INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
GEORG AUGUST UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

s-Produkt-Zerlegung beschränkter Bosefelder in 1+1 Dimensionen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Matthias Grott
aus Hamburg

12. Mai 2000

Bunsenstraße 9
D-37073 Göttingen, Germany

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein grundlegendes Problem der axiomatischen Quantenfeldtheorie, in derer Rahmen diese Arbeit einzuordnen ist, besteht in der Konstruktion nichttrivialer Theorien. Zwar ist die Theorie der freien Quantenfelder gut verstanden, doch ist es noch nicht gelungen, wechselwirkende Theorien, also solche mit nicht-trivialer S-Matrix, in vier Dimensionen jenseits eines störungstheoretischen Ansatzes zu formulieren. Viele der sich aus der Störungstheorie ergebenden Beispiele für Quantenfelder erfüllen alle Wightmanaxiome außer der Positivität, die jedoch notwendig ist, um über eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Theorie zu verfügen. Die Fülle der Modelle ohne Wightmanpositivität zeigt schon die Nichttrivialität dieser Bedingung. Yngvason und andere haben sich mit der Konstruktion und Charakterisierung von Quantenfeldern beschäftigt, die jeweils Teile der Wightmanaxiome erfüllen [Yng81][Yng86](Lokalität oder Spektrumsbedingung, Translationsinvarianz statt Poincaréinvarianz), doch gibt es bisher weder eine allgemeine Charakterisierung derjenigen Quantenfelder, die alle Wightmanaxiome erfüllen, noch weiß man, ob diese Menge, abgesehen von freien Feldern, nicht vielleicht leer ist. Auf der Suche nach nicht-trivialen Theorien beschäftigt man sich heute viel mit Modelltheorien in einer Raum- und einer Zeitdimension, um Hinweise darauf zu bekommen, welche Arten von Theorien mit den geforderten Eigenschaften überhaupt möglich bzw. zu erwarten sind. Dort hat man bereits viele Theorien gefunden, die jedoch von einer größeren Symmetriegruppe, der konformen Gruppe, ausgehen, und sich daher nicht ohne weiteres auf vier Dimensionen verallgemeinern lassen. Eine der immer wieder auftauchenden technischen Schwierigkeiten ist, daß in vielen Fällen die Quantenfelder durch unbeschränkte Operatoren dargestellt werden. Demgegenüber haben Darstellungen durch beschränkte Operatoren viele Vorteile.

Formulieren wir die Theorie, indem wir die beteiligten Felder als lineare Funktionale über der Borchersalgebra $\underline{\mathcal{S}}$ auffassen ([Bor62][Bor72]), so erlaubt das GNS-Rekonstruktionstheorem (siehe z.B. [SW69]), die Felder und die zugehörigen Hilberträume aus diesen Funktionalen zurückzugewinnen. Für beschränkte Felder können die Funktionale mit Standardmethoden der Funktionalanalysis von einer Unteralgebra von $\underline{\mathcal{S}}$ auf die gesamte Algebra fortgesetzt werden. Im Fall von unbeschränkten Feldern ist dies in der Regel nicht möglich. Yngvason hat die Frage der Fortsetzbarkeit in [Yng73] untersucht. Er betrachtet als Gegenbeispiel den Raum der Testfunktionen über $\mathbb{R}$, für den die Funktionen mit allen ihren Ableitungen an einem Punkt verschwinden. Die linearen Funktionale dieses Raumes lassen sich im Falle unbeschränkter Felder nicht nach $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ fortsetzen. Der Fall des Herausnehmens bzw. Hinzufügens eines einzelnen Punktes ist vor allem in der konformen Quantenfeldtheorie interessant, da es dort üblich ist, die Theorie auf dem Einheitskreis zu betrachten. Dabei muß der Punkt "unendlich" von Hand hinzugefügt werden.

Gerade für Bosefelder erwartete man aufgrund der uneingeschränkten Besetzungszahlen der Anregungsmoden in der Fockdarstellung generell Darstellungen durch unbeschränkte Operatoren. Um so überraschender war es, als Buchholz in 1+1 Dimensionen ein Beispiel für ein nicht-triviales Bosefeld angegeben hat, das durch beschränkte Operatoren dargestellt wird. Hierbei handelt es sich um das Tensorprodukt zweier freier chiraler Fermifelder $\varphi(x_+, x_-) = \psi(x_+) \otimes \psi(x_-)$ ("Buchholzfeld") [Buc] [Bau97]. Weitere Klassen beschränkter Bosefelder in 1+1 Dimensionen wurden von Baumann in [Bau99], und von Rehren in [Reh97] untersucht. Die Konstruktion von Rehren basiert dabei auf der Faktorisierung chiraler Fermifelder in Vertexoperatoren.

Wir werden in dieser Arbeit die von Baumann in [Bau99] untersuchte Klasse von beschränkten Bosefeldern eingehend untersuchen. Diese Klasse zeichnet sich durch raumartige und zeitartige Vertauschungsrelationen aus, was auf die Abwesenheit von Wechselwirkungen hindeutet, da sich die Felder ungehindert nach dem Huygens'schen Prinzip ausbreiten können. Baumann konnte zeigen, daß für Felder dieser Klasse der einfache Zusammenhang $\mathcal{W}_{2n}^T = c_{2n}\mathcal{V}_{2n}^T$ mit positiven Konstanten c_{2n} zwischen ihren trunkierten $2n$-Punkt-Funktionen $\mathcal{W}_{2n}^T$ und den trunkierten $2n$-Punkt Funktionen des Buchholzfeldes $\mathcal{V}_{2n}^T$ besteht. Alle ungeraden trunkierten n-Punkt-Funktionen verschwinden. Der Satz von Konstanten c_{2n} legt also die n-Punkt-Funktionen der Baumannfelder und damit die Felder selbst eindeutig fest. Für gewichtete s-Produkte

$$\Phi = \alpha_1 \varphi \,\mathsf{s} \cdots \mathsf{s}\, \alpha_r \varphi \tag{1.1}$$

gilt nun der einfache Zusammenhang $\mathcal{W}_{2n}^T = \sum \alpha_i^{2n} \mathcal{V}_{2n}^T$. Dies legt die Vermutung nahe, daß es sich bei den Baumannfeldern Φ lediglich um gewichtete s-Produkte von Buchholzfeldern $\varphi(x_+, x_-)$ handelt. Nun macht die Bedingung der Wightmanpositivität Einschränkungen an die Koeffizientenfolge $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, und wir werden im folgenden aus diesen Einschränkungen und der Beschränktheit der Felder Φ herleiten, daß für die Koeffizienten c_{2n}

$$c_{2n} = \sum_i \alpha_i^{2n}$$

gilt. Dann folgt die Übereinstimmung der rechten und linken Seite in (1.1) aus der Übereinstimmung ihren $2n$-Punkt-Funktionen.

1.1 Aufbau der Arbeit

Wir werden in Kapitel 2 eine kurze Einführung in die Axiomatische Quantenfeldtheorie geben und die für die Arbeit notwendigen Begriffe wie trunkierte Funktionen und s-Produkt bereitstellen. Im dritten Kapitel werden wir dann zur 1+1 dimensionalen Theorie übergehen und Beispiele für beschränkte Felder betrachten. Hier werden wir die von Baumann untersuchte Klasse beschränkter Bosefelder einführen und ausgehend von den Ergebnissen von Baumann das Theorem formulieren, daß es sich bei den Baumannfeldern um gewichtete s-Produkte von Buchholzfeldern handelt. Der Beweis des Theorems basiert auf der Ausnutzung der Wightmanpositivität der Baumannfelder, die wie gesagt Bedingungen an die Koeffizientenfolge $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ stellt. Diese Bedingung werden wir formulieren, indem wir bestimmte polynomiale Ausdrücke dieser Koeffizienten, die sogenannten Partitionspolynome $c_{2k_1,\dots,2k_r}$, betrachten. Diese hängen mit den elementaren Koeffizienten über die rekursive Reduktionsformel

$$c_{2k_1,\dots,2k_r,2k} = c_{2k_1,\dots,2k_r}c_{2k} - \sum_{i=1}^{r} c_{2k_1,\dots,2(k_i+k),\dots,2k_r}$$

zusammen. Die Wightmanpositivität impliziert die Bedingung der Determinantenpositivität

$$\det\begin{pmatrix} c_{2k_1^{(1)},\dots,2k_l^{(1)}} & c_{k_1^{(1)}+k_1^{(2)},\dots,k_l^{(1)}+k_l^{(2)}} & \cdots & c_{k_1^{(1)}+k_1^{(N)},\dots,k_l^{(1)}+k_l^{(N)}} \\ c_{k_1^{(2)}+k_1^{(1)},\dots,k_l^{(2)}+k_l^{(1)}} & c_{2k_1^{(2)},\dots,2k_l^{(2)}} & \cdots & c_{k_1^{(2)}+k_1^{(N)},\dots,k_l^{(2)}+k_l^{(N)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k_1^{(N)}+k_1^{(1)},\dots,k_l^{(N)}+k_l^{(1)}} & c_{k_1^{(N)}+k_1^{(2)},\dots,k_l^{(N)}+k_l^{(2)}} & \cdots & c_{2k_1^{(N)},\dots,2k_l^{(N)}} \end{pmatrix} \geqslant 0$$

für alle $k_i^{(m)} \in \mathbb{N}$, für die $k_i^{(m)} + k_i^{(n)}$ stets gerade ist. In Kapitel 5 werden wir die Konsistenz unserer bisherigen Ergebnisse mit dem Theorem prüfen und dann die Strategie des Beweises am Beispiel von gewichteten s-Produkten darlegen, indem wir die Partitionspolynome in diesem Spezialfall berechnen. Kapitel 6 beschäftigt sich dann mit der Durchführung des Beweises, wobei wir außer der Determinantenpositivität die Beschränktheit der Felder Φ benötigen werden. Aus dieser ergibt sich die Bedingung der exponentiellen Beschränktheit der Potenzreihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\cdots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\dots,2k_r} \leqslant e^{\lambda t}$$

an die Partitionspolynome, und damit weitere Bedingungen an die Koeffizientenfolge $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Diese beiden Bedingungen (Determinantenpositivität und exponentielle Beschränktheit) werden ausreichen, um die c_{2n} in der Form $c_{2n} = \sum \alpha_i^{2n}$ festzulegen. Wir schließen die Arbeit mit einer kurzen Diskussion der Ergebnisse in Kapitel 7 ab.

Kapitel 2

Axiomatische QFT

In der axiomatischen Quantenfeldtheorie werden Quantenfelder als operatorwertigen Distributionen über dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ aufgefaßt [WG64]. Da sich diese Arbeit im Rahmen der Wightmantheorie bewegt, die eine Formulierung der axiomatische Quantenfeldtheorie mit Hilfe von Vakuumerwartungswerten ist, soll das der axiomatischen QFT zugrunde liegende Axiomensystem hier, ausgehend von den Vorlesungen von I.T. Todorov [Tod65] und dem Buch von Streater und Wightman [SW69], kurz vorgestellt werden. Danach geben wir dann die Formulierung der Theorie mit Hilfe von Vakuumerwartungswerten an und stellen weitere benötigte Begriffe wie trunkierte Vakuumerwartungswerte und s-Produkt bereit.

2.1 Axiomatik

Die Formulierung und Numerierung der Axiome weicht bei den verschiedenen Autoren stark voneinander ab. Wir halten uns im Folgenden an die Notation in [Tod65]. Die Axiome lassen sich grob in zwei Abschnitte einteilen: Die ersten drei Axiome betreffen den Zustandsraum der Theorie, sowie dessen Transformationen. Die Axiome vier bis sieben befassen sich mit den Eigenschaften der Quantenfelder.

Axiom 1 Die Zustände der Theorie werden durch Einheitsstrahlen Ψ in einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ beschrieben.

Die Symmetrien der Theorie sollen aus den Translationen $a \in \mathbb{R}^d$ sowie den eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ bestehen. Als Symmetriegruppe ergibt sich daher die Poincarégruppe $\mathcal{P} = \mathcal{L}_+^\uparrow \ltimes \mathbb{R}^d$. Oft werden auch die universellen Überlagerungen $SL(2,\mathbb{C})$ von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ und $\tilde{\mathcal{P}}$ von $\mathcal{P}$ benutzt. $\tilde{\mathcal{P}}$ wird auch als Spinorgruppe bezeichnet. Die Zustände der Theorie sollen sich nun wie folgt transformieren:

Axiom 2 Jedem Zustand Ψ und jeder beliebigen eigentlichen Transformation $\{a, \Lambda\}$ der Poincarégruppe wird ein Zustand $\Psi_{\{a,\Lambda\}}$ mit den folgenden Eigenschaften zugeordnet:

1) $\Psi_{\{0,\mathbb{1}\}} = \Psi$

2) $(\Psi_{\{a_1,\Lambda_1\}})_{\{a_2,\Lambda_2\}} = \Psi_{\{a_1+\Lambda_1 a_2,\Lambda_1\Lambda_2\}}$

3) $|(\Psi_{\{a,\Lambda\}}, \Psi'_{\{a,\Lambda\}})| = |(\Psi, \Psi')|$

4) $|(\Psi, \Psi'_{\{a,\Lambda\}})|$ ist eine stetige Funktion von a und Λ

Dieses Axiom stellt neben der Festlegung der Symmetriegruppe auch sicher, daß auf der Gesamtheit der normierten Strahlen in $\mathcal{H}$ eine projektive Darstellung von $\mathcal{P}$ durch unitäre Operatoren $\mathrm{U}(a,\Lambda)$ realisiert ist (Wigners Theorem, siehe dafür z.B. [BLT75]).

Wegen der Homogenität des Raumes postulieren wir nun einerseits die Existenz eines ausgezeichneten, Poincaré invarianten Zustandes, des Vakuums Ω. Andererseits kann der erzeugende Operator der Translationen P als Impulsoperator aufgefaßt werden. Als solcher sollte sein Spektrum einen minimalen Eigenwert enthalten, der einer minimalen Energie entspricht. Diese Eigenschaft wird auch als Stabilität bezeichnet.

Axiom 3 Das Spektrum des erzeugenden der Translationen P liegt im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel $\overline{\Gamma}^+ = \{p^\mu : p_\mu p^\mu > 0, p^0 > 0\}$. Ferner existiert ein eindeutig festgelegter Zustand $\Omega \in \mathcal{H}$, der unter der Wirkung der Poincarégruppe invariant ist.

Als nächstes wollen wir festlegen, was unter einem Quantenfeld zu verstehen ist. Da es sich aber bei den ausgeschmierten Quantenfeldern meist um unbeschränkte Operatoren handelt, ist hier die Wahl eines hinreichend großen Definitionsbereiches besonders wichtig.

Axiom 4 Es sei f ein Multiplett von Testfunktionen, d.h. $f = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ mit $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Die Abbildung $f \mapsto A(f)$ definiert ein Quantenfeld, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Alle Operatoren $A(f)$ und ihre hermitesch konjugierten $A(f)^*$ haben einen gemeinsamen, von f unabhängigen Definitionsbereich $\mathcal{D}$, der dicht in $\mathcal{H}$ ist und den Bedingungen

$$\Omega \in \mathcal{D},\ A(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D},\ A(f)^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D} \text{ für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^m \text{ genügt.}$$

2) Der Operator $A(f)$ ist linear bezüglich f, d.h.

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$$

3) Für Ψ und $\Psi' \in \mathcal{D}$ ist $f \mapsto (\Psi, A(f)\Psi')$ eine gemäßigte Distribution.

Bemerkung 2.1 Im allgemeinen wird eine Quantenfeldtheorie mehrere Felder enthalten, die wir mit $A^{(i)}$ bezeichnen wollen. Dabei ist es sinnvoll, z.B. die Komponenten eines Spinorfeldes $A_{\alpha=1,\ldots,4}$ zu einem Feld $A^{(1)}$ zusammenzufassen. Falls eine Theorie mehrere Felder enthält, so müssen diese auch alle denselben Definitionsbereich haben.

Bemerkung 2.2 Axiom 4.2 erlaubt es uns, im folgenden häufig von der sehr bequemen symbolischen Schreibweise

$$A(f) = \sum_{j=1}^{m} A_j(f_j) = \sum_{j=1}^{m} \int A_j(x) f_j(x) d^d x$$

Gebrauch zu machen (obwohl $A_j(x)$ im strengen Sinne nicht als Operator auf $\mathcal{H}$ definiert werden kann. Man bezeichnet $A_j(x)$ als operatorwertige Distribution). Das Integrieren der $A_j(x)$ mit Testfunktionen $f_j(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ wird auch als Verschmieren der Feldoperatoren bezeichnet.

Da wir nun Quantenfelder betrachten möchten, die sich relativistisch transformieren, fordern wir die Kovarianz der Felder unter Lorentztransformationen. Wir formulieren dieses Axiom mit Hilfe der universellen Überlagerungsgruppe $SL(2,\mathbb{C})$ von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ wie folgt:

Axiom 5 Es sei $\mathrm{U}(a,\tilde{\Lambda})$ die in $\mathcal{H}$ realisierte Darstellung der Spinorgruppe $\tilde{\mathcal{P}}$. Dann ist

$$\mathrm{U}(a,\tilde{\Lambda})\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$$

und

$$A(f_{\{a,\tilde{\Lambda}\}}) = \mathrm{U}(a,\tilde{\Lambda}) A(f) \mathrm{U}^{-1}(a,\tilde{\Lambda})$$

wobei

$$(f_{\{a,\tilde{\Lambda}\}}(x))_i = \sum_{j=0}^{m} \mathrm{V}_{ij}(\tilde{\Lambda}) f_j(\Lambda^{-1}(x-a))$$

Hierbei ist V_{ij} eine endlichdimensionale Matrixdarstellung von $\tilde{\mathcal{P}}$.

Eine weitere, sehr physikalische Forderung, die in die Axiomatik eingeht, ist die sogenannte lokale Kommutativität. Sie soll zum Ausdruck bringen, daß sich Ereignisse in raumartig getrennten und damit akausal verbundenen Gebiete nicht beeinflussen:

Axiom 6 Es gilt

$$[A^{(i)}(f), A^{(j)}(g)]_\pm = [A^{(i)}(f), A^{(j)*}(g)]_\pm = 0$$

falls die Träger von f und g raumartig getrennt zueinander liegen, d.h. falls $f_i(x)g_j(y) = 0$ für $(x-y)^2 > 0$ mit $i,j = 1,\dots,m$. Dabei bezeichne $[\cdot,\cdot]_+$ den Kommutator, der für bosonische Felder gilt, und $[\cdot,\cdot]_-$ den Antikommutator, der für fermionische Felder gilt.

Bemerkung 2.3 Wir werden im Folgenden den Kommutator mit $[\cdot,\cdot]$ und den Antikommutator mit $\{\cdot,\cdot\}$ bezeichnen.

Betrachten wir nun eine Theorie, der m Quantenfelder $A_1,\dots,A_m$ zugrunde liegen. Durch Anwenden der Felder auf das Vakuum Ω sollte es nun möglich sein, fast den gesamten Raum $\mathcal{H}$ auszuschöpfen. Diese Eigenschaft wird auch als Zyklizität des Vakuums bezeichnet.

Axiom 7 Die Gesamtheit aller Vektoren der Gestalt

$$A^{(i_1)}(f_1)\cdots A^{(i_r)}(f_r)\Omega$$

spannt einen dichten Unterraum von $\mathcal{H}$ auf. Dabei seien in die Gesamtheit der Operatoren $A^{(i_j)}(f_j)$ auch ihre hermitesch konjugierten aufgenommen.

Felder, die den Axiomen genügen, werden auch als Wightmanfelder bezeichnet.

2.2 Wightmanfunktionen

Es läßt sich zeigen, daß eine Quantenfeldtheorie, die den Axiomen 1-7 genügt, vollständig durch die Vakuumerwartungswerte genannten Distributionen

$$W^{m_1,\dots,m_n}_{i_1,\dots,i_n}(x_1,\dots,x_n) = (\Omega, A^{m_1}_{i_1}(x_1)\cdots A^{m_n}_{i_n}(x_n)\Omega)$$

der zugrunde liegenden Felder A_i bestimmt ist. Mit Hilfe des GNS-Rekonstruktionstheorems können sowohl der Hilbertraum $\mathcal{H}$, als auch die Felder A_i aus den Vakuumerwartungwerten zurückgewonnen werden. Diese Formulierung der Theorie wird auch als Wightmantheorie bezeichnet.

Wir beschränken uns im Folgenden auf ein einziges skalares hermitesches Quantenfeld $A = A^*$ und wollen nun, ausgehend von den Axiomen, Bedingungen an die Vakuumerwartungswerte

$$W_n(x_1,\dots,x_n) = (\Omega, A(x_1)\cdots A(x_n)\Omega)$$

stellen. Dabei werden die Vakuumerwartungswerte an n Punkten auch als n-Punkt-Funktionen oder Wightmanfunktionen des Feldes A bezeichnet, obwohl es sich streng genommen um Distributionen handelt.

