

Diplomarbeit

zum Thema

Lokale Gleichgewichtszustände masseloser Fermionen

vorgelegt von

Benjamin Bahr

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
2004

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	3
2	Theorie	5
2.1	Allgemeiner Rahmen	5
2.2	Referenzzustände	6
2.3	Punktfelder	7
2.4	Thermale Observablen am Punkt x	7
2.5	Makroobservablen	8
2.6	Lokale thermale Gleichgewichtszustände	9
3	Das Modell	11
3.1	Masselose Fermionen	11
3.2	Die CAR-Algebra zur Helizität -1	12
3.3	Indexschreibweise	14
3.4	Lokale und Observablenalgebren	15
3.5	Die CAR-Algebra des Vorwärtslichtkegels	16
4	Thermale Größen	17
4.1	Referenzzustände auf \mathcal{F}	17
4.2	Thermostatik in \mathcal{C}	18
4.3	Die thermalen Observablen	19
4.4	Thermale Funktionen	20
4.5	Thermale Funktionen und die Wellengleichung	22
5	Wichtige Makroobservablen	28
5.1	Der Energie-Impulstensor	28
5.2	Die Entropiestromdichte	28
5.3	Die Phasenraumdichte	29
6	\mathcal{S}_O-thermale Zustände	37
6.1	Bewegungsgleichungen	37
6.2	Erwartungswerte und Transportgleichungen	39
6.3	\mathcal{S}_O -thermale Zustände und die Teilchendichte	44
6.4	Lokale thermale Zustände scharfer Temperatur	46
7	Der Hot-Bang Zustand	49
7.1	Existenz und Positivität	49
7.2	Thermale Eigenschaften von ω_{hb}	62
8	Singularitätensatz	66
8.1	Gebiete maximaler Thermalität	66
8.2	Singularitäten	69
9	Darstellung der experimentellen Situation	71

10 Zusammenfassung und Ausblick	74
A Anhang: Konventionen	77
A.1 Der Minkowskiraum	77
A.2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe	77
A.3 Spingruppe	78
A.4 Spinoren	79
A.5 Paulimatrizen	80
B Anhang: KMS-Zustände	81
B.1 Grundlegendes	81
B.2 Die fouriertransformierte KMS-Bedingung	81
B.3 Eichinvarianz und Quasifreiheit	85
B.4 Eindeutigkeit des KMS-Zustandes	87
B.5 Existenz des KMS-Zustandes	92
C Anhang: Zustände auf CAR-Algebren	96
C.1 Positivitätsproblem von Zuständen auf CAR-Algebren	96
C.2 Fortsetzung von positiven Funktionalen	99
D Anhang: Symbolverzeichnis	101
E Anhang: Literaturverzeichnis	104

1 Motivation

In vielen makroskopischen Systemen herrscht lokales thermodynamisches Gleichgewicht vor. Physikalische Systeme wie stationäre hydrodynamische Flüsse und Wärmetransportprozesse erlauben eine Beschreibung in Begriffen der statistischen Mechanik. Es ist jedoch immer noch nicht zufriedenstellend geklärt worden, wie Quantensysteme beschrieben werden sollen, die lokal im thermodynamischen Gleichgewicht sind [18].

Zustände, die ein globales thermodynamisches Gleichgewicht beschreiben, sind durch die Gibbs-Formulierung, und seit Ende der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts [11] durch die KMS-Bedingung¹ klassifiziert. Mit der KMS-Bedingung lassen sich in verschiedenen Systemen sehr effektiv Zustände charakterisieren, die globales Gleichgewicht beschreiben. Eine ähnlich effektive Charakterisierung oder gar Klassifizierung von Zuständen, die lokales Gleichgewicht beschreiben, existiert bis heute nicht.

Zu diesem Problem ist im Jahre 2002 mit einer Arbeit von Buchholz, Ojima und Roos [2] eine Methode vorgeschlagen worden, die auf dem Prinzip der lokalen Ununterscheidbarkeit von lokalem und globalem Gleichgewicht beruht. Die Idee ist die Folgende: Zuerst wählt man eine Menge \mathcal{C} von Referenzzuständen. Diese Zustände sollen fest definierte thermische Eigenschaften haben. Weiterhin wählt man für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^4$ eine Menge \mathcal{T}_x von Observablen, die die Messung thermaler Eigenschaften am Punkt x repräsentieren sollen. Sei $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$ ein Teilraum. Angenommen, zu einem Zustand ω gibt es einen Referenzzustand ω_R , sodass die Erwartungswerte der Elemente aus \mathcal{S}_x , gebildet in ω und ω_R , miteinander übereinstimmen. Könnte man nur die Observablen aus \mathcal{S}_x messen, wären ω und ω_R nicht unterscheidbar. In diesem Fall würde man ω am Punkt x die thermalen Eigenschaften des Referenzzustands ω_R zuordnen. Gibt es für jeden Punkt eines Gebietes $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ einen solchen Referenzzustand $\omega_R(x)$, so hat der Zustand ω an jedem Punkt im Gebiet \mathcal{O} eine thermale Interpretation, wenn auch an jedem Punkt eine andere. Insbesondere hätte er so an jedem Punkt von \mathcal{O} eine mittlere Temperatur, die sich dann von Punkt zu Punkt ändern würde, weil der Referenzzustand von Punkt zu Punkt ein anderer wäre. In diesem Fall könnte man davon sprechen, dass sich der Zustand überall in \mathcal{O} in lokalem Gleichgewicht befände. Indem man nicht die Übereinstimmung auf allen Observablen aus \mathcal{T}_x , sondern nur auf allen Observablen aus $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$ fordert, kann man die thermale Stabilität zweier Zustände miteinander vergleichen. Stimmt ein Zustand am Punkt x auf mehr Elementen aus \mathcal{T}_x mit einem Referenzzustand überein als ein anderer Zustand, so wäre der erste näher am thermodynamischen Gleichgewicht als der zweite.

Mit einigen wenigen, sehr natürlichen Annahmen gelang es so, ein Kriterium für Zustände zu entwickeln, die in einem gewissen Sinne lokale thermodynamische Eigenschaften haben. In Falle masseloser, freier Bosonen auf dem Minkowskiraum wurden solche Zustände gefunden und einige interessante Entdeckungen gemacht. In dieser Arbeit wird eben jene Methode auf das Modell masseloser, freier Fermionen auf dem Minkowskiraum angewandt, und es wird versucht, ähnliche Resultate zu finden.

¹Nach Kubo, Martin und Schwinger.

In Kapitel 2 wird zuerst in einem allgemeinen Rahmen die von Buchholz, Ojima und Roos entwickelte Methode erklärt. Kapitel 3 gibt einen kurzen Überblick über das Modell masseloser Fermionen. In Kapitel 4 wird die Methode auf das Modell angewandt, insbesondere werden die thermalen Observablen bestimmt. Kapitel 5 zeigt, dass die wichtigsten thermalen Größen, wie Temperatur, Entropie und Teilchendichte, in der Tat mit den vorher gefundenen thermalen Observablen gemessen werden können.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden einige interessante Eigenschaften von lokalen Gleichgewichtszuständen gezeigt. Eine wichtige Aussage dieser Arbeit wird in Kapitel 6 bewiesen: Die mikroskopischen Bewegungsgleichungen (in diesem Falle die Diracgleichung) bestimmen die raumzeitliche Entwicklung der Erwartungswerte der thermalen Observablen in den lokalen Gleichgewichtszuständen. Weiterhin wird ein Weg vorgeschlagen, wie man aus gegebenen Teilchendichten, die diese Gleichungen erfüllen, wieder Zustände konstruieren könnte.

In Kapitel 7 wird ein Beispiel eines Zustandes konstruiert, der an jedem Punkt des Vorwärtslichtkegels V^+ lokal im Gleichgewicht ist. Ein äquivalenter Zustand existiert auch im Modell masseloser Bosonen [2]. Beide beschreiben die Zukunft einer sehr heißen Explosion, eines „Hot Bang“, sowie des Teilchenflusses des Systems nach dieser Explosion.

