

# Lokale Gleichgewichtszustände von Bosonen und Bosekondensaten

Diplomarbeit

vorgelegt von

Marcel Bliem  
aus Hannover

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik  
der  
Georg-August-Universität Göttingen

2009



“Physics is, hopefully, simple. Physicists are not.”  
Edward Teller



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2. Allgemeine Grundlagen</b>	<b>11</b>
2.1. Notation . . . . .	11
2.1.1. Einheiten . . . . .	11
2.1.2. Der Minkowski-Raum . . . . .	12
2.1.3. Fouriertransformation . . . . .	12
2.2. Aspekte der algebraischen Quantenfeldtheorie . . . . .	13
2.2.1. Die Feld- und die Observablenalgebra . . . . .	13
2.2.2. Zustände . . . . .	14
2.3. Das freie, masselose skalare Feld . . . . .	16
<b>3. Das globale thermische Gleichgewicht</b>	<b>19</b>
3.1. Die KMS-Bedingung . . . . .	19
3.2. Die homogenen KMS-Zustände des freien Feldes . . . . .	20
3.2.1. Rückgewinnung des Vakuumzustandes . . . . .	24
3.2.2. Die Referenzzustände . . . . .	25
<b>4. Das lokale Gleichgewicht</b>	<b>27</b>
4.1. Die lokalen Algebren am Punkt . . . . .	27
4.1.1. Lokale Observablen . . . . .	27
4.1.2. Makroobservablen . . . . .	28
4.2. Lokales Gleichgewicht . . . . .	29
4.3. Realisierung lokaler Gleichgewichtszustände für das freie Feld . . . . .	29
4.3.1. Wahl des geeigneten Raumes $\mathcal{S}_x$ . . . . .	30
4.3.2. Die zulässigen thermischen Funktionen . . . . .	34
4.3.3. Einige Makroobservablen . . . . .	36
<b>5. Evolutionsgleichungen</b>	<b>41</b>
5.1. Evolutionsgleichung für Teilchendichte und Kondensat . . . . .	42
5.1.1. Ableitungen der Distribution $\vartheta^\mu(x)$ . . . . .	42
5.1.2. Herleitung der Evolutionsgleichung . . . . .	43
5.2. Maximale Gebiete lokalen Gleichgewichtes . . . . .	46
5.2.1. Singularitäten . . . . .	49
<b>6. Konstruktion <math>\mathcal{S}_\mathcal{O}</math>-thermalen Zustände mit Kondensat</b>	<b>55</b>
6.1. Erste Beispiele . . . . .	55
6.1.1. Ein $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand ohne Kondensat . . . . .	55
6.1.2. Ein einfacher $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand mit Kondensat . . . . .	56

6.2. Allgemeine $\mathcal{S}_O$ -thermale Zustände . . . . .	57
6.2.1. Zustände mit scharfem Wert des Kondensats und der Temperatur . . .	57
6.2.2. Konstruktive Aspekte . . . . .	58
6.3. Ein nicht-trivialer $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermaler Zustand . . . . .	60
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>63</b>
7.1. Weitere Fragestellungen . . . . .	64
<b>Appendices</b>	<b>67</b>
<b>A. Beweise der Lemmata in Kapitel 3</b>	<b>69</b>
<b>B. Beweise in Kapitel 4</b>	<b>71</b>
B.1. Ausführlicher Beweis von Satz 4.8 . . . . .	71
B.2. Beweise weiterer Lemmata in Kapitel 4 . . . . .	79
<b>C. Beweise der Lemmata in Kapitel 5</b>	<b>83</b>
<b>D. Beweise der Lemmata in Kapitel 6</b>	<b>85</b>
<b>E. Funktionenräume</b>	<b>87</b>
E.1. Mengen von Maßen . . . . .	88
<b>F. Symbolliste</b>	<b>89</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>

# 1. Einleitung

Diese Arbeit ist der Anwendung des in [1] vorgestellten Formalismus zur Beschreibung von nicht im thermischen Gleichgewicht befindlichen Quantensystemen auf das freie masselose Feld gewidmet. Dabei wird die Untersuchung aus [2] fortgeführt und auf Zustände erweitert, die Bosekondensate beschreiben.

Im Rahmen der axiomatischen/algebraischen Quantenfeldtheorie ist in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts die Thermodynamik unendlich ausgedehnter Quantengase für Systeme im Gleichgewicht ausgiebig untersucht und verstanden worden (vgl. z.B. [3–5]). Insbesondere das Konzept, globales Gleichgewicht durch KMS-Zustände zu beschreiben, ist hierbei für viele Modelle detailliert ausgearbeitet worden (vgl. z.B. [6–9]). Wesentlich schwieriger ist die Frage, wie Systeme zu behandeln sind, die nicht im Gleichgewicht sind. Es ist weder offensichtlich wie zu entscheiden ist, ob ein solcher Zustand überhaupt thermische Eigenschaften besitzt, noch, wenn dies der Fall ist, wie die Erwartungswerte thermischer Größen in solchen Zuständen zu berechnen sind.

In 2002 wurde von D.Bucholz, I.Ojima und H. Roos eine neue Methode zur Beschreibung solcher Systeme vorgestellt (vgl. [1]), indem die entsprechenden Zustände lokal mit Gleichgewichtszuständen verglichen werden. Dazu wird als erstes eine Menge  $\mathcal{C}$  von Referenzzuständen gewählt, die wohldefinierte thermische Eigenschaften haben (Zustände im globalen Gleichgewicht und deren Gemische). In einem nächsten Schritt wird für jedes  $x \in \mathbb{R}^4$  ein Raum  $\mathcal{T}_x$  von Observablen bestimmt, die die Messung thermaler Eigenschaften am Punkt  $x$  repräsentieren. Wähle nun einen Unterraum  $\mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{T}_x$ . Existiert für einen Zustand  $\omega$  ein Referenzzustand  $\omega_0 \in \mathcal{C}$ , so daß

$$\omega|_{\mathcal{S}_x} = \omega_0|_{\mathcal{S}_x}$$

gilt, so wird  $\omega$  lokal-thermaler bzw.  $\mathcal{S}_x$ -thermaler Zustand genannt (eine schematische Darstellung dieser Idee findet sich in Abb.1.1). Da der Zustand  $\omega$  von  $\omega_0$  bezüglich der Erwartungswerte in  $\mathcal{S}_x$  nicht zu unterscheiden ist, können konsistent  $\omega$  die gleichen thermalen Eigenschaften wie  $\omega_0$  zugeordnet werden. Gibt es für jeden Punkt eines Gebietes  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  einen solchen Referenzzustand  $\omega_x$ , so hat der Zustand  $\omega$  an jedem Punkt verschiedene thermale Interpretation. Durch wenige zusätzliche technische Annahmen können durch diese Zuordnung Distributionen in  $\mathcal{D}^*(\mathcal{O})$  gefunden werden, die das Raumzeitverhalten der Observablen in  $\mathcal{S}_x$  beschreiben.

Innerhalb dieses Rahmens sind bereits einige Modelle mit verschiedenen Resultaten untersucht worden (siehe [2, 10–13]), eine kurze Zusammenfassung ist in Tabelle 1.1 angegeben. Es zeigen sich innerhalb des gleichen konkreten Modells zwei Möglichkeiten, eine Analyse zu verfeinern. Zum einen kann der Raum  $\mathcal{S}_x$  variiert werden,<sup>1</sup> zum anderen kann, wenn möglich,

<sup>1</sup>Für das elektromagnetische Feld kann je nach Wahl des Raumes z.B. zwischen polarisierter und nicht polarisierter Strahlung unterschieden werden (vgl. [11, Abschnitt 6.3]).

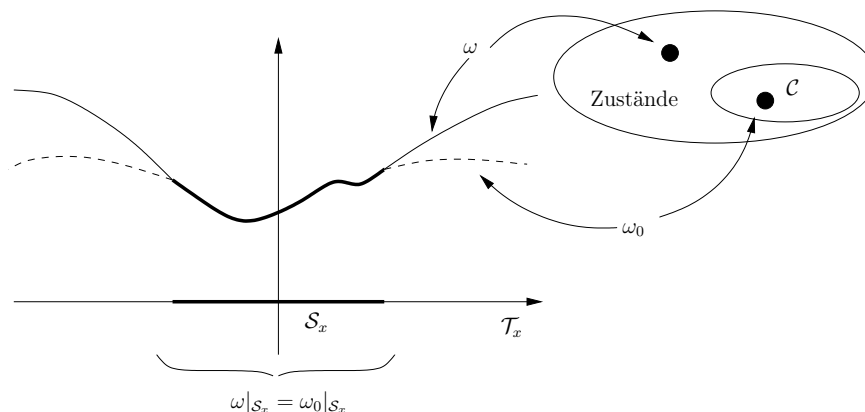


Abbildung 1.1.: Die Abbildung soll schematisch die Idee zur Beschreibung  $\mathcal{S}_x$ -thermalen Zustände wiedergeben.

der Raum der Referenzzustände vergrößert werden.<sup>2</sup>

In den bisherigen Untersuchungen wurde sich auf extremale KMS-Zustände (d.h. Zustände reiner thermaler Phase) beschränkt, eine Einschränkung, die in dieser Arbeit fallengelassen wird. Die nicht-extremalen Zustände sind zusätzlich zur inversen Temperatur  $\beta$  durch einen weiteren Parameter  $\kappa > 0$  charakterisiert, der als die Dichte der Teilchen mit Impuls null interpretiert wird (Bose-Kondensat). Nach der vollständigen Charakterisierung der KMS-Zustände werden mit den Methoden aus [2] zunächst die zulässigen thermischen Observablen bestimmt und dann entsprechende Evolutionsgleichungen für das Raumzeitverhalten der Makroobservablen hergeleitet.

Eine der wichtigsten und interessantesten Beobachtungen in den bisherigen Untersuchungen ist, daß in den untersuchten masselosen Theorien durch bestimmte lokale Gleichgewichtszustände auf makroskopischem Level eine Zeitrichtung ausgezeichnet wird, obwohl die zu Grunde liegende mikroskopische Theorie invariant unter Zeitreflektion ist. Dies liegt darin begründet, daß wenn  $\omega$  auf einer konvexen Menge  $\mathcal{O}$  ein nicht-trivialer lokaler Gleichgewichtszustand ist, und  $\mathcal{O}$  einen Lichtkegel enthält,  $\mathcal{O}$  wiederum in einem zeitartigen simplizialen Kegel enthalten ist. Es wird in dieser Arbeit gezeigt werden, daß ein ähnliches Resultat auch für den Fall nicht-extremaler Referenzzustände erzielt werden kann. Es existieren zwar Zustände, die nicht triviales Raumzeitverhalten auf dem ganzen  $\mathbb{R}^4$  haben, dieses Verhalten beschränkt sich dann jedoch auf diejenigen Observablen, die ausschließlich vom Kondensatanteil abhängen.

Da sich die Ergebnisse aus [2] fast vollständig übertragen lassen, ist der Schwerpunkt dieser Arbeit auf eine detaillierte Ausarbeitung der dort aufgeführten und teilweise geringfügig modifizierten Beweise ausgelegt.

<sup>2</sup>Im Falle masseloser Fermionen gibt es in einem festen Ruhesystem zur inversen Temperatur  $\beta > 0$  genau einen KMS-Zustand. Eine sinnvolle Erweiterung der Referenzzustände ist hier nicht möglich.



Theorie	Referenzzustände	$S_x$	Einige Ergebnisse	Autor
Masselose skalare Bosonen	extremale KMS-Zustände und kompakt getragene Gemische (vgl. Kapitel 3)	Raum der normalgeordneten, balancierten Ableitungen (vgl. Kapitel 4)	Bestimmte lokale Gleichgewichtszustände zeichnen makroskopisch eine Zeitrichtung aus (Kapitel 5)	D. Buchholz, 2002 [2]
Masselose Fermionen	extremale KMS-Zustände und kompakt getragene Gemische	Raum der normalgeordneten, balancierten Ableitungen	Bestimmte lokale Gleichgewichtszustände zeichnen makroskopisch eine Zeitrichtung aus	B. Bahr, 2004 [10]
Elektro-Magnetisches Feld	extremale KMS-Zustände und kompakt getragene Gemische	Raum der normalgeordneten, balancierten Ableitungen (einzelne Betrachtung verschiedener Unterräume)	Bestimmte lokale Gleichgewichtszustände zeichnen makroskopisch eine Zeitrichtung aus	M. Uecker, 2005 [11]
Massive skalare Bosonen	extremale KMS Zustände und beliebige Gemische	Raum der normalgeordneten, balancierten Ableitungen	Es existieren keine lokalen Gleichgewichtszustände die makroskopisch eine Zeitrichtung auszeichnen	R. Hübener, 2005 [12]

Tabelle 1.1.: Auflistung einiger Arbeiten, die mit den Methoden aus [1] arbeiten.

## Aufbau der Arbeit

Zu Beginn eines jeden Kapitels werden in einem kurzen Auszug die wesentlichen Punkte wiedergegeben. Um den Text verständlicher und übersichtlicher zu halten, sind alle Lemmata aufgeführt, die Beweise jedoch in den Anhang ausgegliedert.

Als erstes werden im nächsten Kapitel kurz die Notationen und Konventionen aufgelistet, die im weiteren Verlauf benötigt werden, und eine kurze Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie gegeben. Im Anschluß werden die definierenden Gleichungen des freien, masselosen skalaren Feldes, angegeben, das im weiteren Verlauf der Arbeit als Modell betrachtet wird.

Im dritten Kapitel werden die Idee der KMS-Zustände aufgegriffen um globales Gleichgewicht zu beschreiben und in einer detaillierten Rechnung die nicht-extremalen KMS-Zustände des freien, skalaren Feldes bestimmt.

Kapitel 4 ist dem in [1] entwickelten Formalismus gewidmet. Dieser wird zunächst kurz vorgestellt und anschließend auf das freie Feld angewandt.

In Kapitel 5 werden der Begriff des lokalen Gleichgewichts am Punkt auf offene Mengen im Minkowski-Raum erweitert und Evolutionsgleichungen für das Raumzeitverhalten thermischer Größen hergeleitet. Diese ermöglichen dann, ein zu [2] ähnliches Singularitätentheorem zu beweisen.

Das sechste Kapitel gibt verschiedene Beispiele für lokale Gleichgewichtszustände und geht kurz auf allgemeine Konstruktionen ein.

Mit einer Zusammenfassung und einem kurzen Ausblick schließt die Arbeit.



## 2. Allgemeine Grundlagen

### 2.1. Notation

Wie üblich bezeichnen in dieser Arbeit  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  die entsprechenden Mengen von Zahlen, wobei  $0 \notin \mathbb{N}$  und entsprechend  $\mathbb{N}_0 \doteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Zur besseren Unterscheidung werden Vektoren in  $\mathbb{R}^3$  mit kleinen, fett gedruckten, lateinischen Buchstaben  $\boldsymbol{x}$  bezeichnet, während Elemente im  $\mathbb{R}^4$  durch normale lateinische Buchstaben  $x = (x_0, \boldsymbol{x})$  gekennzeichnet sind. Die Ausdrücke  $\mathcal{C}, \mathcal{C}^\infty, \mathcal{L}^p, \mathcal{L}_{\text{loc}}^p, \mathcal{D}$ , etc. stehen für die in der Funktionalanalysis gebräuchlichen Funktionenräume, versehen mit der üblichen Topologie; generell stehen große Skriptbuchstaben immer für einen Raum von Funktionen oder einen Raum von Borel-Maßen.<sup>12</sup>

Auf einem Hilbertraum  $\mathfrak{h}$  ist das Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  nach Physiker-Konvention linear im zweiten und konjugiert linear im ersten Argument. Mit  $L(\mathfrak{h})$  werden die (nicht notwendigerweise beschränkten) linearen Operatoren auf  $\mathfrak{h}$  bezeichnet, für  $T \in L(\mathfrak{h})$  ist  $\text{dom } T \subseteq \mathfrak{h}$  der Definitionsbereich.<sup>3</sup>

Ist allgemein  $X$  ein topologischer Vektorraum, so bezeichnet  $X^*$  den (topologischen) Dualraum, d.h. die Menge der stetigen linearen Funktionale mit Werten in  $\mathbb{C}$ .

Zuletzt, betrachte eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Für eine invertierbare Matrix  $A \in \text{GL}(n)$  und einen Vektor  $a \in \mathbb{R}^n$ , setze zur Abkürzung

$$\begin{aligned} f_{(A,a)}(x) &\doteq f(A^{-1}x - a) & f_a(x) &\doteq f_{(\mathbb{1},a)}(x) = f(x - a) \\ f_A(x) &\doteq f_{(A,0)}(x) = f(A^{-1}x) & \underline{f}(x) &\doteq f(-x) \end{aligned}$$

wobei Wohldefiniertheit der entsprechenden Ausdrücke vorausgesetzt wird.

#### 2.1.1. Einheiten

In dieser Arbeit wird durchgängig in natürlichen Einheiten gearbeitet. Es gilt

$$c_0 = \hbar = k_B = 1.$$

Es bezeichnet  $c_0$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit,  $\hbar$  die Planck- und  $k_B$  die Boltzmann-Konstante. Folglich haben Energie und Temperatur die Dimension einer inversen Länge.

<sup>1</sup>Für eine formale Definition der in dieser Arbeit verwendeten Funktionenräume siehe Appendix E, grundlegende Eigenschaften dieser Räume finden sich in [14], [15] oder [16].

<sup>2</sup>Wie in der Literatur üblich, werden Elemente der  $\mathcal{L}^p$ -Räume als Funktionen bezeichnet, obwohl es korrekter Weise Äquivalenzklassen von Funktionen sind. Die Bezeichnungen  $f$  und  $[f]$  werden synonym benutzt.

<sup>3</sup>Für die Grundlagen der Theorie unbeschränkter Operatoren sei auf [14] verwiesen.

### 2.1.2. Der Minkowski-Raum

Der (4 - dimensionale) **Minkowski-Raum**<sup>4</sup> ist der  $\mathbb{R}^4$  zusammen mit der nicht-degenerierten Bilinearform  $\eta$  mit Signatur (1, 3) gegeben durch die ebenfalls mit  $\eta$  bezeichnete Matrix

$$\eta \doteq \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Für  $x, y \in \mathbb{R}^4$ , wird  $xy \doteq \eta(x, y) = x_0y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  und  $x^2 \doteq \eta(x, x)$  geschrieben. An Stellen wo es dem besseren Verständnis dient, wird mit der üblichen Summenkonvention  $xy$  durch  $x^\nu y_\nu$  ersetzt. Das euklidische Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^4$  wird zur klaren Unterscheidung mit  $x \cdot y$  bezeichnet. Ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^4$  heißt **zeitartig**, wenn  $x^2 > 0$ , **raumartig**, wenn  $x^2 < 0$  und **lichtartig**, wenn  $x^2 = 0$ . Die Menge

$$V_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^4 | x^2 > 0, x_0 > 0\}$$

ist der offene **Vorwärtslichtkegel**. Gegeben einen Vektor  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  bezeichnet  $\underline{p} \doteq (|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^4$  den lichtartig erweiterten Vektor zu  $\mathbf{p}$ .

Die **Lorentzgruppe**  $\mathcal{L} \subset \text{GL}(4)$  ist Menge der  $4 \times 4$  Matrizen, die  $\eta$  invariant läßt,

$$\mathcal{L} \doteq \{\Lambda \in \text{GL}(4) | \forall x, y \in \mathbb{R}^4: \eta(x, y) = \eta(\Lambda x, \Lambda y)\}.$$

Die Zusammenhangskomponente der Identität ist die eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \doteq \{\Lambda \in \mathcal{L} | \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \geq 0\}.$$

Zusammen mit den Translationen bildet die Lorentzgruppe die **Poincaré-Gruppe**  $\mathcal{P} \doteq \mathcal{L} \times \mathbb{R}^4$  mit Wirkung auf dem  $\mathbb{R}^4$  gegeben durch

$$\lambda(x) = (\Lambda, a)(x) = \Lambda x + a, \quad x, a \in \mathbb{R}^4, \Lambda \in \mathcal{L}.$$

Die eigentliche, orthochrone Poincaré-Gruppe ist dann entsprechend gegeben durch  $\mathcal{P}_+^\uparrow \doteq \mathcal{L}_+^\uparrow \times \mathbb{R}^4$ .

### 2.1.3. Fouriertransformation

Es bezeichne  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  den Schwartzraum über dem  $\mathbb{R}^n$ . In dieser Arbeit ist für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$  ist die Fouriertransformation  $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definiert als

$$(F f)(p) \doteq \tilde{f}(p) \doteq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n x f(x) e^{-ix \cdot p}.$$

Es erweist sich als sinnvoll, im Fall  $n = 4$  das euklidische Skalarprodukt  $x \cdot p$  durch das Lorentzprodukt  $xp$  zu ersetzen.

Die Fouriertransformation setzt sich in natürlicher Weise auf den Raum der temperierten Distributionen  $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$  fort. Für  $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$  setze

$$(F \psi)(f) \doteq \psi(F f).$$

Da die Fouriertransformierte für kompakt getragene Testfunktion  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  immer einen nicht-kompakten Träger hat, kann  $F$  im allgemeinen nicht von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  auf  $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$  fortgesetzt werden. Für einige Beweise ist es daher essentiell, zusätzliche Regularitätseigenschaften zu fordern (vgl. Lemma 3.8 und 3.10).

<sup>4</sup>Es wird davon ausgegangen, daß die Grundprinzipien der speziellen Relativitätstheorie bekannt sind (andernfalls siehe z.B. [17]) und daher nur die Notation festgelegt.

### Faltungsprodukt

Für zwei Elemente  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  definiere das Faltungsprodukt  $* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  als

$$(f * g)(x) \doteq \int d^4y f_y(x)g(y) = \int d^4y f(x-y)g(y)$$

Für  $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^4)$  und  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  kann das Faltungsprodukt, ähnlich der Fouriertransformation, durch  $(\psi * f)(g) \doteq \psi(\underline{f} * g)$  fortgesetzt werden.

## 2.2. Aspekte der algebraischen Quantenfeldtheorie

Die folgende Einführung orientiert sich an [1, Abschnitt 2] und dient vor allem dem Festlegen der Notation, eine detaillierte Einführung in die axiomatische/algebraische Quantenfeldtheorie findet sich z.B. in [4, 5, 18].

### 2.2.1. Die Feld- und die Observablenalgebra

Die **Feldalgebra**  $\mathcal{A}$  ist die von  $\mathbf{1}$  und den zunächst abstrakten Symbolen<sup>5</sup>  $\phi(f)$ ,  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ , generierte Algebra, d.h.  $\mathcal{A}$  besteht aus Polynomen  $A$  der Form

$$A = \sum_{\text{endlich}} \phi(f_1) \cdots \phi(f_n).$$

Mit der Involution  $* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , gegeben durch

$$(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n))^* \doteq \phi(\bar{f}_n) \cdots \phi(\bar{f}_1), \quad \mathbf{1}^* = \mathbf{1}, \quad (2.1)$$

und lineares Fortsetzen, wird  $\mathcal{A}$  zu einer  $*$ -Algebra. Die lineare Abbildung  $f \mapsto \phi(f)$  heißt **Quantenfeld**. Die Poincaré-Transformationen  $\lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow$  wirken auf  $\mathcal{A}$  durch Automorphismen  $\alpha_\lambda \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ , gegeben durch

$$\alpha_\lambda(A) = \sum_{\text{endlich}} \phi(f_{1,\lambda}) \cdots \phi(f_{n,\lambda}), \quad (2.2)$$

wobei  $f_\lambda(x) \doteq D(\lambda)f(\lambda^{-1}(x))$  für  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  und  $D$  eine dem Tensorcharakter von  $\phi$  entsprechende Matrixdarstellung von  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  ist.

Die Quantenfelder  $f \mapsto \phi(f)$  unterliegen zusätzlichen Relationen (Feldgleichungen, Kommutatorrelationen, etc.). Insbesondere fordert hierbei die Einstein-Kausalität, daß der Kommutator

$$[\phi(f), \phi(g)] \doteq \phi(f)\phi(g) - \phi(g)\phi(f) = 0 \quad (2.3)$$

erfüllt, wenn die Träger von  $f$  und  $g$  raumartig<sup>6</sup> getrennt sind.

Zusätzliche innere Symmetrien der Theorie sind durch eine globale **Eichgruppe**  $G$  gegeben, wobei  $G$  eine lokal-kompakte Liegruppe ist, deren Elemente  $g \in G$  durch Automorphismen

<sup>5</sup>Der Einfachheit halber, wird in diesem Abschnitt auf etwaige Tensorindices verzichtet.

<sup>6</sup>Zwei Gebiete  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{R}^4$  heißen **raumartig getrennt** wenn  $xy < 0$ , für alle  $\forall x \in \mathcal{O}_1, y \in \mathcal{O}_2$

$\gamma_g \in \text{Aut}(\mathcal{A})$  auf die Feldalgebra wirken. Die Automorphismen  $\gamma_g$  kommutieren mit der Wirkung der Poincaré-Gruppe, d.h es gilt

$$\forall g \in G \forall \lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow: \gamma_g \circ \alpha_\lambda = \alpha_\lambda \circ \gamma_g. \quad (2.4)$$

Die  $G$ -Fixpunktalgebra

$$\mathfrak{A} \doteq \{A \in \mathcal{A} \mid \forall g \in G: \gamma_g(A) = A\}$$

heißt **Observablenalgebra**. Die selbstadjungierten Elemente von  $\mathfrak{A}$  heißen **Observablen**.

### 2.2.2. Zustände

Mit der von den Testfunktionen induzierten Topologie wird  $\mathcal{A}$  zu einer topologischen  $*$ -Algebra. Physikalische Zustände werden dann durch stetige Funktionale über  $\mathcal{A}$  beschrieben.

**Definition 2.1.** Eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **stetig**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle Folgen  $(f_{1,\nu}, \dots, f_{n,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$  mit  $f_{i,\nu} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  gilt

$$(f_{1,\nu}, \dots, f_{n,\nu}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (f_1, \dots, f_n) \Rightarrow \varphi(\phi(f_{1,\nu}) \cdots \phi(f_{n,\nu})) \rightarrow \varphi(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)).$$

Der Raum der stetigen Funktionale wird mit  $\mathcal{A}^*$  bezeichnet.

Ein physikalisches System wird durch spezielle Funktionale modelliert.

**Definition 2.2.** Ein Funktional  $\omega \in \mathcal{A}^*$  heißt **Zustand** über  $\mathcal{A}$ , wenn gilt

- $\omega$  ist positiv, d.h.  $\forall A \in \mathcal{A}: \omega(A^*A) \geq 0$ .
- $\omega$  ist normiert, d.h.  $\omega(\mathbf{1}) = 1$ .

Der Raum der Zustände über  $\mathcal{A}$  wird mit  $\mathcal{A}_{+,1}^* \subset \mathcal{A}^*$  bezeichnet, die Größe  $\omega(A)$  heißt **Erwartungswert** von  $A$  im Zustand  $\omega$ .

### $n$ -Punktfunktionen und quasifreie Zustände

Betrachte für einen Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  die Abbildung  $\omega^{(n)}: \prod_{i=1}^n \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$ , gegeben durch

$$\omega^{(n)}(f_1, \dots, f_n) \doteq \omega(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)). \quad (2.5)$$

**Definition 2.3.** Die  $n$ -lineare Abbildung  $\omega^{(n)}$  heißt  **$n$ -Punktfunktion** von  $\omega$ .

Gegeben eine Familie  $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  von multilinearen Abbildungen über dem Testfunktionsraum wird durch diese ein Funktional auf Feldalgebra  $\mathcal{A}$  definiert, wenn sie mit den entsprechenden Relationen der Quantenfelder kompatibel sind. Damit dieses Funktional einen Zustand definiert, müssen zusätzlich die entsprechenden Bedingungen gelten.

Eine besondere Klasse von Zuständen, bei denen diese Konstruktion besonders einfach ist, sind die sogenannten quasifreien Zustände, deren  $n$ -Punktfunktion nur von der Zweipunktfunktion bestimmt ist.

**Definition 2.4.** Ein Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  heißt **quasifrei**, genau dann,

$$\omega(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)) = \begin{cases} \sum_{\pi \in \Pi^n} \prod_{k=1}^n \omega(\phi(f_{\pi(k)})\phi(f_{\pi(k+1)})), & n \text{ gerade,} \\ 0 & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Hierbei ist  $\Pi^n$  die Untergruppe der Permutationen der Menge mit  $n$  Elementen, die

$$\begin{aligned} \pi(2k-1) &< \pi(2k), & k &= 1, \dots, n \\ \pi(2k-1) &< \pi(2k+1), & k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

erfüllt.

Ein Standardresultat der axiomatischen Quantenfeldtheorie, welches in dieser Arbeit des Öfteren benutzt wird, ist, daß ein quasifreier Zustand genau dann positiv ist, wenn die Zweipunktfunktion positiv ist.

### Die GNS-Konstruktion

Einer der zentralen Sätze in der Theorie der Operatoralgebren ist das Rekonstruktionstheorem von I.M. Gelfand, M.A. Najmark, I.E. Segal, das es ermöglicht mit einem gegebenen Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  die Elemente der abstrakten Algebra  $\mathcal{A}$  mit den aus der Quantenmechanik gewohnten Operatoren auf einem Hilbertraum zu identifizieren.

**Satz 2.5** (GNS-Rekonstruktionstheorem). *Sei  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra und  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Zustand. Dann existieren ein Hilbertraum  $\mathfrak{h}_\omega$ , eine Darstellung  $\pi_\omega : \mathcal{A} \rightarrow L(\mathfrak{h}_\omega)$  von  $\mathcal{A}$  in den (nicht notwendiger Weise beschränkten) linearen Operatoren auf  $\mathfrak{h}_\omega$  und ein Vektor  $\Omega_\omega \in \mathfrak{h}_\omega$  mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es existiert ein dichter Teilraum  $\mathfrak{h}_0 \subseteq \mathfrak{h}_\omega$ , so daß für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt, daß  $\mathfrak{h}_0 \subseteq \text{dom } \pi_\omega(A)$ ,  $\mathfrak{h}_0 \subseteq \text{dom } \pi_\omega(A^*)$  und  $(\pi_\omega(A))^*|_{\mathfrak{h}_0} = \pi_\omega(A^*)|_{\mathfrak{h}_0}$ .*
2. *Es ist  $\Omega_\omega \in \mathfrak{h}_0$  und für alle  $A \in \mathcal{A}$  und alle  $\Psi \in \mathfrak{h}_0$  ist  $\pi_\omega(A)\Psi \in \mathfrak{h}_0$ .*
3. *Für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt  $\omega(A) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle$*
4. *Das Bild der Algebra angewandt auf  $\Omega_\omega$ , d.h.  $\pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega$ , ist dicht in  $\mathfrak{h}_\omega$ .*

Das Tripel  $(\mathfrak{h}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$  heißt **GNS-Tripel** oder **GNS-Darstellung** von  $\mathcal{A}$  bezüglich  $\omega$ .

*Beweis.* Siehe z.B. [19]. □

Dieses Theorem ermöglicht es nun einige weitere Begriffe zu definieren.

**Definition 2.6.** Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein Zustand über  $\mathcal{A}$ .

- Die Menge

$$\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{A}) \doteq \{T \in L(\mathfrak{h}_\omega) | \mathfrak{h}_0 \subseteq \text{dom } T \text{ und } \forall A \in \mathcal{A}: [T|_{\mathfrak{h}_0}, \pi_\omega(A)|_{\mathfrak{h}_0}] = 0\}$$

heißt **Zentrum** von  $\mathcal{A}$  (bzgl.  $\omega$ ).

- Ist  $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{A})$  trivial, d.h.  $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ , dann heißt  $\omega$  **primär**.
- Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{A}$ . Die Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **zentral** (bzgl.  $\omega$ ), wenn durch

$$A\Psi \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} A_n\Psi, \quad \Psi \in \mathfrak{h}_0,$$

ein dicht definierter, symmetrischer Operator  $A$  auf  $\mathfrak{h}_\omega$  gegeben ist und

$$\omega(B[A_n, C]B') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für alle  $B, B', C \in \mathcal{A}$  gilt. Der erhaltene Grenzwert  $\lim A_n$  heißt **zentrale Observable**.

Die erhaltenen Grenzwerte zentraler Folgen beschreiben makroskopische Größen (vgl. [4, Abschnitt III]) und werden im späteren Verlauf der Arbeit dazu genutzt, thermische Makroobservablen zu beschreiben.

### 2.3. Das freie, masselose skalare Feld

Die Feldalgebra des freien, masselosen Feldes ist generiert durch die Symbole  $\phi(f)$ ,  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  die den folgenden Relationen genügen.

#### Feldgleichungen

Das Feld  $\phi$  soll im Sinne von Distributionen die masselose Klein-Gordon Gleichung

$$\square\phi(f) \doteq \phi(\square f) = 0, \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4), \quad (2.7)$$

erfüllen. Hierbei ist  $\square \doteq \partial^\nu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}$  der übliche d'Alembert- bzw. Wellen-Operator.