B 1 Aus der **Hermitizität** des Feldes A folgt

$$W_n(x_1,\dots,x_n) = \overline{W_n(x_n,\dots,x_1)}$$

B 2 Die Bedingung, daß die Metrik im Raum der Zustandsvektoren definit ist, führt auf die folgende Bedingung an die Wightmanfunktionen, die als **Wightmanpositivität** bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left| \{f_0 + \int f_1(x_1)A(x_1)d^dx_1 + \cdots + \int\cdots\int f_n(x_1,\dots x_n)A(x_1)\cdots A(x_n)d^dx_1\cdots d^dx_n\}\Omega \right|^2 \\ &= \sum_{i,j}\int\cdots\int \overline{f_i(x_1,\dots x_i)}W_{i+j}(x_i,\dots x_1,y_1,\dots y_j)f_j(y_1,\dots y_j)d^dx_1\cdots d^dx_i d^dy_1\cdots d^dy_j \end{aligned}$$

B 3 Die Bedingung der **lokalen Kommutativität** lautet für die Wightmanfunktionen

$$W_n(x_1,\dots,x_i,x_{i+1},\dots,x_n) = W_n(x_1,\dots,x_{i+1},x_i,\dots,x_n)$$

falls $(x_i - x_{i+1})^2 < 0$.

B 4 Aus der **Kovarianz** eines skalaren Feldes folgt die Invarianz der Wightmanfunktionen unter der Wirkung der Poincarégruppe:

$$W_n(\Lambda x_1 + a, \dots, \Lambda x_n + a) = W_n(x_1, \dots, x_n)$$

Aus dieser Bedingung folgt insbesondere die Invarianz der Wightmanfunktionen unter der Untergruppe der Translationen. Das aber heißt, daß die Funktionen nicht von n, sondern lediglich von $n-1$ unabhängigen Argumenten der Gestalt $\xi_1 = x_1 - x_2, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n$ abhängen:

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = F_n(\xi_1, \dots \xi_{n-1}) \tag{2.1}$$

B 5 Die Bedingung der **Spektralität** führt auf die folgende Eigenschaft der Fouriertransformierten von F_n: $\tilde{F}_n(p_1, \dots, p_{n-1})$ ist nur dann von Null verschieden, falls alle Argumente p_i von $\tilde{F}_n$ im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel liegen.

Die Fouriertransformierte $\widetilde{W}_n(k_1, \dots, k_n)$ der Funktion W_n hängt folgendermaßen mit $\tilde{F}_n$ zusammen:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_n(k_1, \dots, k_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{nd}{2}}} \int \cdots \int \exp\{i \sum_{j=1}^{n} k_j x_j\} W_n(x_1, \dots, x_n) d^d x_1 \cdots d^d x_n \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \delta(k_1 + \cdots + k_n) \tilde{F}_n(p_1, \dots, p_{n-1}) \end{aligned}$$

wobei

$$p_j = k_1 + \cdots + k_j \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, n-1$$

Wir werden nun als Folgerungen aus den Bedingungen 1-5 zwei Lemmata herleiten, die wir im Laufe der Arbeit benötigen werden. Zum einen wird die Wightmanpositivität eine zentrale Rolle spielen, zum anderen werden wir die Spektrumsbedingung häufig in Beweisen ausnutzen. Wir werden also gleich eine unseren Bedürfnissen angepaßte Formulierung dieser beiden Bedingungen geben. Wir beginnen mit der Spektralität. Doch zunächst müssen wir noch definieren, was wir unter dem spektralen Inhalt eines Hilbertraumvektors $\Psi = A(f_1) \cdots A(f_m)\Omega$ verstehen wollen. Es sei dafür $\tilde{\Psi}(k)$ derjenige Anteil von $\tilde{\Psi}$, der zum Eigenwert k des Impulsoperators P gehört. Dann ist

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(k) &= \int \mathrm{U}(a, \mathbb{1}) e^{-ika} d^d a \cdot \Psi \\ &= \int e^{i\mathrm{P}a} e^{-ika} d^d a \int d^d k_1 \cdots d^d k_m \tilde{f}_1(k_1) \cdots \tilde{f}_m(k_m) \tilde{A}(k_1) \cdots \tilde{A}(k_m)\Omega \\ &= \int d^d a \int d^d k_1 \cdots d^d k_m e^{i(k-(k_1+\ldots+k_m))a} \tilde{f}_1(k_1) \cdots \tilde{f}_m(k_m) \tilde{A}(k_1) \cdots \tilde{A}(k_m)\Omega \\ &= \int d^d k_1 \cdots d^d k_m \delta(k - (k_1 + \ldots + k_m)) \tilde{f}_1(k_1) \cdots \tilde{f}_m(k_m) \tilde{A}(k_1) \cdots \tilde{A}(k_m)\Omega \end{aligned}$$

Definition 2.4 Unter dem spektralen Inhalt $\mathrm{Sp}(\Psi)$ eines Hilbertraumvektors $\Psi = A(f_1)\cdots A(f_m)\Omega$ verstehen wir den Träger der vektorwertigen Distribution $\tilde{\Psi}$, d.h. den Abschluß der Menge aller $k \in \mathbb{R}^d$, für die $\tilde{\Psi}(k)$ nicht verschwindet.

Lemma 2.5 Für den spektralen Inhalt $\mathrm{Sp}(\Psi)$ eines Hilbertraumvektors $\Psi = A(f_1)\cdots A(f_m)\Omega$ gilt

$$\mathrm{Sp}(\Psi) \subset \{k \in \mathbb{R}^d : \exists k_1 \in \mathrm{supp}\tilde{f}_1, \ldots, k_m \in \mathrm{supp}\tilde{f}_m \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} k_i = k\}$$

Beweis: Es sei $k \in \mathrm{Sp}(\Psi)$. Dann ist

$$\int d^dk_1 \cdots d^dk_m \delta(k-(k_1+\ldots+k_m))\tilde{f}_1(k_1)\cdots\tilde{f}_m(k_m)\tilde{A}(k_1)\cdots\tilde{A}(k_m)\Omega \neq 0$$

Dann aber müssen $k_1 \in \mathrm{supp}\tilde{f}_1, \ldots, k_m \in \mathrm{supp}\tilde{f}_m$ mit $\sum_{i=1}^m k_i = k$ existieren, da sonst entweder $\tilde{f}_1(k_1)\cdots\tilde{f}_m(k_m) = 0$ oder $\delta(k-(k_1+\ldots+k_m)) = 0$ wäre. Q.E.D.

Bemerkung 2.6 Gleichheit gilt hier nicht, denn z.B. für $\Psi = A(f)\Omega$ mit $\mathrm{supp}\tilde{f} \cap \overline{\Gamma}^+ = \emptyset$ gilt $\Psi = 0$ und damit $\mathrm{Sp}(\Psi) = 0$. Auch ist $\Psi = \psi(f)^2\Omega$ für Fermifelder ψ wegen des Pauli-Prinzips Null, falls $\mathrm{supp}\tilde{f} \subset \overline{\Gamma}^+$, wie wir in Lemma 3.2 im Spezialfall reeller chiraler Fermifelder sehen werden.

Der spektrale Inhalt des Vektors Ψ ist also in der punktweise genommene Summe der Mengen $\mathrm{supp}\tilde{f}_1, \ldots, \mathrm{supp}\tilde{f}_m$ enthalten. Wir vereinbaren daher die folgende Notation:

Notation 2.7 Unter der Summe zweier Träger verstehen wir die Menge

$$\mathrm{supp}\tilde{f}_1 + \mathrm{supp}\tilde{f}_2 := \{k = k_1 + k_2 \in \mathbb{R}^d : k_1 \in \mathrm{supp}\tilde{f}_1 \text{ und } k_2 \in \mathrm{supp}\tilde{f}_2\}$$

Damit können wir nun das folgende Lemma formulieren:

Lemma 2.8 Es seien $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für die 2-Punkt-Funktionen eines Feldes A

$$W_2(f_1, f_2) = 0 \quad \text{falls} \quad 0 \notin \mathrm{Sp}(A(f_1)A(f_2)\Omega)$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
W_2(f_1,f_2) &= \int\int W_2(x_1,x_2)\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int \tilde{f}_1(k_1)\tilde{f}_2(k_2)\exp(i\sum_{i=1}^{2}k_ix_i)d^dk_1d^dk_2d^dx_1d^dx_2 \\
&= \widetilde{W}_2(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\int\int \delta(k_1+k_2)\tilde{F}_2(k_1)\tilde{f}_1(k_1)\tilde{f}_2(k_2)d^dk_1d^dk_2 \\
&= (2\pi)^{\frac{d}{2}}\int \tilde{F}_2(k_1)\tilde{f}_1(k_1)\tilde{f}_2(-k_1)d^dk_1
\end{aligned}$$

Falls nun $0 \notin \mathrm{Sp}(A(f_1)A(f_2)\Omega)$ existieren keine $k_1 \in \mathrm{supp}\tilde{f}_1$ und $k_2 \in \mathrm{supp}\tilde{f}_2$ mit $k_1 + k_2 = 0$. Das aber heißt, daß für beliebiges k_1 aus dem Träger von $\tilde{f}_1$ $-k_1$ nicht aus dem Träger von $\tilde{f}_2$ ist. Dann aber verschwindet das Integral. Q.E.D.

Als zweites wollen wir noch eine andere Formulierung der Wightmanpositivität angeben:

Lemma 2.9 Es sei $P(A) = \sum_{i=1}^{N} A(f_1^{(i)}) \cdots A(f_{l(i)}^{(i)})$ ein Polynom im Feld A, $f_j^{(i)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$(\Omega, P(A)^* P(A)\Omega) \geqslant 0$$

Beweis: Dies folgt direkt aus der Bedingung, daß die Metrik in $\mathcal{H}$ definit ist, denn

$$(\Omega, P(A)^* P(A)\Omega) = (P(A)\Omega, P(A)\Omega) = |P(A)\Omega|^2 \geqslant 0$$

Q.E.D.

2.3 Trunkierte Wightmanfunktionen

Wir wollen nun den sehr nützlichen Begriff der trunkierten Wightmanfunktionen W_n^T einführen. Dabei handelt es sich um diejenigen Korrelatoren des Feldes A, in denen alle Anteile von Korrelationen von weniger als n Punkten abgezogen worden sind. Rekursiv definiert man dies wie folgt:

Definition 2.10 Es sei $I = \{1, \ldots, n\}$ eine Indexmenge. Es seien (X_s) die Partitionen von I, d.h. disjunkte Zerlegungen von I in nichtleere Teilmengen X_s, für die $\bigcup_s X_s = I$ gilt. Dann ist

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(X_s)} \prod_s W^T_{|X_s|}(x_{i_1^{(s)}}, \ldots, x_{i^{(s)}_{|X_s|}})$$

wobei $i_1^{(s)} < \cdots < i^{(s)}_{|X_s|}$ die Elemente der Teilmenge $X_s \subset \{1, \ldots, n\}$ sind.

Bemerkung 2.11 Da man vom Feld stets eine Konstante abziehen kann, läßt sich immer $W_1(x) = W_1(0) = 0$ erreichen. Daher erhält man in diesem Fall einen Unterschied zwischen W_n^T und W_n erst ab $n = 4$.

Bemerkung 2.12 Aus der Definition 2.10 folgt sofort, daß trunkierte Funktionen in dem Sinne homogen sind, daß in der Entwicklung von W_n^T nach $W_{i_1} \cdots W_{i_k}$ immer $i_1 + \cdots + i_k = n$ gilt.

Die in Definition 2.10 enthaltene Kombinatorik läßt sich in den Fällen umgehen, in denen das Problem mit Hilfe von erzeugenden Funktionalen formuliert werden kann:

Definition 2.13 Für festes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir das erzeugende Funktional des Feldes A durch

$$E(t) := \omega(e^{tA(f)}) = (\Omega, e^{tA(f)}\Omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} W_m(f, \dots, f)$$

Bemerkung 2.14 Aus dem erzeugenden Funktional lassen sich die symmetrischen Anteile der Wightmanfunktionen durch Funktionalableitungen bestimmen. Diese Punkte, in denen die Wightmanfunktionen wegen der Lokalität symmetrisch sind, werden Jostpunkte genannt und bilden eine im $4(n-1)$-dimensionalen reellen Raum offene Menge, so daß durch analytische Fortsetzung der von $(n-1)$ Veränderlichen abhängenden Wightmanfunktionen die Gesamtheit aller Wightmanfunktionen aus dem erzeugenden Funktional zurückgewonnen werden kann. (Siehe dafür z.B. [Tod65]).

Bemerkung 2.15 Eine Definition der trunkierten Funktionen für den Fall symmetrischer Wightmanfunktionen ist

$$W_n(f, \dots, f) = \sum_{m_1 + \cdots + m_r = n} \frac{1}{r!} \frac{n!}{m_1! \cdots m_r!} \prod_s W^T_{m_s}(f, \dots, f)$$

Die Summation erstreckt sich dabei über alle Partitionen, für die $n = m_1 + \cdots + m_r$, $(m_s > 0)$ gilt. Der kombinatorische Gewichtsfaktor ist gerade die Anzahl der durch die Partition festgelegten Produkte $W^T_{m_1} \cdots W^T_{m_r}$. Der Faktor $\frac{1}{r!}$ berücksichtigt, daß die Produkte symmetrisch unter der Vertauschung der Faktoren sind.

Zwischen dem erzeugenden Funktional $E(t)$ eines Feldes A und seinen trunkierten Funktionen W^T_n besteht nun der folgende Zusammenhang (siehe z.B. [Haa92]):

Satz 2.16 (Clusterzerlegungs-Eigenschaft) Es sei $E(t)$ das erzeugende Funktional eines Feldes A. Dann gilt

$$\log E(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} W^T_m(f, \dots, f).$$

Das gibt Anlaß zu der folgenden Definition:

Definition 2.17 Unter dem trunkierten erzeugenden Funktional verstehen wir

$$E^T(t) := \log E(t).$$

Damit sind wir nun in der Lage, die Formel für die Entwicklung von n-Punkt-Funktionen zu invertieren.

Korollar 2.18 Für die Entwicklung der trunkierten n-Punkt-Funktionen eines Feldes A nach seinen n-Punkt-Funktionen gilt

$$W_n^T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(X_s)} (-1)^{p-1}(p-1)! \prod_s W_{|X_s|}(x_{i_1^{(s)}}, \ldots, x_{i_{|X_s|}^{(s)}})$$

wobei p die Anzahl der Teilmengen in (X_s) ist.

Beweis: Für das erzeugende Funktional des Feldes A wissen wir, daß

$$E(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} W_m$$

Nun entwickeln wir $\log E(t)$ in eine Potenzreihe:

$$\log E(t) = \log(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} W_m) = \sum_{M=1}^{\infty} (-1)^{M-1} \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} W_m)^M}{M}$$

Nach Satz 2.16 folgt nun

$$\sum_{M=1}^{\infty} (-1)^{M-1} \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} W_m)^M}{M} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} W_m^T$$

Vergleichen wir nun auf beiden Seiten diejenigen Terme, in denen t in derselben Potenz auftritt, so erhalten wir

$$W_k^T = \sum_{(X_s)} (-1)^{p-1}(p-1)! \prod_s W_{|X_s|}$$

wobei sich die Summation über alle Partitionen der Menge $\{1, \ldots, k\}$ erstreckt und p die Anzahl der Teilmengen in (X_s) ist. Der kombinatorische Faktor ist also ganau der Unterschied zwischen den Potenzreihenentwicklungen der Exponential- und der Logarithmusfunktion. Q.E.D.

2.4 s-Produkte

Wir wollen nun eine Möglichkeit untersuchen, aus gegebenen Wightmanfeldern A_i neue Wightmanfelder zu generieren. Eine solche Möglichkeit stellt die sogenannte s-Produktbildung [Bor72] dar, die in [Heg75] eingehend untersucht wurde. Es gilt das Folgende:

Satz und Definition 2.19 Es sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Unter dem s-Produkt der Wightmanfelder $A_1, \ldots, A_r$, die auf den Hilberträumen $\mathcal{H}_i$ mit Vakuum Ω_i definiert sind, versteht man das neue Wightmanfeld

$$A_1 \,\mathsf{s} \cdots \mathsf{s}\, A_r(f) = A_1(f) \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} + \cdots + \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes A_r(f)$$

das auf dem Unterraum des Hilbertraumes $\otimes_{i=1}^r \mathcal{H}_i$ definiert ist, für den $\Omega_1 \otimes \cdots \otimes \Omega_r$ zyklisch ist.

Offensichtlich beinhaltet diese Definition die Möglichkeit, s-Produkte eines Feldes mit sich selbst zu bilden, wovon wir im Folgenden Gebrauch machen werden. Wir betrachten also den Spezielfall, für den $A_i = \alpha_i A$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ist.

Definition 2.20 Unter dem gewichteten s-Produkt des Feldes A verstehen wir das neue Feld

$$A_{\underline{\alpha}} := (\alpha_1 A)\,\mathsf{s}\,\cdots\,\mathsf{s}\,(\alpha_r A) \text{ mit } \underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den trunkierten Funktionen der s-Produkt-Felder und den ursprünglichen Feldern untersuchen. Hier ergibt sich das folgende Ergebnis:

Lemma 2.21 Es seien A_i Wightmanfelder, $A_1\,\mathsf{s}\,\cdots\,\mathsf{s}\,A_r$ das s-Produkt der Felder A_i. Dann gilt für die trunkierten Funktionen $W_n^{T,A_1\,\mathsf{s}\cdots\mathsf{s}\,A_r}$ von $A_1\,\mathsf{s}\,\cdots\,\mathsf{s}\,A_r$

$$W_n^{T,A_1\,\mathsf{s}\cdots\mathsf{s}\,A_r} = \sum_{i=1}^{r} W_n^{T,A_i}$$

Beweis: Wir betrachten dafür das erzeugende Funktional von $A_1\,\mathsf{s}\,\cdots\,\mathsf{s}\,A_r$.

$$\begin{aligned}
\omega(e^{tA_1\,\mathsf{s}\cdots\mathsf{s}\,A_r(f)}) &= \omega(e^{tA_1(f)\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes A_r(f)}) \\
&= \omega(e^{tA_1(f)\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}\cdots e^{t\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\otimes A_r(f)}) \\
&= \omega(e^{tA_1(f)}\otimes\cdots\otimes e^{tA_r(f)}) \\
&= \omega_1(e^{tA_1(f)})\cdots\omega_r(e^{tA_r(f)})
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Clusterzerlegungseigenschaft 2.16 erhält man daraus

$$\begin{aligned}
\log\omega(e^{tA_1(f)}\cdots e^{tA_r(f)}) &= \log\omega_1(e^{tA_1(f)}) + \cdots + \log\omega_r(e^{tA_r(f)}) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}W_m^{T,A_1} + \cdots \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}W_m^{T,A_r} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\left(\sum_{i=1}^{r}W_m^{T,A_i}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}W_m^{T,A_1\,\mathsf{s}\cdots\mathsf{s}\,A_r}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Für den Spezialfall eines gewichteten s-Produktes erhalten wir daraus das folgende

Korollar 2.22 Es sei A ein Wightmanfeld, $A_{\underline{\alpha}}$ ein gewichtetes s-Produkt des Feldes A. Dann gilt für die trunkierten Funktionen $W_n^{T,A_{\underline{\alpha}}}$ von $A_{\underline{\alpha}}$

$$W_n^{T,A_{\underline{\alpha}}} = \left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^n\right) W_n^T$$

Beweis: Wir müssen berechnen, was W_n^{T,A_i} für den Fall $A_i = \alpha_i A$ ergibt. Nach der Definition 2.10 der trunkierten Funktionen ist W_n^{T,A_i}, ebenso wie W_n^T, aufgrund der Homogenität der trunkierten Funktionen eine Summe über alle Teilmengen $S = \{s_1, \dots s_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ und $s_1 + \dots + s_k = n$. Dabei fällt für jedes $S \in (S)$ ein kombinatorischer Gewichtsfaktor C_S an:

$$\begin{aligned} W_n^{T,A_i} &= \sum_{(S)} C_S W_{s_1}^{A_i} \cdots W_{s_k}^{A_i} \text{ mit } s_1 + \dots + s_k = n \quad \text{und } \{s_1, \dots s_k\} = S \\ W_n^T &= \sum_{(S)} C_S W_{s_1} \cdots W_{s_k} \text{ mit } s_1 + \dots + s_k = n \quad \text{und } \{s_1, \dots s_k\} = S \end{aligned}$$

aber

$$W_{s_j}^{A_i} = \omega(\alpha_i^{s_j} A^{s_j}) = \alpha_i^{s_j} W_{s_j} \quad j = 1, \dots, k$$

und daher folgt

$$W_n^{T,A_i} = \sum_{(S)} C_S \alpha_i^{s_1} \cdots \alpha_i^{s_k} W_{s_1} \cdots W_{s_k} = \alpha_i^n W_n^T$$

Q.E.D.

