tilde{f} selbst eine Testfunktion sei. Mit diesen f ergibt sich:

$$\forall \tilde{f} : \int dz d^d x z^{-1-d} H(z, x; x') (-\square_g + M^2) z^\Delta \tilde{f}(x - x') = \tilde{f}(0) \quad (3.53)$$

Nun berechnen wir die Wirkung des Differentialoperators $-\square_g + M^2$ auf die Testfunktionen:

$$\begin{aligned} (-\square_g + M^2) z^\Delta g(x - x') &= \\ &= (-z^{1+d} \partial_z z^{1-d} \partial_z - z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 + M^2) z^\Delta g(x - x') \\ &= z^\Delta [-\underbrace{\Delta(\Delta - d)}_{=M^2} - z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 + M^2] g(x - x') \\ &= -z^{\Delta+2} \Delta g(x - x') \end{aligned} \quad (3.54)$$

Wir bekommen hiermit und mit (3.48) als Bestimmungsgleichung für die Normierungskonstante γ also

$$\forall \tilde{f} : - \int dz d^d x z^{\Delta+1-d} \gamma \left(\frac{z}{z^2 + (x - x')^2} \right)^\Delta \Delta \tilde{f}(x - x') = \tilde{f}(0). \quad (3.55)$$

Unsere Aufgabe ist es also, das Integral zu lösen. Hierzu führen wir folgende Substitution durch:

$$\tilde{z} := \frac{z^2}{(x - x')^2} \in \mathbb{R}^+ \quad (3.56)$$

Es gilt also

$$\frac{z}{z^2 + (x - x')^2} = \frac{\tilde{z}^{\frac{1}{2}}}{\tilde{z} + 1} |x - x'|^{-1} \quad (3.57)$$

und

$$z^{\Delta+1-d} dz = \frac{1}{2} \tilde{z}^{\frac{1}{2}(\Delta-d)} |x - x'|^{\Delta+2-d} d\tilde{z}, \quad (3.58)$$

wobei wir $|x-x'|$ statt $\sqrt{(x-x')^2}$ geschrieben haben. Hiermit wird das Integral aus (3.55) zu

$$\begin{aligned}
 & \int dz d^d x z^{\Delta+1-d} \gamma \left(\frac{z}{z^2 + (x-x')^2} \right)^\Delta \Delta \tilde{f}(x-x') \\
 &= \int d\tilde{z} d^d x \frac{1}{2} \tilde{z}^{\frac{1}{2}(\Delta-d)} |x-x'|^{\Delta+2-d} \gamma \left(\frac{\tilde{z}^{\frac{1}{2}}}{\tilde{z}+1} \right)^\Delta |x-x'|^{-\Delta} \Delta \tilde{f}(x-x') \\
 &= \gamma \int_0^{+\infty} d\tilde{z} \frac{\tilde{z}^{\Delta-\frac{d}{2}}}{2(\tilde{z}+1)^\Delta} \cdot \int d^d(x-x') |x-x'|^{2-d} \Delta \tilde{f}(x-x'), \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Mit (C.5) und (C.9) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
 & \int dz d^d x z^{\Delta+1-d} \gamma \left(\frac{z}{z^2 + (x-x')^2} \right)^\Delta \Delta \tilde{f}(x-x') = \\
 &= -\frac{\Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2\Gamma(\Delta)} \cdot \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \\
 &= -\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)}, \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

womit wir aus (3.55) die gesuchte Normierung von H erhalten:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(0) &= \gamma \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)} \tilde{f}(0) \\
 \Leftrightarrow \gamma &= \frac{\Gamma(\Delta)}{2\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})} \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

3.2.2. Vektorieller Fall

Um die Normierungskonstante von $H_{\mu j}$ zu bestimmen, betrachten wir analog zum skalaren Fall die Gleichung

$$A_\mu{}^\nu G_{\nu\alpha}(z, x; z', x') = g_{\mu\alpha} z^{1+d} \delta(z-z') \delta^d(x-x') \quad (3.62)$$

mit $A_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu (-D_\kappa D^\kappa + M^2) + a D_\mu D^\nu$. Mit Hilfe von Testfunktionen f^μ geschrieben gilt also:

$$\forall f^\mu : \int dz d^d x \sqrt{g} G_{\nu\alpha}(z, x; z', x') {}^t A_\mu{}^\nu f^\mu(z, x) = f_\alpha(z', x') \quad (3.63)$$

Betrachten wir nur divergenzfreie Testfunktionen f^ν , so ergibt sich nach Abschnitt 3.1.3

$$\forall f^\mu : \int dz d^d x \sqrt{g} G_{\nu\alpha}^v(z, x; z', x') (-D_\kappa D^\kappa + M^2) f^\nu(z, x) = f_\alpha(z', x') \quad (3.64)$$

mit $G_{\nu\alpha}^v := G_{\nu\alpha} - \frac{1-a}{M^2+d} D_\nu D_\mu G^\mu_\alpha$. Im selben Abschnitt haben wir den Bulk-to-Boundary-Propagator über

$$H_{\nu j}(z, x; x') := \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{1-\Delta} G_{\nu j}^v(z, x; z', x') \quad (3.65)$$

definiert. Wenden wir also den AdS-Limes $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{1-\Delta}$ (nach Projektion auf die Bulk-Komponenten) auf obige Gleichung (3.64) an, so bekommen wir folgende Forderung, die $H_{\nu j}$ erfüllen muß:

$$\forall f^\nu : \int dz d^d x \sqrt{g} H_{\nu j}(z, x; x') (-D_\kappa D^\kappa + M^2) f^\nu(z, x) = \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{1-\Delta} f_j(z', x') \quad (3.66)$$

Analog zum Skalaren schränken wir nun den Raum der benutzten Testfunktionen weiter ein auf diejenigen divergenzfreien Testfunktionen, die die Form

$$f_\mu(z, x) = z^{\Delta-1} \tilde{f}_\mu(x - x') \quad (3.67)$$

besitzen. Die rechte Seite der Gleichung (3.66) wird somit zu $\tilde{f}_j(0)$. Mit Hilfe des folgenden Lemmas läßt sich nun auch $D_\kappa D^\kappa f_\mu$ und die restliche Auswertung des Integrales stark vereinfachen.

Lemma 3.9. *Eine differenzierbare Vektorfunktion $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ auf dem AdS-Raum besitze für alle μ die Form (3.67) mit $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{1, d\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$(i) \quad D^\mu f_\mu = 0 \quad (3.68 i)$$

$$(ii) \quad \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_i = 0 \quad \wedge \quad \tilde{f}_z = 0 \quad (3.68 ii)$$

$$(iii) \quad \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_\kappa = 0 \quad (3.68 iii)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Äquivalenz zwischen (i) und (ii). Hierzu geben wir zuerst die Divergenz der Funktion f auf eine geeignete Art und Weise an. Mit Gleichung (A.3d) bekommen wir:

$$\begin{aligned} D^\mu f_\mu &= g^{\kappa\mu}(\partial_\kappa f_\mu - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda f_\lambda) \\ &= z^2 \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_\kappa - z(d-1)f_z. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Nutzt man nun die Form (3.67) von f aus, so kann man hiermit ohne Umwege die behauptete Äquivalenz zeigen:

$$\begin{aligned} D^\mu f_\mu &= 0 \\ \Leftrightarrow z \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_\kappa &= (d-1)f_z \\ \Leftrightarrow (\Delta-1)z^{\Delta-1}\tilde{f}_z + z^\Delta \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_i &= (d-1)z^{\Delta-1}\tilde{f}_z \\ \Leftrightarrow z \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_i &= (d-\Delta)\tilde{f}_z \quad (*) \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_i = 0 \quad \wedge \quad \tilde{f}_z = 0 \right) \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist dadurch begründet, daß die \tilde{f}_μ unabhängig von z sind. Gleichung (*) kann also nur genau dann für alle z gelten, wenn $\sum_{k=0}^{d-1} \partial_k \tilde{f}_k = 0$ und $f_z = 0$ (da $d - \Delta \neq 0$) gegeben ist.

Analog zeigt man die Äquivalenz zwischen (ii) und (iii) (wobei $1 - \Delta \neq 0$ benutzt wird):

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_\kappa &= 0 \\ \Leftrightarrow (\Delta-1)z^{\Delta-2}\tilde{f}_z + z^{\Delta-1} \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_i &= 0 \\ \Leftrightarrow z \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_i &= (1-\Delta)\tilde{f}_z \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_i = 0 \quad \wedge \quad \tilde{f}_z = 0 \right)$$

□

Es ergibt sich mit Hilfe dieses Lemmas und (A.9):

$$\begin{aligned} & (-D_\kappa D^\kappa + M^2) f^\nu = \\ & = g^{\mu\nu} (-D_\kappa D^\kappa + M^2) f_\mu \\ & = g^{\mu\nu} \left[-z^{d-1} \partial_z z^{3-d} \partial_z f_\mu - z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 f_\mu + 2z \partial_\mu f_z - 2z \delta_{\mu z} \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_\kappa + \right. \\ & \quad \left. + d f_\mu + (d-1) \delta_{\mu z} f_z + M^2 f_\mu \right] \\ & = g^{\mu\nu} \left(-z^{d-1} \partial_z z^{3-d} \partial_z - z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 + d + M^2 \right) z^{\Delta-1} \tilde{f}_\mu \\ & = g^{\mu\nu} z^{\Delta-1} \left[-(\Delta-1)(\Delta-d+1) - z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 + d + M^2 \right] \tilde{f}_\mu \\ & = -g^{\mu\nu} z^{\Delta+1} \Delta \tilde{f}_\mu \end{aligned} \tag{3.70}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt $(\Delta-1)(\Delta-d+1) = M^2 + d$ benutzt.

Setzen wir (3.70) in Gleichung (3.66) ein, so erhalten wir

$$\forall \tilde{f}_\mu : - \int dz d^d x z^{\Delta-d} H^\mu_j(z, x; x') \Delta \tilde{f}_\mu(x-x') = \tilde{f}_j(0). \tag{3.71}$$

Die Berechnung des Integrales bereitet nun keine größeren Probleme mehr, wenn man ausnutzt, daß $\tilde{f}_z = 0$ und $\sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_i = 0$ gilt, und dieselbe Substitution wie im Skalaren, also $\tilde{z} := \frac{z^2}{x^2}$, durchführt. (Die genaue Rechnung findet sich im Anhang in Abschnitt B.1.1.) Wir bekommen:

$$\forall \tilde{f}_j : \gamma \cdot 2^{\Delta+1} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} (\Delta-1) \Gamma(\Delta+1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+1)} \tilde{f}_j(0) = \tilde{f}_j(0) \tag{3.72}$$

Die gesuchte Konstante γ haben wir somit zu

$$\boxed{\gamma = 2^{-\Delta-1} \frac{\Gamma(\Delta+1)}{\pi^{\frac{d}{2}} (\Delta-1) \Gamma(\Delta+1 - \frac{d}{2})}} \tag{3.73}$$

bestimmt.

3.2.3. Tensorieller Fall

Zu betrachten ist die Gleichung

$$A_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} G_{\rho\sigma\alpha\beta}(z, x; z', x') = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} z^{1+d} \delta(z - z') \delta^d(x - x'). \quad (3.74)$$

mit $A_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}$ wie in Formel (3.37') angegeben. Mit Testfunktionen $f^{\mu\nu}$ geschrieben heißt dies:

$$\forall f^{\mu\nu} : \int dz d^d x \sqrt{g} G_{\rho\sigma\alpha\beta}(z, x; z', x') {}^t A_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} f^{\mu\nu}(z, x) = f_{\alpha\beta}(z', x') \quad (3.75)$$

Analog zum vektoriellen Fall schränken wir den Raum der Testfunktionen auf die divergenz- und spurfreien symmetrischen Funktionen ein, vollziehen also den Übergang zur Greenschen Funktion $G_{\pm, \rho\sigma\alpha\beta}^c$ der Klein-Gordon-Gleichung bzgl. der Masse M (vgl. Abschnitt 3.1.4), und bilden den AdS-Limes durch Anwenden von $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{2-\Delta}$:

$$\forall f^{\rho\sigma} : \int dz d^d x \sqrt{g} H_{\rho\sigma ij}(z, x; x') (-D_\kappa D^\kappa + M^2) f^{\rho\sigma}(z, x) = \lim_{z' \rightarrow 0} z'^{2-\Delta} f_{ij}(z', x') \quad (3.76)$$

Des weiteren sollen die Testfunktionen nun die folgende Form besitzen:

$$f_{\mu\nu}(z, x) = z^{\Delta-2} \tilde{f}_{\mu\nu}(x - x') \quad (3.77)$$

Dies hat zur Folge, daß der Grenzwert $\lim_{z' \rightarrow 0} z'^{2-\Delta} f_{ij}(z', x')$ existiert, und weiterhin wird analog zum vektoriellen Fall die Berechnung des Integrales auf Grund des folgenden Lemmas sehr viel einfacher:

Lemma 3.10. *Eine differenzierbare, symmetrische und spurfreie Tensorfunktion $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ auf dem AdS-Raum besitze für alle μ die Form (3.77) mit $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{2, d+1\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$(i) \quad D^\mu f_{\mu\nu} = 0 \quad (3.78 \text{ i})$$

$$(ii) \quad \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_{i\nu} = 0 \quad \wedge \quad \tilde{f}_{z\nu} = 0 \quad (3.78 \text{ ii})$$

(iii)

$$\sum_{\kappa} \partial_{\kappa} f_{\kappa\nu} = 0 \quad (3.78 \text{ iii})$$

(Anmerkung: Auf Grund der Symmetrie der f sind die Aussagen (i) bis (iii) auch noch äquivalent zu den entsprechenden Aussagen mit vertauschten Indizes.)