#### Kommutator

In wechselwirkungsfreien Quantenfeldtheorien ist der Kommutator immer von der Form  $[\phi(f), \phi(g)] = c_{f,g} \cdot \mathbf{1}$ . Der Kommutator des freien Feldes ist gegeben durch

$$[\phi(f), \phi(g)] \doteq \Delta(f, g) \cdot \mathbf{1} \quad (2.8)$$

wobei  $\Delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  geben ist durch

$$\begin{aligned} \Delta(f, g) &\doteq \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \\ &\doteq \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} [\tilde{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \tilde{g}(-|\mathbf{p}|, -\mathbf{p}) - \tilde{f}(-|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{g}(|\mathbf{p}|, -\mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Für festes  $e \in V_+$ ,  $e^2 = 1$  definiere noch

$$\Delta_t(f, g) \doteq \Delta(f, g_{te}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4). \quad (2.10)$$



### Wirkung der Poincaré-Gruppe

Für  $\lambda = (\Lambda, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$  wirkt nach (2.2) die eigentliche, orthochrone Poincaré-Gruppe auf  $\mathcal{A}$  durch

$$\alpha_\lambda(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)) \doteq \phi(f_{1,\lambda}) \cdots \phi(f_{n,\lambda})$$

und lineares Fortsetzen, wobei  $f_{i,\lambda}(x) \doteq f_i(\lambda^{-1}(x))$ .

### Der Vakuumzustand

Der Vakuumzustand des freien Feldes  $\omega_\infty$  ist der quasifreie Zustand mit Zweipunktfunktion

$$\omega_\infty(\phi(f)\phi(g)) \doteq \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2) \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \quad (2.11)$$

### Eichgruppe

Die Eichgruppe des freien, masselosen skalaren Feldes ist Gruppe  $\mathbb{Z}^2 \doteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  deren nichttriviales Element durch  $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ , gegeben durch

$$\gamma(\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)) \doteq (-1)^n \phi(f_1) \cdots \phi(f_n), \quad (2.12)$$

auf die Feldalgebra wirkt. Die Observablenalgebra  $\mathfrak{A}$  ist entsprechend gegeben durch

$$\mathfrak{A} \doteq \{ A \in \mathcal{A} \mid \gamma(A) = A \}. \quad (2.13)$$

Im nächsten Kapitel wird kurz auf den Zusammenhang zwischen Zuständen auf der Observablenalgebra und eichinvarianten Zuständen auf der Feldalgebra eingegangen.

### Quasifreie Zustände des freien Feldes

Quasifreie Zustände sind nach Def. 2.4 eindeutig durch ihre Zweipunktfunktion bestimmt. Nach den bisherigen Bemerkungen muß eine bilineare Abbildung  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  mit den Relationen der Algebra kompatibel sein, um durch

$$\omega(\phi(f)\phi(g)) \doteq T(f, g), \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$$

eine Zweipunktfunktion zu definieren. Für das freie Feld sind dies die folgenden Bedingungen

1.  $T(f, \bar{f}) \geq 0$  für alle  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  (Positivität des Zustandes).
2.  $T(f, g) - T(g, f) = \Delta(f, g)$  für alle  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  (Kommutatorrelationen).
3.  $T(\square f, g) = T(f, \square g) = 0$  für alle  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  (Feldgleichungen).

Wenn nicht explizit erwähnt, sind im weiteren Verlauf dieser Arbeit alle betrachteten Zustände quasifrei.



## 3. Das globale thermische Gleichgewicht

Der Grundgedanke zur Charakterisierung von Zuständen im lokalen Gleichgewicht ist der Vergleich mit einer hinreichend großen Menge von Referenzzuständen. Mit Hilfe der KMS-Bedingung werden dazu in einer detaillierten Analyse die globalen Gleichgewichtszustände der Algebra  $\mathcal{A}$  bezüglich der Zeittranslationen  $\alpha_{te}$  bestimmt. Entscheidend hierbei ist, daß auf die Forderung nach Extremalität der Zustände verzichtet wird (vgl. [2, 12]). Die so erhaltenen Zustände sind von der Form „extremaler KMS-Zustand + konstantes Funktional“. Diese Konstante, die die Extremalität des Zustandes aufhebt, kann als Dichte eines Bosekondensates interpretiert werden.

### 3.1. Die KMS-Bedingung

Die nach R. Kubo, D.C. Martin und J. Schwinger benannte KMS-Bedingung erweist sich als sehr elegante Methode zur Beschreibung des globalen Gleichgewichts von Zuständen. Insbesondere werden auf diese Weise die Schwierigkeiten umgangen, in der Theorie den thermodynamischen Limes für Gibbszustände endlicher Volumina in der Fockraumdarstellung zu bestimmen (für die grundlegende Arbeit siehe [6], ausführliche Darstellung findet sich in [3])

**Definition 3.1** (KMS-Bedingung). Sei  $\beta > 0$ ,  $e \in V_+$  mit  $e^2 = 1$  und  $S_\beta \subset \mathbb{C}$  der Streifen

$$S_\beta \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \beta\}.$$

Ein Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  über  $\mathcal{A}$  heißt  $(\alpha_{te}, \beta)$ -**KMS-Zustand** zum Parameter  $\beta$  genau dann, wenn für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  eine Funktion  $h : S_\beta \rightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften existiert:

- $h$  ist analytisch auf  $S_\beta$ .
- $h$  ist stetig und beschränkt auf  $\overline{S}_\beta$ .
- Es gilt

$$h(t) = \omega(A\alpha_{te}(B)) \quad \text{und} \quad h(t + i\beta) = \omega(\alpha_{te}(B)A). \quad (3.1)$$

Der intrinsische Parameter  $\beta$  ist die **inverse Temperatur** des Systems. Es erweist sich als nützlich, eine zweite äquivalente KMS-Bedingung über Fouriertransformation zu geben.

**Lemma 3.2.** Sei  $\beta > 0$ ,  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$ . Der Zustand  $\omega$  ist genau dann  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustand, wenn für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  mit

$$F_{AB}(t) \doteq \omega(A\alpha_{te}(B)) \quad \text{und} \quad G_{AB}(t) \doteq \omega(\alpha_{te}(B)A)$$

gilt, daß (im Sinne von Distributionen)

$$\tilde{F}_{AB} = e^{-\beta \cdot} \tilde{G}_{AB}. \quad (3.2)$$

*Beweis.* Siehe z.B. [3] oder [4]. □

In dieser Arbeit wird ein unendlich ausgedehntes freies Quantengas bei „hohen“ Temperaturen betrachtet. Aus physikalischen Gründen ist es daher sinnvoll für einen thermischen Zustand zusätzlich Homogenität und Isotropie im Ruhesystem des KMS-Zustandes zu fordern.

**Definition 3.3.** Ein Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_+^*$  heißt **homogen**, wenn gilt, daß

$$\forall a \in \mathbb{R}^4: \omega \circ \alpha_a = \omega. \quad (3.3)$$

Sei weiterhin  $e \in V_+$  mit  $e^2 = 1$  und

$$\mathcal{I}_e \doteq \{\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \mid \Lambda e = e\} \cong \text{SO}(3).$$

Ein Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_+^*$  heißt **isotrop** im durch  $e$  festgelegten Ruhesystem, wenn

$$\forall \Lambda \in \mathcal{I}_e: \omega \circ \alpha_\Lambda = \omega. \quad (3.4)$$

Für endliche Temperaturen  $\beta$  ist die Lorentz-Symmetrie in den KMS-Zuständen gebrochen (vgl. [8]); es zeigt sich daß KMS-Zustände über  $\mathcal{A}$  ein Ruhesystem auszeichnen. Zur Vereinfachung der Notation werden von nun an die inverse Temperatur  $\beta$  mit dem das Ruhesystem festlegenden Vektor  $e$  zu einem Vierervektor  $\beta \doteq \beta e \in V_+$  zusammengefaßt. Die Menge der homogenen, im Ruhesystem  $e$  isotropen KMS-Zustände wird im weiteren mit  $\mathcal{C}_\beta$  bezeichnet. Die Menge  $\mathcal{C}_\beta$  bildet einen Simplex in  $\mathcal{A}_{+,1}^*$  (siehe z.B. [3]), der im allgemeinen nicht trivial ist, ein Element  $\omega \in \mathcal{C}_\beta$  wird von nun an mit  $\omega_{\beta,I}$  bezeichnet, wobei  $I$  für eine noch zu spezifizierende Familie von Ordnungsparametern steht. Im Verlauf dieses Kapitels wird gezeigt, daß für alle  $\lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow$

$$\omega_{\beta,I} \circ \alpha_\lambda^{-1} = \omega_{\Lambda\beta,I}$$

gilt. Die extremalen Zustände, d.h. die Extrempunkte des Simplex, sind die Zustände reiner thermaler Phase. Ein extremaler Zustand ist primär, d.h.  $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ , woraus wiederum folgt, daß  $\omega$  die schwache Clustereigenschaft

$$\forall A, B \in \mathcal{A}: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \omega(A \alpha_{te}^k(B)) = \omega(A)\omega(B) \quad (3.5)$$

besitzt (vgl. [4]). Ist  $\omega$  ein extremaler KMS-Zustand so zeigt sich, daß die Forderungen nach Homogenität und Isotropie automatisch erfüllt sind.

## 3.2. Die homogenen KMS-Zustände des freien Feldes

Mit Hilfe der KMS-Bedingung (3.1) bzw. (3.2) können durch direkte Rechnung die Zweipunkt-funktionen der KMS-Zustände auf der Feldalgebra  $\mathcal{A}$  bestimmt werden. Von physikalischem Interesse sind jedoch vor allem die Zustände auf der Observablenalgebra  $\mathfrak{A}$ . Da die Wirkung der Eichgruppe mit den Zeittranslationen kommutiert, ist jeder KMS-Zustand auf  $\mathcal{A}$  eingeschränkt auf die Unteralgebra ein KMS-Zustand auf  $\mathfrak{A}$ . Sei nun  $\omega$  ein  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustand auf  $\mathfrak{A}$ . Da der Zustand  $\hat{\omega} \in \mathcal{A}_{+,1}^*$ , definiert durch

$$\hat{\omega}(A) \doteq \begin{cases} \omega(A), & A \in \mathfrak{A}, \\ 0, & A \text{ sonst,} \end{cases}$$

die offensichtlich die entsprechenden Eigenschaften erfüllt, findet sich zu jedem KMS-Zustand auf  $\mathfrak{A}$  ein eich-invarianter KMS-Zustand auf  $\mathcal{A}$ , der auf  $\mathfrak{A}$  mit  $\omega$  übereinstimmt. Es wird sich daher in dieser Arbeit auf die Bestimmung der eichinvarianten KMS-Zustände auf  $\mathcal{A}$  beschränkt.<sup>1</sup>

Als erstes werden zwei nützliche Ergebnisse aus [12] wiedergegeben.

**Lemma 3.4.** *Sei  $e \in V_+$  mit  $e^2 = 1$ ,  $\beta > 0$  und  $\kappa \geq 0$ . Dann hat die Distribution  $I^{\beta,\kappa} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$*

$$(f, g) \mapsto I^{\beta,\kappa}(f, g) \doteq 2\pi \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \frac{\tilde{f}(p) \tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e p}} + \kappa \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1) g(x_2)$$

folgende Eigenschaften:

- $I^{\beta,\kappa}(\bar{f}, f) \geq 0$ .
- Für  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$  und  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  gilt

$$\begin{aligned} I^{\beta,\kappa}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \mu_1 g_1, \mu_2 g_2) &= \lambda_1 \mu_1 I^{\beta,\kappa}(f_1, g_1) + \lambda_2 \mu_1 I^{\beta,\kappa}(f_2, g_1) \\ &\quad + \lambda_1 \mu_2 I^{\beta,\kappa}(f_1, g_2) + \lambda_2 \mu_2 I^{\beta,\kappa}(f_2, g_2). \end{aligned}$$

- $I^{\beta,\kappa}$  ist stetig in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  im Sinne

$$(f_n, g_n) \xrightarrow{\mathcal{S}} (f, g) \quad \Rightarrow \quad \left| I^{\beta,\kappa}(f_n, g_n) - I^{\beta,\kappa}(f, g) \right| \rightarrow 0.$$

- Für alle  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  und ist die Abbildung  $(\beta e, \kappa) \mapsto I^{\beta,\kappa}(f, g)$  stetig in  $V_+ \times [0, \infty)$ .

**Lemma 3.5.** *Für  $\beta > 0$ ,  $e \in V_+$  und  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  ist die Funktion*

$$t \mapsto I_t^{\beta,\kappa}(f, g) \doteq \int d^4p \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2)}{1 - e^{-\beta e p}} e^{it e p} + \kappa \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1) g(x_2)$$

analytisch und beschränkt auf  $S_\beta$  und stetig am Rand.

*Beweis.* Die Beweise der Lemmata sind vollständig analog zu [12, Appendix A.1], die Addition des zusätzlichen Terms  $\kappa \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1) g(x_2)$  verändert die dortigen, sehr detaillierten Beweise in keinsten Weise.  $\square$

**Satz 3.6.** *Sei  $\beta \in V_+$  und  $\omega_\beta \in \mathcal{C}_\beta$ . Mit  $e \doteq \beta / \sqrt{\beta^2}$  folgt, daß für die parameterabhängige, bilineare Abbildung  $F_t : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch*

$$(f, g) \mapsto F_t(f, g) \doteq \omega_\beta(\phi(f) \alpha_{te}(\phi(g)))$$

gilt, daß

$$F_t(f, g) = 2\pi \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \frac{\tilde{f}(p) \tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta p}} e^{-i p e t} + T(f, g). \quad (3.6)$$

Hierbei ist  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  bilinear mit folgenden Eigenschaften:

<sup>1</sup>Es gibt natürlich noch weitere nicht eich-invariante Fortsetzungen von  $\omega$  auf  $\mathcal{A}$ . Eine detaillierte Analyse über den Zusammenhang zwischen verschiedenen Fortsetzungen findet sich in [7].

(T1)  $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4): \square T(\cdot, f) = 0$  und  $\square T(f, \cdot) = 0$ .

(T2)  $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4): T(f, \bar{f}) \geq 0$ .

(T3)  $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \forall t \in \mathbb{R}: T(f, g_t) = T(f, g)$  und  $T(f_t, g) = T(f, g)$ .

*Beweis.* Für feste  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  betrachte nun die Funktionen  $t \mapsto F_t(f, g)$  und  $t \mapsto G_t(f, g) \doteq \omega_\beta(\alpha_{te}(\phi(g))\phi(f))$ . Es gilt

$$\begin{aligned} F_t(f, g) &= \omega_\beta(\phi(f)\alpha_{te}(\phi(g))) = \omega_\beta(\alpha_{te}(\phi(g))\phi(f) - [\phi(f), \alpha_{te}(\phi(g))]) \\ &= \omega_\beta(\alpha_{te}(\phi(g))\phi(f) - \Delta_t(f, g)\mathbf{1}) = \omega_\beta(\alpha_{te}(\phi(g))\phi(f)) - \Delta_t(f, g) \\ &= G_t(f, g) - \Delta_t(f, g), \end{aligned}$$

wobei  $\Delta_t(f, g) \doteq \Delta(f, g_{re})$ . Die nach Lemma 3.2 wohldefinierte Fouriertransformation  $t \leftrightarrow \varepsilon$  auf beiden Seiten ergibt

$$\tilde{F}_\varepsilon(f, g) = \tilde{G}_\varepsilon(f, g) - \tilde{\Delta}_\varepsilon(f, g) \stackrel{(3.2)}{=} e^{\sqrt{\beta^2\varepsilon}} \tilde{F}_\varepsilon(f, g) - \tilde{\Delta}_\varepsilon(f, g),$$

und somit (i.S.v.D)

$$(e^{\sqrt{\beta^2\varepsilon}} - 1)\tilde{F}_\varepsilon(f, g) = \tilde{\Delta}_\varepsilon(f, g). \quad (3.7)$$

Die Funktion  $(e^{\sqrt{\beta^2\varepsilon}} - 1)$  ist ein Multiplikator der Distribution  $\tilde{F}_\varepsilon(f, g)$  mit einfacher Nullstelle für  $\varepsilon = 0$ , so daß sich aus der Distributionentheorie (vgl. [5]) ergibt, daß

$$\tilde{F}_\varepsilon(f, g) = \frac{\tilde{\Delta}_\varepsilon(f, g)}{e^{\sqrt{\beta^2\varepsilon}} - 1} + c_{f,g} \cdot \delta(\varepsilon) \quad (3.8)$$

mit einer von  $f$  und  $g$  abhängigen Konstante  $c_{f,g}$ . Rücktransformation liefert nach einiger Rechnung

$$F_t(f, g) = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2)}{1 - e^{-\beta p}} e^{-ipet} + \frac{c_{f,g}}{2\pi}.$$

Daß  $T(f, g) \doteq c_{f,g}/(2\pi)$  bilinear in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  ist, sowie die Eigenschaften (T1) und (T2) erfüllt, folgt direkt daraus, daß  $\omega_\beta \in \mathcal{A}_{+,1}^*$ . Für Eigenschaft (T3) bedenke, daß Gleichung (3.8)

$$\mathbb{F}[t \mapsto T(f, g_t)] = c_{f,g} \cdot \delta$$

impliziert und somit  $T(f, g_t) = T(f, g)$  gilt, was äquivalent ist zu  $\partial_0 T(f, \cdot) = 0$ .  $\square$

Für den Fall  $t = 0$  in (3.6) ergibt sich, wegen  $F_0(f, g) = \omega_\beta(\phi(f)\phi(g))$ , daß die Zweipunkt-funktion eines KMS-Zustandes gegeben ist durch

$$\omega_\beta(\phi(f)\phi(g)) = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2)}{1 - e^{-\beta p}} + T(f, g), \quad (3.9)$$

beziehungsweise, formale im Sinne von Distributionen geschrieben als

$$\omega_\beta(\phi(x_1)\phi(x_2)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2)e^{-i(x_1-x_2)p}}{1 - e^{-\beta p}} + T(x_1, x_2). \quad (3.10)$$

Die schwache Cluster-Eigenschaft (3.5) ausnutzend kann gezeigt werden, daß ein KMS-Zustand  $\omega$  ein primärer Zustand genau dann ist, wenn  $T \equiv 0$  (ein ausführlicher Beweis findet sich z.B. in [12]). Um Kondensate zuzulassen, muß diese Eigenschaft fallengelassen werden, was eine detailliertere Betrachtung der Distribution  $T$  notwendig macht.

### Die Distribution $T$ und ihre Eigenschaften

Aus der Forderung nach Homogenität und Isotropie ergeben sich weitere Forderungen an die Distribution  $T$  in (3.6). Zunächst muß wegen der Homogenität von  $\omega_\beta$  die Abbildung  $T$  translationsinvariant sein.

**Bemerkung 3.7.** Die Beweise der nächsten Lemmata setzen voraus, daß sich die  $n$ -Punktfunktionen zu stetigen Funktionalen auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)^{\otimes n}$  fortsetzen lassen. Dies ist eine technische Bedingung, die jedoch physikalisch plausibel ist (Regularität der Erwartungswerte).

Als erstes wird die homogene Zweipunktfunktion von  $\omega$  und somit  $T$  mit einer geeigneten Distribution  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  identifiziert.

**Lemma 3.8.** Sei  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  bilinear und translationsinvariant, d.h.

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \quad \forall a \in \mathbb{R}^4 : T(f, g) = T(f_a, g_a).$$

Dann existiert  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)^*$ , so daß

$$T(f, g) = \psi(\underline{f} * g). \quad (3.11)$$

Dabei ist  $\underline{f}(x) \doteq f(-x)$

*Beweis.* Siehe Appendix A, Seite 69. □

Als nächstes wird gezeigt, daß sich die Eigenschaft von  $T$  in jedem Argument Lösung der Wellengleichung zu sein auf  $\psi$  überträgt.

**Lemma 3.9.** Sei  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  bilinear und translationsinvariant und  $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^4)$  die dazugehörige Distribution wie in Lemma 3.8. Gilt  $\square T(\cdot, g) = 0$  für alle  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ , so ist

$$\square \psi = 0.$$

*Beweis.* Siehe Appendix A, Seite 70. □

Damit kann  $T$  mit einer Lösung der Wellengleichung  $\psi$  in  $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^4)$  identifiziert werden. Die Eigenschaft (T3) liefert, daß die Ableitung von  $\psi$  in Richtung  $e \in V_+$  verschwinden muß. Mit der Invarianz des d'Alembert-Operators unter Lorentztransformationen kann o.B.d.A. angenommen werden, daß  $e = (1, \mathbf{0})$  gilt. Somit reduziert sich  $T$  weiter zu einer Distribution in  $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^3)$  und die Wellengleichung wird zur Laplacegleichung  $\Delta \psi = 0$ . Mit der Wahl von  $e$  sind alle Elemente  $\Lambda \in \mathcal{I}_e$  von der Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad R \in \text{SO}(3).$$

Mit der Invarianz von  $T$  unter  $\mathcal{I}_e$  ergibt sich, daß  $T$  konstant ist, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 3.10.** Sei  $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^3)$  mit  $\Delta \psi = 0$ . Gilt für alle  $R \in \text{SO}(3)$ , daß  $\psi \circ R^{-1} = \psi$  so ist  $\psi$  konstant.

*Beweis.* siehe Appendix A, Seite 70. □

Mit diesen Ergebnissen folgt, daß jeder quasifreie, homogene KMS-Zustand von der Form (3.9) ist, mit  $T = \kappa = \text{konst.}$ , wobei (E2)  $\kappa \geq 0$  impliziert. Umgekehrt zeigen die Lemmata 3.4 und 3.5, daß jeder quasifreie Zustand mit Zweipunktfunktion (3.9) ein KMS-Zustand ist. Zusammen ergibt sich der zentrale Satz dieses Abschnitts, der die Menge  $\mathcal{C}_\beta$  eindeutig beschreibt.

**Satz 3.11** (Die quasifreien KMS-Zustände der Algebra  $\mathcal{A}$ ). *Sei  $\beta \in V_+, \kappa \geq 0$ . Dann wird durch die Zweipunktfunktion*

$$\omega_{\beta,\kappa}(\phi(x_1)\phi(x_2)) \doteq \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{e^{-i(x_1-x_2)p}}{1 - e^{-\beta p}} + \kappa$$

*eindeutig im durch  $e = \beta/\sqrt{\beta^2}$  ausgezeichnetem Ruhesystem ein quasifreier, homogener, isotroper,  $\mathbb{Z}^2$ -eich-invarianter  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustand über  $\mathcal{A}$  definiert.*

In [20] konnten bei der Untersuchung des massiven, nicht relativistischen Bosegases die nicht-primären Darstellungen der Feldalgebra (d.h.  $\pi(\mathcal{A}) \cap \pi(\mathcal{A})' \neq \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ ) mit Systemen identifiziert werden, die Einstein-Bose-Kondensation beschreiben. Die Dichte des Kondensats ist dann ein Label für diese Darstellungen. Unter anderem dadurch motiviert, wird der Parameter  $\kappa$  als **Dichte der masselosen Teilchen ‘mit Impuls null’** interpretiert (vgl. auch [21, Seite 269]).

**Bemerkung 3.12.** Aus Lemma 3.4 folgt, daß die Abbildung

$$(\beta, \kappa) \mapsto \omega_{\beta,\kappa}(\phi(f)\phi(g)), \quad \beta \in V_+, \kappa \in [0, \infty),$$

für alle  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  stetig ist. Als direkte Konsequenz ist

$$(\beta, \kappa) \mapsto \omega_{\beta,\kappa}(A), \quad \beta \in V_+, \kappa \in [0, \infty),$$

stetig für alle  $A \in \mathcal{A}$ , da  $\omega_{\beta,\kappa}(A)$  eine endliche Summe über endliche Produkte von stetigen Funktionen in  $(\beta, \kappa)$  ist.

### 3.2.1. Rückgewinnung des Vakuumzustandes

Wie bereits erwähnt, wird  $\kappa$  als Dichte der Teilchen mit Impuls null aufgefaßt. Im Grenzwert der Temperatur  $T \rightarrow 0$  bzw.  $\sqrt{\beta^2} \rightarrow \infty$  und Dichte gegen null, sollte deswegen in jedem Ruhesystem aus physikalischen Gründen der Vakuumzustand  $\omega_\infty$  zurückgewonnen werden können. Da  $\beta \in V_+$  existiert ein  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ , so daß  $\Lambda\beta = (1, \mathbf{0})$ . Mit  $f_\Lambda(x) \doteq f(\Lambda^{-1}x)$  ergibt sich für die Zweipunktfunktion

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{\beta^2} \rightarrow \infty} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \omega_{\beta,\kappa}(\phi(f)\phi(g)) &= \lim_{\sqrt{\beta^2} \rightarrow \infty} \lim_{\kappa \rightarrow 0} 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2)}{1 - e^{-\beta p}} + \kappa \int d^4x_1 d^4x_2 f(x) g(x) \\ &= \lim_{\sqrt{\beta^2} \rightarrow \infty} 2\pi \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \left[ \underbrace{\frac{\tilde{f}_\Lambda(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{g}(-|\mathbf{p}|, -\mathbf{p})}{1 - e^{-\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|}}}_{\rightarrow f_\Lambda(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{g}_\Lambda(-|\mathbf{p}|, -\mathbf{p})} - \underbrace{\frac{\tilde{f}(-|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{g}(|\mathbf{p}|, -\mathbf{p})}{1 - e^{\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|}}}_{\rightarrow 0} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \tilde{f}(\underline{p}) \tilde{g}(-\underline{p}) = 2\pi \int d^4 p \delta(p^2) \theta(p_0) \tilde{f}(\underline{p}) \tilde{g}(-\underline{p}) \\
&= \omega_\infty(\phi(f)\phi(g)),
\end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wird, daß

$$\frac{1}{1 - e^{-nt}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta(t)$$

gleichmäßig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  und somit Integration und Grenzwert vertauscht werden dürfen. Da  $\omega_\infty$  und  $\omega_{\beta, \kappa}$  quasifrei sind folgt die behauptete Rückgewinnung.

### 3.2.2. Die Referenzzustände

Zusätzlich zu den Zuständen der Form  $\omega_{\beta, \kappa}$  sollen auch Gemische solcher Zustände als Referenzzustände zugelassen werden. Sei zunächst  $\varrho$  ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $V_+ \times [0, \infty)$  mit kompakten Träger. Die Menge dieser Maße wird mit  $\mathcal{P}_c(V_+ \times [0, \infty))$  bezeichnet. Der Zustand

$$\omega_\varrho(A) \doteq \int d\varrho(\beta, \kappa) \omega_{\beta, \kappa}(A)$$

ist ein gemischter Zustand auf  $\mathcal{A}$ .

**Definition 3.13.** *Die Menge*

$$\mathcal{C} \doteq \{ \omega_\varrho \in \mathcal{A}_{+,1}^* \mid \varrho \in \mathcal{P}_c(V_+ \times [0, \infty)) \}$$

heißt Menge der **Referenzzustände**.



## 4. Das lokale Gleichgewicht

*In diesem Abschnitt wird kurz der Zugang aus [1] zur Beschreibung von Zuständen im lokalen Gleichgewicht ( $S_x$ -thermale Zustände) erläutert um diesen anschließend auf das freie Feld anwenden zu können. Insbesondere werden analog zu [2, 10, 11] die zulässigen Makroobservablen bestimmt, diejenigen thermischen Größen denen auch lokal eine Bedeutung zukommt. Am Ende des Kapitels findet sich eine Sammlung von Beispielen von Makroobservablen mit Schwerpunkt auf einer expliziten Konstruktion der Dichte des Kondensats als makroskopischer Größe.*

### 4.1. Die lokalen Algebren am Punkt

Um Aussagen über die inverse Temperatur  $\beta$  des Systems am Raumzeitpunkt  $x \in \mathbb{R}^4$  zu machen, ist es nötig, die verschmierten Observablen  $\phi(f)$  in geeigneter Weise als Observablen am Punkt zu verstehen. Mit der Vorstellung, daß  $\phi(f)$  eine Messung im Raumzeitgebiet  $\text{supp } f$  darstellt, wird klar, daß dazu in geeigneter Weise  $\phi(f)$  im Grenzwert  $f \rightarrow \delta_x$  betrachtet werden muß. Da jede Testfunktion  $f \neq 0$  einen Träger mit nicht leerem Inneren hat, können diese Objekte nicht in  $\mathcal{A}$  liegen, womit sofort ersichtlich ist, daß für Observablen am Punkt von  $\mathcal{A}$  zu neuen mathematischen Objekten übergegangen werden muß. Dies geschieht, indem die Erwartungswerte dieser punktiert lokalisierten Felder im Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  als dicht definierte quadratische Formen auf dem entsprechenden GNS-Hilbertraum  $\mathfrak{h}_\omega$  aufgefaßt werden.

**Bemerkung 4.1.** Der Umfang dieser Arbeit läßt es leider nur zu, dieses interessante Thema kurz anzureißen. Grundlegende Ideen und Konstruktionen finden sich in [22], wobei hier gewisse Energieschranken an den Vakuumsektor der Theorie vorausgesetzt werden. Der Verallgemeinerung dieser Konzepte auf thermale Zustände wird ein großer Teil von [1] gewidmet. Eine detaillierte und ausführliche mathematische Betrachtung findet sich in [23].

#### 4.1.1. Lokale Observablen

Zur Veranschaulichung der Konstruktion von Punktfeldern in dem Rahmen, wie sie in dieser Arbeit benötigt werden, wird eine Abbildung  $\phi : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{A}$  betrachtet. Im folgenden wird  $\phi(f)$  stellvertretend für Ausdrücke, z.B. von der Form

- $\phi(f) \doteq \phi(f)$ ,
- $\phi(f) \doteq \phi^*(f)\phi(f)$  oder
- $\phi(f) \doteq \phi(f_\zeta)\phi(f_{-\zeta}) - \omega_0(\phi(f_\zeta)\phi(f_{-\zeta})) \cdot \mathbb{1}$  für einen Zustand  $\omega_0 \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  und einen raumartigen Vektor  $\zeta \in V_+$

genutzt. Insbesondere das letzte Beispiel wird in spezieller Form im weiteren Verlauf wieder auftauchen.

Sei  $x \in \mathbb{R}^4$  und  $(\delta_x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ , d.h.  $\delta_x^{(n)} \rightarrow \delta_x$  in der Topologie von  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ . Es werden Zustände  $\omega$  mit hinreichend gutartigem Energieverhalten in einer Umgebung  $\mathcal{O}$  um  $x$  betrachtet, für die der Grenzwert

$$\omega(A\phi(x)A') \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(A\phi(\delta_x^{(n)})A'), \quad A, A' \in \mathcal{A}$$

existiert und unabhängig von der Wahl von  $\delta_x^{(n)}$  ist. Dann kann der Grenzwert  $\phi(x)$  als eine dicht definierte quadratische Form auf dem GNS-Hilbertraum  $\mathfrak{h}_\omega$  verstanden werden.<sup>1</sup>  $\omega(\phi(x))$  ist der Erwartungswert der in  $x$  lokalisierten idealisierten Observablen  $\phi(x)$  im Zustand  $\omega$ .

Der ( $\mathbb{C}$ -Vektor-)Raum  $\mathcal{T}_x$  aller auf diese Art gewonnenen quadratischen Formen, die im obigen Sinne für alle Referenzzustände existieren, heißt Raum der thermischen Observablen am Punkt  $x \in \mathbb{R}^4$ , bzw. Raum der lokal-thermischen Observablen.

#### 4.1.2. Makroobservablen

Makroskopisch zu beobachtende Größen der Theorie, d.h. Teilchendichte, Entropiestromdichte, thermische Energie, etc. sind stetige Funktionen der intensiven Parameter, in dieser Arbeit  $\beta \in V_+$  und  $\kappa \in [0, \infty)$ . Diese treten als Grenzwerte zentraler Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{A}$  (bezüglich der KMS-Zustände  $\omega_{\beta, \kappa}$ , vgl. Def. 2.6) auf, indem der, auf dem entsprechenden GNS-Hilbertraum  $\mathfrak{h}_{\omega_{\beta, \kappa}}$  dicht definierte, Operator  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  mit der Funktion

$$(\beta, \kappa) \mapsto \mathbf{A}(\beta, \kappa) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa}(A_n), \quad (\beta, \kappa) \in V_+ \times [0, \infty),$$

identifiziert wird.

**Definition 4.2.** *Ist die Funktion  $\mathbf{A}$  stetig, so wird im folgenden der Begriff **Makroobservable** synonym sowohl für die stetige Funktion  $\mathbf{A}$ , als auch den Operator  $A$  benutzt.*

Für eine beliebige Makroobservable  $\mathbf{A} \in \mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  ist der entsprechende Erwartungswert in einem Referenzzustand  $\omega_\varrho \in \mathcal{C}$  gegeben durch

$$\omega_\varrho(\mathbf{A}) \doteq \int d\varrho(\beta, \kappa) \mathbf{A}(\beta, \kappa).$$

Entscheidend ist, daß der Raum  $\mathcal{T}_x$  dieselbe thermischen Information über den Zustand liefert wie die Makroobservablen. Da die Referenzzustände translationsinvariant sind, ist für alle  $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$  die Funktion  $\Phi$ , gegeben durch

$$\Phi(\beta, \kappa) \doteq \omega_{\beta, \kappa}(\phi(x)), \quad x \in \mathbb{R}^4, \omega_{\beta, \kappa} \in \mathcal{C},$$

<sup>1</sup>Sei  $(\omega, \pi_\omega, \Omega)$  das GNS-Tripel. Dann ist  $\mathfrak{h}_0 = \pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega$  dicht in  $\mathfrak{h}_\omega$ , und  $q : \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$q(\pi_\omega(A)\Omega_\omega, \pi_\omega(A')\Omega_\omega) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(A^* \phi(\delta_x^{(n)})A'), \quad A, A' \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

ist eine quadratische Form, die mit  $\phi(x)$  identifiziert wird.

eine Makroobservable. Ein zentrales Ergebnis aus [1] ist die Beobachtung, daß  $\mathcal{T}_x$  punkte-trennend für  $\mathcal{C}$  ist, und somit jede stetige Funktionen auf  $V_+ \times [0, \infty)$  zumindest approximiert werden kann. Insbesondere können durch Messung der lokalen Observablen für einen beliebigen Referenzzustand  $\omega_\varrho$  alle Momente des Maßes  $\varrho$  bestimmt werden, indem in

$$\omega(\phi(x)) = \int d\varrho(\beta, \kappa) \Phi(\beta, \kappa)$$

über alle  $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$  variiert wird. Für weitere Details sei auf [1, Kap. 3.3] verwiesen.