Kapitel 3

Beschränkte Felder in 1+1 Dimensionen

Wir wollen in diesem Kapitel einige Beispiele für beschränkte Quantenfelder in $1+1$ Raumzeitdimensionen betrachten. Dabei werden wir zunächst die chiralen Fermifelder $\psi_{L,R}$ untersuchen. Danach werden wir beschränkte Bosefelder und insbesondere die aus chiralen Fermifeldern $\psi_{L,R}$ zusammengesetzen beschränkten Bosefelder $\varphi = \psi_L \otimes \psi_R$ (Buchholzfelder) betrachten. Schließlich wenden wir uns der von Baumann in [Bau99] eingeführten Klasse von beschränkten Bosefelder Φ zu, die wir kurz als Baumannfelder bezeichnen wollen. Wir werden zu motivieren versuchen, warum wir erwarten, daß sich die Baumannfelder Φ als gewichtete s-Produkte von Buchholzfeldern φ darstellen lassen sollten. Abschließend werden wir unsere Vermutung als Theorem formulieren.

3.1 Freie chirale Fermifelder in 1+1 Dimensionen

Wir betrachten Felder, die der freien masselosen Dirac-Gleichung

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0 \tag{3.1}$$

genügen. Da die Dirac-Matrizen γ^μ der Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ genügen, handelt es sich bei den Lösungen der Gleichung (3.1) um Spinoren

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix},$$

wobei N von der Dimension der Darstellung der Dirac-Matrizen γ^μ und damit von der Raumzeitdimension d abhängt. Die Spinorkomponenten genügen den kanonischen Antivertauschungsrelationen zu gleichen Zeiten [IZ80]

$$\begin{aligned} \{\psi_i(t,x),\psi_j(t,y)\} &= 0 \\ \{\psi_i(t,x),\bar{\psi}_j(t,y)\} &= \delta_{ij}\delta^{d-1}(x-y) \end{aligned}$$

die in der Fockraumdarstellung realisiert werden. Da diese Spinorfelder bei raumartigen Abständen antikommutieren, werden sie als Fermifelder bezeichnet.

Diese Antivertauschungsrelationen implizieren, daß mit Testfunktionen verschmierte freie Fermifelder durch beschränkte Operatoren dargestellt werden [AW64]. Dies ist in sofern eine Besonderheit des freien Fermifeldes, als daß z.B. verschmierte freie Bosefelder durch unbeschränkte Operatoren dargestellt werden. Diese Tatsachen stehen im Zusammenhang mit dem für Fermionen geltenden Pauliprinzip. Die Norm der Feldoperatoren kann nämlich nach unten durch die Norm des Anzahloperators $a^*(f)a(f)$, der die Anregungszahl der Mode f in der Fockdarstellung mißt, abgeschätzt werden. Für freie Fermifelder ergibt sich mit geeignet normierten Testfunktionen, daß $\|\psi(f)\| \leqslant 1$ ist, während für freie Bosefelder $\|\Phi(f)\| \geqslant n$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, folgt. Auch wechselwirkende Fermifelder werden im allgemeinen durch unbeschränkte Operatoren dargestellt: In 1+1 Dimensionen konnte Baumann zeigen, daß wechselwirkende Fermifelder notwendig unbeschränkt sein müssen [Bau97].

In der vierdimensionalen Theorie werden Teilchen, die durch (3.1) beschrieben werden als masselose Neutrinos interpretiert, wobei kürzlich das Problem einer empirisch nicht verschwindenden Neutrinoruhemasse aufgetaucht ist. Da wir Felder in $1+1$ Raumzeitdimensionen betrachten wollen, nimmt μ die Werte $\mu = 0,1$ an und die Dirac-Matrizen werden durch 2×2-Matrizen dargestellt. Nun antikommutiert $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1$ mit dem Dirac-Operator $i\gamma^\mu\partial_\mu$, so daß sich die Dirac-Gleichung nach Einführen der Projektionsoperatoren

$$P_\pm = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma^5}{2}$$

in zwei separate Gleichungen

$$\begin{aligned} (\partial_0+\partial_1)P_+\psi(t,x) &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_+\psi(t,x) = \psi_R(t-x) \\ (\partial_0-\partial_1)P_-\psi(t,x) &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_-\psi(t,x) = \psi_L(t+x) \end{aligned}$$

aufspaltet. Die Anteile ψ_L und ψ_R werden als chirale Felder bezeichnet und entsprechen in der vierdimensionalen Theorie Neutrinos mit Helizität -1 bzw. $+1$ (siehe dazu [BŠ84]). Diese chiralen Felder hängen also nur noch von den sogenannten Lichtkegelvariablen $x_+ = t + x$ und $x_- = t - x$ ab. Im masselosen eindimensionalen Fall haben die Spinoren $\psi(t,x)$ in einer Basis, in der γ^5 diagonal ist, also die Form

$$\psi(t,x) = \begin{pmatrix} \psi_L(t+x) \\ \psi_R(t-x) \end{pmatrix}$$

Aus den für die Fermifeldern geltenden kanonischen Antivertauschungsrelationen erhalten wir dann die folgenden Antivertauschungsrelationen für die chiralen Felder $\psi_{L,R}$:

$$\begin{aligned}
\{\psi_L(x_+), \psi_R(x_-)\} &= 0 \\
\{\psi_R(x_-), \psi_R(y_-)\} &= 0 \\
\{\psi_L(x_+), \psi_L(y_+)\} &= 0 \\
\{\psi_R(x_-), \bar{\psi}_R(y_-)\} &= \delta(x_- - y_-) \\
\{\psi_L(x_+), \bar{\psi}_L(y_+)\} &= \delta(x_+ - y_+)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun den Spezialfall reeller chiraler Fermifelder betrachten. Dafür wählen wir die folgende Darstellung der Dirac-Matrizen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann wird die Dirac-Gleichung reell und mit ψ ist auch stets $\psi_{\Re e} = \frac{1}{2}(\psi + \bar{\psi})$ eine (reelle) Lösung. Auch das reelle Fermifeld zerfällt wieder in seine chiralen Bestandteile:

$$\psi_{\Re e,R} = P_+ \psi_{\Re e} = \frac{1}{2}(\psi_R + \bar{\psi}_R)$$

Für die reellen chiralen Felder implizieren die Antivertauschungrelationen der Felder $\psi_{L,R}$

$$\begin{aligned}
\{\psi_{\Re e,R}(x_-), \psi_{\Re e,L}(x_+)\} &= 0 \\
\{\psi_{\Re e,R}(x_-), \psi_{\Re e,R}(y_-)\} &= \delta(x_- - y_-) \\
\{\psi_{\Re e,L}(x_+), \psi_{\Re e,L}(y_+)\} &= \delta(x_+ - y_+)
\end{aligned}$$

Notation 3.1 Wir werden im Folgenden nur reelle chirale Fermifelder betrachten, und lassen daher den Index $\Re e$ in Zukunft weg. Unter ψ_R ist also immer $\psi_{\Re e,R}$ zu verstehen.

An dieser Stelle wollen wir noch eine Formulierung des für Fermionen geltenden Pauli-Prinzips für reelle chirale Fermifelder geben:

Lemma 3.2 Es sei ψ ein reelles chirales Fermifeld, f eine Testfunktion $\in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}\tilde{f} \subset \mathbb{R}^+$. Dann ist $\psi(f)^2 = 0$.

Beweis: Aus den Antivertauschungsrelationen für reelle chirale Fermifelder folgt

$$\begin{aligned}
\psi(f)^2 &= \frac{1}{2}\{\psi(f), \psi(f)\} = \int dx f(x) f(x) \\
&= \int dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{-ipx} \tilde{f}(p) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dq e^{-iqx} \tilde{f}(q) \right) \\
&= \int \int dp dq \delta(p+q) \tilde{f}(p) \tilde{f}(q) = \int dp \tilde{f}(p) \tilde{f}(-p)
\end{aligned}$$

Aber für $\mathrm{supp}\tilde{f} \subset \mathbb{R}^+$ verschwindet dieses Integral. Q.E.D.

Dieses Ergebnis läßt sich wie folgt interpretieren: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ enthält der Operator $\psi(f)$ sowohl Erzeuger- als auch Vernichteranteile, die durch die Beiträge positiver und negativer

Energie zur Fouriertransformierten $\tilde{f}$ von f gegeben sind. Hat aber $\tilde{f}$ nur Träger in $\mathbb{R}^+$, so enthält $\psi(f)$ lediglich Erzeugeranteile, und erzeugt also aus dem Vakuum einen Einteilchenzustand mit Impulsverteilung $\tilde{f}$. $\psi(f)^2$ würde also zwei Teilchen in demselben Zustand erzeugen, was nach dem Pauli-Prinzip verboten ist.

Wir wollen nun noch den Begriff der Skalentransformation einführen. Dabei handelt es sich um Stauchungen und Streckungen der Skala, auf der die Veränderlichen gemessen werden, also Transformationen der Form $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Falls nun die n-Punkt-Funktionen eines Feldes A homogene Funktionen sind, d.h falls sie den Gleichungen

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \lambda^{nd} W(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

genügen, dann wird das Feld A als skalenkovariant mit Skalendimension d bezeichnet (d ist hier nicht die Raumzeitdimension). Das bedeutet dann, daß die Skalentransformationen unitär implementiert sind, und also

$$\mathrm{U}(\lambda) A(x) \mathrm{U}^*(\lambda) = \lambda^d A(\lambda x), \quad \mathrm{U}(\lambda)\Omega = \Omega$$

gilt. In $1+1$ Dimensionen ergibt sich die Besonderheit, daß die Skalentransformationen zusammen mit den Lorentz-Boosts in zwei Anteile aufspalten, von denen jeder nur auf jeweils eine chirale Komponente wirkt. Chirale Felder haben also zwei Skalendimensionen d_L, d_R, für die $d_L + d_R = d$ sein muß.

Bemerkung 3.3 Die Skalendimension eines chiralen Fermifeldes $\psi_{L,R}$ ist $d_{L,R} = \frac{1}{2}$. Dies kann sofort an der Form der 2-Punkt-Funktionen in der Fockraumdarstellung abgelesen werden, aus der sich alle höheren 2n-Punkt-Funktionen ergeben:

$$W_2(x_\pm = x_{2,\pm} - x_{1,\pm}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-i}{x_\pm - i\epsilon} \right) P_\pm$$

3.2 Beispiele beschränkter Bosefelder

Wir wollen uns nun beschränkten Bosefeldern in $1+1$ Dimensionen zuwenden. Daß solche Felder überhaupt existieren, ist nach dem oben gesagten zunächst einmal eine Überraschung. Es hat sich jedoch gezeigt, daß es zahlreiche Beispiele für beschränkte Bosefelder in $1+1$ Dimensionen gibt [Bau97][Reh97]. Als ein im folgenden wichtiges Beispiel führen wir jetzt ein spezielles, von Buchholz vorgeschlagenes, beschränktes Bosefeld ein. Es seien dafür $\psi_L(x_+)$ und $\psi_R(x_-)$ beschränkte reelle chirale Fermifelder, die von den Lichtkegelkoordinaten x_+ und x_- abhängen. Dann sind ψ_L und ψ_R freie Felder, wie in [Bau97] gezeigt wurde. Nun definiert

$$\varphi(x_+, x_-) = \psi_L(x_+) \otimes \psi_R(x_-)$$

ein beschränktes Bosefeld, das wir im folgenden als Buchholzfeld bezeichnen wollen. Für faktorisierende Testfunktionen $F(x_+, x_-) = f_L(x_+) \otimes f_R(x_-) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist die Beschränktheit von φ sofort einsichtig, denn dann gilt

$$\|\varphi(F)\| = \|\psi_L(f_L) \otimes \psi_R(f_R)\| \leqslant \|\psi_L(f_L)\| \|\psi_R(f_R)\|$$

Die Rechnung kann jedoch auf alle $F(x_+, x_-) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ausgedehnt werden, wie in [Reh97] gezeigt wurde.

Bemerkung 3.4 Eine etwas allgemeinere Methode, beschränkte Bosefelder in $1+1$ Dimensionen zu konstruieren, ist, die Forderung nach Realität der konstituierenden Fermifelder fallenzulassen. In diesem Fall können dann ψ_L und ψ_R nach Real- und Imaginärteil zerlegt werden, so daß

$$\varphi(x_+, x_-) = (\psi_{\Re e,L}(x_+) + i\psi_{\Im m,L}(x_+)) \otimes (\psi_{\Re e,R}(x_-) + i\psi_{\Im m,R}(x_-))$$

ist. Die Felder $\psi_{\Re e,L}$, $\psi_{\Im m,L}$, $\psi_{\Re e,R}$ und $\psi_{\Im m,R}$ sind selber wieder reell, so daß $\varphi(x_+, x_-)$ als Summe von 4 beschränkten Feldern dargestellt werden kann und damit selber wieder beschränkt ist. Wir gehen im Folgenden jedoch weiterhin von reellen Fermifeldern aus.

Was sind aber die Kommutatorrelationen des Buchholzfeldes φ? Eine kurze Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
[\varphi(x_+, x_-), \varphi(y_+, y_-)] &= \frac{1}{2}[\psi_L(x_+), \psi_L(y_+)] \otimes \{\psi_R(x_-), \psi_R(y_-)\} + \\
&\quad \{\psi_L(x_+), \psi_L(y_+)\} \otimes \frac{1}{2}[\psi_R(x_-), \psi_R(y_-)] \\
&= 0 \quad \text{falls} \quad (x_- - y_-)(x_+ - y_+) \neq 0
\end{aligned}$$

Das Buchholzfeld φ kommutiert also sowohl für raumartige, als auch für zeitartige Abstände. Für die Skalendimension des Buchholzfeldes ergibt sich aus den Rechenregeln für Tensorprodukte $d = 1$.

Wir wollen jetzt die trunkierten Funktionen des Buchholzfeldes φ berechnen. Aufgrund der Antikommutatorrelationen für die Felder $\psi_{L,R}$ wissen wir bereits, daß

$$\omega(\psi_{L,R}(f_{L,R})^m) = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } m \\ \omega(\psi_{L,R}(f_{L,R})\psi_{L,R}(f_{L,R}))^{\frac{m}{2}} & \text{für gerades } m \end{cases}$$

ist. Entsprechendes gilt dann für $\varphi(F) = \psi(f_L) \otimes \psi(f_R)$ mit $F = f_L \otimes f_R$. In diesem Fall ist $\mathcal{V}_{2m} = \mathcal{V}_2^m$. Damit erhalten wir für das erzeugende Funktional [Bau97]

$$\begin{aligned}
\omega(e^{i\varphi(F)}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \omega(\varphi(F)^m) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \omega(\varphi(F)\varphi(F))^k \\
&= \cos(\mathcal{V}_2^T(F \otimes F)^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe der Clusterzerlegungseigenschaft 2.16 die Relation

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \mathcal{V}_m^T(F^{\otimes m}) = \log\cos \mathcal{V}_2(F \otimes F)^{\frac{1}{2}}$$

Durch Reihenentwicklung von $\log\cos x$ erhalten wir durch Vergleich das folgende

Lemma 3.5 [Bau97] Die trunkierten Funktionen des Buchholzfeldes φ berechnen sich aus seinen n-Punkt-Funktionen gemäß

$$\mathcal{V}_{2n}^{T}(F^{\otimes 2n}) = \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n} B_{2n} \mathcal{V}_2(F \otimes F)^n,$$

Dabei sind B_{2n} die Bernoulli-Zahlen in der Konvention von [RG63] (siehe Anhang A.3).

Bemerkung 3.6 Aus den Buchholzfeldern mit Skalendimension $d = 1$ lassen sich nun auf die folgende Weise weitere skalare, beschränkte Bosefelder mit beliebiger ungerader Skalendimension generieren. Definieren wir

$$\varphi^{(m)} := \Box^m \varphi = \partial^m \psi \otimes \partial^m \psi$$

so ist $\varphi^{(m)}(F) = \varphi(\Box^m F)$ noch immer beschränkt, da die Ableitungen lediglich auf die Testfunktionen abgewälzt werden. Die Skalendimension der Fermifelder $\partial^m \psi$ lesen wir aus der Fockdarstellung der 2-Punkt-Funktion ab. Da

$$W_2(x_\pm = x_{2,\pm} - x_{1,\pm}) = \frac{(2m)!}{2\pi} \left(\frac{-i}{x_\pm - i\epsilon} \right)^{2m+1} P_\pm$$

ist, folgt $d = m + \frac{1}{2}$. Nach den Rechenregeln für Tensorprodukte hat dann $\varphi^{(m)}(F)$ Skalendimension $d = 2m + 1$. Für die trunkierten n-Punkt-Funktionen der Buchholzfelder $\varphi^{(m)}(F)$ zur Skalendimension $2m + 1$ folgt

$$\mathcal{V}_{2n}^{(m)T}(F^{\otimes 2n}) = \mathcal{V}_{2n}^{T}((\Box^m F)^{\otimes 2n})$$

Bemerkung 3.7 Weitere beschränkte Bosefelder lassen sich konstruieren, indem die Fermifelder in den Tensorprodukteinträgen links und rechts verschieden oft abgeleitet werden. Dann hat

$$\varphi^{(m_L, m_R)}(F) := \partial^{m_L} \psi(f_L) \otimes \partial^{m_R} \psi(f_R)$$

Skalendimensionen $d_L = m_L + \frac{1}{2}$ und $d_R = m_R + \frac{1}{2}$. Diese Felder sind allerdings nicht mehr skalar, da sie sich unter Lorenztransformationen Λ gemäß

$$\mathrm{U}(\Lambda) \varphi^{(m_L, m_R)}(F) \mathrm{U}(\Lambda)^* = e^{t(d_L - d_R)} \varphi^{(m_L, m_R)}(F_{\{\Lambda\}})$$

transformieren.

3.3 Baumannfelder

In der dieser Arbeit zugrunde liegenden Veröffentlichung [Bau99] betrachtet Baumann die Klasse beschränkter Bosefelder Φ, die durch die folgenden Annahmen charakterisiert ist:

A 1 Φ ist ein skalares neutrales Bosefeld in $1 + 1$ Dimensionen.

A 2 Φ kommutiert für raumartige und zeitartige Abstände, d.h.

$$[\Phi(x_+, x_-), \Phi(y_+, y_-)] = 0 \quad \text{falls} \quad (x_+ - y_+)(x_- - y_-) \neq 0.$$

A 3 Φ ist skalenkovariant.

A 4 Φ ist beschränkt, d.h. $\|\Phi(F)\| < \infty$ für alle $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Bemerkung 3.8 Kommutativität für raumartige und zeitartige Abstände verlangt, daß die Skalendimension d des Feldes Φ aus $\mathbb{N}_0$ sein muß.

Bemerkung 3.9 Eine andere Methode, beschränkte Bosefelder zu konstruieren, wurde von Rehren in [Reh97] angegeben. Diese Felder kommutieren für raumartige, jedoch nicht für zeitartige Abstände und fallen daher nicht in die Klasse der Baumannfelder.

Die von Baumann betrachtete Klasse beschränkter Bosefelder soll hier eingehend untersucht werden. Dabei spielt der folgende, von Baumann in [Bau99] bewiesene Satz eine zentrale Rolle:

Satz 3.10 (Baumann) Φ erfülle die Voraussetzungen **A1 - A4** und habe Skalendimension $d \in \mathbb{N}$, $d = 2m+1$. Dann existiert eine Folge positiver Zahlen $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, so daß die trunkierten n-Punkt-Funktionen $\mathcal{W}_n^T$ des Feldes Φ durch die Relationen

$$\mathcal{W}_{2n}^T(F_1, \ldots, F_{2n}) = c_{2n} \mathcal{V}_{2n}^{(m)T}(F_1, \ldots, F_{2n}) \quad \text{und} \quad \mathcal{W}_{2n+1}^T \equiv 0$$

mit den n-Punkt-Funktionen $\mathcal{V}_n^{(m)T}$ des Buchholzfeldes $\varphi^{(m)} = \partial^m \psi_L \otimes \partial^m \psi_R$ verknüpft sind.

Bemerkung 3.11 Die in den Satz zusätzlich eingehende Voraussetzung ungerader Skalendimension ist vor allem auf technische Schwierigkeiten im Beweis zurückzuführen. Baumann gibt aber gute Argumente dafür an, daß beschränkte Bosefelder mit gerader Skalendimension in $1+1$ Dimensionen gar nicht existieren [Bau99].

Bemerkung 3.12 Der Satz von Baumann läßt sich ohne weiteres auf nichtskalare Felder $\varphi^{(m_L, m_R)}(F)$ verallgemeinern, da im Beweis die linkschiralen und rechtschiralen Anteile der Felder nicht vermischt werden.

