

---

# Über die Pol-Struktur höherer Korrelationsfunktionen in global konform-invarianter Quantenfeldtheorie

---

Diplomarbeit

vorgelegt von

Marcel Bischoff

aus

Göttingen

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik  
der Georg-August-Universität Göttingen

2009



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>5</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1 Relativistische Quantenfeldtheorie . . . . .	9
2.1.1 Wightman-Axiome . . . . .	10
2.1.2 Wightmanfunktionen . . . . .	12
2.2 Global konform-invariante Quantenfeldtheorie . . . . .	15
2.2.1 Die konforme Gruppe . . . . .	15
2.2.2 Darstellungen der konformen Gruppe . . . . .	16
2.2.3 Global konforme Invarianz . . . . .	18
2.2.4 Huygenssche Prinzip und Rationalität der Wightmanfunktionen . . . . .	20
2.3 Skalare Felder . . . . .	22
<b>3 Operatorproduktentwicklung und biharmonische Felder</b>	<b>25</b>
3.1 Operatorproduktentwicklung in Twist- $2\kappa$ -Feldern . . . . .	25
3.2 Das biharmonische Feld $V(x_1, x_2)$ . . . . .	27
3.3 Konsequenzen der Biharmonizität . . . . .	29
3.4 Konvergenz des harmonischen Anteils . . . . .	33
3.5 Huygens-Bilokalität von biharmonischen Feldern . . . . .	35
<b>4 Bedingungen an die Polstruktur</b>	<b>39</b>
4.1 Vierpunktfunktionen . . . . .	39
4.1.1 Polstruktur bei Vierpunktfunktionen . . . . .	40
4.1.2 Vierpunktfunktionen mit biharmonischen Feldern . . . . .	42
4.1.3 Vergleich mit Partialwellenentwicklung . . . . .	43
4.1.4 Der Fall dreier Feldern gleicher Skalendimension . . . . .	44
4.2 Fünfpunktfunktionen . . . . .	45
4.2.1 Fünfpunktlösungen . . . . .	46
4.2.2 Fünfpunktfunktionen besitzen nur Einfachpole . . . . .	47
<b>5 Bedingungen an die Polstruktur von Doppelpolen</b>	<b>51</b>
5.1 Vorbetrachtung . . . . .	51
5.2 Exkurs: Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2)$ und $\mathfrak{sl}(2)$ -Moduln . . . . .	54
5.2.1 Zerlegung eines $\mathfrak{sl}(2)$ -Moduls . . . . .	56
5.3 Notwendige Bedingungen an Doppelpole . . . . .	59
5.3.1 Allgemeine Aussagen über das Verschwinden von Koeffizienten . . . . .	60
5.3.2 Die singularste Struktur von Doppelpolen . . . . .	64
5.4 Komplette Doppelpol-Beiträge . . . . .	71

5.4.1	Von der singulärsten Ebene zu kompletten Doppelpol-Beiträgen . . .	71
5.4.2	Lösungen . . . . .	72
5.5	Korrelationsfunktionen mit Doppelpolen . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Temperierte Distributionen und Analytizität</b>	<b>78</b>
<b>B</b>	<b>Der konform-kompaktifizierte Minkowski-Raum <math>\overline{M}</math></b>	<b>81</b>
<b>C</b>	<b>Twist-2-Partialwellen</b>	<b>83</b>
<b>D</b>	<b>Die hypergeometrische Funktion und einige Identitäten</b>	<b>86</b>
<b>E</b>	<b>Rekursionssystem zur Polstruktur</b>	<b>88</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>92</b>

# Symbolverzeichnis

$(\cdot)_{[i,j]}$	Antisymmetrisierung bzgl. der Indizes $i$ und $j$
$(\cdot)_{\{i,j\}}$	Symmetrisierung bzgl. der Indizes $i$ und $j$
$(\cdot, \cdot)$	Hilbert-Raum Skalarprodukt
$(a)_n$	Pochhammer-Symbol
$\bar{z}$	komplex konjugiertes von $z$
$\square$	Wellenoperator
$\mathcal{D}_0$	Wightman-Domäne
$\emptyset$	leere Menge
$\psi^{(\kappa)}$	Quantenfeld
$\mathfrak{gl}(V)$	allgemeine lineare Lie-Algebra von $V$
$\text{ISL}(2, \mathbb{C})$	quantenmechanische Poincaré-Gruppe
$\lfloor x \rfloor$	größtes $n \in \mathbb{Z}$ , sodass $n \leq x$
$\phi_i$	skalares Feld
$\Omega$	Vakuum
$\varphi$	masselose freie Feld
$A \cong B$	$A$ ist isomorph zu $B$
$B(\cdot, \cdot)$	Euler-Beta-Funktion
$\mathcal{C}$	quantenmechanische konforme Gruppe
$\mathcal{C}_0$	konforme Gruppe
$\tilde{\mathcal{C}}$	Universelle Überlagerungsgruppe von $\mathcal{C}$
$D^{(j_1, j_2)}$	Darstellung der Lorentz-Gruppe $(j_1, j_2)$
$\mathcal{H}$	Hilbert-Raum
$\mathcal{L}_+^\uparrow$	eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe
$\mathbb{M}_{\mathbb{C}}$	komplexifizierter Minkowski-Raum
$\overline{\mathbb{M}}$	Konform-kompaktifizierter Minkowski-Raum
$\mathbb{M}$	Minkowski-Raum
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathcal{O}'$	kausales Komplement von $\mathcal{O}$
$\mathcal{O}^{(k,L)}$	quasiprimäres Feld mit Skalendimension $k$ und Spin $L$
$\mathcal{P}_+^\uparrow$	eigentliche orthochrone Poincaré-Gruppe
$\mathcal{P}(\mathcal{O})$	Polynomialgebra zum Gebiet $\mathcal{O}$
$P_\ell$	Projektion auf das Höchstgewicht $\ell$
$\mathbb{R}^*$	Reelle Zahlen ohne Null
$\mathbb{S}_n$	$n$ -dimensionale Einheitssphäre

$S_n$	symmetrische Gruppe
$s_{ij}$	Transposition der Elemente/Indizes $i$ und $j$
$SL(2, \mathbb{C})$	quantenmechanische Lorentz-Gruppe
$T_n$	Röhre
$V_+$	Vorwärtlichtkegel
$V(x_1, x_2)$	Twist-2-Bi-Feld
$V_\kappa(x_1, x_2)$	Twist-2 $\kappa$ -Bi-Feld
$\mathcal{V}[[\cdot]]$	formale Potenzreihe mit Koeffizienten in $\mathcal{V}$

# 1 Einleitung

Quantenfeldtheorie ist eine Vereinigung von Quantenphysik mit den Prinzipien der klassischen (relativistischen) Feldtheorie, insbesondere dem Prinzip der Lokalität bzw. Kausalität. Ihr Ursprung liegt in der Theorie der Elementarteilchen. Konforme Invarianz spiegelt die Idee wieder, dass nur Längenverhältnisse an einem Punkt eine invariante Bedeutung haben.

Die Welt ist sicher nicht konform-invariant. Warum betrachtet man konforme Quantenfeldtheorien in vier Raumzeitdimensionen, wenn schon die Anwesenheit diskreter Massen die schwächere Symmetrie der Skaleninvarianz und somit erst recht die konforme Invarianz bricht?

Die Hauptmotivation liegt sicher darin, dass Theorien mit konformer Invarianz eine größere Chance zur Konstruktion von Modellen bieten. Trotz des quantitativen Erfolgs von Quantenfeldtheorien ist es immer noch eine große Herausforderung, mathematisch konsistente Quantenfeldtheorien in vier Raumzeitdimensionen zu konstruieren. Dies rechtfertigt es, Modelle zu betrachten, welche z.B. höhere Symmetrien aufweisen oder aber in weniger als vier Raumzeitdimensionen definiert sind und zu guter Letzt sogar beides. Zum Letzteren gehören vor allem konforme Feldtheorien in zwei Raumzeitdimensionen, wo viele Erfolge zu vorzuweisen sind [7].

Nikolov und Todorov haben in [26] vorgeschlagen Quantenfeldtheorien zu betrachten, welche globale konforme Invarianz aufweisen, sich kovariant unter endlichen konformen Transformationen<sup>1</sup> auf dem Minkowski-Raum transformieren. Für diese Theorien gilt das Huygenssche Prinzip, eine starke Form der Lokalität. Dies führt zusammen mit der Forderung der Energiepositivität zu einer einfachen Struktur der Korrelationsfunktionen in Form von rationalen Funktionen und bietet einen Rahmen, in der die Konstruktion von Modellen machbar erscheint. Mit Methoden unter anderem aus der zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorie wurden in [26, 23, 24, 18, 19, 20, 2, 22, 21] global konform-invariante Quantenfeldtheorien untersucht.

In [21, 22] wurden Bedingungen an den singulärsten Teil verbundener Korrelationsfunktionen zweier skalarer Felder gleicher Skalendimension gefunden. Diese Einschränkungen ermöglichen einerseits zu zeigen, dass Theorien skalarer Felder der Skalendimension zwei nur durch Wick-Produkte freier Felder erzeugt werden. Auf der anderen Seite erlauben die Einschränkungen für höhere Skalendimensionen Polstrukturen, welche nicht von Wick-Produkten freier Felder kommen können. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, diese Polstrukturen der so genannten Doppelpole besser zu verstehen. Ein Verständnis dieser Strukturen kann sich in zweierlei Hinsicht als nützlich erweisen. Zum einen gibt es eventuell Aufschluss über die Struktur nicht-trivialer Korrelationsfunktionen. Zum anderen könnte die Kenntnis der Doppelpolstrukturen zusammen mit weiteren Erkenntnissen, diese wohl möglich

---

<sup>1</sup>im Gegensatz zur lokalen konformen Invarianz, der Invarianz unter den infinitesimalen Erzeugern

ausschließen, was ein Hinweis auf Trivialität von Theorien mit global konform-invarianter Theorie sein könnte. Zu guter Letzt kann jede weitere Einschränkung auf die Struktur der Korrelationsfunktionen von möglichen Modellen wichtig für die Klassifikation möglicher Modelle in dieser Theorie sein.

Die Arbeit strukturiert sich wie folgt.

Im zweiten Kapitel wiederholen wir kurz, was wir unter einer axiomatischen Quantenfeldtheorie verstehen. Hierauf aufbauend definieren wir solche Theorien, welche zusätzlich die Bedingung der global konformen Invarianz erfüllen. Dies hat weitreichende Konsequenzen. Zuerst impliziert die Möglichkeit mit einer konformen Transformation zueinander raumartig Punkte in zeitartige zu transformieren, so dass Felder nicht nur für raumartige Abstände (Lokalität), sondern auch für zeitartige Abstände kommutieren (Huygenssche Prinzip). Dies hat zusammen mit der Spektrumsbedingung (Energiepositivität) zur Folge, dass sich die Korrelationsfunktionen durch rationale Funktionen in den Lorentz-Abständen  $(x_i - x_j)^2$  der Punkte darstellen lassen. Die Wightman-Positivität liefert, dass solche Funktionen nur Pole endlichen Ranges besitzen können und sich somit jede  $n$ -Punktfunktion mit einer endlichen Zahl von Parametern darstellen lässt.

Im dritten Kapitel gehen wir auf die Operatorproduktentwicklung ein. Diese ist am besten in so genannten Twist-Bi-Feldern verstanden. Die Existenz einer unendlichen Anzahl von erhaltenen Strömen ist äquivalent mit der Harmonizität der Twist-2-Bi-Felder in beiden Argumenten. Diese Biharmonizität liefert wiederum kinematische Einschränkungen an den singulärsten Anteil der verbundenen Korrelationsfunktion zweier skalarer Felder gleicher Skalendimension mit anderen skalaren Feldern, beschrieben durch eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung. Die biharmonischen Felder sind insbesondere wieder Huygensbilokal, wenn nur Einfachpole vorkommen oder anders ausgedrückt, wenn die Korrelationsfunktionen keine so genannten Doppelpole enthalten.

Im Kapitel vier betrachten wir die Einschränkungen an die Korrelationsfunktionen, welche durch die Biharmonizität des Twist-2-Anteils gegeben sind, für Vier- und Fünfpunktfunktionen. Für Vierpunktfunktionen lassen sich dabei die möglichen Strukturen explizit angeben. Insbesondere ist die Vierpunktfunktion eines biharmonischen Feldes mit zwei skalaren Feldern unterschiedlicher Skalendimension schon bis auf eine Konstante festgelegt. Außerdem erfüllen alle Vierpunktfunktionen trivialerweise die Einfachpoleigenschaft. Somit sind Vierpunktfunktionen biharmonischer Felder immer rational. Wir können zeigen, dass dies auch für Fünfpunktfunktionen der Fall ist.

Im fünften Kapitel betrachten wir Korrelationsfunktionen, bei denen so genannte Doppelpole auftreten. Dies bedeutet insbesondere, dass die Korrelationsfunktionen der zugehörigen biharmonischen Felder keine rationalen Funktionen mehr sind. Ziel ist es die Polstruktur solcher Doppelpole zu verstehen. Wir können z.B. zeigen, dass diese Doppelpole immer in Paaren auftreten. Weiterhin haben wir den singulärsten Anteil dieser Strukturen für beliebig hohe Skalendimensionen komplett verstanden.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Relativistische Quantenfeldtheorie

Es gibt unterschiedliche Zugänge zur Quantenfeldtheorie, wie die Wightman-Axiome, euklidische Quantenfeldtheorien nach Osterwalder-Schrader oder algebraische Quantenfeldtheorie nach Haag-Kastler. Wir konzentrieren uns in dieser Arbeit auf den Wightman-Zugang in vier Raumzeitdimensionen. Einige Ergebnisse können jedoch auf beliebige (gerade) Anzahl von Raumzeitdimensionen verallgemeinert werden.

Wir wählen Einheiten, in denen  $\hbar = c = 1$  ist und bezeichnen mit  $\mathbb{M} = (\mathbb{R}^4, (\eta_{\mu\nu}))$  den Minkowski-Raum mit der Metrik  $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Punkte  $x \in \mathbb{M}$  schreiben wir als  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$ . Für  $x, y \in \mathbb{M}$  bezeichnen wir das Lorentz-Produkt mit  $x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu y^\mu = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - x^0 y^0$ . Außerdem kürzen wir  $x^2 = x \cdot x$  ab.

Mit  $V_+ = \{x \in \mathbb{M} \mid -x^2 > 0, x^0 > 0\}$  bezeichnen wir den *Vorwärtslichtkegel*. Ferner bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}_+^\uparrow = \text{SO}(3, 1)_0$  die Menge aller *eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen*. Sie ist gegeben durch alle homogenen linearen Transformationen  $\Lambda$ , für die  $\det \Lambda = 1$  und  $\Lambda^0_0 > 0$  ist und zusätzlich  $\Lambda x \cdot \Lambda y = x \cdot y$  für alle  $x, y \in \mathbb{M}$  gilt. Die Gruppe  $\text{Spin}_0(3, 1) = \text{SL}(2, \mathbb{C})$  bezeichnen wir als *quantenmechanische Lorentz-Gruppe*. Sie ist zweifache Überlagerung und insbesondere (in vier Raumzeitdimensionen) auch die universelle Überlagerungsgruppe von  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Wir haben folgende exakte Sequenz von Lie-Gruppen:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\} \longrightarrow \text{Spin}_0(3, 1) = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow = \text{SO}_0(3, 1) \longrightarrow 1, \quad (2.1)$$

d.h. die Pfeile sind Lie-Gruppen-Morphismen und das Bild eines Pfeils entspricht dem Kern des nächsten. Die Gruppe  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  ist gegeben durch alle komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante 1. Wir bezeichnen mit  $\Lambda(A)$  die zu  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  zugehörige Lorentz-Transformation. Wenn klar ist, was gemeint ist, identifizieren wir  $A$  direkt mit  $\Lambda(A)$  und schreiben für die Wirkung auf ein  $x \in \mathbb{M}$  nur  $Ax$ . Wir erinnern, dass die endlich-dimensionalen (komplex) irreduziblen Darstellungen der Lorentz-Gruppe  $D^{(j_1, j_2)}$  gewöhnlich durch das Gewicht  $(j_1, j_2)$  (mit  $j_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ) gekennzeichnet werden. Dabei hat die Darstellung  $(j_1, j_2)$  die Dimension  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  und wird gewöhnlich in der Spinor-Schreibweise mit  $2j_1$  ungepunkteten und  $2j_2$  gepunkteten Indizes notiert. Eine explizite Beschreibung ist z.B. in [6] gegeben. Für gerades  $j_1 + j_2$  ist  $D^{(j_1, j_2)}(-1) = 1$  und die Darstellungen sind insbesondere echte (eindeutige) Darstellungen von  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Für ungerades  $j_1 + j_2$  hingegen ist  $D^{(j_1, j_2)}(-1) = -1$  und die Darstellung ist als Darstellung von  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  zweideutig. Die reellen irreduziblen Darstellungen sind durch  $(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)$  für  $j_1 \neq j_2$  bzw.  $(j_1, j_1)$  gegeben. Wir

erinnern uns noch, dass die Darstellung  $(L/2, L/2)$  durch symmetrische spurfreie Tensoren vom Rang  $L$  geschrieben werden kann, d.h.

$$\begin{aligned} \Lambda : \psi_{\mu_1, \dots, \mu_L} &\mapsto \Lambda_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\nu_L}^{\mu_L} \psi_{\nu_1, \dots, \nu_L} \\ \eta^{\mu_1 \mu_2} \psi_{\mu_1, \dots, \mu_L} &= 0, \quad \psi_{\mu_{\sigma_1}, \dots, \mu_{\sigma_L}} = \psi_{\mu_1, \dots, \mu_L} \text{ für } \sigma \in S_L . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Wir nutzen dafür auch die abkürzende Schreibweise:

$$\Lambda : \psi \mapsto (\Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda) \psi . \quad (2.3)$$

Die *eigentliche orthochrone Poincaré-Gruppe*  $\mathcal{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{L}_+^\uparrow$  ist das semidirekte Produkt aus der Lorentz-Gruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  und der Translationsgruppe  $\mathbb{R}^4$ . Sie ist gegeben durch das Multiplikationsgesetz  $(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$ . Wir definieren noch die *quantenmechanische Poincaré-Gruppe* analog als  $\text{ISL}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{R}^4 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{C})$  mit  $(a_1, A_1)(a_2, A_2) = (a_1 + \Lambda(A_1)a_2, A_1 A_2)$ .

### 2.1.1 Wightman-Axiome

In diesem Abschnitt fassen wir zusammen, welche Eigenschaft eine relativistische Quantenfeldtheorie erfüllen soll. Diese Formulierung geht zurück auf Garding und Wightman (vgl. [28]) und deshalb spricht man auch oft von den *Wightman-Axiomen*.

In der Wightmanschen Quantenfeldtheorie sind grundlegenden physikalische Annahmen axiomatisiert. Die erste Forderung ist Lokalität. Weiterhin möchte man Kovarianz unter der Wirkung der Poincaré-Gruppe und die Existenz eines eindeutigen Zustands niedrigster Energie, dem Grundzustand. Um eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu haben, fordert man Unitarität der Theorie.

Es gibt zwei solcher Axiomensysteme. Bei der einen Formulierung steht das Feld als operatorwertige Distribution im Vordergrund. Bei der anderen die Korrelationsfunktionen, d.h. die Vakuum Erwartungswerte der Felder. Erstere lassen sich aus der Kenntnis aller möglichen Korrelationsfunktionen (re)konstruieren.

Eine Quantenfeldtheorie im Sinne Wightmans ist gegeben durch einen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ , eine unitäre Darstellung der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe  $(a, A) \mapsto U(a, A)$  und einen Satz von (die Theorie erzeugenden) Feldern  $\{\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N)}\}$ . Es kann sich dabei um nur ein Feld ( $N = 1$ ) oder mehrere Felder handeln. Wir nehmen an, dass sich jedes Feld  $\psi^{(\kappa)}$  unter einer endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellung der quantenmechanischen Lorentz-Gruppe  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  transformiert. Es kann sich dabei also um ein beliebiges spinorwertiges oder vektorwertiges Feld handeln. Seine Komponenten bezeichnen wir mit  $\psi_l^{(\kappa)}$ , wobei  $l = (1, \dots, r_\kappa)$ . Wenn  $\psi_l^{(\kappa)}$  kein hermitesches Feld ist, so soll es Indizes  $\bar{\kappa}$  und  $\bar{l}$  geben, sodass das hermitesch konjugierte Feld gegeben ist als:

$$\psi_l^{(\kappa)*} = \psi_{\bar{l}}^{(\bar{\kappa})} . \quad (2.4)$$

**Axiom 1** (Relativistische Invarianz der Zustände). Die Zustände werden als Einheitsstrahlen eines separablen Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  beschrieben. Es existiert eine stark-stetige unitäre Darstellung  $(a, A) \mapsto U(a, A)$  der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe  $\text{ISL}(2, \mathbb{C})$  auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ .

Insbesondere ist  $U(\mathbf{a}) := U(\mathbf{a}, 1)$  eine stark-stetige Darstellung von  $\mathbb{R}^4$  und es gibt selbst-adjungierte Operatoren  $P_\mu$  auf  $\mathcal{H}$  mit zugehörigem Spektralmaß  $E_\Omega$  auf  $\mathbb{R}^4$ , sodass

$$(\Phi, U(\mathbf{a})\Phi) = (\Phi, \exp(-ia^\mu P_\mu)\Phi) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ia^\mu \lambda_\mu} d(\Phi, E_\lambda \Phi) . \quad (2.5)$$

Dabei ist  $P_0$  der Energieoperator und  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  der Impulsoperator. Als relativistische Formulierung der Energiepositivität fordert man:

**Axiom 2** (Spektrumsbedingung). Das Spektrum des Energie-Impuls-Operators  $P$  liegt im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel  $\overline{V}_+$ .

**Axiom 3** (Existenz und Eindeutigkeit des Vakuums). Es existiert ein (bis auf einen Phasenfaktor) eindeutiger Vektor  $\Omega \in \mathcal{H}$ , der so genannte Vakuumvektor, welcher invariant unter Translationen  $U(\mathbf{a}, 1)$  ist, d.h.

$$U(\mathbf{a}, 1)\Omega = \Omega \quad \text{für alle } \mathbf{a} \in \mathbb{M} . \quad (2.6)$$

Wir nennen  $\Omega$  das *Vakuum* oder den *Vakuumsvektor*.

Insbesondere ist dann  $\Omega$  invariant unter der gesamten quantenmechanischen Poincaré-Gruppe (vgl. [28]).

Des Weiteren gibt es Annahmen über die Domäne und Stetigkeit der Felder, welche eher technischer Natur sind.

**Axiom 4** (Invariante Domäne für Felder). Es gibt einen dichten linearen Unterraum  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ . Die Komponenten der Felder  $\psi_l^{(\kappa)}$  sind operatorwertige temperierte Distributionen, welche auf  $\mathcal{D}$  definiert sind (vgl. Anhang A). Es ist  $\Omega \in \mathcal{D}$  und die Domäne  $\mathcal{D}$  ist stabil unter der Wirkung der Felder und Darstellung, d.h.  $\psi_l^{(\kappa)}(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$  für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M})$  sowie  $U(\mathbf{a}, A)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ .

**Axiom 5** (Poincaré-Kovarianz der Felder). Für  $(\mathbf{a}, A) \in \text{ISL}(2, \mathbb{C})$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M}, \mathbb{C}^{r_\kappa})$  ist

$$U(\mathbf{a}, A)\psi^{(\kappa)}(f)U(\mathbf{a}, A)^{-1}\Psi = \psi^{(\kappa)}(f_{\mathbf{a}, A})\Psi \quad (2.7)$$

für alle  $\Psi \in \mathcal{D}$ , wobei

$$f_{\mathbf{a}, A}(\mathbf{x}) = V^{(\kappa)}(A^{-1})^\dagger f(\Lambda(A)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})) . \quad (2.8)$$

Wie schreiben dies formal als:

$$U(\mathbf{a}, A)\psi_l^{(\kappa)}(x)U(\mathbf{a}, A)^{-1} = \sum_k V_{lk}^{(\kappa)}(A^{-1})\psi_k^{(\kappa)}(\Lambda(A)x + \mathbf{a}) = V^{(\kappa)}(A^{-1})\psi^{(\kappa)}(\Lambda(A)x + \mathbf{a}) . \quad (2.9)$$

$A \mapsto V^{(\kappa)}(A)$  ist eine reelle oder komplexe endlich-dimensionale (genauer  $r_\kappa$ -dimensionale) Matrixdarstellung der Gruppe  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

**Axiom 6** (Lokale Kommutativität und mikroskopische Kausalität). Besitzen  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M}, \mathbb{C}^{r_\kappa})$  und  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{M}, \mathbb{C}^{r_{\kappa'}})$  raumartig getrennten Träger, d.h. aus  $\mathbf{x} \in \text{supp } f$  und  $\mathbf{y} \in \text{supp } g$  folgt  $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 > 0$ , so ist für  $\Psi \in \mathcal{D}$ :

$$\left[ \psi^{(\kappa)}(f)\psi^{(\kappa')}(g) - s_{\kappa, \kappa'}\psi^{(\kappa')}(g)\psi^{(\kappa)}(f) \right] \Psi = 0 , \quad (2.10)$$

mit  $s_{\kappa, \kappa'} = -1$ , wenn  $\psi^{(\kappa)}$  und  $\psi^{(\kappa')}$  fermionische Felder sind und  $s_{\kappa, \kappa'} = 1$  sonst<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Wir fordern also eine normale Verbindung zwischen Spin und Statistik (vgl. [6]).

**Axiom 7** (Zyklizität des Vakuums). Die Menge  $\mathcal{D}_0$  (Wightman-Domäne) aller endlichen Linearkombinationen von Vektoren der Form

$$\psi^{(\kappa_1)}(f_1) \cdots \psi^{(\kappa_m)}(f_m)\Omega \quad \text{mit} \quad f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{M}, \mathbb{C}^{r_{\kappa_i}}), \quad (2.11)$$

ist dicht in  $\mathcal{H}$ .

## 2.1.2 Wightmanfunktionen

Aus der Axiomatik folgt, dass die Korrelationsfunktionen bestimmte Eigenschaften erfüllen. Andersherum lässt sich bereits aus der Kenntnis aller Wightmanfunktionen die komplette Theorie (bis auf unitäre Äquivalenz) wiedergewinnen. Wir geben ein äquivalentes Axiomensystem für die Wightmanfunktionen an, da diese später die zentralen Objekte sind, welche wir untersuchen werden.

Wir bezeichnen die Wightmanfunktionen mit

$$\mathcal{W}_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \langle \psi_{l_1}^{(\kappa_1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \psi_{l_n}^{(\kappa_n)}(\mathbf{x}_n) \rangle = \left( \Omega, \psi_{l_1}^{(\kappa_1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \psi_{l_n}^{(\kappa_n)}(\mathbf{x}_n) \Omega \right) \quad (2.12)$$

oder auch

$$\mathcal{W}_n = \left( \mathcal{W}_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)} \right). \quad (2.13)$$

Insbesondere folgt aus dem Kerntheorem (siehe Anhang A), dass  $\mathcal{W}_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}$  auch gleichzeitig eine Distribution aus  $\mathcal{S}'(\mathbb{M}^n)$  ist. Wir fassen die Eigenschaften dieser Distributionen zusammen.

**Wightman 1** (Regularitätseigenschaften). Die Wightmanfunktionen sind temperierte Distributionen, d.h.  $\mathcal{W}_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{M}^n)$  mit

$$\mathcal{W}_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(f) = \int_{\mathbb{M}^n} \mathcal{W}_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(f) \cdot f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \, dx_1 \cdots dx_n. \quad (2.14)$$

**Wightman 2** (Hermitizitätseigenschaft). Es gilt:

$$\overline{\langle \psi_{l_1}^{(\kappa_1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \psi_{l_n}^{(\kappa_n)}(\mathbf{x}_n) \rangle} = \langle \psi_{l_n}^{(\bar{\kappa}_n)}(\mathbf{x}_n) \cdots \psi_{l_1}^{(\bar{\kappa}_1)}(\mathbf{x}_1) \rangle. \quad (2.15)$$

**Wightman 3** (Wightman-Positivität).

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\kappa_1, \dots, \kappa_m \\ l_1, \dots, l_m}} \langle \psi_{l_m}^{(\bar{\kappa}_m)}(\mathbf{x}_m) \cdots \psi_{l_1}^{(\bar{\kappa}_1)}(\mathbf{x}_1) \psi_{l'_1}^{(\kappa'_1)}(\mathbf{y}_1) \cdots \psi_{l'_n}^{(\kappa'_n)}(\mathbf{y}_n) \rangle \times \\ & \quad \times \overline{f_{l_1 \dots l_m}^{(\kappa_1 \dots \kappa_m)}(\mathbf{x}_m, \dots, \mathbf{x}_n) f_{l'_1 \dots l'_n}^{(\kappa'_1 \dots \kappa'_n)}(\mathbf{y}_m, \dots, \mathbf{y}_n)} \, dx_1 \cdots dx_m \, dy_1 \cdots dy_n \geq 0 \end{aligned}$$

für jedes System von Testfunktionen  $\{f_{l_1 \dots l_n}^{\kappa_1 \dots \kappa_n}\}$  mit  $f_{l_1 \dots l_n}^{\kappa_1 \dots \kappa_n} \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^n)$  bei dem nur endlich viele nicht verschwinden.

**Wightman 4** (Translationsinvarianz und Spektrumsbedingung). Es existieren temperierte Distributionen  $W_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{M}^{n-1})$  mit

$$\mathcal{W}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(f) = \int_{\mathbb{M}^n} W_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(f(x)) \, dx \quad (2.16)$$

wobei

$$f_{(x)}(y_1, \dots, y_{n-1}) = f(x, x - y_1, x - y_1 - y_2, \dots, x - y_1 - \dots - y_{n-1}) \quad (2.17)$$

ist. Formal geschrieben als

$$\mathcal{W}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n) = W_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1 - x_2, \dots, x_{n-1} - x_n) \quad (2.18)$$

und die Fouriertransformierte von  $W_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}$

$$\widehat{W}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(k_1, \dots, k_{n-1}) = (2\pi)^{-2(n-1)} \int_{\mathbb{M}^{n-1}} W_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \exp(-i \sum_{j=1}^{n-1} k_j \cdot x_j) \quad (2.19)$$

hat Träger im  $n$ -fachen kartesischen Produkt des Vorwärtslichtkegels, d.h.

$$\text{supp } \widehat{W}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)} \subset (\overline{V^+})^{n-1}. \quad (2.20)$$

**Wightman 5** (Relativistisches Transformationsgesetz). Für  $(a, A) \in \text{ISL}(2, \mathbb{C})$  gilt:

$$V^{(\kappa_1)}(A^{-1}) \otimes \dots \otimes V^{(\kappa_n)}(A^{-1}) \mathcal{W}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(Ax_1 + a, \dots, Ax_n + a) = \mathcal{W}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.21)$$

im Sinne von Distributionen.

**Wightman 6** (Clustereigenschaft). Für raumartiges  $a \in \mathbb{M}$  gilt:

$$\mathcal{W}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1} + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \rightarrow \mathcal{W}_{\ell_1 \dots \ell_k}^{(\kappa_1 \dots \kappa_k)}(x_1, \dots, x_k) \mathcal{W}_{\ell_{k+1} \dots \ell_n}^{(\kappa_{k+1} \dots \kappa_n)}(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (2.22)$$

für  $t \rightarrow \infty$ .

**Wightman 7** (Lokalität). Für  $(x_k - x_{k+1})^2 > 0$  gilt:

$$\mathcal{W}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n) = s_{\kappa_k, \kappa_{k+1}} \mathcal{W}_{\ell_1 \dots \ell_{k+1} \ell_k \dots \ell_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_{k+1} \kappa_k \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_{k+1}, x_k, \dots, x_n). \quad (2.23)$$

Das Wightman-Rekonstruktionstheorem (vgl. [6] Theorem 8.6, S. 339) besagt, dass aus der Kenntnis der Wightmanfunktionen, welche die Eigenschaften Wightman 1-7 erfüllen, sich die Felder konstruieren lassen, welche Axiom 1-7 für die Felder erfüllen und die gleichen Wightmanfunktionen besitzen.

Die Clustereigenschaft motiviert die Definition der so genannten *trunkierten Wightmanfunktionen*. Wir definieren sie für bosonische Felder  $\psi_{l_i}^{(\kappa_i)} =: A_i$ . Sie sind gegeben durch  $\langle A_1 \rangle^T = \langle A_1 \rangle$  und die Rekursionsrelation

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle = \sum \langle A_{j_1, 1} \dots A_{j_1, k_1} \rangle^T \dots \langle A_{j_\nu, 1} \dots A_{j_\nu, k_\nu} \rangle^T, \quad (2.24)$$

wobei die Summe über alle Aufteilungen der Indizes  $\{1, \dots, n\}$  in Gruppierungen läuft, sodass die Indizes in jeder Gruppierung aufsteigend sortiert sind. Eine typische Aufteilung ist von der Form:

$$\{1, \dots, n\} = \{j_{1,1}, \dots, j_{1,k_1}\} \cup \dots \cup \{j_{\nu,1}, \dots, j_{\nu,k_\nu}\} , \quad (2.25)$$

wobei  $1 \leq \nu \leq$  die Anzahl der Gruppierungen und  $k_1, \dots, k_\nu$  die Länge der jeweiligen Gruppierung ist. Es sei bemerkt, dass aus der Translationsinvarianz folgt, dass die Einpunktfunktion eine Konstante ist. Ist die Theorie zusätzlich skaleninvariant, so verschwindet diese insbesondere, da Null die einzige Konstante ist, welche invariant unter Skalentransformationen bleibt. Nehmen wir an, dass  $\langle A_i \rangle = 0$  ist. Dann gilt folglich:

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 \rangle^T &= \langle A_1 A_2 \rangle \\ \langle A_1 A_2 A_3 \rangle^T &= \langle A_1 A_2 A_3 \rangle \\ \langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle^T &= \langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle - \langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 A_4 \rangle - \langle A_1 A_3 \rangle \langle A_2 A_4 \rangle - \langle A_1 A_4 \rangle \langle A_2 A_3 \rangle \end{aligned} \quad (2.26)$$

usw.

Ist für ein Feld nur die trunkierte Zweipunktfunktion ungleich Null, so sind alle Korrelationsfunktionen durch die Zweipunktfunktion gegeben und man spricht von einem *verallgemeinerten freien Feld*.

Unter der Beachtung, dass mit unseren Konventionen der duale Kegel  $V_+^* = V_-$  ist folgt aus der Spektrumsbedingung (4) zusammen mit Theorem A.1, dass

$$\widehat{W}(y_1, \dots, y_{n-1}) = W(-y_1, \dots, -y_{n-1})$$

Randwert einer in  $\mathbb{M}^{n-1} - iV_-^{n-1}$  analytischen Funktion ist. Wir halten fest:

**Theorem 2.1.** *Die reduzierten Wightmanfunktionen  $W_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}$  sind Randwerte von (tensorwertigen) analytischen Funktionen im Sinne von  $\mathcal{S}'(\mathbb{M}^{n-1})$ , welche analytisch in der Röhre  $T_n := \mathbb{M}^{n-1} - iV_+^{n-1}$  sind.*

Für eine offene Menge  $\mathcal{O} \in \mathbb{M}$ , sei  $\mathcal{P}(\mathcal{O})$  die *Polynomialalgebra von  $\mathcal{O}$*  generiert durch endliche komplexe Linearkombination aller möglichen Operatoren der Form

$$A := \int \psi_{l_1}^{(\kappa_1)}(x_1) \cdots \psi_{l_n}^{(\kappa_n)}(x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n , \quad (2.27)$$

wobei die Testfunktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^n)$  in  $\mathcal{O}^n$  getragen sein soll (für  $n = 0$  ist  $A \in \mathbb{C}$  ein Vielfaches des Einheitsoperators). Mit  $\mathcal{O}'$  bezeichnen wir das *kausale Komplement*, welches gegeben ist durch das Innere der Menge aller Punkte, welche raumartig zu  $\mathcal{O}$  liegen, d.h.

$$\mathcal{O}' = \{x \in M \mid (x - y)^2 > 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{O}\}^\circ . \quad (2.28)$$

Insbesondere liegt wegen der Wightman 7 die Menge  $\mathcal{P}(\mathbb{M})\Omega$  dicht in  $\mathcal{H}$ . Als nützlich erweist sich folgendes Theorem, welches auf Reeh und Schlieder zurückgeht:

**Theorem 2.2** (Reeh-Schlieder, vgl. [6] Proposition 8.2 und 8.3). *Sei  $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$  offen.*

1.  $\Omega$  ist zyklisch für  $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ , d.h.  $\mathcal{P}(\mathcal{O})\Omega$  ist dicht  $\mathcal{H}$ .
2. Ist zusätzlich  $\mathcal{O}' \neq \emptyset$ , dann ist  $\Omega$  separierend für  $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ , d.h. für ein  $T \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$  mit  $T\Omega = 0$  ist  $T = 0$ .

## 2.2 Global konform-invariante Quantenfeldtheorie

Seit der Entdeckung der konformen Invarianz der Maxwell'schen Gleichungen gewinnen konforme Symmetrien immer wieder Anziehungskraft in der theoretischen und mathematischen Physik. In diesem Abschnitt betrachten wir Wightmansche Quantenfeldtheorien, welche eine solche höhere Symmetrie aufweisen, genauer so genannte *global konforme-invariante Quantenfeldtheorien*.

Wir werden zeigen, dass Invarianz von Wightmanfunktionen unter endlichen konformen Transformationen<sup>2</sup> das so genannte Huygenssche Prinzip zur Folge hat, d.h. Felder kommutieren nicht nur für raumartige Separationen (Einstein-Lokalität) sondern sowohl für raum- als auch zeitartig separierte Felder (Huygens-Lokalität). Dies wiederum hat zusammen mit der Spektrumsbedingung (Energiepositivität) rationale Korrelationsfunktionen zur Folge. Wightman-Positivität führt dazu, dass die Pole in den Poincaré-Invarianten  $(x_i - x_j)^2$  uniformen Schranken (den so genannten Polschranken/Unitaritätsschranken) unterliegen. Dies hat zusammen mit der Rationalität zur Folge, dass die  $n$ -Punktfunktionen nur durch eine endliche Anzahl von Parametern gegeben sind und bietet somit einen Rahmen, welcher attraktiv für die Untersuchung und Konstruktion von Modellen ist.

### 2.2.1 Die konforme Gruppe

Als konforme Transformationen gelten Transformationen, welche Winkel, also das Verhältnis von Längen (zumindest infinitesimal) invariant lassen. Diese Eigenschaft lässt sich für Räume mit indefiniter Metrik (z.B. Lorentzsche Mannigfaltigkeiten) verallgemeinern.

Für den Zweck dieser Arbeit ist folgende Definition hinreichend. Eine reelle rationale Koordinatentransformation  $g : x \mapsto y(x)$  des Minkowski-Raums  $M$  (mit evtl. Singularitäten) wird konform genannt, wenn die Metrik unter der Transformation mit einer positiven Funktion in  $x$  multipliziert wird, d.h.

$$dy^2 = \frac{dx^2}{(\omega(x, g))^2} . \quad (2.29)$$

Der *konforme Faktor*  $\omega(x, g)$  erfüllt dabei eine Kozyklus-Relation:

$$\omega(x, g_1 g_2) = \omega(g_2 x, g_1) \omega(x, g_2) \quad (2.30)$$

und ist maximal quadratisch in  $x$ . Die Gruppe der konformen Transformationen bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}_0$ .

Neben der Untergruppe der Poincaré-Transformationen, für welche der konforme Faktor definitionsgemäß  $\omega(x, \mathcal{P}_+^\uparrow) = 1$  ist, gibt es zum einen die ein-parametrische Untergruppe bestehend aus den *Dilatationen*, auch *Skalentransformationen* genannt, der Form:

$$g_\lambda : x \mapsto \lambda x, \quad (2.31)$$

wobei  $\lambda$  eine positive Zahl und  $\omega(x, g_\lambda) = \lambda^{-1}$  ist.

<sup>2</sup>im Gegensatz zu lokaler konformer Invarianz, wo man nur die Invarianz unter infinitesimalen Transformationen fordert

Weiterhin gibt es noch die 4-parametrische Untergruppe der *speziellen konformen Transformationen*, welche gegeben sind durch:

$$g_a : x \mapsto \frac{x + x^2 a}{1 + 2x \cdot a + a^2 x^2} , \quad (2.32)$$

wobei  $a \in \mathbb{M}$  und  $\omega(x, g_a) = 1 + 2x \cdot a + a^2 x^2$  ist. Man beobachtet, dass  $g_a$  für  $x$  mit  $1 + 2x \cdot a + a^2 x^2 = 0$  Singularitäten besitzt. Diese verschwinden, wenn man zu dem konform-kompaktifizierten Minkowski-Raum  $\overline{\mathbb{M}}$  übergeht. Dieser ist eine kompakte Mannigfaltigkeit, welche  $\mathbb{M}$  als eingebettete dichte Teilmenge enthält und kann parametrisiert werden als projektiver Raum aller isotropen Punkte in  $\mathbb{R}^{4+2}$  (siehe Anhang B):

$$\overline{\mathbb{M}} = Q/\mathbb{R}^*, \cong \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_1/\mathbb{Z}_2 \quad Q = \{ \xi \in \mathbb{R}^{4+2} \mid \xi \neq 0, \xi^2 := \xi^2 + \xi_4^2 - \xi_{-1}^2 - \xi_0^2 = 0 \} .$$

Es sei bemerkt, dass jede spezielle konforme Transformation  $g_a$  als Produkt einer Inversion mit einer Translation um  $a$  mit einer weiteren Inversion dargestellt werden kann (vgl. [11]):

$$x \mapsto \frac{x}{x^2} \mapsto \frac{x}{x^2} + a \mapsto \frac{\frac{x}{x^2} + a}{\left(\frac{x}{x^2} + a\right)^2} = \frac{x + x^2 a}{1 + 2x \cdot a + a^2 x^2} . \quad (2.33)$$

Daraus leitet man leicht die Regel  $g_a g_b = g_{a+b}$  und daraus wiederum  $g_a^{-1} = g_{-a}$  ab. Dies kann nützlich sein, wenn man einen Ausdruck auf konforme Invarianz überprüfen will.