## 4.2. Lokales Gleichgewicht

Die grundlegende Idee aus [1] zur thermischen Interpretation von Zuständen, die keine globalen Gleichgewichtszustände sind, ist der Vergleich mit den Referenzzuständen auf einer Teilmenge  $\mathcal{S}_x$  der thermalen Observablen  $\mathcal{T}_x$ . Zustände im lokalen Gleichgewicht sind Zustände die sich bezüglich der Erwartungswerte von Observablen in  $\mathcal{S}_x$  nicht von Referenzzuständen unterscheiden.

**Definition 4.3** ( $\mathcal{S}_x$ -thermale Zustände). Sei  $x \in \mathbb{R}^4$  und  $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$  ein Unterraum der Punktfelder am Punkt  $x \in \mathbb{R}^4$  mit  $\mathbb{1} \in \mathcal{S}_x$ . Ein Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_+^*$  heißt **lokal im Gleichgewicht** bei  $x$  bezüglich  $\mathcal{S}_x$  bzw.  **$\mathcal{S}_x$ -thermal** wenn es einen Zustand  $\omega_\varrho \in \mathcal{C}$  gibt, so daß

$$\omega(\phi(x)) = \omega_\varrho(\phi(x)) \quad (4.1)$$

für alle  $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$ . Für die zu  $\phi(x)$  gehörige Makroobservable  $\Phi \in \mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  heißt

$$\omega(\Phi)(x) \doteq \omega_\varrho(\phi(x))$$

Erwartungswert von  $\Phi$  im Zustand  $\omega$  am Punkt  $x \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 4.4.** Durch die Größe des gewählten Raumes  $\mathcal{S}_x$  wird in natürlicher Weise beschrieben, wie nah ein Zustand dem Gleichgewicht ist. Mit  $\mathcal{S}_x = \mathcal{T}_x$  sind nur die globalen Gleichgewichtszustände  $\mathcal{S}_x$ -thermal, während für  $\mathcal{S}_x = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$  alle Zustände bezüglich dieser  $\mathcal{S}_x$  im lokalen Gleichgewicht sind.

## 4.3. Realisierung lokaler Gleichgewichtszustände für das freie Feld

Der bisherige allgemeine Formalismus soll nun im folgenden Abschnitt konkretisiert werden. Als erstes wird ein geeigneter Raum  $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$  ausgewählt. Um  $\mathcal{S}_x$ -thermale Zustände zu erhalten die keine Referenzzustände sind, muß nach Bemerkung 4.4 der Raum  $\mathcal{S}_x$  als echter Teilraum gewählt werden. Dies macht es nötig, in einem nächsten Schritt diejenigen Makroobservablen zu bestimmen, die dieselbe Information über den Zustand enthalten wie  $\mathcal{S}_x$ .

Zunächst wird zur Vereinfachung der Schreibweise die Multiindex-Notation<sup>2</sup> eingeführt. Ein Multiindex

$$\boldsymbol{\mu} \doteq (\mu_1, \dots, \mu_m), \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

<sup>2</sup>Die Indexschreibweise in dieser Arbeit weicht ab von der Multiindexschreibweise, die üblicher Weise in der Analysis gebräuchlich ist (vgl. z.B. [14, 16]).

ist ein  $m$ -Tupel mit  $\mu_i \in \{0, \dots, 3\}$ , die Zahl  $|\mu| \doteq m$  heißt Ordnung von  $\mu$ . Ist die Ordnung aus dem Zusammenhang nicht klar, so wird der Index mit  $\mu_m$  geschrieben. Die Menge der Multiindices der Ordnung  $m$  wird mit  $\mathbb{M}_m$ , die Menge aller Multiindices mit  $\mathbb{M} \doteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \mathbb{M}_m$  bezeichnet. Es werden weiterhin folgende Notationen verwendet:

- Für  $\mu \in \mathbb{M}_m$  und  $\nu \in \{0, \dots, 3\}$ , setze

$$\nu\mu = (\nu, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{M}_{m+1}.$$

- Für  $\mu \in \mathbb{M}_m$  und  $x \in \mathbb{C}^4$ , setze

$$x^\mu \doteq \prod_{j=1}^m x^{\mu_j} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu \doteq \prod_{j=1}^m a_{\mu_j}.$$

- Analog für  $\mu \in \mathbb{M}_m$  und  $f \in \mathcal{C}^m(\mathcal{O})$ ,  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  offen, setze

$$\partial^\mu f \doteq \partial^{\mu_1} \dots \partial^{\mu_m} f \quad \text{bzw.} \quad \partial_\mu f \doteq \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} f.$$

- Für  $\mu \in \mathbb{M}_m$  und  $x, y \in \mathbb{C}^4$ , setze

$$x_\mu y^\mu \doteq \sum_{\mu_1} \dots \sum_{\mu_m} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_m} y^{\mu_1} \dots y^{\mu_m} = (xy)^m.$$

Gegeben eine Familie von Koeffizienten  $\{c_\mu | \mu \in \mathbb{M}\}$  und einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^4$  wird analog ein Ausdruck der Form  $\sum_{\mu \in \mathbb{M}_m} c_\mu x^\mu$  durch  $c_{\mu_m} x^{\mu_m}$ , bzw., wenn die Ordnung ersichtlich ist, durch  $c_\mu x^\mu$  abgekürzt. Für Reihenentwicklungen wird dann konsequent  $\sum_{m=0}^{\infty} c_\mu x^\mu$  für  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu \in \mathbb{M}_m} c_\mu x^\mu$  geschrieben.<sup>3</sup> In diesen Ausdrücken ist entsprechend für  $\mu \in \mathbb{M}_0$  formal  $x^\mu \doteq 1$  und  $\partial^\mu f \doteq f$  gesetzt.

#### 4.3.1. Wahl des geeigneten Raumes $\mathcal{S}_x$

Analog zu [1] wird  $\mathcal{S}_x$  als der Raum gewählt, der von  $\mathbb{1}$  und den normalgeordneten, balancierten Ableitungen der Quadrate der Felder aufgespannt wird.<sup>4</sup> Für einen Multiindex  $\mu \in \mathbb{M}$  sind die balancierten Ableitungen definiert als die quadratischen Formen  $\vartheta^\mu(x)$  gegeben durch

$$\vartheta^\mu(x) \doteq \partial^\mu : \phi^2 : (x) \doteq \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \phi(x + \zeta) \phi(x - \zeta) - \omega_\infty(\phi(x + \zeta) \phi(x - \zeta)) \mathbb{1}$$

mit raumartigen  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Es wird

$$\mathcal{S}_x \doteq \text{span}(\{\mathbb{1}\} \cup \{\vartheta^\mu(x) | \mu \in \mathbb{M}\})$$

gesetzt. Im folgenden Satz werden die Erwartungswerte in den KMS-Zuständen  $\omega_{\beta, \kappa}$  ausgerechnet. Es wird erneut daran erinnert, daß der Erwartungswert nicht von  $x$  abhängt, da die Gleichgewichtszustände translationsinvariant sind.

<sup>3</sup>Um Verwirrung zu vermeiden, wird versucht  $x, y, z, p$  exklusiv für Vektoren und  $a, b, c, d$  für Koeffizienten zu reservieren.

<sup>4</sup>Der gleiche Raum wird in [2, 10–12, 24] gewählt.

**Satz 4.5.** Sei  $\omega_{\beta,\kappa} \in \mathcal{C}_\beta$  ein KMS-Zustand. Dann existiert der Erwartungswert von  $\vartheta^\mu(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und ist unabhängig von  $x$ . Es gilt für  $m = |\mu| > 0$

$$\omega_{\beta,\kappa}(\partial^\mu : \phi^2 : (x)) = c_m \partial_\beta^\mu \frac{1}{\beta^2}, \quad (4.2)$$

mit

$$c_m = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} (4\pi)^m \frac{B_{m+2}}{(m+2)!} & m \text{ gerade} \\ 0 & m \text{ ungerade} \end{cases},$$

wobei  $B_n$  die Beträge der Bernoullizahlen<sup>5</sup> sind. Für  $m = 0$  gilt

$$\omega_{\beta,\kappa}(: \phi^2 : (x)) = \frac{1}{12\beta^2} + \kappa. \quad (4.3)$$

*Beweis.* Für  $x \in \mathbb{R}^4$ , betrachte eine Folge  $(\delta_x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  mit

$$\delta_x^{(n)} \xrightarrow[\mathcal{D}^*]{n \rightarrow \infty} \delta_x$$

wobei  $\int d^4x_1 \delta_x^{(n)}(x_1) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit (3.9) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \omega_{\beta,\kappa}(\phi(\delta_{x,\zeta}^{(n)})\phi(\delta_{x,-\zeta}^{(n)}) - \omega_\infty(\phi(\delta_{x,\zeta}^{(n)})\phi(\delta_{x,-\zeta}^{(n)})))\mathbf{1} \\ &= 2\pi \int d^4p \delta(p^2) \widetilde{\delta_{x,\zeta}^{(n)}}(p) \widetilde{\delta_{x,-\zeta}^{(n)}}(-p) \left[ \frac{\varepsilon(p_0)}{1 - e^{-\beta p}} - \theta(p_0) \right] + \kappa \int d^4x_1 d^4x_2 \delta_{x,\zeta}^{(n)}(x_1) \delta_{x,-\zeta}^{(n)}(x_2) \\ &= 2\pi \int d^4p \delta(p^2) e^{-i2\zeta p} \widetilde{\delta_x^{(n)}}(p) \widetilde{\delta_x^{(n)}}(-p) \left[ \frac{\varepsilon(p_0)}{1 - e^{-\beta p}} - \theta(p_0) \right] + \kappa \\ &= 2\pi \int d^4p \delta(p^2) \widetilde{\delta_x^{(n)}}(p) \widetilde{\delta_x^{(n)}}(-p) \left[ \frac{\theta(p_0) e^{-i2\zeta p}}{1 - e^{-\beta p}} - \frac{\theta(-p_0) e^{-i2\zeta p}}{1 - e^{-\beta p}} - \theta(p_0) e^{-i2\zeta p} \right] + \kappa \\ &= 2\pi \int d^4p \delta(p^2) \widetilde{\delta_x^{(n)}}(p) \widetilde{\delta_x^{(n)}}(-p) \left[ \frac{\theta(p_0) e^{-i2\zeta p} e^{-\beta p}}{1 - e^{-\beta p}} - \frac{\theta(-p_0) e^{-i2\zeta p}}{1 - e^{-\beta p}} \right] + \kappa. \end{aligned}$$

Durch Substitution  $p \leftrightarrow -p$  im letzten Summanden wird die Klammer im Integranden zu

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(p_0) e^{-i2\zeta p} e^{-\beta p}}{1 - e^{-\beta p}} - \frac{\theta(-p_0) e^{-i2\zeta p}}{1 - e^{-\beta p}} \longleftrightarrow \frac{\theta(p_0) e^{-i2\zeta p} e^{-\beta p}}{1 - e^{-\beta p}} - \frac{\theta(p_0) e^{i2\zeta p}}{1 - e^{\beta p}} \\ &= \theta(p_0) \left[ \frac{e^{-i2\zeta p}}{e^{\beta p} - 1} + \frac{e^{i2\zeta p}}{e^{\beta p} - 1} \right] = \frac{\theta(p_0) 2 \cos 2\zeta p}{e^{\beta p} - 1}. \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} & \omega_{\beta,\kappa}(\phi(\delta_{x,\zeta}^{(n)})\phi(\delta_{x,-\zeta}^{(n)}) - \omega_\infty(\phi(\delta_{x,\zeta}^{(n)})\phi(\delta_{x,-\zeta}^{(n)})))\mathbf{1} \\ &= 2\pi \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2) \widetilde{\delta_x^{(n)}}(p) \widetilde{\delta_x^{(n)}}(-p) \frac{2 \cos 2\zeta p}{e^{\beta p} - 1} + \kappa \end{aligned}$$

<sup>5</sup>In dieser Arbeit sind die Bernoulli-Zahlen die Koeffizienten der Taylorentwicklung von  $t/(e^t - 1)$ , d.h.

$$\frac{1}{k!} B_k \doteq \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dt^k} \frac{t}{e^t - 1} \right|_{t=0}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Mit dieser Konvention ist  $B_k = 0$  für ungerade  $k > 1$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \delta_x^{(n)}(x_1) e^{-ix_1 \mathbf{p}} \delta_x^{(n)}(x_2) e^{ix_2 \mathbf{p}} \frac{\cos 2\zeta \mathbf{p}}{e^{\beta \mathbf{p}} - 1} + \kappa \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \delta_x^{(n)}(x_1) e^{-ix_1 \mathbf{p}} \delta_x^{(n)}(x_2) e^{ix_2 \mathbf{p}} \frac{\cos 2\zeta \mathbf{p}}{e^{\beta \mathbf{p}} - 1} + \kappa \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \frac{\cos(2\zeta \mathbf{p})}{e^{\beta \mathbf{p}} - 1} + \kappa = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cos(2\zeta \mathbf{p}) \frac{e^{-\beta \mathbf{p}}}{1 - e^{\beta \mathbf{p}}} + \kappa \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cos(2\zeta \mathbf{p}) \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta \mathbf{p}} + \kappa = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cos(2\zeta \mathbf{p}) e^{-n\beta \mathbf{p}} + \kappa.
\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Integration und Summation ist zulässig, da die geometrische Reihe gleichmäßig konvergiert.<sup>6</sup> Somit findet sich für ungerade  $m$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \omega_{\beta, \kappa}(\phi(x + \zeta)\phi(x - \zeta) + \omega_\infty(\phi(x + \zeta)\phi(x - \zeta))\mathbb{1}) \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa}(\phi(\delta_{x, \zeta}^{(n)})\phi(\delta_{x, -\zeta}^{(n)}) - \omega_\infty(\phi(\delta_{x, \zeta}^{(n)})\phi(\delta_{x, -\zeta}^{(n)})))\mathbb{1}) \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cos(2\zeta \mathbf{p}) e^{-n\beta \mathbf{p}} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \partial_\zeta^\mu \cos(2\zeta \mathbf{p}) e^{-\beta \mathbf{p}} \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} (-1)^{\frac{m+1}{2}} 2^m \mathbf{p}^\mu \sin(2\zeta \mathbf{p}) e^{-n\beta \mathbf{p}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wird, daß wegen  $\|\mathbf{p}\|^{-1} \cos(2\zeta \mathbf{p}) e^{-n\beta \mathbf{p}} \leq \|\mathbf{p}\|^{-1} e^{-n\beta \mathbf{p}}$  und gleichmäßiger Konvergenz der Reihe (wegen  $\beta \in V_+$ ,  $\mathbf{p} \in \partial V_+$  ist  $\beta \mathbf{p} > 0$ ) Limes und Differentiation mit Summe und Integral vertauscht werden dürfen. Für  $m > 0$  gerade, bemerke, daß

$$\partial_\zeta^\mu \cos(2\zeta \mathbf{p}) e^{-n\beta \mathbf{p}} = (-1)^{\frac{m}{2}} 2^m \mathbf{p}^\mu \cos(2\zeta \mathbf{p}) e^{-n\beta \mathbf{p}} = (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^m}{n^m} \cos(2\zeta \mathbf{p}) \partial_\beta^\mu e^{-n\beta \mathbf{p}}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \omega_{\beta, \kappa}(\phi(x + \zeta)\phi(x - \zeta) + \omega_\infty(\phi(x + \zeta)\phi(x - \zeta))\mathbb{1}) \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cos(2\zeta \mathbf{p}) e^{-n\beta \mathbf{p}} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \partial_\zeta^\mu \cos(2\zeta \mathbf{p}) e^{-n\beta \mathbf{p}} \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^m}{n^m} \cos(2\zeta \mathbf{p}) \partial_\beta^\mu e^{-n\beta \mathbf{p}} \\
&= \partial_\beta^\mu \frac{1}{(2\pi)^3} (-1)^{\frac{m}{2}} 2^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} e^{-n\beta \mathbf{p}}.
\end{aligned}$$

<sup>6</sup>Die Existenz des Grenzwertes folgt aus den Eigenschaften von Dirac-Folgen und der Stetigkeit der Abbildung

$$x \mapsto \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \frac{\cos 2\zeta \mathbf{p}}{e^{\beta \mathbf{p}} - 1} e^{ix \mathbf{p}}, \quad x \in \mathbb{R}^4.$$



Da  $\beta \in V_+$  existiert  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  mit  $\Lambda\beta = (\sqrt{\beta^2}, \mathbf{0})$ . Durch Substitution  $\underline{p} \leftrightarrow \Lambda^{-1}\underline{p}$  und Invarianz des Maßes  $d^3\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  unter Lorentztransformationen ergibt sich mit Kugelkoordinaten für das Integral

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} e^{-n\beta\underline{p}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} e^{-n\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|} = 4\pi \int_0^\infty dr r e^{-n\sqrt{\beta^2}r} = \frac{4\pi}{n^2\beta^2}.$$

Man erhält insgesamt

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \omega_{\beta,\kappa}(\phi(x+\zeta)\phi(x-\zeta) + \omega_\infty(\phi(x+\zeta)\phi(x-\zeta))\mathbf{1}) = \underbrace{(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^{m-1}}{\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{m+2}}}_{\doteq c_m} \partial_\beta^\mu \frac{1}{\beta^2}.$$

Mit der Reihendarstellung der Bernoulli-Zahlen (z.B. in [25, Seite 428]), gegeben durch

$$B_k = \frac{k!}{\pi^k 2^{k-1}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k}$$

für gerade  $k$ , errechnet sich der Koeffizient  $c_m$  zu

$$\begin{aligned} c_m &= (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^{m-1}}{\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{m+2}} = (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^{m-1}}{\pi^2} \frac{\pi^{m+2} 2^{m+1}}{(m+2)!} \underbrace{\frac{(m+2)!}{\pi^{m+2} 2^{m+1}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{m+2}}}_{=B_{m+2}} \\ &= (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{(4\pi)^m}{(m+2)!} B_{m+2} \end{aligned}$$

Dasselbe Argument funktioniert auch im Fall  $m=0$ , jedoch erhält man einen zusätzlichen Dichteterm.

$$\omega_{\beta,\kappa}(:\phi^2:(x)) = \omega_{\beta,0}(:\phi^2:(x)) + \kappa = \frac{1}{12\beta^2} + \kappa.$$

□

Es zeigt sich, daß der Erwartungswert der Observablen in  $\mathcal{S}_x$  nur für  $\vartheta(x) = :\phi^2:(x)$  von  $\kappa$  abhängt, womit im folgenden die Methoden und Ergebnisse aus [2] fast direkt übernommen werden können. Für die Erwartungswerte als Funktion von  $\beta, \kappa$  wird folgende Definition genutzt:

**Definition 4.6.** Die Funktion  $\Theta^\mu : V_+ \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Theta^\mu(\beta, \kappa) \doteq \omega_{\beta,\kappa}(\vartheta^\mu(x))$  heißt *lokal-thermische Funktion* zur Observable  $\vartheta^\mu(x)$ . Der Raum

$$\mathcal{T}_\mathcal{S} \doteq \text{span}\{\Theta^\mu\} \tag{4.4}$$

heißt *Raum der lokal-thermischen Funktionen* (bzgl.  $\mathcal{S}_x$ ).

### 4.3.2. Die zulässigen thermischen Funktionen

Wie in Abschnitt 4.1.2 erläutert, werden die thermischen Funktionen der Theorie, d.h. Entropiestromdichte, Teilchendichte, etc., durch stetige Funktionen der intrinsischen Parameter  $(\beta, \kappa) \in V_+ \times [0, \infty)$  beschrieben. Es stellt sich die Frage, welche dieser stetigen Funktionen in den Referenzzuständen und somit in den lokalen Gleichgewichtszuständen durch Auswertung der Zustände auf  $\mathcal{S}_x$  eine physikalische Bedeutung zugeordnet werden kann. Da für  $\mathcal{S}_x$  ein echter Teilraum von  $\mathcal{T}_x$  gewählt wurde, ist im allgemeinen nicht davon auszugehen, daß für beliebige  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  diese Funktion eine Linearkombination der lokal-thermischen Funktionen  $\Theta^\mu$  ist, jedoch sollte sie auf jeder kompakten Menge in  $V_+ \times [0, \infty)$  durch endlich viele lokal-thermische Funktionen beliebig genau approximierbar sein. Dies motiviert folgende Definition:

**Definition 4.7.** *Der Abschluß der lokal-thermischen Funktionen*

$$\mathcal{T}_{\text{adm}} \doteq \overline{\mathcal{T}_S} \quad (4.5)$$

bezüglich der lokal-konvexen Topologie auf  $\mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  heißt Raum der **zulässigen** thermischen Funktionen (bzw. der zulässigen Makroobservablen).

Zur besseren Unterscheidung werden Elemente in  $\mathcal{T}_{\text{adm}}$  mit Buchstaben der Form  $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{K}$  bezeichnet.

Um sich die physikalische Interpretation zu verdeutlichen, muß die Topologie auf  $\mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  genauer betrachtet werden.  $\mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  ist ein Frechét-Raum dessen lokal-konvexe Topologie von den Halbnormen<sup>7</sup>

$$p_K(\mathbf{F}) \doteq \sup_{(\beta, \kappa) \in K} |\mathbf{F}(\beta, \kappa)|, \quad K \subset V_+ \times [0, \infty), \quad K \text{ kompakt}, \quad (4.6)$$

generiert wird. Mit der Vorstellung, daß mit  $\mathcal{S}_x$  eine Familie von Messgeräten zur Verfügung gestellt wird, die auf den Messbereich  $K \subset V_+ \times [0, \infty)$  kalibriert sind, wird gerade für diejenigen Observablen eine Interpretation gegeben, die durch Messung mit endlich vielen Messgeräten in einem festen Messbereich beliebig genau genähert werden können.

Der Rest dieses Abschnitts ist nun der Bestimmung von  $\mathcal{T}_{\text{adm}}$  gewidmet. Da nach Satz 4.5 die Funktionen  $\Theta^\mu$  nur für  $|\mu| = 0$  von  $\kappa$  abhängen, werden zunächst  $\Theta^\mu$  für  $|\mu| > 0$  als Funktionen in  $\mathcal{C}(V_+)$  betrachtet. Definiere analog auf  $\mathcal{C}(V_+)$  die Halbnormen

$$p'_B(u) \doteq \sup_{\beta \in B} |u(\beta)|, \quad u \in \mathcal{C}(V_+), \quad B \subset V_+ \text{ kompakt}. \quad (4.7)$$

Ausgangspunkt ist nun die Beobachtung, daß alle diese Funktionen  $\Theta^\mu$  glatte Lösungen der homogenen Wellengleichung auf dem Vorwärtslichtkegel sind. Es wird im wesentlichen der folgende Satz aus [2, Prop. 4.1] genutzt, der jedoch für diese Zwecke minimal modifiziert werden muß.

**Satz 4.8.** *Sei  $u \in \mathcal{W}(V_+)$  und  $B \subseteq V_+$  kompakt. Für alle  $\varepsilon > 0$  existieren dann zwei **endliche** Familien von Konstanten  $\{c_\mu \in \mathbb{C} \mid \mu \in \mathbb{M}, 0 < |\mu| \leq N\}$  und  $\{d_\mu \in \mathbb{C} \mid \mu \in \mathbb{M}, 0 < |\mu| \leq M\}$ , so daß*

$$p'_B \left( u - \sum_{i=1}^N c_{\mu_{2i}} \Theta^{\mu_{2i}} \right) < \varepsilon \quad \text{und} \quad p'_B \left( \partial^\nu u - \sum_{i=1}^M d_{\mu_{2i-1}} \Theta^{\nu \mu_{2i-1}} \right) < \varepsilon.$$

<sup>7</sup>Für eine Einführung in die Theorie lokal-konvexer Räume siehe z.B. [14, 16].

Hier bei ist  $\mathscr{W}(V_+) \doteq \{u \in \mathcal{C}^\infty(V_+) \mid \square u = 0\}$  der Raum der glatten Lösungen der homogenen Wellengleichung.

*Beweis.* Die Modifikation gegenüber [2] ist die explizite Forderung  $|\boldsymbol{\mu}| > 0$ . Ein detaillierter Beweis findet sich in Appendix B.1, Seite 71.  $\square$

Eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 4.8 ist, daß die Funktion  $\beta \mapsto 1/\beta^2$  als Element von  $\mathscr{W}(V_+)$  durch lokalthermische Funktionen  $\Theta^\mu$  mit  $|\boldsymbol{\mu}| > 0$  approximiert werden kann, womit sich direkt das folgende Korollar ergibt.

**Korollar 4.9.** Sei  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  von der Form  $\mathbf{F}(\beta, \kappa) = u(\beta) + m \cdot \kappa$ ,  $u \in \mathscr{W}(V_+)$ ,  $m \in \mathbb{C}$  und  $K \subset V_+ \times [0, \infty)$  eine kompakte Teilmenge. Für alle  $\varepsilon > 0$  existieren dann zwei **endliche** Familien von Konstanten  $\{c_\mu \in \mathbb{C} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{M}, 0 \leq |\boldsymbol{\mu}| \leq N\}$  und  $\{d_\mu \in \mathbb{C} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{M}, 0 < |\boldsymbol{\mu}| \leq M\}$ , so daß

$$p_K \left( \mathbf{F} - \sum_{i=1}^N c_{\boldsymbol{\mu}_i} \Theta^{\boldsymbol{\mu}_i} \right) < \varepsilon \quad \text{und} \quad p_K \left( \partial_\beta^\nu \mathbf{F} - \sum_{i=1}^M d_{\boldsymbol{\mu}_i} \Theta^{\boldsymbol{\mu}_i} \right) < \varepsilon.$$

*Beweis.* Sei  $\mathbf{F}(\beta, \kappa) = u(\beta) + m\kappa$  beliebig. Die zweite Behauptung folgt offensichtlich aus Satz 4.8, da  $\partial_\beta^\nu \mathbf{F} = \partial_\beta^\nu u$ . Es wird nun o.B.d.A. angenommen, daß  $K = B \times D$  für zwei kompakte Mengen  $B \subset V_+$  und  $d \subset [0, \infty)$ , da jede kompakte Teilmenge in  $V_+ \times [0, \infty)$  in einer solchen enthalten ist. Nach Satz 4.8 existieren zwei endliche Familien  $\{a_\mu \in \mathbb{C} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{M}, 0 < |\boldsymbol{\mu}| \leq N\}$  und  $\{b_\mu \in \mathbb{C} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{M}, 0 < |\boldsymbol{\mu}| \leq M\}$ , so daß

$$\sup_{\beta \in B} \left| u(\beta) - \sum_{i=1}^N a_{\boldsymbol{\mu}_{2i}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}_{2i}}(\beta) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sup_{\beta \in B} \left| \frac{m}{\beta^2} - \sum_{i=1}^M b_{\boldsymbol{\mu}_{2i}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}_{2i}}(\beta) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Fortsetzen der Koeffizientenreihe mit null gilt o.B.d.A.  $M = N$ . Setze

$$c_\mu \doteq \begin{cases} m & , |\boldsymbol{\mu}| = 0 \\ a_\mu - b_\mu & , |\boldsymbol{\mu}| > 0 \end{cases}$$

und erhalte

$$\begin{aligned} p_K \left( \mathbf{F} - \sum_{n=0}^N c_{\boldsymbol{\mu}_n} \Theta^{\boldsymbol{\mu}_n} \right) &= \sup_{(\beta, \kappa) \in B \times D} \left| \mathbf{F}(\beta, \kappa) - m\Theta(\beta, \kappa) - \sum_{i=1}^N (a_{\boldsymbol{\mu}_{2i}} - b_{\boldsymbol{\mu}_{2i}}) \Theta^{\boldsymbol{\mu}_{2i}}(\beta, \kappa) \right| \\ &= \sup_{(\beta, \kappa) \in B \times K} \left| u(\beta) + m\kappa - m\frac{1}{\beta^2} - m\kappa - \sum_{i=1}^N (a_{\boldsymbol{\mu}_{2i}} - b_{\boldsymbol{\mu}_{2i}}) \Theta^{\boldsymbol{\mu}_{2i}}(\beta) \right| \\ &\leq \sup_{\beta \in B} \left| u(\beta) - \sum_{i=1}^N a_{\boldsymbol{\mu}_{2i}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}_{2i}}(\beta) \right| + \sup_{\beta \in B} \left| \frac{m}{\beta^2} - \sum_{i=1}^N b_{\boldsymbol{\mu}_{2i}} \Theta^{\boldsymbol{\mu}_{2i}}(\beta) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Als Frechét-Raum ist  $\mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  ein vollständiger metrischer Raum, womit jeder abgeschlossene Unterraum vollständig ist. Somit ist das Ergebnis aus Korollar 4.9, daß jedes  $\mathbf{F}$  von der Form

$$\mathbf{F}(\beta, \kappa) = u(\beta) + m \cdot \kappa, \quad u \in \mathscr{W}(V_+), \quad m \in \mathbb{C},$$

ein Element in  $\overline{\mathcal{T}_S} = \mathcal{T}_{\text{adm}}$  ist, womit

$$\mathcal{T}_S \subset \{u + m \cdot \text{id}_{[0,\infty)} | u \in \mathcal{W}(V_+), m \in \mathbb{C}\} \subseteq \overline{\mathcal{T}_S},$$

und damit

$$\mathcal{T}_{\text{adm}} = \overline{\{u + m \cdot \text{id}_{[0,\infty)} | u \in \mathcal{W}(V_+), m \in \mathbb{C}\}} = \{u + m \cdot \text{id}_{[0,\infty)} | u \in \overline{\mathcal{W}(V_+)}, m \in \mathbb{C}\}$$

folgt. Insgesamt folgt als zentrales Ergebnis dieses Abschnitts, daß

$$\mathcal{T}_{\text{adm}} = \{u + m \cdot \text{id}_{[0,\infty)} | u \in \overline{\mathcal{W}(V_+)}, m \in \mathbb{C}\}.$$

**Bemerkung 4.10.** Beobachtung zeigt (vgl. Abschnitt 4.3.3), daß die interessanten Makroobservablen tatsächlich glatte Lösungen der Wellengleichung sind, weswegen nicht auf eine exakte Bestimmung von  $\overline{\mathcal{W}(V_+)}$  eingegangen wird. Der Abschluß der glatten Lösungen der Wellengleichung ist im Raum der schwachen Lösungen, geschnitten mit den stetigen Funktionen, d.h.

$$\overline{\mathcal{W}(V_+)} \subseteq \left\{ u \in \mathcal{C}(V_+) \mid \forall f \in \mathcal{D}(V_+): \int d^4x u(x) \square f(x) = 0 \right\},$$

enthalten, was erlaubt die Beweise in Kapitel 5 nur für glatte Lösunge zu führen.

**Bemerkung 4.11.** Sei  $\omega_\varrho \in \mathcal{C}$ ,  $\varrho \in \mathcal{P}_c(V_+ \times [0, \infty))$  ein Referenzzustand. Da alle zulässigen Makroobservablen höchstens linear von  $\kappa$  abhängen, können diese nicht benutzt werden um alle Momente des Maßes in  $\kappa$  zu bestimmen. Insbesondere gilt dann für alle  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$ , daß

$$\omega_\varrho(\mathbf{F}) = \int d\varrho(\beta, \kappa) (u(\beta) + m\kappa) = \int d\varrho'(\beta) u(\beta) + m\kappa_0 = \int d(\varrho' \otimes \delta_{\kappa_0})(\beta, \kappa) \mathbf{F}(\beta, \kappa),$$

wobei  $\varrho' \in \mathcal{P}_c(V_+)$  durch

$$\varrho'(B) \doteq \int_B \int_0^\infty d\varrho(\beta, \kappa), \quad B \subset V_+ \text{ Borel-messbar},$$

und  $\kappa_0 \geq 0$  durch

$$\kappa_0 \doteq \int d\varrho(\beta, \kappa) \kappa$$

definiert ist. Es ist somit nicht möglich mit Messungen von Observablen in  $\mathcal{S}_x$  die genaue Form des Maßes  $\varrho$  zu bestimmen.

### 4.3.3. Einige Makroobservablen

Es sollen nun einige Beispiele für thermische Makroobservablen gegeben werden. Es zeigt sich, daß das Zulassen von nicht-primären Referenzzuständen keinen Einfluß auf die „alten“ Makroobservablen wie z.B. die Teilchendichte zum Impuls  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  oder die thermische Energie des Zustandes hat. Dies entspricht der Erwartung, da der Parameter  $\kappa$  als Dichte von masse- und impulslosen Teilchen interpretiert wird, und somit physikalisch keinen Einfluß auf diese Größen haben kann.