Beweis. Der Beweis läuft ganz analog zum vektoriellen Fall (Lemma 3.9) ab: Auf Grund der Spurfreiheit der zu betrachtenden Funktion f erhalten wir

$$g^{\kappa\mu} \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} f_{\mu\lambda} = z(\delta_z^{\lambda} \delta_{\nu}^{\mu} - \delta_z^{\mu} \delta_{\nu}^{\lambda} - \delta_{\nu z} \delta^{\lambda\mu}) f_{\mu\lambda} = 0.$$

Mit Hilfe von (A.3d) führt dies zu folgendem Ausdruck für ihre Divergenz:

$$\begin{aligned} D^{\mu} f_{\mu\nu} &= g^{\kappa\mu} (\partial_{\kappa} f_{\mu\nu} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} f_{\lambda\nu} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} f_{\mu\lambda}) \\ &= z^2 \sum_{\kappa} \partial_{\kappa} f_{\kappa\nu} - (d-1) z f_{z\nu} \end{aligned}$$

Hiermit können wir, wenn wir die spezielle Form (3.77) der Funktion f ausnutzen, folgern:

$$\begin{aligned} D^{\mu} f_{\mu\nu} &= 0 \\ \Leftrightarrow z \sum_{\kappa} \partial_{\kappa} f_{\kappa\nu} &= (d-1) z f_{z\nu} \\ \Leftrightarrow (\Delta - 2) z^{\Delta-2} \tilde{f}_{z\nu} + z^{\Delta-1} \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_{i\nu} &= (d-1) z^{\Delta-2} \tilde{f}_{z\nu} \\ \Leftrightarrow z \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_{i\nu} &= (d - \Delta + 1) \tilde{f}_{z\nu} \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_{i\nu} = 0 \quad \wedge \quad \tilde{f}_{z\nu} = 0 \right) \end{aligned}$$

Hierbei wurde zum Schluß $\Delta \neq d+1$ gebraucht. Wir haben also die Äquivalenz zwischen (i) und (ii) erfolgreich bewiesen.

Es bleibt noch, die Äquivalenz zwischen (ii) und (iii) zu zeigen. Diese ergibt sich mit Hilfe von $\Delta \neq 2$ aus folgenden Umformungen:

$$\sum_{\kappa} \partial_{\kappa} f_{\kappa\nu} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (\Delta - 2)z^{\Delta-3}\tilde{f}_{z\nu} + z^{\Delta-2}\sum_{i=0}^{d-1}\partial_i\tilde{f}_{i\nu} = 0 \\
 &\Leftrightarrow z\sum_{i=0}^{d-1}\partial_i\tilde{f}_{i\nu} = (2 - \Delta)\tilde{f}_{z\nu} \\
 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{d-1}\partial_i\tilde{f}_{i\nu} = 0 \quad \wedge \quad \tilde{f}_{z\nu} = 0 \right)
 \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas bekommen wir nun:

$$\begin{aligned}
 &(-D_\kappa D^\kappa + M^2)f^{\rho\sigma} = \\
 &= g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}(-D_\kappa D^\kappa + M^2)f_{\mu\nu} \\
 &= g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\left[-z^{d-3}\partial_z z^{5-d}\partial_z f_{\mu\nu} - z^2\sum_{i=0}^{d-1}\partial_i^2 f_{\mu\nu} + \right. \\
 &\quad + 2z(\partial_\mu f_{\nu z} + \partial_\nu f_{\mu z}) - 2z\left(\delta_{\mu z}\sum_{\kappa}\partial_\kappa f_{\kappa\nu} + \delta_{\nu z}\sum_{\kappa}\partial_\kappa f_{\kappa\mu}\right) + \\
 &\quad + 2(d-1)f_{\mu\nu} + (d+1)(\delta_{\mu z}f_{\nu z} + \delta_{\nu z}f_{\mu z}) - \\
 &\quad \left. - \frac{2}{z^2}\delta_{\mu z}\delta_{\nu z}f_{\lambda}{}^\lambda - 2\delta_{\mu\nu}f_{zz} + M^2 f_{\mu\nu}\right] \\
 &= g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\left[-z^{d-3}\partial_z z^{5-d}\partial_z - z^2\sum_{i=0}^{d-1}\partial_i^2 + 2(d-1) + M^2\right]z^{\Delta-2}\tilde{f}_{\mu\nu} \\
 &= g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}z^{\Delta-2}\left[-(\Delta-2)(\Delta+2-d) - z^2\sum_{i=0}^{d-1}\partial_i^2 + 2(d-1) + M^2\right]\tilde{f}_{\mu\nu} \\
 &= -g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}z^\Delta\Delta\tilde{f}_{\mu\nu} \tag{3.79}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde zum Schluß der Rechnung

$$(\Delta - 2)(\Delta + 2 - d) = M^2 + 2(d - 1) \tag{3.80}$$

benutzt. Mit diesem Ergebnis wird (3.76) zu

$$\forall \tilde{f}^{\mu\nu} : - \int dz d^d x z^{-1-d+\Delta} H^{\mu\nu ij}(z, x; x') \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(z, x) = \tilde{f}_{ij}(0). \tag{3.81}$$

3. Bestimmung der relativen Normierung von H und K

Das Integral kann nun unter Ausnutzung der Eigenschaften der $\tilde{f}_{\mu\nu}$ (also Symmetrie bzgl. Vertauschung der Indizes, $\sum_{i=0}^{d-1} \partial_i \tilde{f}_{i\nu} = 0$, $\tilde{f}_{z\nu} = 0$, $\tilde{f}_{\mu}{}^{\mu} = 0$) gelöst werden. Hierbei bietet sich wie im skalaren und vektoriellen Fall die Verwendung der Substitution $\tilde{z} := \frac{z^2}{x^2}$ an. (Die Rechnung findet sich in Abschnitt B.1.2 des Anhangs.) Man kommt schlußendlich zu folgendem Resultat:

$$\forall \tilde{f}_{ij} : \gamma \cdot 2^{\Delta+2} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Delta(\Delta-1)\Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+2)} \tilde{f}_{ij}(0) = \tilde{f}_{ij}(0) \quad (3.82)$$

Es ergibt sich also für die gesuchte Konstante:

$$\boxed{\gamma = 2^{-\Delta-2} \frac{\Gamma(\Delta+2)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Delta(\Delta-1)\Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})}} \quad (3.83)$$

3.3. Normierung von K

Nun soll die Normierung der Bulk-to-Boundary-Propagatoren K bestimmt werden, die, wie zu Beginn des Kapitels schon einmal erwähnt, fixiert ist durch die Forderung, daß K im Limes (plus Projektion) e^t die Kontinuumsversion δ der Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$ ergeben soll. Hierbei ist e^t analog zu e zu interpretieren. Das einzige, was sich ändert, ist, daß wir z durch z' sowie Δ_+ durch $\Delta_- = d - \Delta_+$ zu ersetzen und im Vektor- und Tensorfall entsprechend eine Projektion P auf die Komponenten der ungestrichenen (statt der gestrichenen) Koordinaten durchzuführen haben (siehe auch Formel (2.22b)).

Wie auch schon bei der Berechnung der Normierungskonstante des Bulk-to-Boundary-Propagators H laufen die Rechnungen im skalaren, vektoriellen und tensoriellen Fall analog ab.

3.3.1. Skalarer Fall

Im skalaren Fall soll

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta_-} K(z, x; x') = \delta^d(x - x') \quad (3.84)$$

mit

$$K(z, x; x') = K(z, x - x') = c\gamma \left(\frac{z}{z^2 + (x - x')^2} \right)^\Delta \quad (3.85)$$

und $\Delta_- = d - \Delta_+$ gelten, wobei wir Δ statt Δ_+ geschrieben haben. Mit Hilfe von Testfunktionen f formuliert, heißt dies:

$$\forall f : \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} c\gamma \int d^d x' \left(\frac{z}{z^2 + (x-x')^2} \right)^\Delta f(x') = f(x) \quad (3.86)$$

bzw. äquivalent dazu

$$\forall f : \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} c\gamma \int d^d x \left(\frac{z}{z^2 + x^2} \right)^\Delta f(x) = f(0). \quad (3.87)$$

Nun führen wir die Substitution $zy := x$ durch, wodurch wir die linke Seite der Gleichung leicht auswerten können:

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} c\gamma \int d^d x \left(\frac{z}{z^2 + x^2} \right)^\Delta f(x) = \\ & = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} c\gamma \int d^d y z^d \left(\frac{z}{z^2(1+y^2)} \right)^\Delta f(yz) \\ & = c\gamma f(0) \int d^d y (1+y^2)^{-\Delta} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Mit Formel (C.7) erhalten wir also aus (3.87)

$$\boxed{c\gamma = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}}. \quad (3.89)$$

Es ergibt sich nun mit Hilfe der schon berechneten Normierungskonstanten γ von H (3.61):

$$c = 2\Delta - d \quad (3.90)$$

3.3.2. Vektorieller Fall

Die Gleichung, die hier der Fixierung der Normierungskonstante dient, ist gegeben durch

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{1-\Delta} K_{mj}(z, x; x') = \delta_{mj} \delta^d(x - x') \quad (3.91)$$

mit

$$K_{mj} = c\gamma \left(\frac{1}{z} v^{-\Delta} \delta_{mj} - v^{-\Delta-1} w_j w_m \right). \quad (3.92)$$

3. Bestimmung der relativen Normierung von H und K

Man beachte, daß die Indizes hier nur noch Werte von 0 bis $d - 1$ annehmen. Mit Testfunktionen f^j geschrieben wird diese Gleichung zu

$$\forall f^j : \lim_{z \rightarrow 0} z^{1+\Delta-d} \int d^d x' K_{mj}(z, x; x') f^j(x') = \delta_{mj} f^j(x) = f_m(x), \quad (3.93)$$

wobei wir wie im skalaren Fall $\Delta_- = d - \Delta_+$ benutzt und Δ statt Δ_+ geschrieben haben. Unser Ziel ist es nun, die linke Seite dieser Gleichung auszurechnen. Hierzu gehen wir von folgendem zu obiger Bedingung äquivalenten Ausdruck aus:

$$\forall f^j : \lim_{z \rightarrow 0} z^{1+\Delta-d} \int d^d x c\gamma \left[\frac{1}{z} \left(\frac{2z}{z^2 + x^2} \right)^\Delta \delta_{mj} - \frac{x_m}{z} \cdot \frac{x_j}{z} \left(\frac{2z}{z^2 + x^2} \right)^{\Delta+1} \right] f^j(x) = f_m(0) \quad (3.94)$$

Wie im skalaren Fall kann das Integral nun nach der Substitution $zy := x$ ohne größere Probleme berechnet werden. (Das genaue Vorgehen findet sich in Abschnitt B.2.1.) Wir erhalten als Ergebnis:

$$\forall f^j : c\gamma \cdot 2^\Delta \pi^{\frac{d}{2}} \frac{(\Delta - 1)\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta + 1)} f_m(0) = f_m(0) \quad (3.95)$$

Die gesuchte Normierungskonstante von K_{mj} ist also gegeben durch

$$\boxed{c\gamma = 2^{-\Delta} \frac{\Gamma(\Delta + 1)}{\pi^{\frac{d}{2}} (\Delta - 1)\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}} \quad (3.96)$$

Mit (3.73) erhalten wir also erneut

$$c = 2\Delta - d. \quad (3.97)$$

3.3.3. Tensorieller Fall

Hier ist die Forderung an

$$K_{mnij}(z, y; x') = c\gamma \left[\frac{1}{z^2} (\delta_{mi}\delta_{nj} + \delta_{ni}\delta_{mj} - 2g_{mn}\delta_{ij}) v^{-\Delta} - \frac{1}{z} (w_m w_j \delta_{in} + w_n w_j \delta_{im} + w_m w_i \delta_{jn} + w_n w_i \delta_{jm}) v^{-\Delta-1} + \right.$$

$$+ 2(w_m w_n w_i w_j + \frac{1}{d} w_m w_n \delta_{ij}) v^{-\Delta-2}] \quad (3.98)$$

gegeben durch

$$\forall f^{ij} : \lim_{z \rightarrow 0} z^{2+\Delta-d} \int d^d x' K_{mni}(z, x; x') f^{ij}(x-x') = \delta_{mi} \delta_{nj} f^{ij}(x) = f_{mn}(x), \quad (3.99)$$

wobei die Testfunktionen f^{ij} symmetrisch und spurfrei sind. Äquivalent hierzu ist:

$$\begin{aligned} \forall f^{ij} : \lim_{z \rightarrow 0} z^{2+\Delta-d} \int d^d x c \gamma \left[\frac{1}{z^2} (\delta_{mi} \delta_{nj} + \delta_{ni} \delta_{mj} - 2g_{mn} \delta_{ij}) \left(\frac{2z}{z^2 + (x-x')^2} \right)^\Delta - \right. \\ \left. - \frac{1}{z} \left(\frac{x_m x_j}{z^2} \delta_{in} + \frac{x_n x_j}{z^2} \delta_{im} + \frac{x_m x_i}{z^2} \delta_{jn} + \frac{x_n x_i}{z^2} \delta_{jm} \right) \left(\frac{2z}{z^2 + (x-x')^2} \right)^{\Delta+1} + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{x_m x_n x_i x_j}{z^4} + \frac{x_m x_n}{dz^2} \delta_{ij} \right) \left(\frac{2z}{z^2 + x^2} \right)^{\Delta+2} \right] f^{ij}(x) = f_{mn}(0) \quad (3.100) \end{aligned}$$

Für die nun folgende Rechnung können die beiden δ_{ij} -Terme auf Grund der Spurfreiheit der Testfunktionen weggelassen werden. Wie in den letzten beiden Abschnitten kann das Integral dann wieder mit Hilfe der Substitution $yz := x$ bestimmt werden. (Zur Rechnung siehe Abschnitt B.2.2.) Schlußendlich erhalten wir:

$$\forall f^{ij} : c \gamma \cdot 2^{\Delta+1} \pi^{\frac{d}{2}} \cdot \frac{\Delta(\Delta-1)\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+2)} f_{mn}(0) = f_{mn}(0) \quad (3.101)$$

Die gesuchte Normierungskonstante ergibt sich also zu

$$\boxed{c \gamma = 2^{-\Delta-1} \frac{\Gamma(\Delta+2)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Delta(\Delta-1)\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}}. \quad (3.102)$$

Durch Vergleich mit (3.83) haben wir also gezeigt, daß auch im tensoriellen Fall

$$c = 2\Delta - d \quad (3.103)$$

gilt.

3.4. Fazit

Wir haben somit die relative Normierung zwischen H_+ und K_- für alle Fälle zu

$$c = 2\Delta - d \tag{3.104}$$

bestimmt. Damit wurde sowohl das Ergebnis von [DR02] reproduziert, als auch auf Tensorfelder zweiter Stufe erweitert. Die Vermutung 3.1 ist damit bewiesen. Es gilt also auch für Tensorfelder die Relation

$$Z^-(f) = \tilde{Z}^+(c \cdot f) \tag{3.105}$$

zwischen den Funktionalintegralen und somit die Relation

$$\mathcal{O}^-(x) = c \cdot \phi_0^+(x) \tag{3.106}$$

zwischen den von den Funktionalintegralen erzeugten Feldern.

4. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir gezeigt, daß die als Summe von Feynman-Graphen formal definierten Funktionalintegrale

$$\tilde{Z}(f) = \int D\phi e^{-I(\phi)} e^{\int \phi_0 f} \quad (\text{„feldtheoretische Beschreibung“})$$

und

$$Z(f) = \int D\phi e^{-I(\phi)} \delta(\phi_0 - f) \quad (\text{„duale Beschreibung“})$$

im Falle von Skalar-, Vektor- und symmetrischer Tensorfeldern zweiter Stufe äquivalent sind, und daß das duale konforme Feld \mathcal{O} bis auf einen Zahlenfaktor mit ϕ_0 , dem Randwert von ϕ , übereinstimmt.

Damit ist es gelungen, das Ergebnis von [DR02] zu erweitern, wobei wir einen Weg gefunden haben, der die schwierige explizite Bestimmung der Greenschen Funktion der Feldgleichung vermeidet. Dieser besteht darin, die aus [DR02] bekannten algebraischen Relationen auszunutzen, wodurch sich das Problem auf die Bestimmung des Verhältnisses der Normierung der beiden Bulk-to-Boundary-Propagatoren H und K reduziert. Durch zwar teilweise langwierige, aber immer mathematisch einfache Rechnungen kann die gemeinsame Struktur dieser beiden Propagatoren bestimmt und schließlich ihre jeweilige Normierung berechnet werden.

Dieses Vorgehen sollte prinzipiell auch bei Tensorfeldern beliebiger Stufe funktionieren. Dies zu zeigen könnte das Ziel einer anschließenden Arbeit sein. Auch sollte der Fall antisymmetrischer Tensorfelder bzw. Spinor-Felder betrachtet werden. Weitere interessante Fragen stellen sich bzgl. des Faktors

$$c = 2\Delta_+ - d = \Delta_+ - \Delta_-.$$

Warum besitzt c genau diese vom Tensorrang unabhängige „universelle“ Form, und hat c eine größere Bedeutung für die AdS-CFT-Korrespondenz?

A. Riemannsche Geometrie auf dem AdS-Raum: Definitionen, Konventionen, Formeln

In diesem Kapitel sollen wichtige Definitionen und Relationen¹ aus der Riemannschen Geometrie aufgelistet werden, wobei jedoch keine Motivation und nähere Erläuterung der Begrifflichkeiten erfolgen wird. Der Zweck dieses Kapitels ist allein, die für die Arbeit nützlichen Formeln zusammenzufassen, wobei im Besonderen der Euklidische AdS-Raum betrachtet wird. Hierbei wird auf die in Abschnitt 1.2.2 eingeführten Koordinaten (z, x) zurückgegriffen. Identitäten, die den AdS-Raum voraussetzen, werden, falls Unklarheiten zu befürchten sind, durch das Symbol „ $\stackrel{\text{AdS}}{=}$ “ gekennzeichnet.

A.1. Das Christoffelsymbol

Def. A.1. Das *Christoffelsymbol* $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$ ist über

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} := \frac{g^{\kappa\lambda}}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \quad (\text{A.1})$$

definiert.

Für den AdS-Raum ergibt sich speziell:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} &= \frac{z^2 \delta^{\kappa\lambda}}{2} \left(-2z^{-3} \delta_{\mu z} \delta_{\nu\lambda} - 2z^{-3} \delta_{\nu z} \delta_{\mu\lambda} + 2z^{-3} \delta_{\lambda z} \delta_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(\delta_z^{\kappa} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu z} \delta_{\nu}^{\kappa} - \delta_{\nu z} \delta_{\mu}^{\kappa} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

¹Im allgemeinen werden hierbei die Beweise für die AdS-Spezialfälle aufgeführt, aber nicht für Zusammenhänge, die generell gelten.

Einige nützliche Eigenschaften:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \Gamma_{\nu\mu}^{\kappa} \quad (\text{A.3a})$$

$$\Gamma_{\kappa\nu}^{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\nu} \sqrt{g} \quad (\text{A.3b})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{AdS}}{=} z^{d+1} (-d-1) z^{-2-d} \delta_{\nu z} \\ &= -(d+1) \frac{1}{z} \delta_{\nu z} \end{aligned} \quad (\text{A.3c})$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} &= z^2 \delta^{\mu\nu} \frac{1}{z} (\delta_z^{\kappa} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu z} \delta_{\nu}^{\kappa} - \delta_{\nu z} \delta_{\mu}^{\kappa}) \\ &= z [\delta_z^{\kappa} (d+1) - \delta_z^{\kappa} - \delta_z^{\kappa}] \\ &= (d-1) z \delta_z^{\kappa} \end{aligned} \quad (\text{A.3d})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} &= -\frac{1}{z^2} \delta_{\lambda z} (\delta_z^{\kappa} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu z} \delta_{\nu}^{\kappa} - \delta_{\nu z} \delta_{\mu}^{\kappa}) \\ &= -\frac{1}{z} \delta_{\lambda z} \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \end{aligned} \quad (\text{A.3e})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu z}^{\kappa} &= \frac{1}{z} (\delta_z^{\kappa} \delta_{\mu z} - \delta_{\mu z} \delta_z^{\kappa} - \delta_{\mu}^{\kappa}) \\ &= -\frac{1}{z} \delta_{\mu}^{\kappa} \end{aligned} \quad (\text{A.3f})$$

A.2. Die kovariante Ableitung

Für die *kovariante Ableitung* D_{κ} gilt:

$$D_{\kappa} \phi = \partial_{\kappa} \phi \quad (\text{A.4a})$$

$$D_{\kappa} \phi_{\mu} = \partial_{\kappa} \phi_{\mu} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \phi_{\lambda} \quad (\text{A.4b})$$

$$D_{\kappa} \phi^{\mu} = \partial_{\kappa} \phi^{\mu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu} \phi^{\lambda} \quad (\text{A.4c})$$

$$D_{\kappa} \phi_{\mu\nu} = \partial_{\kappa} \phi_{\mu\nu} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \phi_{\lambda\nu} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \phi_{\mu\lambda} \quad (\text{A.4d})$$

$$D_{\kappa} \phi^{\mu\nu} = \partial_{\kappa} \phi^{\mu\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu} \phi^{\lambda\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\nu} \phi^{\mu\lambda} \quad (\text{A.4e})$$

$$D_{\kappa} \phi_{\mu}^{\nu} = \partial_{\kappa} \phi_{\mu}^{\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu} \phi_{\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \phi_{\mu}^{\lambda} \quad (\text{A.4f})$$

$$D_{\kappa} \phi_{\mu}^{\nu} = \partial_{\kappa} \phi_{\mu}^{\nu} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \phi_{\lambda}^{\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\nu} \phi_{\mu}^{\lambda} \quad (\text{A.4g})$$

$$\begin{aligned} D_\kappa \phi_{\mu\nu\rho} &= \partial_\kappa \phi_{\mu\nu\rho} - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \phi_{\lambda\nu\rho} - \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda \phi_{\mu\lambda\rho} - \Gamma_{\kappa\rho}^\lambda \phi_{\mu\nu\lambda} \\ \vdots &= \vdots \end{aligned} \quad (\text{A.4h})$$

Einige nützliche Eigenschaften:

$$D_\kappa g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.5a})$$

$$\sqrt{g} D_\kappa \phi^\kappa = \partial_\kappa (\sqrt{g} \phi^\kappa) \quad (\text{A.5b})$$

A.3. Der Differentialoperator $D_\kappa D^\kappa$ auf dem AdS-Raum

Wir werden in den folgenden drei Abschnitten $D_\kappa D^\kappa f$, $D_\kappa D^\kappa f_\mu$ sowie $D_\kappa D^\kappa f_{\mu\nu}$ in den (z, x) -Koordinaten ausdrücken. Die Ergebnisse werden für Kapitel 3 benötigt.

A.3.1. $D_\kappa D^\kappa$ angewendet auf einen Skalar

Es gilt mit (A.5b):

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa f &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\kappa (\sqrt{g} g^{\kappa\lambda} \partial_\lambda f) \\ &= z^{1+d} \partial_\kappa (z^{1-d} \delta^{\kappa\lambda} \partial_\lambda f) \\ &= z^{1+d} \partial_z z^{1-d} \partial_z f + z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 f \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.3.2. $D_\kappa D^\kappa$ angewendet auf einen Vektor

Es gilt:

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa f_\mu &= \\ &= g^{\kappa\sigma} D_\kappa D_\sigma f_\mu \\ &= g^{\kappa\sigma} [\partial_\kappa (D_\sigma f_\mu) - \Gamma_{\kappa\sigma}^\lambda D_\lambda f_\mu - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda D_\sigma f_\lambda] \\ &= g^{\kappa\sigma} [\partial_\kappa (\partial_\sigma f_\mu - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda f_\lambda) - \Gamma_{\kappa\sigma}^\lambda (\partial_\lambda f_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho f_\rho) - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda (\partial_\sigma f_\mu - \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho f_\rho)] \\ &= g^{\kappa\sigma} \partial_\kappa \partial_\sigma f_\mu - g^{\kappa\sigma} (\partial_\kappa \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda) f_\lambda - g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \partial_\kappa f_\lambda - g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^\lambda \partial_\lambda f_\mu + \\ &\quad + g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho f_\rho - g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \partial_\sigma f_\mu + g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho f_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^2 \sum_{\kappa} \partial_{\kappa}^2 f_{\mu} - \underbrace{g^{\kappa\sigma} (\partial_{\kappa} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}) f_{\lambda}}_{(i)} - 2 \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \partial_{\kappa} f_{\lambda}}_{(ii)} - \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} \partial_{\lambda} f_{\mu}}_{(iii)} + \\
&\quad + \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} f_{\rho}}_{(iv)} + \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} f_{\rho}}_{(v)}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Für die einzelnen Summanden bekommen wir folgende Ergebnisse:

- Zu (i): Wir rechnen, wobei wir im ersten Schritt (A.3e) und im letzten (A.3f) benutzen:

$$\begin{aligned}
g^{\kappa\sigma} (\partial_{\kappa} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}) f_{\lambda} &= -g^{\kappa\sigma} \frac{1}{z} \delta_{\kappa z} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} f_{\lambda} \\
&= -z \delta_z^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} f_{\lambda} \\
&= f_{\mu}
\end{aligned} \tag{A.8 i}$$

- Zu (ii): Hier setzen wir einfach den Ausdruck für das Christoffel-Symbol ein:

$$\begin{aligned}
g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \partial_{\kappa} f_{\lambda} &= z \delta^{\kappa\sigma} (\delta_z^{\lambda} \delta_{\sigma\mu} - \delta_{\mu z} \delta_{\sigma}^{\lambda} - \delta_{\sigma z} \delta_{\mu}^{\lambda}) \partial_{\kappa} f_{\lambda} \\
&= z (\delta_z^{\lambda} \delta_{\mu}^{\kappa} - \delta_{\mu z} \delta^{\kappa\lambda} - \delta_z^{\kappa} \delta_{\mu}^{\lambda}) \partial_{\kappa} f_{\lambda} \\
&= z \left(\partial_{\mu} f_z - \delta_{\mu z} \sum_{\kappa} \partial_{\kappa} f_{\kappa} - \partial_z f_{\mu} \right)
\end{aligned} \tag{A.8 ii}$$

- Zu (iii): Mit (A.3d) erhält man sofort:

$$g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} \partial_{\lambda} f_{\mu} = (d-1) z \partial_z f_{\mu} \tag{A.8 iii}$$

- Zu (iv): Hier verwenden wir Gleichung (A.3d) und Gleichung (A.3f):

$$\begin{aligned}
g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} f_{\rho} &= (d-1) z \delta_z^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} f_{\rho} \\
&= -(d-1) f_{\mu}
\end{aligned} \tag{A.8 iv}$$

- Zu (v): Wie bei (ii) berechnen wir hier direkt

$$\begin{aligned}
&g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} f_{\rho} = \\
&= (\delta_z^{\lambda} \delta_{\kappa\mu} - \delta_{\mu z} \delta_{\kappa}^{\lambda} - \delta_{\kappa z} \delta_{\mu}^{\lambda}) \delta^{\kappa\sigma} (\delta_z^{\rho} \delta_{\sigma\lambda} - \delta_{\lambda z} \delta_{\sigma}^{\rho} - \delta_{\sigma z} \delta_{\lambda}^{\rho}) f_{\rho} \\
&= (\delta_z^{\lambda} \delta_{\mu}^{\sigma} - \delta_{\mu z} \delta^{\lambda\sigma} - \delta_z^{\sigma} \delta_{\mu}^{\lambda}) (\delta_{\sigma\lambda} f_z - \delta_{\lambda z} f_{\sigma} - \delta_{\sigma z} f_{\lambda}) \\
&= \delta_{\mu z} f_z - f_{\mu} - \delta_{\mu z} f_z - \delta_{\mu z} (d+1) f_z + \delta_{\mu z} f_z + \delta_{\mu z} f_z - \delta_{\mu z} f_z + \delta_{\mu z} f_z + f_{\mu}
\end{aligned}$$

$$= -(d-1)\delta_{\mu z}f_z. \quad (\text{A.8 v})$$

Wir erhalten also insgesamt:

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa f_\mu &= \\ &= z^2 \sum_\kappa \partial_\kappa^2 f_\mu - f_\mu - 2z \left(\partial_\mu f_z - \delta_{\mu z} \sum_\kappa \partial_\kappa f_\kappa - \partial_z f_\mu \right) - \\ &\quad - (d-1)z \partial_z f_\mu - (d-1)f_\mu - (d-1)\delta_{\mu z} f_z \\ &= (3-d)z \partial_z f_\mu + z^2 \sum_\kappa \partial_\kappa^2 f_\mu - 2z \partial_\mu f_z + 2z \delta_{\mu z} \sum_\kappa \partial_\kappa f_\kappa - \\ &\quad - df_\mu - (d-1)\delta_{\mu z} f_z \\ &= z^{d-1} \partial_z z^{3-d} \partial_z f_\mu + z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 f_\mu - 2z \partial_\mu f_z + 2z \delta_{\mu z} \sum_\kappa \partial_\kappa f_\kappa - \\ &\quad - df_\mu - (d-1)\delta_{\mu z} f_z \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.3.3. $D_\kappa D^\kappa$ angewendet auf einen Tensor