Das Lorentz-Intervall  $(x-y)^2$  zweier Punkte transformiert sich wie folgt unter der Wirkung einer konformen Transformation  $g \in \mathcal{C}_0$ :

$$(gx - gy)^2 = \frac{(x - y)^2}{\omega(x, g)\omega(y, g)} . \quad (2.34)$$

Damit kann man beispielsweise zeigen, dass die so genannten anharmonischen Verhältnisse von vier Punkten  $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{M}$ :

$$s = s(x_1, \dots, x_4) = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} \quad t = t(x_1, \dots, x_4) = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} , \quad (2.35)$$

invariant unter konformen Transformationen sind. Nach Konstruktion kürzen sich alle konformen Faktoren weg.

Die so gewonnene 15-parametrische (Matrix-Lie-) Gruppe  $\mathcal{C}_0$  obiger rationaler Transformationen ist isomorph zur Faktorgruppe  $SO_0(4, 2)/\mathbb{Z}_2$  von der Zusammenhangskomponente der Identität der Pseudo-Rotationen  $SO_0(4, 2)$  bezüglich deren Zentrum  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ .

## 2.2.2 Darstellungen der konformen Gruppe

Um auch Felder mit halbzahligen Spin (d.h. Fermionen) beschreiben zu können, sind wir interessiert an Darstellungen der endlichen Überlagerung der  $\mathcal{C} = \text{Spin}_0(4, 2) = \text{SU}(2, 2)$  der konformen Gruppe  $\mathcal{C}_0$  von  $\overline{\mathbb{M}}$ , welche insbesondere die quantenmechanische Lorentz-

und Poincaré-Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  bzw.  $ISL(2, \mathbb{C})$  als Untergruppe enthält (vgl. [16] und [26] Abschnitt 4 (4.4)). Die Gruppe  $\mathcal{C}$  ist eine vierfache Überlagerung der konformen Gruppe  $\mathcal{C}_0$

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathcal{C} = \text{Spin}_0(4, 2) = \text{SU}(2, 2) \rightarrow \mathcal{C}_0 = \text{SO}_0(4, 2)/\mathbb{Z}_2 \rightarrow 1 \quad (2.36)$$

und ist gegeben durch alle  $4 \times 4$ -Matrizen  $g$  mit

$$\det \beta = 1, \quad g\beta g^* = \beta, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

wobei  $\mathbb{1}_2$  die  $2 \times 2$  Einheitsmatrix ist. Die quantenmechanische konforme Gruppe  $\mathcal{C}$  wirkt (über die kanonische Projektion auf  $\mathcal{C}_0$ ) transitiv (siehe Anhang B) auf  $\overline{\mathcal{M}}$ , dem konform-kompaktifizierten Minkowski-Raum.

Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathcal{C})$  von  $\mathcal{C}$  ist  $\mathbb{Z}$ . Somit ist die universelle Überlagerungsgruppe  $\tilde{\mathcal{C}}$  von  $\mathcal{C}$  eine unendliche Überlagerung von  $\mathcal{C}$ :

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}) = \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C} = \text{Spin}_0(4, 2) = \text{SU}(2, 2) \rightarrow 1. \quad (2.38)$$

Sie ist insbesondere keine Matrixgruppe (d.h. es gibt keine treue endlich-dimensionale Darstellung auf einem Vektorraum).

In [16] sind alle unitären Strahlen-Darstellungen positiver Energie von  $\mathcal{C}$  klassifiziert. Sie liefern insbesondere eine echte unitäre Darstellung der Gruppe  $\tilde{\mathcal{C}}$  mit positiver Energie  $P^0 \geq 0$ . Es sei bemerkt, dass positive Energie  $P^0 \geq 0$  auch  $H \geq 0$  impliziert, wobei  $H$  der so genannte konforme Hamiltonian gegeben durch  $H = (P^0 + K^0)/2$  und  $K^0$  ein Generator der speziellen konformen Transformation ist. Die Darstellungen sind Felddarstellungen, welche durch Darstellungen der endlich-dimensionalen maximalen kompakten Untergruppe  $S(U(2) \times U(2))$  induziert und durch ein Tripel  $(d, j_1, j_2)$  charakterisiert sind.

Für Felder auf dem Minkowski-Raum ist  $d$  die Skalendimension und  $(j_1, j_2)$  bezeichnet die irreduzible Darstellung der quantenmechanischen Lorentz-Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Die Bedingung der Unitarität erlaubt nur die Darstellungen

1. triviale Darstellung  $d = j_1 = j_2 = 0$
2.  $j_1, j_2 \neq 0, d > j_1 + j_2 + 2$
3.  $j_1 j_2 = 0, d > j_1 + j_2 + 1$
4.  $j_1, j_2 \neq 0, d = j_1 + j_2 + 2$
5.  $j_1 j_2 = 0, d = j_1 + j_2 + 1.$

Die korrespondierenden Felder sind im vierten Fall erhalten und erfüllen im fünften Fall freie Feldgleichungen (vgl. [33]). Die Darstellungen sind insbesondere eindeutige Darstellungen für  $\mathcal{C}$ , wenn der *Twist*, gegeben durch  $d - j_1 - j_2$ , eine positive ganze Zahl ist.

### 2.2.3 Global konforme Invarianz

Wir betrachten eine Wightmansche Quantenfeldtheorie, nur jetzt statt des relativistischen Transformationsgesetzes unter  $(a, A) \in \text{ISL}(2, \mathbb{C})$ :

$$\psi^{(\kappa)}(\mathbf{x}) \rightarrow V^{(\kappa)}(A)^{-1} \psi^{(\kappa)}(A\mathbf{x} + \mathbf{a}) , \quad (2.39)$$

fordern wir ein allgemeineres Transformationsgesetz unter konformen Transformationen  $g \in \mathcal{C}$ :

$$\psi^{(\kappa)}(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_{\mathbf{x}}(g)^{-1} \psi^{(\kappa)}(g\mathbf{x}) , \quad (2.40)$$

gültig für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$ , sodass das Bild  $g\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  ist. Dabei ist  $\pi_{\mathbf{x}}(g)$  für alle  $g$  und alle  $\mathbf{x}$  mit  $g\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  ein Automorphismus von  $\mathbb{C}^{r_\kappa}$ . Es ist  $\pi_{\mathbf{x}}(t_{\mathbf{a}}) = 1$  für Translationen  $t_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$  und für alle  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$  ist die Relation

$$\pi_{\mathbf{x}}(g_1 g_2) = \pi_{g_2 \mathbf{x}}(g_1) \pi_{\mathbf{x}}(g_2) \quad (g\mathbf{x} \in \mathbb{M}) \quad (2.41)$$

erfüllt. Für alle  $g$  aus der Untergruppe  $\mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$  der Skalen- und Lorentz-Transformationen ist  $\pi_{\mathbf{x}}(g)$  insbesondere unabhängig von  $\mathbf{x}$ .

Wir nehmen an, dass  $\pi_{\mathbf{x}}(g)$  durch eine Darstellung  $(d, j_1, j_2)$  aus dem Abschnitt zuvor induzierte ist. Speziell für Dilatationen  $g_\lambda : \mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$  gilt dann:

$$\psi^{(\kappa)}(\mathbf{x}) \mapsto \pi_{\mathbf{x}}^{(\kappa)}(g)^{-1} \psi^{(\kappa)}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^d \psi^{(\kappa)}(\lambda \mathbf{x}) , \quad (2.42)$$

wobei  $d$  die *Skalendimension* des Feldes ist. Wir erinnern uns, dass die Darstellung nur eindeutig ist, wenn  $d + j_1 + j_2$  eine ganze Zahl ist.

Für eine konforme Transformation  $g \in \mathcal{C}$  definieren wir  $U_g = \{\mathbf{x} \in \mathbb{M} \mid g\mathbf{x} \in \mathbb{M}\}$ , den Definitionsbereich von  $g$ .

*Definition* (Global konforme Invarianz). Eine Wightman-Theorie heißt global konform-invariant, wenn für alle  $g \in \mathcal{C}$

$$\pi_{\mathbf{x}_1}^{(\kappa_1)}(g)^{-1} \otimes \dots \otimes \pi_{\mathbf{x}_n}^{(\kappa_n)}(g)^{-1} \langle \psi^{(\kappa_1)}(g\mathbf{x}_1) \dots \psi^{(\kappa_n)}(g\mathbf{x}_n) \rangle = \langle \psi^{(\kappa_1)}(\mathbf{x}_1) \dots \psi^{(\kappa_n)}(\mathbf{x}_n) \rangle \quad (2.43)$$

in dem Definitionsbereich von  $g$  im Sinne von Distributionen, d.h. die Identität gilt für die mit in  $U_g^n$  getragenen Testfunktionen verschmierten Ausdrücke.

Sind  $\{\psi^{(\kappa_1)}, \dots, \psi^{(\kappa_n)}\}$  skalare Felder mit der zugehörigen Skalendimension  $d_{\kappa_i}$ , so ist  $\pi_{\mathbf{x}}(g) = \omega(\mathbf{x}, g)^{d_{\kappa_i}}$ . Die Bedingung vereinfacht sich zu:

$$[\omega(\mathbf{x}_1, g)]^{-d_{\kappa_1}} \dots [\omega(\mathbf{x}_n, g)]^{-d_{\kappa_n}} \langle \psi^{(\kappa_1)}(g\mathbf{x}_1) \dots \psi^{(\kappa_n)}(g\mathbf{x}_n) \rangle = \langle \psi^{(\kappa_1)}(\mathbf{x}_1) \dots \psi^{(\kappa_n)}(\mathbf{x}_n) \rangle \quad (2.44)$$

für  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in U_g$ .

Wir bemerken, dass diese Formulierung in gewissen Maßen natürlich ist, da sie äquivalent ist mit einer Forderung der Invarianz verallgemeinerter Schnitte (Distributionen auf Mannigfaltigkeiten) auf einem Vektorbündeln über dem kompaktifizierten Minkowski-Raum  $\overline{\mathbb{M}}$  (siehe [26]).

*Definition.* Die Zweipunktfunktion des masselosen skalaren Feldes  $\varphi$  ist gegeben durch:

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle = (2\pi)^{-2} \frac{1}{(x_{12} - i\epsilon e_0)^2}, \quad (2.45)$$

wobei  $x_{12} = x_1 - x_2$ ,  $e_0 = (1, 0, 0, 0)$  der Standardbasisvektor in die 0-Richtung ist und der Ausdruck als Distribution durch den schwachen Grenzwert  $\epsilon \downarrow 0$  zu verstehen ist, d.h.

$$\langle \varphi(f)\varphi(g) \rangle = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{M}^2} \frac{f(x_1)g(x_2)}{(x_{12} - i\epsilon e_0)^2} dx_1 dx_2. \quad (2.46)$$

*Beispiel 2.1.* Das Modell des freien masselosen skalaren Feldes ist gegeben durch die  $n$ -Punktfunktionen:

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n) \rangle = \begin{cases} \sum_{\text{geordnete Paare}} \langle \varphi(x_{i_1})\varphi(x_{i_2}) \rangle \cdots \langle \varphi(x_{i_{n-1}})\varphi(x_{i_n}) \rangle & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.47)$$

Es erfüllt alle Axiome sowie die Bedingung der global konformen Invarianz. Beispielsweise folgt die Wightman-Positivität daraus, dass die Fouriertransformierte von  $W(x_{12}) = \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle$  ein positives Maß ist. Die global konforme Invarianz folgt aus Proposition 2.9, insbesondere ist die Skalendimension vom Feld  $d = 1$ . Die Zweipunktfunktion ist harmonisch, daraus folgt  $\square\varphi(f)\Omega \equiv \varphi(\square f)\Omega = 0$  für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M})$ . Zusammen mit dem Reeh-Schlieder-Theorem (Theorem 2.2) folgt, dass  $\square\varphi = 0$  ist. Hierbei ist  $\square = \partial_\mu\partial^\mu$  der Wellenoperator.

**Proposition 2.3** ([26]). *Jedes Produkt von Zweipunktfunktionen von der Form (2.45) erfüllt die Bedingung der global konformen Invarianz (für Skalarfelder der Dimension  $\mu_k$ ), d.h.*

$$\begin{aligned} & [\omega(x_1, g)]^{-\mu_1} \cdots [\omega(x_n, g)]^{-\mu_n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} [(gx_j - gx_k - i\epsilon e_0)^2]^{-\mu_{jk}} \\ &= \prod_{1 \leq j < k \leq n} [(x_{jk} - i\epsilon e_0)^2]^{-\mu_{jk}}, \quad (gx_1, \dots, gx_n \in \mathbb{M}), \end{aligned} \quad (2.48)$$

mit  $\mu_{jk} \in \mathbb{Z}$  und

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{jk} + \sum_{l=k+1}^n \mu_{kl}. \quad (2.49)$$

*Die Gleichheit ist hier wieder im Sinne von Distributionen zu verstehen.*

*Beweisskizze.* Außerhalb der Singularitäten ist die Behauptung klar. Der Rest folgt daraus, dass die Funktion Grenzwert einer analytischen Funktion in  $T_n$  ist und aus der Invarianz der Röhre  $T_n$  (Details siehe Appendix B in [26]).  $\square$

Wir werden sehen, dass Korrelationsfunktionen skalarer Felder eine Linearkombination von Funktionen der Form (2.48) sind.

### 2.2.4 Huygensche Prinzip und Rationalität der Wightmanfunktionen

Wir nennen ein Paar von Punkten  $(x, y) \in \mathbb{M} \times \mathbb{M}$  gegenseitig *isotrop*, wenn  $(x - y)^2 = 0$ , d.h. wenn ihr Abstand lichtartig ist. Andernfalls nennen wir das Paar gegenseitig *nicht-isotrop*. Insbesondere bilden konforme Transformationen gegenseitig isotrope Punkte auf ebensolche ab. Die „Punkte bei unendlich“ liegen in einem Kegel  $K_\infty = \overline{\mathbb{M}} \setminus \mathbb{M}$  und sind alle isotrop in Bezug auf  $p_\infty \in K_\infty$ . Die Spitze dieses Kegels  $p_\infty$  ist des Weiteren invariant unter Poincaré- und Skalentransformationen.

Es stellt sich heraus, dass die nicht-isotropen Paare von Punkten  $(p_0, p_1) \in \overline{\mathbb{M}} \times \overline{\mathbb{M}}$  in einem einzigen Orbit liegen, d.h.

**Proposition 2.4** ([26]). *Jedes Paar  $(p_0, p_1)$  von nicht-isotropen Punkten im kompaktifizierten Minkowski-Raum  $\overline{\mathbb{M}}$  kann mit Hilfe einer konformen Transformation in ein jedes solches andere Paar  $(p'_0, p'_1)$  überführt werden.*

*Beweis.* Sei  $(p_0, p_1)$  ein Paar gegenseitig nicht-isotroper Punkte,  $(p'_0, p'_1)$  ein weiteres solches Paar. Wegen der Transitivität der Gruppe  $\mathcal{C}_0$  gibt es Elemente  $g_0$  und  $g'_0$ , welche  $p_0$  bzw.  $p'_0$  auf den Punkt  $p_\infty$  abbilden, d.h.  $g_0 p_0 = g'_0 p'_0 = p_\infty$ . Damit liegen aber die Bilder  $g_0 p_1$  und  $g'_0 p'_1$  in  $\mathbb{M}$ . Dies folgt aus der Tatsache, dass zum einen alle Punkte aus  $K_\infty = \overline{\mathbb{M}} \setminus \mathbb{M}$  isotrop zu  $p_\infty$  sind und zum anderen, dass die ursprünglichen Punkte  $p_0$  und  $p_1$  bzw.  $p'_0$  und  $p'_1$  gegenseitig nicht-isotrop waren. Dann gibt es eine Translation  $t$  mit  $g'_0 p'_1 = t g_0 p_1$ . Da  $t$  den Punkt  $p_\infty$  invariant lässt, behaupten wir dass  $g = (g'_0)^{-1} t g_0$  bereits unser gesuchtes Gruppenelement ist. Es gilt nämlich  $g p_0 = (g'_0)^{-1} t g_0 p_0 = (g'_0)^{-1} t p_\infty = (g'_0)^{-1} p_\infty = p'_0$  und  $g p_1 = (g'_0)^{-1} t g_0 p_1 = (g'_0)^{-1} g'_0 p'_1 = p'_1$ .  $\square$

**Lemma 2.5** ([26]). *Seien  $(x_1, \dots, x_m, y_1, y_2)$  Punkte aus  $\mathbb{M}$  mit  $(y_1 - y_2)^2 \neq 0$ , dann gibt es zu jedem Paar von Punkten  $y'_1, y'_2$  aus  $\mathbb{M}$  mit  $(y_1 - y_2)^2 \neq 0$  ein Element  $g \in C$ , sodass  $g x_i \in \mathbb{M}$  für alle  $1 \leq i \leq m$  sowie  $y'_1 = g y_1$  und  $y'_2 = g y_2$ .*

Für den Beweis verweisen wir auf [26].

Diese Eigenschaft hat zusammen mit der Lokalität zur Folge, dass neben raumartig auch zeitartig getrennte Felder kommutieren:

$$\left[ \psi^{(\kappa_1)}, \psi^{(\kappa_2)} \right]_{\pm} = 0 \quad \text{für} \quad (x_1 - x_2) \neq 0, \quad (2.50)$$

das so genannte *Huygenssche Prinzip*.

Wir sagen die Funktion  $F_{\kappa_1 \dots \kappa_n}(x_1, \dots, x_n)$  ist  $\mathbb{Z}_2$ -symmetrisch, wenn für alle Permutationen  $\sigma \in S_n$   $F_{\kappa_{\sigma(1)} \dots \kappa_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \pm F_{\kappa_1 \dots \kappa_n}(x_1, \dots, x_n)$  gilt.

**Theorem 2.6** ([26]). *Die temperierte Distribution  $\mathcal{W}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n)$  erfüllt die Translationsinvarianz und Spektrumsbedingung, Lokalität und global konforme Invarianz genau dann, wenn sie von der Form:*

$$\mathcal{W}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n) \prod_{1 \leq j < k \leq n} [(x_j - x_k - i\epsilon_0)^2]^{-\mu_{\kappa_j \kappa_k}^n} \quad (2.51)$$

ist. Dabei sind  $\mu_{\kappa_j \kappa_k}^n \geq 0$  ganze Zahlen und  $\mathcal{P}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}$  ist ein tensorwertiges Polynom. Die zugehörige rationale Funktion  $\mathcal{R}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}$ , welche definiert ist als:

$$\mathcal{R}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n) \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_{jk}^2)^{-\mu_{\kappa_j \kappa_k}^n} \quad (2.52)$$

ist  $\mathbb{Z}_2$ -symmetrisch und erfüllt die global konforme Invarianz (im Sinne von rationalen Funktionen).

*Beweis.* Erfüllen einerseits alle  $\mathcal{W}_{\kappa} = \mathcal{W}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}$  die Translationsinvarianz und Spektrumsbedingung, Lokalität und global-konforme Invarianz. Dann ist  $\mathcal{W}_{\kappa}$  nach Lemma 2.5  $\mathbb{Z}_2$ -symmetrisch im Bereich  $U := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{M}^n \mid (x_i - x_j)^2 \neq 0\}$  aller gegenseitig nicht-isotropen Punkte. Weil jede temperierte Distribution endlichen Rang hat, gibt es Zahlen  $\mu_{\kappa_j \kappa_k}^n \geq 0$ , sodass

$$\mathcal{P}_{\kappa}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_{jk}^2)^{\mu_{\kappa_j \kappa_k}^n} \mathcal{W}_{\kappa}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.53)$$

eine translationsinvariante  $\mathbb{Z}_2$ -symmetrische Distribution in  $\mathbb{M}^n$  ist.

Wegen der Translationsinvarianz lässt sich  $\mathcal{P}_{\kappa}$  schreiben als

$$\mathcal{P}_{\kappa}(x_1, \dots, x_n) = P_{\kappa}(x_{12}, \dots, x_{n-1,n}) \quad (2.54)$$

und die Fouriertransformierte von  $P_{\kappa}$

$$\widehat{P}_{\kappa}(k_1, \dots, k_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{2(n-1)}} \int_{\mathbb{M}^{n-1}} e^{-i \sum_{j=1}^{n-1} k_j \cdot y_j} P_{\kappa}(y_1, \dots, y_{n-1}) dy_1 \cdots dy_{n-1} \quad (2.55)$$

ist gegeben durch die Wirkung eines Differentialoperators  $p(D)$  mit konstanten Koeffizienten in den Variablen  $k_1, \dots, k_{n-1}$  auf die Fouriertransformierte  $\widehat{W}_{\kappa}$ , d.h.  $\widehat{P}_{\kappa}(k_1, \dots, k_n) = p(D)\widehat{W}_{\kappa}(k_1, \dots, k_n)$ . Also ist insbesondere

$$\text{supp } \widehat{P}_{\kappa} \subset \text{supp } \widehat{W}_{\kappa} \subset (\overline{V_+})^{n-1} \quad (2.56)$$

vermöge der Spektrumsbedingung. Andererseits impliziert die  $\mathbb{Z}_2$ -Symmetrie der Distribution  $\mathcal{P}_{\kappa}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\kappa}(x_1, \dots, x_n) = \pm \mathcal{P}_{\kappa'}(x_n, \dots, x_1) &\implies P_{\kappa}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \pm P_{\kappa'}(-y_{n-1}, \dots, -y_1) \\ &\implies \text{supp } \widehat{P}_{\kappa} \subset (\overline{V_-})^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

mit  $\kappa' = (\kappa_n, \dots, \kappa_1)$ . Also gilt zusammen mit (2.56)  $\text{supp } \widehat{P}_{\kappa} \subset \{0\}$ . Damit ist  $P_{\kappa}$  bereits eine Polynom<sup>3</sup> und ebenso  $\mathcal{P}_{\kappa}$ . Wegen der Spektrumsbedingung ist  $W_{\kappa}$  (siehe Theorem A.1) Grenzwert einer analytischen Funktion in  $T_n$  und wir folgern daraus Gleichung (2.52).

Ist andersherum  $\mathcal{W}_{\kappa}$  durch (2.52) gegeben, mit einer zugehörigen  $\mathbb{Z}_2$ -symmetrischen und global konform-invarianten rationalen Funktion  $\mathcal{R}_{\kappa}$ , so erfüllt  $\mathcal{W}_{\kappa}$  als Randwert einer analytischen  $\mathbb{Z}_2$ -symmetrischen Funktion die Spektrumsbedingung und die Lokalität. Die global konforme Invarianz im Sinne von Distribution folgt aus Proposition 2.3, da  $\mathcal{P}_{\kappa}$  ein regulärer Multiplikator ist.  $\square$

<sup>3</sup> Vergleiche z.B. [27] Theorem V.11. Hiernach ist  $\text{supp } \widehat{P}_{\kappa} = \{0\}$ , genau dann wenn,  $\widehat{P}_{\kappa}$  eine endliche Summe aus  $\delta$ -Funktionen und ihren Ableitungen, also die Fouriertransformierte eines Polynoms ist. Also ist  $P_{\kappa}$  ein Polynom

Wir bemerken, dass die Eigenschaft der global konformen Invarianz nur benötigt wird, um Huygens-Lokalität zu zeigen. Eine Huygens-lokale Wightmansche Theorie hat also stets rationale Wightmanfunktionen.

**Theorem 2.7.** *Für zwei global konform-invariante Felder  $\psi^{(\kappa)}$  und  $\psi^{(\kappa')}$  gibt es ein  $\mu_{\kappa, \kappa'}$ , sodass der Grad des Pols in  $(x - y)^2$  der zu  $\langle \dots \psi^{(\kappa)}(x) \dots \psi^{(\kappa')}(y) \dots \rangle$  assoziierten rationalen Funktion (2.52) durch  $\mu_{\kappa, \kappa'}$  beschränkt ist und insbesondere unabhängig von der Anzahl der Felder  $n$  ist.*

*Beweisskizze.* Wir betrachten die vektorwertige Distribution  $\Phi_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{M}^n, \mathcal{H})$  gegeben durch

$$\Phi_{l_1 \dots l_n}^{(\kappa_1 \dots \kappa_n)}(x_1, \dots, x_n) = \psi_{l_1}^{(\kappa_1)}(x_1) \dots \psi_{l_n}^{(\kappa_n)}(x_n) \Omega \quad (2.58)$$

und bemerken, dass im Fall  $n = 2$  die vektorwertige Distribution  $\Phi_{l_1 l_2}^{\kappa_1 \kappa_2}$  auf dem Bereich  $U = \{(x, y) \in \mathbb{M}^2 \mid (x - y)^2 \neq 0\}$  mit  $\pm \Psi_{l_2 l_1}^{(\kappa_2 \kappa_1)}(x_2, x_1)$  wegen Theorem 2.6 und Theorem 2.2 übereinstimmt. Wegen der Temperiertheit gibt es ein  $\mu$ , sodass  $[(x_1 - x_2)^2]^\mu [\Phi_{l_1 l_2}^{\kappa_1 \kappa_2}(x_1, x_2) \pm \Phi_{l_2 l_1}^{(\kappa_2 \kappa_1)}(x_2, x_1)] = 0$  auf ganz  $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$  ist. Also ist insbesondere die Distribution

$$f(x_1, x_2) = [(x_1 - x_2)^2]^\mu \left( \Psi, \Phi_{l_1 l_2}^{\kappa_1 \kappa_2}(x_1, x_2) \right) \quad (2.59)$$

$\mathbb{Z}_2$ -symmetrisch und durch die spezielle Wahl  $\Psi = (\psi_{l_3}^{(\kappa_3)}(x_3) \dots \psi_{l_k}^{(\kappa_k)}(x_k))^* \Omega$  schließen wir, dass der Pol in  $(x_1 - x_2)^2$  der Funktion  $\mathcal{W}_{l_3 \dots l_k l_1 l_2}^{\kappa_3 \dots \kappa_k \kappa_1 \kappa_2}(x_3, \dots, x_k, x_1, x_2)$  nicht die Ordnung  $\mu$  überschreiten kann und unabhängig von  $k$  ist. Wegen Lokalität gilt die Aussage für Einsetzen an beliebiger Stelle.  $\square$

**Theorem 2.8.** *Transformiert sich in Theorem 2.7 das Feld  $\psi^{(\kappa)}$  unter  $(d; j_1; j_2)$  und  $\psi^{(\kappa')}$  unter  $(d'; j'_1, j'_2)$ , so ist:*

$$\mu_{\kappa, \kappa'} \leq \left\lfloor \frac{d + j_1 + j_2 + d' + j'_1 + j'_2}{2} - \frac{1 - \delta_{j_1, j'_2} \delta_{j_2, j'_1} \delta_{d, d'}}{2} \right\rfloor. \quad (2.60)$$

## 2.3 Skalare Felder

Interessant ist die Frage nach Modellen in Quantenfeldtheorien mit global konformer Invarianz. Am einfachsten erscheint dabei die Betrachtung von Modellen, welche nur von skalaren Feldern erzeugt werden, da zum einen die Korrelationsfunktionen (Wightmanfunktionen) eine möglichst einfache Struktur besitzen und zum anderen die Operatorproduktentwicklung von zwei skalaren Feldern explizit möglich ist. Dies werden wir im nächsten Kapitel sehen.

Dabei besteht die Frage der Existenz von nicht-trivialen Modellen. Dazu sei bemerkt, dass bis auf den masselosen freien Fall, keine Teilcheninterpretation existiert. Deshalb ist ein anderes Kriterium notwendig um triviale von nicht-trivialen Modellen zu unterscheiden. Wir sagen ein Modell ist trivial, wenn es aus einer Kombination von freien Feldern und ihren Wick-Polynomen erzeugt werden kann.

Zuerst bemerken wir, dass die analytischen Eigenschaften der Wightmanfunktionen einer Theorie mit global konformer Invarianz durch Theorem 2.6 gewissermaßen trivial sind. Es ist hinreichend, die zu  $\mathcal{W}$  assoziierte rationale Funktion  $\mathcal{R}$  zu kennen. Diese sind analytische Funktionen in der Röhre  $T_n$  und wir bekommen die zugehörige Distribution durch den Grenzwert zurück.

Wir fassen die Eigenschaften der Wightmanfunktionen von skalaren Feldern  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  zusammen:

**Proposition 2.9.** *Die Korrelationsfunktionen von skalaren Feldern  $\phi_i$  mit Skalendimension  $d_i$  sind von der Form:*

$$\langle \phi_{i_1}(x_1) \cdots \phi_{i_n}(x_n) \rangle = \sum_{\boldsymbol{\mu}} C_{\boldsymbol{\mu}} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\rho_{jk})^{-\mu_{jk}} , \quad (2.61)$$

wobei  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{jk})_{1 \leq j < k \leq n}$  ein Multiindex ist und

$$\rho_{jk} = (x_j - x_k - i\epsilon e_0)^2 . \quad (2.62)$$

Die Summe geht über alle Potenzen, für die

$$d_{i_k} = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{jk} + \sum_{l=k+1}^n \mu_{kl} \quad \text{und} \quad \mu_{jk} \leq \left\lfloor \frac{d_{i_j} + d_{i_k}}{2} + \frac{\delta_{d_{i_j}, d_{i_k}} - 1}{2} \right\rfloor \quad (2.63)$$

gilt. Für die trunkierte Funktion gilt die Schranke:

$$\mu_{jk}^{\text{tr}} < \frac{d_j + d_k}{2} . \quad (2.64)$$

*Beweis.* Dies ist eine direkte Folge aus Theorem 2.6 und Proposition 2.3. Es bleibt zu zeigen, dass die Korrelationsfunktion notwendigerweise von dieser Form sind. Aus der Poincaré-Invarianz folgt, dass  $P(x_1, \dots, x_n)$  aus dem Beweis von Theorem 2.6 insbesondere ein Polynom in  $(x_i - x_j)^2$  ist. Das Anwenden von speziellen konformen Transformationen  $g$  erfordert dann die Summenregel in (2.63), um die Bedingung der global konformen Invarianz (2.44) zu erfüllen. Theorem 2.8 liefert die Schranke für  $\mu_{jk}$  in (2.63). Die Polyschranke für die trunkierte Funktion ergibt sich aus Corollary 4.4 in [26].  $\square$

Wir nennen solche Funktionen homogene Laurent-Polynome (in den Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ ) vom Gewicht  $(d_1, \dots, d_n)$ . Insbesondere gibt es eine praktische grafische Interpretation der Monome, d.h. die einzelnen Beiträge zu einer skalaren Korrelationsfunktion. Dabei ordnet man jedem  $x_i$  einen Vertex zu. Eine Kante zwischen  $x_i$  und  $x_j$  entspricht einem  $\rho_{ij}^{-1}$  und eine gestrichelte Kante einem  $\rho_{ij}$ . Das Monom ist dann das Produkt über alle den Kanten zugeordneten Potenzen von  $\rho_{ij}$ . Die Summenregel bedeutet dann, dass die Differenz der Anzahl der Kanten und der Anzahl gestrichelten Kanten, welche vom Vertex  $x_i$  abgehen, mit  $d_i$  übereinstimmt.

**Proposition 2.10.** *Eine global konform-invariante  $n$ -Punktfunktionen skalarer Felder mit einer ungeraden Anzahl Feldern ungerader Skalendimension verschwindet, d.h. sie verschwindet wenn die Summe der Skalendimensionen  $\sum_{i=1}^n d_i$  ungerade ist.*

*Beweis.* Aus (2.63) folgt, dass

$$\sum_{j=1}^n d_{i_j} = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_{ij} . \quad (2.65)$$

gerade ist. Betrachten wir eine  $n$ -Punktfunktion (2.61), mit einer ungeraden Anzahl von Feldern mit ungerader Skalendimension, dann ist die Summe der Skalendimensionen  $d_{i_1} + \dots + d_{i_n}$  ungerade und somit inkompatibel mit der Summenregel (2.63).  $\square$

Dies liefert, dass jede  $n$ -Punkt Korrelationsfunktion bis auf eine endliche Anzahl von Parametern gegeben ist. Insbesondere ist für  $n = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \rangle &= 0 \\ \langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle &\propto \frac{\delta_{d_1, d_2}}{\rho_{12}^{d_1}} \\ \langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2) \phi_3(\mathbf{x}_3) \rangle &\propto \frac{d_1 + d_2 + d_3 \pmod 2}{\rho_{12}^{(d_1+d_2-d_3)/2} \rho_{13}^{(d_1+d_3-d_2)/2} \rho_{23}^{(d_2+d_3-d_1)/2}} \\ \langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2) \phi_3(\mathbf{x}_3) \phi_4(\mathbf{x}_4) \rangle &\propto \frac{\rho_{13}^{(d_2+d_4)/2} \rho_{24}^{(d_1+d_3)/2} f(s, t)}{\rho_{12}^{(d_1+d_2)/2} \rho_{34}^{(d_3+d_4)/2} \rho_{14}^{(d_1+d_4)/2} \rho_{23}^{(d_2+d_3)/2}} , \end{aligned} \quad (2.66)$$

wobei bei der Vierpunktfunktion angenommen wurde, dass die  $d_i$  gerade sind und  $f(s, t)$  ein Polynom in den anharmonischen Verhältnissen  $s$  und  $t$ , welche gegeben sind durch

$$s = \frac{\rho_{12}\rho_{34}}{\rho_{13}\rho_{24}}, \quad t = \frac{\rho_{14}\rho_{23}}{\rho_{13}\rho_{24}} . \quad (2.67)$$

Für andere Skalendimensionen lässt sich ein ähnlicher Vorfaktor konstruieren.

Wir werden das Hauptaugenmerk auf solche Theorien legen, die nur von skalaren Feldern erzeugt werden. Ein wichtiges Hilfsmittel, welches wie wir sehen werden, weitere kinematische Einschränkungen an die Korrelationsfunktionen geben wird, ist die Operatorproduktentwicklung.

### 3 Operatorproduktentwicklung und biharmonische Felder

Ein mächtiges Hilfsmittel bei der Betrachtung von Quantenfeldtheorien mit konformer Invarianz ist die so genannte Operatorproduktentwicklung. Hier versucht man das Produkt von zwei (skalaren) Feldern durch quasiprimäre Felder, d.h. Felder die sich irreduzibel transformieren, zu entwickeln. Die Operatorproduktentwicklung ist gewissermaßen dadurch festgelegt, dass die konform-invariante Zweipunktfunktion zweier quasiprimärer Felder bis auf eine Konstante festgelegt ist (und für unterschiedliche quasiprimäre Felder sogar verschwindet) und des Weiteren die Dreipunktfunktion von einem quasiprimären Feld mit zwei skalaren Feldern ebenfalls bis auf eine Konstante festgelegt ist. Eine explizite Herleitung aus diesen beiden Eigenschaften findet sich in [9].

Wir betrachten hier, im Rahmen global konform-invarianter Quantenfeldtheorien, die Operatorproduktentwicklung von zwei skalaren Feldern gleicher Skalendimension in Bi-Feldern mit verschiedenen Twists (vgl. [22]). Von besonderem Interesse ist das Twist-2-Bi-Feld  $V(x_1, x_2)$ . Dieses Bi-Feld teilt einige Eigenschaften mit dem Bi-Feld  $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$ , dem Wick-Produkt des masselosen freien skalaren Feldes. Insbesondere hat  $V(x_1, x_2)$  die Eigenschaft in beiden Argumenten harmonisch zu sein, welches äquivalent damit ist, dass die quasiprimären Twist-2-Felder erhalten sind. Wir werden sehen, dass die Harmonizität von  $V(x_1, x_2)$  kinematische Einschränkung an den singulärsten Anteil trunkierter Wightmanfunktionen zweier skalarer Felder gleicher Skalendimension stellt. Diese wird ausgedrückt in Form einer linearen partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung.

#### 3.1 Operatorproduktentwicklung in Twist- $2\kappa$ -Feldern

Wir betrachten stets eine global konform-invariante Quantenfeldtheorie, welche von skalaren Feldern erzeugt wird. Unser Ziel wird es sein weitere Informationen über die Struktur von Wightmanfunktionen/Korrelationsfunktionen skalarer Felder zu gewinnen und die Anzahl möglicher Funktionen weiter einzuschränken.

Wir gehen hier vor wie in [22]. Seien dazu  $\phi_1$  und  $\phi_2$  zwei skalare Felder mit der gleichen Skalendimension  $d = d_1 = d_2$  einer global konform-invarianten Quantenfeldtheorie. Dabei können  $\phi_1, \phi_2$  unterschiedliche Felder, hermitesch konjugiert zueinander, oder auch die gleichen (hermiteschen) Felder sein. Mit ihnen definieren wir die operatorwertige Distribution:

$$U(x_1, x_2) = (\rho_{12})^{d-1} (\phi_1(x_1) \phi_2(x_2) - \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle) . \quad (3.1)$$

Dabei ziehen wir den Vakuumerwartungswert ab, welcher nur zu unverbundenen Korrelationsfunktionen führt. Der Faktor  $\rho_{12}^{d-1}$  macht alle Korrelationsfunktionen von  $U(x_1, x_2)$

regulär in  $x_{12}$ , da wegen den Polschranken maximal Pole der Ordnung  $d-1$  in  $\rho_{12}$  vorkommen können. Damit ist  $U(x_1, x_2)$  glatt im schwachen Sinne für Zustände aus der Domäne  $\mathcal{D}_0$ . Des Weiteren folgt aus der Huygens-Lokalität von  $\phi_1$  und  $\phi_2$ , dass  $U(x_1, x_2)$  *Huygens-bilokal* für jedes weiterer Feld  $\phi_3$ , welches *Huygens-lokal* zu  $\phi_1$  und  $\phi_2$  ist. Das bedeutet, es gibt eine hinreichende Große Zahl  $N$ , sodass:

$$((x_1 - x)^2 (x_2 - x)^2)^N [U(x_1, x_2), \phi_3(x)] = 0 . \quad (3.2)$$

Man kann formal eine Operatorproduktentwicklung als Taylorentwicklung in  $x_{12}$  einführen:

$$U(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{x_{12} \otimes \cdots \otimes x_{12}}_{n\text{-mal}} X^{(n)}(x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{12}^{\mu_1} \cdots x_{12}^{\mu_n} X_{\mu_1 \cdots \mu_n}^{(n)}(x_2) , \quad (3.3)$$

wobei  $X^{(n)}(x_2)$  Huygens-lokale Felder sind. Die Gleichung (3.3) kann als formale Potenzreihe oder als analytische Fortsetzung der Korrelationsfunktionen von  $U(x_1, x_2)$  aufgefasst werden.

Wegen dem Vorfaktor transformiert sich  $U(x_1, x_2)$  wie ein konformes Bi-Feld mit dem Gewicht  $(1, 1)$ , d.h. mit Skalendimension 1 bzgl. des ersten und zweiten Arguments.

Die Felder  $X^{(n)}(x_2)$  haben Skalendimension  $n+2$ . Im Allgemeinen transformieren sie sich aber nicht irreduzibel. Man kommt zu einer Entwicklung in quasiprimären Feldern, d.h. Felder die sich irreduzibel transformieren, indem man von  $X^{(n)}$  Ableitungen von Feldern  $X^{(n')}$  mit kleineren Rang  $n' < n$  abzieht. Die daraus hervorgehenden quasiprimären Felder  $O^{(k,L)}$  *quasiprimär* entsprechen den Darstellungen  $(2\kappa + L, L/2, L/2)$ , also symmetrisch und spurfreie Tensorfelder vom Rang  $L$  und Skalendimension  $2\kappa + L$ .

Wir bezeichnen mit  $2\kappa$  den *Twist*:

$$(\text{Twist}) \quad 2\kappa = k - L \quad (\text{Dimension}) - (\text{Rang}) \quad (3.4)$$

des Feldes  $O^{(2\kappa+L,L)}$ . Die Existenz einer unitären Darstellung impliziert, dass der Twist positiv ist (siehe Abschnitt 2.2.2), global konforme Invarianz, dass er eine ganze gerade Zahl ist.

Sammelt man die Beiträge für jeden Twist  $2\kappa$  ein, kann man die Operatorproduktentwicklung ansehen als

$$U(x_1, x_2) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\rho_{12})^{\kappa-1} V_{\kappa}(x_1, x_2) , \quad (3.5)$$

wobei  $V_{\kappa}(x_1, x_2)$  nur Twist- $2\kappa$ -Beiträge enthält.