### Das Quadrat der Temperatur $\mathbb{T}^2$

Schon das Quadrat der Temperatur  $\mathbb{T}^2$  ist ein erstes Beispiel für eine Makroobservable, die in  $\mathcal{T}_{\text{adm}}$  aber nicht in  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  liegt. In [1] und [2] wird die Observable  $12 : \phi^2 : (x)$  als Thermometer benutzt, da die entsprechende thermische Funktion gerade durch  $\beta \mapsto \mathbb{T}^2(\beta) = (\beta^2)^{-1}$  gegeben ist. Durch den zusätzlichen Term, der das Kondensat beschreibt, ergibt sich als thermische Funktion zu  $12 : \phi^2 : (x)$  gerade  $(\beta, \kappa) \mapsto 12\Theta(\beta, \kappa) = \mathbb{T}^2(\beta) + 12\kappa$ . Es ist daher nicht möglich in den Referenzzuständen die Temperatur mit endlich vielen lokal-thermischen Observablen exakt zu bestimmen. Eine Implikation dieser Tatsachen wird im nächsten Abschnitt über den thermischen Energietensor  $\mathbf{E}^{\mu\nu}$  deutlich.

### Der thermische Energietensor $\mathbf{E}^{\mu\nu}$

Ausgehend von der lokalen Observable  $\epsilon^{\mu\nu}(x) \doteq -(1/4)\vartheta^{\mu\nu}(x) \in \mathcal{S}_x$  ergibt sich die Makroobservable

$$(\beta, \kappa) \mapsto \mathbf{E}^{\mu\nu}(\beta, \kappa) = \mathbf{E}^{\mu\nu}(\beta) = \frac{\pi^2}{90} \frac{4\beta^\mu\beta^\nu - \beta^2\eta^{\mu\nu}}{(\beta^2)^3},$$

der thermische Energietensor. In den Referenzzuständen stimmt  $\epsilon^{\mu\nu}(x)$  mit dem vollen Energie-Impuls-Tensor  $\theta^{\mu\nu}(x)$  der Theorie überein. Dieser kann dargestellt werden (vgl. [1]) als

$$\theta^{\mu\nu}(x) = \epsilon^{\mu\nu}(x) + (\partial_x^\mu \partial_x^\nu - \eta^{\mu\nu} \square_x) \vartheta(x),$$

es ist direkt ersichtlich, daß aufgrund der Translationsinvarianz der Term  $(\partial_x^\mu \partial_x^\nu - \eta^{\mu\nu} \square_x) \vartheta(x)$  in allen Referenzzuständen verschwindet.<sup>8</sup> In den lokalen Gleichgewichtszuständen ist dies nicht der Fall, die Makroobservable  $\mathbf{E}^{\mu\nu}$  reicht nicht aus, um die Energiedichte des Zustandes zu messen (vgl. [1]).

**Bemerkung 4.12.** In [1] und [2] wird für  $\chi \in V_+$  die lokal-thermische Observable

$$\delta_\chi \epsilon(x) \doteq \frac{30}{\pi^2} \chi_\nu \chi_\mu \epsilon^{\mu\nu}(x) - 24 : \phi^2 : (x) + \frac{1}{\chi^2} \mathbb{1}$$

genutzt, um zu entscheiden, ob der Referenzzustand  $\omega_\varrho \in \mathcal{C}$  einen scharfen Temperaturwert hat, d.h. ob er ein KMS-Zustand oder ein Gemisch von Zuständen ist. Ist  $\varrho = \varrho' \otimes \delta_0$ ,  $\varrho' \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(V_+)$ , so kann einfach gezeigt werden, daß  $\omega_\varrho = \omega_{\chi,0}$  genau dann, wenn  $\omega_\varrho(\delta_\chi \epsilon(x)) = 0$ . Es ist somit möglich mit endlich vielen lokal-thermischen Observablen zu entscheiden, ob der Zustand eine scharfe Temperatur und ein ausgezeichnetes Ruhesystem besitzt. In der, in dieser Arbeit verwendeten, Erweiterung ist dies nicht mehr möglich, da der Erwartungswert von  $: \phi^2 : (x) \in \mathcal{S}_x$  nichttrivial von  $\kappa$  abhängt.

### Die Entropiestromdichte $\mathbf{S}^\mu$

Der Vollständigkeit halber wird an dieser Stelle die Entropiestromdichte  $\mathbf{S}^\mu$  kurz eingeführt, jedoch nicht in dieser Arbeit weiter vertieft. In [1] wird mit Hilfe von [17] gezeigt, daß  $\mathbf{S}^\mu$  durch die Funktion

$$(\beta, \kappa) \mapsto \mathbf{S}^\mu(\beta, \kappa) = \mathbf{S}^\mu(\beta) = \frac{2\pi^2}{45} \frac{\beta^\mu}{(\beta^2)^2}$$

gegeben ist. Da  $\mathbf{S}^\mu = \partial_\beta^\mu \Theta$  und  $\square \mathbf{S}^\mu = 0$ , zeigt sich direkt, daß  $\mathbf{S}^\mu \notin \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ , aber  $\mathbf{S}^\mu \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$ .

<sup>8</sup>Für eine formale Definition von Ausdrücken der Form  $\partial_x^\nu \vartheta^\mu(x)$  sei auf Abschnitt 5.1.1 verwiesen.

### Teilchendichte $N_{\mathbf{k}}$ der Teilchen mit Impuls $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Für festes  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , betrachte die Folge  $(N_{\mathbf{k},n})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{A}$ , gegeben durch

$$N_{\mathbf{k},n} \doteq 2|\mathbf{k}| \phi^*(f_{\mathbf{k},n}) \phi(f_{\mathbf{k},n})$$

mit  $f_{\mathbf{k},n}(x) = n^{-\alpha} g(n^{-\alpha} x_0) n^{-3} h(n^{-3} \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}x}$ , wobei  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\int dx g(x) = 1$ ,  $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  mit  $\int d^3 \mathbf{x} |h(\mathbf{x})|^2 = 1$  und  $\alpha \in (0, 1)$ .<sup>9</sup> Die Folge  $(N_{\mathbf{k},n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine zentrale Folge, deren Grenzwert in allen Gleichgewichtszuständen der Form  $\omega_{\beta,0}$  existiert.<sup>10</sup> Es ergibt sich als Erwartungswert für den entsprechenden Operator  $N_{\mathbf{k}}$

$$\omega_{\beta,0}(N_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta \mathbf{k}} - 1}.$$

Der folgende Satz zeigt, daß das Kondensat wie erwartet keinen Beitrag zur Teilchendichte des Systems für  $\mathbf{k} \neq 0$  liefert.

**Satz 4.13.** *Sei  $\kappa > 0$  beliebig. Dann gilt  $\omega_{\beta,\kappa}(N_{\mathbf{k}}) = \omega_{\beta,0}(N_{\mathbf{k}})$*

*Beweis.* Einfaches Nachrechnen zeigt, daß

$$\begin{aligned} \omega_{\beta,\kappa}(N_{\mathbf{k},n}) - \omega_{\beta,0}(N_{\mathbf{k},n}) &= \frac{2|\mathbf{k}|\kappa}{n^{6+2\alpha}} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \bar{g}\left(\frac{x_{1,0}}{n^\alpha}\right) \bar{h}\left(\frac{\mathbf{x}_1}{n}\right) g\left(\frac{x_{2,0}}{n^\alpha}\right) h\left(\frac{\mathbf{x}_2}{n}\right) e^{i\mathbf{k}(x_2 - x_1)} \\ &= 2|\mathbf{k}|\kappa \tilde{g}(n^\alpha |\mathbf{k}|) \tilde{h}(n\mathbf{k}) \tilde{g}(-n^\alpha |\mathbf{k}|) \tilde{h}(-n\mathbf{k}) \\ &= 2|\mathbf{k}|\kappa |\tilde{g}(n^\alpha |\mathbf{k}|)|^2 |\tilde{h}(n\mathbf{k})|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da  $\tilde{h}$  und  $\tilde{g}$  als Fouriertransformierte von kompakt getragenen Funktionen Schwartzfunktionen sind.  $\square$

Es zeigt sich, daß die Ergebnisse mit früheren Resultaten konsistent sind, insbesondere gilt Plancks Formel

$$N_{\mathbf{k}}(\beta, \kappa) = N_{\mathbf{k}}(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta \mathbf{k}} - 1}$$

für die Teilchendichte  $N_{\mathbf{k}}$  für masselose Bosonen mit Impuls  $\mathbf{k} \neq 0$ .

### Die Dichte $K$ des Kondensates

Eine der wesentlichen Erweiterungen zu [2] ist das Zulassen von Zuständen, die ein Kondensat beschreiben. Die für diese Arbeit wichtigste Makroobservable ist deswegen dessen Dichte, die im folgenden explizit konstruiert werden soll. Definiere zunächst die Folge  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{A}$  durch

$$K_n \doteq \phi^*(f_n) \phi(f_n)$$

mit

$$f_n(x) = \frac{1}{n^4} f\left(\frac{x}{n}\right),$$

wobei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ , so daß  $\int d^4 x f(x) = 1$ . Es ist zu zeigen, daß dieser Grenzwert in allen Referenzzuständen existiert, eine zentrale Observable definiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\kappa}(K_n) = \kappa$  gilt. Es wird zunächst der Zustand  $\omega_{\beta,0}$  ohne Kondensat betrachtet.

<sup>9</sup>Es zeigt sich, daß der entsprechende Limes unabhängig von  $\alpha$  ist.

<sup>10</sup>Der Beweis wird in [2] angerissen. Ein entsprechender, sehr detaillierter Beweis für das elektro-magnetische Feld in [11] kann fast eins zu eins übertragen werden.

**Lemma 4.14.** Sei  $\omega_{\beta,0} \in \mathcal{C}_\beta$ . Dann gilt für alle  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi(g)\phi(f_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi(g)\phi^*(f_n)) = 0.$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi(f_n)\phi(g)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi^*(f_n)\phi(g)) = 0.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(g, \bar{f}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(g, f_n) = 0.$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\mathbb{K}_n) = 0.$

*Beweis.* Siehe Appendix B.2, Seite 79. □

Eine erste direkte Konsequenz aus dem vorangegangenen Lemma ist, daß der so erhaltene Grenzwert tatsächlich das Kondensat mißt, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\kappa}(\mathbb{K}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_{\beta,0}(\mathbb{K}_n) + \kappa \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{f}_n(x_1) f_n(x_2)) = \kappa.$$

Um zu zeigen, daß der Grenzwert in jedem Referenzzustand  $\omega_\varrho \in \mathcal{C}$  eine zulässige Makroobservable ist, wird noch ein weiteres Lemma benötigt.

**Lemma 4.15.** Sei  $\omega_{\beta,\kappa} \in \mathcal{C}_\beta$ . Dann gilt

1. für alle  $M \in \mathbb{N}_0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\kappa}(\mathbb{K}_n^M) = (2M - 1)!! \kappa^M$$

2. für alle  $A, B, B' \in \mathcal{A}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\kappa}(B [\mathbb{K}_n, A] B') = 0$$

Hierbei ist für ungerades  $n \in \mathbb{N}$   $n!! \doteq n(n-2)(n-4) \cdots 1$ . Weiterhin existiert für alle  $A \in \mathcal{A}$  der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\kappa}(A^* \mathbb{K}_n^2 A).$$

*Beweis.* Siehe Appendix B.2, Seite 80. □

Dieses Ergebnis erlaubt nun den folgenden Satz zu beweisen.

**Satz 4.16.** Sei  $\omega_\varrho \in \mathcal{C}$  beliebig. Dann ist die Folge  $(\mathbb{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine zentrale Folge, d.h. durch

$$\mathbb{K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^*(f_n)\phi(f_n)$$

wird in der durch  $\omega_\varrho$  induzierten GNS-Darstellung  $(\pi_{\omega_\varrho}, \mathfrak{h}_{\omega_\varrho}, \Omega_{\omega_\varrho})$  mittels

$$\omega_\varrho(A^* \mathbb{K} B) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\varrho(A^* \mathbb{K}_n B), \quad A, B \in \mathcal{A},$$

ein unbeschränkter, dicht definierter symmetrischer Operator definiert, der auf seinem Definitionsbereich mit allen Darstellern von  $\mathcal{A}$ , kommutiert. Insbesondere gilt

$$\omega_{\beta,\kappa}(\mathbb{K}) = \kappa.$$

*Beweis.* Nach GNS-Rekonstruktion liegt der Raum  $\mathfrak{h}_0 \doteq \pi_{\omega_\varrho}(\mathcal{A})\Omega_{\omega_\varrho}$  dicht in  $\mathfrak{h}_{\omega_\varrho}$ . Sei nun  $\psi = \pi_\varrho(B)\Omega_\varrho \in \mathfrak{h}_0$ ,  $B \in \mathcal{A}$  beliebig. Da  $\mathbb{K}_n^* = (\phi^*(f_n)\phi(f_n))^* = \mathbb{K}_n$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\pi_\varrho(\mathbb{K}_n)\psi\|^2 &= \langle \pi_\varrho(\mathbb{K}_n)\psi | \pi_\varrho(\mathbb{K}_n)\psi \rangle = \langle \psi | \pi_\varrho(\mathbb{K}_n^2)\psi \rangle = \langle \pi_\varrho(B)\Omega_\varrho | \pi_\varrho(\mathbb{K}_n^2 B)\Omega_\varrho \rangle \\ &= \langle \Omega_\varrho | \pi_\varrho(B^*\mathbb{K}_n^2 B)\Omega_\varrho \rangle = \omega_\varrho(B^*\mathbb{K}_n^2 B). \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.15 existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\varrho(B^*\mathbb{K}_n^2 B)$ , womit folgt, daß durch

$$\mathbb{K}\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\varrho(\mathbb{K}_n)\psi, \quad \psi \in \mathfrak{h}_0$$

ein wohldefinierter, symmetrischer Operator mit Definitionsbereich  $\text{dom } \mathbb{K} = \mathfrak{h}_0$  gegeben ist. Seien nun  $\psi, \psi' \in \mathfrak{h}_0$  und  $A \in \mathcal{A}$  beliebig. Da  $\psi = \pi_\varrho(B)\Omega_\varrho$  und  $\psi' = \pi_\varrho(B')\Omega_\varrho$  für ein  $B, B' \in \mathcal{A}$ , ergibt sich mit Lemma 4.15

$$\begin{aligned} \langle \psi | [\pi_\varrho(A), \mathbb{K}] \psi' \rangle &= \langle \pi_\varrho(A^* B)\Omega_\varrho | \mathbb{K} \pi_\varrho(B')\Omega_\varrho \rangle - \langle \pi_\varrho(B)\Omega_\varrho | \mathbb{K} \pi_\varrho(A B')\Omega_\varrho \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\varrho(B^* A \mathbb{K}_n B' - B^* \mathbb{K}_n A B') = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\varrho(B^* [A, \mathbb{K}_n] B') \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\varrho(\beta, \kappa) \omega_{\beta, \kappa}(B^* [A, \mathbb{K}_n] B') \\ &= \int d\varrho(\beta, \kappa) \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa}(B^* [A, \mathbb{K}_n] B') = 0. \end{aligned}$$

Dabei wird ausgenutzt, daß nach dem Satz über dominierte Konvergenz der Grenzwert und die Integration vertauscht werden dürfen (die stetige Funktion  $(\beta, \kappa) \mapsto \omega_{\beta, \kappa}(B^* [A, \mathbb{K}_n] B')$  wird über die kompakte Menge  $\text{supp } \varrho$  integriert).  $\square$



## 5. Evolutionsgleichungen

Zunächst wird das Konzept der  $\mathcal{S}_x$ -thermalen Zustände auf Raumzeitgebiete  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  erweitert. Mit den in [1, 2] eingeführten Methoden werden dann Evolutionsgleichungen erarbeitet, die das Raumzeitverhalten thermischer Funktionen für Zustände im lokalen Gleichgewicht beschreiben. Es werden die Ergebnisse aus [2] dargestellt und gezeigt, daß es zusätzlich zu Einschränkungen dynamischen Ursprungs keine weiteren Restriktionen für das Kondensat gibt. Insbesondere ist das Raumzeitverhalten des Kondensats  $\mathbb{K}$  unabhängig von der Teilchendichte  $\mathbb{N}_{\mathbf{k}}$ . Im letzten Teil dieses Kapitels wird ein zu dem Resultat aus [2] ähnliches Singularitäten-Theorem hergeleitet.

Für eine offene Menge  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  läßt sich der Begriff des lokalen Gleichgewichtes am Punkt in natürlicher Weise erweitern, um lokales Gleichgewicht auf  $\mathcal{O}$  zu beschreiben. Für beliebiges  $x_0 \in \mathcal{O}$  identifiziere  $\mathcal{S}_x$  mit dem Bild der Wirkung der Translationen auf  $\mathcal{S}_{x_0}$ , d.h.

$$\mathcal{S}_x = \alpha_{x-x_0}(\mathcal{S}_{x_0}), \quad x \in \mathcal{O}.$$

**Definition 5.1.** Sei  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  offen. Ein Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  heißt  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal genau dann, wenn er für alle  $x \in \mathcal{O}$  ein  $\mathcal{S}_x$ -thermaler Zustand ist, d.h.

$$\forall x \in \mathcal{O} \exists \varrho_x \in \mathcal{P}_c(V_+ \times [0, \infty)): \omega|_{\mathcal{S}_x} = \omega_{\varrho_x}|_{\mathcal{S}_x} \quad (5.1)$$

Zusätzlich muß  $\omega$  folgende Eigenschaften erfüllen:

(L1) Für alle  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$  und alle lokal-thermischen Funktionen  $\Theta^\mu$  existiert das Integral

$$\int d^4x f(x) \omega(\Theta^\mu)(x) = \int d^4x f(x) \int d\varrho_x(\beta, \kappa) \Theta^\mu(\beta, \kappa)$$

als Lebesgue-Integral auf  $\mathcal{O}$ , d.h. es ist  $\omega(\Theta^\mu)(\cdot) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$ .

(L2) Für alle kompakten Mengen  $K \subset \mathcal{O}$  gibt es eine kompakte Menge  $B \subset V_+ \times [0, \infty)$ , so daß

$$\bigcup_{x \in K} \text{supp } \varrho_x \subset B.$$

Diese zusätzlichen Forderungen sind technischer Natur und dienen dazu pathologische und unphysikalische Zustände auszuschließen. Aus (L1) folgt unmittelbar, daß  $\omega(\Theta^\mu)(\cdot)$  als Element in  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$  eine wohldefinierte Distribution auf  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  ist. Mit (L2) ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \int d^4x f(x) \omega(\Theta^\mu)(x) \right| = \left| \int d^4x f(x) \int d\varrho_x(\beta, \kappa) \Theta^\mu(\beta, \kappa) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int d^4x |f(x)| \int d\rho_x(\beta, \kappa) |\Theta^\mu(\beta, \kappa)| \leq \int d^4x |f(x)| \int d\rho_x(\beta, \kappa) \sup_{(\beta, \kappa) \in B} |\Theta^\mu(\beta, \kappa)| \\
&= \|f\|_1 p_B(\Theta^\mu)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

wobei  $B \in V_+ \times [0, \infty)$  die zu  $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$  gehörige kompakte Menge,  $\|\cdot\|_1$  die übliche Norm auf  $\mathcal{L}^1(\mathcal{O})$  und  $p_B(\cdot)$  die durch (4.6) definierte Halbnorm ist.

Direkt aus (5.2) folgt die Stetigkeit<sup>1</sup> der Abbildung

$$\mathbf{f} \mapsto \omega(\mathbf{f})(\cdot), \quad \mathbf{f} \in \mathcal{T}_S.$$

Diese Stetigkeit garantiert nach Standardresultaten der Analysis, daß für alle  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  und für eine Folge  $(\mathbf{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{T}_S$  mit  $\mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{F}$  durch

$$x \mapsto \omega(\mathbf{F})(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(\mathbf{f}_n)(x) = \int d\rho_x(\beta, \kappa) \mathbf{F}(\beta, \kappa)$$

eine wohldefinierte Distribution auf  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  gegeben ist, die das Raumzeitverhalten von  $\mathbf{F}$  auf  $\mathcal{O}$  beschreibt.

**Definition 5.2.** Sei  $\omega$  ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand. Die Abbildung gegeben durch

$$\mathbf{F} \mapsto \omega(\mathbf{F})(x), \quad \mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}, \quad x \in \mathcal{O}$$

heißt **Lift** des Zustandes auf die zulässigen Makroobservablen am Punkt  $x$ .

## 5.1. Evolutionsgleichung für Teilchendichte und Kondensat

### 5.1.1. Ableitungen der Distribution $\vartheta^\mu(x)$

Ziel dieses Exkurses ist es für die lokal-thermischen Observablen  $\vartheta^\mu(x)$ , gegeben durch (4.2), Ausdrücken der Form

$$\partial_{x^\nu} \vartheta^\mu(x) \doteq \frac{\partial}{\partial x^\nu} \vartheta^\mu(x) \tag{5.3}$$

mathematisch einen Sinn zu geben und für alle Zustände, in denen sie wohldefiniert sind, die Erwartungswerte auszurechnen.

Sei dazu  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein Zustand, für den in einem Gebiet  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  die Observable  $\vartheta^\mu(x)$  existiert und für den die Abbildung  $x \mapsto \omega(\vartheta^\mu(x))$  eine wohldefinierte Distribution in  $\mathcal{D}^*(\mathcal{O})$  definiert (dies gilt nach dem vorherigen Abschnitt insbesondere für alle  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustände). Setze (i.S.v.D)

$$\omega(\partial_\nu \vartheta^\mu(x)) \doteq \partial_\nu \omega(\vartheta^\mu(x)).$$

**Satz 5.3.** Wenn im Zustand  $\omega$  die lokale Observable  $\vartheta^\mu(x)$  als Distribution im im obigen Sinne wohldefiniert ist, gilt

$$\omega(\square_x \vartheta^\mu(x)) = -\omega(\vartheta_\nu{}^\nu(x)) \quad \text{und} \quad \omega(\partial_{x^\nu} \vartheta^\nu(x)) = 0.$$

<sup>1</sup>Dies liegt darin begründet, daß nach Konstruktion der entsprechenden Topologien (vgl. z.B. [14, 16]) eine Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$  genau dann in  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  konvergiert, wenn für alle Testfunktionen  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int d^4x g_n(x) f(x)$  existiert, und eine Folge  $(\mathbf{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{T}_S$  genau dann konvergiert, wenn für alle kompakten Teilmengen  $B \in V_+ \times [0, \infty)$ , der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_B(\mathbf{f}_n)$  existiert.

*Beweis.* Nach Satz vom Kern [15, Thm. 5.2.1] existiert eine eindeutig bestimmte Distribution  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^8)$  mit

$$\Psi(f \otimes g) = \omega(\phi(f)\phi(g)) - \omega_\infty(\phi(f)\phi(g)), \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4).$$

Die Abbildung  $\psi_{f,g} : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$\psi_{f,g}(x_1, x_2) \doteq \Psi(f_{x_1} \otimes g_{x_2}), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^4,$$

ist für feste  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  glatt mit

$$\partial_{x_1 \nu} \psi_{f,g} = -\psi_{\partial_\nu f, g}, \quad \text{und} \quad \partial_{x_2 \nu} \psi_{f,g} = -\psi_{f, \partial_\nu g}, \quad \nu = 0, \dots, 3.$$

Als Konsequenz ist die Abbildung  $\psi'_{f,g} : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{C}$ , gegeben durch

$$\psi'_{f,g}(x, \zeta) \doteq \psi_{f,g}(x + \zeta, x - \zeta), \quad x, \zeta \in \mathbb{R}^4,$$

ebenfalls glatt. Mit Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$\partial_x \nu \psi'_{f,g}(x, \zeta) = -\psi'_{\partial_\nu f, g} - \psi'_{f, \partial_\nu g}, \quad \partial_\zeta \nu \psi'_{f,g}(x, \zeta) = -\psi'_{\partial_\nu f, g} + \psi'_{f, \partial_\nu g}, \quad \nu = 0, \dots, 3.$$

Sei nun  $(\delta^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  mit  $\delta^{(n)} \rightarrow \delta_0$ . Nach Konstruktion gilt

$$\omega(\vartheta^\mu(x)) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \lim_{n \rightarrow \infty} \psi'_{\delta^{(n)}, \delta^{(n)}}(x, \zeta), \quad x \in \mathcal{O},$$

womit für festes, hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  und festes hinreichend kleines  $\zeta \in \mathbb{R}^4$ ,  $\zeta^2 < 0$ , die Abbildung  $x \mapsto \partial_\zeta^{\nu\mu} \psi'_{\delta^{(n)}, \delta^{(n)}}(x, \zeta)$  eine Distribution auf  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  definiert. Für beliebige beliebige Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$  gilt dann, daß

$$\begin{aligned} & \int d^4x \partial_\zeta^{\nu\mu} \psi'_{\delta^{(n)}, \delta^{(n)}}(x, \zeta) \partial_\nu \varphi(x) = - \int d^4x \partial_\zeta^\mu \partial_\zeta^\nu \partial_x \nu \psi'_{\delta^{(n)}, \delta^{(n)}}(x, \zeta) \varphi(x) \\ &= \int d^4x \partial_\zeta^\mu \underbrace{[\psi'_{\square\delta^{(n)}, \delta^{(n)}}(x, \zeta) + \psi'_{\partial_\nu \delta^{(n)}, \partial_\nu \delta^{(n)}}(x, \zeta) - \psi'_{\partial_\nu \delta^{(n)}, \partial_\nu \delta^{(n)}}(x, \zeta) + \psi'_{\delta^{(n)}, \square\delta^{(n)}}(x, \zeta)]}_{=0} \varphi(x). \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt wegen  $\omega(\phi(\square f))\phi(g) = 0$ , daß

$$\psi'_{\square\delta^{(n)}, \delta^{(n)}}(x, \zeta) = \Psi(\square\delta_{x+\zeta}^{(n)} \otimes \delta_{x-\zeta}^{(n)}) = \omega(\phi(\square\delta_{x+\zeta}^{(n)})\phi(\delta_{x-\zeta}^{(n)})) - \omega_\infty(\phi(\square\delta_{x+\zeta}^{(n)})\phi(\delta_{x-\zeta}^{(n)})) = 0,$$

ebenso ist  $\psi'_{\delta^{(n)}, \square\delta^{(n)}} \equiv 0$ , womit die Behauptung folgt. Die Rechnung für  $\omega(\square\vartheta^\mu(x)) = -\omega(\vartheta^{\nu\mu}(x))$  ist analog. □

### 5.1.2. Herleitung der Evolutionsgleichung

Mit den Sätzen 4.9 und 5.3 ist es nun möglich Evolutionsgleichungen für das Raumzeitverhalten der Lifts der Makroobservablen herzuleiten. Es ergeben sich zunächst vollständig analog zu [2] folgende Ergebnisse

**Satz 5.4.** Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand und  $\mathbf{F}$  eine zulässigen Makroobservable. Dann gilt (i.S.v.D.)

$$\partial_\nu \omega(\partial_\beta^\nu \mathbf{F})(x) = 0, \quad (5.4)$$

$$\partial_\nu \omega(\partial_\kappa \mathbf{F})(x) = 0 \quad \text{für alle } \nu = 0, \dots, 3, \quad (5.5)$$

$$\square \omega(\mathbf{F})(x) = 0. \quad (5.6)$$

*Beweis.* Sei  $\mathbf{F}(\beta, \kappa) = u(\beta) + m \cdot \kappa$ ,  $u \in \mathcal{W}(V_+)$ ,  $m \in \mathbb{C}$  eine beliebige zulässige Makroobservable. Für Gleichung (5.5) ergibt sich direkt

$$\partial_\nu \omega(\partial_\kappa \mathbf{F})(x) = \partial_\nu \omega(m \cdot \mathbf{1})(x) = \partial_\nu m = 0, \quad \nu = 0, \dots, 3.$$

Nach Satz 4.9 gibt es eine Folge  $(\mathbf{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ , gegeben durch

$$\mathbf{f}_n = \sum_{k=0}^{K(n)} d_{\mu_{2k+1}}^{(n)} \Theta^{\nu \mu_{2k+1}}, \quad d_{\mu}^{(n)} \in \mathbb{C},$$

so daß

$$\partial_\beta^\nu \mathbf{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n$$

in der Topologie von  $\mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$ . Nach den Ergebnissen zu Beginn dieses Kapitels ist  $\mathbf{F} \mapsto \omega(\mathbf{F})(\cdot)$  eine stetige Abbildung von  $\mathcal{T}_{\text{adm}}$  nach  $\mathcal{D}^*(\mathcal{O})$ . Zusammen mit Satz 5.3 ergibt sich für beliebige Testfunktionen  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ , daß

$$\begin{aligned} & - \int d^4 x \omega(\partial_\beta^\nu \mathbf{F})(x) (\partial_\nu f)(x) = - \int d^4 x \omega\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n\right)(x) (\partial_\nu f)(x) \\ & = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K(n)} d_{\mu_{2k+1}}^{(n)} \int d^4 x \omega(\Theta^{\nu \mu_{2k+1}})(x) (\partial_\nu f)(x) \\ & = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K(n)} d_{\mu_{2k+1}}^{(n)} \int d^4 x \omega(\vartheta^{\nu \mu_{2k+1}}(x)) (\partial_\nu f)(x) \\ & = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K(n)} d_{\mu_{2k+1}}^{(n)} \int d^4 x \underbrace{\omega(\partial_{x\nu} \vartheta^{\nu \mu}(x))}_{=0} f(x) = 0, \end{aligned}$$

was direkt (5.4) impliziert. Um Gleichung (5.6) zu beweisen wird ausgenutzt, daß

$$(\beta, \kappa) \mapsto \Theta_\nu^{\nu \mu}(\beta, \kappa) = \Theta_\nu^{\nu \mu}(\beta) = \square_\beta \Theta^\mu(\beta) = 0$$

gilt. Mit dem gleichen Argument wie für (5.4) findet sich eine Folge  $(\mathbf{f}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ , gegeben durch

$$\mathbf{f}'_n = \sum_{k=0}^{K(n)} c_{\mu_{2k}}^{(n)} \Theta^{\mu_{2k}}, \quad c_{\mu}^{(n)} \in \mathbb{C},$$

die gegen  $\mathbf{F}$  konvergiert. Insbesondere gilt

$$\int d^4 x \omega(\mathbf{F})(x) (\square f)(x) = \int d^4 x \omega\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}'_n\right)(x) (\square f)(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K(n)} c_{\mu_{2k}}^{(n)} \int d^4x \omega(\Theta^{\mu_{2k}})(x) (\square f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K(n)} c_{\mu_{2k}}^{(n)} \int d^4x \omega(\square_x \vartheta^{\mu_{2k}}(x)) f(x) \\
&= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K(n)} c_{\mu_{2k}}^{(n)} \int d^4x \omega(\vartheta_\nu^{\mu_{2k}}(x)) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K(n)} c_{\mu_{2k}}^{(n)} \int d^4x \omega(\Theta_\nu^{\mu_{2k}})(x) f(x) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{K(n)} c_{\mu_{2k}}^{(n)} \int d^4x \underbrace{\omega(\square_\beta \Theta^{\mu_{2k}})(x)}_{=0} f(x) = 0,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

### Die stoßfreie Boltzmann-Gleichung

Mit Hilfe von Satz 5.4 läßt sich direkt ableiten, daß der Lift der Teilchendichte  $\mathbf{N}_{\mathbf{k}}$  für Teilchen mit Impuls  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  der stoßfreien Boltzmann-Gleichung (5.7) genügen muß. Der Ansatz aus [1] ist somit konsistent mit anderen Zugängen zur Nichtgleichgewichtsstatistik (vgl. z.B. [26]). Zusätzlich ergibt sich jedoch durch (5.6) eine zusätzliche Einschränkung dynamischen Ursprungs, die sich für die Teilchendichte in Gleichung (5.8) widerspiegelt.

**Korollar 5.5** (Boltzmann-Gleichung). *Sei  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ein beliebiger Vektor und  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand. Dann gilt*

$$\underline{k}^\nu \partial_\nu \omega(\mathbf{N}_{\mathbf{k}})(x) = 0 \quad (5.7)$$

und

$$\square \omega(\mathbf{N}_{\mathbf{k}})(x) = 0. \quad (5.8)$$

*Beweis.* Betrachte für  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  die Hilfsfunktion  $\mathbf{L}_{\mathbf{k}} : V_+ \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\mathbf{L}_{\mathbf{k}}(\beta, \kappa) = \mathbf{L}_{\mathbf{k}}(\beta) \doteq \frac{1}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta \mathbf{k}}).$$

Da  $\mathbf{L}_{\mathbf{k}} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  und

$$\partial_\beta^\nu \mathbf{L}_{\mathbf{k}}(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\underline{k}^\nu e^{-\beta \mathbf{k}}}{1 - e^{-\beta \mathbf{k}}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\underline{k}^\nu}{e^{\beta \mathbf{k}} - 1} = \underline{k}^\nu \mathbf{N}_{\mathbf{k}}(\beta, \kappa),$$

gilt nach Satz 5.4 mit Gleichung (5.4)

$$\underline{k}^\nu \partial_\nu \omega(\mathbf{N}_{\mathbf{k}})(x) = \partial_\nu \omega(\partial^\nu \mathbf{L}_{\mathbf{k}})(x) = 0.$$

Die zweite Gleichung folgt wie bereits erwähnt direkt aus (5.6).  $\square$

### Gleichungen für das Kondensat

Es stellt sich die Frage, ob ein ähnliches Ergebnis für die Dichte des Kondensates  $\mathbf{K}$  erzielt werden kann. Durch Gleichung (5.6) ergibt sich

$$\square \omega(\mathbf{K})(x) = 0, \quad (5.9)$$

weitere Einschränkungen gibt es nicht.