Es gilt:

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa f_{\mu\nu} &= \\ &= g^{\kappa\sigma} D_\kappa D_\sigma f_{\mu\nu} \\ &= g^{\kappa\sigma} [\partial_\kappa (D_\sigma f_{\mu\nu}) - \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda D_\lambda f_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda D_\sigma f_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda D_\sigma f_{\mu\lambda}] \\ &= g^{\kappa\sigma} [\partial_\kappa (\partial_\sigma f_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda f_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda f_{\mu\lambda}) - \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda (\partial_\lambda f_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho f_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho f_{\mu\rho}) - \\ &\quad - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda (\partial_\sigma f_{\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho f_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho f_{\lambda\rho}) - \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda (\partial_\sigma f_{\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho f_{\rho\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho f_{\mu\rho})] \\ &= g^{\kappa\sigma} \partial_\kappa \partial_\sigma f_{\mu\nu} - \\ &\quad - g^{\kappa\sigma} (\partial_\kappa \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) f_{\lambda\nu} - g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \partial_\kappa f_{\lambda\nu} - g^{\kappa\sigma} (\partial_\kappa \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) f_{\mu\lambda} - g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \partial_\kappa f_{\mu\lambda} - \\ &\quad - g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \partial_\lambda f_{\mu\nu} + g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda (\Gamma_{\mu\lambda}^\rho f_{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho f_{\mu\rho}) - \\ &\quad - g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \partial_\sigma f_{\lambda\nu} + g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda (\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho f_{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho f_{\lambda\rho}) - \\ &\quad - g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda \partial_\sigma f_{\mu\lambda} + g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda (\Gamma_{\mu\sigma}^\rho f_{\rho\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho f_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^2 \sum_{\kappa} \partial_{\kappa}^2 f_{\mu\nu} - \\
&\quad - \underbrace{g^{\kappa\sigma} (\partial_{\kappa} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}) f_{\lambda\nu}}_{(i)} - 2 \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \partial_{\kappa} f_{\lambda\nu}}_{(ii)} - \underbrace{g^{\kappa\sigma} (\partial_{\kappa} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}) f_{\mu\lambda}}_{(iii)} - 2 \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \partial_{\kappa} f_{\mu\lambda}}_{(iv)} - \\
&\quad - \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} \partial_{\lambda} f_{\mu\nu}}_{(v)} + \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} f_{\rho\nu}}_{(vi)} + \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} f_{\mu\rho}}_{(vii)} + \\
&\quad + \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} f_{\rho\nu}}_{(viii)} + \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} f_{\lambda\rho}}_{(ix)} + \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} f_{\rho\lambda}}_{(x)} + \underbrace{g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} f_{\mu\rho}}_{(xi)}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Wie im vektoriellen Fall berechnen wir nun die Summanden einzeln. Ein Teil der Ergebnisse ergibt sich analog zu den dortigen Resultaten.

- Zu (i) Das Ergebnis erhält man aus (A.8 i) vom vektoriellen Fall:

$$g^{\kappa\sigma} (\partial_{\kappa} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}) f_{\lambda\nu} = f_{\mu\nu} \tag{A.11 i}$$

- Zu (ii): Auch hier können wir auf den vektoriellen Fall, nämlich (A.8 ii), zurückgreifen:

$$g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \partial_{\kappa} f_{\lambda\nu} = z \left(\partial_{\mu} f_{z\nu} - \delta_{\mu z} \sum_{\kappa} \partial_{\kappa} f_{\kappa\nu} - \partial_z f_{\mu\nu} \right) \tag{A.11 ii}$$

- Zu (iii): Analog zu (A.11 i) ergibt sich aus (A.8 i):

$$g^{\kappa\sigma} (\partial_{\kappa} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}) f_{\mu\lambda} = f_{\mu\nu} \tag{A.11 iii}$$

- Zu (iv): Wie für (A.11 ii) aus (A.8 ii):

$$g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \partial_{\kappa} f_{\mu\lambda} = z \left(\partial_{\nu} f_{\mu z} - \delta_{\nu z} \sum_{\kappa} \partial_{\kappa} f_{\mu\kappa} - \partial_z f_{\mu\nu} \right) \tag{A.11 iv}$$

- Zu (v): Das Ergebnis ergibt sich sofort aus (A.3d):

$$g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} \partial_{\lambda} f_{\mu\nu} = (d-1) z \partial_z f_{\mu\nu} \tag{A.11 v}$$

- Zu (vi): Mit (A.8 iv) vom vektoriellen Fall bekommen wir:

$$g^{\kappa\sigma} \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} f_{\rho\nu} = -(d-1) f_{\mu\nu} \tag{A.11 vi}$$

- Zu (vii): Analog zu (A.11 vi) aus (A.8 iv):

$$g^{\kappa\sigma}\Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda\Gamma_{\nu\lambda}^\rho f_{\mu\rho} = -(d-1)f_{\mu\nu} \quad (\text{A.11 vii})$$

- Zu (viii): Dieser Summand entspricht (A.8 v) vom vektoriellen Fall:

$$g^{\kappa\sigma}\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho f_{\rho\nu} = -(d-1)\delta_{\mu z}f_{z\nu} \quad (\text{A.11 viii})$$

- Zu (ix): Wir berechnen das Ergebnis direkt durch Einsetzen des Ausdrucks für das Christoffel-Symbol:

$$\begin{aligned} g^{\kappa\sigma}\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho f_{\lambda\rho} &= \delta^{\kappa\sigma}(\delta_z^\lambda\delta_{\mu\kappa} - \delta_{\mu z}\delta_\kappa^\lambda - \delta_{\kappa z}\delta_\mu^\lambda)(\delta_z^\rho\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu z}\delta_\sigma^\rho - \delta_{\sigma z}\delta_\nu^\rho)f_{\lambda\rho} \\ &= (\delta_z^\lambda\delta_\mu^\sigma - \delta_{\mu z}\delta^{\lambda\sigma} - \delta_z^\sigma\delta_\mu^\lambda)(\delta_{\nu\sigma}f_{\lambda z} - \delta_{\nu z}f_{\lambda\sigma} - \delta_{\sigma z}f_{\lambda\nu}) \\ &= \delta_{\nu\mu}f_{zz} - \delta_{\nu z}f_{z\mu} - \delta_{\mu z}f_{z\nu} - \\ &\quad - \delta_{\mu z}f_{\nu z} + \frac{1}{z^2}\delta_{\mu z}\delta_{\nu z}f_\lambda^\lambda + \delta_{\mu z}f_{z\nu} - \\ &\quad - \delta_{\nu z}f_{\mu z} + \delta_{\nu z}f_{\mu z} + f_{\mu\nu} \\ &= \delta_{\mu\nu}f_{zz} - \delta_{\nu z}f_{z\mu} - \delta_{\mu z}f_{\nu z} + \frac{1}{z^2}\delta_{\mu z}\delta_{\nu z}f_\lambda^\lambda + f_{\mu\nu} \quad (\text{A.11 ix}) \end{aligned}$$

- Zu (x): Die Rechnung verläuft analog zu (A.11 ix). Wir erhalten:

$$g^{\kappa\sigma}\Gamma_{\nu\kappa}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho f_{\rho\lambda} = \delta_{\mu\nu}f_{zz} - \delta_{\nu z}f_{z\mu} - \delta_{\mu z}f_{\nu z} + \frac{1}{z^2}\delta_{\mu z}\delta_{\nu z}f_\lambda^\lambda + f_{\mu\nu} \quad (\text{A.11 x})$$

- Zu (xi): Wie für (A.11 viii) aus (A.8 v):

$$g^{\kappa\sigma}\Gamma_{\nu\kappa}^\lambda\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho f_{\mu\rho} = -(d-1)\delta_{\nu z}f_{\mu z} \quad (\text{A.11 xi})$$

Insgesamt bekommt man mit diesen Ergebnissen:

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa f_{\mu\nu} &= \\ &= z^2 \sum_\kappa \partial_\kappa^2 f_{\mu\nu} - 2f_{\mu\nu} - \\ &\quad - 2z \left(\partial_\mu f_{z\nu} - \delta_{\mu z} \sum_\kappa \partial_\kappa f_{\kappa\nu} - \partial_z f_{\mu\nu} \right) - 2z \left(\partial_\nu f_{\mu z} - \delta_{\nu z} \sum_\kappa \partial_\kappa f_{\mu\kappa} - \partial_z f_{\mu\nu} \right) - \\ &\quad - (d-1)z \partial_z f_{\mu\nu} - 2(d-1)f_{\mu\nu} - (d-1)\delta_{\mu z}f_{z\nu} - (d-1)\delta_{\nu z}f_{\mu z} + \\ &\quad + 2(\delta_{\mu\nu}f_{zz} - \delta_{\nu z}f_{z\mu} - \delta_{\mu z}f_{\nu z} + \frac{1}{z^2}\delta_{\mu z}\delta_{\nu z}f_\lambda^\lambda + f_{\mu\nu}) \\ &= (5-d)z \partial_z f_{\mu\nu} + z^2 \sum_\kappa \partial_\kappa^2 f_{\mu\nu} - 2(d-1)f_{\mu\nu} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2z(\partial_\mu f_{z\nu} + \partial_\nu f_{\mu z}) + 2z\left(\delta_{\mu z} \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_{\kappa\nu} + \delta_{\nu z} \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_{\mu\kappa}\right) - \\
& - (d-1)\delta_{\mu z} f_{z\nu} - (d-1)\delta_{\nu z} f_{\mu z} + \\
& + 2\delta_{\mu\nu} f_{zz} - 2\delta_{\nu z} f_{z\mu} - 2\delta_{\mu z} f_{\nu z} + \frac{2}{z^2} \delta_{\mu z} \delta_{\nu z} f_\lambda^\lambda \\
= & z^{d-3} \partial_z z^{5-d} \partial_z f_{\mu\nu} + z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 f_{\mu\nu} - 2(d-1) f_{\mu\nu} - \\
& -2z(\partial_\mu f_{z\nu} + \partial_\nu f_{\mu z}) + 2z\left(\delta_{\mu z} \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_{\kappa\nu} + \delta_{\nu z} \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_{\mu\kappa}\right) - \\
& - (d-1)\delta_{\mu z} f_{z\nu} - 2\delta_{\mu z} f_{\nu z} - (d-1)\delta_{\nu z} f_{\mu z} - 2\delta_{\nu z} f_{z\mu} + \\
& + \frac{2}{z^2} \delta_{\mu z} \delta_{\nu z} f_\lambda^\lambda + 2\delta_{\mu\nu} f_{zz}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Für den Spezialfall eines symmetrischen Tensors, also für $f_{\mu\nu} = f_{\nu\mu}$ gilt also:

$$\begin{aligned}
D_\kappa D^\kappa f_{\mu\nu} = & \\
= & z^{d-3} \partial_z z^{5-d} \partial_z f_{\mu\nu} + z^2 \sum_{i=0}^{d-1} \partial_i^2 f_{\mu\nu} - \\
& -2z(\partial_\mu f_{\nu z} + \partial_\nu f_{\mu z}) + 2z\left(\delta_{\mu z} \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_{\kappa\nu} + \delta_{\nu z} \sum_{\kappa} \partial_\kappa f_{\kappa\mu}\right) - \\
& -2(d-1) f_{\mu\nu} - (d+1)(\delta_{\mu z} f_{\nu z} + \delta_{\nu z} f_{\mu z}) + \\
& + \frac{2}{z^2} \delta_{\mu z} \delta_{\nu z} f_\lambda^\lambda + 2\delta_{\mu\nu} f_{zz}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

A.4. Der Krümmungstensor

Def. A.2. Der durch die Kommutatorrelation

$$[D_\mu, D_\nu] \phi_\kappa =: R^\lambda{}_{\kappa\nu\mu} \phi_\lambda. \tag{A.14}$$

definierte Tensor $R^\lambda{}_{\kappa\nu\mu}$ wird als *Riemannscher Krümmungstensor* bezeichnet.

Ausrechnen des Kommutators ergibt, daß der Krümmungstensor die Form

$$R^\rho{}_{\kappa\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\kappa\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\kappa\mu}^\rho + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \tag{A.15}$$

hat. Offensichtlich besitzt er einige schöne Symmetrie-Eigenschaften:

$$R_{\rho\kappa\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\kappa} \tag{A.16a}$$

$$R_{\rho\kappa\mu\nu} = -R_{\kappa\rho\mu\nu} = R_{\kappa\rho\nu\mu} = -R_{\rho\kappa\nu\mu} \quad (\text{A.16b})$$

$$R_{\rho\kappa\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\kappa} + R_{\rho\nu\kappa\mu} = 0 \quad (\text{A.16c})$$

Wir geben nun noch eine zu (A.14) analoge Relation für Tensoren beliebiger Stufe an:

Satz A.1. *Es sei $\phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n}$ ein Tensor der Stufe $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$[D_\mu, D_\nu] \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} = \sum_{i=1}^n R^{\rho}_{\kappa_i \nu \mu} \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_{i-1} \rho \kappa_{i+1} \dots \kappa_n} \quad (\text{A.17})$$

Beweis. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion:

- Für $n = 1$ ist die Behauptung nach Definition des Krümmungstensors offenbar richtig.
- Die Behauptung gelte nun für ein beliebiges n . Mit einem Vektor $\tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}}$ ergibt sich dann aus

$$\begin{aligned} D_\nu D_\mu (\phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}}) &= D_\nu D_\mu \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \cdot \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} + D_\mu \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \cdot D_\nu \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} + \\ &+ D_\nu \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \cdot D_\mu \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} + \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} D_\nu D_\mu \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.18a})$$

bzw.