In einer Arbeit von Buchholz [1] wurde gezeigt, dass im Falle masseloser Bosonen das Gebiet, in dem ein Zustand lokal im thermodynamischen Gleichgewicht ist, nicht beliebig ist. Vielmehr muss ein solches Gebiet, wenn es eine gewisse Größe hat, in einem simplizialen Kegel enthalten sein, also einem Schnitt von endlich vielen charakteristischen Halbebenen. In Kapitel 8 wird gezeigt, dass eine entsprechende Beschränkung auch im Falle masseloser Fermionen gilt. Weiterhin wird gezeigt, dass der Fall des Hot-Bang-Zustandes in einem gewissen Sinne generisch ist. Die Existenz von Punkten im Minkowskiraum, an denen die Temperatur und die Teilchendichte divergieren, und die in der Vergangenheit des Thermalitätsgebietes liegen, kann aus allgemeinen Prinzipien hergeleitet werden.

2 Theorie

2.1 Allgemeiner Rahmen

Im Folgenden wird der mathematische Rahmen dargestellt, in dem lokale thermodynamische Gleichgewichtssysteme beschrieben werden können. Dieses Kapitel stellt im wesentlichen eine Zusammenfassung der ersten Kapitel von [2] dar.

Wir gehen von den verschmierten Feldern aus, die im folgenden, allgemeinen Fall generisch als $\phi(f)$ und $\phi^*(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ bezeichnet werden. Um die Notation zu vereinfachen, werden jegliche Tensorindices an den $\phi(f)$ unterschlagen. Diese Felder erzeugen zusammen mit der Identität 1 durch Summen- und Produktbildung eine Algebra \mathcal{F} , auf der man eine *-Involution

$$\phi(f)^* \doteq \phi^*(\bar{f}), \quad 1^* \doteq 1, \quad (AB)^* \doteq B^* A^*$$

(\bar{f} ist das komplex Konjugierte von f) und eine automorphe Wirkung der zweifachen Überlagerung der Poincarégruppe $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ durch

$$\alpha_{(S,a)}\phi(f) \doteq \phi(f_{(S,a)}), \quad \alpha(A^*) \doteq (\alpha(A))^*, \quad \alpha(AB) \doteq \alpha(A)\alpha(B)$$

für $(S, a) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ definiert², wobei $f_{(S,a)}(x) \doteq D(S)f(\Lambda^{-1}(x - a))$ ist, Λ die zu S gehörige Lorentztransformation und D eine Matrixdarstellung von $S \in Spin_0(1, 3)$ entsprechend des Tensorcharakters des Feldes ϕ . Für reine Translationen $\alpha_{(1,a)}$ mit $a \in \mathbb{R}^4$ schreiben wir im Folgenden kurz α_a . Weiterhin definieren wir auf der Feldalgebra die Wirkung einer Eichgruppe G , die eine innere Symmetrie darstellen, und die mit der Wirkung der Poincarégruppe kommutieren soll:

$$\alpha_\gamma \alpha_{(S,a)} A = \alpha_{(S,a)} \alpha_\gamma A \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}, (S, a) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow, \gamma \in G. \quad (2.1)$$

Man definiert die Fixpunkte der Algebra \mathcal{F} unter der Wirkung der α_γ als Observablen und nennt die von ihnen gebildete Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ die Observablenalgebra. Die Elemente in \mathcal{A} interpretiert man als physikalisch messbare Größen.

Die Zustände des physikalischen Systems werden durch lineare Funktionale auf der Algebra, generisch als ω bezeichnet, beschrieben. Für diese sollen neben der komplexen Linearität die Bedingungen

$$\omega(1) = 1 \quad (\text{Normierung}) \quad (2.2)$$

$$\omega(A^* A) \geq 0 \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F} \quad (\text{Positivität}) \quad (2.3)$$

gelten, um einen physikalisch sinnvollen Zustand zu beschreiben.

²Im Falle von Bosonen würde man solche Darstellungen von $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ wählen, für die $D(S) = D(-S)$ ist, also effektiv eine Darstellung der normalen Poincarégruppe. Siehe auch Anhang, Kapitel A.2.

2.2 Referenzzustände

Die KMS-Zustände, also diejenigen Zustände, die Situationen globalen thermodynamischen Gleichgewichts beschreiben, werden für die folgende Analyse sehr wichtig sein. KMS-Zustände werden charakterisiert durch die folgende Bedingung:

Definition 2.1 Sei $\beta \in V^+$. Ein Zustand ω_β über der Feldalgebra \mathcal{F} heißt KMS-Zustand zum Temperaturvektor β , wenn es für alle $A, B \in \mathcal{F}$ eine Funktion

$$H_{AB} : \mathbb{R}^4 \times i(\bar{V}^+ \cap (\beta - \bar{V}^+)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

gibt, für die gilt:

(i) H_{AB} ist stetig, beschränkt und analytisch im Inneren ihres Definitionsbereiches

(ii)

$$\begin{aligned} H_{AB}(a + i0) &= \omega_\beta(A(\alpha_a B)) \\ H_{AB}(a + i\beta) &= \omega_\beta((\alpha_a B)A) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Den Definitionsbereich von H_{AB} , als Teilmenge von \mathbb{C}^4 , nennt man auch eine Röhre mit Basis $(\bar{V}^+ \cap (\beta - \bar{V}^+))$.

Ein KMS-Zustand ω_β beschreibt ein physikalisches System, welches sich in dem Bezugssystem, das durch den Einheitsvektor $e = \frac{\beta}{(\beta, \beta)^{1/2}}$ ausgezeichnet ist, überall im thermodynamischen Gleichgewicht zur inversen Temperatur $|\beta| \doteq (\beta, \beta)^{1/2}$ ist. Wir wollen uns in dieser Arbeit auf eichinvariante KMS-Zustände beschränken, also solche, für die $\omega_\beta = \omega_\beta \circ \alpha_\gamma$ für beliebige $\gamma \in G$ gilt. Wie im Anhang gezeigt wird, ist für die Feldalgebren, die wir in dieser Arbeit untersuchen, der eichinvariante KMS-Zustand ω_β zu einem gegebenen Vektor $\beta \in V^+$ eindeutig bestimmt, wie man es allgemein von Systemen erwartet, die weitab von Phasenübergängen sind. Da der Zustand $\omega_\beta \circ \alpha_{(S,a)}^{-1}$ die KMS-Bedingung zum Vektor $\Lambda\beta$ erfüllt (Λ ist die zu S gehörige Lorentztransformation), folgt aus der Eindeutigkeit sofort, dass

$$\omega_\beta \circ \alpha_{(S,a)}^{-1} = \omega_{\Lambda\beta} \tag{2.4}$$

ist. Insbesondere sind die KMS-Zustände translationsinvariant und isotrop in ihrem Ruhesystem. Weiterhin nimmt man an, dass für jedes $A \in \mathcal{F}$ die Funktion

$$\beta \mapsto \omega_\beta(A) \tag{2.5}$$

stetig ist³.

Es ist sinnvoll, nicht nur mit Zuständen zu vergleichen, die eine scharfe Temperatur haben, sondern auch statistische Gemische solcher Zustände zuzulassen. Für eine kompakte

³Diese Eigenschaft muss man im Modell masseloser Fermionen nicht explizit fordern. Die KMS-Zustände werden sie automatisch haben (Siehe Anhang B).

Teilmenge des Vorwärtslichtkegels $B \subset V^+$ und ein normiertes Maß $d\rho$ auf B definieren wir

$$\omega_B(A) \doteq \int_B d\rho(\beta) \omega_\beta(A) \quad A \in \mathcal{F}. \quad (2.6)$$

Dieses Integral existiert immer, denn B ist kompakt und $\beta \mapsto \omega_\beta(A)$ stetig für jedes $A \in \mathcal{F}$. Die Zustände ω_B für alle kompakten $B \subset V^+$ und alle normierten Maße auf solchen B fassen wir zu einer Menge \mathcal{C} zusammen. Dieses wird die Menge unserer Referenzzustände sein.