## 5.2. Maximale Gebiete lokalen Gleichgewichtes

Sei  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  offen. Für einen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  stellt sich die Frage, ob es Gebiete  $\mathcal{O}'$  mit  $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}'$  gibt, so daß  $\omega$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}'}$ -thermaler Zustand ist und ob Aussagen über die Form dieser Gebiete gemacht werden können. Dafür wird zunächst in natürlicher Weise der Begriff des maximalen Gleichgewichtsgebietes definiert.

**Definition 5.6.** Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$ . Das Gebiet  $\mathcal{O}_{\omega} \subseteq \mathbb{R}^4$  heißt **maximales Gleichgewichtsgebiet**, wenn es kein Gebiet  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$ ,  $\mathcal{O}_{\omega} \subsetneq \mathcal{O}$  gibt, auf dem  $\omega$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand ist.

Im Falle extremaler Referenzzustände wurde für das masselose, skalare Feld in [2, Prop. 5.2] gezeigt, daß maximale, konvexe Gleichgewichtsgebiete die einen Lichtkegel enthalten ihrerseits in einem lichtartigen, simplizialen Kegel enthalten sind.

**Definition 5.7.** Ein **simplizialer Kegel** ist der Durchschnitt von vier charakteristischen Halbräumen. Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  ist der **charakteristische Halbraum**  $H_{\lambda,\mathbf{p}}$  gegeben durch

$$H_{\lambda,\mathbf{p}} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid px \geq \lambda\}$$

Das analoge Ergebnis gilt für das elektromagnetische Feld (vgl. [11]) und für masselose Fermionen (vgl. [10]). Durch die vorgenommene Erweiterung der Referenzzustände muß dieser Satz jedoch für diese Arbeit geringfügig modifiziert werden. Dieser Modifikation ist der Rest dieses Abschnitts gewidmet. Der Vollständigkeit halber ist anzumerken, daß im Falle massiver Bosonen keine  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustände existieren, deren Gleichgewichtsgebiet einen Lichtkegel enthält. Daher kann in diesem Modell eine zu [2, Prop. 5.2] vergleichbare Aussage nicht getroffen werden (vgl. [12]).

Aus technischen Gründen ist es sinnvoll, von  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zuständen  $\omega$  zu regularisierten Zuständen  $\omega_f$  überzugehen und diese auf einer speziellen Unteralgebra  $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{p}} \subset \mathcal{T}_{\text{adm}}$  zu betrachten. Für die Konstruktion sei zunächst  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  mit  $\int d^4x f(x) = 1$ ,  $f \geq 0$  und  $\text{supp } f = B_{\varepsilon}(0)$  für ein  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein.<sup>23</sup> Für  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ist dann der dazugehörige, regularisierte Zustand  $\omega_f$  definiert durch

$$\omega_f \doteq \int d^4y f(y) \omega \circ \alpha_y.$$

Der Zustand  $\omega_f$  ist wohldefiniert, da  $y \mapsto \omega \circ \alpha_y$  schwach stetig ist. Die Regularisierung von  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zuständen führt zu einigen sehr nützlichen Eigenschaften der Lifts der regularisierten Zustände auf die zulässigen Makroobservablen.

**Lemma 5.8.** Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_{\omega}}$ -thermaler Zustand auf einem Gebiet  $\mathcal{O}_{\omega}$ . Sei weiterhin  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  eine Testfunktion mit den obigen Eigenschaften und  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  eine beliebige zulässige Makroobservable. Dann gilt:

<sup>2</sup>In der Analysis wird eine Funktion  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  mit diesen Eigenschaften oft als **Glättungsfunktion** oder **Mollifier** bezeichnet (vgl. [15]).

<sup>3</sup>Hinreichend klein bedeutet in diesem Fall, daß  $\varepsilon \in (0, 1)$  so gewählt wird, daß für einen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand  $\omega$

$$\bigcap_{x \in B_{\varepsilon}(0)} (\mathcal{O} + x) \neq \emptyset.$$

1. Der regularisierte Zustand  $\omega_f$  ist  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal auf

$$\mathcal{O} \doteq \bigcap_{x \in \text{supp } f} (\mathcal{O}_\omega + x).$$

2. Die Abbildung  $x \mapsto \omega_f(\mathbf{F})(x)$  ist glatt für  $x \in \mathcal{O}$ .

*Beweis.* Siehe Appendix C, Seite 83. □

Die regularisierten Zustände werden zunächst auf dem Raum  $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{p}}$  untersucht. Für  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ist

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{p}} \doteq \{ \mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}} \mid \exists \Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \mathbf{F}(\beta, \kappa) = \Gamma(\underline{p}\beta) \}.$$

Da für  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$\square \Gamma_1(\underline{p}\beta) \Gamma_2(\underline{p}\beta) = \underline{p}_\mu \underline{p}^\mu \Gamma_1''(\underline{p}\beta) \Gamma_2(\underline{p}\beta) + 2 \underline{p}_\mu \underline{p}^\mu \Gamma_1'(\underline{p}\beta) \Gamma_2'(\underline{p}\beta) + \underline{p}_\mu \underline{p}^\mu \Gamma_1(\underline{p}\beta) \Gamma_2''(\underline{p}\beta) = 0$$

gilt, ist  $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{p}}$  mit komplexer Konjugation eine abelsche  $*$ -Algebra. Aus

$$\omega_f(\mathbf{F}^* \mathbf{F})(x) = \int d\varrho_x(\beta, \kappa) |\Gamma(\underline{p}\beta)|^2 \geq 0$$

folgt, daß die Lifts  $\omega_f(\cdot)(x)$  Zustände auf  $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{p}}$  sind, was uns erlaubt im folgenden Beweis die Cauchy-Schwartz-Ungleichung (vgl. z.B. [19]) zu verwenden. Wichtig für die folgende Untersuchung sind vor allem die Makroobservablen  $\mathbf{E}_{\mathbf{p}}, \mathbf{M}_{\mathbf{p}}^n \in \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{p}}$ , gegeben durch

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}}(\beta) \doteq e^{i\beta \underline{p}} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{p}}^n(\beta) \doteq (\underline{p}\beta)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

In einem abschließenden Satz werden einige ihrer Eigenschaften aufgeführt.

**Satz 5.9.** *Sei  $\omega_f$  ein regularisierter  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand. Dann gilt für alle  $x \in \mathcal{O}$ :*

1.  $\underline{p}^\nu \partial_\nu \omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x) = 0, \quad \square \omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x) = 0.$
2.  $|\omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x)| \leq 1.$
3.  $0 \leq \omega_f(\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^{n+1})(x) \leq (\omega_f(\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^n)(x))^{\frac{n}{n+1}} (\omega_f(\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^{2n+1})(x))^{\frac{1}{n+1}}.$
4. *Die Abbildung  $\underline{p} \mapsto \omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x)$  setzt sich zu einer analytischen Funktion auf  $\mathbb{C}^4$  fort, die glatt in  $x$  ist.*

*Beweis.* Es wird der Beweis aus [2] ausführlich dargestellt.

**Aussage 1:** Aussage 1 folgt direkt aus Satz 5.4, da

$$\underline{p}^\nu \partial_\nu \omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x) = \partial_\nu \omega_f(\partial^\nu \mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x) = 0.$$

**Aussage 2:** Für Aussage 2 bedenke, daß  $\omega_f(\cdot)(x)$  für alle  $x \in \mathcal{O}$  einen Zustand auf  $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{p}}$  definiert und somit aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Zustände auf  $*$ -Algebren (z.B. in [19])

$$|\omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x)|^2 = |\omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{1})(x)|^2 \leq \omega_f(\mathbf{1})(x) \omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^* \mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x) = \omega_f(\mathbf{1})(x) = 1$$

folgt.

**Aussage 3:** Da  $\omega_f$  ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$  thermaler Zustand ist, gibt es für alle  $x \in \mathcal{O}$  ein  $\varrho \in \mathcal{P}_c(V_+ \times [0, \infty))$ , so daß

$$\omega_f(\mathbf{M}_p^{n+1})(x) = \int d\varrho(\beta, \kappa) (\underline{p}\beta)^{n+1}.$$

Mit der Hölderungleichung für  $r = n + 1$  und  $s = (n + 1)/n$ ,  $1/r + 1/s = 1$  ergibt sich, ausnutzend, daß  $\mathbf{M}_p$  positiv ist,

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega_f(\mathbf{M}_p^{n+1})(x) &= \int d\varrho(\beta, \kappa) (\underline{p}\beta)^{n+1} = \int d\varrho(\beta, \kappa) (\underline{p}\beta)^{\frac{n^2}{n+1}} (\underline{p}\beta)^{\frac{2n+1}{n+1}} \\ &\leq \left( \int d\varrho(\beta, \kappa) ((\underline{p}\beta)^{\frac{n^2}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left( \int d\varrho(\beta, \kappa) ((\underline{p}\beta)^{\frac{2n+1}{n+1}})^{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \left( \int d\varrho(\beta, \kappa) (\underline{p}\beta)^n \right)^{\frac{n}{n+1}} \left( \int d\varrho(\beta, \kappa) (\underline{p}\beta)^{2n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= (\omega_f(\mathbf{M}_p^n)(x))^{\frac{n}{n+1}} (\omega_f(\mathbf{M}_p^{2n+1})(x))^{\frac{1}{n+1}}, \end{aligned}$$

womit Aussage 3 bewiesen ist.<sup>4</sup>

**Aussage 4:** Für die Fortsetzung betrachte die Funktion

$$\beta \mapsto \mathbf{E}_z(\beta) \doteq (\cos(\beta_0|\mathbf{z}|) + i \frac{z_0}{|\mathbf{z}|} \sin(\beta_0|\mathbf{z}|)) e^{-i\beta\mathbf{z}}, \quad \beta \in V_+,$$

mit  $|\mathbf{z}|^2 \doteq \sum_{i=1}^3 z_i^2$  als Abkürzung.<sup>5</sup> Da

$$\begin{aligned} \square_\beta \mathbf{E}_z(\beta) &= \partial_0(-|\mathbf{z}| \sin(\beta_0|\mathbf{z}|) + iz_0 \cos(\beta_0|\mathbf{z}|)) e^{-i\beta\mathbf{z}} \\ &\quad + (\cos(\beta_0|\mathbf{z}|) + i \frac{z_0}{|\mathbf{z}|} \sin(\beta_0|\mathbf{z}|)) |\mathbf{z}|^2 e^{-i\beta\mathbf{z}} \\ &= (-|\mathbf{z}|^2 \cos(\beta_0|\mathbf{z}|) + iz_0|\mathbf{z}| \cos(\beta_0|\mathbf{z}|)) e^{-i\beta\mathbf{z}} \\ &\quad + (|\mathbf{z}|^2 \cos(\beta_0|\mathbf{z}|) + i|\mathbf{z}| \sin(\beta_0|\mathbf{z}|)) e^{-i\beta\mathbf{z}} = 0, \end{aligned}$$

ist  $\mathbf{E}_z$  eine zulässige Makroobservable, die für  $z = \underline{k}$  mit  $\mathbf{E}_k$  übereinstimmt. Entwicklung in eine Potenz-Reihe zeigt, daß

$$z \mapsto (\cos(\beta_0|\mathbf{z}|) + i \frac{z_0}{|\mathbf{z}|} \sin(\beta_0|\mathbf{z}|)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{(2n)!} + \frac{iz_0}{(2n+1)!} \right] (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^n$$

für festes  $\beta \in V_+$  eine ganze Funktion auf  $\mathbb{C}^4$  ist, womit dies für  $z \mapsto \mathbf{E}_z(\beta)$  als Produkt ganzer Funktionen ebenfalls gilt (vgl. z.B. [27]). Es bleibt zu zeigen, daß die offensichtlich stetige Abbildung

$$z \mapsto \omega_f(\mathbf{E}_z)(x), \quad z \in \mathbb{C}^4$$

<sup>4</sup>Wesentlich für diese Aussage ist, daß für alle  $s > 0$  und alle  $q \geq 1$  die Funktion  $\beta \mapsto (\underline{p}\beta)^s$  ein Element in  $\mathcal{L}^q(V_+, \varrho)$  ist. Für Maße  $\varrho$  mit kompakten Träger ist dies mit der Stetigkeit der Funktionen offensichtlich. Im Falle massiver Bosonen, bei dem die Einschränkung auf Gemische mit kompakten Wahrscheinlichkeitsmaßen für die Referenzzustände zu restriktiv ist, gilt diese Aussage im allgemeinen nicht (vgl. [12]).

<sup>5</sup>Es zeigt sich, daß  $\mathbf{E}_z(\beta)$  nur von geraden Potenzen von  $|\mathbf{z}|$  abhängt, womit die Wahl eines speziellen Zweiges der Wurzel in  $\mathbb{C}$  entfällt.



für alle  $x \in \mathcal{O}$  analytisch ist. Sei dazu  $\gamma$  ein beliebiger geschlossener Weg in  $\mathbb{C}^4$ . Dann ist für festes  $x \in \mathcal{O}$

$$\int_{\gamma} dz \omega_f(\mathbf{E}_z)(x) = \int_{\gamma} dz \int d\rho_x(\beta, \kappa) \mathbf{E}_z(\beta) = \int d\rho_x(\beta, \kappa) \int_{\gamma} dz \mathbf{E}_z(\beta) = 0,$$

da die Integration vertauscht werden darf und da  $\mathbf{E}_z(\beta)$  holomorph ist. Die Vertauschung folgt nach Satz von Fubini, da  $\rho_x$  kompakten Träger hat,  $\text{Sp } \gamma$  kompakt ist und  $(z, \beta) \mapsto \mathbf{E}_z(\beta)$  auf  $\text{supp } \rho_x \times \text{Sp } \gamma$  stetig ist. Damit ist  $z \mapsto \omega_f(\mathbf{E}_z)(x)$  für festes  $x \in \mathcal{O}$  holomorph (vgl. ebenfalls z.B. [27]). Insgesamt ist

$$\mathbb{C}^4 \ni z \mapsto \omega_f(\mathbf{E}_z)(x), \quad x \in \mathcal{O},$$

die gesuchte Erweiterung, die Glattheit in  $x$  folgt direkt aus Lemma 5.8.  $\square$

### 5.2.1. Singularitäten

Der vorangegangene Satz ermöglicht nun ein zu [2] ähnliches Singularitätentheorem zu beweisen. Wesentlich für den Beweis in [2] ist die Tatsache, daß wenn der Lift  $\omega(\mathbf{F})(x)$  für ein  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  eine nicht triviale Ortsabhängigkeit hat, dies als Konsequenz von Satz 4.8 für mindestens ein  $\mathbb{M}_{\mathbf{p}}^n$  ebenfalls gilt. Da dies in der vorliegenden Arbeit nicht der Fall ist, ergibt sich eine dritte Alternative.

**Satz 5.10.** *Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{O}_{\omega}$ -thermaler Zustand auf dem maximalen, konvexen Gleichgewichtsgebiet  $\mathcal{O}_{\omega}$ , wobei  $\mathcal{O}_{\omega}$  einen Lichtkegel enthält. Dann gibt es drei Möglichkeiten:*

- *Der Lift  $\mathbf{F} \mapsto \omega(\mathbf{F})(x)$  hängt trivial von  $x \in \mathcal{O}_{\omega}$  ab, d.h.  $\omega \in \mathcal{C}$ .*
- *Der Lift  $\mathbf{F} \mapsto \omega(\mathbf{F})(x)$  hängt nicht trivial von  $x$  ab (für mindestens ein  $\mathbf{F}$ ) und  $\mathcal{O}_{\omega}$  ist in einem simplizialen Lichtkegel enthalten.*
- *Der Lift  $\mathbf{F} \mapsto \omega(\mathbf{F})(x)$  hängt nicht trivial von  $x$  ab (für mindestens ein  $\mathbf{F}$ ) aber  $\mathcal{O}_{\omega}$  ist nicht einem simplizialen Lichtkegel enthalten. Dann ist*

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{K}$$

mit  $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Um diesen Satz zu beweisen werden noch ein technisches Lemma benötigt.

**Lemma 5.11.** *Sei  $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^2 \doteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1\}$  fest. Sei weiterhin  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$  und  $g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^4)$  definiert durch  $g(x) \doteq f(\underline{\mathbf{e}}x)$ . Dann gilt*

$$(y^{\mu} \partial_{\mu})^k g(x) = (y_{\underline{\mathbf{e}}})^k \partial_0^k g(x)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $y \in \mathbb{C}^4$ .

*Beweis.* Siehe Appendix C, Seite 84.  $\square$

Ein weiteres Lemma dient als Ersatz für die benötigte Äquivalenz der nicht-trivialen Ortsabhängigkeit von  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  und  $\mathbb{M}_{\mathbf{p}}^n$ .

**Lemma 5.12.** *Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{O}_{\omega}$ -thermaler Zustand. Dann sind äquivalent*

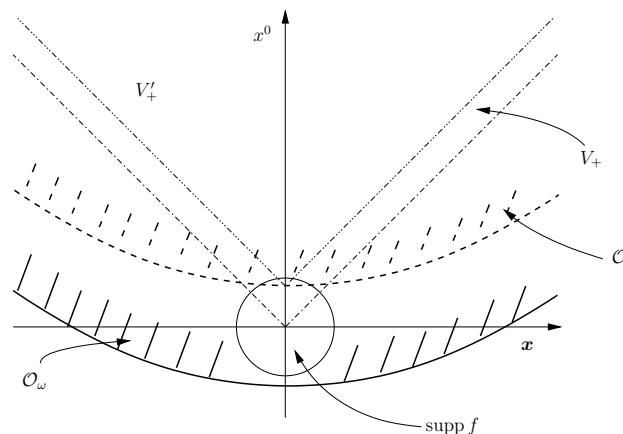


Abbildung 5.1.: Die Abbildung zeigt das Gleichgewichtsgebiet  $\mathcal{O}$  des regularisierten Zustandes. Ist ein Lichtkegel in  $\mathcal{O}_\omega$  enthalten, so existiert ein Lichtkegel  $V'_+ \subseteq \mathcal{O}$ .

1. Für  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  impliziert nicht-triviale Ortsabhängigkeit des Lifts  $\omega(\mathbf{F})(x)$ , daß  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{K}$  für ein  $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
2. Der Lift  $\omega(\mathbf{M}_p^n)(x)$  hat eine triviale Ortsabhängigkeit für alle  $n > 0$  und alle  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

*Beweis.* siehe Appendix C, Seite 84. □

Mit diesen Resultaten kann nun der Beweis des zentralen Satzes dieser Arbeit begonnen werden.

### Beweis von Satz 5.10

Es wird der regularisierte Zustand  $\omega_f$  betrachtet. Aus den obigen Bemerkungen ergibt sich, daß  $\omega_f$   $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal ist für

$$\mathcal{O} = \bigcap_{x \in \text{supp } f} (\mathcal{O}_\omega + x).$$

Aus Abbildung 5.1 ist zu entnehmen, daß wenn  $\mathcal{O}_\omega$  einen Lichtkegel enthält, dies auch für  $\mathcal{O}$  der Fall ist. Durch entsprechende Translation und Reflektion kann o.B.d.A. angenommen werden, daß dieser Lichtkegel der Vorwärtslichtkegel  $V_+$  ist. Der Beweis basiert auf einer detaillierten Analyse der Funktionen

$$x \mapsto \overline{E}_{\mathbf{p}}(x) \doteq \omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{p}})(x) \quad \text{und} \quad x \mapsto \overline{M}_{\mathbf{p}}(x) \doteq \omega_f(\mathbf{M}_{\mathbf{p}})(x), \quad x \in \mathcal{O}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3.$$

Der weitere Beweis wird nun in sechs Schritte gegliedert.

**Schritt 1:** Es werden Lichtkegelkoordinaten  $(x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp)$  (bzgl.  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ) auf dem  $\mathbb{R}^4$  eingeführt und der d'Alembertoperator in diesen berechnet. Für festes  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  sind die Lichtkegelkoordinaten gegeben durch

$$x_\pm \doteq x_0 \pm \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_\perp \doteq \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e},$$

wobei  $\mathbf{e} \doteq \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ . Die entsprechende Rücktransformation ist gegeben durch

$$x_0 = \frac{x_+ + x_-}{2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \frac{x_+ - x_-}{2} \mathbf{e}.$$

Da  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_\perp$  die Projektion des  $\mathbb{R}^3$  auf den zweidimensionalen Unterraum senkrecht zu  $\mathbf{e}$  ist, kann  $\mathbf{x}_\perp$  als Element in  $\mathbb{R}^2$  aufgefasst werden, was erlaubt formal  $x = (x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp)$  zu schreiben. Analog zu  $\mathbf{x}_\perp$  ist  $\nabla_\perp$  durch  $\nabla_\perp \doteq \nabla - (\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{e}$  definiert, der Operator  $\Delta_\perp \doteq (\nabla_\perp)^2$  ist der Laplace-Operator bezüglich  $\mathbf{x}_\perp$ . Ist  $q_0, \dots, q_3 \in \mathbb{R}^4$  die Standardbasis, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} &= q_0(x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_+}, \frac{\partial}{\partial x_-}, \nabla_\perp \right) = \frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial}{\partial x_-}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} &= q_i(x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_+}, \frac{\partial}{\partial x_-}, \nabla_\perp \right) = (e_i, -e_i, \mathbf{q}_i - e_i \mathbf{e}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_+}, \frac{\partial}{\partial x_-}, \nabla_\perp \right) \\ &= e_i \left( \frac{\partial}{\partial x_+} - \frac{\partial}{\partial x_-} \right) + \mathbf{q}_i \cdot \nabla_\perp, \quad i = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Für den d'Alembert-Operator findet sich somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial}{\partial x_-} \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left( e_i \left( \frac{\partial}{\partial x_+} - \frac{\partial}{\partial x_-} \right) + \mathbf{q}_i \cdot \nabla_\perp \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial}{\partial x_-} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial x_+} - \frac{\partial}{\partial x_-} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial x_+} - \frac{\partial}{\partial x_-} \right) n_i \mathbf{q}_i \cdot \nabla_\perp - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{q}_i \cdot \nabla_\perp)^2 \\ &= 4 \frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} - \underbrace{2 \left( \frac{\partial}{\partial x_+} - \frac{\partial}{\partial x_-} \right) \mathbf{e} \cdot \nabla_\perp}_{=0} - \underbrace{\sum_{i=1}^3 \nabla_{\perp,i}^2}_{=(\nabla_\perp)^2} \\ &= 4 \frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} - \Delta_\perp. \end{aligned}$$

**Schritt 2:** Es wird gezeigt, daß es für alle  $y_- \in \{z_- | z \in \mathcal{O}\}$  und für alle  $\mathbf{y}_\perp \in \mathbb{R}^2$  ein  $x \in \mathcal{O}$  gibt, so daß  $x_- = y_-$  und  $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{y}_\perp$ .

Für festes  $y \in \mathcal{O}$ , wähle  $z \in \mathcal{O}$ , so daß  $(y - z) \in V_+$ . Ein solches  $z$  existiert, da  $\mathcal{O}$  konvex ist,  $V_+ \subseteq \mathcal{O}$  und somit  $z + V_+ \subseteq \mathcal{O}$ . Für beliebiges  $\mathbf{x}_\perp$ , wähle nun  $t \in \mathbb{R}$  hinreichend groß,<sup>6</sup> dann ist  $x \doteq (y_+ + t, y_-, \mathbf{x}_\perp) \in \mathcal{O}$ .

**Schritt 3:** Es wird gezeigt, daß  $\bar{E}_\mathbf{p}(x) = \omega_f(\mathbf{E}_\mathbf{p})(x)$  für  $x \in \mathcal{O}$  in Lichtkegelkoordinaten nur von  $x_-$  abhängt.

Der Basisvektor  $e_+$  in Richtung  $x_+$  ist nach Konstruktion gegeben durch  $e_+ = \underline{e}$ . Mit Lemma 5.9(1) ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{E}_\mathbf{p}}{\partial x_+}(x) = e_+^\nu \partial_\nu \bar{E}_\mathbf{p}(x) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} p^\nu \partial_\nu \bar{E}_\mathbf{p}(x) = 0, \quad x \in \mathcal{O},$$

<sup>6</sup>Einfach Rechnung zeigt

$$t > \max \left\{ 0, \frac{\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{z} + \mathbf{x}_\perp^2}{y_0 - z_0 + \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{z} - \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{y}} \right\}$$

Da  $(x - y) \in V_+$  und damit  $(2(y_0 - z_0), \mathbf{y} - \mathbf{z}) \in V_+$ , gilt

$$y_0 - z_0 + \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{z} - \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{y} = 2(2(y_0 - z_0), \mathbf{y} - \mathbf{z})_\underline{e} > 0,$$

womit  $t$  wohldefiniert ist.

d.h.  $\overline{E}_{\mathbf{p}}(x)$  ist unabhängig von  $x_+$ . Mit dem Ergebnis aus Schritt 1, zusammen mit Lemma 5.9(1), erhält man

$$0 = \square \overline{E}_{\mathbf{p}}(x) = \left( 4 \frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} - \Delta_{\perp} \right) \overline{E}_{\mathbf{p}}(x) = \Delta_{\perp} \overline{E}_{\mathbf{p}}(x).$$

Wegen des Resultats aus Schritt 2 ist  $\overline{E}_{\mathbf{p}}$  sogar eine Lösung der Laplace-Gleichung auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , die zusätzlich nach Lemma 5.9(2) beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville<sup>7</sup> ist eine solche Lösung konstant und  $\overline{E}_{\mathbf{p}}$  daher unabhängig von  $\mathbf{x}_{\perp}$ .

**Schritt 4:** Als Konsequenz aus Schritt 3 wird gezeigt, daß

$$\omega_f(\mathbf{M}_{\mathbf{e}}^m)(x), \quad x \in \mathcal{O},$$

ein Polynom in  $ex$  vom Grad kleiner oder gleich  $m$  ist. Da  $\overline{E}_{\mathbf{p}}$  nach Lemma 5.9(4) eine analytische Funktion ist, kann diese in eine Potenzreihe

$$\overline{E}_{\mathbf{p}}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu} = \sum_{m=1}^{\infty} |\mathbf{p}|^m c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu}$$

mit glatten Koeffizienten  $c_{\mu}(x)$  entwickelt werden. Mit dem Ergebnis aus Schritt 1 hängen die Funktionen  $x \mapsto c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu}$  nur von  $x_- = \underline{e}x$  ab. Anwendung von Lemma 5.11 auf diese Funktionen liefert für alle  $k \in \mathbb{N}$ , daß

$$(y^{\nu} \partial_{\nu})^k c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu} = (y^{\nu} \underline{e}_{\nu})^k \partial_0^k c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu}, \quad x \in \mathcal{O}, y \in \mathbb{R}^4.$$

Durch Entwicklung der Funktionen  $x \mapsto c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu}$  in Kugelflächenfunktionen bezüglich  $\mathbf{e}$  kann gezeigt werden (vgl. [28]), daß sich diese Differentialgleichung zu

$$\partial_0^k c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu} = 0, \quad k > m.$$

reduziert. Mit der Wahl  $y = (1, -\mathbf{e})$  ergibt sich, daß

$$\frac{d^k}{dx_-^k} c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu} = (y^{\nu} \partial_{\nu})^k c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu} = 2 \partial_0^k c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu} = 0, \quad x \in \mathcal{O}, k > m$$

und somit, daß  $c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu}$  ein Polynom in  $ex$  vom Grad  $m$  oder kleiner ist, dessen Koeffizienten Polynome in  $\mathbf{e}$  sind. Aus der Stetigkeit der Abbildung  $\omega_f(\cdot)(x)$  ist außerdem bekannt, daß

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \omega_f(\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^m)(x) = \omega_f(\mathbf{E}_{\mathbf{e}})(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu}$$

gilt, womit durch Koeffizientenvergleich

$$\omega_f(\mathbf{M}_{\mathbf{e}}^m)(x) = (-i)^m m! c_{\mu}(x) \underline{e}^{\mu}, \quad x \in \mathcal{O},$$

folgt. Zusammengefasst ergibt sich, daß jede Funktion der Form

$$x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_{\mathbf{e}}^m)(x), \quad x \in \mathcal{O},$$

<sup>7</sup>In der benutzten Version sagt der Satz von Liouville aus, daß eine beschränkte Funktion  $u \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ , die  $\Delta u = 0$  erfüllt, konstant sein muß.

ein nicht negatives 5.9(3) Polynom in  $ex$  vom Grad kleiner oder gleich  $m$  ist.

**Schritt 5:** Es gilt, daß entweder  $x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_e^m)(x)$  konstant für alle  $m \in \mathbb{N}$  ist, oder daß es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt, so daß  $x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_e^m)(x)$  ein Polynom ersten Grades in  $ex$  ist. Sei dazu  $m \in \mathbb{N}$  fest. Es wird angenommen, daß für alle  $k = 0, \dots, m-1$  die Funktion  $x \mapsto \omega(\mathbf{M}_e^k)(x)$  konstant ist. Mit Satz 5.9(3) ergibt sich

$$\begin{aligned} x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_e^m)(x) &\leq (\omega_f(\mathbf{M}_e^{m-1})(x))^{\frac{m-1}{m}} \cdot (\omega_f(\mathbf{M}_e^{2m-1})(x))^{\frac{2m-1}{m}} \\ &= C \cdot (\omega_f(\mathbf{M}_e^{2m-1})(x))^{\frac{2m-1}{m}}, \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstante  $C > 0$ . Da  $x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_e^{2m-1})(x)$  nach Schritt 4 ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $2m-1$  ist, ergibt sich

$$x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_e^m)(x) = \mathcal{O}(|x|^{2-\frac{1}{m}})$$

für große  $x \in V_+$ , wobei  $\mathcal{O}$  das übliche Landau-Symbol bezeichnet.<sup>89</sup>

Die Funktion  $x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_e^m)(x)$  ist ebenfalls ein Polynom und somit entweder konstant oder vom Grad eins. Daraus folgt die obige Behauptung.

**Schritt 6:** Sei nun  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$ ,  $\mathbf{F} \neq a \cdot \mathbf{K}$ , mit nicht trivialer Ortsabhängigkeit des Liftes. Nach Lemma 5.12 existiert dann ein  $n \in \mathbb{N}$  so, daß  $x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_e^n)(x)$  eine nichttriviale Ortsabhängigkeit hat. Desweiteren existiert nach den vorherigen Ergebnissen (Schritt 1-5) ein  $m \in \mathbb{N}$ , so daß

$$x \mapsto \omega_f(\mathbf{M}_e^m)(x) = P_f(\mathbf{e})(ex) + Q_f(\mathbf{e})$$

mit geeigneten Polynomen  $P_f, Q_f$ , wobei  $P_f \neq 0$ . Aus  $\omega_f(\mathbf{M}_e^m)(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathcal{O}$ , folgt

$$P_f(\mathbf{e})(ex) + Q_f(\mathbf{e}) \geq 0.$$

und somit  $Q_f \geq 0$ . Es ergibt sich

$$\mathcal{O} \subseteq \bigcap_{\mathbf{e}} \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid ex \geq \frac{-Q_f(\mathbf{e})}{P_f(\mathbf{e})} \right\} \subseteq \bigcap_{i=1}^4 H_{\lambda_i, \mathbf{e}_i}, \quad \lambda_i = \frac{-Q_f(\mathbf{e}_i)}{P_f(\mathbf{e}_i)}$$

für vier paarweise verschiedene  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{S}^2$ . Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. □

Es bleibt zu zeigen, daß es tatsächlich Zustände mit nicht-trivialem Kondensatanteil gibt, deren Bereich  $\mathcal{O}_\omega$  maximaler Thermalität größer ist als ein simplizialer Kegel. Daß tatsächlich Zustände existieren, die sogar  $\mathbb{R}^4$ -thermal sind, wird im nächsten Kapitel gezeigt, in dem unter anderem ein solcher Zustand, basierend auf einer Idee aus [28], explizit konstruiert wird.

<sup>8</sup>Sei  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$  ein unbeschränktes Gebiet. Für  $g \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  setze  $\mathcal{O}(g) \doteq \{ f \in \mathcal{C}(\mathcal{O}) \mid 0 \leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |\frac{f(x)}{g(x)}| < \infty \}$ . Es wird zur Vereinfachung

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty \quad \iff \quad f \in \mathcal{O}(g)$$

geschrieben.

<sup>9</sup>Ist  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom in  $n$  Variablen mit komplexen Koeffizienten mit  $\deg P = m$ , so gilt  $P(x) = \mathcal{O}(|x|^m)$



## 6. Konstruktion $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustände mit Kondensat

Dieser Abschnitt ist der expliziten Konstruktion lokaler Gleichgewichtszustände gewidmet. Ausgehend von dem Hot-Bang-Zustand in [2] wird zunächst ein einfaches Beispiel konstruiert, um dann auf allgemeine Möglichkeiten zur Konstruktion schließen zu können. Das Kapitel endet mit der Konstruktion eines nicht-trivialen  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermalen Zustands.