Jedes  $V_{\kappa}(x_1, x_2)$  ist gegeben durch eine formale Potenzreihe von Twist- $2\kappa$ -Feldern und ihren Ableitungen.

$$V_{\kappa}(x_1, x_2) = \sum_{\ell=0}^{\infty} K_{\kappa}^{\mu_1 \cdots \mu_{\ell}}(x_{12}, \partial_{x_2}) O_{\mu_1 \cdots \mu_{\ell}}^{(\ell+2\kappa, L)}(x_2) , \quad (3.6)$$

wobei  $K_{\kappa}^{\mu_1 \cdots \mu_{\ell}}(x_{12}, \partial_{x_2})$  formale Potenzreihen in  $x_{12}$  und dessen Koeffizienten auf die quasiprimäre Felder  $O^{(L+2\kappa, L)}$  wirkende Differentialoperatoren in  $x_2$  sind<sup>1</sup>. Dabei sind die

<sup>1</sup>eine explizite Darstellung findet sich im Beweis von Proposition 3.1

$V_\kappa(x_1, x_2)$  regulär<sup>2</sup> bei  $x_1 = x_2$  und transformieren sich (zumindest infinitesimal) mit dem Gewicht  $(\kappa, \kappa)$ .

Die Koeffizientenfunktionen  $K_\kappa^{\mu_1 \dots \mu_\ell}(x_{12}, \partial_{x_2})$  sind bis auf einen Faktor universell. Dies liegt an daran, dass die Zwei- und Dreipunktfunktionen

$$\left\langle O^{(2\kappa+L,L)}(x_1) O^{(2\kappa+L,L)}(x_1) \right\rangle, \quad \left\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) O^{(2\kappa+L,L)}(x_3) \right\rangle \quad (3.7)$$

zweier quasiprimärer Felder bzw. zweier Skalarfelder mit einem quasiprimären Feld durch konforme Invarianz bis auf einen Faktor festgelegt sind (für Details siehe [9]). Insbesondere ist

$$\left\langle O^{(2\kappa+L,L)}(x_1) O^{(2\kappa'+L',L')}(x_1) \right\rangle = 0 \quad \text{für } (\kappa, L) \neq (\kappa', L'). \quad (3.8)$$

Gleiches gilt somit auch für die  $V_\kappa(x_1, x_2)$ . Aus der Definition folgt noch zusätzlich, dass die Zweipunktfunktion eines  $V_\kappa(x_1, x_2)$  verschwindet. Wir halten fest:

$$\langle V_\kappa(x_1, x_2) \rangle = 0 \quad \langle V_\kappa(x_1, x_2) V_{\kappa'}(x_3, x_4) \rangle = 0 \quad \text{für } \kappa \neq \kappa'. \quad (3.9)$$

Eng verbunden mit der Operatorproduktentwicklung ist die Partialwellenentwicklung. Gewöhnliche Partialwellenentwicklung ist die Tensorproduktentwicklung zweier irreduzibler (Wigner-) Teilchen-Darstellungen. Konforme Partialwellenentwicklung entspricht der Tensorproduktentwicklung zweier irreduziblen Darstellungen positiver Energie. Sie ist von der Form

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \Pi_{\kappa,L} \phi_3(x_3) \cdots \phi_n(x_n) \rangle. \quad (3.10)$$

Dabei entspricht  $\Pi_{\kappa,L}$  der orthogonalen Projektion auf Twist  $\kappa$  und Spin  $L$ . Diese kann durch die Operatorproduktentwicklung oder die Projektion mit Hilfe eines Casimir-Operators geschehen und liefert im Fall von Vierpunktfunktionen universelle Partialwellen (vgl. [9] bzw. [10]). Die Entwicklung einer Vierpunktfunktion nach diesen universellen Partialwellen gibt Aufschluss auf den Operatorinhalt in der Operatorproduktentwicklung. Außerdem lässt sich damit das Problem der Wightman-Positivität zumindest auf Ebene der Vierpunktfunktionen untersuchen. Dies liefert nicht-triviale Einschränkungen an die möglichen Vierpunktfunktionen. Dies wurde in [20] untersucht. Wir werden später durch eine andere Methode einige dieser Partialwellen wiedergewinnen.

## 3.2 Das biharmonische Feld $V(x_1, x_2)$

In diesem Abschnitt möchten wir Besonderheiten des Twist-2-Anteils in der Operatorproduktentwicklung betrachten. Das zugehörige Feld  $V_1(x_1, x_2)$  erweist sich als harmonisch in beiden Argumenten. Wir skizzieren die Argumentation anhand von [22].

Ein wichtiger Unterschied zwischen Twist-2- und Tensorfeldern höheren Twists ist, dass erstere erhalten sind, d.h. es gilt

$$\partial_{x_{\mu_1}} O_{\mu_1 \dots \mu_L}^{2+L}(x) = 0 \quad (\ell \geq 1). \quad (3.11)$$

<sup>2</sup>Man sieht, wenn man die Felder  $X^{(n)}$  durch die quasiprimären Felder ausdrückt, dass  $O^{(2\kappa+L,L)}$  mindestens von einem Faktor  $\rho_{12}^{\kappa-1}$  multipliziert wird.

Dies folgt aus der expliziten Struktur der konform-invarianten Zweipunktfunktionen dieser Felder, welche erhalten sind und dem Reeh-Schlieder-Theorem.

**Proposition 3.1** ([24]). *Das System von Differentialgleichungen (3.11) ist äquivalent mit der Biharmonizität von  $V(x_1, x_2)$  (als formale Reihe), d.h. der Harmonizität in beiden Argumenten:*

$$\square_{x_1} V(x_1, x_2) = 0 = \square_{x_2} V(x_1, x_2) . \quad (3.12)$$

*Beweisskizze.* Es ist üblich die symmetrischen spurfreie Tensorfelder vom Rang  $\ell$  als operatorwertige homogene harmonische Polynome in  $\zeta \in \mathbb{M}$  zu schreiben, d.h. als

$$O^{(2\kappa+L,L)}(x; \zeta) := O_{\mu_1 \dots \mu_L}^{(2\kappa+L,L)}(x) \zeta^{\mu_1} \dots \zeta^{\mu_L} \quad (3.13)$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \square_{\zeta} O^{(2\kappa+L,L)}(x; \zeta) &= 0, & (\text{Spurfreiheit}) \\ \zeta \cdot \partial_{\zeta} O^{(2\kappa+L,L)}(x; \zeta) &= L \cdot O^{(2\kappa+L,L)}(x; \zeta), & (\text{Euler-Gleichung}) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Das Erhaltungsgesetz von  $O^{(2+L,L)}$  schreibt sich als:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} O^{(2+L,L)}(x; \zeta) = 0 . \quad (3.15)$$

Außerdem wird die explizite Darstellung von  $V_{\kappa}(x_1, x_2)$  genutzt, welche nach [24] bis auf die Konstante  $C_{\kappa L}$  universell festgelegt ist durch:

$$V_{\kappa}(x_1, x_2) = \sum_{L=0}^{\infty} C_{\kappa L} \int_0^1 K_{\kappa L}(\alpha, \rho_{12} \square_2) O^{(2\kappa+L,L)}(x_1 + \alpha x_{12}; x_{12}) d\alpha \quad (3.16)$$

mit

$$K_{\kappa L}(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha(1-\alpha)]^{L+\kappa+n-1}}{B(L+\kappa, L+\kappa)} \frac{(-z/4)^n}{n!(L+2\kappa-1)_n} , \quad (3.17)$$

wobei  $B(\cdot, \cdot)$  die Euler-Beta-Funktion, gegeben durch  $\Gamma(x+y) B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$ , ist.

Es gilt für  $y = x_2 + \alpha x_{12}$  unter der Benutzung von  $x_{12} \partial_y = \partial_{\alpha}$ , die Identität:

$$\begin{aligned} \square_1 \rho_{12}^n O^{(2+L,L)}(y; x_{12}) &= 4n(n+1) \rho_{12}^{n-1} O^{(2+L,L)}(y; x_{12}) + \rho_{12}^n \alpha^2 \square_y O^{(2+L,L)}(y; x_{12}) \\ &\quad + 4n \rho_{12}^{n-1} (\alpha \partial_{\alpha} + L) O^{(2+L,L)}(y; x_{12}) + \rho_{12}^n \alpha \partial_y \partial_z O^{(2+L,L)}(y; z) \Big|_{z=x_{12}} \\ &= \rho_{12}^{n-1} \{4n(n+1+L+\alpha \partial_{\alpha}) + \alpha \rho_{12} (\partial_y \partial_z + \alpha \square_y)\} O^{(2+L,L)}(y; z) \Big|_{z=x_{12}} \end{aligned}$$

und damit lässt sich zeigen, dass aus (3.15)

$$\square_1 \int_0^1 K_{1,L}(\alpha, \rho_{12} \partial_y) O^{(2+L,L)}(y; x_{12}) d\alpha = 0 \quad (3.18)$$

folgt und somit  $\square_1 V(x_1, x_2) = 0$ . Der Rest wird durch analoge Rechnung gezeigt.  $\square$

Die Trennung des Twist-2-Anteils führt zu einer Aufspaltung von  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  der Form:

$$U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \rho_{12} \tilde{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (3.19)$$

mit  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = V_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Diese Aufspaltung kann gesehen werden als Entwicklung in eine formale Potenzreihe der Matrixelemente von  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  entsprechend (3.3). Sie ist somit eindeutig nach folgendem klassischen Lemma.

**Lemma 3.2** ([2, 22]). *Sei  $u \in \mathcal{V}[[\mathbf{x}]]$  eine formale Potenzreihe in  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^4$  mit Koeffizienten in einem (komplexen) Vektorraum  $\mathcal{V}$ . Dann existieren eindeutige formale Potenzreihe  $v \in \mathcal{V}[[\mathbf{x}]]$  und  $\tilde{u} \in \mathcal{V}[[\mathbf{x}]]$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{V}$ , sodass*

$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + \mathbf{x}^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

und dass  $v(\mathbf{x})$  harmonisch in  $\mathbf{x}$  ist, d.h.  $\square_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) = 0$ .

Wir nennen Gleichung (3.20) die *harmonische Zerlegung* von  $u(\mathbf{x})$  (in  $\mathbf{x}$  um  $\mathbf{x} = 0$ ). Die formale Potenzreihe  $v(\mathbf{x})$  ist der *harmonische Anteil* von  $u(\mathbf{x})$ .

Die Existenz von  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  kann über die Konstruktion seiner Korrelationsfunktionen gezeigt werden. Betrachten wir Korrelationsfunktionen der Form

$$\begin{aligned} \langle \cdot U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \rangle \\ = \langle \phi_3(\mathbf{x}_3) \cdots \phi_k(\mathbf{x}_k) U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) \cdots \phi_n(\mathbf{x}_n) \rangle, \end{aligned}$$

so entspricht die Aufteilung von  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  nach dem Twist-2-Anteil und den höheren Twists einer Aufspaltung der Form

$$\langle \cdot U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \rangle = \langle \cdot V_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \rangle + \rho_{12} \langle \cdot \tilde{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \rangle, \quad (3.21)$$

welche als formale Potenzreihe in  $\mathbf{x}_{12}$  betrachtet wird, indem wir die linke Seite auch als formale Potenzreihe ansehen. Diese konvergiert insbesondere in einer Umgebung um  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$  in  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^2$  als Taylorreihe der rationalen Funktion, wenn man die Rationalität gegeben in Theorem 2.6 und die Regularität von  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  für  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$  beachtet. Dabei bezeichnen wir mit  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{M} + i\mathbb{M}$  den *komplexifizierten Minkowski-Raum*. Diese Konvergenz hat insbesondere auch eine Konvergenz von  $\langle \cdot V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \rangle$  als harmonischen Anteil von  $\langle \cdot U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \rangle$  zur Folge, was wir in Abschnitt 3.4 diskutieren werden.

Das hauptsächliche Werkzeug für die Konstruktion von  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  wird die harmonische Zerlegung auf Ebene der Korrelationsfunktionen (3.21) sein. Es stellt sich heraus (vgl. [22]), dass für gewisse Fälle diese Konstruktion zu einem Huygens-bilokalen Feld führt.

### 3.3 Konsequenzen der Biharmonizität

Wir betrachten hier die harmonische Zerlegung von rationalen Funktionen, welche als Korrelationsfunktionen von  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  auftreten. Die Korrelationsfunktion

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \phi_3(\mathbf{x}_3) \cdots \phi_k(\mathbf{x}_k) U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) \cdots \phi_n(\mathbf{x}_n) \rangle \quad (3.22)$$

als Funktion  $F(x_1, x_2)$  in  $x_1$  und  $x_2$  betrachtet hat als Potenzreihe in  $\rho_{12}$  mit Koeffizienten in den Laurent-Polynomen von  $\{\rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n, (i, j) \neq (1, 2)\}$  die Form

$$F(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^M F_q \left( (\rho_{ij})_{1 \leq i < j \leq n, (i,j) \neq (1,2)} \right) \cdot (\rho_{12})^q . \quad (3.23)$$

Die  $F_q$  werden zweckmäßigerweise auch als Funktion in  $x_1$  und  $x_2$  betrachtet:

$$F_q(x_1, x_2) = \sum_{\mu_1, \mu_2} C_{q, \mu_1, \mu_2} (\rho_1)^{\mu_1} (\rho_2)^{\mu_2} , \quad (3.24)$$

wobei wir die Multiindexschreibweise

$$\mu_1 = (\mu_{13}, \mu_{14}, \dots, \mu_{1n}), \quad (\rho_1)^{\mu_1} = (\rho_{13})^{\mu_{13}} \dots (\rho_{1n})^{\mu_{1n}} \quad (3.25)$$

benutzt haben und jeder Koeffizient  $C_{q, \mu_1, \mu_2}$  von  $(\rho_{ij})_{3 \leq i < j \leq n}$  abhängt.

Die Homogenität der Korrelationsfunktionen und die Polschranken erfordern, dass in (3.24) die Summe nur über Multiindizes mit  $|\mu_1| = |\mu_2| = -q - 1$  läuft, d.h.  $F_q$  ist separat homogen vom Grad  $-q - 1$  in  $\rho_1$  bzw. in  $\rho_2$ . Ist  $H$  der harmonische Anteil von  $F$ , so muss  $F_0$  mit der führenden Ordnung von  $H$  in  $\rho_{12}^0$  übereinstimmen. Mit der Abkürzung:

$$\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial \rho_{ij}} \quad (3.26)$$

werden die Differentialoperatoren  $E_i$  und  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) durch

$$E_1 = \sum_{i=3}^n \rho_{2i} \partial_{1i}, \quad D_1 = \sum_{3 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \partial_{1i} \partial_{1j} \quad (3.27)$$

und analog  $E_2$  und  $D_2$  durch die Vertauschung von  $(1 \leftrightarrow 2)$  definiert. Damit lassen sich die Einschränkungen der Biharmonizität an  $F_0$  mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung ausdrücken, welche in der folgenden Proposition angegeben wird.

**Proposition 3.3** ([21, 22]). *Sei  $F_0(x_1, x_2)$  wie in (3.24) und  $H$  sein harmonischer Anteil in  $x_1$  um  $x_2$ , sprich  $\square_{x_1} H(x_1, x_2) = 0$ . Dann ist  $H$  auch harmonisch in  $x_2$ , genau dann wenn  $F_0$  die Differentialgleichung:*

$$(E_1 D_2 - E_2 D_1) F_0 = 0 \quad (3.28)$$

erfüllt.

*Beweisskizze.*  $H$  kann als Funktion in den  $2n - 3$  Variablen  $\{\rho_{1i}, \rho_{2i} \mid 3 \leq i \leq n\}$  und  $\rho_{12}$  gesehen werden und ist analytisch um  $\rho_{12} = 0$ . Die Konvergenz vom harmonischen Anteil  $H$  zeigen wir in Abschnitt 3.4. Seine Entwicklung lautet:

$$H = \sum_q \frac{H_q}{q!} (\rho_{12})^q , \quad (3.29)$$

wobei  $H_q$  jeweils homogen vom Grad  $-1 - q$  in  $\rho_{1i}$  und  $\rho_{2i}$  sind, d.h.

$$\sum_{i=3}^n \rho_{1i} \partial_{1i} F_q = (-q - 1) F_q . \quad (3.30)$$

Die Konvergenz von  $H$  diskutieren wir in dem nächsten Abschnitt. Da  $H$  homogen vom Grad  $-1$  ist, kann der Wellenoperator unter Verwendung der Euler-Gleichung  $\sum_i \rho_{1i} \partial_{1j} H = -H$  geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} 0 \equiv \square_{x_1} H &= \left[ 8 \sum_{i \neq 1} \partial_{1i} + 2 \sum_{i,j \neq 1} (\rho_{1i} + \rho_{1j} - \rho_{ij}) \partial_{1i} \partial_{1j} \right] \\ &= -4 \sum_{2 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \partial_{1i} \partial_{1j} H = -4(D_1 + E_1 \partial_{12}) H . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die Anwendung des Wellenoperators in der Form (3.31) auf (3.29) und Durchführung der gleichen Schritte für die Variable  $x_2$  führt zu dem Rekursionssystem:

$$E_1 H_{q+1} = -D_1 H_q \quad \text{bzw.} \quad E_2 H_{q+1} = -D_2 H_q . \quad (3.32)$$

Zusammen mit dem Operator

$$E_3 = \sum_{i=3}^n \rho_{2i} \partial_{2i} - \rho_{1i} \rho_{1i} \quad (3.33)$$

gilt:

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^3 \gamma_{ij}^k E_k, \quad \gamma_{12}^3 = 1, \quad \gamma_{12}^1 = -2 \quad (3.34)$$

und  $E_1, E_2$  und  $E_3$  sind in Involution mit den Strukturkonstanten  $\gamma_{ij}^k = -\gamma_{ji}^k$ . Die Integrabilitätsbedingung für das inhomogene System:

$$\begin{aligned} E_1 H_{q+1} &= a_1 = -D_1 H_q \\ E_2 H_{q+1} &= a_2 = -D_2 H_q \\ E_3 H_{q+1} &= a_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

lautet somit

$$E_i a_j - E_j a_i = \sum_k \gamma_{ij}^k a_k , \quad (3.36)$$

wobei  $E_3 a_1 = 2a_1$  und  $E_3 a_2 = -2a_2$  automatisch durch die Homogenität erfüllt sind. Die dritte einzige nicht-triviale Integrabilitätsbedingung für  $H_{q+1}$  lautet:

$$E_1 a_2 - E_2 a_1 = (E_1 D_2 - E_2 D_1) H_{q+1} = a_3 = 0 . \quad (3.37)$$

Ist einerseits  $H$  harmonisch in  $x_1$  und  $x_2$ , dann ist insbesondere die Integrabilitätsbedingung (3.37) für  $q = 0$  erfüllt oder man sieht direkt, dass  $(E_1 D_2 - E_2 D_1) F_0 = (E_2 E_1 - E_1 E_2) H_1 = -E_3 H_1 = 0$  (wieder wegen der Homogenität) ist. Damit ist also (3.28) erfüllt.

Ist andererseits (3.28) erfüllt, so existiert nach obiger Bemerkung  $H_1$ . Wir zeigen per vollständiger Induktion, dass auch  $H_q$  existiert. Nehmen wir also an, dass  $H_q$  für  $q \geq 1$  existiert, dann ist  $(D_1 E_2 - D_2 E_1)H_q = (D_1 D_2 - D_2 D_1)H_{q-1} = 0$  nach Induktionsannahme und da  $D_1$  und  $D_2$  kommutieren. Dies ist äquivalent mit  $(E_1 D_2 - E_2 D_1)H_q = 0$ , also ist die Integrabilitätsbedingung (3.37) für  $H_{q+1}$  erfüllt und damit der Induktionsschritt gezeigt.  $\square$

**Folgerung 3.4** ([22]). *Angenommen  $F_0$  wie in (3.24) erfüllt die Differentialgleichung (3.28), dann gilt:*

1. *wenn  $F_0$  einen „Doppelpol“ der Form  $(\rho_{1i})^{\mu_{1i}} (\rho_{1i})^{\mu_{1k}}$  mit  $i \neq j$  und negativen  $\mu_{1i}$  und  $\mu_{1j}$  hat, dann sind dessen Koeffizienten in den Variablen  $\rho_{2k}$  mit  $k \neq i, j$  regulär.*
2.  *$F_0$  enthält keinen „Dreifachpol“ der Form  $(\rho_{1i})^{\mu_{1i}} (\rho_{1j})^{\mu_{1j}} (\rho_{1k})^{\mu_{1k}}$  mit paarweise verschiedenen  $i, j, k$  und  $\mu_{1i}, \mu_{1j}, \mu_{1k}$  negativ.*

*Die gleichen Aussagen gelten, wenn man die Indizes  $1 \leftrightarrow 2$  vertauscht.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass wenn ein Term in  $\rho_{2k}$  singularär ist, er nicht von Doppelpolen in den Variablen  $\rho_{1i}, \rho_{1j}$  multipliziert werden kann. Dazu stellen wir  $F_0$  als Laurent-Polynom in  $\rho_{2k}$

$$F_0 = \sum_{r \geq -p} f_r (\rho_{2k})^r$$

mit Koeffizienten  $f_r$  in den übrigen Variablen dar. Die Differentialgleichung (3.28) führt zu einem rekursiven System für die Koeffizienten der Form:

$$\left( \rho_{1k} \sum_{3 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \partial_{1i} \partial_{1j} - \sum_{\substack{3 \leq i, j \leq n \\ i, j \neq k}} \rho_{2i} \rho_{kj} \partial_{1i} \partial_{2j} \right) r f_r = X_r f_{r-1} + Y f_{r-2}, \quad (3.38)$$

wobei die präzise Form der polynomialen Differentialoperatoren  $X_r$  und  $Y$  hier keine weitere Rolle spielt. Es sei die niedrigste Potenz  $-p$  von  $\rho_{2k}$  negativ. Für  $r = -p$  verschwindet die rechte Seite. Nehmen wir nun an, dass  $f_{-p}$  einen Doppelpol in den Variablen  $\rho_{1i}$  und  $\rho_{1j}$  mit  $i \neq j$  und  $i, j \neq k$  besitzt. Dann würde der Term  $\rho_{ij} \partial_{1i} \partial_{1j}$  eine Singularität erzeugen, die durch Summanden der zweiten Summe nicht kompensiert werden könnten. Diese Eigenschaft vererbt sich für alle  $r < 0$  weiter, da die rechte Seite niemals so einen Pol besitzen kann. Deswegen kann im Fall  $r < 0$  für den Koeffizienten  $f_r$  kein Doppelpol auftreten.

Nehmen wir jetzt an, es gäbe einen Dreifachpol in den Variablen  $\rho_{1i}, \rho_{1j}$  und  $\rho_{1k}$ . Wegen der ersten Aussage kann der resultierende Doppelpol in  $\rho_{1i}$  und  $\rho_{1j}$  keine Singularität in  $\rho_{2m}$  mit  $m \neq i, j$  besitzen. Da der Term weiterhin auch ein Doppelpol in  $\rho_{1i}$  und  $\rho_{1k}$  oder  $\rho_{1j}$  und  $\rho_{1k}$  hat, besitzt der Term auch keine Singularitäten in  $\rho_{2i}$  bzw.  $\rho_{2j}$ . Also ist der Term sogar in allen  $\rho_{2m}$  mit  $3 \leq m \leq n$  regulär, was aber der Homogenität vom Grad  $-1$  widerspricht. Dies beweist die zweite Aussage.  $\square$

### 3.4 Konvergenz des harmonischen Anteils

In diesem Abschnitt skizzieren wir kurz, dass der harmonische Anteil, welcher nach Lemma 3.2 als formale Potenzreihe gegeben ist, in den betrachteten Fällen konvergiert. Wir gehen hier wie in [22] vor.

Sei  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{M} + i\mathbb{M}$  die Komplexifizierung des Minkowski-Raums, welchen wir in diesem Abschnitt als  $D$ -dimensional annehmen. Weiter sei  $E = \{x \mid (ix^0, x^1, \dots, x^{D-1}) \in \mathbb{R}^D\}$  die euklidische Untermannigfaltigkeit und  $\mathbb{S}_{D-1} \subset E$  die  $D - 1$  dimensionale Einheitskugel in  $E$ . Sei  $\|x\|^2 = |x^0|^2 + \dots + |x^{D-1}|^2$  die Hilbert-Raum-Norm. Für  $r > 0$  sei

$$M_r := \left\{ \zeta = re^{i\theta} w \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}} \mid \theta \in [0, \pi], w \in \mathbb{S}_{D-1} \right\} \quad (3.39)$$

die reelle kompakte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}$ . Mit  $dz|_{M_r}$  bezeichnen wir die Einschränkung der komplexen Volumenform auf die Untermannigfaltigkeit  $M_r$ .

**Lemma 3.5** ([22, 2]). *Sei  $u \in \mathbb{C}[[x]]$  eine formale Potenzreihe, welche für ein  $r > 0$  in der offenen Einheitskugel mit Radius  $r$  (d.h. für  $\|x\| < r$ ) absolut gegen eine analytische Funktion  $x \mapsto U(x)$  konvergiert. Dann konvergiert der (durch Lemma 3.2 gegebene) harmonische Anteil  $v \in \mathbb{C}[[x]]$  absolut für alle  $x \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}$  im Bereich*

$$|x^2| + 2r\|x\| < r^2. \quad (3.40)$$

Die so gegebene analytische Funktion  $V(x)$  hat die Integraldarstellung:

$$V(x) = \frac{1}{\mathfrak{V}_1} \int_{M_r} \frac{1 - \frac{x^2}{z^2}}{[(z-x)^2]^{\frac{D}{2}}} U(z) dz|_{M_r}, \quad \mathfrak{V}_1 = \int_{M_1} dz|_{M_1} = i\pi |\mathbb{S}^{D-1}|, \quad (3.41)$$

wobei  $r' < r$ ,  $\|x^2\| + 2r'\|x\| < r'^2$  und das komplexe Integrationsmaß  $dz|_{M_{r'}}$  als Einschränkung der komplexen Volumenform  $dz$  von  $\mathbb{M}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^D$  auf die reelle  $D$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M_{r'}$  mit  $r' > 0$  ist.

Der Beweis nutzt, dass man den Poissonkern in (3.41) nach einer orthonormalen Basis von harmonischen homogenen Polynomen auf der Sphäre  $\mathbb{S}_{D-1}$  entwickelt. Für Details verweisen wir auf [22], Lemma 3.1.

**Lemma 3.6.** *Sei  $F(x_{12}, x_{23}, \dots, x_{2n})$  ein Laurent-Polynom wie gehabt. Dann hat es eine für*

$$|x^2| + 2|x \cdot x_{2j}| < |x_{2j}^2| \quad (3.42)$$

konvergente Entwicklung nach  $x_{12}$ .

*Beweis.* Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Per Induktion nach  $m$  beweist man für  $x \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < 1$ :

$$(1-x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)_{m-1}}{(m-1)!} x^n, \quad (3.43)$$

wobei  $m = 1$  der geometrischen Reihe entspricht. Sei nun  $|x^2| + 2|x \cdot x_{2j}| < |x_{2j}^2|$ , dann ist insbesondere  $|x^2 - 2x \cdot x_{2j}| < |x_{2j}^2|$  und es gilt nach obiger Formel:

$$\begin{aligned} [(x - x_{2j})^2]^{-\mu_j} &= \left[ x_{2j}^2 \left( 1 - \frac{2x \cdot x_{2j} - x^2}{x_{2j}^2} \right) \right]^{-\mu_j} \\ &= (x_{2j}^2)^{-\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)_{\mu_j-1}}{(\mu_j-1)!} \left( \frac{2x \cdot x_{2j} - x^2}{x_{2j}^2} \right)^k. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Da  $F$  als rationale Funktion von  $x := -x_{12}$  eine Summe von Produkten  $[(x - x_{2j})^2]^{-\mu_j}$  ist (nur negative Potenzen machen hier Probleme, ansonsten ist die Entwicklung endlich) konvergiert die Taylorentwicklung nach  $x$  nach obiger Formel im behaupteten Bereich.  $\square$

**Proposition 3.7** ([22] Proposition 3.2). *Für alle  $n \geq 2$  und  $k \geq 3$  und alle lokalen skalaren Felder  $\phi_j$  mit  $j = 3, \dots, n$  konvergieren die Taylorreihen von*

$$\langle \phi_3(x_3) \cdots \phi_k(x_k) V(x_1, x_2) \phi_{k+1}(x_{k+1}) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \quad (3.45)$$

in  $x_{12}$  absolut im Bereich

$$\left( \|x_{12}\| + \sqrt{\|x_{12}\|^2 + |x_{12}^2|} \right) \left( \|x_{2i}\| + \sqrt{\|x_{2i}\|^2 + |x_{2i}^2|} \right) - \|x_{2i}^2\| \text{ für alle } i \quad (3.46)$$

mit  $i = 3, \dots, n$ . Sie sind alle reell analytisch und unabhängig von  $k$  für gegenseitig nicht-isotrope Punkte.

*Beweisskizze.* Seien

$$F_k(x_{12}, x_{23}, \dots, x_{2n}) = \langle \phi_3(x_3) \cdots \phi_k(x_k) U(x_1, x_2) \phi_{k+1}(x_{k+1}) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \quad (3.47)$$

analytisch fortgesetzt in  $x_{12}$ . Nach Lemma 3.6 konvergiert  $F_k$  in  $x := x_{12}$  für die Umgebung gegeben durch (3.42). Diese enthält den offenen Ball mit Radius  $r$  für

$$r < |x_{2i}^2| - 2r \|x_{2i}\| \quad i = 3, \dots, n. \quad (3.48)$$

Wegen Lemma 3.6 konvergiert (3.45) für

$$|x_{12}^2| + 2r \|x_{12}\| < r^1. \quad (3.49)$$

Die beiden hinreichenden Bedingungen (3.48) und (3.49) für  $r$  sind kompatibel, wenn

$$\|x_{12}\| + \sqrt{\|x_{12}\|^2 + |x_{12}^2|} < \sqrt{\|x_{2i}\|^2 + |x_{2i}^2|} \leq \|x_{2i}^2\| \text{ für alle } i, \quad (3.50)$$

was äquivalent mit (3.46) ist.  $\square$

Aus der Lorentz-Invarianz folgt, dass der Konvergenzbereich Lorentz-invariant sein sollte. Damit ist die Korrelationsfunktion von  $V(x_1, x_2)$  der Form (3.45) für den kleinsten Lorentz-invarianten Bereich, welcher den obigen Bereich (3.46) enthält konvergent. Außerhalb des Konvergenzbereiches müssen die Korrelationsfunktionen durch analytische Fortsetzung definiert werden. Wenn die Korrelationsfunktionen rational sind, so ist  $V(x_1, x_2)$

Huygens-bilokal. Wir werden in Abschnitt 3.5 sehen, dass die Rationalität des harmonischen Anteils aber nicht automatisch gegeben ist, sondern nur wenn die Funktion  $F_k$  in (3.47) die sogenannte Einfachpoleigenschaft erfüllt. Ist dies nicht der Fall, so ist nicht klar ob die analytische Fortsetzung überhaupt eindeutig in der Röhre  $T_+$ , dem Analytizitätsbereich welcher durch die Spektrumsbedingung vorgegeben wird, ist. Es ist somit nicht klar, ob  $V_1(x_1, x_2)$  (bzw. dessen Korrelationsfunktionen) als Distributionen in  $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$  existieren.

In [22] wurde die Vermutung geäußert, dass die Felder  $V(x_1, x_2)$  existieren und Bi-Lokalität für raumartige Separationen erfüllen. Dies motiviert in gewisser Hinsicht auch die Untersuchung in Kapitel 5 der Struktur von Korrelationsfunktionen mit  $U(x_1, x_2)$ , dessen zugehörigen Korrelationsfunktionen von  $V(x_1, x_2)$  nicht rational sind.

### 3.5 Huygens-Bilokalität von biharmonischen Feldern

In diesem Abschnitt geben wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für Huygens-Bilokalität an. Dazu machen wir folgende Definition.

Sei  $F(x_1, \dots, x_n)$  ein Laurent-Polynom in den Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ . Als Funktion in  $x_1$  angesehen, ist  $F$  eine endliche Linearkombination von Monomen der Form:

$$\prod_{j \geq 2} (\rho_{1j})^{\mu_{1j}} = \rho_1^{\mu_1} \tag{3.51}$$

mit Koeffizienten in den anderen Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 2 \leq i < j \leq n\}$ .

Wir sagen,  $F$  erfülle die *Einfachpoleigenschaft* in  $x_1$ , wenn es keine Terme enthält, für die es  $j \neq k$  ( $j, k \geq 2$ ) gibt, sodass sowohl  $\mu_{1j}$  als auch  $\mu_{1k}$  negativ sind. Wir sagen dann auch,  $F$  besitzt keine Doppelpole bzgl.  $x_1$  und  $x_2$ .

**Lemma 3.8** ([22]). *Sei  $n \geq 4$ . Jede endliche Linearkombination von Monomen der Form*

$$g_n(x_1) = \frac{1}{(\rho_{13})^{n-2}} \prod_{i=4}^n \rho_{1i} \tag{3.52}$$

*hat eine rationale harmonische Zerlegung in  $x_1$  um  $x_2$*

$$g_n(x_1) = h_n(x_1) + (x_1 - x_2)^2 \cdot \tilde{g}(x_1) . \tag{3.53}$$

*Das bedeutet  $h_n$  ist harmonisch in Bezug auf  $x_1$  und  $\tilde{g}_n$  ist regulär bei  $x_1 = x_2$  und beide sind rational. Genauer,  $(\rho_{13})^{n-2} (\rho_{23})^{n-3} h_n$  ist ein homogenes Polynom vom Grad  $2(n-3)$  in den Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ , welches separat homogen vom Grad  $n-3$  in den Variablen  $\{\rho_{1i} \mid 2 \leq i \leq n\}$  und in den Variablen  $\{\rho_{12}, \rho_{2i} \mid 3 \leq i \leq n\}$  ist.*

*Beweis.* Wegen der Linearität der Differentialgleichung brauchen wir die Aussage nur für die Monome  $g_n$  zu zeigen. Sei also  $n \geq 4$  und  $g_n$  das Monom wie oben. Wir führen die  $n(n-3)/2$  Variablen  $\{s_i, t_i \mid 4 \leq i \leq n\}$  und  $\{u_{ij} \mid 4 \leq i < j \leq n\}$  mit

$$t_i = \frac{\rho_{1i}\rho_{23}}{\rho_{13}\rho_{2i}}, \quad s_i = \frac{\rho_{12}\rho_{3i}}{\rho_{13}\rho_{2i}}, \quad u_{ij} = \frac{\rho_{12}\rho_{23}\rho_{ij}}{\rho_{13}\rho_{2i}\rho_{3j}} \tag{3.54}$$

ein. Wir behaupten, dass sich der harmonische Anteil schreiben lässt als:

$$h_n(\mathbf{x}_1) = \left( \prod_{i=4}^n \frac{\rho_{2i}}{\rho_{23}} \right) \cdot f(\mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) , \quad (3.55)$$

wobei  $f_n$  ein Polynom vom Grad  $n - 3$  in den  $n(n - 3)/2$  Variablen  $\mathbf{t} = (t_i)_{4 \leq i \leq n}$ ,  $\mathbf{s} = (s_i)_{4 \leq i \leq n}$ , und  $\mathbf{u} = (u_{ij})_{4 \leq i < j \leq n}$  ist, sodass gilt:

$$f(\mathbf{t}, \mathbf{s} = 0, \mathbf{u} = 0) = \mathbf{t}^1 = \prod_{i=4}^n t_i . \quad (3.56)$$

Diese Eigenschaft sorgt dafür, dass  $g_n - h_n$  als Polynom in  $\rho_{12}$  gesehen für  $\rho_{12} \rightarrow 0$  verschwindet, also ist  $(g_n - h_n)/\rho_{12}$  regulär in  $\rho_{12}$ .

Mit Benutzung der Darstellung (3.31) des Wellenoperators und Transformation dieses in einen Differentialoperator in den Variablen (3.54) erhalten wir:

$$\square_{\mathbf{x}_1} h_n(\mathbf{x}_1) = 4 \left( \prod_{i=4}^n \frac{\rho_{2i}}{\rho_{23}} \right) \frac{\rho_{23}}{(\rho_{13})^2 \rho_{12}} \cdot D f_n(\mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) , \quad (3.57)$$

wobei der Differentialoperator  $D$  gegeben ist durch

$$D = (1 + \mathbf{t}\partial_{\mathbf{t}} + \mathbf{s}\partial_{\mathbf{s}} + \mathbf{u}\partial_{\mathbf{u}})(\mathbf{s}\partial_{\mathbf{t}} + \mathbf{s}\partial_{\mathbf{s}} + \mathbf{u}\partial_{\mathbf{u}}) - (\mathbf{s}\partial_{\mathbf{s}} + \mathbf{u}\partial_{\mathbf{u}})\partial_{\mathbf{t}} - \mathbf{u}\partial_{\mathbf{t}}\partial_{\mathbf{t}} . \quad (3.58)$$

Dabei verwenden wir die abkürzenden Schreibweise für Operatoren

$$\mathbf{t}\partial_{\mathbf{t}} = \sum_{i=4}^n t_i \partial_{t_i}, \quad \mathbf{s}\partial_{\mathbf{t}} = \sum_{i=4}^n s_i \partial_{t_i}, \quad \mathbf{s}\partial_{\mathbf{s}} = \sum_{i=4}^n s_i \partial_{s_i}, \quad \mathbf{u}\partial_{\mathbf{u}} = \sum_{4 \leq i < j \leq n} u_{ij} \partial_{u_{ij}} , \quad (3.59)$$

und

$$\partial_{\mathbf{t}} = \sum_{i=4}^n \partial_{t_i}, \quad \mathbf{u}\partial_{\mathbf{t}}\partial_{\mathbf{t}} = \sum_{4 \leq i < j \leq n} u_{ij} \partial_{t_i} \partial_{t_j} , \quad (3.60)$$

welche den Grad erhalten bzw. erniedrigen. Um die Bedingung  $Df_n = 0$  zu erfüllen, machen wir folgenden Ansatz:

$$f_n(\mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \sum_{K \subset N} g_K^{(n)}(\mathbf{s}_K, \mathbf{u}_K) \cdot \prod_{i \in N \setminus K} (t_i - s_i) , \quad (3.61)$$

wobei  $N := \{4, \dots, n\}$  und  $g_K^{(n)}$  ein Polynom in den  $|K|(|K| + 3)/2$  Variablen  $\mathbf{s}_K = (s_i)_{i \in K}$  ist,  $\mathbf{u}_K = (u_{ij})_{i, j \in K, i < j}$  und  $g_{\emptyset}^{(n)} = 1$  ist. Die Harmonizitätsbedingung ist äquivalent zu dem rekursiven System:

$$(n - 2 - |K| + \Delta)\Delta g_K^{(n)} = \Delta \sum_{k \in K} g_{K \setminus \{k\}}^{(n)} + \sum_{k, l \in K, k < l} (u_{kl} - s_k - s_l) g_{K \setminus \{k, l\}}^{(n)} , \quad (3.62)$$

wobei der Differentialoperator  $\Delta = \mathbf{s}\partial_{\mathbf{s}} + \mathbf{u}\partial_{\mathbf{u}}$  den totalen polynomialen Grad in den Variablen  $s_k$  und  $u_{kl}$  misst. Da man für  $r > 0$  durch  $(n - 2 - |K| + r)r$  teilen kann, gibt es eine eindeutige polynomiale Lösung der Ordnung  $\leq |K|$ . Hierbei fordert für  $K \neq \emptyset$  die Bedingung  $g_K^{(n)}(s_K = 0, u_K = 0) = 0$ , dass der konstante Term von  $g_K^{(n)}$  verschwindet.  $f_n$  ist ein Polynom der Ordnung  $n - 3$ , die ersten Lösungen lauten  $f_3 = 1$ ,  $f_4 = t_4 - s_4$  und  $f_5 = (t_4 - t_5)(s_4 - s_5) + (u_{45} - s_4 - s_5)/2$ . Eine Untersuchung der Rekursion zeigt, dass sich die möglichen Faktoren von  $\rho_{2i}$  im Nenner durch den Vorfaktor kompensieren.  $\square$

**Lemma 3.9** ([20]). *Sei  $n \geq 3$ . Ist  $f$  ein Laurent-Polynom in den Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 3 \leq i < j \leq n\}$ , homogen vom Grad  $-1$  in den Variablen  $\{\rho_{1i} \mid 2 \leq i \leq m\}$  und erfülle die Gleichung  $\square_{x_1} f = 0$ . Dann besitzt  $f$  keine Doppelpole in den Variablen  $\{\rho_{1i} \mid 2 \leq i \leq m\}$ .*

*Beweis.* Sei  $f$  wie in den Voraussetzungen. Nehmen wir an  $f$  habe einen Doppelpol. Wir betrachten den Term mit dem singulärsten Doppelpol, d.h. ein Monom mit dem Faktor  $\rho_{1k}^{\mu_{1k}} \rho_{1l}^{\mu_{1l}}$  mit minimalen  $\mu_{1k}, \mu_{1l} < 0$ . Wir benutzen die Darstellung (3.31) des Wellenoperators:

$$\sum_{2 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \partial_{1i} \partial_{1j} f = 0. \quad (3.63)$$

Dann produziert der Teil

$$\rho_{kl} \partial_{1k} \partial_{1l} \quad (3.64)$$

des Differentialoperators einen singulären Term in  $\rho_{1k}, \rho_{1l}$ , der durch keinen anderen Terme aufgehoben werden kann. Also kann es solch einen Term nicht geben.  $\square$

**Theorem 3.10** ([21, 22]). *Eine Korrelationsfunktion, welche  $V_1(x_1, x_2)$  enthält, d.h. der harmonische Anteil von  $F_0$ , ist wieder ein Laurent-Polynom, genau dann wenn  $F_0$  keine Doppelpole in  $x_1$  und  $x_2$  enthält.*

*Beweis.* Ist der harmonische Anteil  $H$  von  $F_0$  ein Laurent-Polynom, so gilt:  $\square_{x_1} H = \square_{x_2} H = 0$  und  $H$  hat nach Lemma 3.9 weder Doppelpole bzgl.  $x_1$  noch bzgl.  $x_2$ .