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu (\phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}}) &= D_\mu D_\nu \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \cdot \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} + D_\nu \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \cdot D_\mu \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} + \\ &+ D_\mu \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \cdot D_\nu \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} + \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} D_\mu D_\nu \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.18b})$$

mit Hilfe der Kommutatorrelationen für Vektoren und Tensoren n -ter Stufe die Gleichung

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] (\phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}}) &= \\ &= [D_\mu, D_\nu] \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \cdot \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} + \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} [D_\mu, D_\nu] \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} \\ &= \sum_{i=1}^n R^{\rho}_{\kappa_i \nu \mu} \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_{i-1} \rho \kappa_{i+1} \dots \kappa_n} \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}} + R^{\rho}_{\kappa_{n+1} \nu \mu} \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \tilde{\phi}_{\rho} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} R^{\rho}_{\kappa_i \nu \mu} \phi_{\kappa_1 \dots \kappa_{i-1} \rho \kappa_{i+1} \dots \kappa_n} \tilde{\phi}_{\kappa_{n+1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Damit wurde die Relation (A.17) für Tensoren $n + 1$ -ter Stufe und somit auch für alle n bewiesen. \square

Insbesondere gilt also für Tensoren zweiter bzw. dritter Stufe:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi_{\kappa\lambda} = R^\rho{}_{\kappa\nu\mu}\phi_{\rho\lambda} + R^\rho{}_{\lambda\nu\mu}\phi_{\kappa\rho} \quad (\text{A.20a})$$

$$[D_\mu, D_\nu]\phi_{\kappa\lambda\gamma} = R^\rho{}_{\kappa\nu\mu}\phi_{\rho\lambda\gamma} + R^\rho{}_{\lambda\nu\mu}\phi_{\kappa\rho\gamma} + R^\rho{}_{\gamma\nu\mu}\phi_{\kappa\lambda\rho} \quad (\text{A.20b})$$

Der Krümmungstensor ist der Ausgangspunkt für weitere wichtige Begriffsdefinitionen:

Def. A.3. Der *Ricci-Tensor* ist durch

$$R_{\kappa\nu} := R^\mu{}_{\kappa\mu\nu} \quad (\text{A.21})$$

definiert, und der *Krümmungsskalar* durch

$$R := R^\nu{}_\nu. \quad (\text{A.22})$$

Wir werden nun für den AdS-Raum die gerade definierten Größen bestimmen:

Satz A.2. Für den AdS-Raum gelten für den Krümmungstensor $R^\rho{}_{\kappa\mu\nu}$, den Ricci-Tensor $R_{\kappa\nu}$ und den Krümmungsskalar R folgende Relationen:

$$R^\rho{}_{\kappa\mu\nu} = g_{\kappa\mu}\delta_\nu^\rho - g_{\kappa\nu}\delta_\mu^\rho \quad (\text{A.23a})$$

$$R_{\kappa\nu} = -dg_{\kappa\nu} \quad (\text{A.23b})$$

$$R = -d(d+1) \quad (\text{A.23c})$$

Beweis. • Das Resultat für den Krümmungstensor ergibt sich mit Hilfe von Formel (A.15), wenn man Gleichung (A.2) für das Christoffelsymbol benutzt. Da das Ergebnis nicht neu und die Rechnung zwar recht lang, aber einfach ist, soll auf eine Wiedergabe hier verzichtet werden.

• Der Ricci-Tensor und damit der Krümmungsskalar lassen sich leicht aus dem Ausdruck für den Krümmungstensor berechnen:

$$R_{\kappa\nu} = g_{\kappa\mu}\delta_\nu^\mu - g_{\kappa\nu}\delta_\mu^\mu = g_{\kappa\nu} - g_{\kappa\nu}(d+1) = -dg_{\kappa\nu} \checkmark$$

□

Im folgenden sollen nun noch ein paar nützliche Kommutatorrelationen bewiesen werden:

Satz A.3. *Es gilt*

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = 0. \quad (\text{A.24})$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich sofort aus der Definition der kovarianten Ableitung:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\phi &= D_\mu \partial_\nu \phi - D_\nu \partial_\mu \phi \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi - \partial_\nu \partial_\mu \phi + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \phi \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

Satz A.4. *Es gilt*

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Beweis. Hier brauchen wir nur bei Gleichung (A.20a) die entsprechenden Kontraktionen durchzuführen:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\phi^{\mu\nu} &= R^{\rho\mu}{}_{\nu\mu} \phi_\rho{}^\nu + R^{\rho\nu}{}_{\nu\mu} \phi^\mu{}_\rho \\ &= R^{\rho\mu}{}_{\nu\mu} \phi_\rho{}^\nu + R^{\nu\mu}{}_{\mu\rho} \phi^\rho{}_\nu \\ &= (R^{\rho\mu}{}_{\nu\mu} + R_{\nu\mu}{}^{\mu\rho}) \phi_\rho{}^\nu \\ &= (R^{\rho\mu}{}_{\nu\mu} - R^{\rho\mu}{}_{\nu\mu}) \phi_\rho{}^\nu \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

Diese Relation folgert auch aus dem zweiten Teil des folgenden Satzes:

Satz A.5. *Es gilt*

1. *allgemein*

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^\mu = R_{\lambda\nu} \phi^\lambda \quad (\text{A.26})$$

und im AdS-Raum:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^\mu = -d\phi_\nu \quad (\text{A.27})$$

2. allgemein

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^\mu{}_\kappa = R_{\rho\nu}\phi^\rho{}_\kappa + R^\rho{}_{\kappa\nu\mu}\phi^\mu{}_\rho \quad (\text{A.28})$$

und im AdS-Raum:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^\mu{}_\kappa = -(d+1)\phi_{\nu\kappa} + g_{\nu\kappa}\phi_\mu{}^\mu \quad (\text{A.29})$$

Beweis. Zu 1: Es ergibt sich sofort aus der Definition des Krümmungstensors:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^\mu = R^\mu{}_{\lambda\mu\nu}\phi^\lambda = R_{\lambda\nu}\phi^\lambda \stackrel{\text{AdS}}{=} -d\phi_\nu \quad \checkmark$$

Zu 2: Auch hier kommt man durch direktes Nachrechnen schnell zum gewünschten Ergebnis, wobei wir (A.20a) als Ausgangspunkt nehmen:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\phi^\mu{}_\kappa &= R^\mu{}_{\rho\mu\nu}\phi^\rho{}_\kappa + R^\rho{}_{\kappa\nu\mu}\phi^\mu{}_\rho \\ &= R_{\rho\nu}\phi^\rho{}_\kappa + R^\rho{}_{\kappa\nu\mu}\phi^\mu{}_\rho \\ &\stackrel{\text{AdS}}{=} -dg_{\rho\nu}\phi^\rho{}_\kappa + (g_{\kappa\nu}\delta_\mu^\rho - g_{\mu\kappa}\delta_\nu^\rho)\phi^\mu{}_\rho \\ &= -d\phi_{\nu\kappa} + g_{\kappa\nu}\phi_\mu{}^\mu - \phi_{\kappa\nu} \\ &= -(d+1)\phi_{\nu\kappa} + g_{\nu\kappa}\phi_\mu{}^\mu \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

Satz A.6. *Es gilt allgemein*

$$[D_\mu D^\mu, D_\nu]\phi = R_{\lambda\nu}D^\lambda\phi \quad (\text{A.30})$$

und im AdS-Raum:

$$[D_\mu D^\mu, D_\nu]\phi = -dD_\nu\phi \quad (\text{A.31})$$

Beweis. Wir nutzen die in diesem Abschnitt schon gezeigten Relationen (A.24) und (A.26) aus:

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu D_\nu\phi &= D_\mu D_\nu D^\mu\phi \\ &= D_\nu D_\mu D^\mu\phi + R_{\lambda\nu}D^\lambda\phi \\ &\stackrel{\text{AdS}}{=} D_\nu D_\mu D^\mu\phi - dD_\nu\phi \end{aligned}$$

□

Satz A.7. *Es gilt allgemein*

$$[D_\kappa D^\kappa, D_\mu] \phi_\nu = R^\rho{}_\mu D_\rho \phi_\nu + R^\rho{}_{\nu\mu\kappa} D^\kappa \phi_\rho + D^\kappa (R^\lambda{}_{\nu\mu\kappa} \phi_\lambda) \quad (\text{A.32})$$

und im AdS-Raum:

$$[D_\kappa D^\kappa, D_\mu] \phi_\nu = -d D_\mu \phi_\nu - 2 D_\nu \phi_\mu + 2 g_{\mu\nu} D_\kappa \phi^\kappa \quad (\text{A.33})$$

Beweis. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa D_\mu \phi_\nu &= D_\kappa D_\mu D^\kappa \phi_\nu + D^\kappa (R^\lambda{}_{\nu\mu\kappa} \phi_\lambda) \\ &= D_\mu D_\kappa D^\kappa \phi_\nu + R^\rho{}_\mu D_\rho \phi_\nu + R^\rho{}_{\nu\mu\kappa} D^\kappa \phi_\rho + D^\kappa (R^\lambda{}_{\nu\mu\kappa} \phi_\lambda) \\ &\stackrel{\text{AdS}}{=} D_\mu D_\kappa D^\kappa \phi_\nu - d \delta_\mu^\rho D_\rho \phi_\nu + 2 (g_{\nu\mu} \delta_\kappa^\lambda - g_{\nu\kappa} \delta_\mu^\lambda) \phi_\lambda \\ &= D_\mu D_\kappa D^\kappa \phi_\nu - d D_\mu \phi_\nu - 2 D_\nu \phi_\mu + 2 g_{\mu\nu} D_\kappa \phi^\kappa \end{aligned}$$

□

Satz A.8. *Im AdS-Raum gilt:*

$$[D_\kappa D^\kappa, D_\mu D_\nu] \phi = -2(d+1) D_\mu D_\nu \phi + 2 g_{\mu\nu} D_\kappa D^\kappa \phi \quad (\text{A.34})$$

Beweis. Mit Hilfe von (A.33) und (A.31) berechnen wir sofort das Ergebnis:

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa D_\mu D_\nu \phi &= D_\mu D_\kappa D^\kappa D_\nu \phi - (d+2) D_\mu D_\nu \phi + 2 g_{\mu\nu} D_\kappa D^\kappa \phi \\ &= D_\mu D_\nu D_\kappa D^\kappa \phi - 2(d+1) D_\mu D_\nu \phi + 2 g_{\mu\nu} D_\kappa D^\kappa \phi \end{aligned}$$

□

Aus Satz A.7 ergibt sich außerdem sofort das folgende

Korollar A.9. *Es gilt allgemein*

$$[D_\mu D^\mu, D_\nu] \phi^\nu = -D_\mu (R_\lambda{}^\mu \phi^\lambda) \quad (\text{A.35})$$

und im AdS-Raum:

$$[D_\mu D^\mu, D_\nu] \phi^\nu = d D_\lambda \phi^\lambda \quad (\text{A.36})$$

Hieraus wiederum erhält man

Korollar A.10. *Auf dem AdS-Raum ist für divergenzfreie ϕ_μ auch $D_\kappa D^\kappa \phi_\mu$ divergenzfrei, d. h.*

$$D_\mu \phi^\mu = 0 \implies D_\mu D_\kappa D^\kappa \phi^\mu = 0. \quad (\text{A.37})$$

Weiterhin bekommt man für Tensoren dritter Stufe:

Satz A.11. *Es gilt allgemein*

$$[D_\mu, D_\nu] \phi^{\mu\nu}{}_\kappa = R^\rho{}_\mu (\phi_\rho{}^\mu{}_\kappa - \phi^\mu{}_{\rho\kappa}) + R^\rho{}_{\kappa\nu\mu} \phi^{\mu\nu}{}_\rho \quad (\text{A.38})$$

und im AdS-Raum:

$$[D_\mu, D_\nu] \phi^{\mu\nu}{}_\kappa = \phi^\mu{}_{\kappa\mu} - \phi_\kappa{}^\mu{}_\mu \quad (\text{A.39})$$

Beweis. Wir gehen von Gleichung (A.20b) aus und rechnen:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \phi^{\mu\nu}{}_\kappa &= R^{\rho\mu}{}_{\nu\mu} \phi_\rho{}^\nu{}_\kappa + R^{\rho\nu}{}_{\nu\mu} \phi^\mu{}_{\rho\kappa} + R^\rho{}_{\kappa\nu\mu} \phi^{\mu\nu}{}_\rho \\ &= R^\rho{}_{\nu\mu} \phi_\rho{}^\nu{}_\kappa - R^\rho{}_{\mu\nu} \phi^\mu{}_{\rho\kappa} + R^\rho{}_{\kappa\nu\mu} \phi^{\mu\nu}{}_\rho \\ &\stackrel{\text{AdS}}{=} -d\delta_\nu^\rho \phi_\rho{}^\nu{}_\kappa + d\delta_\mu^\rho \phi^\mu{}_{\rho\kappa} + (g_{\kappa\nu} \delta_\mu^\rho - g_{\kappa\mu} \delta_\nu^\rho) \phi^{\mu\nu}{}_\rho \\ &= \phi^\mu{}_{\kappa\mu} - \phi_\kappa{}^\mu{}_\mu \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

Daraus ergibt sich

Satz A.12. *Im AdS-Raum gilt:*

$$[D_\kappa D^\kappa, D_\mu] \phi^\mu{}_\nu = D_\kappa \phi_\nu{}^\kappa + (d+1) D_\kappa \phi^\kappa{}_\nu - 2D_\nu \phi_\kappa{}^\kappa \quad (\text{A.40})$$

Beweis. Wir benutzen zuerst Gleichung (A.29) und dann (A.39):

$$\begin{aligned} D_\kappa D^\kappa D_\mu \phi^\mu{}_\nu &= D_\kappa D_\mu D^\kappa \phi^\mu{}_\nu + (d+1) D_\kappa \phi^\kappa{}_\nu - D_\nu \phi_\kappa{}^\kappa \\ &= D_\mu D_\kappa D^\kappa \phi^\mu{}_\nu + D_\kappa \phi_\nu{}^\kappa + (d+1) D_\kappa \phi^\kappa{}_\nu - 2D_\nu \phi_\kappa{}^\kappa \end{aligned}$$

□

Die gerade bewiesenen Kommutatorrelationen seien der Übersicht halber nun noch einmal für den AdS-Raum aufgelistet:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = 0 \quad (\text{A.41a})$$

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.41b})$$

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^\mu = -d\phi_\nu \quad (\text{A.41c})$$

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^\mu{}_\kappa = -(d+1)\phi_{\nu\kappa} + g_{\nu\kappa}\phi_\mu{}^\mu \quad (\text{A.41d})$$

$$[D_\mu D^\mu, D_\nu]\phi = -d D_\nu\phi \quad (\text{A.41e})$$

$$[D_\kappa D^\kappa, D_\mu]\phi_\nu = -d D_\mu\phi_\nu - 2D_\nu\phi_\mu + 2g_{\mu\nu}D_\kappa\phi^\kappa \quad (\text{A.41f})$$

$$[D_\mu D^\mu, D_\nu]\phi^\nu = d D_\lambda\phi^\lambda \quad (\text{A.41g})$$

$$[D_\kappa D^\kappa, D_\mu D_\nu]\phi = -2(d+1)D_\mu D_\nu\phi + 2g_{\mu\nu}D_\kappa D^\kappa\phi \quad (\text{A.41h})$$