Der Vergleich des Satzes von Baumann mit Korollar 2.22 legt nun die Vermutung nahe, daß es sich bei den Baumannfeldern Φ um gewichtete s-Produkte von Buchholzfeldern $\varphi^{(m)}$ in der Form

$$\Phi = \varphi^{(m)}_{\underline{\alpha}} = \alpha_1 \varphi^{(m)} \, \mathsf{s} \cdots \mathsf{s} \, \alpha_r \varphi^{(m)}$$

handelt. In diesem Fall folgt ja aus Korollar 2.22 und Lemma 3.5 gerade, daß

$$\mathcal{W}_{2n}^T = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{2n} \right) \mathcal{V}_{2n}^{(m)T} \quad \text{und} \quad \mathcal{W}_{2n+1}^T \equiv 0$$

gilt. Wie sich herausstellt, ist aber die Bildung endlicher s-Produkte im Allgemeinen nicht ausreichend. Wir lassen also den Fall $r \to \infty$ zu und definieren unendliche gewichtete s-Produkte von Buchholzfeldern wie folgt:

Definition 3.13 Es sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{2n}$ konvergiere für alle n. Unter dem unendlichen gewichteten s-Produkt

$$\Phi = \varphi_{\underline{\alpha}}^{(m)} = \alpha_1 \varphi^{(m)} \,\mathsf{s}\, \cdots \,\mathsf{s}\, \alpha_r \varphi^{(m)} \,\mathsf{s}\, \cdots$$

verstehen wir dasjenige Feld Φ, dessen trunkierte Funktionen durch

$$\mathcal{W}_{2n}^T = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{2n} \right) \mathcal{V}_{2n}^{(m)T}$$

gegeben sind.

Bemerkung 3.14 Ein unendliches gewichtetes s-Produkt ist nur dann beschränkt, falls $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$.

Nun können wir das Ergebnis der Arbeit in der folgenden Form als Theorem formulieren:

Theorem 3.15 Jedes Feld Φ, daß **A1-A4** erfüllt und ungerade Skalendimension $d = 2m+1$ hat, läßt sich als endliches oder unendliches gewichtetes s-Produkt von Buchholzfeldern $\varphi^{(m)} = \partial^m \psi_L \otimes \partial^m \psi_R$ schreiben.

Bemerkung 3.16 Um 3.15 zu beweisen, muß gezeigt werden, daß die c_{2n} von der Form

$$c_{2n} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{2n} \qquad \text{bzw.} \quad c_{2n} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{2n}$$

sind, denn dann folgt die Behauptung aus der Übereinstimmung der trunkierten Funktionen von Φ und $\varphi_{\underline{\alpha}}^{(m)}$. Wir werden sehen, daß die Bedingung der Wightmanpositivität zusammen mit der Beschränktheit des Feldes Φ genau diese Form der c_{2n} mit $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$ erzwingt.

Notation 3.17 Wir werden im folgenden der Einfachheit halber nur den Fall $m = 0$, $d = 1$ betrachten. Dies bedeutet aber keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit, denn die explizite Form der 2-Punkt-Funktionen geht in den Beweis von 3.15 nicht ein.

Kapitel 4

Wightmanpositivität der Baumannfelder

Wir werden nun damit beginnen, Theorem 3.15 zu beweisen. Dafür ist die Wightmanpositivität der Baumannfelder von zentraler Bedeutung. Wie sofort ersichtlich ist, können die c_{2n} nämlich nicht beliebig gewählt werden, da das resultierende Feld Φ die Wightmanpositivität verletzten würde. Für $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ mit $\bar{F} = F$ sollte z.B. das Schwankungsquadrat eines Baumannfeldes

$$\begin{aligned}
\omega(\Phi(F)^4) - \omega(\Phi(F)^2)^2 &= \mathcal{W}_4^T(F,F,F,F) + 3\mathcal{W}_2^T(F,F)\mathcal{W}_2^T(F,F) - W_2^T(F,F)\mathcal{W}_2^T(F,F) \\
&= c_4\mathcal{V}_4^T(F,F,F,F) + 2c_2^2\mathcal{V}_2^T(F,F)\mathcal{V}_2^T(F,F) \\
&= c_4\mathcal{V}_4(F,F,F,F) - 3c_4\mathcal{V}_2(F,F)\mathcal{V}_2(F,F) + 2c_2^2\mathcal{V}_2(F,F)\mathcal{V}_2(F,F) \\
&= c_4\mathcal{V}_2(F,F)\mathcal{V}(F,F) - 3c_4\mathcal{V}_2(F,F)\mathcal{V}_2(F,F) + 2c_2^2\mathcal{V}_2(F,F)\mathcal{V}_2(F,F) \\
&= 2(c_2^2 - c_4)\mathcal{V}_2(F,F)\mathcal{V}_2(F,F) \geqslant 0
\end{aligned}$$

sein, und damit muß $c_2^2 - c_4 \geqslant 0$ gelten. Wir wollen jetzt ein System von Ungleichungen an die c_{2n} herleiten, um sie dann später in der Form $c_{2n} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{2n}$ festzulegen.

4.1 Wightmanpositivität

Um eine ausreichende Menge von Ungleichungen zu erhalten reicht es nicht aus, die Wightmanpositivität für jeweils nur eine Testfunktion auszuwerten. Erste Versuche mit den daraus resultierenden Bedingungen haben gezeigt, daß dieser Satz von Ungleichungen nicht alle Relationen impliziert, die für s-Produkte gelten sollten. Um unseren hinreichend großen Satz von Ungleichungen zu etablieren, müssen wir zunächst einige Definitionen vereinbaren:

Definition 4.1 Es seien $F_1, \dots, F_k$ Testfunktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $k \in \mathbb{N}$. Unter dem maximalen Kommutator $\mathcal{K}$ der Funktionen $F_1, \dots, F_k$ mit Länge k verstehen wir den Ausdruck

$$\mathcal{K} = [[\dots[F_1, F_2], \dots], F_k] \quad \text{und damit} \quad \bar{\mathcal{K}} = [\bar{F}_k, [\dots[\bar{F}_2, \bar{F}_1]]\dots]$$

Dabei sind die Produkte der Funktionen als Produkte in der Borchersalgebra aufzufassen, d.h. $[F_1, F_2] = F_1 \otimes F_2 - F_2 \otimes F_1$ (siehe z.B. [Bor62]). Für andere Klammerungen gilt ebenfalls das in diesem Zusammenhang wichtige Lemma 4.3, doch wollen wir uns hier auf diese spezielle Klammerung beschränken.

Entsprechend schreiben wir

$$\Phi(\mathcal{K}) = [[\cdots[\Phi(F_1), \Phi(F_2)], \dots], \Phi(F_k)] \quad \text{und} \quad \Phi(\mathcal{K})^* = \Phi(\bar{\mathcal{K}}).$$

Um jetzt die Wightmanpositivität des Feldes Φ so weit wie möglich auszunutzen, betrachten wir Polynome $P(\Phi)$, die wir wie folgt definieren wollen:

Definition 4.2 Es seien $\mathcal{K}_i^{(n)}$ maximale Kommutatoren von $k_i^{(n)}$ Testfunktionen, $n = 1, \dots, N$ und $i = 1, \dots, l$. Dann definieren wir das Polynom $P(\Phi)$ vom Grad l als

$$P(\Phi) = \sum_{n=1}^{N} P^{(n)}(\Phi) \equiv \sum_{n=1}^{N} a_n \Phi(\mathcal{K}_1^{(n)}) \cdots \Phi(\mathcal{K}_l^{(n)})$$

mit beliebigen Koeffizienten a_n.

Hier haben wir in jedem Summanden dieselbe Anzahl l von Produkten von Feldoperatoren $\Phi(\mathcal{K})$ gewählt, da wir allgemeinere Bedingungen mit $l = l(n)$ nicht auswerten können und auch nicht benötigen werden. Nun ist nach Lemma 2.9 der Ausdruck

$$\omega(P(\Phi)^* P(\Phi)) \geqslant 0 \quad \text{für jede Wahl der} \quad a_n. \tag{4.1}$$

Gleichung (4.1) ist aber äquivalent zur positiven Definitheit der symmetrischen Bilinearform M mit

$$M = \begin{pmatrix} \omega(P^{(1)*}P^{(1)}) & \omega(P^{(1)*}P^{(2)}) & \cdots & \omega(P^{(1)*}P^{(N)}) \\ \omega(P^{(2)*}P^{(1)}) & \omega(P^{(2)*}P^{(2)}) & \cdots & \omega(P^{(2)*}P^{(N)}) \\ \vdots & & \ddots & \\ \omega(P^{(N)*}P^{(1)}) & \omega(P^{(N)*}P^{(2)}) & \cdots & \omega(P^{(N)*}P^{(N)}) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Was sind die Matrixelemente von M? Um diese Frage beantworten zu können müssen wir zunächst einige Lemmata über maximale Kommutatoren beweisen.

4.2 Lemmata über Kommutatoren

Es wird unsere Strategie sein, die Matrixelemente $\omega(P^{(m)*}P^{(n)})$ nach trunkierten Funktionen zu entwickeln. Was läßt sich also über das Verhalten von maximalen Kommutatoren bei einer solchen Entwicklung sagen?

Lemma 4.3 Bei der Entwicklung von N-Punkt-Funktionen nach trunkierten kompensieren sich alle Terme, bei denen Funktionen aus maximalen Kommutatoren in verschiedenen trunkierten Funktionen auftreten, d.h.

$$\mathcal{W}_N(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_l) = \sum_{(X_s)} \prod_s \mathcal{W}^T_{k^{(s)}}(\mathcal{K}_{i_1^{(s)}}, \ldots, \mathcal{K}_{i^{(s)}_{|X_s|}}) \quad i_1^{(s)} < \ldots < i^{(s)}_{|X_s|} \in X_s$$

mit $k^{(s)} = \sum_{i_j^{(s)} \in X_s} k_{i_j^{(s)}}$.

Mit anderen Worten: Wir können bei der Entwicklung von $\mathcal{W}_N(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_l)$ so vorgehen, als wenn die $\mathcal{K}_i$ selber einfache Funktionen wären.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für einen maximalen Kommutator $\mathcal{K}$ beliebiger Länge zu zeigen. Die Behauptung folgt dann durch wiederholte Anwendung des Arguments. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion nach der Länge der maximalen Kommutatoren.

- Induktionsannahme: Es seien $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ maximale Kommutatoren der Länge N_1, N_2. Es sei $\mathcal{K} = [\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ der maximale Kommutator der Länge $M = N_1 + N_2$. Dann tragen in der Entwicklung von $\mathcal{W}(\mathcal{K})$ nur Terme bei, in denen $\mathcal{K}$ vollständig in einer trunkierten Funktion auftaucht.

- Induktionsanfang: Es sei $\mathcal{K}_1 = F$ und $\mathcal{K}_2 = G$ mit $F, G \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und somit $M = 2$. Dann folgt

$$\mathcal{W}(\mathcal{K}) = \mathcal{W}([F,G]) = \mathcal{W}(F,G) - \mathcal{W}(G,F)$$

  Entwickeln wir diese Terme jetzt nach trunkierten erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\mathcal{K}) &= \mathcal{W}^T(F,G) + \mathcal{W}^T(F)\mathcal{W}^T(G) - \mathcal{W}^T(G,F) - \mathcal{W}^T(G)\mathcal{W}^T(F) \\ &= \mathcal{W}^T([F,G]) = \mathcal{W}^T(\mathcal{K})\end{aligned}$$

- Induktionsschritt: Sei also die Annahme für $\mathcal{K}$ mit der Länge M bewiesen. Für $\mathcal{K}_s$ mit Länge $M+1$ gilt $\mathcal{K}_s = [K_{s_1}, K_{s_2}]$. Dabei sind die Längen von $\mathcal{K}_{s_1}$ und $\mathcal{K}_{s_2}$ kleiner M. Dann folgt

$$\mathcal{W}(\mathcal{K}_s) = \mathcal{W}([\mathcal{K}_{s_1}, \mathcal{K}_{s_2}]) = \mathcal{W}(\mathcal{K}_{s_1}, \mathcal{K}_{s_2}) - \mathcal{W}(\mathcal{K}_{s_2}, \mathcal{K}_{s_1})$$

  Nach der Entwicklung nach trunkierten erhalten wir nach der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\mathcal{K}_s) &= \mathcal{W}^T(\mathcal{K}_{s_1}, \mathcal{K}_{s_2}) + \mathcal{W}^T(\mathcal{K}_{s_1})\mathcal{W}^T(\mathcal{K}_{s_2}) - \mathcal{W}^T(\mathcal{K}_{s_2}, \mathcal{K}_{s_1}) - \mathcal{W}^T(\mathcal{K}_{s_2})\mathcal{W}^T(\mathcal{K}_{s_1}) \\ &= \mathcal{W}^T(\mathcal{K}_s)\end{aligned}$$

Q.E.D.

Bemerkung 4.4 Aus Lemma 4.3 folgt natürlich, daß auch bei der Entwicklung von $\mathcal{W}^T_N$ nach $\mathcal{W}_n$ die maximalen Kommutatoren erhalten bleiben. Dafür muß die Formel lediglich nach $\mathcal{W}^T_N$ aufgelöst werden. Diese Entwicklung von $\mathcal{W}^T_N$ nach $\mathcal{W}_n$ werden wir in Zukunft als Rückentwicklung bezeichnen. Wir werden im Zusammenhang mit den Partitionspolynomen darauf zurückkommen.

Wir wollen uns nun maximalen Kommutatoren von Buchholzfeldern zuwenden. Um für diese weitere Lemmata zu beweisen, müssen wir eine spezielle Wahl für die Funktionen in den maximalen Kommutatoren treffen. Auf der einen Seite machen wir Annahmen über den Träger einer Funktion $\tilde{f}_0$, um für den Operator $\psi(f_0)$, der nur Erzeugeranteile enthalten soll, das Pauli-Prinzip ausnutzen zu können (Lemma 3.2). Weiter müssen wir Annahmen über die Träger weiterer Funktionen $\tilde{f}_i$ machen, um die spektralen Träger von Vektoren $\psi(f_i)\Omega$ zu kennen. Diese Eigenschaften werden wir im Beweis von Lemma 4.7 benötigen. Auf der anderen Seite benötigen wir noch Annahmen über die Vertauschungsrelationen der Operatoren $\psi(f_0)$ und $\psi(f_i)$, um die Form von maximalen Kommutatoren von Buchholzfeldern in diesem Spezialfall explizit angeben zu können. Wir wählen also die Funktionen f_0 und $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ für $i = 1, \ldots, l$ wie folgt:

Annahme 1 Es sei f_0 eine komplexe Testfunktion mit $\text{supp}\tilde{f}_0 \subset \mathbb{R}^+$

Annahme 2 Es seien f_i reelle Testfunktionen mit $\text{supp}\tilde{f}_i \cap \text{supp}\tilde{f}_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$

Annahme 3 Es sei $\{\psi(f_0), \psi(f_i)\} = 0$

Funktionen, die unsere Annahmen erfüllen, existieren. Wir können z.B. Funktionen wählen, für die $\text{supp}(\tilde{f}_0) = (0,1)$ und $\text{supp}(\tilde{f}_i) = (i, i+1) \cup (-i, -i-1)$ ist. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int dk \tilde{f}_0(k) \overline{\tilde{f}_j(k)} = \int dk \tilde{f}_0(k) \tilde{f}_j(-k) = \frac{1}{2\pi} \int dk \int dx_0 f_0(x_0) e^{ikx_0} \int dx_j f_j(x_j) e^{-ikx_j} \\ &= \int dx_0 f_0(x_0) \int dx_j f_j(x_j) \delta(x_0 - x_j) = \int dx f_0(x) f_j(x) \end{aligned}$$

und damit ist Annahme 3 erfüllt (hier ist oBdA $d = \frac{1}{2}$). Außerdem wählen wir noch eine Normierung der Testfunktionen derart, daß $\{\psi(f_i), \psi(f_i)\} = \{\psi(\bar{f}_0), \psi(f_0)\} = \mathbb{1}$ ist. Dann haben wir wegen Annahme 1 $\psi(\bar{f}_0)\psi(f_0)\Omega = \Omega$ und $\psi(f_0)^2 = 0$. Unsere speziellen maximalen Kommutatoren von Buchholzfeldern definieren wir nun wie folgt:

Definition 4.5 Unter einem speziellen maximalen Kommutator $\mathcal{K}_i$ der Länge k_i verstehen wir

$$\mathcal{K}_i = \underbrace{[[\ldots[f_0 \times f_i, f_i \times f_i], \ldots, f_i \times f_i]]}_{k_i - 1 \quad \text{Kommutatoren}}$$

Dabei verstehen wir unter dem Produkt $f \times g$ die Funktion $(f \times g)(t, x) = f(t-x)g(t+x)$. Einen Kommutator $\mathcal{K}_i$ nennen wir von geradem Typ, falls k gerade ist. Sonst nennen wir ihn von ungeradem Typ. Wir können nun die Form der speziellen maximalen Kommutatoren von Buchholzfeldern explizit angeben:

Lemma 4.6 Für spezielle maximale Kommutatoren von Buchholzfeldern gilt mit unserer Wahl der Funktionen f_0 und f_i:

$$\varphi(\mathcal{K}_i) = \begin{cases} \psi(f_0)\psi(f_i) \otimes \mathbb{1} & \text{falls } k_i \text{ gerade} \\ \psi(f_0) \otimes \psi(f_i) & \text{falls } k_i \text{ ungerade} \end{cases}$$

BEWEIS: Die Aussage des Lemmas hängt nur von der Länge k_i der Kommutatoren ab. Es ist

$$
\begin{aligned}
k_i = 1: \quad & \varphi(\mathcal{K}_i) = \psi(f_0) \otimes \psi(f_i) \\
k_i = 2: \quad & \varphi(\mathcal{K}_i) = [\psi(f_0) \otimes \psi(f_i), \psi(f_i) \otimes \psi(f_i)] \\
& \quad = \psi(f_0)\psi(f_i) \otimes \psi(f_i)\psi(f_i) - \psi(f_i)\psi(f_0) \otimes \psi(f_i)\psi(f_i) \\
& \quad = \psi(f_0)\psi(f_i) \otimes \psi(f_i)\psi(f_i) + \psi(f_0)\psi(f_i) \otimes \psi(f_i)\psi(f_i) \\
& \quad = \psi(f_0)\psi(f_i) \otimes \{\psi(f_i), \psi(f_i)\} \\
& \quad = \psi(f_0)\psi(f_i) \otimes \mathbb{1} \\
k_i = 3: \quad & \varphi(\mathcal{K}_i) = [\psi(f_0)\psi(f_i) \otimes \mathbb{1}, \psi(f_i) \otimes \psi(f_i)] \\
& \quad = \psi(f_0)\psi(f_i)\psi(f_i) \otimes \psi(f_i) - \psi(f_i)\psi(f_0)\psi(f_i) \otimes \psi(f_i) \\
& \quad = \psi(f_0)\psi(f_i)\psi(f_i) \otimes \psi(f_i) + \psi(f_0)\psi(f_i)\psi(f_i) \otimes \psi(f_i) \\
& \quad = \psi(f_0)\{\psi(f_i), \psi(f_i)\} \otimes \psi(f_i) \\
& \quad = \psi(f_0) \otimes \psi(f_i)
\end{aligned}
$$

Also sind $\varphi(\mathcal{K}_i)$ für $k_i = 1$ und $k_i = 3$ gleich, und das Verfahren kann iteriert werden. Q.E.D.

Wie bereits erwähnt, wollen wir nun die Wahl der Träger der Funktionen $\tilde{f}_0$ und $\tilde{f}_i$ ausnutzen, um Aussagen über die spektralen Träger der in einer n-Punkt-Funktion vorkommenden Vektoren zu machen. Am Ende werden uns dann diese Trägereigenschaften garantieren, daß nur sehr wenige, leicht zu kontrollierende Terme bei der Entwicklung von $\mathcal{V}_k^T$ nach $\mathcal{V}_k$ übrig bleiben:

Lemma 4.7 Für $A, B \subset \{1, \ldots, l\}$, $A \cup B \neq \emptyset$, ist mit unserer Wahl der Testfunktionen f_0 und f_i nur dann

$$
\mathcal{V}_n(\bar{\mathcal{K}}_{i_{|A|}}, \ldots, \bar{\mathcal{K}}_{i_1}, \mathcal{K}_{j_1}, \ldots, \mathcal{K}_{j_{|B|}}) \neq 0 \qquad \begin{aligned} \{i_1, \ldots, i_{|A|}\} &= A \\ \{j_1, \ldots, j_{|B|}\} &= B \end{aligned}
$$

falls $A = B$ und $|A| = 1$.

BEWEIS: Wir werden im Beweis von Lemma 2.8 Gebrauch machen, das besagt, daß $\mathcal{V}(\Psi)$ verschwindet, falls $0 \notin \mathrm{Sp}(\Psi)$. Außerdem müssen wir diejenigen Fälle unterscheiden, in denen die beteiligten Kommutatoren entweder von geradem oder ungeradem Typ sind.