Besitzt andersherum  $F_0$  die Einfachpoleigenschaft, so zeigen wir durch eventuelles Ummummern und Mehrfachzählen der Indizes mit Lemma 3.8, dass der harmonische Anteil bzgl.  $x_1$  (welcher notwendigerweise mit dem harmonischen Anteil bzgl.  $x_2$  übereinstimmt) ein Laurent-Polynom ist.  $\square$

**Theorem 3.11** ([22]). *Das Feld  $V_1(x_1, x_2)$  konvergiert schwach auf Zuständen mit beschränkter Energie zu einem Huygens-bilokalen Feld vom Gewicht  $(1, 1)$ , genau dann wenn die führenden Terme  $F_0$  der Laurent-Polynome  $F$  die Einfachpoleigenschaft bzgl.  $x_1$  und  $x_2$  erfüllen.*

*Beweisskizze.* Wenn  $V_1$  Huygens-lokal ist, dann folgt mit analogem Beweis wie in Theorem 2.6, dass die Korrelationsfunktionen rational sind und dies impliziert mit Lemma 3.8 die Einfachpoleigenschaft.

Sei andersherum die Einfachpoleigenschaft erfüllt, dann ist  $H$  wieder ein Laurent-Polynom und  $V_1$  ist lokal bzgl. der Felder  $\phi_i$ . Es bleibt zu zeigen, dass die  $V_1$  untereinander lokal sind. Alles bleibt wahr wenn wir in  $F_0$  die Felder  $\phi_k(x_k) \phi_{k+1}(x_{k+1})$  durch  $U'(x_k, x_{k+1})$  ersetzen. Nach der Voraussetzung und da  $U'$  bilokal ist, erfüllt die Ordnung  $\rho_{12}^0$  die Einfachpoleigenschaft bzgl.  $x_k$  und  $x_{k+1}$ . Nach Lemma 3.8 bleibt dies wahr, wenn wir zu dem harmonischen Anteil bzgl.  $x_1$  und  $x_2$  übergehen. Man kann auf die gleiche Weise fortfahren und findet, dass alle gemischten Korrelationsfunktionen von möglichen  $V_1$ 's und  $\phi_i$ 's existieren und rational sind. Damit folgern wir, dass alle Produkte von  $V_1$ 's und  $\phi_i$ 's auf dem Vakuum konvergieren und die  $V_1$  Huygens-bilokal sind, da seine Matrixelement Huygens-Bilokalität erfüllen. Die konformen Eigenschaften, folgen dann aus der Erhaltung der Homogenitätseigenschaften der harmonischen Zerlegung, gegeben durch Lemma 3.8.  $\square$

**Folgerung 3.12.** *Eine Lösung  $F_0$  der Differentialgleichung (3.28) hat Doppelpole bezüglich  $x_1$ , genau dann wenn sie Doppelpole bzgl.  $x_2$  hat.*

*Beweis.* Habe  $F_0$  bzgl.  $x_1$  keine Doppelpole. Das ist nach Lemma 3.9 und Lemma 3.8 äquivalent damit, dass der harmonische Anteil  $H$  von  $F_0$  bzgl.  $x_1$  um  $x_2$  rational ist. Da  $F_0$  die Bedingung  $(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0$  erfüllt, stimmt  $H$  mit dem harmonischen Anteil bzgl.  $x_2$  um  $x_1$  überein, welcher somit auch rational ist, was wiederum äquivalent dazu ist, dass  $F_0$  keine Doppelpole bezüglich  $x_2$  besitzt.  $\square$

Aus den Polschranken (Proposition 2.9 (2.64)) und der Clustereigenschaft und Folgerung 3.4 folgt:

**Korollar 3.13** ([22]). *Für skalare  $d = 2$  Felder ist  $V_1$  immer Huygens-bilokal und die Korrelationsfunktionen sind Laurent-Polynome.*

*Beweis.* Wir betrachten für  $n \geq 4$  eine beliebige trunkierte Korrelationsfunktion in einer Theorie von skalaren Feldern mit Skalendimension 2 und zeigen, dass die Einfachpoleigenschaft nicht verletzt wird.

Die trunkierte Korrelationsfunktion ist eine Linearkombination von Termen:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\rho_{ij})^{\mu_{ij}} . \quad (3.65)$$

Die Polschranke (2.64) bedeutet, dass  $\mu_{ij} \geq 1$  ist. Die Einfachpoleigenschaft ist also damit äquivalent, dass es keinen Term gibt, für den es ein  $i$  gibt, sodass mehr als zwei  $\mu_{ij}$  negativ sind.

Nehmen wir also an, dass es einen solchen Term gibt, also ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{14} = -1$ .

Dies würde einen Doppelpol für die Felder  $U(x_1, x_j)$  für  $j = 2, 3, 4$  bedeuten. Wegen der Homogenität müssen weitere Pole in  $x_j$  ( $j = 2, 3, 4$ ) vorhanden sein. Wegen Folgerung 3.4 können diese nicht von der Form  $\rho_{jk}$  mit  $k > 4$  sein. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist also  $\mu_{23} = \mu_{24} = -1$  und  $\mu_{34} = 0$ . Wegen Homogenität muss die Abhängigkeit in  $x_1, \dots, x_4$  durch Linearkombination von:

$$\frac{\rho_{1k}\rho_{2l}}{\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24}} \quad (3.66)$$

mit  $k, l > 4$  gegeben sein.

Der obige Term divergiert für  $t \rightarrow \infty$  mit  $\sim t^4$ , wenn man die Punkte  $x_1, \dots, x_4$  mit  $t \cdot a$  ( $a^2 \neq 0$ ) verschiebt. Durch Antisymmetrisierung in  $k, l$  kann die Divergenz zu  $\sim t^2$  vermindert, aber nicht aufgelöst werden. Dies ist in Widerspruch zu der Clustereigenschaft, welche erfordert, dass die trunkierte Funktion für  $t \rightarrow \infty$  verschwindet.  $\square$

## 4 Bedingungen an die Polstruktur

In diesem Kapitel ist das Ziel, Einschränkungen an die Korrelationsfunktionen zu untersuchen, welche durch die Biharmonizität des Twist-2-Anteils auftreten. Als Einstieg betrachten wir zuerst niedrige  $n$ -Punktfunktionen, d.h.  $n = 3, 4, 5$ . Die wenigen Freiheitsgrade dieser Funktionen vereinfachen das Problem. Im Vierpunktfall werden wir alle möglichen Einschränkungen, welche durch die Biharmonizität des Twist-2-Anteils zweier Felder gleicher Skalendimension gegeben sind, direkt hinschreiben und insbesondere auch die entsprechenden Korrelationsfunktionen der biharmonischen Felder  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  angeben. Wir erinnern, dass diese durch den harmonischen Anteil von  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  gegeben sind. Insbesondere sind die Vierpunktfunktionen biharmonischer Felder wieder Laurent-Polynome in den Abstandsquadraten  $\rho_{ij}$ . Dies ist eine Folge aus der Einfachpoleigenschaft, welche für Vierpunktfunktionen wegen dem Mangel an unabhängigen Variablen trivialerweise erfüllt ist.

Die Analyse eines Rekursionssystems, welches der führende Anteil der Ordnung  $\rho_{12}^0$  von Fünfpunktfunktionen mit einem  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  erfüllen muss, zeigt, dass auch in diesem Fall die Einfachpoleigenschaft erfüllt ist. Dies wiederum wählt für die Untersuchung von Doppelpolen  $n$ -Punktfunktionen mit  $n \geq 6$  aus, welchen wir uns im darauf folgenden Kapitel widmen werden.

Für Dreipunktfunktionen liefert die Gleichung (3.28) keine Einschränkungen. Die Dreipunktfunktion von  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  mit  $\phi_3(\mathbf{x}_3)$  ist gegeben durch:

$$\langle U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\phi_3(\mathbf{x}_3) \rangle = C_{\phi_1\phi_2\phi_3} \frac{\rho_{12}^{d_3/2-1}}{(\rho_{13}\rho_{23})^{d_3/2}} \quad (d_3 \text{ gerade}) \quad (4.1)$$

und verschwindet für ungerades  $d_3$  (siehe Proposition 2.10). Der einzige Fall, wo obige Korrelationsfunktion die nullte Ordnung von  $\rho_{12}$  enthält (wir nennen dies auch den Twist-2-Anteil) ist  $d_3 = 2$ . In diesem Fall ist sie aber harmonisch in  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ . Damit ist für  $d_3 = 2$

$$\left\langle V_1^{\phi_1\phi_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\phi_3(\mathbf{x}_3) \right\rangle = \frac{C_{\phi_1\phi_2\phi_3}}{\rho_{13}\rho_{23}} \quad (4.2)$$

und Null sonst. Das sollte auch so sein, da  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  genau der Teil in der Operatorproduktentwicklung ist, der aus Twist-2-Feldern besteht. Das Feld  $\phi_3$  projiziert auf Twist  $d_3$  und Spin  $L = 0$ , also kann die Dreipunktfunktion nur für  $d_3 = 2$  nicht verschwinden.

### 4.1 Vierpunktfunktionen

Ziel dieses Abschnitt ist es, den Twist-2-Anteil von  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  für Vierpunktfunktionen zu betrachten. In dem Fall von nur vier Punkten, lassen sich die Einschränkungen der Diffe-

rentialgleichung (3.28) explizit lösen. Ist die Skalendimension der beiden weiteren Felder gleich, so ergeben sich keine weiteren Einschränkungen. Aus den Lösungen der Differentialgleichung (3.28) lassen sich schließlich die Vierpunktfunktionen mit dem biharmonischen Feld  $V(x_1, x_2)$  berechnen.

#### 4.1.1 Polstruktur bei Vierpunktfunktionen

Wir betrachten ohne Einschränkung der Allgemeinheit Korrelationsfunktionen der Form  $\langle U\phi_3\phi_4 \rangle$ . Die Fälle  $\langle \phi_3 U\phi_4 \rangle$  und  $\langle \phi_3\phi_4 U \rangle$  ergeben sich dann wegen der Lokalität einfach durch Permutation der Indizes. Wir betrachten genauer  $F_0$ , den Anteil der Ordnung  $(\rho_{12})^0$  der Korrelationsfunktion

$$\langle U(x_1, x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle = F_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + O(\rho_{12}) , \quad (4.3)$$

wobei  $F_0$  die Gleichung

$$(E_1 D_2 - E_2 D_1) F_0 = 0 \quad (4.4)$$

erfüllen muss und

$$U(x_1, x_2) = \rho_{12}^{d-1} (\phi_1(x_1)\phi_2(x_2) - \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle) \quad (4.5)$$

mit  $d = d_1 = d_2$  ist. Durch  $F_0$  ist mittels der harmonische Zerlegung (Lemma 3.2) wiederum  $H(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle V(x_1, x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle$  eindeutig festgelegt. Wir nutzen zum Parametrisieren der Vierpunktfunktion wieder die üblichen anharmonischen Verhältnisse

$$s = \frac{\rho_{12}\rho_{34}}{\rho_{13}\rho_{24}}, \quad t = \frac{\rho_{14}\rho_{23}}{\rho_{13}\rho_{24}} . \quad (4.6)$$

Die Möglichkeiten für den Twist-2-Anteil von  $U(x_1, x_2)$  für vier Punkte lassen sich wie folgt klassifizieren. Dabei ist es zweckmäßig  $d_3 = a - b$  und  $d_4 = a + b$  zu betrachten. Aus Proposition 2.10 folgt, dass  $b$  eine ganze Zahl ist oder die Vierpunktfunktion verschwindet. Die Einschränkungen sind dann gegeben durch:

**Proposition 4.1.** *Sei  $F_0(x_1, x_2, x_3, x_4)$  wie oben, d.h. ein Laurent-Polynom in den fünf Variablen  $\{\rho_{13}, \rho_{14}, \dots, \rho_{34}\}$  und transformiere sich unter dem Gewicht  $(1, 1, a - b, a + b)$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $F_0$  von der Form:*

$$F_0(x_1, \dots, x_4) = \frac{g(t)}{\rho_{13}^{1-b} \rho_{14}^b \rho_{24} \rho_{34}^{a-1}} , \quad (4.7)$$

wobei  $g(t)$  ein Laurent-Polynom in  $t$  ist.  $F_0$  löst die Differentialgleichung (3.28) genau dann wenn

1. Fall  $b = 0$ :  $g(t)$  ein beliebiges Laurent-Polynom in  $t$ , oder
2. Fall  $b \neq 0$ :  $g(t) \propto 1 + t + \dots + t^{b-1}$  für  $b > 0$  und  $g(t) \propto t^b + t^{b+1} + \dots + t^{-1}$  für  $b < 0$ , d.h.

$$g(t) = C \cdot \sum_{n=\min\{0,b\}}^{\max\{b-1,-1\}} t^n = \text{sgn}(b) \cdot \frac{t^n - 1}{t - 1} \quad (4.8)$$

mit geeigneter Konstante  $C$  ist.

*Beweis.* Da die linke Seite (4.7) nicht von  $\rho_{12}$  abhängt, darf die rechte Seite nicht von  $s$  abhängen. Somit ist die rechte Seite der allgemeinste Ansatz. Wir entwickeln  $g(t) = \sum_n g_n t^n$ , wobei  $g_n$  irgendwelche Koeffizienten sind und schreiben  $F_0 = f_0 g(t)$ . Der Differentialoperator  $D = E_1 D_2 - E_2 D_1$  schreibt sich als:

$$D = \frac{\rho_{34}}{\rho_{13}\rho_{24}} [n_{14}n_{23}(n_{24} - n_{13}) + n_{13}n_{24}(n_{23} - n_{14})]$$

in den graderhaltenen Differentialoperatoren  $n_{ij} = \rho_{ij}\partial_{ij}$ . Es ist also

$$\begin{aligned} D F_0 &= \sum_n g_n \cdot D f_0 t^n \\ &= \frac{f_0 \rho_{34}}{\rho_{14}\rho_{23}} \sum_n g_n b [(b-n)n t^n - (b-1-n)(n+1)t^{n+1}] \\ &= \frac{f_0 \rho_{34}}{\rho_{14}\rho_{23}} \sum_n b(b-n)n [g_n - g_{n-1}] \cdot t^n, \end{aligned}$$

was genau dann verschwindet, wenn die Rekursionsgleichung:

$$b n (b - n) \cdot g_n = b n (b - n) \cdot g_{n-1}$$

erfüllt ist. Für  $b = 0$  stellt die Gleichung keine Bedingungen. Für  $b \neq 0$  ist die einzige Lösung mit nur endlich vielen  $g_n \neq 0$  für  $b > 0$  gegeben durch:  $g_0 = g_1 = \dots = g_{b-1}$  und für  $b < 0$  gegeben durch  $g_b = g_{b+1} = \dots = g_{-1}$ .  $\square$

Wir bemerken, dass  $F_0$  für den Fall  $b \neq 0$  ( $d_3 \neq d_4$ ) bis auf eine Konstante festgelegt ist und dass die Struktur nur von der Differenz der Skalendimensionen  $b = (d_4 - d_3)/2$ , aber nicht von  $a = (d_3 + d_4)/2$  abhängt.

Betrachten wir also die Korrelationsfunktionen  $W$  von zwei skalaren Feldern  $\phi_1, \phi_2$  mit Skalendimension  $d$ , mit zwei weiteren skalaren Feldern  $\phi_3, \phi_4$  mit Skalendimension  $d_3$  bzw.  $d_4$ . Für  $d_3 = d_4$  gibt es keine neuen Einschränkungen. Wir bemerken, dass es jedoch Einschränkungen durch die Polschranken gibt. Für den Fall  $d_3 \neq d_4$  (dann ist nach Proposition 2.10  $d_3 - d_4 \in 2\mathbb{Z}$  oder  $W = 0$  und weiterhin  $W^T = W$ ) gibt es die Einschränkung

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle = C \frac{1 + \dots + t^{b-1}}{\rho_{12}^{d-1} \rho_{13}^{1-b} \rho_{14}^b \rho_{24}^{d_3+b-1} \rho_{34}^{d_3+b-1}} + O\left(\rho_{12}^{-d+2}\right), \quad (4.9)$$

wobei wir hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit den Fall  $2b := d_4 - d_3 \in \mathbb{N}$  betrachtet haben und  $C$  eine Konstante ist. Insbesondere erfüllt der Term in (4.9) alle Polschranken:

$$\mu_{i3} \leq 0 < \frac{d + d_3}{2}; \quad \mu_{i4} \leq b < \frac{d + d_3}{2} + b = \frac{d + d_4}{2} \quad (i = 1, 2).$$

Weiter unten sehen wir, dass die Konstante  $C$  ist im Wesentlichen der Partialwellenkoeffizient  $\beta_{\kappa=1, L=0}$  der Partialwelle  $\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\Pi_{\kappa=1, L=0}\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle$  ist. Hierbei bedeutet  $\Pi_{\kappa=1, L=0}$  die Projektion auf Twist 2 ( $\kappa = 1$ ) und Spin  $L = 0$ . Diese lässt sich durch den quadratischen Casimir-Operator bzw. die Operatorproduktentwicklung definieren (vgl. [10, 9]). Mit anderen Worten: die Operatorproduktentwicklung von  $\phi_1$  und  $\phi_2$  besitzt im Twist 2 nur den Spin 0.

### 4.1.2 Vierpunktfunktionen mit biharmonischen Feldern

Wir betrachten im Folgenden den harmonischen Anteil der zuvor gefunden Strukturen. Dafür setzen wir vorerst in (3.28)  $a = 1$ , da die Harmonizität in  $x_1$  und  $x_2$  gar nicht von einem Faktor in der Variable  $\rho_{34}$  abhängt. Bei  $b$  denke man wieder an die Differenz der Skalendimensionen, d.h.  $2b = d_4 - d_3$ . Die harmonischen Anteile sind dann wie folgt gegeben:

**Lemma 4.2.** Für  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist:

$$h_b(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{\rho_{13}^{1-b} \rho_{14}^b \rho_{24}} \sum_{m=\min\{0,b\}}^{\max\{b-1,-1\}} F(m-b+1, m+1; 1; s) t^m \quad (4.10)$$

harmonisch in  $x_1$  und  $x_2$ . Für den Fall  $b = 0$  ist für jedes  $n \in \mathbb{Z}$

$$h_{0,n}(x_1, \dots, x_4) = \frac{t^n}{\rho_{13}\rho_{24}} \left( 1 - \sum_{m=-n}^{-1} (m+n+1) s F(m+n+2, m+1; 2; s) t^m \right) \quad (4.11)$$

harmonisch  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

*Beweis.* Siehe Anhang C. □

Wir benutzen hierbei die Konvention, dass für  $m > n + 1$

$$\sum_{k=m}^n a_k := - \sum_{k=n+1}^{m-1} a_k . \quad (4.12)$$

und für  $m = n + 1$  die Summe verschwindet. Mit dieser Konvention gilt also insbesondere

$$\sum_{k=l}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=l}^m a_k . \quad (4.13)$$

Mit dem obigen Lemma können wir die Vierpunktfunktionen von biharmonischen Feldern  $V(x_1, x_2)$  erzeugt durch zwei skalare Felder gleicher Skalendimension mit zwei weiteren skalaren Feldern angeben. Wir betrachten ohne Einschränkung die Vierpunktfunktion  $\langle V(x_1, x_2) \phi_3(x_3) \phi_4(x_4) \rangle$ , welche als harmonischer Anteil von  $\langle U(x_1, x_2) \phi_3(x_3) \phi_4(x_4) \rangle$  gegeben ist. Dabei ist

$$U(x_1, x_2) = \rho_{12}^{d-1} (\phi_1(x_1) \phi_2(x_2) - \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle) \quad (4.14)$$

das zu den skalaren Feldern  $\phi_1$  und  $\phi_2$  mit Skalendimension  $d$  assoziierte Bi-Feld.

**Folgerung 4.3.** Für den Fall  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  (d.h.  $d_3 \neq d_4$ ) ist die Vierpunktfunktion  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  mit einem biharmonischen Feld wie oben, gegeben durch:

$$\langle V(x_1, x_2) \phi_3(x_3) \phi_4(x_4) \rangle = \frac{C_{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}}{\rho_{34}^{a-1}} h_b(x_1, \dots, x_4) , \quad (4.15)$$

also insbesondere bis auf eine Konstante festgelegt. Für den Fall  $d_3 = d_4 =: d'$  ist:

$$\langle V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\phi_3(\mathbf{x}_3)\phi_4(\mathbf{x}_4) \rangle = \sum_n \frac{C^n \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}{\rho_{34}^{d'-1}} h_{0,n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4) . \quad \square \quad (4.16)$$

Insbesondere erfüllt (4.15) auch wieder alle Polschranken. Denn betrachtet man für den Fall  $b > 0$  den Term zu  $s^n t^m$  in (C.3), so ist wegen  $m + n \leq b - 1$ :

$$\mu_{13} = 1 + m + n - b \leq 0 < \frac{d + d_3}{2} \quad \mu_{24} = 1 + m + n \leq b < \frac{d + d_3}{2} + b = \frac{d + d_4}{2} . \quad (4.17)$$

Für  $d_3 = d_4$  ist mit

$$U'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho_{12}^{d_3-1} (\phi_3(\mathbf{x}_1)\phi_4(\mathbf{x}_2) - \langle \phi_3(\mathbf{x}_1)\phi_4(\mathbf{x}_2) \rangle) \quad (4.18)$$

die Vierpunktfunktion  $\langle V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)U'(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \rangle = \langle V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)V'(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \rangle$ , da alle  $\{h_{0,n}\}$  in allen Argumenten harmonisch sind, wobei  $V'$  das biharmonische Feld zu  $U'$  ist. Dies ist insbesondere konsistent damit, dass die zu den verschiedenen Twists gehörenden Unterräume orthogonal sind, in anderen Worten  $\langle V_\kappa V_{\kappa'} \rangle = 0$  für  $\kappa' \neq \kappa$ .

Wir können den Übergang zu einer Korrelationsfunktion mit  $V$  als das Einsetzen eines orthogonalen Projektors auf Twist 2 sehen und erhalten damit Twist-2-Partialwellen der Form  $\langle V\phi_3\phi_4 \rangle = \langle U\Pi_{\kappa=1}\phi_3\phi_4 \rangle$ .

### 4.1.3 Vergleich mit Partialwellenentwicklung

In diesem Abschnitt vergleichen wir unsere Ergebnisse mit der für die Partialwellenentwicklung gewonnenen expliziten Formeln aus [9, 10].

*Bemerkung 4.4.* Die Twist-2-Partialwelle für  $b \neq 0$  lässt sich in den sogenannten „chiralen Variablen“  $u, v$  gegeben durch:

$$s = uv, \quad t = (1 - u)(1 - v) \quad (4.19)$$

vereinfachen zu

$$\sum_{m=0}^{b-1} F(m - b + 1, m + 1; 1; s)t^m = \frac{(1 - v)^b - (1 - u)^b}{u - v}, \quad (4.20)$$

was sich wiederum schreiben lässt als

$$b \cdot s^{-1} F(u, v) = \frac{b}{u - v} (u \cdot F(1, 1 - b; 2; u) \cdot F(0, -b, 0, v) - (u \leftrightarrow v)) , \quad (4.21)$$

wobei  $F(u, v)$  der Partialwelle aus [10] mit Twist 2 und Spin 0 entspricht. Das  $s^{-1}$  kommt dabei durch einen anderen gewählten Vorfaktor, ist also nur Konvention. Dabei ist  $F(a, b; c; z)$  die hypergeometrische Funktion (siehe Anhang D). Wir haben damit (bis auf einen Faktor) die Twist-2-Spin-0-Partialwellen gefunden.

*Beweisskizze.* Mit der Identität (siehe Anhang D)

$$F(0, -b; 0; z) = (1 - z)^b \quad (4.22)$$

$$b \cdot z \cdot F(1, 1 - b; 2; z) = 1 - (1 - z)^b \quad (4.23)$$

ist (4.21) identisch mit:

$$\frac{(1 - (1 - u)^b)(1 - v)^b - (u \leftrightarrow v)}{u - v} = \frac{(1 - v)^b - (1 - u)^b}{u - v}, \quad (4.24)$$

also insbesondere mit der rechten Seite von (4.20).

Dass in Gleichung (4.20) die rechte und linke Seite übereinstimmen direkt zu zeigen, lässt sich über die Verifizierung einer komplizierten binomiale Identität vornehmen. Dies wurde für die ersten Fälle mit einem Computer-Algebra-System überprüft. Wir möchten hier aber ein anderes Argument angeben. Dazu betrachten wir den Grenzwert  $s \rightarrow 0$  oder genauer  $v = 0$ . In diesem Fall ist die linke Seite

$$\sum_{m=0}^{b-1} t^m = \frac{1 - t^b}{1 - t} = \frac{1 - (1 - u)^b}{u} \quad (4.25)$$

und es besteht Gleichheit mit der rechten Seite. Wir nutzen, dass die linke Seite harmonisch ist und dass sich der Wellenoperator in den Variablen  $s$  und  $t$  ausdrücken und damit wiederum in  $u$  und  $v$  ausdrücken lässt. Dies ergibt, dass eine harmonische Funktion von der Form (vgl. [24] (2.23)):

$$\frac{g(u) - g(v)}{u - v} \quad (4.26)$$

ist. Damit folgern wir aber, dass die linke und rechte Seite in (4.20) stets übereinstimmen.  $\square$

Im Fall  $d_3 \neq d_4$  kommt in  $\langle V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\phi_3(\mathbf{x}_3)\phi_4(\mathbf{x}_4) \rangle$  also nur Spin  $L = 0$  vor. Für den Fall  $d_3 = d_4$  sind die Partialwellen zu Twist 2 und Spin  $L$  hingegen nach [20] durch

$$\frac{uv}{u - v}(u^{L+1} \cdot F(L + 1, L + 1; 2L + 2; u) - (u \leftrightarrow v)) \quad (4.27)$$

gegeben. Da die Vierpunktfunktion mit einem biharmonischen Feld  $\langle V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\phi_3(\mathbf{x}_3)\phi_4(\mathbf{x}_4) \rangle$  rational ist, die Partialwellen aber nicht, schließen wir (im Fall  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \neq 0$ ) daraus, dass unendlich viele Spins vorkommen. Dies entspricht dem Auftreten unendlich vieler erhaltener Tensorfelder in der Operatorproduktentwicklung der Felder.

#### 4.1.4 Der Fall dreier Feldern gleicher Skalendimension

Es stellt sich die Frage, ob es weitere Einschränkungen gibt, wenn man Vierpunktfunktionen mit drei Feldern gleicher Skalendimension betrachtet.

Wir betrachten die trunkierte Vierpunktfunktion der Felder  $\phi_i$  mit Skalendimension  $d_1 = d_2 = d_3 = d$  und  $d_4 = d + 2b \geq 1$  mit  $d \in \mathbb{N}$  und  $b \in \mathbb{Z}$ . Dann sind die singulärsten Teile  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{13}$  und  $\rho_{23}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle &= \frac{\rho_{13}^{b-1}}{\rho_{12}^{d-1}\rho_{14}^b\rho_{24}\rho_{34}^{d+b-1}} C_1 \sum_{n=\min\{0,b\}}^{\max\{b-1,-1\}} t^n + O(\rho_{12}^{2-d}) \\ &= \frac{\rho_{12}^{b-1}}{\rho_{13}^{d-1}\rho_{14}^b\rho_{24}\rho_{34}^{d+b-1}} C_2 \sum_{n=\min\{0,b\}}^{\max\{b-1,-1\}} (t/s)^n + O(\rho_{13}^{2-d}) \\ &= \frac{\rho_{13}^{b-1}}{\rho_{23}^{d-1}\rho_{34}^b\rho_{24}\rho_{14}^{d+b-1}} C_3 \sum_{n=\min\{0,b\}}^{\max\{b-1,-1\}} s^n + O(\rho_{23}^{2-d}) . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Für  $b \geq 1$  und  $d \geq 2$  sind die drei Strukturen unabhängig und es entstehen keine weiteren Bedingungen. Für den Fall  $d = 1$  folgt aus der Harmonizität der Zweipunktfunktion und dem Reeh-Schlieder-Theorem bereits, dass (4.28) bzgl.  $x_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  harmonisch sein muss. Wir bemerken, dass mit  $d_i = 1$   $\phi_i$  ein masseloses freies Feld  $\square\phi_i = 0$  ist. Für den Fall  $d \geq 2$  und  $(1-d)/2 \leq b \leq -1$  sind die drei Strukturen ebenfalls unabhängig.

Wir betrachten die Vierpunktfunktion der Felder  $\phi_i$  mit Skalendimension  $d_1 = d_2 = d_3 = 1$  und  $d_4 = 1 + 2b \geq 1$  und  $b \in \mathbb{N}$ . Die Vierpunktfunktion  $\langle \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \rangle$  ist notwendig harmonisch in  $x_1, x_2, x_3$  und somit für  $b = 1$  gegeben durch:

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle = \frac{C}{\rho_{14}\rho_{24}\rho_{34}} . \quad (4.29)$$

Sie entspricht dem Fall  $\phi_4 =: \varphi^3$ . Für alle  $b > 1$  verschwinden diese Vierpunktfunktionen, da der harmonische Anteil bzgl.  $x_1, x_2$  nicht harmonisch in  $x_3$  ist. Wäre er das, so müsste der Term der Ordnung 0 in  $\rho_{23}$  die Integrabilitätsbedingung für  $x_2$  und  $x_3$  erfüllen.

Die Bedingung  $b > 1$  bedeutet, dass die Korrelationsfunktionen  $\langle \varphi\varphi\varphi\phi_4 \rangle$  mit  $d_4 \geq 5$  verschwinden. Insbesondere gibt es hier keine Kopplung des masselosen freien Feldes  $\varphi$  an denkbare nicht-freie Felder.

## 4.2 Fünfpunktfunktionen

Der Fall von Fünfpunktfunktionen  $\langle \cdot U(x_1, x_2) \cdot \rangle$  von  $U$  und drei weiteren skalaren Feldern  $\phi_3, \phi_4, \phi_5$  soll hier betrachtet werden. Dieser Fall unterscheidet sich stark von dem mit vier Punkten. Zum einen hängt im Vierpunktfall die Struktur obiger Korrelationsfunktion von  $U$  mit zwei weiteren skalaren Feldern von dessen Skalendimensionsunterschied ab. Im Fünfpunktfall hingegen hängt die Struktur der Lösungen der Integrabilitätsbedingungen gar nicht von den Skalendimensionen ab. Die Skalendimensionen schränken die möglichen Strukturen nur über die Polschranken ein.

Zum Anderen ist im Gegensatz zum Vierpunkt Fall, wo bereits durch die Homogenität ausgeschlossen wird, dass keine Doppelpole vorkommen können, besteht im Fünfpunktfall

a priori erstmal die Möglichkeit, dass Doppelpole auftreten. Dies würde implizieren das die harmonische Erweiterung von  $\langle U\phi_3\phi_4\phi_5 \rangle$  in diesem Fall kein Laurent-Polynom mehr wäre. Es ist eine nicht-triviale Aussage, welche genauere Untersuchungen der aus der Integrabilitätsbedingungen folgenden Rekursionsgleichungen benötigt, dass dieser Fall *nicht* auftritt.

### 4.2.1 Fünfpunktösungen

Für die Vierpunktfunktionen liefert die Differentialgleichung  $(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0$  Einschränkungen an Korrelationsfunktionen der Form  $\langle U\phi_3\phi_4 \rangle$ , welche insbesondere von den Skalendimensionen  $d_3, d_4$  der Felder  $\phi_3$  bzw.  $\phi_4$  abhängen. Insbesondere bestehen nur Einschränkungen, wenn  $d_3 \neq d_4$  ist.

Hingegen auf der Ebene der Fünfpunktfunktionen erscheint dieses Phänomen nicht mehr, hier hängt die Struktur der Lösung gar nicht mehr von den Skalendimensionen der Felder ab. Von einer Funktion  $F_0(x_1, \dots, x_5)$  mit dem Gewicht  $(1, 1, a, b, c)$  lässt sich immer ein Faktor, welcher nur von  $(x_3, x_4, x_5)$  abhängt, wie folgt abspalten

$$F_0(x_1, \dots, x_5) = \frac{1}{\rho_{34}^{(a+b-c)/2} \rho_{45}^{(b+c-a)/2} \rho_{35}^{(a+c-b)/2}} \cdot G_0(x_1, \dots, x_5) . \quad (4.30)$$

Die so gewonnene Funktion  $G_0$  transformiert sich mit dem Gewicht  $(1, 1, 0, 0, 0)$ . Man kann bei dem Faktor an die Dreipunktfunktion von  $\langle \phi_3\phi_4\phi_5 \rangle$  denken, wenn diese nicht verschwindet. Der Faktor ist wohldefiniert, da für  $a + b + c$  ungerade  $F_0 = 0$  ist (vgl. Proposition 2.10).

Da der Differentialoperator  $D := E_1D_2 - E_2D_1$  gar nicht von den Variablen  $\rho_{34}, \rho_{45}$  und  $\rho_{35}$  abhängt, also mit ihnen vertauscht, ist  $DF_0 = 0$  genau dann wenn  $DG_0 = 0$  ist. Ist  $G_0$  Lösung, so auch eine Permutation  $\sigma G_0$  mit  $\sigma G_0(x_1, \dots, x_5) = G_0(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(5)})$ , wobei  $\sigma$  aus der zwölfelementigen Gruppe  $S := S_2 \times \{\tau : \{3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 4, 5\} \text{ bijektiv} \} \cong S_2 \times S_3$  ist.

Ferner liefert jede 4-Punktösung mit dem Gewicht  $(1, 1, -b, b)$  eine 5-Punktösung  $DG_0 = 0$  mit dem Gewicht  $(1, 1, 0, 0, 0)$  via

$$G_0(x_1, \dots, x_5) = \sigma \left( \frac{\rho_{35}}{\rho_{34}} \right)^b F_0(x_1, \dots, x_4), \quad \sigma \in S . \quad (4.31)$$

Insbesondere liefern auf diese Weise die Twist-2-Partialwellen aus Folgerung 4.3 dann mögliche Fünfpunktstrukturen von  $\langle V(x_1, x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\phi_5(x_5) \rangle$ .

Es lassen sich damit vorerst die 5-Punktösungen von  $(E_1D_2 - E_2D_2)G_0 = 0$  in die drei folgenden Klassen einteilen:

1. Lösungen, die von den 4-Punktösungen herrühren. Hierzu kennen wir insbesondere den harmonischen Anteil, welche, wegen nicht vorkommenden Doppelpolen, stets rational ist.
2. Lösungen, die nicht von einer 4-Punktösung herrühren und keine Doppelpole enthalten. Diese Lösungen besitzen ebenfalls rationale harmonische Anteile.

3. Lösungen die Doppelpole besitzen. Der harmonische Anteil ist nicht rational.

Wir wollen hier Beispiele von 5-Punktlösungen ohne Doppelpole angeben, welche nicht von 4-Punktlösungen herkommen:

*Beispiel 4.1.* Mit den anharmonischen Verhältnis  $z$  und  $w$  und dem Faktor  $A$

$$z = \frac{\rho_{23}\rho_{45}}{\rho_{25}\rho_{34}}, \quad w = \frac{\rho_{24}\rho_{35}}{\rho_{25}\rho_{34}}, \quad A := \frac{\rho_{35}}{\rho_{13}\rho_{25}} \quad (4.32)$$

ist

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_5) &= A(z - w) \\ h_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_5) &= A(2(z - w)^2 - w - z) \\ h_3(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_5) &= A((z - w)^3 - w^2 + z^2) \\ h_4(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_5) &= A(2(z - w)^4 - 3w^3 + 3w^2z + 3z^2w - 3z^3w + w^2 + z^2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

harmonisch in  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ .

Die zweite Klasse ist also nicht leer. Der Inhalt der letzten Klasse von 5-Punktfunktionen, die Doppelpole enthalten, ist interessanter und wir widmen uns ihr im nächsten Abschnitt. Hier zeigen wir, dass diese Klasse leer ist.

### 4.2.2 Fünfpunktfunktionen besitzen nur Einfachpole

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass der konstante Teil  $F_0$  in  $\rho_{12}$  der Korrelationsfunktionen der Form

$$\langle U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\phi_3(\mathbf{x}_3)\phi_4(\mathbf{x}_4)\phi_5(\mathbf{x}_5) \rangle =: F_0 + O(\rho_{12}) \quad (4.34)$$

stets die Einfachpoleigenschaft erfüllt und somit der harmonische Anteil  $H$  von  $F_0$  wieder ein Laurent-Polynom ist. Die Idee zu dem Beweis ist dabei aus [30] entnommen. Wir halten folgendes Resultat fest:

**Proposition 4.5.** *Fünfpunktfunktionen eines biharmonischer Feld mit drei skalaren Feldern sind Laurent-Polynome.*

Dieses folgt direkt aus folgendem Lemma:

**Lemma 4.6.** *Sei  $F_0$  ein Laurent-Polynom vom Gewicht  $(1, 1, a, b, c)$  und erfülle die Differentialgleichung  $(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0$ , dann erfüllt  $F_0$  die Einfachpoleigenschaft bzgl.  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ .*

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $F_0$  vom Gewicht  $(1, 1, 0, 0, 0)$  ist. Nun nehmen wir an, dass  $F_0$  obige Einfachpoleigenschaft verletzt und ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen Doppelpol in  $\rho_{13}, \rho_{14}$  hat.

Wir führen folgende anharmonischen Verhältnisse ein:

$$x_3 = \frac{\rho_{13}\rho_{45}}{\rho_{15}\rho_{34}}, \quad x_4 = \frac{\rho_{14}\rho_{35}}{\rho_{15}\rho_{34}}, \quad y_3 = \frac{\rho_{23}\rho_{45}}{\rho_{25}\rho_{34}}, \quad y_4 = \frac{\rho_{24}\rho_{35}}{\rho_{25}\rho_{34}}. \quad (4.35)$$

Dann lässt sich  $F_0$  schreiben als:

$$F_0(x_1, \dots, x_5) = \sum_{p,q} \frac{x_3^{-p} x_4^{-q}}{\rho_{15}} \frac{f_{pq}(y_3, y_4)}{\rho_{25}}, \quad (4.36)$$

wobei  $f_{pq}(\cdot, \cdot)$  Laurent-Polynome sind. Weiterhin seien folgende graderhaltene Differentialoperatoren:

$$n_i := y_i \partial_i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (i = 3, 4) \quad (4.37)$$

gegeben. Mit diesem Ansatz ergibt sich ein zu  $DF_0 = (E_2 D_1 - E_1 D_2)F_0 = 0$  äquivalentes Rekursionssystem wie folgt. Wir betrachten die Wirkung von  $D$  auf jeden Summanden in (4.36), welcher durch  $DA_{pq}B_{pq} = (E_2 B_{pq})(D_1 A_{pq}) - (E_1 A_{pq})(D_2 B_{pq})$  gegeben ist mit:

$$A_{pq} := \frac{x_3^{-p} x_4^{-q}}{\rho_{15}}, \quad B_{pq} := \frac{f_{pq}(y_3, y_4)}{\rho_{25}}. \quad (4.38)$$

Im Detail:

$$E_1 A_{pq} = -\frac{\rho_{23}}{\rho_{13} x_4 y_3} [p y_3 x_4 + q y_4 x_3 - (p + q - 1) x_3 x_4] A_{pq} \quad (4.39)$$

$$E_2 B_{pq} = \frac{\rho_{13}}{\rho_{23} x_3 y_4} [y_4 x_3 n_3 + y_3 x_4 n_4 - y_3 y_4 (n_3 + n_4 + 1)] B_{pq} \quad (4.40)$$

$$D_1 A_{pq} = \frac{\rho_{34}}{\rho_{13} \rho_{14}} [pq - p(p + q - 1) x_4 - q(p + q - 1) x_3] A_{pq} \quad (4.41)$$

$$D_2 B_{pq} = \frac{\rho_{34}}{\rho_{23} \rho_{24}} [n_3 n_4 - y_4 n_3 (n_3 + n_4 + 1) - y_3 n_4 (n_3 + n_4 + 1)] B_{pq}. \quad (4.42)$$

$E_2 D_1$  liefert:

$$\begin{aligned} & y_4 n_3 [(p + 1)q f_{p+1,q} - (p + 1)(p + q + 1) f_{p+1,q+1} - q(p + q + 1) f_{p+2,q}] \\ & + y_3 n_4 [p(q + 1) f_{p,q+1} - p(p + q + 1) f_{p,q+2} - (q + 1)(p + q + 1) f_{p+1,q+1}] \\ & - y_3 y_4 (n_3 + n_4 + 1) [pq f_{p,q} - p(p + q) f_{p,q+1} - q(p + q) f_{p+1,q}] \end{aligned} \quad (4.43)$$

und  $E_1 D_2$  liefert:

$$\begin{aligned} & - p y_3 n_3 n_4 f_{p,q+1} - q y_4 n_3 n_4 f_{p+1,q} + (p + q + 1) n_3 n_4 f_{p+1,q+1} \\ & + p y_3 y_4 n_3 (n_3 + n_4 + 1) f_{p,q+1} + q y_4^2 n_3 (n_3 + n_4 + 1) f_{p+1,q} \\ & - (p + q + 1) y_4 n_3 (n_3 + n_4 + 1) f_{p+1,q+1} \\ & + p y_3^2 n_4 (n_3 + n_4 + 1) f_{p,q+1} + q y_3 y_4 n_4 (n_3 + n_4 + 1) f_{p+1,q} \\ & - (p + q + 1) y_3 n_4 (n_3 + n_4 + 1) f_{p+1,q+1}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die Differenz beider muss also verschwinden. Weil  $F_0$  ein endliches Laurent-Polynom in den Abstandsquadraten ist, gibt es ein  $r > 0$ , sodass  $f_{pq} \equiv 0$  für alle  $p + q > r$ . Für  $p + q = r$  gilt dann  $p q y_3 y_4 (n_3 + n_4 + 1) f_{pq} = 0$  (da alle höheren verschwinden ( $f_{p+1,q}, f_{p,q+1}, \dots$ )). Also muss für  $p \neq 0 \neq q$ :  $f_{pq}$  homogen vom Grad  $-1$  sein.