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^{\mu\nu}{}_\kappa = \phi^\mu{}_{\kappa\mu} - \phi^\mu{}_\mu{}_\kappa \quad (\text{A.41i})$$

$$[D_\kappa D^\kappa, D_\mu]\phi^\mu{}_\nu = D_\kappa\phi_\nu{}^\kappa + (d+1)D_\kappa\phi^\kappa{}_\nu - 2D_\nu\phi_\kappa{}^\kappa \quad (\text{A.41j})$$

B. Berechnung der Integrale . . .

B.1. . . für Abschnitt 3.2

B.1.1. Vektorieller Fall

Wir werden in diesem Abschnitt das Integral

$$\int dz d^d x z^{\Delta-d} H_{\mu j}^{\mu}(z, x; x') \Delta \tilde{f}_{\mu}(x - x')$$

berechnen. Hierzu formen wir zuerst $H_{\mu j}$ mit Hilfe der in Kapitel 3.1.1 definierten Abkürzungen v und w_{μ} um. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} H_{\mu j}(z, x; x') &= \gamma v^{-\Delta} \partial_{\mu} w_j + \gamma_2 v^{-\Delta-1} w_j w_{\mu} \\ &= \gamma [v^{-\Delta} \frac{1}{z} (\delta_{\mu j} - w_j \delta_{\mu z}) - v^{-\Delta-1} w_j w_{\mu}] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

und somit gilt:

$$\begin{aligned} &\int dz d^d x z^{\Delta-d} H_{\mu j}^{\mu}(z, x; x') \Delta \tilde{f}_{\mu}(x - x') = \\ &= \sum_{\mu} \int dz d^d x z^{\Delta+2-d} \gamma [v^{-\Delta} \frac{1}{z} (\delta_{\mu j} - w_j \delta_{\mu z}) - v^{-\Delta-1} w_j w_{\mu}] \Delta \tilde{f}_{\mu}(x - x') \\ &= \gamma \int dz d^d x z^{\Delta+1-d} v^{-\Delta} \Delta \tilde{f}_j(x - x') - \\ &\quad - \gamma \sum_{\mu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{\Delta+2-d} w_j w_{\mu} v^{-\Delta-1} \Delta \tilde{f}_{\mu}(x - x') \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Zur Umformung haben wir hierbei ausgenutzt, dass $\tilde{f}_z = 0$ ist. Aus diesem Grund reicht es auch, bei der Summation μ die Werte 0 bis $d-1$ annehmen zu lassen. Da nun kein $x_z = z$ mehr auftreten kann, wird uns dies erlauben (analog zum skalaren Fall) das Integral in ein Integral für z und ein Integral für die x_i aufzuspalten.

Um die Rechnungen übersichtlicher zu halten, werden wir im folgenden $x - x'$ durch x ersetzt. Der erste Summand wurde bereits im skalaren Fall berechnet; siehe Gleichung (3.60). Wir brauchen also nur noch den zweiten Teil des Termes zu betrachten:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{\Delta+2-d} w_j w_\mu v^{-\Delta-1} \Delta \tilde{f}_\mu(x - x') = \\ & = 2^{\Delta+1} \sum_{\mu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{\Delta-d} x_j x_\mu \left(\frac{z}{z^2 + x^2} \right)^{\Delta+1} \Delta \tilde{f}_\mu(x) = (*) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Mit derselben Substitution wie im Skalaren, also $\tilde{z} := \frac{z^2}{x^2}$, und damit

$$z^{\Delta-d} dz = \frac{1}{2} \tilde{z}^{\frac{1}{2}(\Delta-1-d)} |x|^{\Delta+1-d} d\tilde{z}, \quad \frac{z}{z^2 + x^2} = |x|^{-1} \frac{\tilde{z}^{\frac{1}{2}}}{\tilde{z} + 1}, \quad (\text{B.4})$$

erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} (*) & = 2^{\Delta+1} \gamma \sum_{\mu=0}^{d-1} \int d\tilde{z} d^d x \frac{1}{2} \tilde{z}^{\frac{1}{2}(\Delta-1-d)} |x|^{\Delta+1-d} x_j x_\mu \times \\ & \quad \times |x|^{-\Delta-1} \left(\frac{\tilde{z}^{\frac{1}{2}}}{\tilde{z} + 1} \right)^{\Delta+1} \Delta \tilde{f}_\mu(x) \\ & = 2^\Delta \gamma \int_0^{+\infty} d\tilde{z} \frac{\tilde{z}^{\Delta-\frac{d}{2}}}{(\tilde{z} + 1)^{\Delta+1}} \cdot \sum_{\mu=0}^{d-1} \int d^d x x_j x_\mu |x|^{-d} \Delta \tilde{f}_\mu(x) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Der erste Faktor ergibt sich mit Hilfe von Formel (C.5):

$$2^\Delta \int_0^{+\infty} d\tilde{z} \frac{\tilde{z}^{\Delta-\frac{d}{2}}}{(\tilde{z} + 1)^{\Delta+1}} = 2^\Delta \frac{\Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta + 1)} \quad (\text{B.6})$$

Nun müssen wir nur noch den zweiten Faktor berechnen. Mit

$$\Delta(x_\mu \tilde{f}_\mu) = 2\partial_\mu \tilde{f}_\mu + x_\mu \Delta \tilde{f}_\mu \quad (\text{B.7})$$

erhält man für diesen:

$$\sum_{\mu=0}^{d-1} \int d^d x x_j x_\mu |x|^{-d} \Delta \tilde{f}_\mu(x) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{d-1} \int d^d x x_j |x|^{-d} \{ \Delta [x_\mu \tilde{f}_\mu(x)] - 2\partial_\mu \tilde{f}_\mu(x) \} = (**)$$
 (B.8)

Auf Grund der Divergenzfreiheit der Testfunktionen fällt der zweite Summand weg, und man bekommt mit

$$\partial_j |x|^{2-d} = (2-d)x_j |x|^{-d}$$
 (B.9)

und partieller Integration:

$$\begin{aligned} (**) &= \frac{1}{2-d} \sum_{\mu=0}^{d-1} \int d^d x \partial_j |x|^{2-d} \Delta [x_\mu \tilde{f}_\mu(x)] \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} -\frac{1}{2-d} \sum_{\mu=0}^{d-1} \int d^d x |x|^{2-d} \Delta \underbrace{[\tilde{f}_\mu(x) \delta_{j\mu} + x_\mu \partial_j \tilde{f}_\mu(x)]}_{\forall \mu \text{ Testfunktion}} \\ &\stackrel{\text{(C.9)}}{=} -d\omega_d \sum_{\mu=0}^{d-1} [\tilde{f}_\mu(x) \delta_{j\mu} + x_\mu \partial_j \tilde{f}_\mu(x)]_{x=0} \\ &\stackrel{\text{(C.6)}}{=} -\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \tilde{f}_j(0) \end{aligned}$$
 (B.10)

Es gilt also:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu} \int dz d^d x z^{\Delta+2-d} w_j w_\mu v^{-\Delta-1} \Delta \tilde{f}_\mu(x-x') = \\ &= -2^\Delta \frac{\Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+1)} \cdot \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \tilde{f}_j(0) \\ &= -2^{\Delta+1} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+1)} \tilde{f}_j(0) \end{aligned}$$
 (B.11)

Nun haben wir alle notwendigen Integrale berechnet und können das Gesamtergebnis angeben:

$$\int dz d^d x z^{\Delta-d} H^\mu_j(z, x; x') \Delta \tilde{f}_\mu(x-x') =$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma \left(-2^\Delta \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)} + 2^{\Delta+1} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta + 1)} \right) \tilde{f}_j(0) \\
&= -\gamma \cdot 2^{\Delta+1} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} (\Delta - 1) \Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta + 1)} \tilde{f}_j(0)
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Zur Umformung wurde hier die Funktionalgleichung der Gammafunktion (C.4) benutzt.

B.1.2. Tensorieller Fall

Im folgenden werden wir das Integral

$$\int dz d^d x z^{-1-d} H_{\rho\sigma ij}(z, x; x') g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} z^\Delta \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(z, x)$$

bestimmen. Hierzu bringen wir H zuerst in eine Form, die für die folgenden Rechnungen geeignet ist. H ist im tensoriellen Fall gegeben durch

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu ij}(z, x; x') &= \gamma \{ v^{-\Delta} [(\partial_\mu w_i)(\partial_\nu w_j) + (\partial_\nu w_i)(\partial_\mu w_j)] - \\
&\quad - v^{-\Delta-1} [w_\mu(\partial_\nu w_i)w_j + w_\nu(\partial_\mu w_i)w_j + \\
&\quad + w_\mu(\partial_\nu w_j)w_i + w_\nu(\partial_\mu w_j)w_i] + \\
&\quad + 2v^{-\Delta-2} w_\mu w_\nu w_i w_j + \\
&\quad + \frac{2}{d} v^{-\Delta-2} w_\mu w_\nu \delta_{ij} - \\
&\quad - \frac{2}{d} v^{-\Delta} g_{\mu\nu} \delta_{ij} \}.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Wir werden diesen Ausdruck nun umformen. Hierfür rechnen wir:

$$\begin{aligned}
&(\partial_\mu w_i)(\partial_\nu w_j) + (\partial_\nu w_i)(\partial_\mu w_j) = \\
&= \frac{1}{z^2} (\delta_{\mu i} - w_i \delta_{\mu z})(\delta_{\nu j} - w_j \delta_{\nu z}) + \frac{1}{z^2} (\delta_{\nu i} - w_i \delta_{\nu z})(\delta_{\mu j} - w_j \delta_{\mu z}) \\
&= \frac{1}{z^2} [\delta_{\mu i} \delta_{\nu j} + \delta_{\nu i} \delta_{\mu j} - w_i (\delta_{\mu z} \delta_{\nu j} + \delta_{\nu z} \delta_{\mu j}) - w_j (\delta_{\mu i} \delta_{\nu z} + \delta_{\nu i} \delta_{\mu z}) + \\
&\quad + 2w_i w_j \delta_{\nu z} \delta_{\mu z}]
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Mit diesem Ergebnis und mit

$$\partial_\mu w_i = \frac{1}{z} (\delta_{\mu i} - w_i \delta_{\mu z}) \tag{B.15}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 H_{\mu\nu ij}(z, x; x') &= \\
 &= \gamma \left\{ \frac{1}{z^2} [\delta_{\mu i} \delta_{\nu j} + \delta_{\nu i} \delta_{\mu j} - w_i (\delta_{\mu z} \delta_{\nu j} + \delta_{\nu z} \delta_{\mu j}) - w_j (\delta_{\mu i} \delta_{\nu z} + \delta_{\nu i} \delta_{\mu z}) + \right. \\
 &\quad \left. + 2w_i w_j \delta_{\nu z} \delta_{\mu z} - \frac{2}{d} g_{\mu\nu} \delta_{ij}] v^{-\Delta} - \right. \\
 &\quad - (w_\mu w_j \delta_{\nu i} + w_\nu w_j \delta_{\mu i} + w_\mu w_i \delta_{\nu j} + w_\nu w_i \delta_{\mu j} - \\
 &\quad \left. - 2w_\mu w_i w_j \delta_{\nu z} - 2w_\nu w_i w_j \delta_{\mu z}) v^{-\Delta-1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2(w_\mu w_\nu w_i w_j + \frac{1}{d} w_\mu w_\nu \delta_{ij}) v^{-\Delta-2} \right\} \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

Um das Integral zu berechnen, brauchen wir nur Summanden der Darstellung (B.16) von $H_{\mu\nu ij}$ betrachtet werden, in denen kein $\delta_{\nu z}$ bzw. $\delta_{\mu z}$ auftaucht: Wie im vektoriellen Fall reicht es, von 0 bis $d-1$ zu summieren, da die z -Komponenten von $\tilde{f}_{\mu\nu}$ gleich Null sind. Auch das Integral über den Term mit $g_{\mu\nu}$ ergibt auf Grund der Spurfreiheit der $\tilde{f}_{\mu\nu}$ Null. Es gilt also folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 &\int dz d^d x z^{-1-d} H_{\rho\sigma ij}(z, x; x') g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} z^\Delta \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(z, x) = \\
 &= \sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{3-d+\Delta} \gamma \left[\frac{1}{z^2} (\delta_{\mu i} \delta_{\nu j} + \delta_{\nu i} \delta_{\mu j}) v^{-\Delta} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{z} (w_\mu w_j \delta_{i\nu} + w_\nu w_j \delta_{i\mu} + w_\mu w_i \delta_{j\nu} + w_\nu w_i \delta_{j\mu}) v^{-\Delta-1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2(w_\mu w_\nu w_i w_j + \frac{1}{d} w_\mu w_\nu \delta_{ij}) v^{-\Delta-2} \right] \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x - x') \tag{B.17}
 \end{aligned}$$

Nach (3.60) vom skalaren Fall ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{3-d+\Delta} \frac{1}{z^2} \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} v^{-\Delta} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x - x') = \\
 &= \int dz d^d x z^{1-d+\Delta} v^{-\Delta} \Delta \tilde{f}_{ij}(x - x') \\
 &= -2^\Delta \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)} \tilde{f}_{ij}(0) \tag{B.18}
 \end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir auf Grund der Symmetrie der $\tilde{f}_{\mu\nu}$ für den $\delta_{\nu i} \delta_{\mu j}$ -Term.