2.3 Punktfelder

Um einem Zustand eine thermale Interpretation an einem bestimmten Punkt $x \in \mathbb{R}^4$ zuzuweisen, müssen wir „Messungen an einem Punkt“ spezifizieren. Da man sich ein Objekt wie $\phi(f)$ als ein Operator, der im Raumzeitgebiet $\text{supp } f$ misst vorstellt, wird klar, dass die Elemente aus \mathcal{F} für Messungen an einem Punkt nicht geeignet sind: Für $f \neq 0$ ist $\text{supp } f \subset V^+$ nach Voraussetzung kompakt mit nichtleerem Inneren. Wir müssen zu den unregularisierten Feldern $\phi(x)$ und $\phi^*(x)$ übergehen, die man durch einen Grenzwert $f \rightarrow \delta_x$ erhält. Dieser Grenzwert ist kein Operator mehr, sondern kann (in einer Darstellung von \mathcal{F} auf einen Hilbertraum) nur noch als quadratische Form auf einen dichten Unterraum des Hilbertraumes definiert werden, wie in [2] ausgeführt wird. Der physikalische Hintergrund ist der, dass Messungen an einem Punkt theoretisch unendlich hohe Resultate liefern könnten, wo Messungen gemittelt über einen endlichen Raumzeitbereich immer noch endliche Messwerte liefern würden. Man wird somit nicht erwarten können, dass für jeden Zustand ω der Erwartungswert $\omega(\phi(x))$ existiert, man also alle Zustände auf die Algebra der Punktfelder wird fortsetzen können. Für die KMS-Zustände (und damit für alle Zustände aus \mathcal{C}) ist dieses jedoch aufgrund ihrer Translationsinvarianz ohne weiteres möglich, da Messungen gemittelt über einen Raumzeitbereich auch als Messungen an ein und demselben Punkt interpretiert werden können. Genauer gesagt bedeutet dies, dass $\omega_B(\phi(f))$ und $\omega_B(\phi^*(f))$ nur vom Integral $\int f$ abhängen und damit einfach

$$\omega_B(\phi(x)) \doteq \omega_B(\phi(f)) \quad (2.7)$$

mit $\int f = 1$ definiert werden kann (ebenso für ϕ^*). Wir sehen sofort, dass dieses Ergebnis nicht von x abhängt.

2.4 Thermale Observablen am Punkt x

Nach einer in [2] vorgestellten Methode können die Felder $\phi(x)$ und $\phi^*(x)$ zu quadratischen Formen kombiniert werden, die man in Vektorräume \mathcal{Q}_x zusammenfasst. Der Raum \mathcal{Q}_x enthält in einem gewissen Sinne die Operatoren, die Messungen an einem Punkt $x \in \mathbb{R}^4$ zugeordnet sind. Es sind aber nicht alle Elemente in \mathcal{Q}_x für unsere Analyse nützlich. Der Raum \mathcal{Q}_x enthält zum Beispiel $\partial_x \phi(x)$ und höhere Ableitungen von Polynomen in

den Feldern, was wegen der Translationsinvarianz der ω_β in allen Referenzzuständen verschwindet. Würden wir von einem Zustand, der in einem Gebiet \mathcal{O} lokal im Gleichgewicht ist, fordern, dass $\omega(\partial_x \phi(x))$ ebenfalls für alle $x \in \mathcal{O}$ verschwindet, so würde dies bedeuten, dass $\omega(\phi(x))$ konstant auf \mathcal{O} wäre. Die Erwartungswerte in einem solchen Zustand würden also nicht vom Ort abhängen, und damit würden wir z.B. Zustände mit lokal variierender Temperatur ausschließen. Übereinstimmung auch auf den $\partial_x \phi(x)$ wäre also eine zu starke Forderung an lokale Gleichgewichtszustände. Weiterhin enthält \mathcal{Q}_x auch nicht-observable Felder, auf denen die Referenzzustände, die nach Konstruktion eichinvariant sind, ausgewertet ebenfalls ein triviales Ergebnis liefern. Die Referenzzustände sind auf diesen Elementen aus \mathcal{Q}_x identisch null und liefern damit keine Informationen. In [2] wird eine Methode dargestellt, wie aus \mathcal{Q}_x der Raum \mathcal{T}_x extrahiert werden kann, von dem man erwartet, dass er Messungen thermaler Eigenschaften eines Zustandes am Punkt x symbolisiert. Es wird sogar ein Argument geliefert, dass die Elemente aus \mathcal{T}_x die Referenzzustände in \mathcal{C} separieren.

2.5 Makroobservablen

In [2] wurde dargestellt, dass die Punktfelder $\phi(x)$ und $\phi^*(x)$ dieselben Informationen über thermische Eigenschaften der Referenzzustände enthalten, wie bestimmte makroskopische (zentrale) Observablen.

Um die Notation zu erleichtern, werden wir ein Element auf \mathcal{T}_x im Folgenden generisch mit $\phi(x)$ bezeichnen, obwohl es sich dabei nicht unbedingt um das in Kapitel 2.1 definierte Feld handeln muss.

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ eine Funktion mit $\int f = 1$ und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge raumartiger Elemente aus \mathbb{R}^4 , die hinreichend schnell gegen unendlich laufen. Definiert man nun $f_n(x) \doteq n^{-4} f(n^{-1}x - x_n)$, so kann gezeigt werden [1], dass der Limes $\Phi \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(f_n)$ in allen Referenzzuständen existiert, also dass

$$\omega_B(\Phi) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_B(\phi(f_n)) \quad (2.8)$$

für alle $\omega_B \in \mathcal{C}$ existiert und

$$\omega_B(A^* \Phi B) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_B(A^* \phi(f_n) B) = \int_B d\rho(\beta) \omega_\beta(A^* B) \omega_\beta(\phi(x)) \quad (2.9)$$

gilt. Dieses bedeutet, dass in jeder GNS-Darstellung⁴ von \mathcal{F} , die durch einen der Zustände aus \mathcal{C} induziert wird, durch Φ eine zentrale, translationsinvariante, auf einem dichten Teilraum definierte quadratische Form gegeben ist. Deren zentrale Zerlegung⁵ ist durch die (nach (2.5) stetige) Funktion

$$\beta \mapsto \Phi(\beta) \doteq \omega_\beta(\Phi) = \omega_\beta(\phi(x)) \quad (2.10)$$

⁴Siehe [5].

⁵Siehe [3].

gegeben (Wir erinnern noch einmal daran, dass $\omega_\beta(\phi(x))$ nicht von x abhängt.). Diese Funktion wird die zu Φ gehörige thermale Funktion, Φ selbst wird Makroobservable genannt. Wenn wir uns auf die Referenzzustände beschränken, enthält die thermale Funktion dieselben Informationen wie die Makroobservable selbst. Umgekehrt können wir durch eine Funktion $\beta \mapsto \Phi(\beta)$ eine Makroobservable definieren, die aufgrund von Gleichung (2.10) in allen Referenzzuständen messbar ist.

2.6 Lokale thermale Gleichgewichtszustände

Wenden wir uns der Beschreibung und Charakterisierung von lokalen thermodynamischen Gleichgewichtszuständen zu. Wie in der Einleitung erklärt, testen wir Zustände, von denen wir lokale thermodynamische Eigenschaften erwarten, nicht auf allen Observablen aus \mathcal{T}_x , sondern lassen echte Teilräume in unserer Analyse zu.

Wählen wir also einen Unterraum $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$. Man sagt, ein Zustand ω sei \mathcal{S}_x -thermal, wenn es einen Referenzzustand $\omega_B \in \mathcal{C}$ gibt, sodass

$$\omega(\phi(x)) = \omega_B(\phi(x)), \quad \text{für alle } \phi(x) \in \mathcal{S}_x \quad (2.11)$$

ist. Der Zustand ω kann also, wenn man Messungen entsprechend der Elemente von \mathcal{S}_x durchführt, nicht vom Zustand ω_B unterschieden werden. Aufgrund dessen kann man ω am Punkte x diejenigen thermalen Eigenschaften des Zustandes ω_B zuweisen, die den zu den Punktfeldern $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$ gehörenden Makroobservablen Φ entsprechen. Interpretiert man eine Makroobservable Φ z.B. als Energiedichte, so würde man dem Ensemble, das durch den Zustand ω beschrieben wird, am Punkt x die mittlere Energiedichte $\omega_B(\Phi)$ zuweisen. Wir schreiben kurz

$$\omega(\Phi)(x) \doteq \omega(\phi(x)). \quad (2.12)$$

Diese Definition lässt sich ohne Probleme auf Gebiete erweitern: Fixieren wir \mathcal{S}_{x_0} für ein $x_0 \in \mathbb{R}^4$, dann sind durch $\mathcal{S}_x \doteq \alpha_{(x-x_0)}\mathcal{S}_{x_0}$ die entsprechenden Räume an allen anderen Punkten $x \in \mathbb{R}^4$ festgelegt. Es sei darauf hingewiesen, dass beim Übergang von $\phi(x)$ zu Φ jegliche Information über den Ort verlorengeht (Gleichung (2.10)), also $\phi(x_0)$ und $\alpha_{(x-x_0)}\phi(x_0) = \phi(x)$ dasselbe Φ induzieren.