### 6.1. Erste Beispiele

Es wird zunächst der in [1, 2] vorgestellte quasifreie Hot-Bang-Zustand  $\omega_{\text{hb}}$  untersucht und anschließend geeignet modifiziert um ein erstes, einfaches Beispiel für einen Zustand mit nicht trivialem Kondensatanteil zu erhalten.

**Bemerkung 6.1.** Ist  $\omega$  ein quasifreier  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand mit  $\omega(\mathbb{K})(x) \equiv 0$ , so ist offensichtlich, der Zustand  $\omega_\kappa$  mit Zweipunktfunktion

$$\omega_\kappa(\phi(f)\phi(g)) \doteq \omega(\phi(f)\phi(g)) + \kappa \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1)g(x_2)$$

ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand mit  $\omega(\mathbb{K})(x) = \kappa = \text{const.}$

#### 6.1.1. Ein $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand ohne Kondensat

Für einen Parameter  $\eta > 0$  ist die Zweipunktfunktion von  $\omega_{\text{hb}}$  gegeben durch (i.S.v.D.)

$$\omega_{\text{hb}}(\phi(x_1)\phi(x_2)) \doteq \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \frac{e^{-i(x_1-x_2)p}}{1 - e^{-\frac{\eta}{2}(x_1+x_2)p}} \quad (6.1)$$

Durch Einsetzen einer Dirac-Folge  $(\delta_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{D}(V_+)$  und Rechnung analog zu Satz 4.5 ergibt sich

$$\omega_{\text{hb}}(\vartheta^\mu(x)) = \omega_{\eta x, 0}(\vartheta^\mu(x)), \quad \mu \in \mathbb{M}$$

womit  $\omega_{\text{hb}}|_{\mathcal{S}_x} = \omega_{\eta x, 0}|_{\mathcal{S}_x}$  für alle  $x \in V_+$ . Der Zustand  $\omega_{\text{hb}}$  ist somit  $\mathcal{S}_{V_+}$ -thermal und für alle zulässigen Makroobservablen  $\mathbf{F}(\beta, \kappa) = u(\beta) + m\kappa$  gilt

$$\omega_{\text{hb}}(\mathbf{F})(x) = u(\eta x).$$

Insbesondere divergiert das Quadrat der Temperatur  $\mathbb{T}^2(\beta) = (\beta^2)^{-1}$  im Zustand  $\omega_{\text{hb}}$  am Rand des Vorwärtslichtkegels, da  $\omega(\mathbb{T}^2)(x) = 1/(\eta^2 x^2)$ . Für einen Lorentzbeobachter, der sich mit konstanter Geschwindigkeit vom Ursprung wegbewegt, fällt mit der Zeit  $t$  die Temperatur wie  $1/t$  ab.

Der Lift der Teilchendichte  $\mathbf{N}_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  ist gegeben durch

$$\omega(\mathbf{N}_{\mathbf{k}})(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\eta \mathbf{k}x} - 1}, \quad x \in V_+.$$

Für einen Punkt  $a \in \partial V_+$  im Rand des Lichtkegels, divergiert die Phasenraumdichte für  $x \rightarrow a$  wenn  $a$  parallel zu  $\underline{\mathbf{k}}$  ist. Der Zustand  $\omega_{\text{hb}}$  beschreibt somit einen Fluss von Teilchen, der vom Nullpunkt des Minkowkiraumes ausgeht und sich isotrop in den Raum ausbreitet. Mit den Betrachtungen der Temperatur und der Teilchendichte ergibt sich das Bild einer heißen Explosion am Zeitnullpunkt. Dies motiviert die Bezeichnung „Hot-Heat-Bang“.

### 6.1.2. Ein einfacher $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand mit Kondensat

Die Modifikation des Zustandes  $\omega_{\text{hb}}$  geschieht durch die Addition eines speziell ausgewählten Funktionals  $K : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}$  ähnlich der Konstruktion der nicht primären, quasifreien KMS-Zustände. Sei dazu zunächst  $\xi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$  mit  $\xi \geq 0$ . Definiere  $k_\xi : V_+ \rightarrow [0, \infty)$  durch

$$k_\xi(x) \doteq \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \xi(\mathbf{p}) \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x\mathbf{p}} - 1}.$$

Da  $x \in V_+$  gilt nach dem selben Argument wie im Beweis zu Satz 4.5 für die positive Funktion  $\mathbf{p} \mapsto (|\mathbf{p}|(e^{\frac{1}{2}x\mathbf{p}} - 1))^{-1}$ , daß

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x\mathbf{p}} - 1} = 4\pi \int_0^\infty dr \frac{r}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x^2}r} - 1} = \frac{8}{3} \frac{\pi^3}{x^2} < \infty,$$

womit sie in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$  liegt. Aus der Hölderungleichung folgt wegen  $\xi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$  die Wohldefiniertheit von  $k_\xi$ .

**Lemma 6.2.** *Sei  $\xi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$  mit  $\xi \geq 0$ . Die bilineare Abbildung  $K_\xi : \mathcal{D}(V_+) \times \mathcal{D}(V_+) \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch*

$$K_\xi(f, g) \doteq \int d^4 x_1 d^4 x_2 k_{\xi, \lambda}(x_1 + x_2) f(x_1) g(x_2), \quad (6.2)$$

erfüllt folgende Eigenschaften:

1.  $K_\xi$  ist symmetrisch, d.h.  $\forall f, g \in \mathcal{D}(V_+): K_\xi(f, g) = K_\xi(g, f)$
2.  $K_\xi$  ist als Distribution in jedem Argument Lösung der Wellengleichung, d.h.

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(V_+): \square K_\xi(\cdot, f) = \square K_\xi(f, \cdot) = 0.$$

3.  $K_\xi$  ist positiv, d.h.  $\forall f \in \mathcal{D}(V_+): K_\xi(f, \bar{f}) \geq 0$ .

*Beweis.* Siehe Appendix D, Seite 85. □

Mit diesem Lemma kann nun ein  $\mathcal{S}_{V_+}$ -thermaler Zustand mit nicht-trivialem Kondensatanteil konstruiert werden.



**Satz 6.3.** Seien  $\eta > 0$  und  $\xi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$  mit  $\xi \geq 0$ . Durch die Zweipunktfunktion

$$\omega(\phi(f)\phi(g)) \doteq \omega_{\text{hb}}(\phi(f)\phi(g)) + K_\xi(f, g) \quad (6.3)$$

wird ein quasifreier Zustand auf  $\mathcal{A}(V_+)$  definiert (vgl. Gl. (6.1)). Der Zustand  $\omega$  ist  $\mathcal{S}_{V_+}$  thermal mit

$$\omega(\mathbf{N}_k)(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\eta x k} - 1}$$

und

$$\omega(\mathbf{K})(x) = k_\xi(x).$$

*Beweis.* Daß  $\omega$  ein wohldefinierter Zustand ist, folgt direkt aus Lemma 6.2 zusammen mit Bemerkung 2.3. Sei nun  $x \in V_+$  beliebig. Nach Konstruktion gilt für alle  $\zeta \in \mathbb{R}^4$  und  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{M}$ ,  $|\boldsymbol{\mu}| > 0$ , daß

$$\partial_\zeta^\boldsymbol{\mu} K_\xi(f_\zeta, g_{-\zeta}) = \partial_\zeta^\boldsymbol{\mu} K_\xi(f, g) = 0, \quad f, g \in \mathcal{D}(V_+),$$

was direkt

$$\omega(\vartheta^\boldsymbol{\mu}(x)) = \omega_{\text{hb}}(\vartheta^\boldsymbol{\mu}(x)), \quad x \in V_+,$$

impliziert. Insgesamt gilt

$$\omega|_{\mathcal{S}_x} = \omega_{\eta x, k_\xi(x)}|_{\mathcal{S}_x}, \quad x \in V_+.$$

□

## 6.2. Allgemeine $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermale Zustände

### 6.2.1. Zustände mit scharfem Wert des Kondensats und der Temperatur

Lokale Gleichgewichtszustände mit scharfem Wert des Kondensats und der Temperatur sind die Zustände, diejenigen als Referenzzustände KMS-Zustände und keine Mischzustände haben. Dies wird wie folgt formalisiert.

**Definition 6.4.** Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand.  $\omega$  heißt Zustand mit **scharfem Wert der Temperatur (des Kondensats)**, wenn es eine Funktion  $\beta : \mathcal{O} \rightarrow V_+$  (eine Abbildung  $\kappa : \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty)$ ) gibt, so daß das Maß  $\varrho_x$  in Gleichung (5.1) von der Form

$$\varrho_x = \delta_{\beta(x)} \otimes \varrho_x'' \quad (\text{bzw.} \quad \varrho_x = \varrho_x' \otimes \delta_{\kappa(x)})$$

mit  $\varrho_x'' \in \mathcal{P}_c([0, \infty))$  (bzw.  $\varrho_x' \in \mathcal{P}_c(V_+)$ ) ist.

Aus Bemerkung 4.11 ergibt sich, daß das Maß  $\varrho_x$  in (5.1) mit Hilfe der zulässigen Makroobservablen nicht von einem Maß der Form  $\varrho_x' \otimes \delta_{\kappa(x)}$  mit  $\varrho_x' \in \mathcal{P}_c(V_+)$  unterschieden werden kann, wobei

$$\kappa(x) = \omega(\mathbf{K})(x), \quad x \in \mathcal{O}.$$

Daher kann im Folgenden o.B.d.A. angenommen werden, daß ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand für das Kondensat einen scharfen Wert hat.

Wird von einem  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustand scharfe Temperatur gefordert, so ergeben sich nach einem Resultat aus [11] direkte Forderungen an die Temperaturverteilung  $\beta(x)$ .

**Satz 6.5.** Sei  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^4$  offen, konvex und enthalte einen Lichtkegel. Sei weiterhin  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand mit scharfer Temperatur. Dann ist

$$\beta(x) = \eta x + b, \quad x \in \mathcal{O}$$

mit  $\eta \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}^4$  geeignet.

*Beweis.* Der Beweis aus [11, Satz 6.1.1] kann wortwörtlich übernommen werden.  $\square$

### 6.2.2. Konstruktive Aspekte

Die Beobachtungen in Abschnitt 6.1.2, vor allem die Eigenschaften des Funktionals  $K_{\xi}$ , motivieren folgende Definition.

**Definition 6.6.** Sei  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  offen. Eine bilineare Abbildung  $K : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Kondensatfunktional** (auf  $\mathcal{O}$ ), wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(K1)  $K$  ist symmetrisch, d.h.  $\forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) : K(f, g) = K(g, f)$ .

(K2)  $K$  ist positiv, d.h.  $\forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) : K(f, \bar{f}) \geq 0$ .

(K3)  $K$  ist als Distribution in jedem Argument Lösung der Wellengleichung, d.h.  $\forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) : \square K(\cdot, f) = \square K(f, \cdot) = 0$ .

(K4) Sei  $x \in \mathcal{O}$  und  $(\delta_x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ . Dann existiert

$$k(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} K(\delta_x^{(n)}, \delta_x^{(n)}), \quad x \in \mathcal{O},$$

und es gilt  $k \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$  und  $k \geq 0$ .

(K5) Für alle  $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$  und alle  $\zeta \in \mathbb{R}^4$  mit  $\zeta^2 < 0$  gilt

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\mu} K(f_{\zeta}, g_{-\zeta}) = 0$$

für alle Multiindices  $\mu$  mit  $|\mu| > 0$ .

Die Eigenschaften (K1-3) garantieren, daß, wenn  $\omega$  ein Zustand auf  $\mathcal{A}(\mathcal{O})$  ist, durch die Zweipunktfunktion

$$\hat{\omega}(\phi(f)\phi(g)) \doteq \omega(\phi(f)\phi(g)) + K(f, g), \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}),$$

immer noch ein Zustand definiert wird (vgl. Bem. 2.3). Durch (K4) wird sicher gestellt, daß wenn der Erwartungswert von  $\vartheta^{\mu}(x)$  in  $\omega$  für alle  $x \in \mathcal{O}$  existiert, dies auch für  $\hat{\omega}$  der Fall ist. Die Eigenschaft (K5) ermöglicht es zu zeigen, daß aus einer  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität von  $\omega$  die  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität von  $\hat{\omega}$  folgt.

**Satz 6.7.** Seien  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^4$  offen, so daß  $\mathcal{O} \doteq \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ . Sei weiterhin  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_1}$ -thermaler Zustand und  $K$  ein Kondensatfunktional auf  $\mathcal{O}_2$ . Dann wird durch die Zweipunktfunktion

$$\hat{\omega}(\phi(f)\phi(g)) \doteq \omega(\phi(f)\phi(g)) + K(f, g)$$

ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand mit

$$\hat{\omega}(K)(x) = \omega(K)(x) + k(x)$$

definiert.

*Beweis.* Nach den vorausgegangenen Bemerkungen folgt aus (K1-3) die Wohldefiniertheit von  $\hat{\omega}$ . Zusätzlich folgt aus (K4) die Existenz des Erwartungswertes der lokalthermischen Observablen  $\vartheta^{\mu}(x)$  für alle  $x \in \mathcal{O}$ . Für  $\omega$  kann o.B.d.A. angenommen werden, daß eine Funktion  $\kappa : \mathcal{O}_1 \rightarrow [0, \infty)$  existiert, so daß

$$\varrho_x = \varrho'_x \otimes \delta_{\kappa(x)}, \quad \varrho'_x \in \mathcal{P}_c(V_+).$$

Definiere  $\sigma_x \in \mathcal{P}_c(V_+ \times [0, \infty))$  für  $x \in \mathcal{O}$  durch

$$\sigma_x \doteq \varrho'_x \otimes \delta_{\kappa(x)+k(x)},$$

wobei  $k : \mathcal{O}_2 \rightarrow [0, \infty)$  die Funktion in (K4) ist. Für  $|\boldsymbol{\mu}| > 0$  ergibt sich aus (K5), daß

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(\vartheta^{\mu}(x)) &= \omega(\vartheta^{\mu}(x)) = \omega_{\varrho_x}(\Theta^{\mu})(x) = \int d(\varrho'_x \otimes \delta_{\kappa(x)})(\beta, \kappa') \Theta^{\mu}(\beta) \\ &= \int d\varrho'_x(\beta) \Theta^{\mu}(\beta) = \int d(\varrho'_x \otimes \delta_{\kappa(x)+k(x)})(\beta, \kappa') \Theta^{\mu}(\beta) \\ &= \int d\sigma_x(\beta, \kappa) \Theta^{\mu}(\beta) = \omega_{\sigma_x}(\Theta^{\mu})(x). \end{aligned}$$

Zusätzlich ist dann mit (K4)

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(\phi^2 : (x)) &= \omega(\phi^2 : (x)) + k(x) = \int d(\varrho'_x \otimes \delta_{\kappa(x)})(\beta, \kappa') \left( \frac{1}{12\beta^2} + \kappa' \right) + k(x) \\ &= \int d\varrho'_x(\beta) \left( \frac{1}{12\beta^2} + \kappa(x) + k(x) \right) = \int d(\varrho'_x \otimes \delta_{\kappa(x)+k(x)})(\beta, \kappa') \left( \frac{1}{12\beta^2} + \kappa' \right) \\ &= \int d\sigma_x(\beta, \kappa') \Theta(\beta, \kappa') = \omega_{\sigma_x}(\phi^2 : (x)) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$\hat{\omega}|_{\mathcal{S}_x} = \omega_{\sigma_x}|_{\mathcal{S}_x}.$$

□

Mit diesem Satz ist es nun ohne weiteres möglich,  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustände nach Belieben mit einem Kondensatfunktional zu modifizieren, das Kondensat entkoppelt daher vollständig von den temperaturabhängigen Freiheitsgeraden. Für die allgemeine Konstruktion ist es daher sinnvoll sich zunächst einen Zustand zu konstruieren, der keinen Kondensatanteil hat.

Sei  $\omega$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand auf einem konvexen Gebiet  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^4$  mit  $\omega(\mathbf{K})(x) = 0$  für alle  $x \in \mathcal{O}$ . Definiere die Funktion  $\bar{N}_{\mathbf{p}} : \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty)$  durch

$$\bar{N}_{\mathbf{p}}(x) \doteq \omega(\mathbf{N}_{\mathbf{p}})(x), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

und das quasifreie Funktional  $\varphi$  auf  $\mathcal{A}(\mathcal{O})$  durch die Zweipunktfunktion

$$\begin{aligned} \varphi(\phi(f)\phi(g)) &= \omega_{\infty}(\phi(f)\phi(g)) \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{N}_{\mathbf{p}}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cos((x_1-x_2)\underline{\mathbf{p}}) f(x_1)g(x_2). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ein Ergebnis aus [12] (ähnliche Resultate finden sich in [10, 11]), das ohne Beweis angegeben wird, ist folgender Satz:

**Satz 6.8.** *Wird durch das Funktional  $\varphi$  ein wohldefinierter Zustand auf  $\mathcal{A}(\mathcal{O})$  gegeben, so ist  $\varphi$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand, der für alle  $x \in \mathcal{O}$  auf  $\mathcal{S}_x$  mit  $\omega$  übereinstimmt.*

Ein natürlicher Kandidat für einen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand ist somit ein Funktional  $\varphi$  der Form (6.4), wobei die Funktion  $\bar{N}_p$  durch eine beliebige Funktion  $N : \mathbb{R}_3 \times \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty)$  ersetzt wird, die im Sinne von Distributionen

$$\underline{p}' \partial_\nu N(\underline{p}, x) = 0 \quad \text{und} \quad \square_x N(\underline{p}, x) = 0$$

für alle  $\underline{p} \in \mathbb{R}^3$  und  $x \in \mathcal{O}$  erfüllt. Jedes auf diese Art konstruierte Funktional muß dann im einzelnen auf Wohldefiniertheit und  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität überprüft werden. Hierbei ist vor allem die Positivität entscheidend und auch am schwierigsten zu zeigen.

Eine ähnliche Vorgehensweise kann für das Kondensatfunktional gewählt werden. Gegeben eine positive schwache Lösung der Wellengleichung  $k : \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty)$ , betrachte das Funktional

$$K(f, g) = \int d^4x_1 d^4x_2 k\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) f(x_1)g(x_2), \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Es ist einfach zu zeigen (fast wortwörtlich wie in Lemma 6.2), daß  $K$  die Bedingungen (K1) und (K3) erfüllt. Stetigkeit von  $k$  ist hinreichend für (K4) und (K5). Im allgemeinen ist es jedoch sehr schwierig Positivität (K2) zu erreichen. Bislang sind die Beispiele in Abschnitt 6.1.2 und im folgenden Abschnitt die Einzigen, die konstruiert werden konnten.

### 6.3. Ein nicht-trivialer $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermaler Zustand

Als letztes soll nun ein Beispiel für einen  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermalen Zustand konstruiert werden. Ausgehend von [28] soll nun ein solcher konstruiert werden. Betrachte für ein kompakt getragenes Maß  $\sigma \in \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^3)$  die Funktion  $k_\sigma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$k_\sigma(x) \doteq \int d\sigma(\underline{p}) e^{px}.$$

Die Funktion ist offensichtlich wohldefiniert und positiv. Analog zu Abschnitt 6.1.2 wird die bilineare Abbildung  $K_\sigma : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$K_\sigma(f, g) \doteq \int d^4x_1 d^4x_2 k_\sigma\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) f(x_1)g(x_2) \quad (6.5)$$

betrachtet. Da  $(\underline{p}, x) \mapsto \exp(px)$  stetig ist und  $\sigma$ ,  $g$  und  $f$  kompakten Träger haben, ist auch  $K_\sigma$  wohldefiniert. Es ergibt sich folgender Satz.

**Satz 6.9.** *Die bilineare Abbildung  $K_\sigma$ , gegeben durch (6.5), ist ein Kondensatfunktional.*

*Beweis.* Die Symmetrie (K1) ist offensichtlich. Für die Positivität (K2) sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  beliebig. Es folgt

$$\begin{aligned} K_\sigma(f, \bar{f}) &= \int d^4x_1 d^4x_2 \int d\sigma(\underline{p}) e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\underline{p}} f(x_1)\bar{f}(x_2) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int d\sigma(\underline{p}) \int d^4x_1 d^4x_2 e^{\frac{1}{2}x_1\underline{p}} f(x_1) e^{\frac{1}{2}x_2\underline{p}} \bar{f}(x_2) \\ &= \int d\sigma(\underline{p}) \left( \int d^4x e^{\frac{1}{2}x\underline{p}} f(x) \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen  $\square_x \exp(px) = 0$  folgt (K3) durch zweimalige partielle Integration. Sei nun für  $x \in \mathbb{R}^4$  analog zum Beweis von Satz 4.2  $(\delta_x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  mit  $\delta_x^{(n)} \rightarrow \delta_x$  in der Topologie von  $\mathcal{D}^*$ . Es zeigt sich für raumartige  $\zeta \in \mathbb{R}^4$ , daß

$$\begin{aligned} K_\sigma(\delta_{x,\zeta}^{(n)}, \delta_{x,-\zeta}^{(n)}) &= \int d\sigma(\mathbf{p}) \int d^4x_1 d^4x_2 e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\underline{p}} \delta_x^{(n)}(x_1 - \zeta) \delta_x^{(n)}(x_2 + \zeta) \\ &= \int d\sigma(\mathbf{p}) \int d^4x_1 d^4x_2 e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\underline{p}} \delta_x^{(n)}(x_1) \delta_x^{(n)}(x_2) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int d\sigma(\mathbf{p}) e^{x\underline{p}} = k_\sigma(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Da  $k_\sigma(x)$  unabhängig von  $\zeta$  ist, folgen (K4) und (K5).  $\square$

Mit Satz 6.7 ist es nun möglich den gewünschten Zustand zu konstruieren, in dem ein bekannter  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermaler Zustand modifiziert wird. Aus Satz 5.10 folgt, daß ein  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermaler Zustand für alle temperaturabhängigen Makroobservablen ein triviales Raumzeitverhalten hat. Es muß daher ein Referenzzustand als Ausgangspunkt gewählt werden.

**Korollar 6.10.** *Sei  $\omega_\varrho \in \mathcal{C}$  ein Referenzzustand und  $\sigma \in \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^3)$  ein kompakt getragenes Maß. Dann ist der quasifreie Zustand  $\hat{\omega} \in \mathcal{A}_{+,1}^*$ , definiert durch die Zweipunktfunktion*

$$\hat{\omega}(\phi(f)\phi(g)) \doteq \omega_\varrho(\phi(f)\phi(g)) + K_\sigma(f, g),$$

ein  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermaler Zustand mit

$$\hat{\omega}(\mathbb{K})(x) = \int d\rho(\beta, \kappa) \kappa + k_\sigma(x).$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus Satz 6.7, da  $K_\sigma$  ein Kondensatfunktional ist.  $\square$



## 7. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das in [1] vorgestellte Verfahren zur Behandlung von Zuständen, die nur lokal im Gleichgewicht sind, auf das freie, masselose, skalare Feld angewandt. Dazu wurde die Untersuchung in [2] um Referenzzustände erweitert, die Bosekondensate beschreiben.

In einem ersten Schritt konnte gezeigt werden, daß die nicht extremalen, homogenen, isotropen und eichinvarianten KMS-Zustände zum Temperaturvektor  $\beta \in V_+$  durch die Zweipunktfunktion

$$\omega_{\beta,\kappa}(\phi(f)\phi(g)) = 2\pi \int d^4p \varepsilon(p_0)\delta(p^2) \frac{\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta p}} + \kappa \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1)g(x_2)$$

gegeben sind. Dabei ist  $\kappa > 0$  ein zusätzlicher Parameter, der als Dichte der Teilchen mit Impuls null interpretiert wird (Einstein-Bose-Kondensat). Entsprechend wurden die Referenzzustände gegenüber [2] erweitert.

Mit der Wahl von  $\mathcal{S}_x$  als den Raum, der von  $\mathbf{1}$  und den balancierten Ableitungen der normalgeordneten Quadrate  $\partial^\mu: \phi^2: (x)$  aufgespannt wird, wurden diejenigen Makroobservablen  $\mathcal{T}_{\text{adm}} \subseteq \mathcal{C}(V_+ \times [0, \infty))$  bestimmt, deren Erwartungswert in den  $\mathcal{S}_x$ -thermalen Zuständen bestimmt werden kann. Es zeigt sich, daß jedes  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  von der Form

$$\mathbf{F}(\beta, \kappa) = u(\beta) + m \cdot \kappa, \quad u \in \mathcal{W}(V_+), \quad m \in \mathbb{C},$$

ist. Weiterhin konnte für die zulässige Makroobservable  $\mathbf{K}(\beta, \kappa) = \kappa$  explizit eine entsprechende zentrale Folge konstruiert werden.

In einem nächsten Schritt wurde analog zu [1] das Konzept von lokalem Gleichgewicht auf offene Gebiete  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  erweitert. Mit den in [2] genutzten Methoden konnten Differentialgleichungen bestimmt werden, die das Raumzeitverhalten der Makroobservablen in  $\mathcal{O}$  beschreibt. Es zeigt sich, daß die Teilchendichte  $\mathbf{N}_{\mathbf{k}}$  zum Impuls  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  die stoßfreie Boltzmann-Gleichung

$$\underline{k}^\nu \partial_\nu \omega(\mathbf{N}_{\mathbf{k}})(x) = 0$$

erfüllen muß. Zusätzlich ergibt sich für alle Makroobservablen  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  die zusätzliche Einschränkung

$$\square \omega(\mathbf{F})(x) = 0,$$

die dynamischen Ursprungs ist. Für das Kondensat  $\mathbf{K}$  konnten außer  $\square \omega(\mathbf{K})(x) = 0$  keine weiteren Gleichungen gefunden werden.

Ein zentrales Ergebnis in [2] ist das Singularitätentheorem. Enthält  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^4$  einen Lichtkegel und hat der  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustand  $\omega$  für eine Makroobservable  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  einen nicht-trivialen

Lift, dann ist  $\mathcal{O}$  in einem simplizialen Kegel enthalten. In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, daß es für den Fall nicht extremaler Referenzzustände eine weitere Alternative gibt. Ist ein Zustand auf einem Gebiet  $\mathcal{O}$ , das größer als ein simplizialer Kegel ist,  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal mit nicht-trivial Raumzeitverhalten einer Makroobservablen, dann ist diese Makroobservable zwingend ein Vielfaches des Kondensats.

Im letzten Kapitel wurden  $\mathcal{S}_{V_{\pm}}$ -thermale Zustände (Hot-Bang-State) mit und ohne Kondensat konstruiert. Zusätzlich konnte gezeigt werden, daß jeder  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustand ohne Kondensatanteil durch ein geeignetes Funktional so modifiziert werden kann, daß durch ihn lokale Kondensate beschrieben werden. Diese Konstruktion zeigt, daß das Kondensat von der Teilchendichte vollständig entkoppelt, da die Bedingungen an das Kondensat (vgl. Def. 6.6) in keinsten Weise Bezug auf die von der Temperatur abhängigen Größen nehmen. Dies zeigt sich auch darin, daß auf konvexen Mengen  $\mathcal{O}$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand  $\omega$  durch Messung in den Observablen  $\mathcal{S}_x$  nicht von einem Zustand der Form

$$\begin{aligned} \omega(\phi(f)\phi(g)) &= \omega_{\infty}(\phi(f)\phi(g)) \\ &+ \underbrace{\int \frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{N}_{\mathbf{p}}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cos((x_1-x_2)\underline{p}) f(x_1)g(x_2)}_{\text{temperaturabhängiger Anteil}} \\ &+ \underbrace{\int d^4x_1 d^4x_2 k\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) f(x_1)g(x_2)}_{\text{Kondensatanteil}} \end{aligned}$$

zu unterscheiden ist. Mit dieser allgemeinen Konstruktion konnte in einem letzten Schritt ein nicht-trivialer  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermaler Zustand konstruiert werden.

## 7.1. Weitere Fragestellungen

Es werden im Folgenden einige Probleme aufgelistet, die leider nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit betrachtet werden konnten.

### Massive Bosonen

In einem nächsten Schritt wäre es interessant, die Ideen aus dieser Arbeit auf massive Bosonen zu übertragen (vgl. [12]). Da der Status von eines Singularitätentheorems in diesem Modell bereits geklärt ist, interessiert hier vor allem die Frage, ob das Kondensat von der Teilchendichte wie im masselosen Fall vollständig entkoppelt.

### Kondensate auf gekrümmten Raumzeiten

In der statistischen Mechanik auf gekrümmten Raumzeiten ist es im allgemeinen nicht möglich, globales thermisches Gleichgewicht zu beschreiben,<sup>1</sup> es ist nötig ein geeignetes Konzept für lokales Gleichgewicht zu entwickeln.

<sup>1</sup>Auf genrischen gekrümmten Raumzeiten sind keine (globalen) zeitartigen Isometrien vorhanden, die eine Definition von KMS-Zuständen erlaubten.



Im Rahmen der lokal-kovarianten Quantenfeldtheorie<sup>2</sup> ist es möglich die Methoden aus [1] auf gekrümmte Raumzeiten zu verallgemeinern, indem Zustände auf einer gekrümmten Raumzeit lokal mit dem Minkowskiraum verglichen werden (vgl. [31, 32]).

In einer ersten Arbeit zu dieser Herangehensweise wurde das masselose skalare Feld auf dem de-Sitter-Raum untersucht (vgl. [32]). Da der de-Sitter-Raum maximal symmetrisch ist, existieren KMS-Zustände, womit das neue Konzept von thermischen Zuständen auf Konsistenz überprüft werden kann. Dies ist für den de-Sitter-Raum geschehen, die Verallgemeinerung von [1] scheint ein vielversprechender Ansatz zur statistischen Mechanik auf gekrümmten Raumzeiten. Zur Zeit sind entsprechende Rechnungen für den Anti-de-Sitter-Raum und das Einsteinuniversum (vgl. [33]), sowie Existenzbeweise für lokale thermische Zustände auf beliebigen global hyperbolischen Raumzeiten in Arbeit.

Es wäre interessant, in diesem Rahmen zu untersuchen, ob durch die Erweiterung auf Zustände mit Kondensat zusätzlich Informationen über thermische Zustände auf gekrümmten Raumzeiten gewonnen werden können.

### Mathematische Fragestellungen

Von eher persönlichem Interesse ist Frage nach der mathematischen Klassifikation der Kondensatfunktionale (vgl. Def. 6.6). Es erweist sich in der expliziten Konstruktion dieser Funktionale als sehr schwierig, sowohl die Positivität (K2), als auch das Verschwinden der balancierten Ableitungen (K5) zu realisieren. Die in dieser Arbeit vorgestellten Lösungen (vgl. (6.2) und (6.5)) sind die Einzigen, die bislang (mit Hilfe von [28]) konstruiert werden konnten. Es interessiert daher, welche weiteren Lösungen es gibt und ob es allgemeine Möglichkeiten zu deren Charakterisierung gibt.

---

<sup>2</sup>Neben der Originalarbeit [29] gibt es eine sehr schöne Einführung in die lokal-kovariante QFT in den ersten Kapiteln von [30].



# Appendices



## A. Beweise der Lemmata in Kapitel 3

**Lemma A.1.** Sei  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  bilinear und translationsinvariant, d.h.

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \forall a \in \mathbb{R}^4: T(f, g) = T(f_a, g_a).$$

Dann existiert  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)^*$ , so daß

$$T(f, g) = \psi(\underline{f} * g). \tag{A.1}$$

Hierbei ist  $\underline{f}(x) \doteq f(-x)$ .