- Falls $|A| > 1$, so ist die Anregung $\psi(\bar{f}_0)$ in $\mathcal{V}_n$ mindestens zweimal vorhanden. Da aber $\psi(\bar{f}_0)$ mit den $\psi(f_i)$ antikommutiert, haben wir an einer Stelle in

$$
\Phi(\bar{\mathcal{K}}_{i_{|A|}}) \cdots \Phi(\bar{\mathcal{K}}_{i_1})\Phi(\mathcal{K}_{j_1}) \cdots \Phi(\mathcal{K}_{i_{|B|}})\Omega
$$

  einen Term $\psi(\bar{f}_0)^2$, und dieser verschwindet nach Lemma 3.2. Damit verschwindet der ganze Vektor. Dasselbe gilt für $|B| > 1$ und $\psi(f_0)$.

- Falls $A = \emptyset$ und $|B| = 1$, so ist

$$
\mathcal{V}(\mathcal{K}_j) = \begin{cases} \omega(\psi(f_0))\omega(\psi(f_j)) \\ \omega(\psi(f_0)\psi(f_j))\omega(\mathbb{1}) \end{cases} = 0
$$

da die 1-Punkt-Funktionen freier Fermifelder verschwinden. Ähnlich für $B = \emptyset$ und $|A| = 1$. Wir müssen also nur noch die Vektoren $\Phi(\bar{\mathcal{K}}_i)\Phi(\mathcal{K}_j)\Omega$ für die Fälle $i = j$ und $i \neq j$ betrachten.

- Sei zunächst $i \neq j$. Falls $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ nicht vom selben Typ sind, so ist

$$\mathcal{V}(\bar{\mathcal{K}}_i, \mathcal{K}_j) = \begin{cases} \omega(\psi(\bar{f}_0)\psi(f_i)\psi(f_0))\omega(\psi(f_j)) \\ \omega(\psi(\bar{f}_0)\psi(f_j)\psi(f_0))\omega(\psi(f_i)) \end{cases} = \begin{cases} \omega(\bar{\psi}(f_i))\omega(\psi(f_j)) \\ \omega(\psi(f_j))\omega(\psi(f_i)) \end{cases} = 0$$

Falls $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ vom selben Typ sind, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(\Phi(\bar{\mathcal{K}}_i)\Phi(\mathcal{K}_j)\Omega) &= \begin{cases} \mathrm{Sp}(\psi(\bar{f}_0)\psi(f_i)\psi(f_0)\psi(f_j)\Omega \otimes \Omega) \\ \mathrm{Sp}(\psi(\bar{f}_0)\psi(f_o)\Omega \otimes \psi(f_i)\psi(f_j)\Omega) \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{Sp}(\psi(f_i)\psi(f_j)\Omega \otimes \Omega) \\ \mathrm{Sp}(\Omega \otimes \psi(f_i)\psi(f_j)\Omega) \end{cases} \\ &\subset \begin{cases} (\mathrm{supp}\tilde{f}_i + \mathrm{supp}\tilde{f}_j) \times \{0\} \\ \{0\} \times (\mathrm{supp}\tilde{f}_i + \mathrm{supp}\tilde{f}_j) \end{cases} \end{aligned}$$

Aber in keinem dieser spektralen Träger ist die Null enthalten. Daher ist $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{K}}_i, \mathcal{K}_j) = 0$

- Für den Fall $i = j$ erhalten wir allerdings

$$\mathcal{V}(\bar{\mathcal{K}}_i, \mathcal{K}_i) = \begin{cases} \omega(\psi(\bar{f}_0)\psi(f_i)\psi(f_0)\psi(f_i))\omega(\mathbb{1}) \\ \omega(\psi(\bar{f}_0)\psi(f_o))\omega(\psi(f_i)\psi(f_i)) \end{cases} = \begin{cases} \omega(\psi(f_i)\psi(f_i))\omega(\mathbb{1}) \\ \omega(\mathbb{1})\omega(\psi(f_i)\psi(f_i)) \end{cases} = \frac{1}{2}$$

Q.E.D.

4.3 Partitionspolynome und erste Positivitätseigenschaften

Bevor wir uns nun wieder den Matrixelementen von M aus Gleichung (4.2) zuwenden, müssen wir noch ein weiteres Hilfsmittel einführen. Am Schluß dieses Teilabschnitts werden wir dann schon erste Ungleichungen für unsere c_{2k} aus der Wightmanpositivität ableiten können. Die Aussagen dieses Abschnittes sind von der speziellen Wahl der Funktionen f_0 und f_i unabhängig. Wir betrachten den Ausdruck

$$\mathcal{W}_{2N}(F_1, \ldots, F_{2N})$$

mit Testfunktionenen $F_1, \ldots, F_{2N} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Wie bereits erwähnt ist unsere Strategie, diesen Ausdruck nach trunkierten zu entwickeln und die Relation $\mathcal{W}^T_{2k} = c_{2k}\mathcal{V}^T_{2k}$ aus dem Satz von Baumann auszunutzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{2N}(F_1, \ldots, F_{2N}) &= \sum_{(X_s)} \prod_s \mathcal{W}^T_{|X_s|}(F_{i_1^{(s)}}, \ldots, F_{i^{(s)}_{|X_s|}}) \\ &= \sum_{(X_s)} \prod_s c_{|X_s|} \mathcal{V}^T_{|X_s|}(F_{i_1^{(s)}}, \ldots, F_{i^{(s)}_{|X_s|}}) \end{aligned}$$

wobei die Summe sich über alle Partitionen der Menge $\{1, \ldots, 2N\}$ erstreckt. Nun wollen wir diesen Ausdruck zurückentwickeln. Dafür definieren wir das folgende:

Definition 4.8 Es sei $(X_s) = \{X_1, \ldots, X_r\}$ eine Partition der Menge $\{1, \ldots, 2N\}$. Der bei der Rückentwicklung von

$$\sum_{(X_s)} \prod_s c_{|X_s|} \mathcal{V}^T_{|X_s|}(F_{i_1^{(s)}}, \ldots, F_{i^{(s)}_{|X_s|}}) = \sum_{(X_s)} c_{|X_1|,\ldots,|X_r|} \prod_s \mathcal{V}_{|X_s|}(F_{i_1^{(s)}}, \ldots, F_{i^{(s)}_{|X_s|}})$$

auftretende Koffizient $c_{|X_1|,\ldots,|X_r|}$ von

$$\prod_s \mathcal{V}_{|X_s|}(F_{i_1^{(s)}}, \ldots, F_{i^{(s)}_{|X_s|}})$$

ist ein Polynom in den Koeffizienten c_{2k} und wird als Partitionspolynom bezeichnent. Insbesondere ist c_{2N} der Koeffizient von $\mathcal{V}_{2N}(F_1, \ldots, F_{2N})$. Die Koeffizienten c_{2k} werden wir daher als elementare Partitionspolynome bezeichnen.

Bemerkung 4.9 Diese Definition ist konsistent in dem Sinne, daß die Partitionspolynome nicht von den Funktionen F_i abhängen. Denn sie berechnen sich gemäß einer festen Kombinatorik aus den elementaren Partitionspolynomen, die selber wieder nur von $|X_i|$ abhängen.

Bemerkung 4.10 Per Definition sind die Partitionspolynome symmetrisch in ihren Indizes, da eine Vertauschung der Indizes einer Vertauschung der Teilmengen in derselben Partition der Menge $\{1, \ldots, 2N\}$ entspricht. Dies aber verändert die Partition nicht.

Nun können wir weiter umformen und erhalten

$$\mathcal{W}_{2N}(F_1, \ldots, F_{2N}) = \sum_{(X_s)} c_{|X_1|,\ldots,|X_r|} \prod_s \mathcal{V}_{|X_s|}(F_{i_1^{(s)}}, \ldots, F_{i^{(s)}_{|X_s|}}) \tag{4.3}$$

Diese Definition der Partitionspolynome wollen wir auf Ausdrücke der Form

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{2N}(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_l) &= \sum_{(X_s)} \prod_s \mathcal{W}^T_{k^{(s)}}(\mathcal{K}_{i_1^{(s)}}, \ldots, \mathcal{K}_{i^{(s)}_{|X_s|}}) && (4.4)\\
&= \sum_{(X_s)} \prod_s c_{k^{(s)}} \mathcal{V}^T_{k^{(s)}}(\mathcal{K}_{i_1^{(s)}}, \ldots, \mathcal{K}_{i^{(s)}_{|X_s|}}) && (4.5)\\
&= \sum_{(X_s)} c(X_s) \prod_s \mathcal{V}_{k^{(s)}}(\mathcal{K}_{i_1^{(s)}}, \ldots, \mathcal{K}_{i^{(s)}_{|X_s|}}) && (4.6)
\end{aligned}$$

verallgemeinern, wobei zu beachten ist, daß sich die Summation in diesem Fall wegen Lemma 4.3 nur über die Partitionen der Menge $\{1, \ldots, l\}$ erstreckt und $k^{(s)} = \sum_{i_j^{(s)} \in X_s} k_{i_j^{(s)}}$ die Anzahl der Funktionen, die zu X_s gehören, ist. Erhalten wir aber bei der Rückentwicklung dennoch dieselben Partitionspolynome? Darüber gibt das folgende Lemma Auskunft:

Lemma 4.11 Es seien $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_l$ maximale Kommutatoren. Es sei $(X_s) = \{X_1, \ldots, X_r\}$ eine Partition der Menge $\{1, \ldots, l\}$. Das zu (X_s) gehörende Partitionspolynom ist

$$c(X_s) = c_{\|X_1\|,\ldots,\|X_r\|} \quad \text{wobei } \|X_s\| = \sum_{i_j^{(s)} \in X_s} k_{i_j^{(s)}}$$

Das heißt, daß die Partitionspolynome nur von den Längen der entsprechenden Teilmengen abhängen.

Beweis: Für den Beweis passen wir die Notation wie folgt an: Es sei $N = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_l\}$ eine Menge maximaler Kommutatoren. Es seien P, Q und R Mengen von disjunkten Teilmengen $n \subset N$. Es bezeichnen $|P|$ die Anzahl der Teilmengen in P und $\|P\|$ die Gesamtlänge aller Kommutatoren in allen $n \in P$. $\bigcup(P)$ bezeichne die Vereinigung $\bigcup_{n\in P} n$. Ebenso für Q und R. In unserer Notation ist dann

$$\mathcal{W}(N) := \mathcal{W}_{\|N\|}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_l) = \sum_{P:\bigcup(P)=N} \prod_{n\in P} \mathcal{W}^T(n) \tag{4.7}$$

Nach Korollar 2.18 ist die Umkehrung dieser Formel

$$\mathcal{W}^T(N) = \sum_{P:\bigcup(P)=N} t(|P|) \prod_{n\in P} \mathcal{W}(n) \tag{4.8}$$

mit $t(p) = (-1)^{p-1}(p-1)!$. Die Rückentwicklung von (4.7) schreiben wir unter Ausnutzung von $\mathcal{W}_k^T = c_k \mathcal{V}_k^T$ als

$$\mathcal{W}(N) = \sum_{P:\bigcup(P)=N} \gamma(P) \prod_{n\in P} \mathcal{V}(n) \tag{4.9}$$

Dabei sind die $\gamma(P)$ zu bestimmende Funktionen, und es wird unser Ziel sein, zu zeigen, daß $\gamma(P)$ mit $c_{\|n_1\|,\dots,\|n_p\|}$ übereinstimmt. Dafür nehmen wir zu N einen weiteren ausgezeichneten Kommutator $\mathcal{K}_0$ hinzu, so daß $N_0 = \{\mathcal{K}_o\} \cup N$ ist. Dann erhalten wir, indem wir denjenigen Term, der $\mathcal{K}_0$ enthält, aus $\mathcal{W}(N_0)$ ausklammern

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(N_0) &= \sum_{P:\bigcup(P)=N_0} \prod_{n\in P} \mathcal{W}^T(n) = \sum_{M\subset N} \mathcal{W}^T(N_0\backslash M) \sum_{P:\bigcup(P)=M} \prod_{n\in P} \mathcal{W}^T(n) \\
&= \sum_{M\subset N} \mathcal{W}^T(N_0\backslash M)\mathcal{W}(M)
\end{aligned}$$

Hier setzen wir nun (4.7), (4.8) und (4.9) ein und erhalten mit $\mathcal{W}_k^T = c_k \mathcal{V}_k^T$

$$\mathcal{W}(N_0) = \sum_{M\subset N} c_{\|N_0\backslash M\|} \left(\sum_{P_0:\bigcup(P_0)=N_0\backslash M} t(p_0) \prod_{n\in P_0} \mathcal{V}(n) \right) \left(\sum_{Q:\bigcup(Q)=M} \gamma(Q) \prod_{m\in Q} \mathcal{V}(m) \right)$$

Hierbei ist P_0 nicht leer, da es genau ein Element n_0 enthält, das wiederum $\mathcal{K}_0$ enthält. Sei also $P_0 = \{n_0\} \cup P$. Dann sortieren wir die Summe so um, daß wir den Term, der n_0 und damit $\mathcal{K}_0$ enthält, ausklammern. Wir erhalten

$$\mathcal{W}(N_0) = \sum_{n_0\subset N_0} \left(\sum_{\substack{P,Q \\ \bigcup(P\cup Q)=N_0\backslash n_0}} c_{\|n_0\|+\|P\|} \cdot t(|P|+1)\gamma(Q) \right) \mathcal{V}(n_0) \prod_{n\in P} \mathcal{V}(n) \prod_{m\in Q} \mathcal{V}(m)$$

Nun schreiben wir der Übersichtlichkeit halber R für die jeweilige Partition $P \cup Q$, so daß $\bigcup(R) = N_0\backslash n_0$ ist. Wir können dann durch Vergleich mit (4.9) eine Rekursionsformel für γ ablesen:

$$\gamma(\{n_0\} \cup R) = \sum_{Q\subset R} c_{\|n_0\|+\|R\backslash Q\|} \cdot t(|R\backslash Q|+1)\gamma(Q) \tag{4.10}$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel berechnen wir nun das Folgende: Es sei $R_0 = \{n_0\} \cup R = \{n_0, n_1, \dots, n_r\}$. Für $i = 1, \dots, r$ definieren wir

$$R_{0i} = \{n_1, \dots, n_0 \cup n_i, \dots, n_r\} = \{n_0 \cup n_i\} \cup R \quad \text{mit} \quad R_i = R \backslash \{n_i\}.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_i \gamma(R_{0i}) &= \gamma(\{n_0 \cup n_i\} \cup R_i) \\
&\overset{(4.10)}{=} \sum_i \sum_{Q_i \subset R_i} c_{\|n_0 \cup n_i\| + \|R_i \backslash Q_i\|} \cdot t(|R_i \backslash Q_i| + 1)\gamma(Q_i) \\
&= \sum_{Q \subset R} \left(\sum_{i: n_i \notin Q} c_{\|n_0\| + \|n_i\| + \|R_i \backslash Q\|} \cdot t(|R_i \backslash Q| + 1) \right) \gamma(Q) \\
&= \sum_{Q \subset R} \left(\sum_{i: n_i \notin Q} c_{\|n_0\| + \|R \backslash Q\|} \cdot t(|R \backslash Q|) \right) \gamma(Q) \\
&= \sum_{Q \subset R} c_{\|n_0\| + \|R \backslash Q\|} |R \backslash Q| \cdot t(|R \backslash Q|)\gamma(Q)
\end{aligned}$$

Addieren wir dies nun zu (4.10), so trägt wegen $t(p+1) + pt(p) = \delta_{p,0}$ nur der Term mit $R \backslash Q = \emptyset$ bei, so daß wir

$$\gamma(\{n_0\} \cup R) + \sum_i \gamma(\{n_0 \cup n_i\} \cup R_i) = c_{\|n_0\|}\gamma(R) \tag{4.11}$$

erhalten. Hieraus folgt rekursiv, daß $\gamma(P)$ nur von den Längen der Elemente von P abhängt, da die linke Seite immer eine um ein Element längere Teilmenge ergibt. Da insbesondere in dem Fall, in dem alle Kommutatoren die Länge 1 haben, die $\gamma(P)$ mit den in 4.8 definierten Partitionspolynomen übereinstimmen, erhalten wir

$$\gamma(P) = c_{\|n_1\|, \dots, \|n_p\|} \quad \text{für} \quad P = \{n_1, \dots, n_p\}.$$

Q.E.D.

Gleichung (4.11) liefert uns sogar noch mehr: Wir können nämlich nun eine rekursive Entwicklung der Partitionspolynome nach den elementaren Partitionspolynomen angeben:

Lemma 4.12 (Reduktionsformel) Für die Entwicklung der Partitionspolynome $c_{2k_1, \dots, 2k_r}$ nach den elementaren Partitionspolynomen c_{2k} gilt die folgende Reduktionsformel:

$$c_{2k_1, \dots, 2k_r, 2k} = c_{2k_1, \dots, 2k_r} c_{2k} - \sum_{i=1}^{r} c_{2k_1, \dots, 2(k_i + k), \dots, 2k_r}$$

Beweis: Zum Beweis bedarf es lediglich der Wiedereinführung der alten Notation in (4.11). Es sei $\|n_i\| = 2k_i$ die Anzahl der Funktionenen in $\mathcal{K}_i$. Mit $P = \{n_1, \dots, n_p\}$ und $n_i = \{\mathcal{K}_i\}$, $i = 0, 1, \dots, p$ folgt aus (4.11)

$$c_{\|n_0\|} c_{\|n_1\|, \dots, \|n_p\|} = c_{\|n_0\|, \|n_1\|, \dots, \|n_p\|} + \sum_{i=1}^{p} c_{\|n_1\|, \dots, \|n_i\| + \|n_0\|, \dots, \|n_p\|}$$

Q.E.D.

Also liefert uns die Rückentwicklung von (4.5) analog zu (4.3) das folgende

Korollar 4.13 Für die Entwicklung von $2N$-Punkt-Funktionen maximaler Kommutatoren gilt

$$\mathcal{W}_{2N}(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_l) = \sum_{(X_s)} c_{k^{(1)},\ldots,k^{(r)}} \prod_s \mathcal{V}_{k^{(s)}}(\mathcal{K}_{i_1^{(s)}}, \ldots, \mathcal{K}_{i^{(s)}_{|X_1|}})$$

mit $k^{(s)} = \sum_{i_j^{(s)} \in X_s} k_{i_j^{(s)}}$.

An dieser Stelle wollen wir noch einen allgemeinen Ausdruck für das erzeugende Funktional des Baumannfeldes mit Hilfe von Partitionspolynomen angeben, den wir in Kapitel 6 benötigen werden.

Lemma 4.14 Für Baumannfelder Φ gilt für $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\omega(e^{t\Phi(F)}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\cdots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\ldots 2k_r} \mathcal{V}_{2k_1} \cdots \mathcal{V}_{2k_r} \quad \text{mit } \mathcal{V}_{2k} = \omega(\varphi(F)^2)^k$$

Beweis: Für das erzeugende Funktional haben wir

$$\omega(e^{t\Phi(F)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \mathcal{W}_{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \sum_{(X_s)} c_{|X_1|,\ldots,|X_r|} \mathcal{V}_{|X_1|} \cdots \mathcal{V}_{|X_r|}$$

Nun summieren wir die Reihe wie in Bemerkung 2.15 um. Da sowohl die Partitionspolynome, als auch das Produkt $\mathcal{V}_{|X_1|} \cdots \mathcal{V}_{|X_r|}$ symmetrisch unter Vertauschung der $|X_i|$ sind können wir das Ergebnis aus 2.15 übernehmen und erhalten mit $|X_i| = 2k_i$

$$\begin{aligned}
\omega(e^{t\Phi(F)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \sum_{k_1+\cdots+k_r=k} \frac{1}{r!} \frac{(2k)!}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\ldots,2k_r} \mathcal{V}_{2k_1} \cdots \mathcal{V}_{2k_r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\cdots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\ldots 2k_r} \mathcal{V}_{2k_1} \cdots \mathcal{V}_{2k_r}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Wir wollen nun Korollar 4.13 auf den Ausdruck

$$\mathcal{W}_{2N}(\bar{\mathcal{K}}_l, \ldots, \bar{\mathcal{K}}_1, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_l) \geqslant 0$$

mit speziellen maximalen Kommutatoren wie in Abschnitt 4.2 anwenden. Nach Lemma 4.7 trägt dann bei der Rückentwicklung von

$$\sum_{(X_s)} \prod_s c_{k^{(s)}} \mathcal{V}^T_{k^{(s)}}(\bar{\mathcal{K}}_{i^{(s)}_{|X_s|}}, \ldots, \bar{\mathcal{K}}_{i_1^{(s)}}, \mathcal{K}_{i_1^{(s)}}, \ldots \mathcal{K}_{i^{(s)}_{|X_s|}})$$

nur derjenige Term bei, bei dem jeweils Paare maximaler Kommutatoren als Argumente der $\mathcal{V}_k$ auftreten. Wir erhalten also

$$c_{2k_1,\dots,2k_l}\mathcal{V}_{2k_1}(\bar{\mathcal{K}}_1,\mathcal{K}_1)\cdots\mathcal{V}_{2k_l}(\bar{\mathcal{K}}_l,\mathcal{K}_l)\geqslant 0$$

Da diese Produkte von n-Punkt-Funktionen von Buchholzfeldern aber selber positiv sind, können wir als erstes Ergebnis den folgenden Satz formulieren:

Satz 4.15 Für jedes Baumannfeld sind alle Partitionspolynome $c_{2k_1,\dots,2k_l}$ für alle $k_1,\dots,k_l \in \mathbb{N}$ positiv.