Definition 2.2 Sei ω ein Zustand über \mathcal{F} und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ offen. Man nennt ω $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermal, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{O}$ einen Referenzzustand ω_{B_x} gibt, sodass gilt:

- (i) $\omega(\phi(x)) = \omega_{B_x}(\phi(x))$ für alle $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$.
- (ii) Die Funktion $x \mapsto \omega(\phi(x))$ ist schwach integrabel.
- (iii) Zu jeder kompakten Teilmenge $U \subset \mathcal{O}$ gibt es eine kompakte Teilmenge $B \in V^+$, sodass für die kompakten Mengen B_x der Referenzzustände ω_{B_x} gilt, dass $B_x \subset B$ für alle $x \in U$.

Bedingung (i) ist die Verallgemeinerung von (2.11) auf Gebiete. Dem Ensemble, das durch den Zustand ω beschrieben wird, kann zu jeder Makroobservablen Φ , die durch die Elemente $\phi(x)$, $x \in \mathcal{S}_x$ definiert wird, an jedem Punkt $x \in \mathcal{O}$ einen Mittelwert von Φ zugeschrieben werden. Die Funktion

$$\mathcal{O} \ni x \mapsto \omega(\Phi)(x) \doteq \omega(\phi(x)), \quad \phi(x) \in \mathcal{S}_x \quad (2.13)$$

beschreibt das raumzeitliche Verhalten dieses Mittelwertes. Die Bedingungen (ii) und (iii) in der Definition (2.2) garantieren, wie in [1] gezeigt wird, dass die Funktion (2.13) differenzierbar im Sinne von Distributionen ist und dass darüberhinaus für jede Funktion f mit kompaktem Träger in \mathcal{O} die wichtige Abschätzung

$$\left| \int dx f(x) \omega(\Phi)(x) \right| \leq \|f\|_1 \|\Phi\|_B. \quad (2.14)$$

für ein kompaktes $B \subset V^+$ gilt, wobei $\|f\|_1$ die L^1 -Norm von f , und

$$\|\Phi\|_B \doteq \sup_{\beta \in B} |\Phi(\beta)| \quad (2.15)$$

ist. Die Funktion $\beta \mapsto \Phi(\beta)$ ist hierbei die thermale Funktion (nach Gleichung (2.10)) der Makroobservablen Φ . Die Menge der $\|\cdot\|_B$ für alle kompakten $B \subset V^+$ ist eine Sammlung an Halbnormen. Diese Halbnormen werden wir im Verlaufe der Arbeit noch häufig benutzen.

3 Das Modell

Im letzten Kapitel wurde kurz die Methode aus [2] dargestellt, mit der sich lokale thermale Gleichgewichtszustände charakterisieren lassen. Im Folgenden wird die Feldalgebra aus Kapitel 2.1, die in dieser Arbeit benutzt werden wird, genauer behandelt und ihre wichtigsten Eigenschaften aufgelistet.

3.1 Masselose Fermionen

Betrachten wir die „klassische“ Diracgleichung $(i\cancel{\partial} + m)\psi(x) = 0$. In dieser Arbeit behandeln wir den Fall $m = 0$, und für diesen Fall kommutiert der Hamiltonoperator $H = \sum_{i=1}^3 i\gamma^0\gamma^i \partial_i + m\gamma^0$ der Theorie mit dem Helizitätsoperator $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$:

$$\left[\sum_{i=1}^3 i\gamma^0\gamma^i \partial_i, \gamma^5 \right] = 0$$

was zur Folge hat, dass die Helizität eines Teilchens eine Erhaltungsgröße ist.

Bei masselosen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen sind Teilchen zu Helizität $+1$ und Helizität -1 in der Tat unterschiedlich. Man bezeichnet sie als rechtsdrehende und linksdrehende Teilchen. In der Natur findet man die Neutrinos, die Spin $\frac{1}{2}$ haben, die nur schwach wechselwirken und von denen man lange geglaubt hat, dass sie in der Tat masselos seien. Vor kurzem fand man jedoch indirekte Hinweise auf eine sehr kleine, jedoch von Null verschieden Ruhemasse der Neutrinos [15].

Diracoperator $i\cancel{\partial}$ und Helizitätsoperator γ^5 erhalten in der Weyldarstellung der Gamma-Matrizen (siehe [4]) die einfache Form:

$$i\cancel{\partial} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_0 + \partial_3 & +\partial_1 - i\partial_2 \\ 0 & 0 & \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \\ \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 + i\partial_2 & 0 & 0 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Die Form (3.2) zeigt, dass die oberen beiden Komponenten des Diracspinors zu Helizität $+1$ (rechtsdrehende Teilchen) und die unteren beiden zu Helizität -1 (linksdrehende Teilchen) gehören.

Definiert man für jeden Vierervektor $a \in \mathbb{R}^4$ die beiden folgenden Matrizen:

$$a_M \doteq \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & a^0 - a^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a^M \doteq \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & -a^1 + ia^2 \\ -a^1 - ia^2 & a^0 + a^3 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

dann hat der Diracoperator die Form

$$i\cancel{D} = i \begin{pmatrix} 0_2 & \partial^M \\ \partial_M & 0_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Schreiben wir die Diracspinoren $\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$, dann erhält man für die Diracgleichung:⁶

$$\partial^M \psi_L(x) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_M \psi_R(x) = 0$$

Die Form (3.1) garantiert uns also, dass die rechts- bzw. linksdrehenden Teilchenanteile entkoppeln. Diese Entkopplung wird von Koordinatentransformationen respektiert, da in der Weyldarstellung die Darsteller S der Überlagerung von \mathcal{L}_+^\uparrow Diagonalblockform haben:

$$S = \begin{pmatrix} (A^\dagger)^{-1} & 0_2 \\ 0_2 & A \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Die Matrix A in (3.5) hat Determinante 1, und man kann zeigen [17] dass:

$$A a_M A^\dagger = (\Lambda a)_M$$

mit einer eindeutig bestimmten eigentlichen, orthochronen Lorentztransformation Λ gilt (Siehe Anhang A.4).

Im masselosen Fall zerfällt die Diracgleichung in zwei entkoppelte Gleichungen⁷. Diese sind jeweils Differentialgleichungen für einen zweikomponentigen Spinor, der den rechts- bzw. den linksdrehenden Anteil des Diracspinors enthält. Betrachtet man die Feldalgebra der Diracspinoren, so stellt man fest, dass sie von zwei abgeschlossenen C^* -Unteralgebren erzeugt wird, die miteinander antikommutieren, und die jeweils den rechts- bzw. den linksdrehenden Anteil des Diracspinors darstellen. Die beiden Algebren sind $*$ -isomorph zueinander, und so genügt es, eine der beiden zu betrachten. Da die bekanntesten „masselosen“ Fermionen in der Natur linksdrehend sind, werden wir uns auf die Algebra der linksdrehenden Teilchen beschränken, also auf die beiden „unteren Komponenten“ der Diracgleichung.

3.2 Die CAR-Algebra zur Helizität – 1

Wie in [3] gezeigt wird, kann man zu jedem Hilbertraum \mathfrak{h} eine C^* -Algebra konstruieren, die von den Elementen 1 und $a(f)$ für $f \in \mathfrak{h}$ erzeugt wird, und die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$f \longmapsto a(f) \quad \text{ist linear,} \quad (3.6)$$

$$\{a(f)^*, a(g)\} = \langle f, g \rangle. \quad (3.7)$$

⁶Hier liegt in der Tat kein Fehler vor. Man bedenke, dass in (3.1) im Gegensatz zu (3.4) die Komponenten von ∂ unten stehen.

⁷In der Literatur werden diese Gleichungen „Weyl-Gleichungen“ genannt.