*Beweis.* Es wird die Multiindex-Schreibweise aus Kapitel 4 benutzt. Nach dem Satz von Kern (vgl. [14, Thm. V.12]) existiert eine eindeutig bestimmte Distribution  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^8)$  mit  $T(f, g) = \Psi(f \otimes g)$  und nach dem Regularitätssatz für temperierte Distributionen (vgl. [14, Thm. V.10]) existieren eine stetige, polynomial beschränkte Funktion  $k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^8)$  und zwei Indizes  $\mu, \nu \in \mathbb{M}$ , so daß

$$T(f, g) = \Psi(f \otimes g) = (-1)^{|\mu|+|\nu|} \int d^4x_1 d^4x_2 k(x_1, x_2) \partial_{x_1}^\mu f(x_1) \partial_{x_2}^\nu g(x_2), \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4).$$

Da  $T$  translationsinvariant ist, gilt

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 k(x_1, x_2) \partial_{x_1}^\mu f(x_1) \partial_{x_2}^\nu g(x_2) \\ & \stackrel{!}{=} \int d^4x_1 d^4x_2 k(x_1, x_2) \partial_{x_1}^\mu f(x_1 - a) \partial_{x_2}^\nu g(x_2 - a) \\ & = \int d^4x_1 d^4x_2 k(x_1 + a, x_2 + a) \partial_{x_1}^\mu f(x_1) \partial_{x_2}^\nu g(x_2) \end{aligned}$$

für alle  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  und für alle  $a \in \mathbb{R}^4$ . Da  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  beliebig sind, impliziert dies

$$k(x_1, x_2) = k(x_1 + a, x_2 + a)$$

für alle  $a \in \mathbb{R}^4$ . Nach Standardresultaten der Analysis<sup>1</sup> folgt daraus die Existenz einer Funktion  $\hat{k} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^4)$  mit

$$k(x_1, x_2) = \hat{k}(x_2 - x_1).$$

Definiere nun  $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$  durch

$$\psi(f) \doteq (-1)^{|\nu|} \int d^4x \hat{k}(x) \partial^{\mu\nu} f(x).$$

<sup>1</sup>Ein sehr eleganter Beweis findet sich in [34, Lemma C.2]

Nachrechnen zeigt

$$\begin{aligned}
\psi(\underline{f} * g) &= (-1)^{|\nu|} \int d^4x \hat{k}(x) \partial^{\mu\nu} (\underline{f} * g)(x) = (-1)^{|\nu|} \int d^4x \hat{k}(x) (\partial^\mu \underline{f} * \partial^\nu g)(x) \\
&= (-1)^{|\nu|} \int d^4x \hat{k}(x) \int d^4y \partial_y^\mu \underline{f}(x-y) \partial_y^\nu g(y) = (-1)^{|\nu|} \int d^4x \int d^4y \hat{k}(x) \partial_y^\mu f(y-x) \partial_y^\nu g(y) \\
&= (-1)^{|\mu|+|\nu|} \int d^4x \int d^4y \hat{k}(x) \partial_x^\mu f(y-x) \partial_y^\nu g(y) \\
&= (-1)^{|\mu|+|\nu|} \int d^4x_1 d^4x_2 \hat{k}(x_2-x_1) \partial_{x_1}^\mu f(x_1) \partial_{x_2}^\nu g(x_2) = T(f, g).
\end{aligned}$$

□

**Lemma A.2.** Sei  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$  bilinear und translationsinvariant und  $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^4)$  die dazugehörige Distribution wie in Lemma 3.8. Gilt  $\square T(\cdot, g) = 0$  für alle  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ , so ist

$$\square \psi = 0.$$

*Beweis.* Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  beliebig und  $(\delta_0^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ . Dann konvergiert  $f * \delta_0^{(n)}$  gegen  $f$  und folglich  $\psi(f * \delta_0^{(n)})$  gegen  $\psi(f)$ . Somit gilt

$$(\square \psi)(f) = \psi(\square f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi((\square f) * \delta^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\square f, \delta^{(n)}) = 0.$$

□

**Lemma A.3.** Sei  $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^3)$  mit  $\Delta \psi = 0$ . Gilt für alle  $R \in SO(3)$ , daß  $V(R)\psi = \psi$  so ist  $\psi$  konstant.

*Beweis.* Fouriertransformation der Gleichung  $\Delta \psi = 0$  führt auf

$$-\mathbf{k}^2 \tilde{\psi} = 0.$$

Da die Abbildung  $k \mapsto \mathbf{k}^2$  eine doppelte Nullstelle bei  $\mathbf{k} = 0$  hat, sind nach dem Satz von Schwartz (vgl. [14, Thm. V.11]) die Lösungen dieser Differentialgleichung von der Form

$$\tilde{\psi} = a_0 \cdot \delta + \mathbf{a} \cdot \nabla \delta.$$

mit Koeffizienten  $(a_0, \mathbf{a}) \in \mathbb{C}^4$ . Aus  $V(R)\psi = \psi$  und somit  $V(R)\tilde{\psi} = \tilde{\psi}$  folgt direkt für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , daß

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \delta(f) = -\mathbf{a} \cdot \nabla f|_{\mathbf{k}=0} \stackrel{!}{=} -\mathbf{a} \cdot \nabla (f \circ R^{-1})|_{\mathbf{k}=0} = -\mathbf{a} \cdot R^{-1} \cdot \nabla f|_{\mathbf{k}=0},$$

und damit, daß  $\mathbf{a} \equiv 0$ . Rücktransformation liefert das gewünschte Ergebnis. □

## B. Beweise in Kapitel 4

### B.1. Ausführlicher Beweis von Satz 4.8

Ziel dieses Abschnitts ist es den folgenden Satz zu beweisen.

**Satz B.1.** Sei  $u \in \mathscr{W}(V_+)$  und  $B \subseteq V_+$  kompakt. Für alle  $\varepsilon > 0$  existieren dann zwei *endliche* Familien von Konstanten  $\{c_\mu \in \mathbb{C} \mid \mu \in \mathbb{M}, 0 < |\mu| \leq N\}$  und  $\{d_\mu \in \mathbb{C} \mid \mu \in \mathbb{M}, 0 < |\mu| \leq M\}$ , so daß

$$p'_B \left( u - \sum_{n=1}^N c_{\mu_{2n}} \Theta^{\mu_{2n}} \right) < \varepsilon \quad \text{und} \quad p'_B \left( \partial^\nu u - \sum_{m=1}^M d_{\mu_{2m-1}} \Theta^{\nu \mu_{2m-1}} \right) < \varepsilon.$$

Bevor zum eigentlichen Beweis übergegangen wird, werden einige vorläufige Resultate benötigt. Da jede kompakte Teilmenge  $B \subset V_+$  in einem hinreichend großen Doppelkegel enthalten ist, kann die Untersuchung auf die kompakten Doppelkegel  $B_\alpha \subset V_+$ , gegeben durch

$$B_\alpha \doteq ((\alpha, \mathbf{0}) + \bar{V}_+) \cap ((\alpha^{-1}, \mathbf{0}) - \bar{V}_+), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{B.1})$$

reduziert werden. Einfache Rechnung (vgl. Abb. B.1) liefert als ein erstes Ergebnis die Abschätzungen

$$\alpha^2 \leq x^2 \leq \alpha^{-2}, \quad x \in B_\alpha \quad (\text{B.2})$$

$$\alpha |\mathbf{l}| \leq \underline{l}x \leq \alpha^{-1} |\mathbf{l}|, \quad x \in B_\alpha, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad (\text{B.3})$$

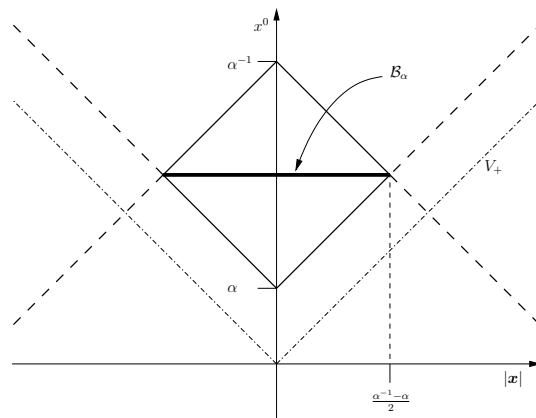


Abbildung B.1.: Die Abbildung skizziert den Doppelkegel  $B_\alpha$  und seine Basis  $\mathcal{B}_\alpha$ .

Als technisches Hilfsmittel wird auf  $V_+$  zusätzlich eine Involution  $\iota : V_+ \rightarrow V_+$  durch  $\iota(x) \doteq x/x^2$  definiert.

**Lemma B.2.** *Alle Doppelkegel  $B_\alpha \subset V_+$  sind invariant unter der Involution  $\iota$ , d.h.  $\iota(B_\alpha) = B_\alpha$ .*

*Beweis.* Sei  $y \in B_\alpha$  beliebig. Dann existiert  $x \in \bar{V}_+$  mit  $y = (\alpha, \mathbf{0}) + x$ .

$$\begin{aligned} \iota(y) &= \iota((\alpha, \mathbf{0}) + (x_0, \mathbf{x})) = \frac{(\alpha, \mathbf{0}) + (x_0, \mathbf{x})}{((\alpha, \mathbf{0}) + (x_0, \mathbf{x}))^2} = (\alpha^{-1}, \mathbf{0}) - (\alpha^{-1}, \mathbf{0}) + \frac{(\alpha, \mathbf{0}) + (x_0, \mathbf{x})}{((\alpha, \mathbf{0}) + (x_0, \mathbf{x}))^2} \\ &= (\alpha^{-1}, \mathbf{0}) - \frac{(x^2 \alpha^{-1}, \mathbf{0}) + (x_0, -\mathbf{x})}{((\alpha, \mathbf{0}) + (x_0, \mathbf{x}))^2}, \end{aligned}$$

und da

$$((x^2 \alpha^{-1}, \mathbf{0}) + (x_0, -\mathbf{x}))^2 = x^2(1 + \alpha^{-2}) + 2x^2 \alpha^{-1} x_0 \geq 0,$$

ist  $\iota(y) \in ((\alpha^{-1}, \mathbf{0}) - \bar{V}_+)$ . Gleiche Rechnung mit  $y = (\alpha^{-1}, \mathbf{0}) - x'$ ,  $x' \in V_+$  zeigt  $\iota(y) \in ((\alpha, \mathbf{0}) + \bar{V}_+)$ . Damit folgt

$$\iota(B_\alpha) \subseteq B_\alpha.$$

Die andere Inklusion direkt, da  $\iota$  ein Involution ist.  $\square$

Die Involution  $\iota$  induziert in natürlicher Weise eine Involution auf dem Raum der glatten Lösungen der Wellengleichung  $\mathscr{W}(V_+)$ , indem  $\hat{\iota} : \mathscr{W}(V_+) \rightarrow \mathscr{W}(V_+)$  durch

$$\hat{\iota}(u)(x) \doteq \iota(x)^2 u(\iota(x)), \quad u \in \mathscr{W}(V_+), \quad (\text{B.4})$$

definiert wird. Auf den Doppelkegeln  $B_\alpha$  finden sich die folgenden Abschätzungen.

**Lemma B.3.** *Für die Involution  $\hat{\iota}$  auf  $\mathscr{W}(V_+)$  und die in (4.7) eingeführte Halbnorm  $p'_{B_\alpha}$  auf  $\mathscr{C}(V_+)$  gilt*

$$p'_{B_\alpha}(\hat{\iota}(u)) \leq \alpha^{-2} p'_{B_\alpha}(u) \quad \text{und} \quad p'_{B_\alpha}(\partial^\nu \hat{\iota}(u)) \leq 2\alpha^{-3} p'_{B_\alpha}(u) + 3\alpha^{-8} \sum_{\mu=0}^3 p'_{B_\alpha}(\partial^\mu u). \quad (\text{B.5})$$

*Beweis.* Aus der Invarianz von  $B_\alpha$  unter  $\iota$  ergibt sich

$$\begin{aligned} p'_{B_\alpha}(\hat{\iota}(u)) &= \sup_{x \in B_\alpha} |\iota(x)^2 u(\iota(x))| \leq \sup_{x \in B_\alpha} |\iota(x)^2| \sup_{x \in B_\alpha} |u(\iota(x))| \\ &= \sup_{x \in B_\alpha} \left| \frac{1}{x^2} \right| \sup_{x \in B_\alpha} |u(x)| \stackrel{(\text{B.2})}{\leq} \alpha^{-2} p'_{B_\alpha}(u). \end{aligned}$$

Mit diesem Resultat findet sich zusätzlich, unter Ausnutzung der Kettenregel, daß

$$\begin{aligned} p'_{B_\alpha}(\partial^\nu \hat{\iota}(u)) &= \sup_{x \in B_\alpha} |(\partial^\nu \iota(x)^2) u(\iota(x)) + \iota(x)^2 (\partial_\mu u)(\iota(x)) (\partial^\nu \iota^\mu)(x)| \\ &= \sup_{x \in B_\alpha} \left| \frac{-2x^\nu}{x^2} u(\iota(x)) + \frac{1}{x^2} \frac{x^2 \delta_\nu^\mu - 2x_\nu x^\mu}{(x^2)^2} (\partial_\mu u)(\iota(x)) \right| \\ &\leq 2 \sup_{x \in B_\alpha} \left| \frac{x_0}{x^2} \right| p'_{B_\alpha}(u) + \sup_{x \in B_\alpha} \left| \frac{1}{(x^2)^2} \right| p'_{B_\alpha}(\partial_\nu u) + 2 \sup_{x \in B_\alpha} \left| \frac{x_\nu x^\mu}{(x^2)^3} \right| p'_{B_\alpha}(\partial_\mu u) \\ &\leq \alpha^{-3} p'_{B_\alpha}(u) + \alpha^{-4} p'_{B_\alpha}(\partial_\nu u) + 2 \sup_{x \in B_\alpha} \left| \frac{(x_0)^2}{(x^2)^3} \right| \sum_{\mu=0}^3 p'_{B_\alpha}(\partial_\mu u) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \alpha^{-3} p'_{B_\alpha}(u) + \alpha^{-8} \sum_{\nu=0}^3 p'_{B_\alpha}(\partial_\nu u) + 2 \sup_{x \in B_\alpha} \left| \frac{(x_0)^2}{(x^2)^3} \right| \sum_{\mu=0}^3 p'_{B_\alpha}(\partial_\mu u) \\
&\leq 2\alpha^{-3} p'_{B_\alpha}(u) + 3\alpha^{-8} \sum_{\mu=0}^3 p'_{B_\alpha}(\partial^\mu u).
\end{aligned}$$

□

Als nächstes wird eine spezielle Darstellung von Elementen in  $\mathscr{W}(V_+)$  auf den Doppelkegeln benötigt. Es zeigt sich, daß für jedes  $u \in \mathscr{W}(V_+)$  eine Funktion  $\hat{u} \in \mathscr{W}(\mathbb{R}^4)$  existiert, die auf  $B_\alpha$  mit  $u$  übereinstimmt.

**Lemma B.4.** *Sei  $u \in \mathscr{W}(V_+)$ . Dann existiert für alle kompakten Doppelkegel  $B_\alpha \subset V_+$  eine Funktion  $\hat{u} \in \mathscr{W}(\mathbb{R}^4)$ , so daß  $\hat{u}|_B = u|_B$ .*

*Insbesondere gibt es Funktionen  $\xi_\pm \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$ , so daß*

$$\hat{u}(x) = \int d^3 \mathbf{k} (\xi_+(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} + \xi_-(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}) \quad (\text{B.6})$$

*Beweis.* Die Basis  $\mathcal{B}$  des Doppelkegels  $B$  (vgl. Gl.(B.1) und Abb.B.1) ist gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \left| x^0 = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}, |\mathbf{x}| \leq \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} \right. \right\}$$

Es wird nun ausgenutzt, daß zwei glatte Lösungen der homogenen Wellengleichung, die auf der Basis eines Doppelkegels die gleichen Anfangsdaten haben, auf dem Kegel übereinstimmen (vgl. [35]). Für  $\varepsilon < \text{dist}(\mathcal{B}, \partial V_+)$  wähle  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  mit

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} u\left(\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}, \mathbf{x}\right) & |\mathbf{x}| \leq \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} + \varepsilon \end{cases}$$

und

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \partial_0 u\left(\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}, \mathbf{x}\right) & |\mathbf{x}| \leq \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} + \varepsilon. \end{cases}$$

Die Existenz dieser Funktionen sichert der Plateausatz [36] aus der Analysis mehrerer Veränderlicher. Mit der Abkürzung  $\alpha_0 \doteq \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}$  ist nach [35] die Funktion

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x) &\doteq \int d^3 \mathbf{k} \left[ \cos(|\mathbf{k}|(x^0 - \alpha_0)) \tilde{f}(\mathbf{k}) + \frac{\sin(|\mathbf{k}|(x^0 - \alpha_0))}{|\mathbf{k}|} \tilde{g}(\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{x}\mathbf{k}} \\
&= \int d^3 \mathbf{k} \underbrace{\left[ \frac{e^{i|\mathbf{k}|\alpha_0} \tilde{g}(-\mathbf{k})}{2i|\mathbf{k}|} - \frac{e^{i|\mathbf{k}|\alpha_0} \tilde{f}(-\mathbf{k})}{2} \right]}_{\doteq \xi_+(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}x} + \int d^3 \mathbf{k} \underbrace{\left[ \frac{e^{i|\mathbf{k}|\alpha_0} \tilde{f}(\mathbf{k})}{2} - \frac{e^{i|\mathbf{k}|\alpha_0} \tilde{g}(\mathbf{k})}{2i|\mathbf{k}|} \right]}_{\doteq \xi_-(\mathbf{k})} e^{-i\mathbf{k}x} \\
&= \int d^3 \mathbf{k} (\xi_+(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} + \xi_-(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x})
\end{aligned}$$

eine Lösung der Wellengleichung auf  $\mathbb{R}^4$  die

$$u(\alpha_0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \partial_0 u(\alpha_0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

und somit

$$\hat{u}|_{B_\alpha} = u|_{B_\alpha}$$

erfüllt. Da  $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , sind die Funktionen  $\xi_\pm$  stetig bis auf eine integrierbare Singularität am Ursprung und fallen für  $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$  wie Schwartzfunktionen ab.  $\square$

Jede glatte Lösung der Wellengleichung auf  $\mathbb{R}^4$  kann durch ebene Wellen auf jedem Kompaktum gleichmäßig approximiert werden. Mit der Darstellung (B.6) von  $u$  auf  $B_\alpha$  kann somit auch  $u$  durch eine Überlagerung von ebenen Wellen dargestellt werden. Das Verhalten der Funktionen  $\xi_\pm$  ist sogar hinreichend regulär, daß die ersten Ableitungen ebenfalls gleichmäßig approximiert werden können.

**Korollar B.5.** Sei  $u \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^4)$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  existieren endlich viele lichtartige Vektoren  $l_\pm^{(n)} \in \partial V_+$  und endlich viele Konstanten  $a_\pm^{(n)} \in \mathbb{C}$ , so daß

$$\sup_{x \in B} \left| u(x) - \sum_n [a_+^{(n)} e^{il_+^{(n)} x} + a_-^{(n)} e^{-il_+^{(n)} x}] \right| < \varepsilon$$

und

$$\sup_{x \in B} \left| \partial^\nu u(x) - \sum_n [a_+^{(n)} \partial^\nu e^{il_+^{(n)} x} + a_-^{(n)} b \partial^\nu e^{-il_+^{(n)} x}] \right| < \varepsilon$$

Zusätzlich zum Vorangegangenen, werden noch zwei weitere Lemmata benötigt.

**Lemma B.6.** Sei  $[a, b] \subset (0, \infty)$ . Dann ist  $\text{span} \{ t \mapsto t^{2m} \mid m > 0 \}$  dicht in  $\mathcal{C}([a, b])$ .

*Beweis.* Da  $\text{span} \{ t \mapsto t^{2m} \mid m > 0 \}$  eine unter komplexer Konjugation abgeschlossene, punktetrennende<sup>1</sup> Unteralgebra von  $\mathcal{C}([0, b])$  ist, folgt nach Satz von Stone-Weierstrass (vgl. [14, Thm. IV.10]), daß

$$\overline{\text{span} \{ t \mapsto t^{2m} \mid m > 0 \}} = \{ f \in \mathcal{C}([0, b]) \mid f(0) = 0 \}.$$

Einschränkung der Funktionen auf  $[a, b]$  liefert die Behauptung.  $\square$

**Lemma B.7.** Für  $\mu \in \mathbb{M}$  definiere  $f^\mu : V_+ \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f^\mu(x) \doteq \partial^\mu \frac{1}{x^2}$$

Dann gilt mit für einen lichtartigen Vektor  $l \in \partial V_+$  und festes  $m \in \mathbb{N}_0$ , daß

$$l_\mu f^\mu(x) = (-2)^m m! \frac{(lx)^m}{(x^2)^{m+1}}, \quad \mu \in \mathbb{M}_m. \quad (\text{B.7})$$

*Beweis.* Durch Induktion nach  $m$ . Für  $m = 0$  ist wegen

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

<sup>1</sup>Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $M \subset \mathcal{C}(X)$  heißt **punktetreuend** genau dann, wenn für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  eine Funktion  $f \in M$  existiert mit  $f(x) \neq f(y)$

die Behauptung klar. Sei nun  $m \geq 1$  beliebig.

$$\begin{aligned} l_{\nu\mu} f^{\nu\mu}(x) &= l_\nu \partial^\nu l_\mu \partial^\mu \frac{1}{x^2} \\ &= (-2)^m m! l_\nu \frac{(x^2)^{m+1} m (lx)^{m-1} l^\nu - (lx)^m (m+1) (x^2)^m 2x^\nu}{(x^2)^{2(m+1)}} \\ &= 0 - (-2)^m (m+1)! \frac{(lx)^m}{(x^2)^{m+2}} 2l_\nu x^\nu = (-2)^{m+1} \frac{(lx)^{m+1}}{(x^2)^{m+2}} \end{aligned}$$

□

### Beweis von Satz 4.8

Da der einzige Unterschied zu [2] in der Einschränkung auf  $m > 0$  liegt, wird eine detaillierte, entsprechend modifizierte Version des Beweises aus [2] angegeben.

Jede kompakte Teilmenge  $B \subset V_+$  ist in einem geeigneten Doppelkegel  $B_\alpha$  enthalten, womit im weiteren o.B.d.A. angenommen werden, daß  $B = B_\alpha$  mit einem geeigneten  $0 < \alpha < 1$ .

Mit  $u \in \mathscr{W}(V_+)$  ist auch  $\hat{i}(u) \in \mathscr{W}(V_+)$ , womit es  $M_0 = M_0(\varepsilon)$  Konstanten  $a_+^{(m)}, a_-^{(m)} \in \mathbb{C}$  und Vektoren  $l_+^{(m)}, l_-^{(m)} \in \partial V_+$  gibt (nach Korollar B.5), so daß

$$\sup_{\beta \in B} \left| \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{m=1}^{M_0} [a_+^{(m)} e^{il_+^{(m)}\beta} + a_-^{(m)} e^{-il_-^{(m)}\beta}] \right| < \frac{\varepsilon}{3\alpha^{-2}} \quad (\text{B.8})$$

Für die lichtartigen Vektoren  $l_\pm^{(m)}$  gilt

$$\alpha |l_\pm^{(m)}| \leq l_\pm^{(m)} \beta \leq 2\alpha^{-2} |l_\pm^{(m)}|, \quad \beta \in B,$$

für alle  $m \leq M_0$ , womit insbesondere

$$t_0 \doteq \min_{\pm} \min_{1 \leq m \leq M_0} \alpha |l_\pm^{(m)}| > 0 \quad \text{und} \quad t_1 \doteq \max_{\pm} \max_{1 \leq m \leq M_0} 2\alpha^{-2} |l_\pm^{(m)}| < \infty.$$

Für die stetigen Funktionen  $t \mapsto e^{\pm it}$  gibt es daher nach Lemma B.6  $N_0 = N_0(m)$  Konstanten  $b_+^{(m,n)} \in \mathbb{C}$  und  $L_0 = L_0(m)$  Konstanten  $b_-^{(m,n)} \in \mathbb{C}$ , so daß

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| a_+^{(m)} e^{it} - \sum_{n=1}^{N_0(m)} b_+^{(m,n)} t^{2n} \right| < \frac{\varepsilon \alpha^2}{3M_0} \quad \text{und} \quad \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| a_-^{(m)} e^{-it} - \sum_{n=1}^{L_0(m)} b_-^{(m,n)} t^{2n} \right| < \frac{\varepsilon \alpha^2}{3M_0}.$$

für alle  $1 \leq m \leq M_0$ . Durch Fortsetzen der Reihe durch Koeffizienten mit Wert null kann erreicht werden, daß  $L_0(m) = N_0(m)$ , und wird für alle  $M \leq N_0$  und  $n \leq N \doteq \max_{0 \leq m \leq M_0} N_0(m)$

$$b_\pm^{(m,n)} \doteq 0, \quad N_0(m) + 1 \leq m \leq N,$$

gesetzt, gilt sogar o.B.d.A., daß  $N_0(m)$  unabhängig von  $m$  ist. Durch Einsetzen von  $t = l_\pm^{(m)} \beta$  ergibt sich

$$\sup_{\beta \in B} \left| a_\pm^{(m)} e^{\pm il_\pm^{(m)} \beta} - \sum_{n=1}^N b_\pm^{(m,n)} (l_\pm^{(m)} \beta)^{2n} \right| < \frac{\varepsilon \alpha^2}{3M_0 \alpha^{-2}}, \quad 1 \leq m \leq M_0.$$

Es wird nun ausgenutzt, daß nach Lemma B.7 für alle lichtartigen Vektoren  $l \in \partial V_+$  gilt, daß

$$l_{\mu_i} \Theta^{\mu_i}(\beta) = \underbrace{(-2)^i i! c_i}_{\doteq C_i} (l\beta)^i (\beta^2)^{-(i+1)}, \quad \beta \in V_+, \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

wobei  $c_i$  die Konstanten in Gleichung (4.2) sind (damit ist insbesondere  $C_{2i-1} = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ). Wird die Involution  $\hat{i}$  auf  $l_{\mu_i} \Theta^{\mu_i}$  angewandt, erhält man

$$\hat{i}(l_{\mu_i} \Theta^{\mu_i})(\beta) = C_i (l\beta)^i.$$

Setze

$$c_{\mu_{2n}} \doteq \frac{1}{C_{2n}} \sum_{m=1}^{M_0} [b_+^{(m,n)} l_+^{(m)} \mu_{2n} + b_-^{(m,n)} l_-^{(m)} \mu_{2n}]$$

Es ergibt sich insgesamt aus den Abschätzungen unter mehrfachem Anwenden der Dreiecksungleichung und Anwendung von Gl. (B.5), daß

$$\begin{aligned} p'_B \left( u - \sum_{n=1}^N c_{\mu_{2n}} \Theta^{\mu_{2n}} \right) &= \sup_{\beta \in B} \left| u(\beta) - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_0} [b_+^{(m,n)} l_+^{(m)} \mu_{2n} + b_-^{(m,n)} l_-^{(m)} \mu_{2n}] \Theta^{\mu_{2n}}(\beta) \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sup_{\beta \in B} \left| \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_0} \left[ \frac{b_+^{(m,n)}}{C_{2n}} \hat{i}(l_+^{(m)} \mu_{2n})(\beta) + \frac{b_-^{(m,n)}}{C_{2n}} \hat{i}(l_-^{(m)} \mu_{2n})(\beta) \right] \right| \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \sup_{\beta \in B} \left| \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^N [b_+^{(m,n)} (l_+^{(m)} \beta)^{2n} + b_-^{(m,n)} (l_-^{(m)} \beta)^{2n}] \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sup_{\beta \in B} \left| \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{m=1}^{M_0} [a_+^{(m)} e^{il_+^{(m)} \beta} + a_-^{(m)} e^{-il_-^{(m)} \beta}] \right| \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2} \sup_{\beta \in B} \left| \sum_{m=1}^{M_0} [a_+^{(m)} e^{il_+^{(m)} \beta} + a_-^{(m)} e^{-il_-^{(m)} \beta}] - \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^N [b_+^{(m,n)} (l_+^{(m)} \beta)^{2n} + b_-^{(m,n)} (l_-^{(m)} \beta)^{2n}] \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{\alpha^2} \sup_{\beta \in B} \left| \sum_{m=1}^{M_0} [a_+^{(m)} e^{il_+^{(m)} \beta} - \sum_{n=1}^N b_+^{(m,n)} (l_+^{(m)} \beta)^{2n}] + \sum_{m=1}^{M_0} [a_-^{(m)} e^{-il_-^{(m)} \beta} - \sum_{n=1}^N b_-^{(m,n)} (l_-^{(m)} \beta)^{2n}] \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=1}^{M_0} \sup_{\beta \in B} \left| a_+^{(m)} e^{il_+^{(m)} \beta} - \sum_{n=1}^N b_+^{(m,n)} (l_+^{(m)} \beta)^{2n} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=1}^{M_0} \sup_{\beta \in B} \left| a_-^{(m)} e^{-il_-^{(m)} \beta} - \sum_{n=1}^N b_-^{(m,n)} (l_-^{(m)} \beta)^{2n} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen. Der Beweis der zweiten Aussage wird ähnlich geführt, jedoch müssen hier entsprechend die Ableitungen der Funktionen mit berücksichtigt werden. Nach Korollar B.5 gibt es  $N_0$  Konstanten  $r_{\pm}^{(n)} \in \mathbb{C}$  und Vektoren  $k_{\pm}^{(n)} \in \partial V_+$  so daß

$$\sup_{\beta \in B} \left| \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{n=1}^{N_0} [r_+^{(n)} e^{ik_+^{(n)} \beta} + r_-^{(n)} e^{-ik_-^{(n)} \beta}] \right| < \frac{\varepsilon \alpha^8}{48},$$

und

$$\sup_{\beta \in B} \left| \partial^\nu \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{n=1}^{N_0} \partial^\nu [r_+^{(n)} e^{ik_+^{(n)}\beta} + r_-^{(n)} e^{-ik_-^{(n)}\beta}] \right| < \frac{\varepsilon \alpha^8}{48},$$

für alle  $\nu = 0, \dots, 3$ .

Mit dem natürlichen Zweig der komplexen Wurzel sind die Funktionen  $f_\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{\pm i\sqrt{z}}$  holomorph auf  $\mathbb{C}_+ \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ . Durch Multiplikation der entsprechenden Taylorreihe mit  $z$  ergibt sich für  $e^{\pm iz} = z f_\pm(z^2)$  eine auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergente Reihendarstellung, die nur ungerade Potenzen von  $z$  enthält.