4.4 Die Determinantenbedingung

Wenden wir uns nun wieder unserem eigentlichen Ziel, der Auswertung der Matrixelemente $\omega(P^{(m)*}P^{(n)})$, zu. Die Kommutatoren $\mathcal{K}_i^{(n)}$ haben die Länge $k_i^{(n)}$. Wir wählen die $k_i^{(n)}$ so, daß $k_i^{(n)}+k_i^{(m)}$ stets gerade ist, das heißt, daß für alle i die $\mathcal{K}_i^{(n)}$, $n=1,\dots,N$, vom selben Typ sind. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\omega(P^{(m)*}P^{(n)}) &= \omega(\Phi(\bar{\mathcal{K}}_l^{(m)})\cdots\Phi(\bar{\mathcal{K}}_1^{(n)})\Phi(\mathcal{K}_1^{(m)})\cdots\Phi(\mathcal{K}_l^{(n)}))\\ &= \mathcal{W}_N(\bar{\mathcal{K}}_l^{(m)}\cdots\bar{\mathcal{K}}_1^{(m)}\mathcal{K}_1^{(n)}\cdots\mathcal{K}_l^{(n)})\end{aligned}$$

wobei $N=\sum_{i=1}^{l}(k_i^{(m)}+k_i^{(n)})$ ist. Mit Korollar 4.13 und Lemma 4.7 erhalten wir nun

$$\omega(P^{(m)*}P^{(n)})=c_{k_1^{(m)}+k_1^{(n)},\dots,k_l^{(m)}+k_l^{(n)}}\mathcal{V}_{k_1^{(m)}+k_1^{(n)}}(\bar{\mathcal{K}}_1^{(m)},\mathcal{K}_1^{(n)})\cdots\mathcal{V}_{k_l^{(m)}+k_l^{(n)}}(\bar{\mathcal{K}}_l^{(m)},\mathcal{K}_l^{(n)})$$

Damit haben wir die allgemeine Form der Matrixelemente der symmetrischen Bilinearform (4.2) bestimmt. Wir können aber noch weiter vereinfachen, denn nach Lemma 4.6 wissen wir, daß

$$\varphi(\mathcal{K}_i^{(a)})=\varphi(\mathcal{K}_i^{(b)})\qquad\forall a,b.$$

ist. Das aber heißt, daß alle Produkte von n-Punkt-Funktionen $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{K}}_1^{(m)}\mathcal{K}_1^{(n)})\cdots\mathcal{V}(\bar{\mathcal{K}}_l^{(m)}\mathcal{K}_l^{(n)})$ gleich 2^{-l} sind (siehe den Beweis von Lemma 4.7). Klammern wir diesen Faktor aus M aus, so erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} c_{2k_1^{(1)},\dots,2k_l^{(1)}} & c_{k_1^{(1)}+k_1^{(2)},\dots,k_l^{(1)}+k_l^{(2)}} & \cdots & c_{k_1^{(1)}+k_1^{(N)},\dots,k_l^{(1)}+k_l^{(N)}}\\ c_{k_1^{(2)}+k_1^{(1)},\dots,k_l^{(2)}+k_l^{(1)}} & c_{2k_1^{(2)},\dots,2k_l^{(2)}} & \cdots & c_{k_1^{(2)}+k_1^{(N)},\dots,k_l^{(2)}+k_l^{(N)}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{k_1^{(N)}+k_1^{(1)},\dots,k_l^{(N)}+k_l^{(1)}} & c_{k_1^{(N)}+k_1^{(2)},\dots,k_l^{(N)}+k_l^{(2)}} & \cdots & c_{2k_1^{(N)},\dots,2k_l^{(N)}}\end{pmatrix}$$

Die gesuchte Bedingung an die Partitionspolynome ergibt sich nun durch eine einfache Anwendung des Satzes von Hurwitz (siehe z.b. [Fis86]):

Satz 4.16 (Determinantenbedingung) Für jedes Baumannfeld sind alle Determinanten der Form

$$\begin{pmatrix} c_{2k_1^{(1)},\dots,2k_l^{(1)}} & c_{k_1^{(1)}+k_1^{(2)},\dots,k_l^{(1)}+k_l^{(2)}} & \cdots & c_{k_1^{(1)}+k_1^{(N)},\dots,k_l^{(1)}+k_l^{(N)}} \\ c_{k_1^{(2)}+k_1^{(1)},\dots,k_l^{(2)}+k_l^{(1)}} & c_{2k_1^{(2)},\dots,2k_l^{(2)}} & \cdots & c_{k_1^{(2)}+k_1^{(N)},\dots,k_l^{(2)}+k_l^{(N)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k_1^{(N)}+k_1^{(1)},\dots,k_l^{(N)}+k_l^{(1)}} & c_{k_1^{(N)}+k_1^{(2)},\dots,k_l^{(N)}+k_l^{(2)}} & \cdots & c_{2k_1^{(N)},\dots,2k_l^{(N)}} \end{pmatrix}$$

für alle $l, N \in \mathbb{N}$ positiv.

Beweis: Da M aufgrund der Wightmanpositivität positiv definit ist, ist nach dem Satz von Hurwitz die Determinante von M positiv. Also ist auch die gesuchte Determinante positiv. Q.E.D.

Kapitel 5

Vergleich mit s-Produkten

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die bereits gewonnenen Ergebnisse mit dem Fall von gewichteten s-Produkten von Buchholzfeldern vergleichen. Dafür werden wir die Partitionspolynome für gewichtete s-Produkte berechnen und die Übereinstimmung von Determinanten- und Reduktionsformel im s-Produkt-Fall $\varphi_{\underline{\alpha}}(F)$ mit dem allgemeinen Fall $\Phi(F)$ zeigen. Danach wollen wir, von gewichteten s-Produkten ausgehend, eine Strategie angeben, mit der wir von einem beliebigen Baumannfeld, von dem wir ja zeigen wollen, daß es ein s-Produkt von Buchholzfeldern ist, die Beiträge eines führenden "s-Faktors" abspalten können.

5.1 Gewichtete s-Produkte von Buchholzfeldern

Um die Konsistenz der Determinantenbedingung 4.16 mit dem s-Produkt Fall zu prüfen, müssen wir zunächst einmal berechnen, welche Form die Partitionspolynome $c_{2k_1,\ldots,2k_r}$ für $\varphi_{\underline{\alpha}}$ haben. Für das erzeugende Funktional erhalten wir

$$\begin{aligned}
\omega(e^{t\varphi_{\underline{\alpha}}(F)}) &= \omega(e^{t\alpha_1\varphi(F)\,\mathsf{s}\ldots\mathsf{s}\,\alpha_r\varphi(F)}) = \omega(e^{t\alpha_1\varphi(F)} \otimes \cdots \otimes e^{t\alpha_r\varphi(F)}) \\
&= \omega_1(e^{t\alpha_1\varphi(F)}) \cdots \omega_r(e^{t\alpha_r\varphi(F)}) \\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(t\alpha_1)^{2k_1}}{(2k_1)!}\mathcal{V}_{2k_1} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} \frac{(t\alpha_1)^{2k_r}}{(2k_r)!}\mathcal{V}_{2k_r} \\
&= \prod_{j=1}^{r} \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{(t\alpha_j)^{2k_j}}{(2k_j)!}\mathcal{V}_{2k_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathcal{W}_{2k}
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der letzten beiden Ausdrücke lesen wir nun, indem wir diejenigen Terme sammeln, in denen t in derselben Potenz auftritt, die allgemeine Form der $2k$-Punkt-Funktionen von $\varphi_{\underline{\alpha}}$ ab:

Lemma 5.1 Für die $2k$-Punkt-Funktionen eines einzelnen Feldoperators eines gewichteten s-Produkts von Buchholzfeldern gilt:

$$\mathcal{W}_{2k} = \sum_{k_1+\cdots+k_r=k} \sum_{i_1,\dots,i_r}{}' \frac{1}{r!} \frac{(2k)!}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} \alpha_{i_1}^{2k_1} \cdots \alpha_{i_r}^{2k_r} \mathcal{V}_{2k_1} \cdots \mathcal{V}_{2k_r}$$

Dabei bezeichnet die gestrichene Summe eine Summation über paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_r$.

Nun sind aber nach der Definition der Partitionspolynome 4.8 die Koeffizienten von $\mathcal{V}_{2k_1} \cdots \mathcal{V}_{2k_r}$ gerade die Partitionspolynome. Der kombinatorische Faktor ist gerade die Anzahl der durch $2k_1, \dots, 2k_r$ festgelegten Partitionen (vgl. Bemerkung 2.15). Aus Lemma 5.1 erhalten wir also das folgende Korollar:

Korollar 5.2 Für gewichtete s-Produkte von Buchholzfeldern haben die Partitionspolynome $c_{2k_1,\dots,2k_r}$ die Werte

$$\underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2k_r} \equiv \sum_{i_1,\dots,i_r}{}' \alpha_{i_1}^{2k_1} \cdots \alpha_{i_r}^{2k_r},$$

die wir im Folgenden als spezielle Partitionspolynome bezeichnen werden.

Die Determinantenbedingung 4.16 angewandt auf Felder $\varphi_{\underline{\alpha}}$ lautet daher:

Lemma 5.3 Für jedes gewichtete s-Produkt $\varphi_{\underline{\alpha}}$ sind alle Determinanten der Form

$$\det \begin{pmatrix} \underline{\alpha}_{2k_1^{(1)},\dots,2k_r^{(1)}} & \underline{\alpha}_{k_1^{(1)}+k_1^{(2)},\dots,k_r^{(1)}+k_r^{(2)}} & \cdots & \underline{\alpha}_{k_1^{(1)}+k_1^{(N)},\dots,k_r^{(1)}+k_r^{(N)}} \\ \underline{\alpha}_{k_1^{(2)}+k_1^{(1)},\dots,k_r^{(2)}+k_r^{(1)}} & \underline{\alpha}_{2k_1^{(2)},\dots,2k_r^{(2)}} & \cdots & \underline{\alpha}_{k_1^{(2)}+k_1^{(N)},\dots,k_r^{(2)}+k_r^{(N)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\alpha}_{k_1^{(N)}+k_1^{(1)},\dots,k_r^{(N)}+k_r^{(1)}} & \underline{\alpha}_{k_1^{(N)}+k_1^{(2)},\dots,k_r^{(N)}+k_r^{(2)}} & \cdots & \underline{\alpha}_{2k_1^{(N)},\dots,2k_r^{(N)}} \end{pmatrix}$$

für alle $l, N \in \mathbb{N}$ positiv.

Da es sich bei gewichteten s-Produkten von Buchholzfeldern um spezielle Baumannfelder handelt, folgt dieses Lemma direkt aus Lemma 4.16. Es kann aber auch ohne den Umweg über die Wightmanpositivität von $\varphi_{\underline{\alpha}}$ direkt bewiesen werden:

Beweis: Die Einträge dieser Matrix können wir wie folgt als Skalarprodukte auffassen: Wir führen Multiindizes $I \in \{i_1, \dots, i_r \text{ paarw. verschieden }\}$ ein und schreiben für feste k

$$\alpha_I = \alpha_{i_1}^{k_1^{(1)}} \cdots \alpha_{i_r}^{k_r^{(1)}} \quad \text{etc.}$$

Dann ist der Eintrag an der Stelle i, j gleich dem Skalarprodukt im D-dimensionalen reellen Raum, wobei D die Anzahl der paarweise verschiedenen $i_1, \dots, i_r$ ist:

$$(\alpha_{I_i}, \alpha_{I_j}) = \underline{\alpha}_{k_1^{(i)}+k_1^{(j)}} \cdots \underline{\alpha}_{k_r^{(i)}+k_r^{(j)}}$$

Seien nun σ und π Permutationen der Menge $\{1, \dots, N\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left(\sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) \cdot \alpha_{I_{\pi(1)}} \otimes \cdots \otimes \alpha_{I_{\pi(N)}} \right)^2 \\
&= \left(\sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) \cdot \alpha_{I_{\pi(1)}} \otimes \cdots \otimes \alpha_{I_{\pi(N)}}, \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \alpha_{I_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \alpha_{I_{\sigma(N)}} \right) \\
&= N! \cdot \left(\sum_{\sigma\pi} \operatorname{sign}(\sigma\pi) \cdot \alpha_{I_{\sigma\pi(1)}} \otimes \cdots \otimes \alpha_{I_{\sigma\pi(N)}}, \alpha_{I_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{I_N} \right) \\
&= N! \cdot \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)(\alpha_{I_{\pi(1)}}, \alpha_{I_1}) \cdots (\alpha_{I_{\pi(N)}}, \alpha_{I_N}) \\
&= N! \cdot \det \begin{pmatrix} (\alpha_{I_1}, \alpha_{I_1}) & \cdots & (\alpha_{I_1}, \alpha_{I_N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_{I_N}, \alpha_{I_1}) & \cdots & (\alpha_{I_N}, \alpha_{I_N}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

nach der Determinantenformel von Leibniz. Damit aber ist die gesuchte Determinante positiv. Q.E.D.

Wir erhalten also für s-Produkte die Positivität der Determinanten von Partitionspolynomen direkt. Eine weitere Übereinstimmung zwischen dem allgemeinen Fall $\Phi(F)$ und dem s-Produktfall $\varphi_{\underline{\alpha}}(F)$ ist die Reduktionsformel für die speziellen Partitionspolynome:

Lemma 5.4 Für die speziellen Partitionspolynome $\underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2k_r}$ gilt die Reduktionsformel

$$\underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2k_r,2k} = \underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2k_r} \underline{\alpha}_{2k} - \sum_{i=1}^r \underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2(k+k_i),\dots,2k_r}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2k_r,2k} &= \sum_{i_1,\dots,i_r,i}{}' \alpha_{i_1}^{2k_1} \cdots \alpha_{i_r}^{2k_r} \alpha_i^{2k} \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_r}{}' \alpha_{i_1}^{2k_1} \cdots \alpha_{i_r}^{2k_r} \sum_i \alpha_i^{2k} - \sum_{i_1=i,\dots,i_r}{}' \alpha_{i_1}^{2k_1} \cdots \alpha_{i_r}^{2k_r} \alpha_i^{2k} \\
&\quad - \cdots - \sum_{i_1,\dots,i_r=i}{}' \alpha_{i_1}^{2k_1} \cdots \alpha_{i_r}^{2k_r} \alpha_i^{2k} \\
&= \underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2k_r} \underline{\alpha}_{2k} - \underline{\alpha}_{2(k_1+k),\dots,2k_r} - \cdots - \underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2(k_r+k)} \\
&= \underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2k_r} \underline{\alpha}_{2k} - \sum_{i=1}^r \underline{\alpha}_{2k_1,\dots,2(k_i+k),\dots,2k_r}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Diese Beispiele sollen uns als Hinweis darauf genügen, daß die Eigenschaften unserer Partitionspolynome $c_{2k_1,\dots,2k_r}$ mit dem s-Produkt-Fall verträglich sind. Für $c_{2k_1,\dots,2k_r}$ werden die Determinantenbedingung und die Reduktionsformel eine Ausgangsbasis zur Abspaltung von s-Produkt-Koeffizienten liefern.

5.2 Abspalten von s-Produkt-Koeffizienten

Wir wollen nun sehen, wie wir aus dem gewichteten s-Produkt $\varphi_{\underline{\alpha}}$ mit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ einen Koeffizienten α_1 zurückgewinnen können und suchen dafür eine Methode, die auch auf die allgemeinen Partitionspolynome $c_{2k_1,\ldots,2k_r}$ anwendbar ist. Um von $\underline{\alpha}$ zu $\underline{\alpha^*} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ übergehen zu können, müssen zwischen den alten und neuen Partitionspolynomen die Relationen

$$\underline{\alpha}^*_{2k} = \underline{\alpha}_{2k} - \alpha_1^{2k} \tag{5.1}$$

$$\underline{\alpha}^*_{2k_1,\ldots,2k_r} = \underline{\alpha}_{2k_1,\ldots,2k_r} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_1^{2k_i} \underline{\alpha}_{2k_1,\ldots,2k_{i-1},2k_{i+1},\ldots,2k_r} \tag{5.2}$$

gelten. Denn dann erhalten wir

$$\varphi_{\underline{\alpha}} = \alpha_1 \varphi \, \mathsf{s} \, \varphi_{\underline{\alpha}^*}$$

aus der Übereinstimmung der trunkierten Funktionen der rechten und linken Seite. Wir haben also den "s-Faktor" $\alpha_1\varphi$ abgespalten. Wie aber erhalten wir den Koeffizienten α_1? Dieser ergibt sich aus den elementaren Partitionspolynomen, indem wir den Limes der Verhältnisfolge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underline{\alpha}_{2n+2}}{\underline{\alpha}_{2n}}$$

bilden (dies spaltet den größten s-Produkt-Koeffizienten ab). Als Problem stellt sich jedoch heraus, daß die neuen Partitionspolynome aus (5.1) und (5.2) die Determinantenbedingung nicht erfüllen, solange wir α_1^2 durch $\frac{\underline{\alpha}_{2n+2}}{\underline{\alpha}_{2n}}$ approximieren. Neben den Relationen (5.1) und (5.2) werden wir also weitere benötigen. Eine mögliche Darstellung der $\underline{\alpha}^*_{2k_1,\ldots,2k_r}$ ist z.B. der Limes

$$\alpha^*_{2k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\underline{\alpha}_{2n,2k}}{\underline{\alpha}_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i_1 \neq i_2} \alpha_{i_1}^{2k} \alpha_{i_2}^{2n}}{\sum_i \alpha_i^{2n}} = \frac{\sum_i \alpha_1^{2n} \alpha_i^{2k}}{\alpha_1^{2n}} = \underline{\alpha}_{2k} - \alpha_1^{2k} \tag{5.3}$$

$$\alpha^*_{2k_1,\ldots,2k_r} = \lim_{n\to\infty} \frac{\underline{\alpha}_{2n,2k_1,\ldots,2k_r}}{\underline{\alpha}_{2n}} = \underline{\alpha}_{2k_1,\ldots,2k_r} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_1^{2k_i} \underline{\alpha}_{2k_1,\ldots,2k_{i-1},2k_{i+1},\ldots,2k_r} \tag{5.4}$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, daß an (5.3) und (5.4) leicht abgelesen werden kann, daß die $\underline{\alpha}^*_{2k_1,\ldots,2k_r}$ die Determinantenbedingung erfüllen. Auf der anderen Seite muß dann aber gezeigt werden, daß die $\underline{\alpha}^*_{2k_1,\ldots,2k_r}$ die richtigen polynomialen Abhängigkeiten von den elementaren Partitionspolynomen $\underline{\alpha}^*_{2k}$ haben.

Wir werden die Gleichungen (5.1), (5.2), (5.3), und (5.4) als Ausgangspunkte für das Iterationsverfahren im allgemeinen Fall $\Phi(F)$ verwenden. Nun bricht das Verfahren im s-Produkt-Fall ab, wenn wir (im Fall endlicher s-Produkte) alle r Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ abgespalten haben. Dies äußert sich dadurch, daß die neuen Partitionspolynome verschwinden. Für den allgemeinen Fall zeigen wir nun noch, daß analog zum s-Produkt-Fall das Verschwinden eines elementaren Partitiospolynoms das Verschwinden aller Partitionspolynome impliziert:

Lemma 5.5 Für die elementaren Partitionspolynome c_{2k} von Baumannfeldern Φ gilt: Falls c_{2k} für ein spezielles k verschwindet, so verschwindet es für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Für den Beweis nutzten wir die Determinantenbedingung 4.16 aus. Wir wählen in Satz 4.16 $k_1^{(1)} = k$ und $k_1^{(2)} = k+2$. Dann folgt

$$\det \begin{pmatrix} c_{2n} & c_{2n+2} \\ c_{2n+2} & c_{2n+4} \end{pmatrix} = c_{2n}c_{2n+4} - c_{2n+2}^2 \geqslant 0$$

falls also $c_{2k} = 0$, so muss auch $c_{2k+2} = 0$ sein. Ebenso erhalten wir mit $k_1^{(1)} = k$ und $k_1^{(2)} = k-2$ aus $c_{2k} = 0$, daß auch $c_{2k-2} = 0$ sein muss. Nur der Schluß $c_4 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ ist nicht möglich, da c_0 nicht definiert ist. Es kann also höchstens $c_2 \neq 0$ sein, alle anderen c_{2k} müssen verschwinden. Für diesen Fall betrachten wir das erzeugende Funktional des Baumannfeldes aus Lemma 4.14.

$$\omega(e^{t\Phi(F)}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\dots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\dots 2k_r} \mathcal{V}_{2k_1} \cdots \mathcal{V}_{2k_r}$$

Sei nun $c_4 = 0$. Dann verschwinden auch alle c_{2k} mit $k = 6, 8, 10, \dots$. Mit Hilfe der Reduktionsformel 4.12 erhalten wir dann, daß in der Summe nur der Term $k_1 = \dots = k_r = 1$ beiträgt:

$$\omega(e^{t\Phi(F)}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{t^{2r}}{2^r} c_2^r \mathcal{V}_2^r = e^{\frac{t^2}{2} c_2}$$

mit der Wahl $\mathcal{V}_2 = 1$. Für $c_2 \neq 0$ ist dies ein Widerspruch zur Beschränktheit von Φ, da $e^{t\|\Phi(F)\|} \geqslant \omega(e^{t\Phi(F)})$ gilt. Q.E.D.