Für  $p + q = r - 1$  und  $p \neq 0 \neq q$  gilt dann:

$$(n_3 + n_4 + 1) p q f_{pq} = (p + 1) q \partial_3 f_{p+1,q} + p (q + 1) \partial_4 f_{p,q+1} + n_3 \partial_4 f_{p,q+1} + n_4 \partial_3 f_{p+1,q}. \quad (4.45)$$

Damit ist  $f_{pq}$  von der Form:  $f_{pq} = g_{pq} + \tilde{f}_{pq}$ , wobei  $g_{pq}$  homogen vom Grad  $-2$  und  $\tilde{f}_{pq}$  homogen vom Grad  $-1$  ist. Induktiv sieht man, dass für  $p + q = r - s$  die Funktion  $f_{pq}$  von der Form  $f_{pq} = g_{pq} + \tilde{f}_{pq}$  ist, wobei  $g_{pq}$  homogen vom Grad  $-s - 1$  und  $\tilde{f}_{pq}$  weniger singulär ist. Damit vereinfacht sich das Rekursionssystem für  $p, q \geq 0$ , wenn wir nur den singulärsten Anteil betrachten:

$$\begin{aligned} & pqy_3y_4(n_3 + n_4 + 1) \cdot g_{pq} \\ &= y_4n_3(p + 1 + n_4)q \cdot g_{p+1,q} + y_3n_4(q + 1 + n_3)p \cdot g_{p,q+1} - (p + q + 1)n_3n_4 \cdot g_{p+1,q+1} . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Wir schreiben

$$g_{pq} = y_3^p y_4^q \cdot h_{pq}, \quad h_{pq} = \sum_m a_{pq}^{(m)} y_3^{-m} y_4^{-r+m-1}, \quad (4.47)$$

wobei  $h_{pq}$  homogen vom Grad  $-r - 1$  ist und von den Koeffizienten  $a_{pq}^{(m)}$  nur endlich viele nicht verschwinden. Durch Einsetzen von (4.47) in (4.46) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & (p + q + 1 + n_3 + n_4)h_{pq} \\ &= q(p + 1 + n_3)(p + q + 1 + n_4)h_{p+1,q} + p(q + 1 + n_4)(p + q + 1 + n_3)h_{p,q+1} \\ & \quad - (p + q + 1)(p + 1 + n_3)(q + 1 + n_4)h_{p+1,q+1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

und damit das folgende System von Rekursions-Gleichungen:

$$\begin{aligned} pq(p + q - r)a_{pq}^{(m)} &= q(p + 1 - m)(m - r + p + q) \cdot a_{p+1,q}^{(m)} \\ & \quad + p(m - r + q)(p + q + 1 - m) \cdot a_{p,q+1}^{(m)} \\ & \quad - (p + q + 1)(p + 1 - m)(m - r + q) \cdot a_{p+1,q+1}^{(m)}. \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Wir zeigen in den nächsten Schritten, dass diese Gleichung schon impliziert, dass für beliebiges  $m$  und für alle  $p, q \geq 1$  die  $a_{pq}$  und damit auch die  $h_{pq}$  und  $g_{pq}$  verschwinden. Ist weiterhin  $p + q = r$ , so ist  $f_{pq} = g_{pq} = 0$ , was der Annahme widerspricht, dass  $r$  minimal gewählt war. Also kann es keine  $p, q > 0$  mit  $f_{pq} \neq 0$  geben.

Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Wir behaupten, dass die Gleichung (4.49) impliziert, dass für alle  $p, q \geq 1$  bereits  $a_{pq} := a_{pq}^{(m)} = 0$ . Das machen wir in drei Schritten. Wir haben die Strategie in Abbildung 4.1 beispielhaft veranschaulicht.

1.  $p \geq \max(1, m)$  und  $q \geq 1$  ist  $a_{pq} = 0$ .

Für  $r \leq m$  ist nichts zu zeigen, da  $a_{pq} = 0$  für  $p \geq r, q \geq 1$ . Betrachten wir also den Fall, dass  $m \leq r - 1, \tilde{m} = \max(1, m)$ .

Für  $q > r - \tilde{m}$  verschwinden die  $a_{pq}$ , denn es ist  $q + p > r - \tilde{m} + p \geq r$ , ebenso wie für  $p > r - 1$ .

Es bleibt für  $\tilde{m} \leq p \leq r - 1$  und  $1 \leq q + 1 \leq r - m$  zu zeigen, dass  $a_{p,q+1}$  verschwindet. Aus  $p \geq \tilde{m} > m - q - 1$  folgt  $p + q + 1 - m > 0$  und aus  $q + 1 \leq r - m: m - r + q < 0$ . Damit verschwindet der Vorfaktor vor dem  $a_{p,q+1}$  in Gleichung (4.49) nicht und es gilt:

$$qa_{pq} = qa_{p+1,q} = a_{p+1,q+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{p,q+1} = 0. \quad (4.50)$$

Man beginnt mit  $(p, q) = (r - 1, 0)$ , was  $a_{r-1,1} = 0$  impliziert. Hat man schon gezeigt, dass  $qa_{pq} = qa_{p+1,q} = a_{p+1,q+1} = 0$ , ist nach obiger Relation auch  $a_{p,q+1} = 0$ .

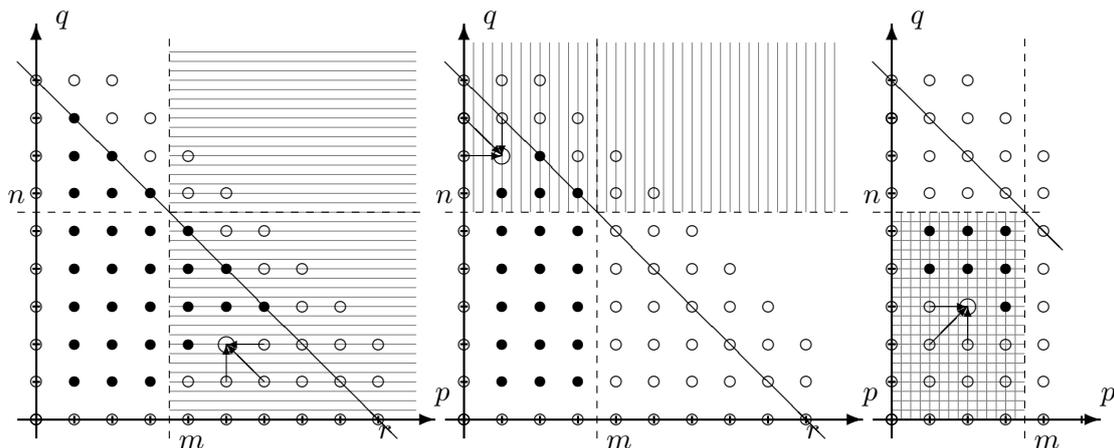


Abbildung 4.1: Zur Beweisidee

2. Für alle  $p \geq 1$  und  $q \geq \max(1, r - m + 1) =: \tilde{n}$  gilt  $a_{pq} = 0$ .

Für  $m \leq 1$  ist wieder nichts zu zeigen, da dann für  $q \geq r - m + 1 \geq r$  und  $p \geq 1$  der Koeffizient  $a_{pq}$  bereits verschwindet.

Wir betrachten den Fall  $m \geq 2$ . Für  $p > r - \tilde{n}$  und  $q \geq \tilde{n}$  verschwinden die  $a_{pq}$ , denn es ist  $p + q > r$ .

Es bleibt für  $\tilde{n} \leq q \leq r - 1$  und  $1 \leq p + 1 \leq r - \tilde{n}$ , dass  $a_{p+1,q} = 0$  ist. Dann ist aber  $p + q - r + m > 0$  und  $p + 1 - m < 0$  und der Vorfaktor vor dem  $a_{p+1,q}$  in Gleichung (4.49) verschwindet nicht und es gilt:

$$pa_{pq} = pa_{p,q+1} = a_{p+1,q+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{p+1,q} = 0. \quad (4.51)$$

Für  $(p, q) = (0, r - 1)$  sieht man, dass  $a_{1,r} = 0$  usw.

3. Für  $1 \leq p \leq \max(1, m - 1)$  und  $1 \leq q \leq \max(r - m - 1, 1)$  ist  $a_{pq} = 0$ .

Wir brauchen nur noch den Fall  $1 < m < r$  zu zeigen, ansonsten folgt die Behauptung aus einer der beiden obigen Fälle.

Dann ist aber für  $p < m - 1$  und  $q < r - m$  auch  $p + 1 - m < 0$  bzw.  $m - q + q < 0$  und der Vorfaktor  $(p + 1 - m)(m - r + q)$  verschwindet nicht. Dann gilt die Relation:

$$pqa_{pq} = pa_{p,q+1} = qa_{p+1,q} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{p+1,q+1} = 0. \quad (4.52)$$

Wir beginnen mit  $(p, q) = (0, 0)$ , daraus folgt  $a_{11} = 0$  bis  $(p, q) = (m - 2, 0)$ , daraus folgt  $a_{m-1,1} = 0$  usw.

□

Wir haben also gezeigt, dass Fünfpunktfunktionen mit biharmonischen Feldern stets Laurent-Polynome sind und Doppelpole erst ab Sechspunktfunktionen auftreten können. Die Betrachtung von Einfachpolen für  $n > 5$  geht analog zu der Betrachtung von Fünfpunktfunktionen.

## 5 Bedingungen an die Polstruktur von Doppelpolen

In diesem Kapitel interessieren wir uns für die Struktur von Korrelationsfunktionen, welche die Einfachpoleigenschaft verletzen, d.h. deren harmonischer Anteil nach Theorem 3.10 insbesondere kein Laurent-Polynom ist. Dabei kommt die Frage auf, wie die allgemeine Struktur solcher Doppelpol-Lösungen aussieht. Besonders interessant sind diese Strukturen, da Twist-2-Felder, welche von freien Bi-Feldern wie z.B. :  $\varphi(x)\varphi(y)$  :,  $(x-y)^\mu$  :  $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(y)$  :, oder  $(x-y)^\mu(x-y)^\nu$  :  $F_{\mu\sigma}(x)F_\nu^\sigma(y)$  : erzeugt werden, immer Wick-bilinear sind, sodass deren Korrelationsfunktionen keine Doppelpole enthalten können. Damit ist die Verletzung der Einfachpoleigenschaft ein klarer Hinweis auf nichttriviale Feldinhalt der Theorie.

Wir haben somit eine positive und eine negative Motivation, solche Strukturen zu untersuchen. Zum einen sind Doppelpolstrukturen Kandidaten für Korrelationsfunktionen von nicht-trivialen Modellen. Auf der anderen Seite wäre auch denkbar, dass genauere Kenntnisse über die Doppelpolstruktur dazu führt, dass sich solche Strukturen (zumindest teilweise) durch Hinzunahme von weiteren Bedingungen (wie z.B. Wightman-Positivität) ausschließen lassen. Dies wäre wiederum ein Hinweis auf Trivialität. So wird im Fall skalarer Felder der Skalendimension  $d = 2$  die Einfachpoleigenschaft genutzt, um zu zeigen, dass diese Felder von freien und verallgemeinerten freien Feldern erzeugt werden (vgl. [22]).

### 5.1 Vorbetrachtung

Wir können unsere Untersuchungen von Doppelpolstrukturen im Anteil  $F_0$  einer Korrelationsfunktion ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf Laurent-Polynome in den Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n, (ij) \neq (12)\}$  für  $n \geq 6$  mit dem Gewicht  $(1, 1, 0, \dots, 0)$  beschränken, da die zu untersuchende Differentialgleichung  $(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0$  unabhängig von einem Faktor in den *zusätzlichen Variablen*  $\{\rho_{ij} \mid 3 \leq i < j \leq n\}$  ist. Die Funktionen  $F_0$  lassen sich durch anharmonische Verhältnisse (ein System ist im Beweis von Lemma 3.8 gegeben) parametrisieren. Die allgemeine Systematik der Polstruktur scheint aber in den Variablen  $\{\rho_{ij}\}$  durchsichtiger.

Es sei also  $n \geq 6$  und  $F_0$  eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0 . \tag{5.1}$$

Aus Folgerung 3.4 folgt, dass die komplexeste Struktur von  $F_0$  aus Linearkombinationen der Form

$$\frac{\text{Polynom}}{\rho_{1i}^a \rho_{1j}^b \rho_{2i}^c \rho_{2j}^d} \times \text{andere Faktoren} \tag{5.2}$$

besteht.

Wir beginnen mit einem Beispiel, welches in [21, 22] gefunden wurde.

*Beispiel 5.1.* Die Funktion

$$u_0(x_1, \dots, x_6) = \frac{(\rho_{15}\rho_{26}\rho_{34} - 2\rho_{15}\rho_{23}\rho_{46} - 2\rho_{15}\rho_{24}\rho_{36})_{[1,2][5,6]}}{\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24}\rho_{34}\rho_{35}\rho_{45}\rho_{36}\rho_{46}} \quad (5.3)$$

erfüllt die Gleichung (5.1) sowohl bzgl.  $x_1, x_2$ , als auch die analoge Gleichung für  $x_5, x_6$ , wobei  $[i, j]$  für die Antisymmetrisierung bzgl. der Indizes  $i, j$  stehen soll. Sie erfüllt außerdem alle Polschranken und die Clustereigenschaft. Sie ist damit als Anteil einer Korrelationsfunktion

$$\langle U(x_1, x_2)\phi'(x_3)\phi'(x_4)U(x_5, x_6) \rangle \quad (5.4)$$

qualifiziert.

Wir betrachten die Funktion  $u_0$  zuerst nur in  $x_1, x_2$ . Als Erstes fällt auf, dass die Funktion sowohl in  $x_1$  als auch in  $x_2$  einen Doppelpol hat. Dass dies notwendig ist, haben wir in Folgerung 3.12 gezeigt. Insbesondere ist der singulärste Term in den Variablen  $\{\rho_{1i}, \rho_{2i} \mid 3 \leq i \leq n\}$  von der Form  $(\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24})^{-1}$ . Später können wir einfach zeigen, dass dies auch das einfachste Beispiel ist, d.h. dass bei alle anderen Strukturen die Doppelpole singulärer sind.

Es erscheint sinnvoll, einige leichter nachvollziehbare Ergebnisse vorwegzunehmen und die allgemeinen Ergebnisse später zu präsentieren. Die Strategie, um notwendige Bedingungen an die Struktur in (5.2) zu erhalten, ist es, den singulärsten Teil in  $\{\rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}\}$  zu betrachten. Dabei nehmen wir ohne Einschränkung an, dass  $(i, j) = (3, 4)$  in (5.2) ist.

Wir schreiben zweckmäßigerweise  $F_0$  in der Form:

$$F_0((\rho_{1i})_{3 \leq i \leq n}, (\rho_{2i})_{3 \leq i \leq n}, (\rho_{ij})_{3 \leq i < j \leq n}) = \sum_{a,b,c,d} \frac{C_{abcd}((\rho_{1i})_{3 \leq i \leq n}, (\rho_{2i})_{5 \leq i \leq n}, (\rho_{ij})_{5 \leq i < j \leq n})}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} \dots \quad (5.5)$$

Dabei sind die  $C_{abcd}$  wieder Laurent-Polynome in den genannten Variablen und nur endlich viele  $C_{abcd} \neq 0$ . Im Anhang (Abschnitt E) formen wir die Gleichung (5.1) in ein (rekursives) System von Gleichungen in den Koeffizienten  $\{C_{abcd}\}$  um. Dieses kürzen wir mit  $\mathfrak{R}(a, b, c, d) = 0$  für alle  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$  ab, wobei  $\mathfrak{R}(a, b, c, d)$  linear (über partielle Differentialoperatoren bis zu Ordnung 3) von 17 verschiedenen Koeffizienten aus der Menge  $\{C_{a+o, b+p, c+q, d+r} \mid 0 \leq o, p, q, r \leq 2; 2 \leq o+p+q+r \leq 4\}$  abhängt. Der explizite Ausdruck für  $\mathfrak{R}(a, b, c, d)$  ist in Gleichung (E.9) gegeben.

Verschwinden alle Koeffizienten  $\{C_{a,b,c,d} \mid a+b+c+d > r\}$ , so vereinfacht sich auf der Hyperebene  $a+b+c+d = r-2$  des Gitters  $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4\}$  die Gleichung  $\mathfrak{R}(a, b, c, d) = 0$  zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_s(a, b, c, d) = \\ ad(c-b)C_{a,b+1,c+1,d} + bc(d-a)C_{a+1,b,c,d+1} - cd\tilde{E}_1 C_{a+1,b+1,c,d} + ab\tilde{E}_2 C_{a,b,c+1,d+1} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

mit den partiellen Differentialoperatoren erster Ordnung

$$\tilde{E}_1 = \sum_{i=5}^n \rho_{2i} \partial_{1i}, \quad \tilde{E}_2 = \sum_{i=5}^n \rho_{1i} \partial_{2i} \quad (5.7)$$

und hängt insbesondere nur noch von den vier genannten Koeffizienten ab.

Um erste Ergebnisse zu bekommen, wir betrachten zuerst einen Spezialfall. In der Doppelpollösung (5.3) kommt auf der singularsten Hyperebene  $a + b + c + d = 4$  nur der Koeffizient  $C_{1111}$  vor. Dies motiviert für  $F_0$  den speziellen Ansatz:

$$F_0 = \frac{C_{a'b'c'd'}}{\rho_{13}^{a'} \rho_{14}^{b'} \rho_{23}^{c'} \rho_{24}^{d'}} + \sum_{a+b+c+d < r} \frac{C_{abcd}}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} \quad (5.8)$$

mit  $r := a' + b' + c' + d'$  und  $a', b' > 0$ , d.h. wir fordern einen Doppelpol in  $\rho_{13}, \rho_{14}$ . Damit vereinfacht sich  $0 = \mathfrak{R}(a, b, c, d) = \mathfrak{R}_s(a, b, c, d)$  für  $a + b + c + d = r - 2$  und es bleiben vier nicht-triviale Gleichungen:

$$0 = \mathfrak{R}_s(a', b' - 1, c' - 1, d') = a' d' (c' - b') C_{a'b'c'd'} \quad (5.9)$$

$$0 = \mathfrak{R}_s(a' - 1, b', c', d' - 1) = b' c' (d' - a') C_{a'b'c'd'} \quad (5.10)$$

$$0 = \mathfrak{R}_s(a' - 1, b' - 1, c', d') = c' d' \tilde{E}_1 C_{a'b'c'd'} \quad (5.11)$$

$$0 = \mathfrak{R}_s(a', b', c' - 1, d' - 1) = a' b' \tilde{E}_2 C_{a'b'c'd'} . \quad (5.12)$$

Die Gleichungen (5.9) und (5.10) sind kompatibel für  $(a', b', c', d') = (a, b, b, a)$  und (5.11), (5.12) implizieren dann  $\tilde{E}_1 C_{abba} = \tilde{E}_2 C_{abba} = 0$ . Man sieht direkt, dass dies mit

$$C_{abba} = P_{a+b-1} ((R_{ij})_{5 \leq i < j \leq n}) \cdot G((\rho_{ij})_{3 \leq i < j \leq n}) \quad (5.13)$$

gelöst wird, wobei  $P_{a+b-1}$  ein homogenes Polynom vom Grad  $a + b - 1$  in den  $\binom{n-5}{2}$  (im Allgemeinen nicht unabhängigen Variablen)  $\{R_{ij} \mid 5 \leq i < j \leq n\}$  ist, welche gegeben sind durch

$$R_{ij} = \frac{\rho_{1i} \rho_{2j} - \rho_{1j} \rho_{2i}}{\rho_{ij}} . \quad (5.14)$$

Für  $R_{ij}$  gilt  $\tilde{E}_1 R_{ij} = \tilde{E}_2 R_{ij} = 0$ , und damit auch für alle Produkte dieser Variablen. Die Funktion  $G$  ist ein Laurent-Polynom in den  $\binom{n-3}{2}$  Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 3 \leq i < j \leq n\}$ , welches sich vom Gewicht  $(0, \dots, 0)$  transformiert. In anderen Worten:  $G$  kann gesehen werden als Laurent-Polynom in den  $(n-5)(n-2)/2$  anharmonischen Verhältnissen, welche sich aus den Variablen  $\{x_3, \dots, x_n\}$  konstruieren lassen. Insbesondere sind auch alle Homogenitäten (per Konstruktion) erfüllt, d.h.  $F_0$  transformiert sich vom Gewicht  $(1, 1, 0, \dots, 0)$ .

Um die Situation zu verallgemeinern, machen wir eine abstraktere Betrachtung. Zuerst beobachten wir, dass die Operatoren  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$  zusammen mit der Differenz der Euler-Operatoren zu den Variablen  $\{\rho_{1i} \mid 5 \leq i \leq n\}$  und  $\{\rho_{2i} \mid 5 \leq i \leq n\}$  bezeichnet mit

$$\tilde{E}_3 = \sum_{i=5}^n (\rho_{1i} \partial_{1i} - \rho_{2i} \partial_{2i}) \quad (5.15)$$

die Vertauschungsrelationen

$$[\tilde{E}_3, \tilde{E}_1] = 2\tilde{E}_1, \quad [\tilde{E}_3, \tilde{E}_2] = -2\tilde{E}_2, \quad [\tilde{E}_1, \tilde{E}_2] = \tilde{E}_3 \quad (5.16)$$

erfüllen. Diese entsprechen den Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2)$ . Wir machen uns in den nächsten Abschnitten die Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}(2)$  zu nutzen. Dies vereinfacht unsere Analyse in verschiedener Hinsicht: zum Einen lässt sich leicht zeigen, dass in unserem Beispiel der Koeffizient  $C_{abba}$  schon die allgemeinste Form war. Genauer: Wir können zeigen, dass alle polynomialen Lösungen von  $\tilde{E}_1 P = \tilde{E}_2 P = 0$  durch Polynome in den Variablen  $R_{ij}$  gegeben sind. Zum Anderen ergeben sich einfache algebraische Regeln für das Rechnen mit den Operatoren  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ . Diese sind wiederum nützlich bei der Analyse der Gleichung (5.6) und Konstruktion von der kompletten Lösung von  $F_0$ . Für Zweiteres müssen wir rekursiv die inhomogene Gleichung zu (5.6) lösen. Hier verrät uns die Darstellungstheorie, wie sich die Operatoren  $\tilde{E}_1$  und  $\tilde{E}_2$  „invertieren“ lassen. Für gewisse Unterräume sind beide nämlich bis auf einen numerischen Faktor (der von dem speziellen Unterraum abhängt) invers zueinander.

## 5.2 Exkurs: Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2)$ und $\mathfrak{sl}(2)$ -Moduln

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Begriffe aus der Theorie der Lie-Algebren und deren Darstellungen bzw. Moduln. Wir beziehen uns hier vor allem auf [14].

Wir betrachten den Vektorraum aller komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen mit verschwindender Spur. Aus der Zyklizität der Spur folgt direkt, dass der Kommutator  $[A, B] = AB - BA$  wieder eine spurfreie Matrix ist. Der Vektorraum bildet somit mit dem Kommutator als Produkt eine Lie-Algebra, welche mit  $\mathfrak{sl}(2)$  bezeichnet wird. Es ist hinreichend, sie direkt über die Basis  $\{X, Y, H\}$  und die Relationen

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H \quad (5.17)$$

zu definieren. Als  $2 \times 2$ -Matrizen gesehen entspricht dies der Basis

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Eine Darstellung  $(\rho, V)$  von  $\mathfrak{sl}(2)$  besteht aus einem Vektorraum  $V$  und einem Lie-Algebren-Homomorphismus von  $\mathfrak{sl}(2)$  in die allgemeine lineare Lie-Algebra von  $V$ , bezeichnet mit  $\mathfrak{gl}(V)$ , d.h.  $\rho: \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

Der Vektorraum  $V$  wird mit  $\rho$  insbesondere zu einem  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul. Wir schreiben für die Wirkung von  $g \in \mathfrak{sl}(2)$  auf  $v \in V$  kurz  $g.v := \rho(g)v$ .

Die Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2)$  lässt sich aufspalten in  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{+2} \oplus \mathfrak{g}_{-2}$  (Cartan-Zerlegung), wobei  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$  die maximale kommutative Unter algebra ist. Wir identifizieren den Dualraum  $\lambda \in \mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}$  direkt mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , indem wir schreiben:  $\lambda(H) = \lambda$ . Für unsere Zwecke reicht es, endliche (d.h. endlich-dimensionale)  $\mathfrak{sl}(2)$ -Moduln zu betrachten. Da  $\mathfrak{h}$  diagonalisierbar ist, führt dies zu einer Aufspaltung als direkt Summe von Eigenräumen:

$$V_\lambda = \{v \in V \mid H.v = \lambda v\}, \quad (5.19)$$

wobei  $V_\lambda$  auch Sinn macht, wenn  $\lambda$  kein Eigenwert ist. Ist  $V_\lambda \neq \{0\}$ , so nennen wir  $\lambda$  *Gewicht* in  $V$  und nennen  $V_\lambda$  *Gewichtsraum* zum Gewicht  $\lambda$ . Für  $v \in V_\lambda$  ist  $X.v \in V_{\lambda+2}$  und  $Y.v \in V_{\lambda-2}$ , denn  $H.(X.v) = [H, X].v + X.H.v = 2X.v + \lambda X.v = (\lambda+2)X.v$ . Da  $V$  endlich-dimensional ist, gibt es ein Gewicht  $\lambda$  mit und  $X.v = 0$  für alle  $v \in V_\lambda$ . Ist zusätzlich  $v \neq 0$ , so nennen wir  $v$  *maximalen Vektor* zum Gewicht  $\lambda$ . Wir nennen  $V$  ein einfachen oder irreduziblen  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul, wenn die einzigen  $\mathfrak{sl}(2)$ -Untermodule durch  $V$  selbst und  $\{0\}$  gegeben sind. Da  $\mathfrak{sl}(2)$  einfach (also insbesondere halbeinfach) ist zerfällt nach dem Weyl-Theorem (vgl. [14] 6.3) jeder endlich-dimensionale  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul in eine direkte Summe von reduziblen (einfachen)  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modulen, d.h.  $V$  ist *vollständig reduzibel*.

*Beispiel 5.2.* Sei  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $V(\ell) = \mathbb{C}_\ell[x, y]$  der Raum der homogenen Polynome vom Grad  $\ell$  in den zwei Variablen  $x$  und  $y$ . Dann wird mittels

$$\rho : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(V(\ell)), \quad \rho(X) = x\partial_y, \quad \rho(Y) = y\partial_x, \quad \rho_H = x\partial_x - y\partial_y \quad (5.20)$$

der Vektorraum  $V(\ell)$  zu einem  $(\ell+1)$ -dimensionalen  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul. Ferner ist  $v_\ell = x^\ell$  ein maximaler Vektor und  $H.v_\ell = \ell v_\ell$ , d.h.  $v_\ell$  hat das Gewicht  $\ell$ . Wir definieren<sup>1</sup> für  $\delta \geq 0$  die Vektoren

$$|\ell, \ell - 2\delta\rangle = \frac{\ell!}{(\ell - \delta)!} Y^\delta . v_\ell = x^{\ell - \delta} y^\delta . \quad (5.21)$$

Insbesondere ist  $\{|\ell, -\ell\rangle, |\ell, -\ell + 2\rangle, \dots, |\ell, \ell\rangle\}$  eine Basis von  $V(\ell)$ . Wir bezeichnen mit  $\ell$  das Höchstgewicht.  $m$  entspricht dem Gewicht von  $|\ell, m\rangle$ . Weiterhin gibt es keine nicht-trivialen Untermodule, also ist  $V(\ell)$  irreduzibel.

Jeder endliche irreduzible Modul ist also schon durch seinen maximalen Vektor gegeben. Man kann sogar zeigen, dass jeder irreduzible endlich-dimensionale  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul isomorph zu einem  $V(\ell)$  für ein  $\ell \in \mathbb{N}_0$  ist (vgl. [14] 7.2).

Wir bemerken, dass jede Darstellung einer Lie-Algebra auch eine Darstellung ihrer universellen einhüllenden Algebra liefert und umgekehrt. In unserem Fall ist dies die zugehörige assoziative Algebra, mit Matrixmultiplikation als Produkt. Ein spezielles Element ist das Casimir-Element  $C = 2XY + 2YX + H^2$ . Für  $V(\ell)$  liegt es im Zentrum und es gilt:

$$(2XY + 2YX + H^2).v = \ell(\ell + 2).v \quad v \in V(\ell) . \quad (5.22)$$

Für ein endlich-dimensionalen Modul  $V$  bezeichnen wir mit  $P_\ell$  die Projektion auf den Eigenwert  $\ell(\ell+2)$  bzgl. des Casimir-Operators, d.h. auf die zu  $V(\ell)$  isomorphen Unterräume.

Sind  $V_1$  und  $V_2$  zwei endlich-dimensionale  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modulen, dann ist  $V_1 \otimes V_2$  ein  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul vermöge  $g(u \otimes v) = (g \otimes 1 + 1 \otimes g)(u \otimes v) = (g.u) \otimes v + u \otimes (g.v)$  für  $g \in \mathfrak{sl}(2)$  und dessen linearer Fortsetzung. Es gilt die Clebsch-Gordan-Formel:

$$\begin{aligned} V(\ell_1) \otimes V(\ell_2) &\cong \bigoplus_{k=0}^{\min(\ell_1, \ell_2)} V(\ell_1 + \ell_2 - 2k) \\ &= V(\ell_1 + \ell_2) \oplus V(\ell_1 + \ell_2 - 2) \oplus \dots \oplus V(|\ell_1 - \ell_2|) . \end{aligned} \quad (5.23)$$

<sup>1</sup> In Anlehnung an den Drehimpuls in der Quantenmechanik verwenden wir die Notation  $|\ell, m\rangle$ . Jedoch verwenden wir andere Konventionen und Normierung. Denkt man an Drehimpuls, so entspricht  $\ell = 2j$  und  $m = 2m_j$ , wobei  $j$  die Gesamtdrehimpulsquantenzahl und  $m_j$  die magnetische Quantenzahl ist.

**Proposition 5.1.** Sei  $|\ell, m\rangle$  ein Vektor vom Gewicht  $m$  und Höchstgewicht  $\ell$  aus einem  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul, dann gilt:

$$XY|\ell, m\rangle = \left(1 + \frac{\ell - m}{2}\right) \left(\frac{\ell + m}{2}\right) |\ell, m\rangle \quad (5.24)$$

$$YX|\ell, m\rangle = \left(1 + \frac{\ell + m}{2}\right) \left(\frac{\ell - m}{2}\right) |\ell, m\rangle \quad . \quad (5.25)$$

*Beweis.* Es gilt  $XY|\ell, \ell\rangle = (H + YX)|\ell, \ell\rangle = (n + YX)|\ell, \ell\rangle = \ell|\ell, \ell\rangle$ . Sei  $m \in \{-\ell, -\ell + 2, \dots, \ell - 2\}$  und die Aussage für  $m + 2$  bereits gezeigt, dann ist:

$$\begin{aligned} XY|\ell, m\rangle &= (H + YX)|\ell, m\rangle = m|\ell, m\rangle + YXY.v \\ &= \left(m + \left(1 + \frac{\ell - m - 2}{2}\right) \left(\frac{\ell + m + 2}{2}\right)\right) |\ell, m\rangle = \left(1 + \frac{\ell - m}{2}\right) \left(\frac{\ell + m}{2}\right) |\ell, m\rangle, \end{aligned} \quad (5.26)$$

wobei  $v$  der Vektor vom Gewicht  $m$  und Höchstgewicht  $\ell$  ist, sodass  $|\ell, m\rangle = Y.v$  gilt. Die zweite Aussage zeigt sich analog, folgt aber auch direkt aus der Symmetrie der Lie-Algebra unter Vertauschung von  $X \leftrightarrow Y$  und  $H \leftrightarrow -H$ , also somit  $m \leftrightarrow -m$ .  $\square$

**Folgerung 5.2.** Sei  $z \in V$  Vektor aus einem endlich-dimensionalen  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul.

1. Ist  $X.z = 0$ , dann besteht  $z$  nur aus Vektoren mit nicht-negativen Gewicht. Ist  $z$  zusätzlich Eigenvektor von  $H$ , so ist dessen Eigenwert nicht-negativ.
2. Wird  $z$  von zweien der drei Elemente  $H, X, Y$  vernichtet, so auch vom Dritten.

*Beweis.* 1. Nehmen wir o.B.d.A. an  $z = |\ell, m\rangle$  mit negativen  $m$ . Dann ist  $X.z \neq 0$ . Daraus folgt, dass  $X.z = 0$  impliziert, dass  $z$  nur aus Vektoren mit positiven Gewicht bestehen kann. 2. ist trivial.  $\square$

### 5.2.1 Zerlegung eines $\mathfrak{sl}(2)$ -Moduls

In diesem Abschnitt betrachten wir eine spezielle Zerlegung eines  $\mathfrak{sl}(2)$ -Moduls in irreduzible (einfache) Untermodule. Diese Zerlegung wird später nützlich sein.

Für festes  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir den Ring der Polynome  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n] =: \mathbb{C}[x, y]$ . Dieser Ring besitzt eine Graduierung durch den Grad der homogenen Polynome, d.h.

$$\mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}_d[x, y], \quad (5.27)$$

wobei für  $p \in \mathbb{C}_l[x, y]$  und  $q \in \mathbb{C}_m[x, y]$  gilt:  $p \cdot q \in \mathbb{C}_{l+m}[x, y]$  (wir schreiben dann einfach  $\mathbb{C}_l[x, y] \cdot \mathbb{C}_m[x, y] \subset \mathbb{C}_{l+m}[x, y]$ ). Wir bezeichnen mit  $\mathbb{C}_n[x, y]$  den Raum der homogenen Polynome vom Grad  $n$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$ . Die Motivation liegt darin,  $x = (\rho_{15}, \dots, \rho_{1,n+4})$  und  $y = (\rho_{25}, \dots, \rho_{2,n+4})$  zu betrachten.

Wir definieren folgende (formale) Derivationen auf  $\mathbb{C}[x, y]$ :

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{y_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i \partial_{x_i}, \quad H = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i} - y_i \partial_{y_i} \quad (5.28)$$

mit

$$[H, X].f = 2X.f, \quad [H, Y].f = -2Y.f, \quad [X, Y].f = H.f \quad (f \in \mathbb{C}[x, y]) . \quad (5.29)$$

Dies sind genau die Vertauschungsrelationen der  $\mathfrak{sl}(2)$  und  $\mathbb{C}[x, y]$  wird damit zu einem  $\mathfrak{sl}(2)$ -Modul. Da  $X, Y$  und  $H$  die Homogenität erhalten, ist  $\mathbb{C}_d[x, y]$  ein endlicher, vollständig reduzibler  $\mathfrak{sl}(2)$ -Untermodul.

Wir untersuchen den Modul der homogenen Polynome vom Grad  $d$  und dessen Zerfall in irreduzible Untermoduln. Für  $n = 1$  erhalten wir genau Beispiel 5.2. Für  $n > 1$  lassen sich Variablen  $r_{ij} := x_i y_j - y_i x_j$  definieren, welche die Eigenschaft haben, dass sie durch  $\mathfrak{sl}(2)$  annihiliert werden. Wir nennen sie Singletts und definieren den Untermodul

$$R = \text{span} \{r_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \subset \mathbb{C}_2[x, y] . \quad (5.30)$$

Wir bezeichnen mit  $\mathbb{C}_d[x] \subset \mathbb{C}_d[x, y]$  die vom Grad  $d$  homogenen Polynome, welche nur von  $x$  abhängen.

Für  $m \leq \lfloor d/2 \rfloor$  bezeichnen wir mit

$$U_{d,2m} := \mathbb{C}_{d-2m}[x] \cdot R^m \subset \mathbb{C}_d[x, y] \quad (5.31)$$

und mit  $V_{d,2m}$  den durch  $U_{d,2m}$  erzeugte  $\mathfrak{sl}(2)$ -Untermodul<sup>2</sup>, wobei wir schreiben  $V_{d,2m} = \mathfrak{sl}(2).U_{d,2m}$ .

**Lemma 5.3.** *Sei  $v \in U_{d,2m}$  mit  $v \neq 0$ , dann ist das von  $v$  erzeugte  $\mathfrak{sl}(2)$ -Untermodul ein einfaches Untermodul vom Höchstgewicht  $d - 2m$ .*

*Beweis.* Sei  $u \in U_{d,2m}$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (durch geeignete Linearkombination) ist

$$u = r_{i_1, i_2} \cdots r_{i_{2m-1}, i_{2m}} x_{i_{2m+1}} x_{i_d} . \quad (5.32)$$

Dann ist mit Hilfe der Leibnizregel  $X.u = 0$  und  $H.u = (d - 2m + m)u - mu = (d - 2m)u$ . Also ist  $V_{d,2m}$  irreduzibles Untermodul vom Gewicht  $d - 2m$ .  $\square$

Es sei bemerkt, dass die Vektoren der Form (5.32) vollständig bzgl.  $U_{d,2m}$  sind, aber nicht linear unabhängig. Wählt man jedoch eine Basis in  $U_{d,2m}$ , so erhält man durch die davon erzeugten Untermoduln eine Zerlegung in irreduzible Untermoduln.

Es lässt sich  $\mathbb{C}_d[x, y]$  rekursiv mit der Clebsch-Gordan-Formel zerlegen. Im Prinzip haben wir dies bereits explizit gemacht. Es bleibt zu zeigen, dass wir bereits den kompletten Modul  $\mathbb{C}_s[x, y]$  zerlegt haben. Wir halten fest und zeigen:

<sup>2</sup> Damit ist der durch Anwenden der Lie-Algebra und der Identität erzeugte Untermodul gemeint.

**Lemma 5.4.** *Es ist:*

$$\mathbb{C}_d[x, y] := \bigoplus_{m=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} V_{d,2m} . \quad (5.33)$$

*Beweis.* Aus Lemma 5.3 folgt, dass für  $m, m' \in \{1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor\}$  mit  $m \neq m'$  gilt:  $V_{d,2m} \cap V_{d,2m'} = \{0\}$ .

▷: Per Konstruktion.

◁: Wir müssen zeigen, dass  $\mathbb{C}_{d-k}[x] \cdot \mathbb{C}_k[y] \subset \bigoplus_{m=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} V_{d,2m} = M$  für alle  $0 \leq k \leq d$ .