Diese Algebra nennt man CAR-Algebra⁸ und bezeichnet sie mit $\text{CAR}(\mathfrak{h})$. Sie ist bis auf *-Isomorphie eindeutig. Die CAR-Algebra ist genau dann separabel, wenn \mathfrak{h} separabel ist. Sei \mathfrak{h} separabel und e_1, e_2, \dots eine Orthonormalbasis für \mathfrak{h} . Dann ist die Menge aller Produkte

$$e_{i_1} \cdots e_{i_k}, \quad 1 \leq e_{i_1} < \cdots < e_{i_k} \quad (3.8)$$

zusammen mit dem „leeren“ Produkt 1 eine Basis in $\text{CAR}(\mathfrak{h})$. Die C^* -Norm erfüllt die Relation

$$\|e_{i_1} \cdots e_{i_k}\| = 1, \quad 1 \leq e_{i_1} < \cdots < e_{i_k}. \quad (3.9)$$

Der in dieser Arbeit benutzte Hilbertraum \mathfrak{h} ist die Vervollständigung von

$$\frac{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)}{-i(\partial^M)^T \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)} \oplus \frac{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)}{i\partial^M \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)} \quad (3.10)$$

mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \left([f_1] \oplus [g_1], [f_2] \oplus [g_2] \right) &\doteq 2\pi \int dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \tilde{f}_1(p)^T p_M \overline{\tilde{f}_2(p)} \\ &+ 2\pi \int dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \tilde{g}_1(p)^T p_M \overline{\tilde{g}_2(p)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wir werden anstatt der a die Symbole

$$a([f] \oplus [g]) = \psi(f) + \bar{\psi}(g)$$

benutzen. Die Abbildungen ψ und $\bar{\psi}$ sind dabei durch

$$\psi : f \longmapsto \psi(f) = a([f] \oplus 0) \quad (3.12)$$

$$\bar{\psi} : f \longmapsto \bar{\psi}(f) = a(0 \oplus [f]) \quad (3.13)$$

auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ definiert, und werden so zu \mathcal{F} -wertigen Distributionen. Weiterhin werden wir benutzen, dass die Menge der $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ dicht im Einteilchenraum \mathfrak{h} bezüglich der C^* -Norm liegt.

Die Elemente der Feldalgebra \mathcal{F} erfüllen folgende Relationen:

- Antikommutator:

$$\left\{ \psi(f), \bar{\psi}(g) \right\} = 2\pi \int dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \tilde{f}(p)^T p_M \tilde{g}(-p) \quad (3.14)$$

$$\left\{ \psi(f), \psi(g) \right\} = \left\{ \bar{\psi}(f), \bar{\psi}(g) \right\} = 0$$

⁸CAR heißt Canonical Anticommutation Relations und meint Gleichung (3.7).

- Poincarégruppe:

$$\begin{aligned}\alpha_{(A,a)}\psi(f) &= \psi((A^T)^{-1}f_{(\Lambda,a)}) \\ \alpha_{(A,a)}\bar{\psi}(f) &= \bar{\psi}((A^\dagger)^{-1}f_{(\Lambda,a)})\end{aligned}\tag{3.15}$$

mit $f_{(\Lambda,a)}(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$

- Eichgruppe: $G = U(1)$

$$\alpha_\varphi\psi(f) \doteq e^{i\varphi}\psi(f) \qquad \alpha_\varphi\bar{\psi}(f) \doteq e^{-i\varphi}\bar{\psi}(f)\tag{3.16}$$

- Adjungieren:

$$\psi(f)^* = \bar{\psi}(\bar{f}) \qquad \bar{\psi}(f)^* = \psi(\bar{f})\tag{3.17}$$

Hier bedeutet \bar{f} die zu f komplex konjugierte Funktion.

- Diracgleichung:

$$\psi(-i(\partial^M)^T f) = \bar{\psi}(i\partial^M f) = 0\tag{3.18}$$

3.3 Indexschreibweise

Definieren wir nun für $r, \dot{r} \in \{1, 2\}$ die \mathcal{F} -wertigen Distributionen ψ_r und $\bar{\psi}_{\dot{r}}$ über $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ per

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}) \ni f \longmapsto \psi_r(f) \doteq \psi \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow r\text{-te Komponente,}$$

dann kann man (nun wieder für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$) die Elemente $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(f)$ als

$$\begin{aligned}\psi(f) &= \psi_r(f^r) = \psi_1(f^1) + \psi_2(f^2) \\ \bar{\psi}(f) &= \bar{\psi}_{\dot{r}}(f^{\dot{r}}) = \bar{\psi}_1(f^1) + \bar{\psi}_2(f^2)\end{aligned}$$

wobei f^r die r -te Komponente von f sein soll. Die Summation über die r oder \dot{r} , wird, ähnlich wie bei der Einsteinschen Summenkonvention, implizit angenommen, ohne sie hinzuschreiben. Es ist üblich, für die Felder ψ kleine Buchstaben als Komponenten zu benutzen, während man für die Antiteilchen $\bar{\psi}$ kleine Buchstaben mit einem Punkt darauf verwendet werden, was das unterschiedliche Transformationsverhalten der Felder symbolisieren soll.

Es gibt zwei äquivalente Möglichkeiten, sich die Feldalgebra \mathcal{F} vorzustellen. Entweder man nimmt an, dass \mathcal{F} von den $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ aufgebaut ist, oder, dass sie von

$$\psi_r(f), \quad \bar{\psi}_{\dot{s}}(f), \quad r = 1, 2, \dot{s} = 1, 2, f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}).$$

erzeugt wird. Es ist gleichwertig, von $\psi(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ zu sprechen, oder von $\psi_1(f)$ und $\psi_2(g)$ mit $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ auszugehen.

Um immer über Indices gleicher Art summieren zu können, wählt man die Komponenten der Matrizen a_M und a^M für $a \in \mathbb{R}^4$ wie folgt:

$$a_M = \{(a_M)_{r\dot{s}}\}_{r=1,2, \dot{s}=1,2}, \quad a^M = \{(a^M)^{\dot{r}s}\}_{\dot{r}=1,2, s=1,2}.$$

Mehr über diese Indexschreibweise im Anhang A.4.

Wegen $\partial_M \partial^M = \partial^M \partial_M = \square 1_2$ gilt mit Gleichung (3.18)

$$\psi_r(\square f) = \bar{\psi}_{\dot{r}}(\square f) = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}), r, \dot{r} = 1, 2. \quad (3.19)$$

Die Komponenten der Spinoren erfüllen also die Klein-Gordon Gleichung.

3.4 Lokale und Observablenalgebren

In [6] wird genauer auf die Struktur der Algebra \mathcal{F} eingegangen. In der Tat bildet sie ein sogenanntes lokales Netz, das heißt, dass

$$\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4} \mathcal{F}(\mathcal{O})} \quad (3.20)$$

ist, wobei \mathcal{O} ein Gebiet mit kompaktem Abschluss, und die Vervollständigung in (3.20) durch die C^* -Norm gegeben sein soll. Die $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ sind die lokalen Algebren, die von den $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(f)$ mit $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$ erzeugt werden (ohne Abschluss). Die C^* -Algebra \mathcal{F} wird die quasilokale Algebra genannt.

Weiterhin kann \mathcal{F} (und auch jedes $\mathcal{F}(\mathcal{O})$) in die Eigenräume des Ladungsoperators zerlegt werden. Sei zu $k \in \mathbb{Z}$ der Raum \mathcal{F}_k derjenige Vektorraum, der von den Elementen $A_1 \cdots A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_i = \psi(f_i)$ oder $\bar{\psi}(f_i)$ aufgespannt wird, bei denen die Anzahl der ψ minus der Anzahl der $\bar{\psi}$ genau k ergibt.⁹ Es gilt nun für $A \in \mathcal{F}_k$ und $B \in \mathcal{F}_l$, dass $AB \in \mathcal{F}_{l+k}$. Weiterhin gilt

$$\alpha_\varphi A = e^{ik\varphi} A. \quad (3.21)$$

Aus diesen Gleichungen folgert man sofort, dass $\mathcal{A} \doteq \mathcal{F}_0$ nicht nur invariant unter Eichtransformationen ist, sondern auch eine Unteralgebra von \mathcal{F} bildet, die sogenannte Observablenalgebra.

⁹Man überlegt sich leicht, dass dieses k in der CAR-Algebra wohldefiniert ist.