Bemerkung 5.6 Falls ein elementares Partitionspolynom c_{2k} verschwindet, so verschwinden auch alle längeren Partitionspolynome $c_{2k_1,\dots,2k_r}$ wegen der Reduktionsformel 4.12.

Kapitel 6

s-Produkt-Zerlegung des Baumannfeldes

In diesem Kapitel werden wir das in Abschnitt 5.2 skizzierte Verfahren auf die allemeinen Partitionspolynome $c_{2k_1,\dots,2k_r}$ übertragen. Dafür werden wir für die $c_{2k_1,\dots,2k_r}$ eine Operation "$*$" einführen, die aus den Partitionspolynomen s-Produkt-Koeffizienten α abspaltet. Die neuen Partitionspolynome $c^*_{2k_1,\dots,2k_r}$ erfüllen dann wiederum, falls sie nicht schon verschwinden, die Voraussetzungen für eine weitere Abspaltung. So können wir dann im zweiten Abschnitt das Verfahren iterieren. Dabei müssen wir allerdings sicherstellen, daß das Verfahren auch konvergiert.

6.1 Die Abspaltungsvorschrift

Um die Abspaltungsvorschrift einführen zu können, müssen die Partitionspolynome zwei Voraussetzungen erfüllen. Die erste ist die in Satz 4.16 bewiesene Determinantenbedingung. Die andere ist die exponentielle Beschränktheit der Potenzreihe

$$E(t) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\cdots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\dots,2k_r} \leqslant const \cdot e^{\lambda t}$$

Auch diese Voraussetzung erfüllen die Partitionspolynome, da diese Reihe lediglich der Spezialfall $\varphi(F)^2 = 1$ des erzeugenden Funktionals des Baumannfeldes Φ aus Lemma 4.14 ist. Und das erzeugende Funktional ist durch $e^{t\|\Phi(F)\|}$ beschränkt. Wir formulieren also:

Satz 6.1 Die Partitionspolynome $c_{2k_1,\dots,2k_r}$ mögen die Determinantenbedingung 4.16 erfüllen und die Potenzreihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\cdots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\dots,2k_r}$$

sei exponentiell beschränkt für ein $\lambda > 0$. Dann existieren die Limiten

$$\alpha^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} \quad \text{und} \quad c^*_{2k_1,\dots,2k_r} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n,2k_1,\dots,2k_r}}{c_{2n}}$$

und es gilt

1) $c^*_{2k} = c_{2k} - \alpha^{2k}$
2) $c^*_{2k_1,\dots,2k_r} = c_{2k_1,\dots,2k_r} - \sum_{i=1}^r \alpha^{2k_i} c^*_{2k_1,\dots,2k_{i-1},2k_{i+1},\dots,2k_r}$
3) $c^*_{2k_1,\dots,2k_r}$ erfüllen die Reduktionsformel 4.12
4) $c^*_{2k_1,\dots,2k_r}$ erfüllen die Determinantenbedingung und es gilt

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\dots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\dots,2k_r}\right) =$$
$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\dots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c^*_{2k_1,\dots,2k_r}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\alpha^{2k}\right)$$

5) Die Potenzreihe in den $c^*_{2k_1,\dots,2k_r}$ ist wieder exponentiell beschränkt für $\lambda^* = \lambda - \alpha$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Determinantenbedingung impliziert, daß die Verhältnisfolge $\left(\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst. Wir wählen also in Satz 4.16 $k_1^{(1)} = n+1$ und $k_1^{(2)} = n-1$. Damit ist $k_1^{(n)} + k_1^{(m)}$ stets gerade. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} c_{2n+2} & c_{2n} \\ c_{2n} & c_{2n-2} \end{pmatrix} = c_{2n+2}c_{2n-2} - c_{2n}^2 \geqslant 0$$

Das aber heißt lediglich

$$\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} \geqslant \frac{c_{2n}}{c_{2n-2}} \tag{6.1}$$

Es bleibt also die Beschränktheit der Verhältnisfolge zu zeigen. Diese erhalten wir aus der exponentiellen Beschränktheit der Potenzreihe $E(t)$. Dafür benötigen wir jedoch zuerst noch das folgende Ergebnis:

Es bezeichne $a_n^2 := \frac{c_{2n}}{c_{2n-2}}$ das n-1-te Element der Verhältnisfolge. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$c_{2m} \geqslant a_n^{2(m-n)} c_{2n} \tag{6.2}$$

Um die Relation (6.2) zu zeigen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

- $m \geqslant n$. Sei $d := m - n$, also $d \geqslant 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_n^{2(m-n)} c_{2n} &= \left(\frac{c_{2n}}{c_{2n-2}}\right)^d c_{2n} \overset{(6.1)}{\leqslant} \left(\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}}\right)^d c_{2n} = \left(\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}}\right)^{d-1} c_{2n+2} \\ &\overset{(6.1)}{\leqslant} \underset{d-1 \text{ mal}}{\cdots} \overset{(6.1)}{\leqslant} \left(\frac{c_{2n+2d}}{c_{2n+2d-2}}\right) c_{2n+2d-2} = c_{2m} \end{aligned}$$

- $n > m$. Sei $d := n - m$, also $d > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_n^{2(m-n)} c_{2n} &= \left(\frac{c_{2n-2}}{c_{2n}}\right)^d c_{2n} = \left(\frac{c_{2n-2}}{c_{2n}}\right)^{d-1} c_{2n-2} \overset{(6.1)}{\leqslant} \left(\frac{c_{2n-4}}{c_{2n-2}}\right)^{d-1} c_{2n-2} \\ &\overset{(6.1)}{\leqslant} \underset{d-1 \text{ mal}}{\cdots} \overset{(6.1)}{\leqslant} \left(\frac{c_{2n-2d}}{c_{2n-2d+2}}\right) c_{2n-2d+2} = c_{2m} \end{aligned}$$

Für die Potenzreihe $E(t)$ gilt dann

$$E(t) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} c_{2k} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \frac{a_n^{2k}}{a_n^{2n}} c_{2n} = \frac{c_{2n}}{a_n^{2n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} a_n^{2k} = const \cdot \cosh(ta_n)$$

Andererseits ist $E(t)$ aber durch $e^{\lambda t}$ beschränkt, so daß

$$const \cdot \cosh(ta_n) \leqslant e^{\lambda t}$$

und damit $a_n \leqslant \lambda$ folgt. Also existiert der Limes

$$\alpha^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} \tag{6.3}$$

Um die Existenz des $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n,2k_1,\ldots,2k_r}}{c_{2n}}$ zu zeigen, müssen wir zunächst den Limes $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+2k}}{c_{2n}}$ betrachten. Für diesen erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+2k}}{c_{2n}} = \alpha^{2k} \tag{6.4}$$

Dies folgt mit (6.3) aus

$$\begin{aligned} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}}\right)^k &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}}\right)^k = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_{2n+2k}}{c_{2n+2k-2}}\right) \cdot \left(\frac{c_{2n+2k-2}}{c_{2n+2k-4}}\right) \cdots \left(\frac{c_{2n+2k-2k+2}}{c_{2n+2k-2k}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_{2n+2k}}{c_{2n}}\right) \end{aligned}$$

Damit aber erhalten wir mit Hilfe der Reduktionsformel 4.12

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n,2k}}{c_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n}c_{2k} - c_{2n+2k}}{c_{2n}} = c_{2k} - \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+2k}}{c_{2n}} = c_{2k} - \alpha^{2k}$$

und es ist zugleich 1) bewiesen. Um die Existenz des Limes $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n,2k_1,\ldots,2k_r}}{c_{2n}}$ zu zeigen, beweisen wir zunächst, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+2k,2k_1,\ldots,2k_r}}{c_{2n}} = \alpha^{2k} P_{2k_1,\ldots,2k_r}(c^*) \tag{6.5}$$

ist, wobei die Polynome $P_{2k_1,\ldots,2k_r}(c^*)$ der Reduktionsformel 4.12 genügen. Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion nach der Länge der Partitionspolynome. Die Induktionsverankerung ist Gleichung (6.4). Sei (6.5) also für Polynome $c_{2n+2k,2k_1,\ldots,2k_r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+2k,2k_1,\ldots,2k_r,2k_{r+1}}}{c_{2n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_{2n}}\left(c_{2n+2k,2k_1,\ldots,2k_r}c_{2k_{r+1}} - c_{2n+2k+2k_{r+1},2k_1,\ldots,2k_r}\right) - \\
&\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_{2n}}\left(\sum_{i=1}^{r} c_{2n+2k,2k_1,\ldots,2k_i+2k_{r+1},\ldots,2k_r}\right) \\
&= \alpha^{2k}P_{2k_1,\ldots,2k_r}(c^*)c_{2k_{r+1}} - \alpha^{2k+2k_{r+1}}P_{2k_1,\ldots,2k_r}(c^*) - \\
&\quad \sum_{i=1}^{r} P_{2k_1,\ldots,2k_i+2k_{r+1},\ldots,2k_r}(c^*) \\
&= \alpha^{2k}\left((c_{2k_{r+1}} - \alpha^{2k_{r+1}})P_{2k_1,\ldots,2k_r}(c^*) - \sum_{i=1}^{r} P_{2k_1,\ldots,2k_i+2k_{r+1},\ldots,2k_r}(c^*)\right) \\
&= \alpha^{2k}\left(P_{2k_{r+1}}P_{2k_1,\ldots,2k_r}(c^*) - \sum_{i=1}^{r} P_{2k_1,\ldots,2k_i+2k_{r+1},\ldots,2k_r}(c^*)\right) \\
&= \alpha^{2k}P_{2k_1,\ldots,2k_{r+1}}(c^*)
\end{aligned}$$

Die Aussage von (6.5) bleibt richtig, wenn wir $2n$ nicht an der ersten, sondern an einer beliebigen Stelle addieren, so daß auch die Formeln

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2k_1,\ldots,2k_i+2n,\ldots,2k_r}}{c_{2n}} = \alpha^{2k_i}P_{2k_1,\ldots,2k_{i-1},2k_{i+1},\ldots,2k_r}(c^*)$$

gelten. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n,2k_1,\ldots,2k_r}}{c_{2n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_{2n}c_{2k_1,\ldots,2k_r}}{c_{2n}} - \frac{1}{c_{2n}}\sum_{i=1}^{r} c_{2k_1,\ldots,2k_i+2n,\ldots,2k_r}\right) \\
&= c_{2k_1,\ldots,2k_r} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_{2n}}\sum_{i=1}^{r} c_{2k_1,\ldots,2k_i+2n,\ldots,2k_r} \\
&= c_{2k_1,\ldots,2k_r} - \sum_{i=1}^{r}\alpha^{2k_i}P_{2k_1,\ldots,2k_{i-1},2k_{i+1},\ldots,2k_r}(c^*)
\end{aligned}$$

Damit ist die Existenz des Limes $\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n,2k_1,\ldots,2k_r}}{c_{2n}}$ gezeigt. Um 2) zu beweisen, müssen wir jetzt nur noch

$$c^*_{2k_1,\ldots,2k_r} = P_{2k_1,\ldots,2k_r}(c^*) \tag{6.6}$$

zeigen. Wir führen den Beweis wiederum mit vollständiger Induktion nach der Länge der Partitionen. Sei also $r = 1$. Dann ist

$$c^*_{2k_1} - P_{2k_1}(c^*) = c^*_{2k_1} - \lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n,2k_1}}{c_{2n}} = c^*_{2k_1} - c^*_{2k_1} = 0$$

Sei die Behauptung also für $r \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n,2k_1,\dots,2k_r,2k_{r+1}}}{c_{2n}} - P_{2k_1,\dots,2k_r,2k_{r+1}}(c^*) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_{2n}} \left(c_{2n,2k_1,\dots,2k_r} c_{2k_{r+1}} - c_{2k_{r+1}+2n,2k_1,\dots,2k_r}\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_{2n}} \left(\sum_{i=1}^{r} c_{2n,2k_1,\dots,2k_i+2k_{r+1},\dots,2k_r} \right) \\
&-P_{2k_{r+1}}(c^*) P_{2k_1,\dots,2k_r}(c^*) + \sum_{i=1}^{r} P_{2k_1,\dots,2k_i+2k_{r+1},\dots,2k_r}(c^*) \\
&= (c_{2k_{r+1}} - \alpha^{2k_{r+1}}) P_{2k_1,\dots,2k_r}(c^*) - \sum_{i=1}^{r} P_{2k_1,\dots,2k_i+2k_{r+1},\dots,2k_r}(c^*) - \\
&P_{2k_{r+1}}(c^*) P_{2k_1,\dots,2k_r}(c^*) + \sum_{i=1}^{r} P_{2k_1,\dots,2k_i+2k_{r+1},\dots,2k_r}(c^*) \\
&= 0
\end{aligned}$$

weil $P_{2k}(c^*) = c^*_{2k}$ nach Induktionsverankerung gilt. Damit haben wir sowohl 2) als auch 3) bewiesen. Die neuen Partitionspolynome erfüllen per Definition wieder die Determinantenbedingung 4.16, da die approximierenden Verhältnisse $\frac{c_{2n,2k_1,\dots,2k_r}}{c_{2n}}$ die Determinantenbedingung für alle n erfüllen. Damit erfüllt aber auch der Limes die Bedingung. Um in 4) die Potenzreiheneigenschaft zu zeigen, betrachten wir

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\dots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\dots,2k_r} =$$
$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\dots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c^*_{2k_1,\dots,2k_r} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \alpha^{2k} \right)$$

Hier setzen wir auf der linken Seite 2) ein und vergleichen diejenigen Terme, in denen t in derselben Potenz k auftritt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\text{l.S.:}\quad & \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_r=k} \frac{1}{r!} \frac{1}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} \left(c^*_{2k_1,\dots,2k_r} + \sum_{i=1}^{r} \alpha^{2k_i} c^*_{2k_1,\dots,\vee,\dots,2k_r} \right) \\
\text{r.S.:}\quad & \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_r=k} \frac{1}{r!} \frac{1}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c^*_{2k_1,\dots,2k_r} + \\
& \sum_{k'=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_{r-1}=k-k'} \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{(2k_1)!\cdots(2k_{r-1})!} c^*_{2k_1,\dots,2k_{(r-1)}} \right) \left(\frac{1}{(2k')!} \alpha^{2k'} \right)
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, daß

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_r=k} \frac{1}{r!} \frac{1}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} \sum_{i=1}^{r} \alpha^{2k_i} c^*_{2k_1,\dots,\vee,\dots,2k_r} =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k'+\dots+k_{r-1}=k} \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{(2k_1)!\cdots(2k_{r-1})!} c^*_{2k_1,\dots,2k_{(r-1)}} \frac{1}{(2k')!} \alpha^{2k'}$$

gilt, wobei in der Summe $k' \neq 0$ gelten muß. Wir führen nun auf der linken Seite die Umbenennung

$$k_j \;=\; \begin{cases} k_j & \text{für} \quad j < i \\ k' & \text{für} \quad j = i \\ k_{j-1} & \text{für} \quad j > i \end{cases}$$

durch. Dann erhalten wir auf der linken Seite für jeden Term der Summe über i einen Beitrag $\alpha^{2k'} c^*_{2k_1,\dots,2k_{r-1}}$, so daß

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha^{2k_i} c^*_{2k_1,\dots,\vee,\dots 2k_r} = r \cdot \alpha^{2k'} c^*_{2k_1,\dots,2k_{r-1}}$$

folgt. Damit ist 4) bewiesen. Die so abgespaltene Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \alpha^{2k}$ ist gerade $\cosh(\alpha t)$. Das heißt, daß für die Potenzreihe in $c^*_{2k_1,\dots,2k_r}$

$$e^{\lambda t} \geqslant \left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\dots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c^*_{2k_1,\dots,2k_r} \right) \cosh(\alpha t)$$

gilt, und sie damit exponentiell durch $e^{(\lambda-\alpha)t}$ beschränkt ist. Damit ist 5) bewiesen. Q.E.D.

Dieser Satz liefert uns also das Werkzeug, einen Koeffizienten α aus gegebenen Partitionspolynomen $c_{2k_1,\dots,2k_r}$ abzuspalten. Wenn wir wüßten, daß die neuen Partitionspolynome $c^*_{2k_1,\dots,2k_r}$ ein neues Baumannfeld Φ^* mit Hilfe von

$$\omega(e^{t\Phi^*(F)}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\dots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c^*_{2k_1,\dots,2k_r} \mathcal{V}_{2k_1} \cdots \mathcal{V}_{2k_r}$$

definierten, so hätten wir mit 1) bereits, daß

$$\Phi = \alpha\varphi\,\mathsf{s}\,\Phi^*$$

ist. Denn die trunkierten Funktionen

$$\mathcal{W}^{T,\Phi}_{2k} = c_{2k}\mathcal{V}^T_{2k} \quad \text{und} \quad \mathcal{W}^{T,\alpha\varphi\,\mathsf{s}\,\Phi^*}_{2k} = (\alpha^{2k} + c^*_{2k})\mathcal{V}^T_{2k}$$

von Φ und $\alpha\varphi\,\mathsf{s}\,\Phi^*$ würden übereinstimmen. Allerdings müßte dafür noch die Wightmanpositivität des Feldes Φ^* aus der Determinantenbedingung abgeleitet werden. Dies brauchen wir aber gar nicht, denn die exponentielle Beschränktheit der Potenzreihe ist für unseren Beweis ausreichend.

6.2 Iteration der Abspaltung

Satz 6.1 spaltet aus Partitionspolynomen, die die Determinantenbedingung und die Potenzreihenbeschränktheit erfüllen, s-Produkt-Koeffizienten ab. Da die neuen Partitionspolynome wiederum die Voraussetzungen des Satzes erfüllen, können wir auch auf diese Satz 6.1 anwenden, vorausgesetzt, die elementaren Partitionspolynome verschwinden nicht, denn dann wäre der Ausdruck $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n,2k}}{c_{2n}}$ nicht definiert. Wie im s-Produkt-Fall erhalten wir einen weiteren s-Produkt-Koeffizienten α_2 aus

$$\alpha_2^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{c^*_{2n+2}}{c^*_{2n}}$$

Wie für s-Produkte, so läßt sich auch hier zeigen, daß die Koeffizienten der Größe nach abgespalten werden. Für die erste Abspaltung erhalten wir:

Lemma 6.2 Für die Verhältnisfolge der iterierten Partitionspolynome c^*_{2k} gilt:

$$\frac{c^*_{2k+2}}{c^*_{2k}} \leqslant \alpha^2$$

Beweis: Wir betrachten

$$\frac{c^*_{2k+2}}{c^*_{2k}} = \frac{c_{2k+2} - \alpha^{2k+2}}{c_{2k} - \alpha^{2k}} = \alpha^2 \left(\frac{\frac{c_{2k+2}}{\alpha^{2k+2}} - 1}{\frac{c_{2k}}{\alpha^{2k}} - 1} \right)$$

Wir müssen also zeigen, daß

$$\left(\frac{\frac{c_{2k+2}}{\alpha^{2k+2}} - 1}{\frac{c_{2k}}{\alpha^{2k}} - 1} \right) \leqslant 1$$

gilt. Wir wissen, daß Zähler und Nenner jeweils einzeln größer als Null sind. Daher können wir umformen:

$$\frac{c_{2k+2}}{\alpha^{2k+2}} \leqslant \frac{c_{2k}}{\alpha^{2k}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} \leqslant \alpha^2$$

Dies aber gilt nach Definition von α für alle k. Q.E.D.

Im allgemeinen definieren wir nun durch Hintereinander-Anwendung der Operation "$*$" die Iteration der Abspaltung wie folgt:

Definition 6.3 Es sei $c^{(N)}_{2k} \neq 0$. Dann ergeben sich die $N+1$-fach abgespaltenen Partitionspolynome durch

$$c^{(N+1)}_{2k_1,\ldots,2k_r} = (c^{(N)}_{2k_1,\ldots,2k_r})^*$$

wobei die Operation "$*$" wie in Satz 6.1 zu verstehen ist. Der $N+1$ s-Produkt-Koeffizient ist dann gegeben durch

$$\alpha^2_{N+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{(N)}_{2n+2}}{c^{(N)}_{2n}}.$$

Dabei setzten wir $c^{(0)}_{2k_1,\ldots,2k_r} = c_{2k_1,\ldots,2k_r}$.