Dazu zeigen wir, dass  $\mathbb{C}_{d-2m-k}[x] \cdot \mathbb{C}_k[y] \cdot R^m \subset M$  für  $0 \leq k \leq d$  für alle  $0 \leq m \leq \lfloor (d-k)/2 \rfloor$  per Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist es klar. Betrachten wir also  $1 \leq k \leq d$  und setzen voraus, dass die Aussage für  $k-1$  bereits gezeigt ist. Dafür sei  $0 \leq m \leq \lfloor (d-k)/2 \rfloor$  beliebig,  $l := d - 2m - k + 1 \geq 1$ . Ferner sei  $z \in \mathbb{C}_{k-1}[y] \cdot R^m$  und  $\xi = x_{i_1} \cdots x_{i_l} \in \mathbb{C}_l[x]$ . Dann ist  $\xi z \in \mathbb{C}_{d-2m-k+1}[x] \cdot \mathbb{C}_{k-1}[y] \cdot R^m \subset M$  nach Induktionsvoraussetzung. Wir müssen nun zeigen, dass auch  $\xi z \cdot y_{i_1}/x_{i_1}$  in  $M$  ist, da Vektoren dieser Form  $\mathbb{C}_{d-2m-k}[x] \cdot \mathbb{C}_k[y] \cdot R^m$  aufspannen. Da  $M$  Untermodul und  $Y.z = 0$  ist, gilt, dass folgender Vektor

$$Y.z\xi = zY.\xi = zY.x_{i_1} \cdots x_{i_l} = z \sum_{k=1}^l \frac{y_{i_k}}{x_{i_k}} x_{i_1} \cdots x_{i_l} = z \sum_{k=1}^l \frac{y_{i_k}}{x_{i_k}} \xi \quad (5.34)$$

auch in  $M$  liegen muss. Für  $l = 1$  sind wir somit fertig. Ansonsten ist die Idee, Elemente aus  $\mathbb{C}_{l-1}[x] \cdot \mathbb{C}_{k-1}[y] \cdot R^{m+1} \subset M$  hinzuzuaddieren und so unseren gewünschten Vektor  $\xi z \cdot y_{i_1}/x_{i_1} \in M$  zu konstruieren. Wir zeigen induktiv, dass für alle  $p = 1, \dots, l-1$  folgendes übereinstimmt

$$\begin{aligned} M \ni z \sum_{j=1}^l \frac{y_{i_j}}{x_{i_j}} \xi &= z \sum_{j=1}^{l-1} j \frac{r_{i_{l-j}, i_{l-j+1}}}{x_{i_{l-j}} x_{i_{l-j+1}}} \xi \\ &= z \left( \sum_{j=1}^{l-1} \frac{y_{i_j}}{x_{i_j}} + \cancel{\frac{y_{i_l}}{x_{i_l}}} - \sum_{j=2}^{l-1} j \frac{r_{i_{l-j}, i_{l-j+1}}}{x_{i_{l-j}} x_{i_{l-j+1}}} - \cancel{\frac{y_{i_l}}{x_{i_l}}} + \frac{y_{i_{l-1}}}{x_{i_{l-1}}} \right) \xi \\ \text{(IA)} \stackrel{p=1}{=} z \left( \sum_{j=1}^{l-2} \frac{y_{i_j}}{x_{i_j}} - \sum_{j=2}^{l-1} j \frac{r_{i_{l-j}, i_{l-j+1}}}{x_{i_{l-j}} x_{i_{l-j+1}}} + 2 \frac{y_{i_{l-1}}}{x_{i_{l-1}}} \right) \xi &= \dots \\ \text{(IV)} \stackrel{p-1}{=} z \left( \sum_{j=1}^{l-p} \frac{y_{i_j}}{x_{i_j}} - \sum_{j=p}^{l-1} j \frac{r_{i_{l-j}, i_{l-j+1}}}{x_{i_{l-j}} x_{i_{l-j+1}}} + p \frac{y_{i_{l-p+1}}}{x_{i_{l-p+1}}} \right) \xi \\ &= z \left( \sum_{j=1}^{l-p} \frac{y_{i_j}}{x_{i_j}} + \cancel{\frac{y_{i_{l-p}}}{x_{i_{l-p}}}} - \sum_{j=1+p}^{l-1} j \frac{r_{i_{l-j}, i_{l-j+1}}}{x_{i_{l-j}} x_{i_{l-j+1}}} - p \cancel{\frac{y_{i_{l-p+1}}}{x_{i_{l-p+1}}}} + p \frac{y_{i_{l-p}}}{x_{i_{l-p}}} + (p-1) \cancel{\frac{y_{i_{l-p+1}}}{x_{i_{l-p+1}}}} \right) \xi \\ \text{(IB)} \stackrel{p}{=} z \left( \sum_{j=1}^{l-p-1} \frac{y_{i_j}}{x_{i_j}} - \sum_{j=1+p}^{l-p} j \frac{r_{i_{l-j}, i_{l-j+1}}}{x_{i_{l-j}} x_{i_{l-j+1}}} + (p+1) \frac{y_{i_{l-p}}}{x_{i_{l-p}}} \right) \xi &= \dots \\ &\stackrel{p=l-1}{=} l z \frac{y_{i_1}}{x_{i_1}} \xi . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dabei besteht die zweite Summe nur aus Elementen<sup>3</sup> von  $\mathbb{C}_{l-1}[x] \cdot \mathbb{C}_{k-1}[y] \cdot R^{m+1}$  und

<sup>3</sup>Wir haben hier auch  $r_{ii} = 0$  zugelassen, d.h. das wir evtl. auch Nullen hinzuaddieren. Das ändert aber nichts.

ist damit aus  $M$ . Dann ist insbesondere auch  $z(y_{i_1})/(x_{i_1})\xi$  aus  $M$ , was wir noch zeigen mussten.  $\square$

**Korollar 5.5.** *Die von  $X, Y$  und  $H$  simultan vernichteten Elemente aus  $\mathbb{C}_d[x, y]$  sind für ungerades  $d$  nur der Nullvektorraum  $\{0\}$  und für gerades  $d$  alle Polynome aus  $V_{d,d}$ , d.h. Polynome vom Grad  $d/2$  in den Variablen  $\{r_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ .*

*Bemerkung 5.6.* Alles geht analog, wenn wir anstatt  $\mathbb{C}[x, y]$  die Polynome  $\mathcal{V}[x, y] \cong \mathbb{C}[x, y] \otimes \mathcal{V}$  mit Werten in einem beliebigen (komplexen) Vektorraum  $\mathcal{V}$  betrachten und dabei voraussetzen, dass die Wirkung von  $\mathfrak{sl}(2)$  auf  $\mathcal{V}$  trivial ist.

In Anwendung auf unsere Problemstellung ersetzen wir  $n$  durch  $n' = n - 4$ , wobei  $n$  wieder die Anzahl der Punkte aus  $\mathbb{M}$  sein soll. Dann identifizieren wir:

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow (\rho_{15}, \dots, \rho_{1n}) \\ y &\leftrightarrow (\rho_{25}, \dots, \rho_{2n}) \\ X &\leftrightarrow \tilde{E}_2 \\ Y &\leftrightarrow \tilde{E}_1 \\ H &\leftrightarrow \tilde{E}_3 . \end{aligned} \tag{5.36}$$

Wir entwickeln eine Lösung  $(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0$ :

$$F_0 = \sum_{a,b,c,d} \frac{C_{abcd}(x, y, \rho_{34}, \rho_{35}, \dots, \rho_{n-3, n-4})}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} . \tag{5.37}$$

Für  $a, b > 0$  oder  $b, c > 0$  ist nach Folgerung 3.4 der Koeffizient  $C_{abcd}$  regulär in den Variablen  $(x, y)$ , d.h.

$$C_{abcd} \in \mathbb{C}_{a+b+c+d-2}[x, y] \otimes \mathbb{C}[(\rho_{ij}, \rho_{ij}^{-1})_{3 \leq i < j \leq n}] \cong \mathcal{V}_{a+b+c+d-2}[x, y] , \tag{5.38}$$

wobei  $\mathcal{V} = \mathbb{C}[(\rho_{ij}, \rho_{ij}^{-1})_{3 \leq i < j \leq n}]$  gleich der Raum der Laurent-Polynome in den zusätzlichen Variablen  $\sigma = (\rho_{ij})_{3 \leq i < j \leq n}$  ist.

Die Homogenität bedeutet dann

$$H.C_{abcd} = (a + b - c - d)C_{abcd} . \tag{5.39}$$

### 5.3 Notwendige Bedingungen an Doppelpole

Für diesen Abschnitt sei  $n \geq 6$ . Wir nehmen weiterhin an,  $F_0$  ist ein Laurent-Polynom in den Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n, (i, j) \neq (1, 2)\}$  und  $F_0$  erfülle die Differentialgleichung:

$$(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0 . \tag{5.40}$$

Wir nehmen weiterhin o.B.d.A. an, dass  $F_0$  einen Doppelpol in  $\rho_{13}, \rho_{14}$  besitzt. Wir schreiben, motiviert durch den letzten Abschnitt  $X \equiv \tilde{E}_2$  und  $Y \equiv \tilde{E}_1$ .

### 5.3.1 Allgemeine Aussagen über das Verschwinden von Koeffizienten

Wir betrachten hier genauer das System von rekursiven Gleichungen in den Koeffizienten  $C_{abcd}$ , welches bei der Untersuchung der Differentialgleichung  $(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0$  auftritt. Dabei ist  $F_0$  wieder ein Laurent-Polynom wie in (5.5). Ziel ist es zu zeigen, dass unter gewissen Annahmen schon bestimmte  $C_{abcd}$  Null sein müssen. Die allgemeine Strategie ist dabei, dass ein Koeffizient verschwindet, wenn seine Nachbarn, von den dieser Koeffizient über eine Gleichung abhängt, verschwinden. Nimmt man zusätzlich die Rationalität von  $F_0$  hinzu, d.h. dass nur endlich viele  $C_{abcd}$  nicht verschwinden können, kann man einige Aussagen treffen. Ziel ist es, hiermit die Struktur von möglichen Doppelpolen weiter einzuschränken.

Wir betrachten hier wieder das System von Gleichungen  $\mathfrak{R}(a, b, c, d) = 0$  für  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$  gegeben in (E.9).

**Lemma 5.7.** *Es sei der singulärste Doppelpol von  $F_0$  in  $\rho_{13}, \rho_{14}$  von der Ordnung  $r$ , d.h.  $r = \max\{a + b \mid a, b > 0, C_{abcd} \neq 0\}$ . Dann verschwindet für  $a, b > 0$  mit  $a + b = r$  und  $c + d > r$  der Koeffizient  $C_{abcd}$ .*

*Beweis.* Angenommen es gäbe so ein  $C_{abcd} \neq 0$ . Aus  $\mathfrak{R}(a, b, c-1, d-1) = 0$  folgt  $X.C_{abcd} = 0$ , da nach Voraussetzung alle  $C_{a',b',\dots}$  mit  $a' + b' > r$  verschwinden und  $\mathfrak{R}(a, b, c, d) = 0$  nur Koeffizienten mit  $C_{a'b'c'd'}$  mit  $a' \geq a$  und  $b' \geq b$  verbindet. Also ist  $C_{abcd}$  ein maximaler Vektor und besteht insbesondere nur aus Vektoren mit positiven Gewicht (siehe Folgerung 5.2). Die Homogenität impliziert aber  $H.C_{abcd} = (a + b - c - d)C_{abcd}$ , also einen negativen Eigenwert da  $a + b - c - d = r - c - d < 0$ , was ein Widerspruch ist. Also muss  $C_{abcd} = 0$  sein.  $\square$

**Lemma 5.8.** *Für  $a, b > 0$  und  $c + d \leq 0$  ist  $C_{abcd} = 0$ .*

*Beweis.* Aus  $a, b > 0$  folgt, einerseits dass  $C_{abcd}$  regulär in  $\{\rho_{25}, \dots, \rho_{2n}\}$  ist. Andererseits muss  $C_{abcd}$  homogen vom Grad  $c + d - 1 < 0$  in den Variablen  $\{\rho_{25}, \dots, \rho_{2n}\}$  sein, also kann  $C_{abcd}$  in diesem Fall nur verschwinden.  $\square$

**Lemma 5.9.** *Sei für alle  $a, b, c, d > 0$  mit  $a + b + c + d > m$  der Koeffizient  $C_{abcd} = 0$ . Dann ist auch für alle  $(a, b, c, d)$  mit  $a + b + c + d \geq m$  und mit wahlweise*

- $a, b > 0$  sowie  $c \leq 0$  oder  $d \leq 0$  (Doppelpol in 1, Einfachpol in 2), oder
- $c, d > 0$  sowie  $a \leq 0$  oder  $b \leq 0$  (Doppelpol in 2, Einfachpol in 1)

der Koeffizient  $C_{abcd} = 0$ .

*Beweis.* Aus Symmetriegründen können wir uns im ersten Fall auf  $d \leq 0$  beschränken. Erneut aus Symmetriegründen folgt die gleiche Aussage auch für  $(a, b) \leftrightarrow (c, d)$ .

Wegen Lemma 5.8 brauchen wir nur  $C_{abcd} = 0$  für  $a, b > 0, d \leq 0$  und  $a + b + c + d \geq m$  und  $c + d > 0$  zeigen.

Da nur endlich viele Koeffizienten nicht verschwinden, gibt es ein  $b_{\max}$ , sodass  $C_{\cdot, b, \cdot, \cdot} = 0$  für  $b > b_{\max}$ .

Sei  $1 \leq b' \leq b_{\max}$  und wir nehmen an, wir haben die Aussage schon für alle  $b > b'$  gezeigt. Des Weiteren sei  $d' \leq 0$ . Wir nehmen weiterhin an, dass wir die Aussage schon für  $b = b'$  und alle  $d \leq 0$  mit  $d > d'$  gezeigt haben.

Für  $a, c$  mit  $a + b' + c + d' \geq m$  und  $c + d' > 0$  betrachten wir nun die Gleichung  $\mathfrak{R}(a - 1, b', c, d' - 1) = 0$  (E.9). Sie verbindet nur Koeffizienten  $C_{abcd}$  mit  $a + b + c + d \geq m$ . Insbesondere fallen folgende Koeffizienten weg:

- $C_{\cdot, b'+1, \cdot, \cdot}$  und  $C_{\cdot, b'+2, \cdot, \cdot}$ , da wir die Aussage bereits gezeigt haben, bzw. weil  $b > b_{\max}$  ist. Damit fallen insbesondere alle  $C_{\cdot, \cdot, \cdot, d'-1}$  weg.
- Im Fall  $d' < 0$ :  $C_{\cdot, \cdot, \cdot, d'+1}$  aus dem bereits gezeigten.
- Im Fall  $d' = 0$ :  $C_{\cdot, \cdot, \cdot, 1}$  und  $C_{\cdot, \cdot, c+1, 1}$  nach Voraussetzung, da  $c = c + d' > 0$ .

Also vereinfacht sich  $\mathfrak{R}(a - 1, b', c, d' - 1) = 0$  zu:

$$\begin{aligned} b'c(d' - a)C_{a,b',c,d'} &= (a - 1)b' \cdot X \cdot C_{a-1,b',c+1,d'} \\ &\quad + b'[(d' - 1)\rho_{4i}\partial_{2i} + \rho_{4i}\partial_{1i}X]C_{a,b',c+1,d'} \\ &\quad - b'c\rho_{4i}\partial_{1i}C_{a+1,b',c,d'} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Wir definieren als Abkürzung:

$$G_{a,n} := C_{a,b',m-a-b'-d'+n,d'} \quad (5.42)$$

Sei  $a_{\max} = \max\{a \mid C_{abcd} \neq 0\}$ . Für  $1 \leq a \leq a_{\max}$  und  $n \geq \max(0, a + b' + d' - m)$  (das Maximum bezweckt, dass  $c > 0$  ist; für  $c \leq 0$  ist  $C_{a,b',c,d'} = 0$  nach Lemma 5.8) behaupten wir  $G_{an} = 0$ . Aus (5.41) folgt die Relation:

$$G_{an} \neq 0 \implies (a - 1)G_{a-1,n} \neq 0 \text{ oder } G_{a,n+1} \neq 0 \text{ oder } (a - a_{\max})G_{a+1,n+1} \neq 0, \quad (5.43)$$

welche wir in folgendem Diagramm<sup>4</sup> veranschaulichen wollen:

$$\begin{array}{ccccccccc} G_{a_{\max},0} & \longrightarrow & G_{a_{\max}-1,0} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_{2,0} & \longrightarrow & G_{1,0} & \cdot \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \\ G_{a_{\max},1} & \longrightarrow & G_{a_{\max}-1,1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_{2,1} & \longrightarrow & G_{1,1} & \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \\ G_{a_{\max},2} & \longrightarrow & G_{a_{\max}-1,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_{2,2} & \longrightarrow & G_{1,2} & \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots & \end{array} \quad (5.44)$$

Ist ein Koeffizient ungleich Null, so muss auch ein in Richtung der Pfeile nächster Koeffizient ungleich Null sein. Da nur endlich viele  $G_{an} \neq 0$  sein dürfen, folgt schon, dass alle verschwinden. Nehmen wir nämlich an, dass ein Koeffizient nicht verschwindet, so müssen unendlich viele weitere Koeffizienten auch ungleich Null sein, was ein Widerspruch ist.  $\square$

<sup>4</sup> Das Diagramm ist evtl. oben abgeschnitten; genauer: Es kommen wegen Lemma 5.8 nur  $G_{an}$  mit  $n \geq \max(0, a + b' - m' + 1)$  vor.

Nach dieser sehr technischen Aussage über das Verschwinden verschiedener Koeffizienten können wir folgende Aussage zeigen.

**Proposition 5.10.** *Sei  $F_0$  wie oben und gelte (5.40). Besitzt  $F_0$  einen Doppelpol in  $\rho_{1i}, \rho_{1j}$  ( $3 \leq i < j \leq n$ ), dann auch in  $\rho_{2i}, \rho_{2j}$ .*

*Beweis.* Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $F_0$  einen Doppelpol in  $\rho_{13}, \rho_{14}$  besitzt, so gibt es  $(a, b, c, d)$  mit  $a, b > 0$  und  $C_{abcd} \neq 0$  und ein minimales  $m$ , sodass  $C_{abcd} = 0$  für alle  $a + b + c + d > m$  mit  $a, b > 0$ , d.h.

$$m = \min\{m \mid C_{abcd} = 0 \text{ für alle } a, b > 0 \text{ und } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } a + b + c + d > m\} . \quad (5.45)$$

Dann gilt insbesondere für  $a, b, c, d > 0$  mit  $a + b + c + d > m$ , dass  $C_{abcd}$  verschwindet. Angenommen  $C_{abcd} = 0$  für  $a, b, c, d > 0$  mit  $a + b + c + d = m$ , dann folgt aus Lemma (5.9), dass sogar für alle  $a, b > 0$  und  $c, d$  beliebig mit  $a + b + c + d = m$  gilt:  $C_{abcd} = 0$ . Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von  $m$ . Also muss es  $a, b, c, d > 0$  mit  $a + b + c + d = m$  geben, sodass  $C_{abcd} \neq 0$ , einen Doppelpol auf singularster Ebene besitzt.  $\square$

Nehmen wir an, es gibt nur Doppelpole bis zu einer gewissen Ordnung  $r$ , so können wir auch eine Aussage über das Vorkommen von möglichen „doppelten Doppelpolen“ machen:

**Lemma 5.11.** *Sei  $\ell \geq 0$  und*

- $C_{abcd} = 0$  für  $a + b + c + d > 2r - \ell$  mit  $a, b > 0$  oder  $c, d > 0$  und
- $C_{abcd} = 0$  für  $a + b + c + d = 2r - \ell$  für  $a, b, c, d > 0$  und  $a + b > r$  oder  $c + d > r$ .

Dann sind für  $a, b, c, d > 0$  und  $a + b + c + d = 2r - \ell$  auch

$$(r - b - \ell - d) \cdots (r - b - d) \cdot C_{abcd} = 0 , \quad (5.46)$$

d.h.  $C_{abcd} = 0$ , wenn  $d \neq r - b - \ell, \dots, r - b$ .

*Beweis.* Wir müssen nur für  $a, b, c, d > 0$  mit  $a + b + c + d = 2r - \ell$ ,  $a + b \leq r$  und  $c + d \leq r$  (d.h. insbesondere  $r - \ell \leq a + b \leq r$ ) zeigen, dass gilt:

$$(r - b - \ell - d) \cdots (r - b - d) C_{abcd} = 0 . \quad (5.47)$$

Hierzu wählen wir ein  $b'$  mit  $1 \leq b' \leq r - 1$  und nehmen an, wir haben die Aussage (5.47) schon für alle möglichen  $b$  mit  $b > b'$  gezeigt. Ebenso wählen wir ein  $a'$  mit  $\max(1, r - b - \ell) \leq a' \leq r - b$  und nehmen an wir haben die Aussage (5.47) auch schon für  $b = b'$  und alle möglichen  $a$  mit  $a < a'$  gezeigt. Wir müssen nun zeigen, dass die Aussage (5.47) auch für  $a = a'$  und  $b = b'$  wahr ist.

Also betrachten wir für  $c', d' > 0$  mit  $a' + b' + c' + d' = 2r - \ell$  die Gleichung  $\mathfrak{R}(a' - 1, b', c', d' - 1) = 0$ . Nach Voraussetzung bzw. weil die Koeffizienten, welche keinen Doppelpol multiplizieren (das kann nur auftreten für  $a' = 1$  oder  $b' = 1$ ) mit einer Null multipliziert werden, vereinfacht sich dies zu  $\mathfrak{R}_s(a' - 1, b', c', d' - 1) = 0$  gegeben durch

$$\begin{aligned} b'c'(d' - a')C_{a',b',c',d'} &= (a' - 1)(d' - 1)(b' - c')C_{a'-1,b'+1,c'+1,d'-1} \\ &\quad + c'(d' - 1)Y.C_{a',b'+1,c',d'-1} \\ &\quad - (a' - 1)b'X.C_{a'-1,b',c'+1,d'} . \end{aligned} \quad (5.48)$$

Weiterhin verschwindet nach obiger Annahme:

- $(a' - 1)(d' - 1)C_{a'-1,b'+1,c'+1,d'-1} = 0$  für  $d' \neq r - b' - \ell, \dots, r - b'$  nach dem bereits Gezeigten für  $b = b' + 1$  bzw. wegen des Verschwinden des Vorfaktors.
- $(d' - 1)C_{a',b'+1,c',d'-1} = 0$  für  $d' \neq r - b' - \ell, \dots, r - b'$  nach dem bereits gezeigten für  $b = b' + 1$  oder im Fall  $a' + b' = r$  nach Voraussetzung, da es keinen Doppelpol singulärer als  $r$  gibt.
- $(a' - 1)C_{a'-1,b',c'+1,d'} = 0$  für  $d' \neq a' - \ell, \dots, a'$ , da die Aussage (5.47) schon für  $a = a' - 1$  gezeigt wurde bzw. im Fall  $c' + d' = \ell$ , wieder nach Voraussetzung.

Also ist  $(r - b' - \ell - d') \dots (r - b' - d')C_{a',b',c',d'} = 0$  auch gezeigt. Damit ist die Aussage (5.47) auch für  $a = a'$  und  $b = b'$  wahr, was zu zeigen war.  $\square$

**Proposition 5.12.** *Sei  $F_0$  wie oben und habe in  $\rho_{13}$ ,  $\rho_{14}$  und  $\rho_{23}$ ,  $\rho_{24}$  maximal Doppelpole der Ordnung  $r$ . Dann gibt es ein  $\ell \geq 0$ , sodass  $F_0$  von der Form:*

$$\sum_{\substack{a,b,c,d>0 \\ a+b+c+d=2r-\ell \\ (r-b-\ell-d)_{\ell+1}=0}} \frac{C_{abcd}}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} + \tilde{F}_0 \quad (5.49)$$

ist, wobei  $\tilde{F}_0$  nur weniger singuläre Terme bzw. keine Doppelpole in  $\rho_{13}$ ,  $\rho_{14}$  und  $\rho_{23}$ ,  $\rho_{24}$  enthält, d.h.

$$\tilde{F}_0 = \sum_{a+b+c+d < 2r-\ell} \frac{C_{abcd}}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} + (\text{Terme ohne Doppelpole in } \rho_{13}, \rho_{14} \text{ und } \rho_{23}, \rho_{24}) . \quad (5.50)$$

*Beweis.* Sei  $2r - \ell := \max\{a + b + c + d \mid a, b, c, d > 0 \text{ und } C_{abcd} \neq 0\} \leq 2r$ . Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 5.9 für  $m = 2r - \ell$  erfüllt. Somit ist  $C_{abcd} = 0$  für alle  $a + b + c + d > 2r - \ell$  mit  $a, b > 0$  oder  $c, d > 0$  und außerdem für  $a + b + c + d = 2r - \ell$  wenn entweder nur  $a, b > 0$  oder nur  $a, b > 0$  ist. Schließlich können wir für  $a, b, c, d > 0$  mit  $a + b + c + d = 2r - \ell$  aus Lemma 5.11 schließen, dass  $(r - b - d - \ell)_{\ell+1} C_{abcd} = 0$  ist.

Alle weiteren  $C_{abcd} \neq 0$  multiplizieren entweder keine Doppelpole in  $\rho_{13}$ ,  $\rho_{24}$  und  $\rho_{23}$ ,  $\rho_{24}$  oder es ist  $a + b + c + d < 2r - \ell$ . Des Weiteren muss der Doppelpol der Ordnung  $r$  nicht von dem führenden Term angenommen werden.  $\square$

*Bemerkung 5.13.* Man hätte auch fordern können, dass  $r$  der maximale Doppelpol ist, welcher auf der Hyperebene  $a + b + c + d = m$  vorkommt. Die Aussage bleibt mit  $\ell = 2r - m$  gleich.

*Bemerkung 5.14.* Es können aber Terme vorkommen, die singulärer als  $2r - \ell$  sind, aber weder Doppelpole in  $\rho_{13}, \rho_{14}$  noch in  $\rho_{23}, \rho_{24}$  besitzen. Diese können dann insbesondere auch Doppelpole in  $\rho_{1i}, \rho_{1j}$  oder  $\rho_{2i}, \rho_{2j}$  mit  $(i, j) \neq (3, 4) \neq (j, i)$  besitzen.

*Beispiel 5.3.* Ist in Proposition 5.12  $\ell = 0$ , so bleiben in der ersten Summe nur  $C_{a,r-a,r-a,a}$  übrig, wobei  $1 \leq a \leq r$ . Aus  $\mathfrak{A}(a, r - a, r - a - 1, a - 1) = 0$  folgt  $X.C_{a,r-a,r-a,a} = 0$  und aus der Homogenität  $H.C_{a,r-a,r-a,a} = 0$ . Also sind  $C_{a,r-a,r-a,a} := |0, 0\rangle_{2r-2}^{(a)}$  Vektoren mit Höchstgewicht 0 (also Gewicht 0). Dies ist genau der Fall, welchen wir in Abschnitt 5.1 diskutiert haben. Im Fall  $n = 6$  ist also insbesondere  $C_{a,r-a,r-a,a} \propto (\rho_{15}\rho_{26} - \rho_{16}\rho_{25})^{r-1}$ , d.h.

$$F_0 \left( (\rho_{ij})_{1 \leq i < j, (ij) \neq (12)} \right) = \sum_{a=1}^{r-1} C_a \left( (\rho_{ij})_{3 \leq i < j \leq 6} \right) \frac{(\rho_{15}\rho_{26} - \rho_{16}\rho_{25})^{2r-2}}{\rho_{13}^a \rho_{14}^{r-a} \rho_{23}^{r-a} \rho_{24}^a} + \tilde{F}_0 . \quad (5.51)$$

Damit gilt auch: Die am wenigsten singuläre Doppelpollösung für  $n = 6$  sind von der Form:

$$\frac{\rho_{15}\rho_{26} - \rho_{16}\rho_{25}}{\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24}} + \text{weniger singuläre Terme} . \quad (5.52)$$

### 5.3.2 Die singulärste Struktur von Doppelpolen

Wir haben im Abschnitt zuvor gezeigt, dass unter gewissen Annahmen nur einige Möglichkeiten für Doppelpole der Form  $\rho_{13}^{-a} \rho_{14}^{-b} \rho_{23}^{-c} \rho_{24}^{-d}$  auf der singulärsten Hyperebene  $a + b + c + d = m$  bleiben. Diese Koeffizienten sind aber auch durch Relationen untereinander verbunden. Dies wollen wir hier untersuchen und erhalten eine allgemeine Lösung auf singulärster Ebene.

Die Koeffizienten  $C_{abcd}$  von  $F_0$  mit  $(E_1 D_2 - E_2 D_1) F_0 = 0$  müssen auf singulärster Ebene eine Rekursionsgleichung erfüllen, deren Lösung wir in diesem Abschnitt diskutieren wollen.

Genauer betrachten wir den durch Proposition 5.12 motivierten Fall, d.h. wir nehmen an, es gebe Doppelpole in  $\rho_{13}, \rho_{14}$  der Ordnung  $r$ , aber nicht höherer Ordnung. Des Weiteren nehmen wir an, dass es ein  $m$  gibt, sodass es maximale „doppelte Doppelpole“ der Form  $\rho_{13}^{-a} \rho_{14}^{-b} \rho_{23}^{-c} \rho_{24}^{-d}$  für  $a + b + c + d \leq m$ . Wir setzen dann  $\ell = 2r - m$ . Oder wir wählen zu  $m$ , dass  $r$ , sodass es maximal Doppelpole der Ordnung  $r$  in  $\rho_{13}, \rho_{23}$  in „Doppel-Doppelpolen“  $\rho_{13}^{-a} \rho_{14}^{-b} \rho_{23}^{-c} \rho_{24}^{-d}$  mit  $a + b + c + d = m$  gibt, was kleiner oder gleich dem oberen sein kann und setzen ebenso  $\ell = 2r - m$ . Dann wissen wir bereits, dass abgesehen von Termen, welche weder Doppelpole in  $\rho_{13}, \rho_{14}$  noch  $\rho_{23}, \rho_{24}$  haben, für  $a + b + c + d = 2r - \ell$  nur die Koeffizienten  $C_{abcd}$  nicht verschwinden können, für die  $d = r - b - \ell, r - b - \ell + 1, \dots, r - b$  ist. Des Weiteren müssen die Koeffizienten  $C_{abcd}$  in der dreidimensionalen Hyperfläche  $a + b + c + d = 2r - \ell$  die Gleichungen

$$0 = \mathfrak{A}_s(a, b - 1, c - 1, d) \equiv ad(b - c)C_{abcd} + (b - 1)(c - 1)(a - d)C_{a+1,b-1,c-1,d+1} \\ + (c - 1)dY.C_{a+1,b,c-1,d} - a(b - 1)X.C_{a,b-1,c,d+1} \quad (5.53)$$

erfüllen, welche unter obigen Annahmen direkt aus  $\mathfrak{R}(a, b-1, c-1, d) = 0$  folgen.

Diese Gleichungen verbinden Koeffizienten  $C_{abcd}$  nur mit anderen Koeffizienten in dem zweidimensionalen Unterraum (Untergitter)  $\{C_{a-x, b-y, c+x, d+y} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ . Wir können diese Ebenen also getrost getrennt betrachten. Es sei bemerkt, dass wir im oben genannten Fall nichts über die Koeffizienten  $C_{abcd}$  mit  $a \leq 0$  oder  $b \leq 0$  also auch  $c \leq 0$  oder  $d \leq 0$  (d.h. die Koeffizienten, welche keine Doppelpole in unseren gewählten Variablen multiplizieren) wissen. Die Gleichungen für diese Koeffizienten sind aber gewissermaßen, wegen verschwindender Multiplikatoren in  $\mathfrak{R}(a, b, c, d)$ , entkoppelt von den Koeffizienten, die uns interessieren. Deshalb können wir annehmen, dass diese  $C_{abcd} = 0$  sind.

Wir werden im nächsten Schritt Lösungen dieser Gleichung angeben und danach zeigen, dass der allgemeine Fall nur aus Linearkombinationen dieser Lösungen besteht.

Für  $p, q \geq 0$  sei:

$$a \geq p + 1 \qquad c := b - q \qquad \ell := p + q \qquad (5.54)$$

$$b \geq q + 1 \qquad d := a - p \qquad h := a + b + c + d - 2 \qquad (5.55)$$

und

$$M = \{ (a', b', c', d') \in \mathbb{Z}^4 \mid d \leq a' \leq a, c \leq b' \leq b, c \leq c' \leq c + p, d \leq d' \leq d + q \} . \qquad (5.56)$$

Wir wollen die Gleichungen (5.53) lösen. Hierzu fordern wir, dass die Koeffizienten  $C_{a'b'c'd'}$  für  $(a', b', c', d') \notin M$  verschwinden.

Wir behaupten, dass dann  $(0 \leq \delta \leq p, 0 \leq \epsilon \leq q)$

$$C_{a-\delta, b-\epsilon, c+\delta, d+\epsilon} = \frac{(a-1-\delta)! (c-1+\delta)! (b-1-\epsilon)! (d-1+\epsilon)! p! q!}{(a-1)! (c-1)! (b-1)! (d-1)! \ell!} \frac{(\ell-\epsilon-\delta)!}{(p-\delta)!(q-\epsilon)! \delta! \ell!} Y^{\delta+\epsilon} |\ell, \ell\rangle_h \qquad (5.57)$$

die Gleichung (5.53) löst, wobei  $|\ell, \ell\rangle_h$  ein maximaler Vektor vom Gewicht  $\ell$  ist. Diese Lösung wurde gefunden, indem die Rekursion für die Spezialfälle  $\epsilon = 0, q$  und  $\delta = 0, p$  gelöst wurde, und die Lösung von da aus extrapoliert wurde. Wir werden nur zeigen, dass (5.57) die Rekursion (5.53) löst. Aber zuerst wollen wir die numerischen Faktoren durch eine einfache Schreibweise zusammenfassen.

Dazu definieren wir  $L_{ab}^{pq}(\delta)$  implizit über die erzeugende Funktion (in diesem Fall ein Polynom gegeben durch ein hypergeometrische Reihe):

$$\sum_{\delta \geq 0} L_{ab}^{pq}(\delta) \cdot x^\delta = F(b - q, -p; 1 - a; x) = F(c, -p; 1 - a; x) . \qquad (5.58)$$

Weiterhin definierten wir für  $0 \leq \delta \leq \ell$  eine Basis für ein Untermodul vom Gewicht  $\ell$  über den maximalen Vektor  $|\ell, \ell\rangle_h$  ( $H \cdot |\ell, \ell\rangle_h = \ell |\ell, \ell\rangle_h$ ) wie folgt:

$$|\ell, \ell - 2\delta\rangle_h = \frac{\ell!}{(\ell - \delta)!} Y^\delta \cdot |\ell, \ell\rangle_h = (-\ell)_\delta (-1)^\delta Y^\delta \cdot |\ell, \ell\rangle_h . \qquad (5.59)$$

*Bemerkung 5.15.* Diese Normierung ist sinnvoll, da für einfache Fälle wie  $|\ell, \ell\rangle_h = \rho_{15}^\ell \cdot r$  die Basis einfach durch  $|\ell, \ell - 2\delta\rangle_h = \rho_{15}^{\ell-\delta} \rho_{25}^\delta \cdot r$  gegeben ist.

Damit lässt sich (5.57) schreiben als:

$$C_{a-\delta, b-\epsilon, c+\delta, d+\epsilon} = L_{ab}^{pq}(\delta) L_{ba}^{qp}(\epsilon) \cdot |\ell, \ell - 2(\delta + \epsilon)\rangle_h . \quad (5.60)$$

**Lemma 5.16.** *Die Koeffizienten (5.57) erfüllen die Gleichung (5.53).*

*Beweis.* Wir betrachten  $\mathfrak{R}_s(a - \delta, b - \epsilon - 1, b - q + \delta, a - p + \epsilon)$

$$\begin{aligned} 0 &= (a - \delta)(d + \epsilon)(q - \delta - \epsilon)C_{a-\delta, b-\epsilon, c+\delta, d+\epsilon} \\ &\quad + (b - 1 - \epsilon)(c - 1 + \delta)(p - \delta - \epsilon)C_{a-\delta+1, b-\epsilon-1, c+\delta-1, d+\epsilon+1} \\ &\quad + (c - 1 + \delta)(d + \epsilon)Y.C_{a-\delta+1, b-\epsilon, c+\delta-1, d+\epsilon} \\ &\quad - (a - \delta)(b - 1 - \epsilon)X.C_{a-\delta, b-\epsilon-1, c+\delta, d+\epsilon+1} \end{aligned} \quad (5.61)$$

und müssen zeigen, dass diese Gleichung mit den in (5.57) gegebenen Koeffizienten für alle  $\delta = 0, \dots, p + 1$  und  $\epsilon = -1, \dots, q$  erfüllt ist. Wir bemerken, dass für  $\delta = 0, \dots, p$  und  $\epsilon = 0, \dots, q$  gilt:

$$\begin{aligned} C_{a-\delta+1, b-\epsilon-1, c+\delta-1, d+\epsilon+1} &= \left[ \frac{(a - \delta)(d + \epsilon)(q - \epsilon)\delta}{(c - 1 + \delta)(b - 1 - \epsilon)(p + 1 - \delta)(\epsilon + 1)} \right] \cdot C_{a-\delta, b-\epsilon, c+\delta, d+\epsilon} \\ Y.C_{a-\delta+1, b-\epsilon, c+\delta-1, d+\epsilon} &= \left[ \frac{(a - \delta)(\ell + 1 - \delta - \epsilon)\delta}{(c - 1 + \delta)(p + 1 - \delta)} \right] \cdot C_{a-\delta, b-\epsilon, c+\delta, d+\epsilon} \\ X.C_{a-\delta, b-\epsilon-1, c+\delta, d+\epsilon+1} &= \left[ \frac{(d + \epsilon)(q - \epsilon)}{(b - 1 - \epsilon)(\ell - \delta - \epsilon)(\epsilon + 1)} \right] \cdot XY.C_{a-\delta, b-\epsilon, b-q+\delta, a-p+\epsilon} \\ &= \left[ \frac{(d + \epsilon)(q - \epsilon)(1 + \delta + \epsilon)}{(b - 1 - \epsilon)(1 + \epsilon)} \right] \cdot C_{a-\delta, b-\epsilon, b-q+\delta, a-p+\epsilon} , \end{aligned} \quad (5.62)$$

wobei die Terme  $(q - \epsilon)$  und  $\delta$  für  $q = \epsilon$  bzw.  $\delta = 0$  (trotz evtl. verschwindendem Nenners) verschwinden. Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass  $XY \cdot |\ell, \ell - 2(\delta + \epsilon)\rangle_h = (\ell - \delta - \epsilon)(1 + \delta + \epsilon) \cdot |\ell, \ell - 2(\delta + \epsilon)\rangle_h$  ist (siehe Proposition 5.1).

Einsetzen von (5.57) in (5.61) ergibt bis auf den Faktor  $C_{a-\delta, b-\epsilon, b-q+\delta, a-p+\epsilon}$

$$\begin{aligned} &(a - \delta)(d + \epsilon)(q - \delta - \epsilon) \\ &\quad + \cancel{(b - 1 - \epsilon)} \cancel{(c - 1 + \delta)} (p - \delta - \epsilon) \left[ \frac{(a - \delta)(d + \epsilon)(q - \epsilon)\delta}{\cancel{(c - 1 + \delta)} \cancel{(b - 1 - \epsilon)} (p + 1 - \delta)(\epsilon + 1)} \right] \\ &\quad + \cancel{(c - 1 + \delta)} (d + \epsilon) \left[ \frac{(a - \delta)(\ell + 1 - \delta - \epsilon)\delta}{\cancel{(c - 1 + \delta)} (p + 1 - \delta)} \right] \\ &\quad - (a - \delta) \cancel{(b - 1 - \epsilon)} \left[ \frac{(d + \epsilon)(q - \epsilon)(1 + \delta + \epsilon)}{\cancel{(b - 1 - \epsilon)} (1 + \epsilon)} \right] , \end{aligned} \quad (5.63)$$

was sich vereinfacht zu:

$$(a - \delta)(d + \epsilon) \left[ (q - \delta - \epsilon) + \frac{(p - \delta - \epsilon)(q - \epsilon)\delta}{(p - \delta + 1)(\epsilon + 1)} + \frac{(\ell + 1 - \delta - \epsilon)\delta}{p - \delta + 1} - \frac{(q - \epsilon)(1 + \delta + \epsilon)}{\epsilon + 1} \right] . \quad (5.64)$$

Nachdem man dies auf den Hauptnenner gebracht hat, bleibt nur zu zeigen, dass folgender Ausdruck verschwindet:

$$\begin{aligned}
 & (q-\delta-\epsilon)(p+1-\delta)(\epsilon+1) + (p-\delta-\epsilon)(q-\epsilon)\delta + (\ell+1-\delta-\epsilon)(\epsilon+1)\delta - (q-\epsilon)(p+1-\delta)(1+\delta+\epsilon) \\
 &= (\epsilon+1) \left[ (q-\epsilon)(p+1) - \cancel{\delta(p+1-\delta)} - \cancel{(q-\epsilon)\delta} + \cancel{\delta(\ell+1-\delta-\epsilon)} \right] \\
 & - (q-\epsilon) \left[ \cancel{(p-\delta-\epsilon)\delta} - (p+1)(\epsilon+1) + \cancel{\delta(1+\delta+\epsilon)} - \cancel{\delta(p+1)} \right] \\
 &= (\epsilon+1)(q-\epsilon)(p+1) - (\epsilon+1)(q-\epsilon)(p+1) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

Für den Fall  $\epsilon = -1$  für  $0 \leq \delta \leq q$  sieht man, dass

$$b(c-1+\delta)(p+1-\delta) \cdot C_{a-\delta+1,b,c+\delta-1,d} - (a-\delta)b \cdot X.C_{a-\delta,b,b-q+\delta,a-p} \tag{5.66}$$

unter Verwendung von  $XY \cdot |\ell, \ell+2(\delta-1)\rangle_h = (\ell+1-\delta)\delta \cdot |\ell, \ell+2(\delta-1)\rangle_h$  und der Identität

$$b(b-q-1+\delta)(p+1-\delta) \frac{(a-\delta)(\ell+1-\delta)\delta}{(b-q-1+\delta)(p+1-\delta)} - (a-\delta)b(\ell+1-\delta)\delta = 0 \tag{5.67}$$

verschwindet.

Für den Fall  $\delta = p+1$  und  $0 \leq \epsilon \leq p$  ergibt sich, dass auch

$$\begin{aligned}
 & - (b-1-\epsilon)(b-p+q)(1+\epsilon)C_{a-p,b-\epsilon-1,b-q+p,a-p+\epsilon+1} \\
 & + (b-q+p)(a-p+\epsilon)Y.C_{a-p,b-\epsilon,b-a+p,a-p+\epsilon}
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

verschwindet, vermöge der Identität:

$$(b-q+p)(b-1-\epsilon)(1+\epsilon) \frac{(a-p+\epsilon)(q-\epsilon)}{(b-1-\epsilon)(q-\epsilon)(1+\epsilon)} - (b-q+p)(a-p+\epsilon) = 0. \tag{5.69}$$

Der Fall  $(\delta, \epsilon) = (p+1, -1)$  ist trivial. □

Wir unterscheiden drei Spezialfälle der Lösung (5.57).