Damit existieren Konstanten  $s_\pm^{(n,m)}$ , so daß

$$\sup_{\beta \in B} \left| r_\pm^{(n)} e^{ik_\pm^{(n)}\beta} - \sum_{m=1}^M s_\pm^{(n,m)} (k_\pm^{(n)} \beta)^{2m-1} \right| < \frac{\varepsilon \alpha^8}{48M_0}$$

und

$$\sup_{\beta \in B} \left| \partial^\nu r_\pm^{(n)} e^{ik_\pm^{(n)}\beta} - \sum_{m=1}^M \partial^\nu s_\pm^{(n,m)} (k_\pm^{(n)} \beta)^{2m-1} \right| < \frac{\varepsilon \alpha^8}{48M_0}$$

für alle  $\nu = 0, \dots, 3$  und alle  $0 < n < N_0$ . Hierbei kann das gleiche Argument, wie im Beweis der ersten Behauptung verwendet werden um  $M$  unabhängig von  $n$  zu wählen. Nutze nun, daß mit Lemma B.7

$$l_{\mu_{2i-1}} \Theta^{\nu \mu_{2i-1}}(\beta) = c_{2i} \partial_\beta^\nu l_{\mu_{2i+1}} \partial^{\mu_{2i+1}} \frac{1}{\beta^2} = \partial_\beta^\nu \underbrace{c_{2i} (-2)^{2i-1} (2i-1)!}_{\doteq D_{2i-1}} \frac{(l\beta)^{2i-1}}{(\beta^2)^{2i}}, \quad i \in \mathbb{N},$$

gilt und setze

$$d_{\mu_{2m-1}} \doteq \frac{1}{D_{2m-1}} \sum_{n=1}^{N_0} [s_+^{(n,m)} k_+^{(n)} \mu_{2m-1} + s_-^{(n,m)} k_-^{(n)} \mu_{2m-1}].$$

Da die Anwendung der Involution  $\hat{i}$  auf die Funktion  $\beta \mapsto (l\beta)^{2i-1}/(\beta^2)^{2i}$  gerade die Funktion  $\beta \mapsto (l\beta)^{2i-1}$  liefert, ergibt mit der Abkürzung  $f^\mu(\beta) \doteq \partial_\beta^\mu 1/\beta^2$  analoge Rechnung zur ersten Aussage

$$\begin{aligned} p'_B \left( \partial^\nu u - \sum_{m=1}^M d_{\mu_{2m-1}} \Theta^{\nu \mu_{2m-1}} \right) &= p'_B \left( \partial^\nu u - \partial^\nu \sum_{m=1}^M c_{2m} d_{\mu_{2m-1}} f^{\mu_{2m-1}} \right) \\ &= \sup_{\beta \in B} \left| \partial_\beta^\nu u(\beta) - \partial_\beta^\nu \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_0} [s_+^{(n,m)} k_+^{(n)} \mu_{2m-1} + s_-^{(n,m)} k_-^{(n)} \mu_{2m-1}] f^{\mu_{2m-1}}(\beta) \right| \\ &\leq \frac{2}{\alpha^8} \sup_{\beta \in B} \left| \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_0} [s_+^{(n,m)} \hat{i}(k_+^{(n)} \mu_{2m-1} f^{\mu_{2m-1}})(\beta) + s_-^{(n,m)} \hat{i}(k_-^{(n)} \mu_{2m-1} f^{\mu_{2m-1}})(\beta)] \right| \\ &\quad + \frac{3}{\alpha^8} \sum_{\mu=1}^3 \sup_{\beta \in B} \left| \partial_\mu \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_0} [s_+^{(n,m)} \partial_\mu \hat{i}(k_+^{(n)} \mu_{2m-1} f^{\mu_{2m-1}})(\beta) + s_-^{(n,m)} \partial_\mu \hat{i}(k_-^{(n)} \mu_{2m-1} f^{\mu_{2m-1}})(\beta)] \right| \\ &\leq \frac{2}{\alpha^3} \sup_{\beta \in B} \left| \hat{i}(u)(\beta) - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_0} [s_+^{(n,m)} (k_+^{(n)} \beta)^{2m-1} + s_-^{(n,m)} (k_-^{(n)} \beta)^{2m-1}] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{\alpha^8} \sum_{\mu=1}^3 \sup_{\beta \in B} \left| \partial_\mu \hat{u}(\beta) - \partial_\mu \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_0} [s_+^{(n,m)} (k_+^{(n)}) \beta^{2m-1} + s_-^{(n,m)} (k_-^{(n)}) \beta^{2m-1}] \right| \\
& \leq \dots \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

## B.2. Beweise weiterer Lemmata in Kapitel 4

Zu Erinnerung:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ , gegeben durch

$$f_n \doteq \frac{1}{n^4} f\left(\frac{x}{n}\right)$$

mit  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  und  $\int d^4x f(x) = 1$ , und  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge in  $\mathcal{A}$ , gegeben durch

$$K_n \doteq \phi^*(f_n)\phi(f_n).$$

**Lemma B.8.** Sei  $\omega_{\beta,0} \in \mathcal{C}_\beta$ . Dann gilt für alle  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi(g)\phi(f_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi(g)\phi^*(f_n)) = 0.$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi(f_n)\phi(g)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi^*(f_n)\phi(g)) = 0.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(g, \bar{f}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(g, f_n) = 0.$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(K_n) = 0.$

*Beweis.* Es wird exemplarisch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi(g)\phi(f_n)) = 0$  gezeigt, die anderen Rechnungen sind analog. Zunächst ist die Fouriertransformierte von  $f_n$  gegeben durch

$$\tilde{f}_n(p) = \tilde{f}(np), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Eingesetzt wird dies zu

$$\begin{aligned} \omega_{\beta,0}(\phi(g)\phi(f_n)) &= 2\pi \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \frac{\tilde{g}(p) \tilde{f}(-np)}{1 - e^{-\beta p}} = 2\pi \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2) \frac{\tilde{g}(p) \tilde{f}_n(-p)}{1 - e^{-\beta p}} \\ &= 2\pi \int d^3\mathbf{p} \left[ \frac{\tilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{f}(-n(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}))}{2|\mathbf{p}|(1 - e^{-\beta p})} - \frac{\tilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{f}(n(-|\mathbf{p}|, \mathbf{p}))}{2|\mathbf{p}|(1 - e^{\beta_0|\mathbf{p}| - \beta \cdot \mathbf{p}})} \right] \end{aligned}$$

Da  $\beta \in V_+$  existiert ein  $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ , so daß  $\Lambda\beta = (\sqrt{\beta^2}, \mathbf{0})$ . Durch Substitution  $\underline{p} \leftrightarrow \Lambda\underline{p}$  wird das Integral zu

$$\omega_{\beta,0}(\phi(g)\phi(f_n)) = 2\pi \int d^3\mathbf{p} \left[ \frac{\tilde{g}_\Lambda(2|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{f}_\Lambda(-n(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}))}{|\mathbf{p}|(1 - e^{-\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|})} - \frac{\tilde{g}_\Lambda(2|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{f}_\Lambda(n(-|\mathbf{p}|, \mathbf{p}))}{|\mathbf{p}|(1 - e^{\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|})} \right].$$

Definiere nun  $\xi_n^\pm : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\xi_n^\pm(\mathbf{p}) \doteq \pm \frac{\tilde{g}_\Lambda(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{f}_\Lambda(-n(\pm|\mathbf{p}|, \mathbf{p}))}{2|\mathbf{p}|(1 - e^{\mp\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da  $\tilde{f}_\Lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^\pm(\mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Unter der Annahme einer integrierbaren Majorante für  $\xi_n^\pm$ , und dem Satz über die majorierte Konvergenz ergibt sich damit, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta,0}(\phi(g)\phi(f_n)) = \int d^3\mathbf{p} \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n^+(\mathbf{p}) + \xi_n^-(\mathbf{p})) = 0.$$

Bleibt zu zeigen, daß die Funktionen  $\xi^\pm$  integrierbare Majoranten besitzen. Betrachte also zunächst  $\xi^+$ .

$$\begin{aligned} |\xi_n^+(\mathbf{p})| &= \left| \frac{\tilde{g}_\Lambda(\underline{\mathbf{p}})\tilde{f}_\Lambda(-n\underline{\mathbf{p}})}{2|\mathbf{p}|(1 - e^{-\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|})} \right| = \left| \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} + |\mathbf{p}|^2)^2 \tilde{g}_\Lambda(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{f}_\Lambda(-n(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}))}{2|\mathbf{p}|(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} + |\mathbf{p}|^2)^2 (1 - e^{-\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|})} \right| \\ &\leq \frac{C_1}{2|\mathbf{p}|(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} + |\mathbf{p}|^2)^2 (1 - e^{-\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|})} \end{aligned}$$

wobei

$$C_1 \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \left| (1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} + |\mathbf{p}|^2)^2 \tilde{g}_\Lambda(\underline{\mathbf{p}}) \tilde{f}_\Lambda(-n\underline{\mathbf{p}}) \right| < \infty.$$

Ausnutzend, daß

$$\frac{r}{(1 - e^{-\alpha r})} \leq \frac{1}{\alpha} + r \leq \frac{1}{\alpha} + 1 + r^2 \quad , \alpha > 0, r \geq 0,$$

zeigt sich, daß die so gefundene Majorante integrierbar ist, da

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{p} \frac{C_1}{2|\mathbf{p}|(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} + |\mathbf{p}|^2)^2 (1 - e^{-\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|})} &= 4\pi C_1 \int_0^\infty dr \frac{r}{(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} + r^2)^2 (1 - e^{-\sqrt{\beta^2}r})} \\ &\leq 4\pi C_1 \int_0^\infty dr \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} + r^2} = \frac{4\pi C_1}{(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}})^{\frac{1}{2}}} \arctan r \Big|_0^\infty = 2\pi^2 C_1 (1 + \frac{1}{\sqrt{\beta^2}})^{-\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Für  $\xi_n^-$  ergibt sich die Abschätzung

$$|\xi_n^-(\mathbf{p})| = \left| \frac{\tilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{f}(n(|\mathbf{p}|, -\mathbf{p}))}{2|\mathbf{p}|(1 - e^{\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|})} \right| \leq \frac{C_2}{2|\mathbf{p}|} \frac{1}{|1 - e^{\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|}|} = \frac{C_2}{2|\mathbf{p}|} \frac{1}{e^{\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|} - 1},$$

wobei

$$C_2 \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} |\tilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \tilde{f}(n(|\mathbf{p}|, -\mathbf{p}))| < \infty.$$

Da mit Hilfe der geometrischen Reihe und deren gleichmäßiger Konvergenz

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{p} \frac{C_2}{2|\mathbf{p}|} \frac{1}{e^{\sqrt{\beta^2}|\mathbf{p}|} - 1} &= 2\pi C_2 \int_0^\infty dr \frac{r}{e^{\sqrt{\beta^2}r} - 1} = 2\pi C_2 \int_0^\infty dr r \sum_{n=1}^\infty e^{-n\sqrt{\beta^2}r} \\ &= 2\pi C_2 \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dr r e^{-n\sqrt{\beta^2}r} = \frac{2\pi C_2}{\beta^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3 C_2}{3\beta^2} \end{aligned}$$

gilt, folgt die Behauptung. □

**Lemma B.9.** Sei  $\omega_{\beta, \kappa} \in \mathcal{C}_\beta$ . Dann gilt

1. für alle  $M \in \mathbb{N}_0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa}(K_n^M) = (2M - 1)!! \kappa^M$$



2. für alle  $A, B, B' \in \mathcal{A}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa}(B [K_n, A] B') = 0$$

Hierbei ist für ungerades  $n \in \mathbb{N}$   $n!! \doteq n(n-2)(n-4) \cdots 1$ . Weiterhin existiert für alle  $A \in \mathcal{A}$  der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa}(A^* K_n^2 A).$$

*Beweis.* Für  $k \in \mathbb{N}_0$  definiere zunächst mit  $f_{n,k} \doteq f_n$ , wenn  $k$  gerade und  $f_{n,k} \doteq \bar{f}_n$  wenn  $k$  ungerade ist. Aus der Quasifreiheit von  $\omega_{\beta, \kappa}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_{\beta, \kappa}(K_n^M) &= \omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{k=1}^{2M} \phi(f_{n,k}) \right) = \sum_{\pi \in \Pi^{2M}} \prod_{k=1}^M \omega_{\beta, \kappa}(\phi(f_{n, \pi(2k-1)}) \phi(f_{n, \pi(2k)})) \\ &= \sum_{\pi \in \Pi^{2M}} \prod_{k=1}^M \left[ \omega_{\beta, 0}(\phi(f_{n, \pi(2k-1)}) \phi(f_{n, \pi(2k)})) + \kappa \int d^4 x_1 d^4 x_2 f_{n, \pi(2k-1)}(x_1) f_{n, \pi(2k)}(x_2) \right] \\ &= \sum_{\pi \in \Pi^{2M}} \prod_{k=1}^M \left[ \omega_{\beta, 0}(\phi(f_{n, \pi(2k-1)}) \phi(f_{n, \pi(2k)})) + \kappa \right] \\ &\xrightarrow[\text{Lem. 4.14}]{n \rightarrow \infty} \sum_{\pi \in \Pi^{2M}} \prod_{k=1}^M \kappa = |\Pi^{2M}| \cdot \kappa^M, \end{aligned}$$

wobei  $|\Pi^{2M}|$  die Anzahl der Elemente in  $\Pi^{2M}$  ist. Mit vollständiger Induktion kann direkt gezeigt werden, daß  $\Pi^{2M}$  genau  $(2M-1)!!$  Elemente enthält,<sup>2</sup> womit die erste Behauptung folgt.

Für die zweite Aussage seien  $A, B, B' \in \mathcal{A}$  beliebig. Durch entsprechendes lineares Fortsetzen genügt es o.B.d.A. anzunehmen, daß  $A = \phi(g_1) \cdots \phi(g_N)$ ,  $B = \phi(h_1) \cdots \phi(h_M)$  und  $B' = \phi(h'_1) \cdots \phi(h'_{M'})$ , wobei  $g_i, h_j, h'_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ . Damit ergibt sich durch sukzessives Durchtauschen

$$\begin{aligned} &\omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{i=1}^N \phi(g_i) \phi(f_n) \phi(\bar{f}_n) \prod_{j=1}^M \phi(h_j) \prod_{k=1}^{M'} \phi(h'_k) \right) \\ &= \omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{i=1}^N \phi(g_i) \phi(f_n) \prod_{j=1}^M \phi(h_j) \phi(\bar{f}_n) \prod_{k=1}^{M'} \phi(h'_k) \right) \\ &\quad - \sum_{m=1}^M \Delta(f_n, h_m) \omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{i=1}^N \phi(g_i) \phi(f_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \phi(h_j) \prod_{k=1}^{M'} \phi(h'_k) \right) \\ &= \omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{i=1}^N \phi(g_i) \prod_{j=1}^M \phi(h_j) \phi(f_n) \phi(\bar{f}_n) \prod_{k=1}^{M'} \phi(h'_k) \right) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Für  $M = 1$  ist die Behauptung klar. Für  $\Pi^{2(M+1)}$  gibt es  $2M+1$  Möglichkeiten die erste Paarung zu wählen. Für die verbleibenden Elemente gibt es dann nach Induktionsvoraussetzung noch  $(2M-1)!!$  Möglichkeiten, womit die Behauptung folgt.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^M \Delta(\bar{f}_n, h_m) \omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{i=1}^N \phi(g_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \phi(h_j) \phi(\bar{f}_n) \prod_{k=1}^{M'} \phi(h'_k) \right) \\
& - \sum_{m=1}^M \Delta(f_n, h_m) \omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{i=1}^N \phi(g_i) \phi(f_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \phi(h_j) \prod_{k=1}^{M'} \phi(h'_k) \right)
\end{aligned}$$

und da nach Lemma 4.14 die Kommutatorfunktionen gegen null gehen, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{k=1}^N \phi(g_k) \mathbb{K}_n \prod_{j=1}^M \phi(h_j) \prod_{i=1}^{M'} \phi(h'_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa} \left( \prod_{k=1}^N \phi(g_k) \prod_{j=1}^M \phi(h_j) \mathbb{K}_n \prod_{i=1}^{M'} \phi(h'_i) \right).$$

Betrachte nun den Ausdruck  $\omega_{\beta, \kappa}(A^* \mathbb{K}_n^2 A)$ . Da  $\omega_{\beta, \kappa}$  quasifrei ist, ist dieser Ausdruck eine endliche Summe von endlichen Produkten mit Faktoren der Form  $\omega_{\beta, \kappa}(\phi(\dagger)\phi(\ddagger))$ , wobei  $\dagger$  und  $\ddagger$  entweder für  $f_n, \bar{f}_n$  oder eine der Testfunktionen  $g_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  in  $A = \phi(g_1) \cdots \phi(g_N)$  bzw.  $\bar{g}_i$  stehen. Nach Lemma 4.14 existiert der Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  für jeden dieser Ausdrücke, womit der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \kappa}(A^* \mathbb{K}_n^2 A)$$

existiert. □

## C. Beweise der Lemmata in Kapitel 5

**Lemma C.1.** Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_\omega}$ -thermaler Zustand auf einem maximalen Gebiet  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_\omega}$ . Sei weiterhin  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  eine Testfunktion mit den obigen Eigenschaften und  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  eine beliebige zulässige Makroobservable. Dann gilt:

1. Der regularisierte Zustand  $\omega_f$  ist  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal auf dem maximalen Gleichgewichtsgebiet

$$\mathcal{O} \doteq \bigcap_{x \in \text{supp } f} (\mathcal{O}_\omega + x).$$

2. Die Abbildung  $x \mapsto \omega_f(\mathbf{F})(x)$  ist glatt für  $x \in \mathcal{O}$ .

*Beweis.* Es sei zunächst daran erinnert, daß

$$\alpha_y(\vartheta^\mu(x)) = \vartheta^\mu(x+y), \quad x, y \in \mathbb{R}^4,$$

gilt, da  $\alpha_y(\phi(\delta_x^{(n)})) = \phi(\delta_{x+y}^{(n)})$  für alle Folgen  $\delta_x^{(n)}$  die gegen  $\delta_x$  konvergieren. Nach Konstruktion gilt für alle  $x \in \mathcal{O}$  und alle  $y \in \text{supp } f$ , daß  $x+y \in \mathcal{O}_\omega$ , womit der Erwartungswert von  $\vartheta^\mu(x)$  in  $\omega_f$  existiert. Es findet sich

$$\begin{aligned} \omega_f(\vartheta^\mu(x)) &= \int d^4y f(y) \omega(\vartheta^\mu(x+y)) = \int d^4y f(y) \int d\rho_{x+y}(\beta, \kappa) \Theta^\mu(\beta, \kappa) \\ &= \int d^4u f(u-x) \int d\rho_u(\beta, \kappa) \Theta^\mu(\beta, \kappa). \end{aligned}$$

Da  $\int d^4x f(x) = 1$  wird durch

$$\sigma_x(B) \doteq \int d^4u f(u-x) \int d\rho_u(\beta, \kappa) \mathbb{1}_B, \quad B \subset V_+ \times [0, \infty) \text{ meßbar,}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $V_+ \times [0, \infty)$  definiert, womit die  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität von  $\omega_f$  folgt. Es wird nun gezeigt, daß für alle lokal thermischen Funktionen  $\Theta^\mu$  der Lift

$$\omega_f(\Theta^\mu)(x) = \int d^4y f(y) \omega(\Theta^\mu)(x+y) = \int d^4u f(u-x) \omega(\Theta^\mu)(u)$$

glatt ist. Mit den Eigenschaften (L1) und (L2) der Lifts, insbesondere mit (5.2), existiert eine kompakte Menge  $B \subset V_+ \times [0, \infty)$ , so daß für alle Ableitungen  $\partial_x^\nu$  des glatten Integranden die Funktion

$$F_\nu(u) \doteq g(u) \sup_{x \in B_\varepsilon(0)} |\partial_x^\nu f(x)| p_B(\Theta^\mu), \quad g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4), g \geq 0, g|_{\mathcal{O}} \equiv 1, \quad (\text{C.1})$$

eine integrierbare Majorante ist, da  $\partial_x^\nu f(\cdot - x) \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_\omega)$  für alle  $x \in B_\varepsilon(0)$ . Damit dürfen Integration und Differentiation vertauscht werden. Mit (C.1) ergibt sich zusätzlich

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\nu \omega_f(\Theta^\mu)(x)| \leq c_\nu p_B(\Theta^\mu)$$

für beliebige kompakte Mengen  $K \subset \mathcal{O}$  und eine geeignete Konstante  $c_\nu > 0$ , womit die Stetigkeit der Abbildung  $\mathbf{f} \mapsto \omega(\mathbf{f})(\cdot)$  als Abbildung von  $\mathcal{T}_S$  nach  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$  folgt. Die Glattheit des Lifts für beliebige zulässige Makroobservablen  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  folgt dann aus dem selben Dichtheitsargument wie zu Beginn von Kapitel 5.  $\square$

**Lemma C.2.** *Sei  $e \in \mathbb{S}^2$  fest. Sei weiterhin  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  beliebig und  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$  definiert durch  $g(x) \doteq f(ex)$ . Dann gilt*

$$(y^\mu \partial_\mu)^k g(x) = (ye)^k \partial_0^k g(x)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $y \in \mathbb{C}^4$ .

*Beweis.* Beweis durch Induktion nach  $k$ . Für  $k = 1$  gilt die Behauptung, da

$$y^\mu \partial_\mu g(x) = y^\mu \partial_\mu f(ex) = y^\mu e_\mu f'(ex) = y^\mu e_\mu \partial_0 f(ex) = y^\mu e_\mu \partial_0 g(x).$$

Sei nun  $k > 1$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} (y^\mu \partial_\mu)^{k+1} g(x) &= (y^\mu \partial_\mu)(y^\mu \partial_\mu)^k g(x) = (y^\mu \partial_\mu)(ye)^k \partial_0^k g(x) = (y^\mu \partial_\mu)(ye)^k \partial_0^k g(x) \\ &= (ye)^k \partial_0^k (y^\mu \partial_\mu) g(x) = (ye)^{k+1} \partial_0^{k+1} g(x). \end{aligned}$$

$\square$

**Lemma C.3.** *Sei  $\omega \in \mathcal{A}_{+,1}^*$  ein  $\mathcal{O}_\omega$ -thermaler Zustand. Dann sind äquivalent*

1. *Für  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}_{\text{adm}}$  impliziert nicht-triviale Ortsabhängigkeit des Lifts  $\omega(\mathbf{F})(x)$ , daß  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{K}$  für ein  $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .*
2. *Der Lift  $\omega(\mathbf{M}_\mathbf{p}^n)(x)$  hat eine triviale Ortsabhängigkeit für alle  $n > 0$  und alle  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .*

*Beweis.* (1. $\Rightarrow$ 2.) ist offensichtlich. Die Implikation (2. $\Rightarrow$ 1.) folgt aus der Tatsache, daß nach Beweis von Satz 4.8 die Observablen  $\mathbf{M}_\mathbf{p}^n$  dicht in  $\mathcal{W}(V_+)$  liegen.  $\square$

## D. Beweise der Lemmata in Kapitel 6

**Lemma D.1.** Sei  $\xi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$  mit  $\xi \geq 0$ . Die bilineare Abbildung  $K_\xi : \mathcal{D}(V_+) \times \mathcal{D}(V_+) \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$K_\xi(f, g) \doteq \int d^4x_1 d^4x_2 k_\xi(x_1 + x_2) f(x_1) g(x_2), \quad (\text{D.1})$$

erfüllt folgende Eigenschaften:

1.  $K_\xi$  ist symmetrisch, d.h.  $\forall f, g \in \mathcal{D}(V_+): K_\xi(f, g) = K_\xi(g, f)$
2.  $K_\xi$  ist als Distribution in jedem Argument Lösung der Wellengleichung, d.h.

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(V_+): \square K_\xi(\cdot, f) = \square K_\xi(f, \cdot) = 0.$$

3.  $K_\xi$  ist positiv, d.h.  $\forall f \in \mathcal{D}(V_+): K_\xi(f, \bar{f}) \geq 0$ .

*Beweis.* Zunächst ist  $K_\xi$  wohldefiniert, da  $k_\xi$  stetig ist. Die Symmetrie ist offensichtlich, die Eigenschaft, Lösung der Wellengleichung zu sein, folgt aus

$$\square \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x_\mu} - 1} = 0$$

durch zweimalige partielle Integration. Für Positivität sei  $f \in \mathcal{D}(V_+)$  beliebig.

$$\begin{aligned} K_\xi(f, \bar{f}) &= \int d^4x_1 d^4x_2 k_\xi(x_1 + x_2) f(x_1) \bar{f}(x_2) \int d^3\mathbf{p} \frac{\xi(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \frac{f(x_1) \bar{f}(x_2)}{e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)_\mu} - 1} \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \xi(\mathbf{p}) \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{f(x_1) \bar{f}(x_2)}{e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)_\mu} - 1} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der geometrische Reihe wird dies zu

$$\begin{aligned} K_\xi(f, \bar{f}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \xi(\mathbf{p}) \int d^4x_1 d^4x_2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\frac{1}{2}x_1_\mu} f(x_1) e^{-n\frac{1}{2}x_2_\mu} \bar{f}(x_2) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \xi(\mathbf{p}) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int d^4x e^{-n\frac{1}{2}x_\mu} f(x) \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□



## E. Funktionenräume

Es folgt eine Auflistung der in dieser Arbeit verwendeten Funktionenräume

- Für beliebige  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $\mathcal{C}(\mathcal{O})$  der Raum der stetigen Funktionen auf  $\mathcal{O}$ . Ist  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so ist  $\mathcal{C}^k(\mathcal{O})$  der Raum der  $k$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen. Der Raum der glatten Funktionen ist

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \doteq \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\mathcal{O}).$$

- Der Raum der glatten, kompakt getragenen Testfunktionen wird mit

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \doteq \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } f \text{ kompakt}\}$$

bezeichnet.

- Der Schwartzraum ist gegeben durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \doteq \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \mu, \nu \in \mathbb{M}: \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\mu \partial_\nu f(x)| < \infty\}.$$

- Sei  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\mu$  ein Borelmaß auf  $\mathcal{O}$ . Für  $p \in [1, \infty)$  ist

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{O}, \mu) \doteq \left\{ f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathcal{O}} d\mu(x) |f(x)|^p < \infty \right\}.$$

der Raum der absolut  $p$ -integrierbaren Funktionen auf dem Maßraum  $(\mathcal{O}, \mu)$ . Ist  $\mu$  das Lebesgue-Maß, dann ist  $\mathcal{L}^p(\mathcal{O}) \doteq \mathcal{L}^p(\mathcal{O}, \mu)$ . Entsprechend ist

$$\mathcal{L}^\infty(\mathcal{O}, \mu) \doteq \left\{ f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mu - \text{ess sup}_{x \in \mathcal{O}} |f(x)| < \infty \right\}$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\mathcal{O}, \mu) \doteq \left\{ f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall K \subset \mathcal{O}, K \text{ kompakt: } \int_K d\mu(x) |f(x)|^p < \infty \right\}$$

- Der Raum der glatten Lösungen der homogenen Wellengleichung wird mit

$$\mathcal{W}(\mathcal{O}) \doteq \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \mid \square f = 0\}$$

bezeichnet.

## E.1. Mengen von Maßen

Alle in dieser Arbeit auftretenden Maße sind Borelmaße auf Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge und  $\mathfrak{B}(A)$  die borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Dann bezeichnet  $\mathcal{M}(A)$  die Menge der Maße auf  $\mathfrak{B}(A)$ . Weiterhin sind

$$\mathcal{M}_c(A) \doteq \{ \mu \in \mathcal{M}(A) \mid \text{supp } \mu \text{ kompakt} \}$$

die Maße mit kompakten Träger,

$$\mathcal{P}(A) \doteq \{ \mu \in \mathcal{M}(A) \mid \mu(A) = 1 \}$$

die Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $A$  und

$$\mathcal{P}_c(A) \doteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{M}_c(A)$$

die kompakt getragenen Wahrscheinlichkeitsmaße.



## F. Symbolliste

$\Delta$	der Laplace-Operator $\Delta \doteq \partial_i \partial^i$
$\square$	der d'Alembert Operator $\square \doteq \partial_\mu \partial^\mu$
$\alpha_\lambda$	die Wirkung von $\lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ auf die Feldalgebra $\mathcal{A}$
$\alpha_{te}$	die Zeittranslation in Richtung $e \in V_+$
$\mathcal{A}$	die Feldalgebra des freien Feldes
$\mathcal{A}_{+,1}^*$	die Menge der Zustände auf der Feldalgebra
$\mathfrak{A}$	die Observablenalgebra des freien Feldes
$\mathbb{C}$	die komplexen Zahlen
$\mathcal{C}$	die Menge der Referenzzustände
$\mathcal{C}_\beta$	die KMS-Zustände zum Temperaturvektor $\beta \in V_+$
$\mathcal{C}(M)$	der Raum der stetigen Funktionen auf der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^4$
$\mathcal{D}(\mathcal{O})$	der Raum der glatten, kompakt getragenen Testfunktionen auf $\mathcal{O}$
$\varepsilon(x)$	die Signum-Funktion
$\vartheta^\mu(x)$	die lokalthermische Observable $\vartheta^\mu \doteq \partial^\mu : \phi^2(x)$ :
$\mathbb{N}$	die natürlichen Zahlen (ohne Null)
$\mathbb{N}_0$	die natürlichen Zahlen mit Null
$\mathbb{M}$	die Menge der Multiindices
$\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$	Multiindices
$\mathcal{L}_+^\uparrow$	die eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe
$\underline{p}$	der lichtartige erweiterte Vektor $\underline{p} = ( \mathbf{p} , \mathbf{p})$ zu $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$
$\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$	die eigentliche, orthochrone Poincarégruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow \ltimes \mathbb{R}^4$
$\mathbb{R}$	die reellen Zahlen
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	der Schwartzraum
$\mathcal{T}_{\text{adm}}$	der Raum der zulässigen Makroobservablen
$\mathcal{T}_x$	der Raum der thermalen Observablen am Punkt $x \in \mathbb{R}^4$
$V_+$	der Vorwärtslichtkegel
$\mathcal{W}(\mathcal{O})$	der Raum der glatten Lösungen der Wellengleichung auf $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$
$\omega$	ein Zustand auf $\mathcal{A}$
$\omega_{\beta, \kappa}$	der KMS-Zustand zum Temperaturvektor $\beta \in V_+$ und Dichte $\kappa \in [0, \infty)$
$\omega_\varrho$	ein Referenzzustand zum Wahrscheinlichkeitsmaß $\varrho \in \mathcal{P}_c(V_+ \times [0, \infty))$



---

## Literaturverzeichnis

- [1] BUCHOLZ, D. ; OJIMA, I. ; ROOS, H.: Thermodynamic Properties of Non-Equilibrium States in Quantum Field Theory. In: *Annals Phys.* 297 (2002), S. 219ff
- [2] BUCHHOLZ, D.: On Hot Bangs and the Arrow of Time in Relativistic Quantum Field Theory. In: *Comm. Math. Phys.* 237 (2003), Nr. 1-2, S. 273ff
- [3] BRATELLI, O. ; ROBINSON, D.W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*. Bd. 1+2. 1. Auflage. Springer Verlag, 1981
- [4] HAAG, R.: *Local Quantum Physics – Fields, Particles, Algebras*. 2. Auflage. Springer Verlag, 1996
- [5] BOGOLUBOV, N.N. ; LOGUNOV, A.A. ; TODOROV, I.T.: *Introduction to Axiomatic Quantum field Theory*. 1. Auflage. W.A. Benjamin, Inc., 1975
- [6] HAAG, R. ; HUGENHOLZ, N.M. ; WINNINK, M.: On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics. In: *Comm. Math. Phys.* 5 (1967), S. 215ff
- [7] ARAKI, H. ; KASTLER, D. ; HAAG, R. ; TAKESAKI, M.: Extension of KMS states and chemical potential. In: *Comm. Math. Phys.* 53 (1977), Nr. 2, S. 97ff
- [8] OJIMA, I.: Lorentz invariance vs. temperature in QFT. In: *Lett. Math. Phys.* 11 (1986), S. 73ff
- [9] BROS, J. ; BUCHHOLZ, D.: Towards a relativistic KMS-condition. In: *Nucl. Phys.* 429 (1994), S. 291ff
- [10] BAHR, B.: *Lokale Gleichgewichtszustände masseloser Fermionen*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2005
- [11] UECKER, M.: *Lokale Gleichgewichtszustände des Elektromagnetischen Feldes*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2005
- [12] HÜBENER, R.: *Lokale Gleichgewichtszustände massiver Bosonen*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2005
- [13] KNAKE, P.: *Lokale Gleichgewichtszustände in der konformen Quantenfeldtheorie*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2005
- [14] REED, M. ; SIMON, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics*. Bd. I+II. 1. Auflage. Academic Press, 1975
- [15] HÖRMANDER, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. 1. Auflage. Springer Verlag, 1983

- [16] RUDIN, W.: *Functional Analysis*. 2. Auflage. McGraw-Hill, 1991
- [17] DIXON, W.G.: *Special Relativity*. 1. Auflage. Cambridge University Press, Cambridge 1978
- [18] STREATER, R.F. ; WIGHTMAN, A.S.: *PCT, Spin and Statistics, and All That*. 3. Auflage. Princeton University Press, 1980
- [19] SCHMÜDGEN, K.: *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*. 1. Auflage. Birkhäuser Verlag, 1990
- [20] ARAKI, H. ; WOODS, E.J.: Representations of the Canonical Commutation Relations Describing a Nonrelativistic Infinite Free Bose Gas. In: *J. Math. Phys.* 4 (1963), S. 637ff
- [21] BUCHHOLZ, D. ; JUNGLAS, P.: On the Existence of Equilibrium States in Local Quantum Field Theory. In: *Commun. Math. Phys.* 121 (1989), S. 255ff
- [22] FREDENHAGEN, K. ; HERTEL, J.: Local Algebras of Observable and Pointlike Localized Fields. In: *Comm. Math. Phys.* 80 (1981)
- [23] BOSTELMANN, H.: *Operatoralgebren am Punkt*, Universität Göttingen, Diss., 2002
- [24] RITZ, E.: *Normalitätseigenschaften lokaler Gleichgewichtszustände in der relativistischen Quantenfeldtheorie*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2003
- [25] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A. ; MUSIOL, G. ; MÜLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Auflage. Verlag Harri Deutsch, 2005
- [26] ASHCROFT, N.W. ; MERMIN, N.D.: *Festkörperphysik*. 1. Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2002
- [27] KAUP, L. ; KAUP, B.: *Holomorphic Functions of Several Variables: An Introduction to the Fundamental Theory*. 1. Auflage. de Gruyter, 1983
- [28] BUCHHOLZ, D.: *Persönliche Mitteilungen*
- [29] FREDENHAGEN, K. ; VERCH, R. ; BRUNETTI, R.: The generally covariant locality principle - a new paradigm for local quantum field theory. In: *Comm. Math. Phys.* 237 (2003), S. 31ff
- [30] SANDERS, J.: *Aspects of locally covariant quantum field theory*, University of York, Diss., 2008
- [31] SCHLEMMER, J. ; BUCHHOLZ, D.: Local temperature in curved spacetime. In: *Class. Quant. Grav.* 24 (2007), S. 25ff
- [32] SCHLEMMER, J.: *Gleichgewichtszustände auf der deSitter-Raumzeit*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2005
- [33] STOTTMEISTER, A.: *In Arbeit (Fertigstellung vermutlich November 2009)*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2009

- 
- [34] POOK, J.: *Representations of Particles in two dimensional Thermal Quantum Field Theory*, Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2005
- [35] WITT, I.: *Theorie partieller Differentialgleichung I+II*. 2007. – Skript zur Vorlesung
- [36] HOLDGRÜN, H.S.: *Analysis II*. 1. Auflage. Leins Verlag, Göttingen 2001



## Danksagung

Ich danke den folgenden Personen, ohne die aus verschiedensten Gründen (Betreuung, moralische Unterstützung, finanzielle Unterstützung, etc.) das Entstehen dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Roman Asper, Benjamin Bahr, Sarah Becker, Stefan Birkholz, Marcel Bischoff, Josephine Bliem, Franz Bliem, Sabine Bliem, Reiner Bormann, Detlev Buchholz, Michael Forster, Katrin Glorman, Robert Hübener, Hartje Kriete, Christian Köhler, Manuel Landesfeind, Martin Lippl, Pierre Martinetti, Roland Ortmann, Dimitrij Petkowski, Julian Pook, Nicoletta Rablou, Karl-Henning Rehren, Timo Reinhold, Arno Remmers, Manfred Requardt, Hansjörg Roos, Ko Sanders, Gabriele Schubert, Jan-Malte Slowik, Dörte Thoms, Martin Uecker, Ingo Wagner, Marc Wenskat, Christoph Solveen, Ingo Witt.

Hervorheben möchte ich aus dieser Liste Herrn Prof. Buchholz, der mir mit einem interessanten Thema und hilfreichen Diskussionen Einblicke in die algebraische Quantenfeldtheorie vermitteln konnte, sowie Herrn Prof. Rehren, der bereitwillig das Koreferat meiner Diplomarbeit übernommen hat.

Meinen Eltern danke ich für die finanzielle und moralische Unterstützung durchs ganze Studium.

Zu guter letzt gilt mein Dank natürlich Dörte, die mich das letzte Jahr, trotz nicht immer einfacher Zeiten, bereitwillig ertragen hat.