Auch die $v^{-\Delta-1}$ -Terme lassen sich auf einen schon berechneten Fall zurückführen, nämlich Gleichung (B.11) vom vektoriellen Fall, wobei auch hier aus Symmetriegründen alle zu berechnenden Terme dasselbe Ergebnis liefern:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{3-d+\Delta} \frac{1}{z} w_\mu w_j \delta_{i\nu} v^{-\Delta-1} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x-x') = \\
& = \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{2-d+\Delta} w_\mu w_j v^{-\Delta-1} \Delta \tilde{f}_{\mu i}(x-x') \\
& = -2^{\Delta+1} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+1)} \tilde{f}_{ij}(0) \tag{B.19}
\end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch die beiden $v^{-\Delta-2}$ -Terme neu bestimmen:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{3-d+\Delta} w_\mu w_\nu w_i w_j v^{-\Delta-2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x-x') = \\
& = 2^{\Delta+2} \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{\Delta-1-d} x_\mu x_\nu x_i x_j \left(\frac{z}{z^2+x^2} \right)^{\Delta+2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x) = (*) \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $\tilde{z} := \frac{z^2}{x^2}$ und somit

$$z^{\Delta-1-d} dz = \frac{1}{2} \tilde{z}^{\frac{1}{2}(\Delta-2-d)} |x|^{\Delta-d} d\tilde{z}, \quad \frac{z}{z^2+x} = |x|^{-1} \frac{\tilde{z}^{\frac{1}{2}}}{\tilde{z}+1} \tag{B.21}$$

ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}
(*) & = 2^{\Delta+2} \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d\tilde{z} d^d x \frac{1}{2} \tilde{z}^{\frac{1}{2}(\Delta-2-d)} |x|^{\Delta-d} x_\mu x_\nu x_i x_j \times \\
& \quad \times |x|^{-\Delta-2} \left(\frac{\tilde{z}^{\frac{1}{2}}}{\tilde{z}^2+1} \right)^{\Delta+2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x) \\
& = 2^{\Delta+1} \int d\tilde{z} \frac{\tilde{z}^{\Delta-\frac{d}{2}}}{(\tilde{z}^2+1)^{\Delta+2}} \cdot \sum_{\mu,\nu} \int d^d x x_\mu x_\nu x_i x_j |x|^{-d-2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x) \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Für das erste Integral ergibt sich nach (C.5)

$$\int d\tilde{z} \frac{\tilde{z}^{\Delta-\frac{d}{2}}}{(\tilde{z}^2+1)^{\Delta+2}} = \frac{\Gamma(\Delta-\frac{d}{2}+1)\Gamma(1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+2)}. \tag{B.23}$$

Zum Berechnen des zweiten Integrals benutzen wir

$$\Delta(x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}) = 2\tilde{f}_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} + 2x_\nu\partial_\mu\tilde{f}_{\mu\nu} + 2x_\mu\partial_\nu\tilde{f}_{\mu\nu} + x_\mu x_\nu\Delta f_{\mu\nu}. \quad (\text{B.24})$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x x_\mu x_\nu x_i x_j |x|^{-d-2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x) \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x x_i x_j |x|^{-d-2} \{ \Delta[x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] - 2\tilde{f}_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} - 2x_\nu\partial_\mu\tilde{f}_{\mu\nu} - 2x_\mu\partial_\nu\tilde{f}_{\mu\nu} \} \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x x_i x_j |x|^{-d-2} \Delta[x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] = (*) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Hierbei fielen im letzten Schritt drei der Summanden auf Grund der Divergenz- und Spurfreiheit der $\tilde{f}_{\mu\nu}$ weg. Als nächstes formen wir dieses Ergebnis mit Hilfe der Relation

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_j|x|^{2-d} &= (2-d)|x|^{-d}\delta_{ij} - d(2-d)x_i x_j |x|^{-d-2} \\ \Leftrightarrow x_i x_j |x|^{-d-2} &= -\frac{1}{d(2-d)}\partial_i\partial_j|x|^{2-d} + \frac{1}{d}|x|^{-d}\delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

um. Wir erhalten:

$$(*) = \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x \left(-\frac{1}{d(2-d)}\partial_i\partial_j|x|^{2-d} + \frac{1}{d}|x|^{-d}\delta_{ij} \right) \Delta[x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] = (**) \quad (\text{B.27})$$

Unser Ziel ist es, analog zum vektoriellen Fall partiell zu integrieren (und zwar diesmal zweimal). Vorerst zeigen wir allerdings noch, daß der δ_{ij} -Term nicht zum Ergebnis beiträgt. Hierzu wenden wir

$$\Delta(x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}) = x_\nu\Delta(x_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}) + 2\delta_{\mu\nu}\tilde{f}_{\mu\nu} + 2x_\mu\partial_\nu\tilde{f}_{\mu\nu} \quad (\text{B.28})$$

sowie (B.9) an und nutzen erneut die Spur- und Divergenzfreiheit der Testfunktionen aus:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x |x|^{-d} \Delta[x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x |x|^{-d} \{x_\nu \Delta [x_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] + 2\delta_{\mu\nu} \tilde{f}_{\mu\nu}(x) + 2x_\mu \partial_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)\} \\
&= \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x |x|^{-d} x_\nu \Delta [x_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] \\
&= \frac{1}{2-d} \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x \partial_\nu |x|^{2-d} \Delta [x_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] \\
&\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{2-d} \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x |x|^{2-d} \Delta [\delta_{\mu\nu} \tilde{f}_{\mu\nu}(x) + x_\mu \partial_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] \\
&= -dw_d \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} [\delta_{\mu\nu} \tilde{f}_{\mu\nu}(x) + x_\mu \partial_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)]_{x=0} \\
&= -dw_d \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \delta_{\mu\nu} \tilde{f}_{\mu\nu}(0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.29}$$

Der δ_{ij} -Term fällt also tatsächlich weg und wir können die ursprüngliche Rechnung fortsetzen:

$$\begin{aligned}
(**) &= -\frac{1}{d(2-d)} \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x \partial_i \partial_j |x|^{2-d} \Delta [x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] \\
&\stackrel{\text{P.I.}}{=} -\frac{1}{d(2-d)} \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x |x|^{2-d} \Delta [\partial_i \partial_j (x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x))] \\
&= -w_d \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} [\partial_i \partial_j (x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}(x))]_{x=0} = (***)
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\partial_i \partial_j (x_\mu x_\nu \tilde{f}_{\mu\nu}) &= (\delta_{\mu j} \delta_{\nu i} + \delta_{\mu i} \delta_{\nu j}) \tilde{f}_{\mu\nu} + x_\mu x_\nu \partial_i \partial_j \tilde{f}_{\mu\nu} \\
&\quad + (x_\nu \delta_{\mu i} + x_\mu \delta_{\nu i}) \partial_j \tilde{f}_{\mu\nu} + (x_\nu \delta_{\mu j} + x_\mu \delta_{\nu j}) \partial_i \tilde{f}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B.31}$$

bekommen wir nun schlußendlich unter Ausnutzung der Symmetrie der Test-

funktionen:

$$\begin{aligned}
 (***) &= -w_d \sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} (\delta_{\mu j} \delta_{\nu i} + \delta_{\mu i} \delta_{\nu j}) \tilde{f}_{\mu\nu}(0) \\
 &= -\frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{d \Gamma(\frac{d}{2})} \tilde{f}_{ij}(0)
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

Wir erhalten also folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{3-d+\Delta} w_\mu w_\nu w_i w_j v^{-\Delta-2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x-x') = \\
 &= -2^{\Delta+1} \frac{\Gamma(\Delta - \frac{d}{2} + 1) \Gamma(1 + \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta + 2)} \cdot \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{d \Gamma(\frac{d}{2})} \tilde{f}_{ij}(0) \\
 &= -2^{\Delta+2} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2} + 1)}{\Gamma(\Delta + 2)} \tilde{f}_{ij}(0)
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

Nun müssen wir uns noch um den zweiten $v^{-\Delta-2}$ -Term kümmern. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{3-d+\Delta} w_\mu w_\nu v^{-\Delta-2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x-x') = \\
 &= 2^{\Delta+2} \sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \int dz d^d x z^{1-d+\Delta} x_\mu x_\nu \left(\frac{z}{z^2 + x^2} \right)^{\Delta+2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x) = (*)
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

Wir führen wieder die Substitution $\tilde{z} := \frac{z^2}{x^2}$ durch und bekommen mit

$$z^{\Delta+1-d} dz = \frac{1}{2} \tilde{z}^{\frac{1}{2}(\Delta-d)} |x|^{\Delta+2-d} d\tilde{z}, \quad \frac{z}{z^2 + x} = |x|^{-1} \frac{\tilde{z}^{\frac{1}{2}}}{\tilde{z} + 1} \tag{B.35}$$

weiter:

$$\begin{aligned}
 (*) &= 2^{\Delta+2} \sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \int d\tilde{z} d^d x \frac{1}{2} \tilde{z}^{\frac{1}{2}(\Delta-d)} |x|^{\Delta+2-d} x_\mu x_\nu |x|^{-\Delta-2} \left(\frac{\tilde{z}^{\frac{1}{2}}}{\tilde{z} + 1} \right)^{\Delta+2} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x) \\
 &= 2^{\Delta+1} \int d\tilde{z} \frac{\tilde{z}^{\Delta - \frac{d}{2} + 1}}{(\tilde{z} + 1)^{\Delta+2}} \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \int d^d x x_\mu x_\nu |x|^{-d} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x)
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

Der erste Faktor ließe sich nun wieder leicht mit (C.5) berechnen, jedoch ist der zweite Faktor Null. Dies sieht man, wenn man

$$\Delta(x_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}) = 2\partial_\mu \tilde{f}_{\mu\nu} + x_\mu \Delta \tilde{f}_{\mu\nu} \quad (\text{B.37})$$

und die Divergenzfreiheit der $\tilde{f}_{\mu\nu}$ benutzt:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x x_\mu x_\nu |x|^{-d} \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(x) = \\ & = \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x x_\nu |x|^{-d} \{ \Delta [x_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] - 2\partial_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}(x) \} \\ & = \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} \int d^d x x_\nu |x|^{-d} \Delta [x_\mu \tilde{f}_{\mu\nu}(x)] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Daß der letzte Schritt richtig ist, wurde schon für Gleichung (B.29) gezeigt.

Fassen wir nun die Ergebnisse zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int dz d^d x z^{-1-d} H_{\rho\sigma ij}(z, x; x') g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} z^\Delta \Delta \tilde{f}_{\mu\nu}(z, x) = \\ & = \gamma \left(-2 \cdot 2^\Delta \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)} + 4 \cdot 2^\Delta \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta + 1)} \right. \\ & \quad \left. - 2 \cdot 2^{\Delta+2} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2} + 1)}{\Gamma(\Delta + 2)} \right) \tilde{f}_{ij}(0) \\ & = -\gamma \cdot 2^{\Delta+2} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Delta(\Delta - 1) \Gamma(\Delta + 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta + 2)} \tilde{f}_{ij}(0) \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

B.2. ... für Abschnitt 3.3

B.2.1. Vektorieller Fall

Unser Ziel ist es, den Ausdruck

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{1+\Delta-d} \int d^d x c \gamma \left[\frac{1}{z} \left(\frac{2z}{z^2 + x^2} \right)^\Delta \delta_{mj} - \frac{x_m}{z} \cdot \frac{x_j}{z} \left(\frac{2z}{z^2 + x^2} \right)^{\Delta+1} \right] f^j(x)$$

zu berechnen. Mit der Substitution $zy := x$ erhalten für diesen:

$$\begin{aligned}
 & c\gamma \lim_{z \rightarrow 0} z^{1+\Delta-d} \int d^d y z^d \left[\frac{1}{z} \left(\frac{2z}{z^2(1+y^2)} \right)^\Delta f_m(yz) - \right. \\
 & \quad \left. - y_m y_j \left(\frac{2z}{z^2(1+y^2)} \right)^{\Delta+1} f^j(yz) \right] = \\
 & = c\gamma \int d^d y \left[\left(\frac{2}{1+y^2} \right)^\Delta f_m(0) - y_m y_j \left(\frac{2}{1+y^2} \right)^{\Delta+1} f^j(0) \right] = (*) \quad (\text{B.40})
 \end{aligned}$$

Die Integration des linken Summanden stellt kein Problem dar. Beim rechten Summanden machen wir die Umformung $y_m(1+y^2)^{-\Delta-1} = -\frac{1}{2\Delta}\partial_m(1+y^2)^{-\Delta}$ und führen dann eine partielle Integration aus, wodurch wir das benötigte δ_{jm} bekommen:

$$\begin{aligned}
 (*) & = c\gamma \int d^d y [2^\Delta(1+y^2)^{-\Delta} f_m(0) + \frac{2^\Delta}{\Delta} y_j \partial_m (1+y^2)^{-\Delta} f^j(0)] \\
 & \stackrel{\text{P.I.}}{=} c\gamma \cdot 2^\Delta \int d^d y [(1+y^2)^{-\Delta} f_m(0) - \frac{1}{\Delta} \delta_{jm} (1+y^2)^{-\Delta} f^j(0)] \\
 & = c\gamma \cdot 2^\Delta (1 - \frac{1}{\Delta}) f_m(0) \int d^d y (1+y^2)^{-\Delta} \\
 & = c\gamma \cdot 2^\Delta \pi^{\frac{d}{2}} \frac{(\Delta-1)\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+1)} f_m(0) \quad (\text{B.41})
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde zum Auswerten des Integrales Formel (C.7) verwendet.