3.5 Die CAR-Algebra des Vorwärtslichtkegels

Sei \mathfrak{h}_{V^+} der Hilbertraum, der aus der Vervollständigung des Raumes

$$\frac{\mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)}{-i(\partial^M)^T \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)} \oplus \frac{\mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)}{i\partial^M \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)} \quad (3.22)$$

mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \left([f_1] \oplus [g_1], [f_2] \oplus [g_2] \right) &\doteq 2\pi \int dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \tilde{f}_1(p)^T p_M \overline{\tilde{f}_2(p)} \\ &+ 2\pi \int dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \tilde{g}_1(p)^T p_M \overline{\tilde{g}_2(p)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

entsteht. Es ist $\mathfrak{h}_{V^+} \subset \mathfrak{h}$, also ist die C^* -Algebra $\mathcal{F}_{V^+} \doteq \text{CAR}(\mathfrak{h}_{V^+})$ kanonisch in \mathcal{F} als Unter- C^* -Algebra eingebettet. Wir nennen \mathcal{F}_{V^+} die quasilokale Algebra des Vorwärtslichtkegels. Für \mathcal{F}_{V^+} gilt

$$\mathcal{F}_{V^+} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \subset V^+} \mathcal{F}(\mathcal{O})}, \quad (3.24)$$

wobei \mathcal{O} wieder offene Gebiete mit kompaktem Abschluss sind.

Wieder kann man, analog zu \mathcal{F} , für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Ladungssektoren $\mathcal{F}_{V^+,k}$ definieren, und wir nennen $\mathcal{F}_{V^+,0}$ die Observablenalgebra des Vorwärtslichtkegels.

4 Thermale Größen

4.1 Referenzzustände auf \mathcal{F}

Wie im Anhang B gezeigt wird, kann man aus der KMS-Bedingung (Definition B.1) die KMS-Zustände auf \mathcal{F} ausrechnen, und es zeigt sich, dass es zu jedem $\beta \in V^+$ genau einen eichinvarianten KMS-Zustand ω_β gibt. Er ist quasifrei und lautet (für $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$):

$$\omega_\beta(\bar{\psi}(f) \psi(g)) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{g}^T(p) p_M \tilde{f}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} \quad (4.1)$$

$$\omega_\beta(\psi(f) \bar{\psi}(g)) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{(\beta, p)}} \quad (4.2)$$

$$\omega_\beta(\psi(f)) = \omega_\beta(\bar{\psi}(f)) = \omega_\beta(\psi(f) \psi(g)) = \omega_\beta(\bar{\psi}(f) \bar{\psi}(g)) = 0. \quad (4.3)$$

Zeile (4.3) folgt direkt aus der Eichinvarianz von ω_β und Gleichung (3.16). Quasifrei bedeutet in diesem Zusammenhang, dass der Wert des Zustandes auf allen Produkten von $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(g)$, die aus n Faktoren bestehen, eine Linearkombination von Werten auf Produkten mit $n - 2$ Faktoren ist. Genauer:

$$\omega_\beta(A_1 \cdots A_n) = \sum_{i=2}^n (-1)^n \omega_\beta(A_1 A_i) \omega_\beta(A_3 \cdots \widehat{A}_i \cdots A_n), \quad (4.4)$$

wenn $A_i = \psi(f_i)$ oder $\bar{\psi}(f_i)$, wobei \widehat{A}_i dafür steht, dass der Faktor A_i im Produkt nicht vorkommen soll. Damit folgt mit Gleichung (4.3), dass $\omega_\beta(A_1 \cdots A_n) = 0$ ist, wenn nicht in $A_1 \cdots A_n$ gleichviele ψ wie $\bar{\psi}$ vorkommen, insbesondere, wenn n ungerade ist. Gleichzeitig erlaubt uns sukzessives Anwenden von (4.4), unsere Analyse von ω_β auf Ausdrücke der Form (4.1) zu beschränken¹⁰, da man ω_β auf allen anderen Elementen von \mathcal{F} durch Linearkombinationen von diesen ausdrücken kann. In Anhang B wird gezeigt, dass

$$\omega_\beta((\psi(f_1) \cdots \psi(f_n))^* (\psi(g_1) \cdots \psi(g_n))) = \det \left\{ \omega_\beta(\psi(f_i)^* \psi(g_j)) \right\}_{i,j=1}^n \quad (4.5)$$

gilt.

Ein Grenzfall der KMS-Zustände ist der sogenannte Vakuumzustand ω_∞ . Dieser ist ebenfalls eichinvariant und quasifrei, und damit durch folgende Angaben vollständig definiert:

$$\omega_\infty(\bar{\psi}(f) \psi(g)) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \theta(p_0) \tilde{g}^T(p) p_M \tilde{f}(-p). \quad (4.6)$$

Man erhält die Formel (4.6), wenn in Gleichung (4.1) formal β gegen zeitartiges unendlich läuft. Da $|\beta| = T^{-1}$ ist, entspricht ω_∞ damit dem Temperaturnullpunkt, was den Namen

¹⁰Gleichung (4.2) folgt aus (4.1) und den Antivertauschungsrelationen in Gleichung (3.14) mit $\omega_\beta(1) = 1$.

„Vakuum“ rechtfertigt.

Die KMS-Zustände und alle statistischen Mischungen ω_B , die für normierte Maße $d\rho(\beta)$ auf Kompakte $B \subset V^+$ durch

$$\omega_B \doteq \int_B d\rho(\beta) \omega_\beta \quad (4.7)$$

gegeben sind, fassen wir zu einer Menge \mathcal{C} zusammen. Diese werden im Folgenden unsere Referenzzustände sein.

4.2 Thermostatik in \mathcal{C}

Das folgende Kapitel fasst den Zusammenhang thermodynamischer Größen zueinander in globalen Gleichgewichtssystemen zusammen. Eine detaillierte Abhandlung findet sich in [7].

Im Folgenden wird angenommen, dass die Energie in den Zuständen globalen thermalen Gleichgewichts messbar ist, dass also

$$\Theta^{\mu\nu}(\beta) = \omega_\beta(:\theta^{\mu\nu}:(x)) \doteq \lim_{f \rightarrow \delta_x} \omega_\beta(\theta^{\mu\nu}(f) - \omega_\infty(\theta^{\mu\nu}(f)))$$

existiert.¹¹ Im Fall des freien, masselosen Diracfeldes ist der Energie-Impulstensor durch

$$:\theta^{\mu\nu}:(x) = \frac{i}{2} \left[: \bar{\psi}_{\dot{r}}(x) \sigma^{\nu, \dot{r}s} \partial^\mu \psi_s(x) : - : (\partial^\mu \bar{\psi}_{\dot{r}})(x) \sigma^{\nu, \dot{r}s} \psi_s(x) : \right] \quad (4.8)$$

gegeben. Wenn wir $\Theta^{\mu\nu}(\beta)$ kennen, können wir mit Hilfe der statistischen Mechanik die Temperaturabhängigkeit anderer thermodynamischer Größen berechnen, wovon uns hier z.B. die Entropiestromdichte interessiert.

Aus dem Transformationsverhalten von $:\theta^{\mu\nu}:(x)$ unter der Wirkung der Poincarégruppe

$$\alpha_{(S,a)} : \theta^{\mu\nu} : (x) = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau : \theta^{\sigma\tau} : (\Lambda x + a)$$

und Gleichung (2.4) sieht man, dass die Funktion $\Theta^{\mu\nu}$ ein Lorentztensor zweiter Stufe ist, und damit von der Form

$$\Theta^{\mu\nu}(\beta) = A(\beta, \beta) \beta^\mu \beta^\nu + B(\beta, \beta) \eta^{\mu\nu} \quad (4.9)$$

sein muss. Weiterhin folgt aus der Definition der KMS-Zustände, dass für $\lambda > 0$ der Zustand $\omega_\beta \circ \delta_\lambda$ die KMS-Bedingung zum Temperaturvektor $\lambda^{-1}\beta$ erfüllt, und aus der Eindeutigkeit der KMS-Zustände folgt damit

$$\omega_\beta \circ \delta_\lambda = \omega_{\lambda^{-1}\beta}.$$

¹¹Wir werden später sehen, dass $:\theta^{\mu\nu}:(x)$ nicht nur in den KMS-Zuständen messbar, sondern sogar im Raum der thermalen Observablen am Punkt x enthalten ist.