1. Im Fall  $\ell = 0$  besteht die Lösung nur aus einem Koeffizienten:  $C_{abba}$ . Dieser Koeffizient hat Gewicht 0, aber wegen  $X.C_{abba} = Y.C_{abba} = 0$  auch Höchstgewicht  $\ell = 0$  und stammt somit aus einem trivialen Untermodul.  $C_{abba}$  ist somit ein homogenes Polynom in den Variablen  $\{R_{ij} = (\rho_{1i}\rho_{2j} - \rho_{1j}\rho_{2i})/\rho_{ij} \mid 5 \leq i < j \leq n\}$  vom Grad  $h/2 = a+b-1 = r-1$ . Wir veranschaulichen das wie folgt:

$$\begin{array}{c}
 C_{abba} \\
 \bullet \\
 |0,0\rangle
 \end{array}$$

2. Für  $p = 0$  und  $q > 0$  bzw.  $p > 0$  und  $q = 0$  (d.h.  $\ell > 0$ ) besteht die Lösung aus einer Kette von  $\ell + 1$  Koeffizienten. Wir betrachten den Fall  $q = 0$ . Dabei ist  $C_{a-\delta, b, b-\ell+\delta, a} \propto |\ell, \ell - 2\delta\rangle_h$ , d.h. jeder Vektor aus der Basis  $\{|\ell, -\ell\rangle_h, |\ell, \ell + 2\rangle_h, \dots, |\ell, \ell\rangle_h\}$  ist genau einem Koeffizienten zugeordnet. Dabei ist  $|\ell, \ell\rangle_h$  Produkt aus einem homogenen Polynom vom Grad  $\ell$  in  $\{\rho_{1j} \mid 5 \leq j \leq n\}$  und einem homogenen Polynom vom Grad  $a + b - \ell - 1 \geq 1$  in  $\{R_{ij} \mid 5 \leq i < j \leq n\}$ .

$$\begin{array}{cccc} C_{a,b,b,a-\ell} & C_{a-1,b,b+1,a-\ell} & \dots & C_{a-\ell,b,b+\ell,a-\ell} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ |\ell, \ell\rangle & |\ell, \ell-2\rangle & & |\ell, -\ell\rangle \end{array}$$

3. In dem letzten Fall  $p, q > 0$  (d.h.  $\ell \geq 2$ ) treten immer rechteckige Blöcke der Größe  $(p + 1) \times (q + 1)$  Koeffizienten auf. Hier ist  $C_{a-\delta, b-\epsilon, b-q+\delta, a-p+\epsilon} \propto |\ell, \ell - 2(\delta + \epsilon)\rangle_h$ , d.h. jeder Vektor aus der Basis  $\{|\ell, -\ell\rangle_h, |\ell, \ell + 2\rangle_h, \dots, |\ell, \ell\rangle_h\}$  ist mindestens einem Koeffizienten zugeordnet. Dabei ist wieder  $|\ell, \ell\rangle_h$  ein Produkt aus einem homogenen Polynom vom Grad  $\ell$  in  $\{\rho_{1j} \mid 5 \leq j \leq n\}$  und einem homogenen Polynom vom Grad  $a + b - \ell - 1 \geq 1$  in  $\{R_{ij} \mid 5 \leq i < j \leq n\}$ .

$$\begin{array}{cccc} C_{a,b,c,d} & C_{a-1,b,c+1,d} & \dots & C_{d,b,c+p,d} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ |\ell, \ell\rangle & |\ell, \ell-2\rangle & & |\ell, \ell-2p\rangle \\ \\ C_{a,b-1,c,d+1} & C_{a-1,b-1,c+1,d+1} & \dots & C_{d,b-1,c+p,d+1} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ |\ell, \ell-2\rangle & |\ell, \ell-4\rangle & & |\ell, \ell-2p-2\rangle \\ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ C_{a,c,c,d+q} & C_{a-1,c,c+1,d+q} & \dots & C_{d,c,c+p,d+q} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ |\ell, \ell-2q\rangle & |\ell, \ell-2q-2\rangle & & |\ell, -\ell\rangle \end{array}$$

*Beispiel 5.4.* Wir wählen speziell  $|\ell, \ell\rangle_h = \rho_{15}^\ell \cdot r$ , wobei  $r$  ein homogenes Polynom vom Grad  $(h - \ell)/2$  in den Variablen  $\{R_{ij}\}$  ist. Dann lässt sich (5.57) schreiben als

$$\frac{\rho_{15}^{p+q} \cdot r \cdot F(b - q, -p; 1 - a; x) F(a - p, -q; 1 - b; y)}{\rho_{13}^a \rho_{24}^b \rho_{23}^{b-q} \rho_{24}^{a-p}} \quad (5.70)$$

mit den anharmonischen Verhältnissen:

$$x = \frac{\rho_{13}\rho_{25}}{\rho_{15}\rho_{23}}, \quad y = \frac{\rho_{14}\rho_{25}}{\rho_{15}\rho_{24}}. \quad (5.71)$$

**Proposition 5.17.** Sei für  $a + b + c + d = 2r' - \ell'$  der Koeffizient  $C_{abcd} = 0$ , außer für den Fall  $a, b, c, d > 0$ ,  $r' - \ell' \leq a + b \leq r'$  und  $d = r - b - \ell', \dots, r - b$  und sei weiterhin

das System (5.53) erfüllt. Dann sind die  $C_{abcd}$  für  $a + b + c + d = 2r' - \ell'$  gegeben durch Linearkombination von möglichen Lösungen der Form (5.57) mit  $\ell = \ell', \ell' - 2, \dots, \ell' \bmod 2$  und  $r = r' - (\ell' - \ell)/2$ .

*Beweis.* Sei  $\ell = \ell'$ . Wir bemerken zuerst, dass die einzigen Koeffizienten, die nicht verschwinden, durch  $C_{a-\delta, b-\epsilon, b-q+\delta, a-p+\epsilon}$  gegeben sind, wobei  $p, q \geq 0$ ,  $p + q = \ell$ ,  $a > p$  und  $b > q$  ist.

Wir werden zeigen, dass für die Fälle  $(\delta, \epsilon) \in \{(0, 0), (p, q)\}$ , und für  $p = 0$  oder  $q = 0$  mit  $0 \leq \delta \leq \ell$  bzw.  $0 \leq \epsilon \leq \ell$  sich die Koeffizienten durch Abziehen von Lösungen (5.57) gleichzeitig auf Null setzen lassen. Damit haben wir das Problem  $\ell \rightarrow \ell - 2$  und  $r \rightarrow r - 1$  zurückgeführt. Für  $\ell = 0$  und  $\ell = 1$  verschwinden insbesondere alle Koeffizienten.

Wir betrachten nacheinander die Fälle  $0 < d' < r - \ell$ . Dazu betrachten wir für  $p + q = \ell$  den Koeffizienten  $C_{d', r-d'-p, r-d'-q, d'} =: C_{a'-p, b', c'+p, d'}$  und nehmen an, er hat kein Anteil im Höchstgewichtsraum zum Gewicht  $\ell$ , d.h.  $P_\ell C_{d', b', c'+p, d'} = 0$ . Ist das nicht der Fall können, wir eine geeignete Lösung (5.57) für  $a = a' = p + d'$ ,  $b = b'$  abziehen (in der Lösung verschwindet der Koeffizient  $C_{d', b', c'+p', d'}$  genau dann wenn  $C_{a'b'c'd'} = |\ell, \ell\rangle_h = 0$  ist).

Wir behaupten:

$$P_\ell C_{a'-\delta, b', c'+\delta, d'} = 0 \quad (0 \leq \delta \leq p) \quad (5.72)$$

$$P_\ell C_{d', b-\epsilon, c'+p, d'+\epsilon} = 0 \quad (0 \leq \epsilon \leq q) \quad (5.73)$$

Daraus folgt dann zusammen mit  $X.C_{a', b', c', d'} = 0$  und  $Y.C_{d', c', c'+p, d'+q} = 0$ , dass sogar  $C_{a', b', c', d'} = 0$  bzw.  $C_{d', c', c'+p, d'+q} = 0$  ist, da diese Vektoren immer Höchstgewicht  $\ell$  besitzen. In anderen Worten:  $C_{a', b', c', d'} = P_\ell C_{a', b', c', d'}$  und  $C_{a', b', c', d'} = 0$ .

Unter der Voraussetzung, dass wir die Behauptung (5.72) und (5.73) schon für kleinere  $d'$  gezeigt haben, folgt aus  $\mathfrak{A}_s(a' - \delta - 1, b', c' + \delta, d' - 1) = 0$  bzw.  $\mathfrak{A}_s(d' - 1, b' - \epsilon, c' + p, d' + \epsilon - 1) = 0$ :

$$\begin{aligned} & b'(c' + \delta)(p - \delta)P_\ell C_{a'-\delta, b', c'+\delta, d'} \\ &= (a' - \delta - 1)b'X.P_\ell C_{a'-\delta-1, b', c'+\delta+1, d'} \quad (0 \leq \delta \leq p - 1) \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} & (b' - \epsilon)(b' - a' + p')\epsilon P_\ell C_{d', b'-\epsilon, c'+p, d'+\epsilon} \\ &= (c' + p)(d' + \epsilon - 1)Y.P_\ell C_{d', b'-\epsilon+1, c'+p, d'+\epsilon-1}, \quad (1 \leq \epsilon \leq q), \end{aligned} \quad (5.75)$$

da für die vorkommenden  $C_{\dots, \dots}$  gilt  $(d' - 1)P_\ell C_{\dots, \dots, d'-1} = (d' - 1)P_\ell C_{d'-1, \dots, \dots} = 0$  (entweder nach dem bereits gezeigten oder weil  $d' = 1$  ist). Insbesondere verschwinden die Vorfaktoren auf der linken Seite von (5.74) und (5.75) nicht. Die Abhängigkeit der

Koeffizienten veranschaulichen wir im folgenden Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{a',b',c',d'} & \longrightarrow & C_{a'-1,b',c'+1,d'} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_{d',b',c'+p,d'} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & C_{d',b-1,c'+p,d'+1} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & C_{d',c',c'+p,d'+q}
 \end{array}$$

Aus  $P_\ell C_{d',b',c'+p,d'} = 0$  folgt somit (5.72) und (5.73). Im Fall  $p = 0$  oder  $q = 0$  ist sogar  $C_{d',b',c'+p,d'} = 0$  und es folgt somit  $C_{a',b'-\epsilon,c',a'+\epsilon} = 0$  für  $0 \leq \epsilon \leq \ell$  bzw.  $C_{a'-\delta,b',b'+\delta,d'} = 0$  für  $0 \leq \delta \leq \ell$ .  $\square$

Wir können Proposition 5.12 wie folgt verbessern. Dazu definieren wir den linearen Operator

$$\mathfrak{S}(a, b, p, q)|\ell, \ell\rangle_h := \sum_{\delta=0}^p \sum_{\epsilon=0}^q \frac{L_{ab}^{pq}(\delta)L_{ba}^{qp}(\epsilon) \cdot |\ell, \ell - 2(\delta + \epsilon)\rangle_h}{\rho_{13}^{a-\delta} \rho_{14}^{b-\epsilon} \rho_{23}^{b-q+\delta} \rho_{24}^{a-p+\epsilon}}. \quad (5.76)$$

**Proposition 5.18.** *Seien die Voraussetzungen wie in Proposition 5.12, dann ist der führende Term in Proposition 5.12 von der Form:*

$$F_0 = \sum_{\ell' \in \{\ell, \ell-2, \dots, \ell \bmod 2\}} \sum_{\substack{a+b=r-(\ell-\ell')/2 \\ a,b>0}} \sum_{p=\max(0, \ell'-b+1)}^{\min(\ell', a-1)} \mathfrak{S}(a, b, p, \ell-p)|\ell', \ell'\rangle_{2(a+b-1)-\ell}^{(abp\ell')} + \tilde{F}_0, \quad (5.77)$$

wobei  $|\ell', \ell'\rangle_h^{(abp\ell')}$  Vektoren vom Gewicht  $\ell'$  und Höchstgewicht  $\ell'$  sind, d.h. jedes  $|\ell', \ell'\rangle_h$  ist von der Form:

$$|\ell', \ell'\rangle_h = f((\rho_{1i})_{5 \leq i \leq n}) \cdot g((R_{ij})_{5 \leq i < j \leq n}) \cdot G((\rho_{ij})_{3 \leq i < j \leq n}) \quad (5.78)$$

und  $f$  und  $g$  homogene Polynome vom Grad  $\ell$  bzw.  $(h - \ell')/2 = a + b - \ell - 1$  sind.  $G$  ist ein Laurent-Polynom, welches die Homogenitäten erfüllt.

*Bemerkung 5.19.* Wir bemerken, dass  $g$  homogen vom Grad  $a + b - \ell - 1 \geq 1$  ist (da  $a > p, b > q$  ist). Jeder Summand ist also insbesondere von mindestens einem Element aus  $\{R_{ij} \mid 5 \leq i < j \leq n\}$  multipliziert. Für  $n = 5$  ist diese Menge leer. Wir haben indirekt erneut die Aussage, dass es bei  $n = 5$  keine Doppelpole (Lemma 4.6) geben kann, bewiesen.

## 5.4 Komplette Doppelpol-Beiträge

Die Bedingungen aus dem letzten Kapitel sind notwendige Bedingungen für die singulärste Struktur von Doppelpolen, sodass  $F_0$  die durch die Biharmonizität gegebene Differentialgleichung  $(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0$  erfüllt. Dies führt zur der Frage, ob diese Bedingungen auch hinreichend sind, d.h. ob man durch Addition weniger singulärer Terme zu den Lösungen aus Abschnitt 5.3.2 zu vollständigen Lösungen der Differentialgleichung kommt, d.h. einen kompletten Doppelpol-Beitrag zu einer Korrelationsfunktion bekommt.

### 5.4.1 Von der singulärsten Ebene zu kompletten Doppelpol-Beiträgen

Um aus den Strukturen (5.76) vollständige Lösungen der Differentialgleichung zu bekommen, muss man im Prinzip nur eine homogene Gleichung lösen. Wir skizzieren die Vorgehensweise hier kurz:

1. Man startet mit den Koeffizienten  $C_{abcd}$  in der Hyperebene  $a + b + c + d = m$ . Diese sind durch (5.57) gegeben.
2. Man bekommt die Koeffizienten  $C_{abcd}$  in der Hyperebene  $a + b + c + d = m - 1$  durch Lösen der Gleichungen  $\mathfrak{R}(a', b', c', d') = 0$  mit  $a' + b' + c' + d' = m - 3$ . Dies führt zu inhomogenen Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} & d(b-c)C_{abcd} + (b-1)(c-1)(a-d)C_{a+1,b-1,c-1,d+1} \\ & + (c-1)dY.C_{a+1,b,c-1,d} - a(b-1)X.C_{a,b-1,c,d+1} \\ & = D_{abcd}((C_{a'b'c'd'})_{a'+b'+c'+d'=m}) \quad (a+b+c+d = m-1), \end{aligned} \quad (5.79)$$

wobei die rechte Seite über Differentialoperatoren von in 1. definierten Koeffizienten abhängt.

3. Auf der Hyperebene  $a + b + c + d = m'$  mit  $m' \leq m - 2$  führen die Gleichungen  $\mathfrak{R}(a', b', c', d') = 0$  mit  $a' + b' + c' + d' = m' - 2$  schließlich zu:

$$\mathfrak{R}_s(a', b', c', d') = D'_{a'b'c'd'}((C_{abcd})_{a+b+c+d=m'-1}, (C_{abcd})_{a+b+c+d=m'-2}), \quad (5.80)$$

wobei die rechte Seite von in den zwei Schritten zuvor berechneten Koeffizienten abhängt.

Gibt es eine endliche (rationale) Lösung, so sollte dieser Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbrechen.

Wir betrachten beispielhaft den einfachsten Fall  $a, b > 0$  und  $C_{abba} = |0, 0\rangle_{2(a+b-1)}$ . Die Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(a, b-1, b-1, a-1) &= \mathfrak{R}(a-1, b, b-1, a-1) \\ &= \mathfrak{R}(a-1, b-1, b, a-1) = \mathfrak{R}(a-1, b-1, b-1, a) = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(a-1, b, b, a-2) &= \mathfrak{R}(a-2, b, b, a-1) \\ &= \mathfrak{R}(a, b-1, b-2, a) = \mathfrak{R}(a, b-2, b-1, a) = 0. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Explizit lauten diese, als Matrixgleichung geschrieben, wobei über  $i = 5, \dots, n$  summiert wird:

$$\begin{pmatrix} a(b-1)X \\ a^2 \end{pmatrix} C_{a,b-1,b,a} = \begin{pmatrix} -a(b-1)\rho_{3i}\partial_{2i} \\ a^2\rho_{3i}\partial_{1i} \end{pmatrix} C_{abba} . \quad (5.83)$$

Die übrigen drei Gleichungssysteme sind analog und unterscheiden sich nur durch Permutationen in  $\{a, b, c, d\}$  und  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Das System (5.83) scheint auf den ersten Blick überbestimmt. Anwendung von  $X$  von links auf die zweite Gleichung von (5.83) zeigt aber, dass die erste Gleichungen aus der zweiten folgt, denn es ist:

$$X \rho_{3i}\partial_{1i}C_{abba} = [X, \rho_{3i}\partial_{1i}] \cdot C_{abba} = [\rho_{1j}\partial_{2j}, \rho_{3i}\partial_{1i}] \cdot C_{abba} = -\rho_{3i}\partial_{2i}C_{abba} , \quad (5.84)$$

da  $X.C_{abba} = 0$  ist.

Damit haben wir den ersten Schritt gelöst. Die vorkommenden Koeffizienten für  $m' = m - 1$  sind  $\{C_{a-1,b,b,a}, C_{a,b-1,b,a}, C_{a,b,b-1,a}, C_{a,b,b,a-1}\}$  mit:

$$C_{a,b-1,b,a} = \rho_{3i}\partial_{1i}C_{abba} =: -|1, -1\rangle_{2(a+b-1)-1} . \quad (5.85)$$

Die Gleichung  $\Re(a-1, b, b, a-2) = 0$  liefert:

$$C_{a,b,b,a-1} = \rho_{3i}\partial_{2i}C_{abba} = |1, 1\rangle_{2(a+b-1)-1} . \quad (5.86)$$

Denn es ist

$$C_{a,b-1,b,a} = \rho_{3i}\partial_{1i}C_{abba} = -[Y, \rho_{3i}\partial_{2i}]C_{abba} = -Y.C_{a,b,b,a-1} . \quad (5.87)$$

Wir bemerken, dass wir eine ähnliche Struktur wie in (5.57) gefunden haben. Wir vermuten, dass sich für solche Strukturen immer auch der nächste Schritt der inhomogenen Gleichung lösen lässt.

Wir bemerken weiterhin, dass die auftretenden Operatoren

$$A = \sum_{i=5}^n \rho_{3i}\partial_{1i}, \quad B = \sum_{i=5}^n \rho_{3i}\partial_{2i}, \quad C = \sum_{i=5}^n \rho_{4i}\partial_{1i}, \quad D = \sum_{i=5}^n \rho_{4i}\partial_{2i}, \quad (5.88)$$

zusammen mit  $\{X, Y, H\}$  die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [A, X] &= B, & [B, Y] &= A, & [C, X] &= B, & [D, Y] &= A \\ [A, H] &= A, & [B, H] &= -B, & [C, H] &= C, & [D, H] &= -D \end{aligned} \quad (5.89)$$

einer Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{sl}(4)$  besitzen.

### 5.4.2 Lösungen

In diesem Abschnitt geben wir einige Lösungen an, welche im Zuge dieser Arbeit u.a. für den Fall  $C_{abba} = (\rho_{15}\rho_{26} - \rho_{16}\rho_{25})^{a+b-1}$  berechnet wurden. Dabei wurde schrittweise die inhomogene Gleichungen wie im Abschnitt zuvor beschrieben gelöst. Da sehr viele Terme auftreten, erfolgte die Rechnung mit Hilfe des Computeralgebra-Systems Maple, welches zu Zwecken der Buchhaltung der Terme und für die Kontrolle des Ergebnisses verwendet wurde.

Die gefundenen Lösungen sind von der Form:

$$F_0 = \frac{(\rho_{34})^{3-a-b}}{(\rho_{56})^{a+b-1}} \frac{P_{ab}(x_1, \dots, x_6)}{(\rho_{13})^a (\rho_{14})^b (\rho_{23})^b (\rho_{24})^a} \quad (5.90)$$

mit einem Polynom  $P_{ab}$  mit dem führenden Verhalten

$$P_{ab}(x_1, \dots, x_6) = \rho_{34}^{2(a+b)-3} R_{12}^{a+b-1} + O(\rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}) . \quad (5.91)$$

Die ersten Fälle schreiben sich mit den Abkürzungen

$$R_{ij} = \rho_{i5}\rho_{j6} - \rho_{i6}\rho_{j5} \quad (5.92)$$

$$S_{ij} = \rho_{i5}\rho_{j6} + \rho_{i6}\rho_{j5} . \quad (5.93)$$

als

$$\begin{aligned} P_{11} &= (\rho_{34} R_{12} - 4 R_{13} \rho_{24})_{[1,2]\{3,4\}} \\ P_{12} &= \rho_{34}^3 R_{12}^2 + 4 \rho_{34}^2 R_{12} R_{24} \rho_{13} + 4 \rho_{34}^2 R_{12} R_{23} \rho_{14} \\ &\quad + 2 \rho_{34} R_{24}^2 \rho_{13}^2 + 2 \rho_{34} R_{23}^2 \rho_{14}^2 - 4 \rho_{34}^2 \rho_{56} \rho_{25} \rho_{26} \rho_{13} \rho_{14} - 4 \rho_{34} R_{14} R_{24} \rho_{13} \rho_{23} \\ &\quad + \rho_{34}^2 \rho_{56} S_{12} \rho_{14} \rho_{23} \\ &\quad + (2 \rho_{34} \rho_{56} S_{24} - 4 R_{24} R_{34}) \rho_{13} \rho_{14} \rho_{23} - (2 \rho_{34} \rho_{56} S_{23} + 4 R_{23} R_{34}) \rho_{14}^2 \rho_{23} \\ &\quad + 4 R_{24} R_{34} \rho_{13}^2 \rho_{24} \\ &\quad + 4 \rho_{56} \rho_{45} \rho_{46} \rho_{13}^2 \rho_{23} \rho_{24} + (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4) \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$P_{21} = s_{12} P_{12} = s_{34} P_{12} \quad (5.95)$$

Es wurde ebenfalls der Fall  $(a, b) = (1, 3)$  berechnet. Ein Maple-Skript, welches die vollständige Lösung enthält und überprüft ist unter [5] zu finden. Die Lösung beginnt mit:

$$\begin{aligned} P_{13} &= \rho_{34}^5 R_{12}^3 + 6 \rho_{34}^4 R_{12}^2 R_{24} \rho_{13} + 6 \rho_{34}^4 R_{12}^2 R_{23} \rho_{14} \\ &\quad + 6 (\rho_{34}^3 R_{12} R_{23} R_{24} - \rho_{34}^4 \rho_{56} \rho_{25} \rho_{26} R_{12}) \rho_{13} \rho_{14} \\ &\quad + 6 \rho_{34}^3 R_{12} R_{24}^2 \rho_{13}^2 + 6 \rho_{34}^3 R_{12} R_{23}^2 \rho_{14}^2 - 6 \rho_{34}^3 R_{12} R_{14} R_{24} \rho_{13} \rho_{23} \\ &\quad + 3/2 (\rho_{34}^4 \rho_{56} R_{12} S_{12} - \rho_{34}^3 R_{12} (R_{13} R_{24} + R_{14} R_{23})) \rho_{14} \rho_{23} \\ &\quad + \dots - (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4) . \end{aligned} \quad (5.96)$$

Im Grenzwert  $x_6 \rightarrow x_5$  verschwinden die  $P_{ab}$ , d.h.  $P_{ab}(x_1, \dots, x_4, x_5, x_5) = 0$ . Sie erfüllen insbesondere gewisse Symmetrien:

$$\begin{aligned} s_{12} s_{34} P_{ab} &= (-1)^{a+b+1} P_{ab} \\ s_{12} P_{aa} &= -P_{aa} \\ s_{34} P_{aa} &= P_{aa} \\ s_{56} P_{aa} &= -P_{aa} \\ s_{56} P_{ab} &= (-1)^{a+b+1} P_{ab} . \end{aligned} \quad (5.97)$$

Wir vermuten, dass es auch für höhere  $(a, b)$  stets solche Polynome mit dem führenden Verhalten (5.91) gibt.

Wir haben auch die erste mögliche Lösung mit dem Höchstgewicht  $\ell = 1$  berechnet. Wir haben dabei für den Höchstgewichtsvektor die allgemeinste<sup>5</sup> Form  $|1, 1\rangle_3 = \rho_{17}(\rho_{15}\rho_{26} - \rho_{16}\rho_{25})$  gewählt. Die Lösung schreibt sich als:

$$F_0 = \frac{P}{\rho_{13}\rho_{14}^2\rho_{23}\rho_{24}^2} \quad (5.98)$$

mit dem Polynom

$$\begin{aligned} P = & \rho_{34}^3\rho_{17}R_{12}^{56}\rho_{24} \\ & + \rho_{34}^2 \left[ -\rho_{17}R_{13}^{56}\rho_{24}^2 + (\rho_{17}R_{24}^{56} - \rho_{47}R_{12}^{56}) \rho_{13}\rho_{24} - \rho_{17}R_{14}^{56}\rho_{23}\rho_{24} \right] \\ & + \rho_{34} \left[ -\rho_{37}R_{13}^{56}\rho_{14}\rho_{24}^2 + \rho_{47}R_{14}^{56}\rho_{14}\rho_{23}^2 + (\rho_{15}R_{36}^{47} - \rho_{16}R_{35}^{47} - \rho_{47}R_{13}^{56}) \rho_{14}\rho_{23}\rho_{24} \right] \\ & - \rho_{47}R_{34}^{56}\rho_{13}^2\rho_{24}^2 - (1 \leftrightarrow 2) , \end{aligned} \quad (5.99)$$

wobei hier die Abkürzungen  $R_{ij}^{kl} = \rho_{ik}\rho_{jl} - \rho_{il}\rho_{jk}$  verwendet wurde.

Dies lässt die Vermutung aufkommen, dass es zu allen in (5.76) gegebenen Lösungen auf singularster Ebene weitere Terme gibt, sodass man eine komplette Lösung der Gleichung  $(E_1D_2 - E_2D_1)F_0 = 0$  bekommt. Ein allgemeiner Beweis konnte im Zuge dieser Arbeit leider nicht gefunden werden. Diese Hypothese würde dann auch implizieren, dass es keine weiteren Einschränkungen, als die in den Abschnitten zuvor gefundenen, an die Koeffizienten  $C_{abcd}$  auf der singularsten Hyperebene  $a + b + c + d = m$  geben kann. Wir bemerken noch, dass eine allgemeine Doppelpollösung dann eine Linearkombination von solchen gewonnen Lösungen und eventuell Lösungen ohne Doppelpole ist. Man kann dann solange solche Fundamentallösungen abziehen, bis keine Doppelpole überbleiben.

## 5.5 Korrelationsfunktionen mit Doppelpolen

Wir geben einen kleinen Ein- und Ausblick, wie die gewonnen Ergebnisse evtl. in der Studie von global konform-invarianter Quantenfeldtheorie weiter angewendet werden könnten.

Es stellt sich zum Beispiel die Frage, ob eine Doppelpolstruktur von einer Korrelationsfunktion der Form  $\langle \phi \cdots \phi \rangle$  kommen kann, wobei  $\phi$  ein neutrales (hermitesches) Feld ist. Die rationale Funktion muss wegen der Lokalität insbesondere symmetrisch sein. Wir wollen hier kurz das einfachste Beispiel einer 6-Punktfunktion, wo dies der Fall sein kann, diskutieren. Die einfachsten vorkommenden Doppelpolstrukturen scheiden dabei aus:

$$\frac{\rho_{15}\rho_{26} - \rho_{16}\rho_{25}}{\rho_{13}\rho_{14}\rho_{23}\rho_{24}} - \frac{(\rho_{15}\rho_{46} - \rho_{16}\rho_{45})(\rho_{15}\rho_{26} - \rho_{16}\rho_{25})}{\rho_{13}\rho_{14}^2\rho_{23}\rho_{24}} + (1 \leftrightarrow 2) , \quad (5.100)$$

da die erste antisymmetrisch bezüglich  $s_{12}$  und  $s_{56}$  und die zweite z.B. bezüglich  $s_{12}s_{56}$  ist.

<sup>5</sup> durch Ummummerierung oder Doppelnummerierung von 5, 6, 7 erhält man alle Möglichkeiten

Damit wäre der erste Kandidat die Struktur

$$F_0 = \frac{(\rho_{15}\rho_{26} - \rho_{16}\rho_{25})^2}{\rho_{13}\rho_{14}^2\rho_{23}^2\rho_{24}} + \text{weitere Terme} , \quad (5.101)$$

welche wir in Abschnitt 5.4.2 angegeben haben.

Interessant scheint insbesondere der Fall von Skalendimension  $d = 4$  sein (vgl. [20]), da dies die Skalendimension für ein Feld ist, welches die Eigenschaft einer Langrange-Dichte hat.

Die Struktur

$$\tilde{F}_0 = \frac{\rho_{34}^3}{\rho_{35}^2\rho_{36}^2\rho_{45}^2\rho_{46}^2\rho_{56}^2} F_0 \quad (5.102)$$

erfüllt alle Homogenitäten (Gewicht  $(1, 1, 4, 4, 4, 4)$ ), Polschranken und die Bedingung an die Polstruktur und ist damit (für  $\sigma \in S_n$  schreiben wir die Wirkung  $\sigma f(x_1, \dots, x_6) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(6)})$ )

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_6) \rangle^T = \sum_{\sigma \in S_6} \sigma \frac{\tilde{F}_0}{\rho_{12}^3} + \text{weitere Terme} \quad (5.103)$$

ein Kandidat für eine vollkommen symmetrische 6-Punktfunktion. Insbesondere ist

$$\left( \frac{\rho_{ij}}{\rho_{12}} \right)^3 \tilde{F}_0 \Big|_{\rho_{ij}=0} = 0 \quad \text{für } i \neq j \text{ mit } \{i, j\} \neq \{1, 2\} \quad (5.104)$$

und es trägt somit nur

$$\sum_{\sigma \in S_2 \times S'_4} \sigma \tilde{F}_0 \quad (5.105)$$

zu Twist 2 bei, wobei  $S'_4 \cong S_4$  die Permutationen der Indizes  $\{3, 4, 5, 6\}$  darstellen soll. D.h. es gibt keine anderen Twist-2-Beiträge, welche eventuell mit den Einschränkungen an die Polstruktur inkompatibel sind. Es ist

$$F_0|_{x_2 \rightarrow x_1} \neq 0 , \quad (5.106)$$

d.h. in der Operatorproduktentwicklung von  $\phi(x_1)\phi(x_2)$  kommt ein skalares Feld  $\phi_V(x_1) = U(x_1, x_1)$  der Skalendimension 2 vor. Es scheint so, dass sich dieser Beitrag eines skalaren Feldes der Dimension 2 durch Abziehen von Lösungen ohne Doppelpole eliminieren lässt.

Interessant könnte es sein, die 5-Punktfunktion  $\langle T_{\mu\nu}\phi\phi\phi\phi \rangle$  und höhere Partialwellen auszurechnen.

Soweit spricht nichts gegen die Möglichkeit einer Sechspunktfunktion wie oben. Ein systematische Untersuchung von möglichen Modellen mit solch einer Polstruktur scheint daher attraktiv.

Evtl. können die Ergebnisse über die Struktur von Doppelpolen aber auch für das Gegenteil nützlich sein, nämlich, um evtl. Doppelpole für weitere Fälle als Skalendimension  $d = 2$ , auszuschließen. Aber auch ohne Doppelpole sind noch nicht-triviale Theorien denkbar,

die aus Twist-2-Feldern erzeugt werden. In [20] sind 6-Punktfunktionen der Form  $\langle VVV \rangle$  angegeben, welche keine Realisierung durch freie Felder besitzen, aber trotzdem rational sind.

Es stellt sich weiterhin die Frage, ob sich solche (oder höhere) Korrelationsfunktionen von biharmonischen Feldern  $\langle VVV \rangle$  konstruieren lassen, welche nicht rational sind. Dafür ist es notwendig, Strukturen mit Doppelpolen zu finden, welche sich vom Gewicht  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  transformieren. Der harmonische Anteil  $\langle VUU \rangle$  muss dann Terme in nullter Ordnung in  $\rho_{34}$  und  $\rho_{56}$  enthalten. Andernfalls gebe es keinen Twist-2-Anteil in  $U(x_3, x_4)$  und  $U(x_5, x_6)$ . So ein Beispiel konnte jedoch im Zuge dieser Arbeit nicht gefunden werden. In Beispiel 5.1 kommt für  $\langle UU'U \rangle$  z.B. nur Twist  $2\kappa \geq 6$  vor. Ähnlich scheint es bei anderen Doppelpolstrukturen auch zu sein.

## 6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir versucht, einen Überblick über global konform-invariante Quantenfeldtheorie zu geben und ein spezielles Problem der Struktur von Doppelpolen untersucht, welche mit der in [22] angegebenen Bedingung  $(E_1 D_2 - E_2 D_1) F_0 = 0$  für den singulärsten Teil der trunkierten Korrelationsfunktion konform sind. Diese Einschränkung haben wir in dieser Arbeit zuerst auf Fälle, in denen keine Doppelpole auftreten können, insbesondere den Vierpunkt-Fall angewendet. Hier konnten wir gewisse Twist-2-Partialwellen, welche in [9, 10] mit anderen Methoden gefunden wurden, wiederfinden.

Die Möglichkeit des Auftretens von Doppelpolen ist ein Hinweis, dass nicht-triviale Modelle in global konform-invarianter Quantenfeldtheorie existieren könnten. Andererseits wurde in [22] gezeigt, dass für ein skalares Feld der Skalendimension 2, die Abwesenheit von Doppelpolen schon zur Trivialität führt. Beides motiviert die Untersuchung der möglichen Doppelpolstrukturen. Der singulärste Teil solcher Doppelpollösungen ist für beliebig hohe Skalendimensionen und  $n$ -Punktfunktionen verstanden. Wir haben angegeben, wie sich daraus komplette Doppelpol-Lösungen gewinnen lassen.

Es scheint attraktiv, mögliche Korrelationsfunktionen mit Doppelpolen (wie z.B. das hier angegebene Beispiel) mit weiteren Methoden zu untersuchen. Bisher nicht überprüfen lässt sich, ob solche Strukturen im Widerspruch zur Wightman-Positivität stehen. Im Fall von Vierpunktfunktionen liefert die Partialwellenentwicklung wie in [20] gezeigt nicht-triviale Einschränkungen auf mögliche Vierpunktfunktionen durch die Wightman-Positivität. Eine Untersuchung mit Partialwellen für höhere  $n$ -Punktfunktionen könnte neue Aufschlüsse geben.

Um zu kompletten Wightmanfunktionen mit Doppelpolen zu kommen (falls es solche überhaupt gibt), sind tiefere Methoden notwendig. Um wirklich konkrete Modelle, sei es mit oder ohne Doppelpole zu konstruieren, erscheinen Methoden, wie Darstellungen unendlich-dimensionaler Algebren (assoziative oder Lie-Algebren) notwendig und erfolgversprechend.

## A Temperierte Distributionen und Analytizität

In diesem Anhang möchten wir kurz einige Eigenschaften von Distributionen wiederholen. Für Details verweisen wir auf [27, 28].

Wir bezeichnen Punkte aus  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  und nutzen Multiindexschreibweise  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , wobei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  und  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$  ist. Für jeden Multiindex  $\alpha$  schreiben wir die partielle Ableitung als

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}} \quad (\text{A.1})$$

und das Produkt von Komponenten als:

$$|\mathbf{x}|^\alpha = |x^1|^{\alpha_1} \dots |x^n|^{\alpha_n} . \quad (\text{A.2})$$

Mit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen wir den Raum der unendlich oft differentierbaren komplexwertigen Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  für die für alle  $k, m \geq 0$  gilt:

$$\|f\|_{\alpha, \beta} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| |\mathbf{x}|^\alpha D^\beta f(\mathbf{x}) \right| < \infty . \quad (\text{A.3})$$

Dabei sind die  $\{\|\cdot\|_{\alpha, \beta}\}$  eine Familie von Halbnormen, die auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  eine Topologie erzeugen, welche wiederum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  zu einem Fréchet-Raum macht, d.h. er ist ein lokalkonvexer, metrisierbarer und vollständiger topologischer Vektorraum. Die Funktionen aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  fallen schneller ab als jedes Polynom und dienen als sogenannte Testfunktionen.

Mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen wir das topologische Dual von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , d.h. die Menge der stetigen und linearen Funktionale  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ . Diesen Raum bezeichnen wir auch als den Raum der temperierten Distributionen.  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann stetig, wenn es Multiindizes  $\alpha, \beta$  und ein  $C > 0$  gibt, sodass  $|T(f)| \leq C \|f\|_{\alpha, \beta}$  für alle Testfunktionen  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Es gibt eine kanonische Einbettung  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : g \mapsto T_g$  von den schnellabfallenden Funktionen in die Distributionen, welche gegeben ist durch:

$$g \mapsto T_g, \quad T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} . \quad (\text{A.4})$$

Insbesondere liegt  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bzgl. der schwach-\*-Topologie. Dies lässt eine formale Schreibweise zu. Wir schreiben für  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} T(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} , \quad (\text{A.5})$$

wobei  $x \mapsto T(x)$  im allgemeinen jedoch keine Funktion, sondern eine sogenannte verallgemeinerte Funktion ist. Auf der anderen Seite ordnet dieses Integral jeder stetigen Funktion  $x \mapsto T(x)$  mit maximal polynomialem Wachstum eine Distributionen  $f \mapsto T(f)$ .

Die Ableitung einer temperierten Distribution ist gegeben durch:

$$D^\alpha T(f) = T\left((-1)^{|\alpha|} D^\alpha f\right) . \quad (\text{A.6})$$

Eine wichtige Eigenschaft, welche insbesondere verdeutlicht, dass temperierte Distributionen eine Verallgemeinerung von Funktionen sind, ist die *Regularitätseigenschaft*, welche besagt, dass zu jedem  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  eine stetige Funktion  $F$  von maximal polynomialem Wachstum und ein Multiindex  $\alpha$  existiert, sodass

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f(x) dx , \quad (\text{A.7})$$

d.h. jede Distribution ist eine Ableitung (im Sinne von Distributionen) von einer stetigen Funktion. Wir schreiben auch  $T = D^\alpha F$ .

Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definieren wir die Fouriertransformation und Fourierrücktransformation  $f \mapsto \hat{f}$  bzw.  $f \mapsto \check{f}$ :

$$\hat{f}(k) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot k} f(x) dx \quad (\text{A.8})$$

$$\check{f}(x) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot k} f(k) dk , \quad (\text{A.9})$$

welche invers zueinander sind, d.h.  $\hat{\check{f}} = f = \check{\hat{f}}$ . Insbesondere sind diese Abbildungen auch stetig, also Automorphismen von  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Für  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  definieren wir die Fortsetzung von  $\hat{\cdot}$  auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vermöge  $\hat{T}(f) = T(\hat{f})$ , d.h. insbesondere gilt für  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mittels Vertauschung der Integration  $\hat{T}_g(f) = T_g(\hat{f}) = T_{\hat{g}}(f)$ .

Ist ein  $B$  ein multilineares Funktional von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1}) \times \dots \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_m})$  nach  $\mathbb{C}$ , welches in jedem Argument separat stetig ist, so gibt es ein  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_m})$ , sodass

$$B(f_1, \dots, f_m) = T(f_1 \otimes \dots \otimes f_m) \quad (\text{A.10})$$

wobei  $f_1 \otimes \dots \otimes f_m(x_1, \dots, x_{n_1 + \dots + n_m}) = f_1(x_1, \dots, x_{n_1}) \dots f_m(x_{n_1 + \dots + n_{m-1} + 1}, \dots, x_{n_1 + \dots + n_m})$ . Diese Aussage wird als Kern-Theorem bezeichnet.

Sei  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und sei  $F$  eine Funktion, welche analytisch in  $\mathbb{R}^n - iC$  ist, wobei  $C$  ein Kegel ist. Wir nehmen an, dass für jedes  $\eta_0 \in C$  die Funktion  $F(\cdot - i\eta_0)$  eine temperierte Distribution ist (d.h. maximal polynomiales Wachstum hat) und dass der Grenzwert

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x - it\eta_0) f(x) dx \xrightarrow{t \searrow 0} T(f) \quad (\text{A.11})$$

für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  existiert. Dann nennen wir  $S$  den *Randwert von  $F$  im Sinne von  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$* .

Für  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$  und  $\theta \in (0, \pi/2)$  wird

$$\Gamma_{\mathbf{a}, \Theta} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} > |\mathbf{x}| \cos \theta \} \quad (\text{A.12})$$

der offene Kegel um  $\mathbf{a}$  mit Öffnungswinkel  $\theta$  bezeichnet.

Ist  $C$  ein Kegel, dann bezeichnen wir mit  $C^*$  den dualen Kegel, gegeben als das Innere des Schnittes über alle Halbräume  $\{ \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > 0 \}$  mit  $\mathbf{x} \in C$ .

**Theorem A.1.** *Ist  $T$  eine temperierte Distribution mit Träger in einem Kegel  $\overline{C}$ , dann ist  $\hat{T}$  Randwert einer in  $\mathbb{R}^n - iC^*$  analytischen Funktion  $(\mathbf{k} - i\eta) \mapsto \hat{T}(\mathbf{k} - i\eta)$ . Ist andersherum  $F$  eine Funktion analytisch in  $\mathbb{R}^n - iC^*$  und erfüllt  $F$  folgende Abschätzungen:*

1. *Für jedes  $\eta_0 \in C^*$  gibt ein Polynom  $P_{\eta_0}$  in  $2n$  Variablen, sodass*

$$|F(\lambda - i(\eta_0 + \eta))| \leq |P_{\eta_0}(\lambda, \eta)| . \quad (\text{A.13})$$

2. *Es gibt ein  $r \in \mathbb{N}_0$ , sodass es für jedes  $\eta_0 \in C^*$  ein Polynom  $Q_{\eta_0}$  gibt, sodass*

$$|F(\lambda - it\eta_0)| \leq \frac{|Q_{\eta_0}(\lambda)|}{t^r} \quad (\text{A.14})$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in (0, 1]$ .