Hier genügt es, sicherzustellen, daß ein $c_{2k_0}^{(N)}$ von Null verschieden ist, da ja nach Lemma 5.5 alle c_{2k} verschwinden, falls nur eines verschwindet. Da in den Beweis von Lemma 5.5 aber nur die Determinantenbedingung und die Potenzreihenbeschränktheit eingehen, gilt dasselbe für alle $c_{2k}^{(N)}$. Auch längere Partitionspolynome verschwinden in diesem Fall nach der Reduktionsformel. Wir wollen nun zuerst das Ergebnis formulieren, falls ein N-fach abgespaltenes elementares Partitionspolynom verschwindet:

Satz 6.4 Es sei $c_{2k_0}^{(N)} = 0$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$c_{2k} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{2k},$$

d.h. das Baumannfeld Φ ist ein endliches s-Produkt mit den Gewichten α_i.

Beweis: Aus Satz 6.1 wissen wir, daß nach der Iteration

$$(c_{2k}^{(N-1)})^* = c_{2k}^{(N-1)} - \alpha_N^{2k}$$

ist. Nach Voraussetzung verschwindet die linke Seite. Auf der rechten Seite setzen wir rekursiv 6.1.1) ein und erhalten

$$0 = c_{2k}^{(N-1)} - \alpha_N^{2k} = c_{2k}^{(N-2)} - \sum_{i=N-1}^{N} \alpha_i^{2k} = \ldots = c_{2k} - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{2k}$$

Q.E.D.

Nun müssen wir noch den Fall betrachten, in dem die N-fach abgespaltenen Partitionspolynome nicht verschwinden. In diesem Fall erhalten wir das folgende Ergebnis:

Satz 6.5 Es sei $c_{2k}^{(N)} \neq 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1) $\alpha_N \geqslant \alpha_{N+1}$
2) Der Limes $c_{2k}^{(\infty)} = \lim_{N\to\infty} c_{2k}^{(N)}$ existiert.
3) $\lim_{N\to\infty} c_{2k}^{(N)} = 0$
4) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$
5) $c_{2k} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{2k}$,

d.h das Baumannfeld Φ ist ein unendliches s-Produkt mit den Gewichten α_i.

Beweis: Wir erhalten 1), indem wir Lemma 6.2 auf $c_{2n}^{(N)}$ anwenden. Dann folgt

$$\frac{c_{2n+2}^{(N)}}{c_{2n}^{(N)}} \leqslant \alpha_N^2.$$

Die linke Seite konvergiert gegen α_{N+1}^2, und damit ist 1) bewiesen. Um 2) zu beweisen betrachten wir

$$c_{2k}^{(N)} = c_{2k} - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{2k}$$

Die rechte Seite ist mit N monoton fallend. Andererseits erfüllen die $c_{2k}^{(N)}$ für alle N die Determinantenbedingung, daher ist die rechte Seite nach unten durch Null beschränkt, insgesamt also konvergent. Damit ist 2) bewiesen. Um 3) zu beweisen müssen wir in zwei Schritten vorgehen. Wir betrachten $c_{2k+2}^{(\infty)}$ aus 2) und spalten wie folgt auf:

$$\begin{aligned} c_{2k+2}^{(\infty)} &= c_{2k+2} - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{2k+2} - \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^{2k+2} = c_{2k+2}^{(N)} - \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^{2k+2} \\ &= \frac{c_{2k+2}^{(N)}}{c_{2k}^{(N)}} c_{2k}^{(N)} - \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^{2k+2} \leqslant \alpha_{N+1}^2 c_{2k}^{(N)} - \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^{2k+2} \end{aligned}$$

Da aber nun sowohl $(c_{2k}^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ als auch $(\alpha_N^2)_{N\in\mathbb{N}}$ in N monoton fallende Folgen sind, erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$c_{2k+2}^{(\infty)} = 0$$

Es bleibt also noch zu zeigen, daß auch $c_2^{(\infty)}$ verschwindet. Das folgt wiederum aus der Beschränktheit des Feldes Φ. Nach unendlich vielen Iterationsschritten haben wir durch rekursives Einsetzen in Satz 6.1.4)

$$\omega(e^{t\Phi(F)}) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_r} \frac{1}{r!} \frac{t^{2k_1+\cdots+2k_r}}{(2k_1)!\cdots(2k_r)!} c_{2k_1,\dots,2k_r}^{(\infty)} \right) \left(\prod_{i=1}^{\infty} \cosh(\alpha_i \cdot t) \right)$$

wobei wir $\mathcal{V}_2(F,F) = 1$ gewählt heben. Nach Satz 6.1 genügen die $c_{2k_1,\dots,2k_r}^{(\infty)}$ der Reduktionsformel 4.12. In der Summe tragen also nur diejenigen Terme bei, für die $k_1 = \cdots = k_r = 1$ ist, da $c_{2k}^{(\infty)} = 0$ für $k > 1$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \omega(e^{t\Phi(F)}) &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{2r}}{2^r r!} c_{2,\dots,2}^{(\infty)} \right) \left(\prod_{i=1}^{\infty} \cosh(\alpha_i \cdot t) \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{2r}}{2^r r!} c_2^{(\infty)} \cdots c_2^{(\infty)} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \cosh(\alpha_i t) \right) \\ &= e^{c_2^{(\infty)} \frac{t^2}{2}} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \cosh(\alpha_i t) \right) \end{aligned}$$

Da die linke Seite durch $e^{t\|\Phi(F)\|}$ beschränkt ist und das Minimum von $\cosh(x)$ gleich $\cosh(0) = 1$ ist, wäre $c_2^{(\infty)} \neq 0$ ein Widerspruch zur Beschränktheit von Φ. Damit ist 3) bewiesen. Außerdem können wir ablesen, daß

$$e^{t\|\Phi(F)\|} \geqslant \prod_{i=1}^{\infty} \cosh(\alpha_i \cdot t)$$

ist. Dann folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$e^{t\|\Phi(F)\|} \geqslant \prod_{i=1}^{\mathbb{N}} \cosh(\alpha_i t) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(e^{\alpha_i t} + e^{-\alpha_i t}) \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^N e^{\sum_{i=1}^N \alpha_i t}$$

d.h. $\|\Phi(F)\| \geqslant \sum_{i=1}^N \alpha_i$ für alle $N \in \mathbb{N}$, da wir für festes N nur t groß genug wählen müssen. Dann aber ist auch $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i$ beschränkt und 4) ist bewiesen. Da nun

$$0 = c_{2k}^{(\infty)} = \lim_{N\to\infty} c_{2k}^{(N)} = \lim_{N\to\infty} \left(c_{2k} - \sum_{i=1}^N \alpha_i^{2k}\right)$$

nach Satz 6.1 gilt, folgt 5). Q.E.D.

Damit ist sichergestellt, daß die abgespaltenen s-Produkt-Koeffizienten im Limes das gesamte Feld Φ als gewichtetes s-Produkt $\varphi_{\underline{\alpha}}$ reproduzieren. Der Beweis von Theorem 3.15 ist ein einfaches Korollar zu den Sätzen 6.4 und 6.5. Die unitäre Äquivalenz der Baumannfelder Φ zu den gewichteten s-Produkten von Buchholzfeldern $\varphi_{\underline{\alpha}}$ folgt aus der Übereinstimmung ihrer trunkierten (und damit ihrer n-Punkt) Funktionen.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Diskussion

Es ist uns gelungen, zu zeigen, daß die von Baumann betrachtete Klasse beschränkter Bosefelder eine sehr einfache Struktur hat. Alle Baumannfelder lassen sich als gewichtete s-Produkte von Buchholzfeldern darstellen, und wir haben ein Verfahren dafür angegeben, die s-Produkt Koeffizienten aus der Koeffizientenfolge $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ zu extrahieren. Wir führen die einfache Struktur der Baumannfelder vor allem auf die spezielle Form ihrer Kommutatorrelationen (raum- und zeitartige Vertauschbarkeit) zurück, die in den Beweis des Satzes von Baumann 3.10 eingeht. Diese Vertauschungsrelationen lassen sich als Abwesenheit von Wechselwirkungen interpretieren, da sich die Quantenfelder ungehindert nach dem Huygens'schen Prinzip ausbreiten können. In dieser Hinsicht dürften sich die von Rehren in [Reh97] betrachteten beschränkten Bosefelder als interessanter erweisen, da diese lediglich für raumartige Abstände kommutieren und somit Wechselwirkungen im weiteren Sinne zulassen. Allerdings wären zur Klassifizierung dieser Felder andere Methoden als die in dieser Arbeit verwendeten notwendig, da wir an den entscheidenden Stellen immer wieder von der einfachen Struktur der Buchholzfelder und damit von den wohlbekannten Relationen zwischen freien Fermifeldern Gebrauch gemacht haben. Unser Ergebnis läßt sich in dem Sinne deuten, daß die Beschränktheit von Bosefeldern, wenn diese nicht trivial sein sollen, nur durch Wechselwirkungen verursacht werden kann.

Eine vom mathematischen Standpunkt interessante Frage ergibt sich aus der Tatsache, daß von der Bedingung der Determinantenpositivität nur ein kleiner Teil in den Beweis des Theorem 3.15 eingeht. So folgt aus der Positivität der 1×1 und 2×2-Determinanten für Partitionspolynome beliebiger Länge zusammen mit der Beschränktheit des Feldes Φ bereits, daß Φ ein gewichtetes s-Produkt von Buchholzfeldern ist. Dann aber erfüllt Φ auch die Wightmanpositivität und die Determinantenbedingung gilt für alle $N \times N$-Determinanten. Es bleibt die Frage, ob für Folgen c_{2n}, für die die Positivität der 1×1 und 2×2-Determinanten gilt, bereits die Positivität der $N \times N$-Determinanten auch ohne exponentielle Beschränktheit folgt. Wir haben diese Frage jedoch noch nicht weiter untersucht.

Eine weitere ungeklärte Frage ist, ob beschränkte Bosefelder auch in $s+1$-Dimensionen mit $s \geqslant 2$ existieren. Baumann selbst äußerte sich zu dieser Frage jedoch skeptisch [Bau97].

Anhang A

Konventionen

A.1 Skalarprodukte

Das Skalarprodukt von Vektoren aus dem Minkowski-Raum wird mit Lorentzindizes $\mu, \nu, \ldots$ gekennzeichnet. Dabei verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention, wonach über doppelt vorkommende oben und unten stehende Indizes summiert wird. Für $x, y \in \mathbb{R}^4$ ist damit

$$xy = x_\mu y^\mu = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

A.2 Fouriertransformation

Für die Fouriertransformierte $\tilde{\cdot} : \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und ihre Rücktransformierte benutzen wir die folgende Konvention:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x f(x) e^{ikx} \\ f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d k \tilde{f}(k) e^{-ikx} \end{aligned}$$

A.3 Bernoulli Zahlen

Für die Bernoullischen Zahlen wurde die folgende Konvention verwendet [RG63]:

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$

Anhang B

Symbolverzeichnis

A	ein allgemeines Quantenfeld	S. 9
A^*	das zu A hermitesch konjugierte Feld	S. 9
$A_{\underline{\alpha}}$	ein gewichtetes s-Produkt des Feldes A	S. 17
$\{\cdot,\cdot\}$	ein Antikommutator	S. 10
B_{2n}	die Bernoulli Zahlen	S. 24
$E^T(t)$	ein trunkiertes erzeugendes Funktional	S. 15
$E(t)$	ein erzeugendes Funktional	S. 15
F_n	die um ein Argument reduzierte Wightmanfunktion zu W_n	S. 12
$\tilde{F}_n$	die Fouriertransformierte der Funktion F_n	S. 12
$\overline{\Gamma}^+$	der abgeschlossene Vorwärtslichtkegel	S. 9
$\mathcal{H}$	ein separabler Hilbertraum	S. 8
$\mathbb{1}$	die Identität	S. 9
$\mathcal{K}$	ein maximaler Kommutator	S. 27
$[\cdot,\cdot]$	ein Kommutator	S. 10
Λ	eine Transformation aus $\mathcal{L}_+^\uparrow$	S. 8
$\tilde{\Lambda}$	eine Transformation aus $SL(2,\mathbb{C})$	S. 10
$\mathcal{L}_+^\uparrow$	die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe	S. 8
Ω	der Vakuumvektor	S. 9
$\mathcal{P}$	die Poincarégruppe	S. 8

$\tilde{\mathcal{P}}$	die Überlagerungsgruppe der Poincarégruppe (Spinorgruppe)	S. 8
P	der Impulsoperator	S. 9
Φ	das Baumannfeld	S. 19
$P_\pm$	die zu γ^5 gehörenden Projektionsoperatoren	S. 20
Ψ	ein beliebiger Vektor aus $\mathcal{H}$	S. 8
$P(\Phi)$	ein Polynom im Baumannfeld Φ	S. 28
$SL(2,\mathbb{C})$	die Überlagerungsgruppe von $\mathcal{L}_+^\uparrow$	S. 8
$\mathrm{Sp}(\Psi)$	der spektrale Inhalt des Vektors Ψ	S. 13
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	der Raum der Testfunktionen über $\mathbb{R}$	S. 6
$\underline{\mathcal{S}}$	die Borchersalgebra	S. 5
$\mathrm{U}(a,\Lambda)$	eine unitäre Darstellung von $\mathcal{P}$	S. 9
$\mathrm{U}(a,\tilde{\Lambda})$	eine unitäre Darstellung von $\tilde{\mathcal{P}}$	S. 10
$\mathrm{U}(\lambda)$	eine unitäre Darstellung der Skalentransformationen	S. 22
$\mathrm{V}_{\mu\nu}(\tilde{\Lambda})$	eine endlichdimensionale Matrixdarstellung von $SL(2,\mathbb{C})$	S. 10
$\mathcal{V}_n^T$	die n-Punkt-Funktionen des Buchholzfeldes	S. 23
$W_n^{A_i}$	die n-Punktfunktionen der Felder A_i	S. 18
$W_n^{T,A_1\,\mathsf{s}\cdots\mathsf{s}\,A_r}$	die trunkierten Funktionen des Feldes $A_1\,\mathsf{s}\,\cdots\,\mathsf{s}\,A_r$	S. 17
$W_n^{T,A_{\underline{\alpha}}}$	die trunkierten Funktionen des Felders $A_{\underline{\alpha}}$	S. 17
W_n^{T,A_i}	die trunkierten Funktionen der Felder A_i	S. 17
W_n^T	die trunkierten Wightmanfunktionen des Feldes A	S. 14
$\mathcal{W}_n^T$	die n-Punkt-Funktionen des Baumannfeldes Φ	S. 25
W_n	die n-Punkt Funktion des Feldes A	S. 11
$\widetilde{W}_n$	die Fouriertransformierte von W_n	S. 12
$\{a,\Lambda\}$	eine Transformation aus $\mathcal{P}$	S. 8
$\{a,\tilde{\Lambda}\}$	eine Transformation aus $\tilde{\mathcal{P}}$	S. 10
a	eine Translation in $\mathbb{R}^d$	S. 8
α_i	die s-Produkt Koeffizienten	S. 17

$\underline{\alpha}_{2k_1,\ldots,2k_r}$	die Partitionspolynome des Feldes $\varphi_{\underline{\alpha}}$	S. 40
$\underline{\alpha}^*_{2k_1,\ldots,2k_r}$	die reduzierten Partitionspolynome des Feldes $\varphi_{\underline{\alpha}}$	S. 42
$c_{\|X_1\|,\ldots,\|X_r\|}$	die Partitionspolynome des Baumannfeldes Φ	S. 33
$c^*_{2k_1,\ldots,2k_r}$	die reduzierten Partitionspolynome des Baumannfeldes Φ	S. 45
d_L, d_R	die chiralen Skalendimensionen	S. 22
d	die Raumzeitdimension	S. 9
d	die Skalendimension	S. 22
f_0, f_i	spezielle Testfunktionen	S. 30
γ^μ	die Dirac-Matrizen	S. 19
$\omega(\cdot)$	der Vakuumzustand	S. 15
φ	das Buchholzfeld	S. 19
$\varphi^{(m)}$	das Buchholzfeld zur Skalendimension $2m+1$	S. 24
$\varphi^{(m_L,m_R)}$	das nichtskalare Buchholzfeld mit Skalendimensionen $m_L+\frac{1}{2}$ und $m_R+\frac{1}{2}$	S. 24
ψ	ein masseloses Fermifeld	S. 19
$\psi_{L,R}$	chirale Fermifelder	S. 19
$\psi_{\Re e}$	ein masseloses reelles Fermifeld	S. 21
$\psi_{\Re e,R}$	ein chirales reelles Fermifeld	S. 21
$\cdot \mathsf{s} \cdot$	das s-Produkt	S. 16
$\mathrm{supp}(f)$	der Träger von f	S. 13
$x_\pm$	die Lichtkegelvariable $x_+ = t + x$ und $x_- = t - x$	S. 20

Literaturverzeichnis

[AW64] Araki, H. und Wyss, W. “Representations of canonical anticommutation relations.” *Helv. Phys. Acta*, **37**(1964): 136–159.

[Bau99] Baumann, K. “Bounded Bose fields in 1+1 dimensions commuting for space- and timelike distances.” *Journal of Mathematical Physics*, **40**(1999): 1719–1737.

[Bau97] Baumann, K. “Unboundedness of Bose fields in a one-dimensional model world.” *Letters in Mathematical Physics*, **41**(97): 135–147.

[BLT75] Bogolubov, N., Logunov, A. und Todorov, I. *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*. W.A. Benjamin, 1975.

[Bor62] Borchers, H.-J. “On the structure of the algebra of field operators.” *Nuovo Cimento*, **24**(1962): 214–236.

[Bor72] Borchers, H.-J. “Algebraic aspects of Wightman field theory.” In *Statistical Mechanics and Field Theory*, Sen, R. und Weil, C., Hg., Haifa Lectures 1971. New York: Halsted Press, 1972.

[BŠ84] Bogoljubov, N. N. und Širkov, D. V. *Quantenfelder*. Physik-Verlag, Weinheim, 1984.

[Buc] Buchholz, D. unveröffentlicht.

[Fis86] Fischer, G. *Lineare Algebra*, Kap. 6. Vieweg Verlag, 1986.

[Haa92] Haag, R. *Local Quantum Physics*, Kap. 2.2. Springer Verlag, 1992.

[Heg75] Hegerfeldt, G. C. “Prime field decomposition and infinitly divisible states on Borchers' tensor algebra.” *Communications in Mathematical Physics*, **45**(1975): 137–151.

[IZ80] Itzykson, C. und Zuber, J.-B. *Quantum Field Theory*, Kap. 3.3. McGraw-Hill, 1980.

[Reh97] Rehren, K.-H. “Bounded Bose fields.” *Letters in Mathematical Physics*, **40**(1997): 299–306.

[RG63] Ryshik, I. und Gradstein, I. *Tables of Series, Products and Integrals*, Kap. 1.5, S. 43. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.

[SW69] Streater, R. F. und Wightman, A. S. *PCT, Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim/Zürich, 1969.

[Tod65] Todorov, I. T. "Der axiomatische Zugang zur Quantenfeldtheorie." *Fortschritte der Physik*, **13**(1965): 649–700.

[WG64] Wightman, A. und Garding, L. "Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory." *Archiv för Fysik*, **28**(1964), 13: 129–184.

[Yng73] Yngvason, J. "On the algebra of test functions for field operators." *Communications in Mathematical Physics*, (1973): 315–333.

[Yng81] Yngvason, J. "Translationally invariant states and the spectrum ideal in the algebra of test functions for quantum fields." *Communications in Mathematical Physics*, **81**(1981): 401–418.

[Yng86] Yngvason, J. "Invariant states on Borchers' tensor algebra." *Ann. Inst. Henri Ponicaré*, **45**(1986), 2: 117–145.

Danksagung

Viele Menschen haben zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen, und ich möchte mich hiermit bei ihnen bedanken. Besonders erwähnen möchte ich in diesem Zusammenhang

- Prof. Dr. Klaus Baumann, der sich in der schwierigen Einarbeitungsphase immer viel Zeit für mich genommen hat. Ich hätte gerne länger mit ihm zusammengearbeitet.
- Hochschuldozent Dr. Karl-Henning Rehren, der nach dem Tod von Prof. Baumann die Betreuung meiner Arbeit übernommen hat und mir immer mit Rat und Tat (und viel Geduld) zur Seite stand.
- Prof. Dr. Hansjörg Roos für die Übernahme des Koreferats.
- der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie für die nette Arbeitsatmosphäre und vor allem Walter Kunhardt für viele hilfreiche Diskussionen.
- meinem Zimmergenossen Oliver Natt für die aufbauenden Worte, wenn es mal nicht voran ging.
- dem Cafeten-Kollektiv des mathematischen Instituts, ohne das ich nicht gewußt hätte, wie ich meine kreativen Pausen hätte gestalten sollen.
- meinen Eltern für die rückhaltlose finanzielle Unterstützung.