Das freie, masselose Diracfeld ist dilatationsinvariant und der Energieimpulstensor (4.8) skaliert mit

$$\delta_\lambda : \theta^{\mu\nu} : (x) = \lambda^4 : \theta^{\mu\nu} : (\lambda x).$$

damit erhalten wir das Skalierungsverhalten der Funktionen A und B in Gleichung (4.9), und zwar:

$$\Theta^{\mu\nu}(\beta) = \frac{A}{(\beta, \beta)^3} \beta^\mu \beta^\nu + \frac{B}{(\beta, \beta)^2} \eta^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

für Konstanten A und B . Eine allgemeine Diskussion der Thermodynamik relativistischer Systeme, die in [7] ausgeführt wird, erlaubt die Berechnung der Entropiestromdichte S^μ aus dieser Form von $\Theta^{\mu\nu}$. Es ergibt sich

$$S^\mu(\beta) = \frac{A}{(\beta, \beta)^2} \beta^\mu. \quad (4.11)$$

In der Entropiestromdichte ist der Wert der Entropie $S(\beta)$ und das Ruhesystem e^μ zu einer Größe kombiniert. Ähnlich wie bei der Temperatur $\beta = |\beta|e^\mu$ ist $S^\mu = S(\beta)e^\mu$.

4.3 Die thermalen Observablen

Ausgehend von der allgemeinen Analyse in Kapitel 2.6 wird in diesem Kapitel der Raum \mathcal{S}_x definiert, der für den Rest dieser Arbeit verwendet wird. Analog zu der Situation in [1] wählen wir den Raum der thermalen Observablen, der von der 1 und von den balancierten Ableitungen der Wickquadrate der Felder aufgespannt wird. Wir benutzen im Folgenden die Multiindexschreibweise:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m), \quad \text{mit } \mu_i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad \text{deg } \boldsymbol{\mu} \doteq m \\ a^\boldsymbol{\mu} &\doteq a^{\mu_1} a^{\mu_2} \cdots a^{\mu_m} \\ c_\boldsymbol{\mu} a^\boldsymbol{\mu} &\doteq \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \cdots \sum_{\mu_m} c_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m} a^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m} \end{aligned}$$

Die balancierten Wickquadrate der Felder kann man nach [1] schreiben als

$$\begin{aligned} \theta_{\bar{r}s}^\boldsymbol{\mu}(x) &\doteq \bar{\partial}^\boldsymbol{\mu} : \bar{\psi}_{\bar{r}}(x) \psi_s(x) : \\ &\doteq \lim_{\substack{\zeta \rightarrow 0 \\ \zeta^2 < 0}} \partial_\zeta^\boldsymbol{\mu} \left(\bar{\psi}_{\bar{r}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta) - \omega_\infty \left(\bar{\psi}_{\bar{r}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Man könnte theoretisch auch Kombinationen wie $\bar{\partial}^\boldsymbol{\mu} : \bar{\psi}_{\bar{r}}(x) \bar{\psi}_s(x) :$ oder $\bar{\partial}^\boldsymbol{\mu} : \psi_r(x) \psi_s(x) :$ zulassen, aber diese sind keine Observablen, und mit der Eichtransformation aus Gleichung (3.16):

$$\alpha_{\frac{\pi}{2}} \bar{\partial}^\boldsymbol{\mu} : \psi_r(x) \psi_s(x) : = -\bar{\partial}^\boldsymbol{\mu} : \psi_r(x) \psi_s(x) : \quad (4.13)$$

erkennen wir sofort, dass wegen $\omega_\beta \circ \alpha_\phi = \omega_\beta$ die zu $\bar{\partial}^\boldsymbol{\mu} : \psi_r(x) \psi_s(x)$ gehörende thermale Funktion identisch Null ist. Weiterhin werden alle eichinvarianten Zustände auf diesen Kombinationen verschwinden. Sie sind für die Analyse dieser Arbeit also unwichtig.

4.4 Thermale Funktionen

Wie wir in Kapitel 2.5 erwähnt haben, definieren die lokalen thermalen Observablen $\theta_{\dot{r}s}^\mu(x)$ durch $\Theta_{\dot{r}s}^\mu(\beta) \doteq \omega_\beta(\theta_{\dot{r}s}^\mu(x))$ thermale Funktionen. Diese lassen sich explizit berechnen, wie wir im Folgenden zeigen werden.

Seien $x, \zeta \in \mathbb{R}^4$ und $\zeta^2 < 0$. Weiterhin seien f_n und g_n zwei Folgen in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$, die in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ jeweils gegen die Distributionen $\delta_{x+\zeta}$ und $\delta_{x-\zeta}$ konvergieren. Mit Hilfe der Formel für die KMS-Zustände aus (4.1) errechnen wir:

$$\begin{aligned}
& \omega_\beta(\bar{\psi}_{\dot{r}}(f_n)\psi_s(g_n)) - \omega_\infty(\bar{\psi}_s(f_n)\psi_{\dot{r}}(g_n)) \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \tilde{f}_n(-p) \tilde{g}_n(p) p_{s\dot{r}} \left[\frac{\varepsilon(p_0)}{1 + e^{-(\beta, p)}} - \theta(p_0) \right] \\
&= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^8} dy dz f_n(y) g_n(z) p'_{s\dot{r}} \left[\frac{e^{-i(p', y-z)}}{1 + e^{-(\beta, p')}} + \frac{e^{i(p', y-z)}}{1 + e^{(\beta, p')}} - e^{-i(p', y-z)} \right] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^8} dy dz f_n(y) g_n(z) \frac{\sin(p', y-z)}{1 + e^{(\beta, p')}} p'_{s\dot{r}}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $p' = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$. Wir dürfen nun die Integrationsreihenfolgen vertauschen, da der Integrand (von der integrierbaren Singularität am Nullpunkt angesehen) eine Schwartzfunktion ist, wie man leicht sieht. Dann greift die Eigenschaft der Folgen f_n und g_n , und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\omega_\beta\left(: \bar{\psi}_{\dot{r}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta) : \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta\left(\bar{\psi}_{\dot{r}}(f_n) \psi_s(g_n) \right) - \omega_\infty\left(\bar{\psi}_{\dot{r}}(f_n) \psi_s(g_n) \right) \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \sin(2p', \zeta) \frac{p'_{s\dot{r}}}{1 + e^{(\beta, p')}}
\end{aligned}$$

In der Tat kann man nun beliebig oft nach ζ ableiten, weil der Integrand wegen $(\beta, p') \geq 0$ für $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ schnell abfällt, und danach den Grenzwert $\zeta \rightarrow 0$ vollführen, was wegen der Stetigkeit von ω_β das gewünschte Resultat liefert:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\dot{r}s}^\mu(\beta) &= \omega_\beta\left(\theta_{\dot{r}s}^\mu(x) \right) = \omega_\beta\left(\partial^\mu : \bar{\psi}_{\dot{r}}(x) \psi_s(x) : \right) \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \omega_\beta\left(\partial_\zeta^\mu \left(\bar{\psi}_{\dot{r}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta) - \omega_\infty(\bar{\psi}_{\dot{r}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta)) \right) \right) \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta^\mu \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \sin(2p', \zeta) \frac{p'_{s\dot{r}}}{1 + e^{(\beta, p')}}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Wir sehen sofort, dass nur für ungerade $m = \deg \mu$ das Ergebnis von Null verschieden

sein kann. Sei im Folgenden m also ungerade:

$$\begin{aligned}
\Theta_{rs}^{\mu}(\beta) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\mu} \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \sin(2p', \zeta) p'_{sr} (-1)^{n+1} (e^{-(\beta, p')})^n \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\mu} \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \sin(2p', \zeta) p'_{sr} e^{-n(\beta, p')} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} (p')^{\mu} p'_{sr} e^{-n(\beta, p')} \\
&= \sigma_{\nu, sr} \partial_{\beta}^{\mu\nu} \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} e^{-n(\beta, p')} (-n)^{-(m+1)}
\end{aligned}$$

In $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} e^{-n(\beta, p')}$ wird eine lorentzinvariante Funktion über ein lorentzinvariantes Maß integriert. Deswegen setzen wir o.B.d.A $\beta = (|\beta|, 0, 0, 0)^T$ und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} e^{-n(\beta, p')} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} e^{-n |\vec{p}| |\beta|} = \frac{4\pi}{n^2 |\beta|^2} = \frac{4\pi}{n^2 (\beta, \beta)},$$

wie man in Kugelkoordinaten leicht errechnet. Es folgt:

$$\Theta_{rs}^{\mu}(\beta) = \sigma_{\nu, sr} \frac{i}{(2\pi)^3} 4\pi 2^m (-1)^{\frac{m+3}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-(m+3)} \right) \left(\partial_{\beta}^{\mu\nu} \frac{1}{(\beta, \beta)} \right).$$