B.2.2. Tensorieller Fall

In diesem Abschnitt werden wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & \lim_{z \rightarrow 0} z^{2+\Delta-d} \int d^d x c\gamma \left[\frac{1}{z^2} (\delta_{mi}\delta_{nj} + \delta_{ni}\delta_{mj}) \left(\frac{2z}{z^2+x^2} \right)^\Delta - \right. \\
 & \quad - \frac{1}{z} \left(\frac{x_m x_j}{z^2} \delta_{in} + \frac{x_n x_j}{z^2} \delta_{im} + \frac{x_m x_i}{z^2} \delta_{jn} + \frac{x_n x_i}{z^2} \delta_{jm} \right) \left(\frac{2z}{z^2+x^2} \right)^{\Delta+1} + \\
 & \quad \left. + 2 \frac{x_m x_n x_i x_j}{z^4} \left(\frac{2z}{z^2+x^2} \right)^{\Delta+2} \right] f^{ij}(x)
 \end{aligned}$$

bestimmen. Für diesen ergibt sich nach der Substitution $zy := x$:

$$c\gamma \lim_{z \rightarrow 0} z^{2+\Delta-d} \int d^d y z^d \left[\frac{1}{z^2} (\delta_{mi}\delta_{nj} + \delta_{ni}\delta_{mj}) \left(\frac{2z}{z^2(1+y^2)} \right)^\Delta - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{z} (y_m y_j \delta_{in} + y_n y_j \delta_{im} + y_m y_i \delta_{jn} + y_n y_i \delta_{jm}) \left(\frac{2z}{z^2(1+y^2)} \right)^{\Delta+1} + \\
 & + 2y_m y_n y_i y_j \left(\frac{2z}{z^2(1+y^2)} \right)^{\Delta+2} \Big] f^{ij}(yz) = \\
 = & c\gamma \int d^d y \left[\left(\frac{2}{1+y^2} \right)^\Delta \cdot 2f_{mn}(0) - \right. \\
 & - (2y_m y_j f_n^j(0) + 2y_n y_j f_m^j(0)) \left(\frac{2}{1+y^2} \right)^{\Delta+1} + \\
 & \left. + 2y_m y_n y_i y_j \left(\frac{2}{1+y^2} \right)^{\Delta+2} f^{ij}(0) \right] = (*) \tag{B.42}
 \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir die Symmetrie der Testfunktionen f^{ij} in den Indizes ausgenutzt. (Diese werden wir auch im folgenden noch mehrmals benötigen.) Um das Integral zu berechnen, gehen wir analog zum vektoriellen Fall vor und führen partielle Integrationen durch.

$$\begin{aligned}
 (*) & = c\gamma \int d^d y [2^{\Delta+1} (1+y^2)^{-\Delta} f_{mn}(0) - \\
 & + \frac{2^{\Delta+1}}{\Delta} (y_m f_n^j(0) + y_n f_m^j(0)) \partial_j (1+y^2)^{-\Delta} + \\
 & - \frac{2^{\Delta+2}}{\Delta+1} y_n y_i y_j \partial_m (1+y^2)^{-\Delta-1} f^{ij}(0)] \\
 & \stackrel{\text{P.I.}}{=} c\gamma \cdot 2^{\Delta+1} \int d^d y [(1+y^2)^{-\Delta} f_{mn}(0) - \\
 & - \frac{1}{\Delta} (\delta_{jm} f_n^j(0) + \delta_{jn} f_m^j(0)) (1+y^2)^{-\Delta} + \\
 & + \frac{2}{\Delta+1} (\delta_{mn} y_i y_j + y_n \delta_{im} y_j + y_n y_i \delta_{jm}) (1+y^2)^{-\Delta-1} f^{ij}(0)] \\
 & = c\gamma \cdot 2^{\Delta+1} \int d^d y [(1 - \frac{2}{\Delta})(1+y^2)^{-\Delta} f_{mn}(0) - \\
 & - \frac{1}{\Delta(\Delta+1)} (\delta_{mn} y_i f^{ij}(0) + 2y_n f_m^j(0)) \partial_j (1+y^2)^{-\Delta}] \\
 & \stackrel{\text{P.I.}}{=} c\gamma \cdot 2^{\Delta+1} \int d^d y [(1 - \frac{2}{\Delta})(1+y^2)^{-\Delta} f_{mn}(0) - \\
 & + \frac{1}{\Delta(\Delta+1)} (\delta_{mn} \delta_{ij} f^{ij}(0) + 2\delta_{jn} f_m^j(0)) (1+y^2)^{-\Delta}] = (**) \tag{B.43}
 \end{aligned}$$

Auf Grund der Spurfreiheit der Testfunktionen und (C.7) erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}
(**) &= c\gamma \cdot 2^{\Delta+1} \left(1 - \frac{2}{\Delta} + \frac{2}{\Delta(\Delta+1)} \right) f_{mn}(0) \int d^d y (1+y^2)^{-\Delta} \\
&= c\gamma \cdot 2^{\Delta+1} \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Delta(\Delta+1) - 2(\Delta+1) + 2}{\Delta(\Delta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)} \\
&= c\gamma \cdot 2^{\Delta+1} \pi^{\frac{d}{2}} \cdot \frac{\Delta(\Delta-1)\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta+2)} \tag{B.44}
\end{aligned}$$

C. Wichtige Formeln

C.1. Die Gammafunktion

Die *Gammafunktion* ist über

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{C.1})$$

für $x > 0$ definiert. Äquivalent hierzu ist die sog. *Gaußsche Definition*

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}. \quad (\text{C.2})$$

Definiert man die Gammafunktion für negative nichtganze x über

$$\Gamma(x) := \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-x)}, \quad (\text{C.3})$$

so hält Gleichung (C.2) auch für diese x . Es gelten folgende wichtige Relationen:

- Für alle $x \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ ist

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (\text{C.4})$$

Diese Gleichung wird als *Funktionalgleichung der Gammafunktion* bezeichnet.

- Für $x > 0, y > 0$ gilt

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} =: B(x, y). \quad (\text{C.5})$$

$B(x, y)$ wird *Eulersche Betafunktion* genannt.

Mit Hilfe der letzten Gleichung läßt sich auch das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} d^d x (1+x^2)^{-\Delta}$ mit $x \in \mathbb{R}^d$ berechnen. Hierzu führen wir d -dimensionale Kugelkoordinaten ein, d. h. wir setzen $r^2 := x^2 = \sum_{i=0}^{d-1} x_i^2$ mit $r \in \mathbb{R}^+$, und $d^d y$ wird zu $d\omega_d r^{d-1} dr$, wobei

$$\omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d \Gamma(\frac{d}{2})} \quad (\text{C.6})$$

das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^d ist. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d^d x (1+x^2)^{-\Delta} &= \int_0^{+\infty} dr r^{d-1} d\omega_d (1+r^2)^{-\Delta} \\ &= d\omega_d \int_0^{+\infty} d\tilde{r} \frac{\tilde{r}^{\frac{d}{2}-1}}{(1+\tilde{r})^\Delta} \\ &= d \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d \Gamma(\frac{d}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\Delta - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})}{2\Gamma(\Delta)} \\ &= \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Hierbei wurde noch die Substitution $\tilde{r} := r^2$ vorgenommen.

C.2. Fundamentallösung der Laplace-Gleichung im d -dimensionalen Euklidischen Raum

Für $d > 2$ ist die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung durch

$$G(x) = \frac{1}{d(2-d)\omega_d} |x|^{2-d} \quad (\text{C.8})$$

gegeben. Es gilt also

$$\Delta |x|^{2-d} = d(2-d)\omega_d \delta(x) \stackrel{(\text{C.4})}{=} -\frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \delta(x) \quad (\text{C.9})$$

bzw. mit Hilfe von Testfunktionen f ausgedrückt:

$$\forall f : \int dx |x|^{2-d} \Delta f(x) = -\frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} f(0) \quad (\text{C.10})$$

D. Die kovariante Ableitung einer Distribution

Für eine Distribution T , einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und Testfunktionen f definiert man die α -te Ableitung der Distribution über

$$(\mathbb{D}^{(\alpha)}T)(f) := (-1)^{|\alpha|}T(\mathbb{D}^\alpha f), \quad (\text{D.1})$$

wobei

$$\mathbb{D}^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f \quad (\text{D.2})$$

und

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (\text{D.3})$$

gelte. Diese Definition ist insoweit gut gewählt, als daß sie das sog. *Leitprinzip* erfüllt: Definitionen bzgl. Distributionen sollten für reguläre Distributionen den Definitionen für Funktionen entsprechen. So gilt z. B. für die Ableitung einer regulären Distribution T_ϕ mit einer differenzierbaren Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$T'_\phi(f) \stackrel{\text{Def.}}{=} -T_\phi(f') = - \int dx \phi(x) f'(x) \stackrel{\text{P.I.}}{=} \int dx \phi'(x) f(x) = T_{\phi'}(f) \quad (\text{D.4})$$

Eine Ableitung der regulären Distribution T_ϕ entspricht also der Ableitung der Funktion ϕ .

Die Frage ist nun, inwieweit sich diese Definition der Ableitung einer Distribution auf die kovariante Ableitung übertragen läßt. Hierzu betrachten wir einen Spezialfall des Satzes von Stokes:

$$\int_M d^d x \sqrt{g} D_\mu V^\mu = \int_{\partial M} d^{d-1} y \sqrt{\gamma} n_\mu V^\mu \quad (\text{D.5})$$

Hierbei ist M eine zusammenhängende Teilmenge einer Mannigfaltigkeit und ∂M ihr Rand, γ die auf dem Rand induzierte Metrik in den y -Koordinaten und n_μ der Normaleneinheitsvektor.

Mit dem Satz von Stokes können wir nun analog zum oben angegebenen Fall mit partiellen Ableitungen und skalaren Funktionen eine Vorschrift für die kovariante Ableitung einer Distribution motivieren:

Sei A ein Differentialoperator bestehend aus n kovarianten Ableitungen mit beliebiger Indizierung, d. h. $A = DD \dots D$, $\phi(x)$ ein Tensorfeld beliebiger Stufe, und $f^{\mu\nu\kappa\dots}(x)$ Testfunktionen der Art, daß $A\phi(x) \cdot f(x)$ ein Skalar ergibt. Unter der Voraussetzung, daß diese auf dem Rand verschwinden, erhält man:

$$\int_M d^d x \sqrt{g} D_\mu (D \dots D \phi(x) \cdot f(x))^\mu = 0 \quad (\text{D.6})$$

Daraus folgt

$$\int_M d^d x \sqrt{g} D_\mu (D \dots D \phi(x))^\alpha f^\beta(x) = - \int_M d^d x \sqrt{g} (D \dots D \phi(x))^\alpha D_\mu f^\beta(x), \quad (\text{D.7})$$

wobei α und β die beiden möglichen Positionen für das zweite μ kennzeichnen. Diesen Schritt kann man nun bei n Ableitungen n -mal durchführen, weshalb wir schließlich $(-1)^n$ als Vorzeichen des Ergebnisses bekommen:

$$\int_M d^d x \sqrt{g} A\phi(x) f(x) = (-1)^n \int_M d^d x \sqrt{g} \phi(x) {}^t A f(x), \quad (\text{D.8})$$

Hierbei meint ${}^t A$ den Differentialoperator, der sich ergibt, wenn man bei A die Reihenfolge der kovarianten Ableitungen umdreht. Wir können also schließlich als die Wirkung eines Differentialoperators A auf eine tensorförmige Distribution T

$$(AT)(f) := (-1)^n T({}^t A f) \quad (\text{D.9})$$

definieren.

Literaturverzeichnis

- [AGM⁺00] AHARONY, O., S. S. GUBSER, J. MALDACENA, H. OOGURI und Y. OZ: *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*. Phys. Rept., 323:183–386, 2000. hep-th/9905111 v3.
- [AIS78] AVIS, S. J., C. J. ISHAM und D. STOREY: *Quantum field theory in anti-de Sitter space-time*. Phys. Rev. D, 18:3565–3576, 1978.
- [BBMS00] BERTOLA, M., J. BROS, U. MOSCHELLA und R. SCHAEFFER: *A general construction of conformal field theories from scalar anti-de Sitter quantum field theories*. Nucl. Phys. B, 587:619–644, 2000. hep-th/9908140 v2.
- [BDHM98] BANKS, T., M. R. DOUGLAS, G. T. HOROWITZ und E. J. MARTINEC: *AdS dynamics from Conformal Field Theory*, 1998. hep-th/9808016 v1.
- [BFS00] BUCHHOLZ, D., M. FLORIG und ST. J. SUMMERS: *Hawking-Unruh temperature and Einstein causality in Anti-de-Sitter space-time*. Class. Quant. Grav., 17:L31–L37, 2000.
- [Car04] CARROLL, S. M.: *Spacetime and Geometry—An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [DFM⁺99] D’HOKER, E., D. Z. FREEDMAN, S. D. MATHUR, A. MATUSIS und L. RASTELLI: *Graviton exchange and complete 4-point functions in the AdS/CFT correspondence*. Nuclear Physics B, 562:353–394, 1999. hep-th/9903196 v1.
- [Dob99] DOBREV, V. K.: *Intertwining operator realization of the AdS/CFT correspondence*. Nucl. Phys. B, 553:559–582, 1999. hep-th/9812194 v2.

- [Dob02] DOBREV, V. K.: *AdS/CFT Correspondence and Supersymmetry*, 2002. hep-th/0207116 v1.
- [DR02] DÜTSCH, M. und K.-H. REHREN: *A comment on the dual field in the AdS-CFT correspondence*. Lett. in Math. Phys., 62:171–184, 2002. hep-th/0204123 v2.
- [Fro74] FRONSDAL, C.: *Elementary particles in a curved space. II*. Phys. Rev. D, 10:589–598, 1974.
- [Gib00] GIBBONS, G. W.: *Anti-de-Sitter Spacetime and Its Uses*. In: COTS-AKIS, S. und G. W. GIBBONS (Herausgeber): *Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology*, Band 537 der Reihe *Lecture Notes in Physics*, Seiten 102–142. Springer, 2000.
- [GKP98] GUBSER, S. S., I. R. KLEBANOV und A. M. POLYAKOV: *Gauge theory correlators from non-critical string theory*. Phys. Lett. B, 428:105–114, 1998.
- [Kni02] KNIEMEYER, O.: *Untersuchungen am erzeugenden Funktional der AdS-CFT-Korrespondenz*. Diplomarbeit, Universität Göttingen, Juli 2002.
- [Mal98] MALDACENA, J. M.: *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*. Adv. Theor. Math. Phys., 2:231–252, 1998.
- [Nol00] NOLTING, W.: *Elektrodynamik*, Band 3 der Reihe *Grundkurs Theoretische Physik*. Vieweg, Fünfte Auflage, 2000.
- [Reh00] REHREN, K.-H.: *Algebraic holography*. Annales Henri Poincaré, 1:607–623, 2000.
- [Wit98] WITTEN, E.: *Anti-de Sitter space and holography*. Adv. Theor. Math. Phys, 2:253–291, 1998. hep-th/9802150 v2.

Danksagung

Zuerst möchte ich allen danken, die mich während meiner Studienzeit freundschaftlich begleitet und mir auf vielfältige Art und Weise geholfen und mich unterstützt haben.

Insbesondere gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Karl-Henning Rehren für seine äußerst geduldige und hilfreiche Betreuung sowie dafür, daß er mir einen Einblick in die moderne theoretische Physik ermöglicht hat. Er hat es nicht leicht gehabt mit mir. ;-)

Des weiteren geht mein herzlicher Dank an Herrn Prof. Dr. Detlev Buchholz für die Übernahme des Korreferates.

Der gesamten Arbeitsgruppe „Quantenfeldtheorie und Statistische Mechanik“, einschließlich allen ihren ehemaligen Mitgliedern, die ich kennenlernen durfte, danke ich für die freundliche und angenehme Atmosphäre.

Schließlich gilt mein besonderer Dank meinen Eltern. Ohne ihre finanzielle, aber vor allem moralische Unterstützung wäre das Studium in dieser positiven Form nicht möglich gewesen.