Dann gibt es eine temperierte Distribution  $T$  mit Träger in  $\overline{C}$ , sodass  $\hat{T}$  Randwert der Funktion  $(\mathbf{k} - i\eta) \mapsto F(\mathbf{k} - i\eta)$  ist. Es gilt dann:

$$F(\cdot - i\eta) = \widehat{e^{-\eta \cdot \mathbf{x}} T} . \quad (\text{A.15})$$

Als *vektorwertige temperierte Distribution* auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir eine stetige lineare Abbildung  $\Phi$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in einen Hilbert-Raum  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ . Dabei reicht aus zu fordern, dass für jeden Vektor  $\Psi \in D$  aus einem dichten Unterraum  $D \subset \mathcal{H}$  die Abbildung  $f \mapsto (\Psi, \Phi(f))$  eine temperierte Distribution ist.

Als letztes möchten wir das Konzept einer operatorwertigen Distribution einführen. Ist für einen dichten Unterraum  $D \subset \mathcal{H}$  eines Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  für jedes  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ein auf  $D$  definierte abschließbarer Operator  $A(f)$  gegeben, sodass für jedes  $\Phi, \Psi \in D$  die Abbildung  $f \mapsto (\Psi, A(f)\Phi)$  eine temperierte Distribution ist, so nennen wir  $A$  eine *operatorwertige temperierte Distribution*. Nehmen wir an, dass der adjungierte Operator von  $A(f)$  auf  $D$  definiert ist, so ist  $f \mapsto A^*(f)|_D$  auch eine operatorwertige Distribution. Wir nutzen die Notation

$$A^*(f)|_D = \int_{\mathbb{R}^n} A^*(\mathbf{x}) \bar{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} . \quad (\text{A.16})$$

## B Der konform-kompaktifizierte Minkowski-Raum $\overline{\mathbb{M}}$

In diesem Abschnitt betrachten wir den Minkowski-Raum als  $D$ -dimensional. Seine Metrik hat die Signatur  $(D - 2, 2)$ , wobei  $D \geq 2$  ist. Der kompaktifizierte Minkowski-Raum  $\overline{\mathbb{M}}$  ist eine kompakte Mannigfaltigkeit, welche den Minkowski-Raum  $\mathbb{M}$  als dichte offene Teilmenge enthält. Wir geben eine Parametrisierung von  $\overline{\mathbb{M}}$  an. Sie ist in gewisserweise sogar natürlich gegeben, da die konforme Gruppe hier linear wirkt.

Die Punkte werden bei dieser Parametrisierung mit isotropen Strahlen in pseudo-euklidischen Raum  $\mathbb{R}^{D+2}$  mit der Signatur  $(D, 2)$  identifiziert:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{M}} &= Q/\mathbb{R}^*, \\ Q &= \{ \xi \in \mathbb{R}^{D+2} \mid \xi \neq 0, \xi^2 := \xi^2 + \xi_D^2 - \xi_{-1}^2 - \xi_0^2 = 0 \} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

wobei  $\xi = (\xi_{-1}, \xi_0, \boldsymbol{\xi}, \xi_D) = (\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{D-1}, \xi_D)$ . Die Einbettung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &\longrightarrow \overline{\mathbb{M}} \\ \mathbf{x} &\longmapsto [\xi_{\mathbf{x}}] := \{ \lambda \xi_{\mathbf{x}} \}_{\lambda \neq 0} \\ \xi_{\mathbf{x}} &:= \left( \frac{1+x^2}{2}, x^0, \mathbf{x}, \frac{1-x^2}{2} \right) \\ &= \frac{1+x^2}{2} \mathbf{e}_{-1} + x^\mu \mathbf{e}_\mu + \frac{1-x^2}{2} \mathbf{e}_D. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Der pseudo-euklidische Abstand zweier Punkte  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}$  ist dann gegeben durch:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = -2\xi_{\mathbf{x}} \cdot \xi_{\mathbf{y}} = (\xi_{\mathbf{x}} - \xi_{\mathbf{y}})^2. \quad (\text{B.3})$$

Dies zeigt, dass zwei Punkte  $p_1, p_2 \in \overline{\mathbb{M}}$  gegenseitig isotrop sind, wenn das innere Produkt der Repräsentanten  $\xi_1 \cdot \xi_2$  verschwindet. Offensichtlich hängt dies nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.

Der Punkt  $p_\infty$  wird definiert als:

$$p_\infty = [\xi_\infty], \quad \xi_\infty = \mathbf{e}_D - \mathbf{e}_{-1}. \quad (\text{B.4})$$

Die Repräsentanten der Punkte  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  sind dann durch die Normierung  $\xi_{\mathbf{x}} \cdot \xi_\infty = 1$  klassifiziert. Genauer: jedem  $p = [\xi] \in \overline{\mathbb{M}}$  mit  $\xi \cdot \xi_\infty = \xi_D + \xi_{-1} \neq 0$  wird eindeutig ein  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  zugeordnet, indem man den Repräsentanten  $\xi'$  mit  $\xi' \cdot \xi_\infty = 1$ , d.h.  $\xi' := \xi / (\xi_D + \xi_{-1})$ , wählt, wobei dann  $\mathbf{x} = (\xi_0, \boldsymbol{\xi})$ . Dann ist aber  $\xi' = \xi_{\mathbf{x}}$ , denn wegen der Isotropie von  $\xi'$  und wegen  $\xi'_{-1} + \xi'_D = 1$  gilt  $0 = \xi'^2 = -x^2 + (\xi'_D)^2 - (\xi'_{-1})^2 = x^2 + \xi'_D - \xi'_{-1}$ , also  $2\xi'_{-1} = 1 + x^2$  und  $2\xi'_D = 1 - x^2$ .

Die Punkte bei unendlich, also die Menge  $K_\infty = \overline{\mathbb{M}} \setminus \mathbb{M}$ , ist gegeben durch:

$$K_\infty = \{ p = [\xi] \in \overline{\mathbb{M}} \mid \xi \cdot \xi_\infty = 0 \} . \quad (\text{B.5})$$

Eine spezielle Operation  $w$  ist die Drehung um  $\pi$  in der  $(\xi_{-1}, \xi_0)$ -Ebene:

$$w : [\xi = (\xi_{-1}, \xi_0, \mathbf{x}, \xi_D)] \mapsto [(-\xi_{-1}, -\xi_0, \mathbf{x}, \xi_D)] . \quad (\text{B.6})$$

Sie tauscht den Ursprung von  $\mathbb{M}$  mit  $p_\infty$  und ist für  $x \in \mathbb{M}$ ,  $x^2 \neq 0$  gegeben durch:

$$w : \mathbf{x} = (x^0, \mathbf{x}) \mapsto \left( \frac{x^0}{x^2}, \frac{-\mathbf{x}}{x^2} \right) . \quad (\text{B.7})$$

Man nennt  $w$  *Weyl-Spiegelung*.

Damit kann man sehen, dass die Wirkung unter der Gruppe  $\text{SO}_0(D, 2)$  transitiv<sup>1</sup> auf  $\overline{\mathbb{M}}$  wirkt, denn die Translationen wirken transitiv auf  $\mathbb{M}$  und mit Hinzunahme von  $w$  lässt sich  $K_\infty$  auf  $\mathbb{M}$  schicken.

Für  $g \in \text{SO}_0(D, 2)$  lassen sich aus der Wirkung der konforme Faktor  $\omega(\mathbf{x}, g)\omega(\mathbf{y}, g)$  für das Intervall  $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$  unter der Wirkung von  $g$  berechnen:

$$g\xi_x = \omega(\mathbf{x}, g)\xi_{gx} \implies \omega(\mathbf{x}, g) = g\xi_x \cdot \xi_\infty , \quad (\text{B.8})$$

wobei  $\xi \mapsto g\xi$  die lineare Operation der Gruppe  $\text{SO}_0(D, 2)$  auf  $\mathbb{R}^{D+2}$  ist. Damit transformiert sich das Abstandsquadrat wie folgt:

$$(g\mathbf{x} - g\mathbf{y})^2 = -2\xi_{gx} \cdot \xi_{gy} = -2 \frac{g\xi_x \cdot g\xi_y}{\omega(\mathbf{x}, g)\omega(\mathbf{y}, g)} = -2 \frac{\xi_x \cdot \xi_y}{\omega(\mathbf{x}, g)\omega(\mathbf{y}, g)} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{\omega(\mathbf{x}, g)\omega(\mathbf{y}, g)} . \quad (\text{B.9})$$

---

<sup>1</sup> Die Gruppenoperwirkung der Gruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  wird transitiv genannt, wenn für alle  $x, y \in X$  ein  $g \in G$  existiert, sodass  $gx = y$  ist.

## C Twist-2-Partialwellen

Wir beweisen hier das Lemma 4.2 aus Abschnitt 4.1.2.

**Lemma C.1.** Für  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist:

$$h_b(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{\rho_{13}^{1-b} \rho_{14}^b \rho_{24}} \sum_{m=\min\{0,b\}}^{\max\{b-1,-1\}} F(m-b+1, m+1; 1; s) t^m \quad (\text{C.1})$$

harmonisch in  $x_1$  und  $x_2$ . Für den Fall  $b = 0$  ist für jedes  $n \in \mathbb{Z}$

$$h_{0,n}(x_1, \dots, x_4) = \frac{t^n}{\rho_{13} \rho_{24}} \left( 1 - \sum_{m=-n}^{-1} (m+n+1) s F(m+n+2, m+1; 2; s) t^m \right) \quad (\text{C.2})$$

harmonisch  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

*Beweis.* Sei  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und

$$H = \frac{1}{\rho_{13}^{1-b} \rho_{14}^b \rho_{24}} \sum_{n=0}^{|b|-1} \sum_{m=\min\{0,b\}}^{\max\{b-n-1,-n-1\}} \frac{(-1)^n (b-m-n)_n (1+m)_n}{n!} s^n t^m = h_b. \quad (\text{C.3})$$

Wir brauchen nur entweder  $\square_1 H = 0$  oder  $\square_2 H = 0$  zu zeigen, dass andere ist dann automatisch erfüllt, da nach Proposition 4.1 und 3.3 der harmonische Anteil in  $x_1$  um  $x_2$  automatisch harmonisch in  $x_2$  ist. Wir entwickeln  $H = \sum_n H_n \rho_{12}^n / n!$ , also:

$$H_n = \frac{s^n}{\rho_{12}^n \rho_{13}^{1-b} \rho_{14}^b \rho_{24}} \sum_{m=\min\{0,b\}}^{\max\{b-n-1,-n-1\}} \frac{(-1)^n (b-m-n)_n (1+m)_n}{n!} t^m. \quad (\text{C.4})$$

Differentialoperatoren wie  $D_1$  und  $E_1$  liefern nach ihrer Anwendung in jedem Summanden nur einen aus einer Zahl und  $\{\rho_{ij}\}$  bestehenden Faktor.  $D_1 = \rho_{34} \partial_{13} \partial_{14}$  auf  $H_n$  angewendet, gibt einen Faktor  $(b-m-n-1)(m-b)\rho_{34}/(\rho_{13}\rho_{14})$  und  $E_1 = \rho_{23} \partial_{13} + \rho_{24} \partial_{14}$  angewendet auf  $H_{n+1}$  einen Faktor  $(b-m-n-2)\rho_{23}/\rho_{13} + (m-b)\rho_{24}/\rho_{14} = ((b-m-n-2)t + (m-b))\rho_{12}\rho_{34}/(\rho_{13}\rho_{14}s)$  zu dem jeweils zugehörigen Summanden. Damit ergibt sich  $D_1 H_n + E_1 H_{n+1}$  bis auf einen Faktor zu:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=\min\{0,b\}}^{\max\{b-n-1,-n-1\}} (b-m-n)_n (m+1)_n (b-m-n-1)(m-b) t^m \\ & - \sum_{m=\{0,b\}}^{\max\{b-n-2,-n-2\}} (b-m-n-1)_{n+1} (1+m)_{n+1} \frac{(b-m-n-2)t + (m-b)}{n+1} t^m \\ & = \sum_{m=\min\{0,b\}}^{\max\{b-n-2,-n-2\}} (b-m-n-1)_{n+2} (m+1)_n \underbrace{\left[ -1 - \frac{m-(m+n+1)}{n+1} \right]}_{=0} t^m \\ & = 0 \end{aligned}$$

und damit ist insbesondere  $\square_1 H = -4(D_1 + E_1 \rho_{12})H = 0$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} H &:= \frac{t^n}{\rho_{13}\rho_{24}} \left( 1 - \sum_{q=1}^n \sum_{m=-n}^{-q} \frac{(m+n+1)_q (m+1)_{q-1}}{q!(q-1)!} s^q t^m \right) = h_{0,n} \\ H &:= \frac{t^n}{\rho_{13}\rho_{24}} \left( 1 + \sum_{q=1}^{-n-1} \sum_{m=0}^{-q-n-1} \frac{(m+n+1)_q (m+1)_{q-1}}{q!(q-1)!} s^q t^m \right) = h_{0,n} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

harmonisch bzgl.  $x_1$  ist. Dann ist er auch harmonisch bzgl.  $x_i$  weil der Ausdruck nach Proposition 4.1 die Integrabilitätsbedingung (3.28) bzgl.  $x_1, x_2$  erfüllt. Des Weiteren ist der Ausdruck invariant unter der simultanen Vertauschung von  $1 \leftrightarrow 3$  und  $2 \leftrightarrow 4$  also auch in  $x_3$  und  $x_4$  harmonisch.

Wir schreiben  $H := \sum_{q=0}^{\infty} H_q \rho_{12}^q / q!$ , also:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{\rho_{13}\rho_{24}} t^n \\ H_q &= -\frac{1}{\rho_{13}\rho_{24}} \sum_{m=-n}^{-q} \frac{(m+n+1)_q (m+1)_{q-1}}{(q-1)!} \left( \frac{s}{\rho_{12}} \right)^q t^{m+n} \quad (1 \leq q \leq n) \\ H_q &= +\frac{1}{\rho_{13}\rho_{24}} \sum_{m=0}^{-q-n-1} \frac{(m+n+1)_q (m+1)_{q-1}}{(q-1)!} \left( \frac{s}{\rho_{12}} \right)^q t^{m+n} \quad (1 \leq q \leq -n-1). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Zu zeigen bleibt:  $D_1 H_q + E_1 H_{q+1} = 0$ . Für  $q = 0$  evaluieren  $-E_1 H_1$  als Teleskopsumme wie folgt:

Fall  $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_{23}}{\rho_{13}\rho_{24}} \sum_{m=-n}^{-1} (m+n+1) \left( \frac{\rho_{34}}{\rho_{13}\rho_{24}} \right) (-1-m-n) t^{m+n} \\ &+ \frac{1}{\rho_{13}\rho_{14}} \sum_{m=-n}^{-1} (m+n+1) \left( \frac{\rho_{34}}{\rho_{13}\rho_{24}} \right) (m+n) t^{m+n} \\ &= \frac{\rho_{34}}{\rho_{13}^2 \rho_{14} \rho_{24}} \sum_{m=-n}^{-1} \underbrace{-(m+1+n)(m+2+n) t^{m+1+n}}_{=-b_{m+1}} + \underbrace{(m+n)(m+1+n) t^{m+n}}_{=b_m} \\ &= \frac{\rho_{34}}{\rho_{13}^2 \rho_{14} \rho_{24}} (b_{-n} - b_0) = -\frac{\rho_{34}}{\rho_{13}^2 \rho_{14} \rho_{24}} n(n+1) t^n = D_1 H_0, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

also  $D_1 H_0 + E_1 H_1 = 0$ . Für  $q \in \mathbb{N}$  betrachte

$$D_1 H_q = \frac{\rho_{34}}{\rho_{12}^2 \rho_{14} \rho_{24}} \left( \frac{s}{\rho_{12}} \right)^q \sum_{m=-n}^{-q} \frac{(m+n+q)_q (m+1)_{q-1}}{(q-1)!} (m+n+q+1)(m+n) t^{m+n} \quad (\text{C.8})$$

sowie

$$\begin{aligned}
-E_1 H_{q+1} &= \frac{\rho_{34}}{\rho_{13}^2 \rho_{14} \rho_{24}} \left( \frac{s}{\rho_{12}} \right)^q \sum_{m=-n}^{-q} \frac{(m+n+1)_{q+1} (m+1)_q}{(q)!} (-q-2-m-n) t^{m+n+1} \\
&\quad + \frac{(m+n+1)_{q+1} (m+1)_q}{q!} (m+1) t^{m+n} \\
&= \frac{\rho_{34}}{\rho_{13}^2 \rho_{14} \rho_{24}} \sum_{m=-n}^{-q} \left[ -\frac{(m+n)_{q+1} (m)_q}{q!} (q+1+m+n) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(m+n+1)_{q+1} (m+1)_q}{q!} (m+n) \right] t^{m+n} \\
&= D_1 H_q, \tag{C.9}
\end{aligned}$$

da obige Klammer [...] gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
&\frac{(m+n)_{q+1} (m)_q}{(q-1)!} \left\{ \frac{-(m+n)m(m+n+q+1) + (m+n)(m+n+q+1)(m+q)}{q} \right\} \\
&= \frac{(m+n)_{q+1} (m)_q}{(q-1)!} (m+n+q+1)(m+n) \underbrace{\left\{ \frac{-m+(m+q)}{q} \right\}}_{=1} \\
&= \frac{(m+n)_{q+1} (m)_q}{(q-1)!} (m+n+q+1)(m+n) \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Fall  $n \leq -1$ : Dieser Fall wird analog berechnet, indem man:

$$\sum_{m=-n}^{-1} \longrightarrow \sum_{m=0}^{-n-1} \tag{C.11}$$

ersetzt. □

## D Die hypergeometrische Funktion und einige Identitäten

Die *Gaußsche hypergeometrische Reihe*, auch *hypergeometrische Funktion* genannt, ist gegeben durch:

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{D.1})$$

wobei

$$(a)_0 = 1$$

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \cdots (a+n-1) \quad (\text{D.2})$$

das sogenannte *Pochhammer-Symbol* ist. Für  $a \in \mathbb{N}$  lässt sich dieses auch schreiben als

$$(a)_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} \quad (\text{D.3})$$

und es gelten (unter anderem) die Identitäten:

$$(a)_n (a+n)_m = (a)_{n+m} \quad (\text{D.4})$$

$$(a)_n = (-1)^n (1-a-n)_n \quad (\text{D.5})$$

$$(-n)_n = 0. \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\text{D.6})$$

Die Potenzreihe (D.1) hat den Konvergenzbereich  $|z| < 1$ , wenn weder  $a$ ,  $b$  noch  $c$  negative ganze Zahlen oder Null sind. Außerhalb ist sie, wenn nötig über ihre analytische Fortsetzung definiert. Ist  $a$  oder  $b$  eine negative ganze Zahl oder Null und ist  $c$  entweder, weder eine negative ganze Zahl noch Null, oder kleiner als die negative Ganzzahl  $a$  oder  $b$ , so ist die Reihe endlich. Eine Vielzahl von Identitäten finden sich in [1].

In Abschnitt 4.1.3 benutzen wir für  $b \in \mathbb{Z}$  die Identitäten

$$F(0, -b; 0; z) = (1-z)^b \quad (\text{D.7})$$

$$b \cdot z \cdot F(1, 1-b; 2; z) = 1 - (1-z)^b, \quad (\text{D.8})$$

welche wir für  $b \geq 0$  mit Hilfe der Binomialformel

$$F(0, -b; 0; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^b \binom{b}{k} (-z)^k = (1-z)^b$$

$$b \cdot z \cdot F(1, 1-b; 2; z) = - \sum_{n=0}^{b-1} \frac{(-b)_{n+1}}{(2)_n} z^{n+1} = 1 - \sum_{n=0}^b \binom{b}{n} (-z)^n = 1 - (1-z)^b$$

---

und für  $-c := b < 0$  mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} F(0, -b; 0; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)_{c-1}}{(c-1)!} z^n = \sum_{n=c-1}^{\infty} \frac{(n-c+2)_{c-1}}{(c+1)!} z^{n-c+1} \\ &= \frac{1}{(c-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d}{dz} \right)^{c-1} z^n = \frac{1}{(c-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{c-1} \frac{1}{1-z} = (1-z)^b \end{aligned}$$

$$b \cdot u \cdot F(1, 1+c; 2; z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} = 1 - F(0, c; 0; z) = 1 - (1-z)^b$$

zeigen.

## E Rekursionssystem zur Polstruktur

In diesem Abschnitt formen wir das Differentialgleichungssystem

$$(E_1 D_2 - E_2 D_1) F_0 = 0 \quad (\text{E.1})$$

in ein Rekursionssystem um. Dieses erweist sich als nützlich um  $F_0$  mit Doppelpolen in  $\rho_{13}, \rho_{14}$  oder  $\rho_{23}, \rho_{24}$  zu untersuchen.

Hierfür sei  $n \geq 6$  vorgegeben. Ferner sei  $F_0$  ein Laurent-Polynom in den Variablen  $\{\rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n, (i, j) \neq (1, 2)\}$ . Wir entwickeln  $F_0$  in der Form:

$$F_0((\rho_{1i})_{3 \leq i \leq n}, (\rho_{2i})_{3 \leq i \leq n}, (\rho_{ij})_{3 \leq i < j \leq n}) = \sum_{a,b,c,d} \frac{C_{abcd}((\rho_{1i})_{3 \leq i \leq n}, (\rho_{2i})_{5 \leq i \leq n}, (\rho_{ij})_{5 \leq i < j \leq n})}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d}. \quad (\text{E.2})$$

Dabei sind die  $C_{abcd}$  wieder Laurent-Polynome in den genannten Variablen und nur endlich viele  $C_{abcd} \neq 0$ .

Wir spalten die Differentialoperatoren  $E_1$  und  $D_1$  in die Anteile auf, die auf nur die Variablen  $\{\rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}\}$  wirken, auf die anderen Variablen wirken und die auf beide wirken:

$$E_1 = \sum_{i=3}^n \rho_{2i} \partial_{1i} = \rho_{23} \partial_{13} + \rho_{24} \partial_{14} + \tilde{E}_1 \quad (\text{E.3})$$

$$D_1 = \sum_{3 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \partial_{1i} \partial_{1j} = \rho_{34} \partial_{13} \partial_{14} + \sum_{i=5}^n \rho_{3i} \partial_{1i} \partial_{13} + \sum_{i=5}^n \rho_{4i} \partial_{1i} \partial_{14} + \tilde{D}_1, \quad (\text{E.4})$$

wobei

$$\tilde{E}_1 = \sum_{i=5}^n \rho_{2i} \partial_{1i}, \quad \tilde{D}_1 = \sum_{5 \leq i < j \leq n} \rho_{ij} \partial_{1i} \partial_{1j} \quad (\text{E.5})$$

und analog für  $E_2$  und  $D_2$  durch Vertauschung der Indizes  $1 \leftrightarrow 2$ .

Die Wirkung von  $E_1 D_2$  auf  $F_0$  schreibt sich damit als

$$\begin{aligned}
& E_1 D_2 \sum_{abcd} \frac{C_{abcd}}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} = \\
& \sum_{abcd} \frac{1}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} \cdot \left\{ -(a-1) \left[ c(d-1) \rho_{34} C_{a-1,b,c,d-1} - c \rho_{3i} \partial_{2i} C_{a-1,b,c,d} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - (d-1) \rho_{4i} \partial_{2i} C_{a-1,b,c+1,d-1} + D_2^{(34)} C_{a-1,b,c+1,d} \right] \right. \\
& \quad -(b-1) \left[ (c-1) d \rho_{34} C_{a,b-1,c-1,d} - (c-1) \rho_{3i} \partial_{2i} C_{a,b-1,c-1,d+1} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - d \rho_{4i} \partial_{2i} C_{a,b-1,c,d} + D_2^{(34)} C_{a,b-1,c,d+1} \right] \\
& \quad \left. + E_1^{(34)} \left[ (c-1)(d-1) \rho_{34} C_{a,b,c-1,d-1} - (c-1) \rho_{3i} \partial_{2i} C_{a,b,c-1,d} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - (d-1) \rho_{4i} \partial_{2i} C_{a,b,c,d-1} + D_2^{(34)} C_{a,b,c,d} \right] \right\}, \quad (E.6)
\end{aligned}$$

sowie die Wirkung von  $E_2 D_1 F_0$  als

$$\begin{aligned}
& E_2 D_1 \sum_{abcd} \frac{C_{abcd}}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} = \\
& = \sum_{abcd} \frac{1}{\rho_{13}^a \rho_{14}^b \rho_{23}^c \rho_{24}^d} \left\{ -(c-1) \left[ a(b-1) \rho_{34} C_{a,b-1,c-1,d} - a \rho_{3i} \partial_{1i} C_{a,b,c-1,d} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - (b-1) \rho_{4i} \partial_{1i} C_{a+1,b-1,c-1,d} + D_1^{(34)} C_{a+1,b,c-1,d} \right] \right. \\
& \quad -(d-1) \left[ (a-1) b \rho_{34} C_{a-1,b,c,d-1} - (a-1) \rho_{3i} \partial_{2i} C_{a-1,b+1,c,d-1} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - b \rho_{4i} \partial_{1i} C_{a,b,c,d-1} + D_1^{(34)} C_{a,b+1,c,d-1} \right] \\
& \quad \left. + E_2^{(34)} \left[ (a-1)(b-1) \rho_{34} C_{a-1,b-1,c,d} - (a-1) \rho_{3i} \partial_{1i} C_{a-1,b,c,d} \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - (b-1) \rho_{4i} \partial_{1i} C_{a,b-1,c,d} + D_1^{(34)} C_{a,b,c,d} \right] \right\}. \quad (E.7)
\end{aligned}$$

Wir subtrahieren beide Beiträge und machen einen Koeffizientenvergleich und verschieben dabei die Indizes  $(a, b, c, d) \rightarrow (a+1, b+1, c+1, d+1)$ . Damit ist (E.1) äquivalent

zu

$$\begin{aligned}
0 = & \left\{ -a \left[ (c+1)d\rho_{34}C_{a,b+1,c+1,d} - (c+1)\rho_{3i}\partial_{2i}C_{a,b+1,c+1,d+1} \right. \right. \\
& \left. \left. - d\rho_{4i}\partial_{2i}C_{a,b+1,c+2,d} + D_2^{(34)}C_{a,b+1,c+2,d+1} \right] \right. \\
& - b \left[ c(d+1)\rho_{34}C_{a+1,b,c,d+1} - c\rho_{3i}\partial_{2i}C_{a+1,b,c,d+2} \right. \\
& \left. - (d+1)\rho_{4i}\partial_{2i}C_{a+1,b,c+1,d+1} + D_2^{(34)}C_{a+1,b,c+1,d+2} \right] \\
& + E_1^{(34)} \left[ cd\rho_{34}C_{a+1,b+1,c,d} - c\rho_{3i}\partial_{2i}C_{a+1,b+1,c,d+1} \right. \\
& \left. - d\rho_{4i}\partial_{2i}C_{a+1,b+1,c+1,d} + D_2^{(34)}C_{a+1,b+1,c+1,d+1} \right] \left. \right\} \\
& + \left\{ +c \left[ (a+1)b\rho_{34}C_{a+1,b,c,d+1} - (a+1)\rho_{3i}\partial_{1i}C_{a+1,b+1,c,d+1} \right. \right. \\
& \left. \left. - b\rho_{4i}\partial_{1i}C_{a+2,b,c,d+1} + D_1^{(34)}C_{a+2,b+1,c,d+1} \right] \right. \\
& + d \left[ a(b+1)\rho_{34}C_{a,b+1,c+1,d} - a\rho_{3i}\partial_{1i}C_{a,b+2,c+1,d} \right. \\
& \left. - (b+1)\rho_{4i}\partial_{1i}C_{a+1,b+1,c+1,d} + D_1^{(34)}C_{a+1,b+2,c+1,d} \right] \\
& \left. - E_2^{(34)} \left[ ab\rho_{34}C_{a,b,c+1,d+1} - a\rho_{3i}\partial_{1i}C_{a,b+1,c+1,d+1} \right. \right. \\
& \left. \left. - b\rho_{4i}\partial_{1i}C_{a+1,b,c+1,d+1} + D_1^{(34)}C_{a+1,b+1,c+1,d+1} \right] \right\} \tag{E.8}
\end{aligned}$$

für alle  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ .

Wir vereinfachen (E.8):

$$\begin{aligned}
0 = & -\rho_{34} \left\{ ad(c-b)C_{a,b+1,c+1,d} + bc(d-a)C_{a+1,b,c,d+1} - cd\tilde{E}_1C_{a+1,b+1,c,d} + ab\tilde{E}_2C_{a,b,c+1,d+1} \right\} \\
& + a \left[ c\rho_{3i}\partial_{2i} + \rho_{3i}\partial_{1i}\tilde{E}_2 \right] C_{a,b+1,c+1,d+1} + b \left[ d\rho_{4i}\partial_{2i} + \rho_{4i}\partial_{1i}\tilde{E}_2 \right] C_{a+1,b,c+1,d+1} \\
& - c \left[ a\rho_{3i}\partial_{1i} + \rho_{3i}\partial_{2i}\tilde{E}_1 \right] C_{a+1,b+1,c,d+1} - d \left[ b\rho_{4i}\partial_{1i} + \rho_{4i}\partial_{2i}\tilde{E}_1 \right] C_{a+1,b+1,c+1,d} \\
& + \left[ \tilde{E}_1\tilde{D}_2 - \tilde{E}_2\tilde{D}_1 \right] C_{a+1,b+1,c+1,d+1} \\
& + a \left\{ d\rho_{4i}\partial_{2i}C_{a,b+1,c+2,d} - \tilde{D}_2C_{a,b+1,c+2,d+1} \right\} + b \left\{ c\rho_{3i}\partial_{2i}C_{a+1,b,c,d+2} - \tilde{D}_2C_{a+1,b,c+1,d+2} \right\} \\
& - c \left\{ b\rho_{4i}\partial_{1i}C_{a+2,b,c,d+1} - \tilde{D}_1C_{a+2,b+1,c,d+1} \right\} + d \left\{ a\rho_{3i}\partial_{1i}C_{a,b+2,c+1,d} - \tilde{D}_1C_{a+1,b+2,c+1,d} \right\} \\
& =: \mathfrak{R}(a, b, c, d) \tag{E.9}
\end{aligned}$$

und halten fest.

**Proposition E.1.** Sei  $F_0$  gegeben wie in (E.2). Dann ist (E.1) äquivalent mit  $\mathfrak{R}(a, b, c, d) = 0$  für alle  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ .

*Bemerkung E.2.* Aus Folgerung 3.4 folgt, dass für alle  $(a, b, c, d)$  mit  $a, b > 0$  oder  $c, d > 0$  der Koeffizient  $C_{abcd}$  regulär in den Variablen  $\{\rho_{1i}\}_{5 \leq i \leq n}$  und  $\{\rho_{2i}\}_{5 \leq i \leq n}$  ist, d.h.  $C_{abcd}$  kann in diesem Fall als ein Polynom in  $(\rho_{1i})_{3 \leq i \leq n}, (\rho_{2i})_{3 \leq i \leq n}$  mit Werten in dem Vektorraum der Laurent-Polynome in den Variablen  $(\rho_{ij})_{3 \leq i < j \leq n}$  aufgefasst werden.

---

Insbesondere verbindet  $\mathfrak{R}(a, b, c, d)$  die Koeffizienten

$$\{C_{a+1,b+1,c,d}, C_{a,b,c+1,d+}, C_{a+1,b,c,d+1}, C_{a,b+1,c+1,d}\}$$

nur mit  $C_{a'b'c'd'}$  mit  $a' \geq a, b' \geq b, c' \geq c, d' \geq d$  und

$$a + b + c + d + 3 \leq a' + b' + c' + d' \leq a + b + c + d + 4.$$

## Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I. : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table*. Courier Dover Publications, 1965
- [2] BAKALOV, B. ; NIKOLOV, N. M.: Jacobi identity for vertex algebras in higher dimensions. In: *Journal of Mathematical Physics* 47 (2006), Mai, Nr. 5, 053505. [arXiv:math-ph/0601012v2](https://arxiv.org/abs/math-ph/0601012v2)
- [3] BAKALOV, B. ; NIKOLOV, N. M. ; REHREN, K.-H. ; TODOROV, I. : Infinite-dimensional Lie algebras in 4D conformal quantum field theory. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41 (2008), Nr. 19, 194002 (12pp). <http://stacks.iop.org/1751-8121/41/194002>
- [4] BARGMANN, V. ; TODOROV, I. T.: Spaces of analytic functions on a complex cone as carriers for the symmetric tensor representations of  $SO(n)$ . In: *Journal of Mathematical Physics* 18 (1977), Jun., S. 1141–1148
- [5] BISCHOFF, M. : *Maple-Skript mit Doppelpol-Lösungen zu Abschnitt 5.4.1*. <http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/~bischoff/dplm/>
- [6] BOGOLUBOV, N. ; LOGUNOV, A. ; OKSAK, A. ; TODOROV, I. T.: *General Principles of Quantum Field Theory*. Kluwer Academic Print on Demand, 1990
- [7] DI FRANCESCO, P. ; MATHIEU, P. ; SENECHAL, D. : *Conformal field theory*. Springer, 1997
- [8] DOBREV, V. K. ; MACK, G. ; PETKOVA, V. B. ; PETROVA, S. G. ; TODOROV, I. T.: Harmonic Analysis: on the  $n$ -Dimensional Lorentz Group and Its Application to Conformal Quantum Field Theory. In: *Harmonic Analysis: on the  $n$ -Dimensional Lorentz Group and Its Application to Conformal Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics* 63 (1977)
- [9] DOLAN, F. A. ; OSBORN, H. : Conformal Four Point Functions and the Operator Product Expansion. In: *Nuclear Physics B* 599 (2001), 459. [arXiv:hep-th/0011040v3](https://arxiv.org/abs/hep-th/0011040v3)
- [10] DOLAN, F. A. ; OSBORN, H. : Conformal Partial Waves and the Operator Product Expansion. In: *Nuclear Physics B* 678 (2004), 491. [arXiv:hep-th/0309180v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/0309180v1)
- [11] FERRARA, S. ; GATTO, R. ; GRILLO, A. : Conformal Algebra in Space-Time and Operator Product Expansion. In: *Springer Tracts Mod. Phys.* 67 (1973), S. 1–64
- [12] FREDENHAGEN, K. ; REHREN, K.-H. ; SEILER, E. : Quantum Field Theory: Where We Are. In: *Lect. Notes Phys.* 721 (2007), 61-87. [arXiv:hep-th/0603155v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/0603155v1)
- [13] HAAG, R. : *Local quantum physics: Fields, particles, algebras*. Springer, 1992

- 
- [14] HUMPHREYS, J. : *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer, 1972
- [15] JOST, R. : *The General Rheory of Quantized Fields*. American Mathematical Society, 1965
- [16] MACK, G. : All unitary ray representations of the conformal group  $SU(2, 2)$  with positive energy. In: *Communications in Mathematical Physics* 55 (1977), Nr. 1, S. 1–28
- [17] NIKOLOV, N. M. ; STANEV, Y. S. ; TODOROV, I. T.: Global Conformal Invariance and Bilocal Fields with Rational Correlation Functions. In: *arXiv* (2002), Nov. [arXiv: hep-th/0211106v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0211106v2)[hep-th]
- [18] NIKOLOV, N. M. ; TODOROV, I. T.: Elliptic thermal correlation functions and modular forms in a globally conformal invariant QFT. In: *Reviews in Mathematical Physics* 17 (2005), Nr. 6, 613. [arXiv:hep-th/0403191v3](https://arxiv.org/abs/hep-th/0403191v3)
- [19] NIKOLOV, N. M.: Vertex Algebras in Higher Dimensions and Globally Conformal Invariant Quantum Field Theory. In: *Communications in Mathematical Physics* 253 (2004), 283. [arXiv:hep-th/0307235v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0307235v2)
- [20] NIKOLOV, N. M. ; REHREN, K.-H. ; TODOROV, I. T.: Partial wave expansion and Wightman positivity in conformal field theory. In: *Nuclear Physics B* 722 (2005), 266. [arXiv:hep-th/0504146v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0504146v2)
- [21] NIKOLOV, N. M. ; REHREN, K.-H. ; TODOROV, I. T.: Pole structure and biharmonic fields in conformal QFT in four dimensions. In: *LT7: Lie Theory and its Applications in Physics, Proceedings Varna* (2007). [arXiv:0711.0628v1](https://arxiv.org/abs/0711.0628v1)
- [22] NIKOLOV, N. M. ; REHREN, K.-H. ; TODOROV, I. T.: Harmonic Bilocal Fields Generated by Globally Conformal Invariant Scalar Fields. In: *Communications in Mathematical Physics* 279 (2008), 225. [arXiv:0704.1960v4](https://arxiv.org/abs/0704.1960v4)
- [23] NIKOLOV, N. M. ; STANEV, Y. S. ; TODOROV, I. T.: Four-dimensional conformal field theory models with rational correlation functions. In: *Journal of Physics A* 35 (2001), 2985. [arXiv:hep-th/0110230v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0110230v2)
- [24] NIKOLOV, N. M. ; STANEV, Y. S. ; TODOROV, I. T.: Globally conformal invariant gauge field theory with rational correlation functions. In: *Nuclear Physics B* 670 (2003), 373. [arXiv:hep-th/0305200v2](https://arxiv.org/abs/hep-th/0305200v2)
- [25] NIKOLOV, N. M. ; TODOROV, I. T.: *Conformal Quantum Field Theory in Two and Four Dimensions*. <ftp://ftp.esi.ac.at/pub/Preprints/esi1155.pdf>. Version:2001
- [26] NIKOLOV, N. M. ; TODOROV, I. T.: Rationality of Conformally Invariant Local Correlation Functions on Compactified Minkowski Space. In: *Communications in Mathematical Physics* 218 (2001), 417. [arXiv:hep-th/0009004v4](https://arxiv.org/abs/hep-th/0009004v4)
- [27] REED, M. ; SIMON, B. : *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis*. New York and London : Academic Press, 1972

- [28] REED, M. ; SIMON, B. : *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*. New York and London : Academic Press, 1975
- [29] REHREN, K.-H. : *Konforme Quantenfeldtheorie - Vorlesungsskript WS 1997/1998*. <http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/~rehren/vorl/ws9798.html>
- [30] REHREN, K.-H. : *Private Notizen*. 2008
- [31] RUDIN, W. : *Functional analysis*. McGraw-Hill New York, 1991
- [32] STREATER, R. F. ; WIGHTMAN, A. S.: *Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie*. Mannheim/München : Bibliogr. Inst., 1969. – ISBN 3411004355
- [33] TODOROV, I. T.: Constructing Conformal Field Theory Models. In: *Fields Institute Communications - Universality and Renormalization: From Stochastic Evolution to Renormalization of Quantum Fields* 50 (2007), S. 317

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. K.-H. Rehren bedanken, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, auf diesem interessanten Gebiet zu arbeiten und für all seine stets hilfreichen Vorschläge. Zusätzlich möchte ich Prof. D. Buchholz danken, der das Korreferendariat übernommen hat. Allgemein geht meine Anerkennung an die ganze QFT-Gruppe, in der ich durch Gespräche und Diskussionen viel lernen konnte.

Ich möchte weiterhin Sarah und Marcus danken. Ein ganz besonderer Dank geht an Isabell, für die unzähligen Momente, in denen sie mich unterstützt hat. Als letztes möchte ich zutiefst meiner Mutter danken, die mich auf allen Wegen unterstützt und auf mich vertraut hat.

## Index

- Anharmonisches Verhältnis, 16
- Biharmonizität, 27, 28
- Clebsch-Gordon-Formel, 55
- Clustereigenschaft, 13
- Dilatation, 15
- Einfachpoleigenschaft, 35
- Feld
  - verallgemeinertes freies, 14
- Felder
  - quasiprimäre, 26
- Fouriertransformation, 79
- Funktion
  - hypergeometrische, 86
- Harmonische Zerlegung, 29
- Harmonischer Anteil, 29
- Hermitizitätseigenschaft, 12
- Huygens-bilokal, 26
- Kern-Theorem, 79
- Konforme Gruppe, 15
- Konformer Faktor, 15
- Lorentz-Gruppe, 9
  - quantenmechanische, 9
- Maximaler Vektor, 55
- Operatorwertige Distributionen, 80
- Pochhammer-Symbol, 86
- Poincaré-Gruppe, 10
  - quantenmechanische, 10
- Polynomialgebra, 14
- Punkte
  - isotrope, 20
- Randwert im Sinne von  $\mathcal{S}'$ , 79
- Regularitätseigenschaft von Distributionen, 79
- Skalendimension, 18
- Skalentransformation, 15
- Spektrumsbedingung, 11
- Twist, 17, 26
- Vakuum, 11
- Vakuumsvektor, 11
- Vektorwertige Distributionen, 80
- Vorwärtslichtkegel, 9
- Wightman-Axiome, 10
- Wightman-Positivität, 12
- Wightmanfunktion, 12
  - trunkierte, 13