Der Wert der unendlichen Reihe in der Formel beträgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-(m+3)} = \frac{\pi^{m+3} (2^{m+2} - 1)}{(m+3)!} B_{\frac{m+3}{2}}.$$

Die B_k sind die sogenannten Bernoullizahlen, von denen es je nach Konvention unterschiedliche Versionen gibt. Unsere Version lautet:

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad B_2 = \frac{1}{30} \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad \dots$$

Damit ergibt sich:

$$\Theta_{rs}^{\mu}(\beta) = \omega_{\beta}(\theta_{rs}^{\mu}(x)) = \sigma_{\nu, sr} \frac{c_m}{2} \left(\partial_{\beta}^{\mu\nu} \frac{1}{(\beta, \beta)} \right) \quad (4.15)$$

mit

$$c_m = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{i \pi^{m+1} (2^{2m+2} - 2^{m+1})}{(m+3)!} (-1)^{\frac{m+3}{2}} B_{\frac{m+3}{2}} & \text{für } m \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } m \text{ gerade} \end{array} \right\}. \quad (4.16)$$

Für einen festen Multiindex μ lauten die vier verschiedenen thermalen Funktionen Θ_{rs}^μ :

$$\Theta_{11}^\mu(\beta) = c_m \partial^\mu (\partial^0 + \partial^3) \left((\beta, \beta)^{-1} \right)$$

$$\Theta_{12}^\mu(\beta) = c_m \partial^\mu (\partial^1 - i\partial^2) \left((\beta, \beta)^{-1} \right)$$

$$\Theta_{21}^\mu(\beta) = c_m \partial^\mu (\partial^1 + i\partial^2) \left((\beta, \beta)^{-1} \right)$$

$$\Theta_{22}^\mu(\beta) = c_m \partial^\mu (\partial^0 - \partial^3) \left((\beta, \beta)^{-1} \right).$$

Sie sind also linear unabhängig.

Im Folgenden wollen wir die Spinorindices vermeiden und mit geschickten Linearkombinationen der thermalen Observablen arbeiten. Wir definieren also

$$\lambda^{\mu\nu}(x) \doteq \sigma^{\nu,rs} \theta_{rs}^\mu(x) = \delta^{\mu} : \bar{\psi}_{\dot{r}}(x) \sigma^{\nu,rs} \psi_s(x) : \quad (4.17)$$

Aufgrund der praktischen Identität

$$\sigma_{\mu}^{\dot{s}r} \sigma_{tu}^{\mu} = 2 \delta_t^r \delta_{\dot{u}}^{\dot{s}} \quad (4.18)$$

können wir die $\theta_{rs}^\mu(x)$ aus den $\lambda^{\mu\nu}(x)$ durch

$$\frac{1}{2} \sigma_{\nu,rs} \lambda^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \sigma_{\nu,rs} \sigma^{\nu,tu} \theta_{tu}^\mu(x) = \theta_{rs}^\mu(x) \quad (4.19)$$

zurückgewinnen. Wir sehen damit, dass die $\lambda^{\mu\nu}(x)$ den Raum \mathcal{S}_x aufspannen. Sie definieren die thermalen Funktionen

$$L^{\mu\nu}(\beta) = \omega_\beta(\lambda^{\mu\nu}(x)) = c_m \left(\partial_\beta^{\mu\nu} \frac{1}{(\beta, \beta)} \right), \quad (4.20)$$

wie man mit Hilfe von $\sigma_{sr}^\mu \sigma_\nu^{\dot{r}s} = 2\delta_\nu^\mu$ errechnet. Es ist diese besonders einfache Form (4.20) der thermalen Funktionen, die uns dazu veranlasst hat, von den $\theta_{rs}^\mu(x)$ zu den $\lambda^{\mu\nu}(x)$ überzugehen.

4.5 Thermale Funktionen und die Wellengleichung

Da die Funktion $\beta \mapsto (\beta, \beta)^{-1}$ eine glatte Lösung der Wellengleichung auf V^+ ist, sind alle thermalen Funktionen nach Gleichung (4.20) ebenso glatte Lösungen der Wellengleichungen auf V^+ . In der Tat sind es genug, um *jede* solche Lösung in einem gewissen Sinne

zu approximieren. Konkret führen wir auf dem Raum der glatten Lösung der Wellengleichung auf V^+ , im Folgenden \mathcal{G} genannt, eine Familie von Halbnormen ein. Definieren wir für jede kompakte Teilmenge B von V^+

$$\|\Xi\|_B \doteq \sup_{\beta \in B} |\Xi(\beta)| \quad \Xi \in \mathcal{G}. \quad (4.21)$$

In Kapitel 2.6 wurde bereits gezeigt, dass die \mathcal{S}_0 -thermalen Zustände stetig bezüglich dieser Halbnormen sind. Da man V^+ mit abzählbar vielen Kompakta ausschöpfen kann, wird \mathcal{G} mit der Topologie dieser Halbnormen zu einem Prä-Fréchetraum. Es ist nun die Menge aller thermaler Funktionen dicht in \mathcal{G} bezüglich dieser Topologie. Der Beweis hierzu verläuft in den wesentlichen Punkten analog zu dem entsprechenden Resultat für masselose Bosonen aus [1].

Lemma 4.1 *Sei \mathcal{G} die Menge der glatten Lösungen der Wellengleichung auf V^+ und $\Xi \in \mathcal{G}$, sei $B \subset V^+$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Man bezeichne mit $\boldsymbol{\mu}_m$ einen Multiindex der Länge m , dann gibt es endlich viele Vektoren $c^{(1)}, \dots, c^{(k)} \in \mathbb{R}^4$ und $d^{(1)}, \dots, d^{(l)} \in \mathbb{R}^4$, sodass gilt:*

$$\left\| \Xi - \sum_{i=1}^k c_{\boldsymbol{\mu}_{2i}}^{(i)} J^{\boldsymbol{\mu}_{2i}} \right\|_B < \varepsilon \quad \left\| \partial^\nu \Xi - \sum_{i=0}^l d_{\boldsymbol{\mu}_{2i+1}}^{(i)} J^{\nu \boldsymbol{\mu}_{2i+1}} \right\|_B < \varepsilon \quad (4.22)$$

Hierbei sind die Funktionen $J^\boldsymbol{\mu}$ gegeben durch

$$J^\boldsymbol{\mu}(\beta) = \left(\partial_\beta^\boldsymbol{\mu} \frac{1}{(\beta, \beta)} \right)$$

für $\deg \boldsymbol{\mu}$ gerade und größer null, ansonsten $J^\boldsymbol{\mu}(\beta) = 0$.

Beweis: Es reicht, den Beweis für Kompakta der Form $\{(\kappa, 0) + \overline{V}^+\} \cap \{(\kappa^{-1}, 0) - \overline{V}^+\}$ mit $0 < \kappa < 1$ zu führen, da jede kompakte Teilmenge von V^+ ganz in einem Kompaktum dieser Form enthalten ist. Sei also B von dieser Form für ein bestimmtes κ .

Schritt 1: Wir betrachten die Involution $\iota(\beta) \doteq \beta/(\beta, \beta)$. Es gilt

$$\iota((\kappa, 0) + v) = (\kappa^{-1}, 0) - \frac{\frac{v^2}{\kappa} + v_0}{((\kappa, 0) + v)^2}$$

mit $\frac{v^2}{\kappa} + v_0 \in \overline{V}^+$ für $v \in \overline{V}^+$. Ebenso gilt, dass $\iota((\kappa^{-1}, 0) - v) = (\kappa, 0) + w$ mit $w \in \overline{V}^+$ wenn $v \in \overline{V}^+$. Die Involution ι führt also B in sich selbst über. Gleichzeitig induziert ι eine Involution auf \mathcal{G} durch

$$I(\Xi)(\beta) \doteq \iota(\beta)^2 \Xi(\iota(\beta)).$$

Nun gilt, dass

$$\|I(\Xi)\|_B = \sup_{\beta \in B} \|I(\Xi)(\beta)\| = \sup_{\beta \in B} \|\iota(\beta)^2 \Xi(\iota(\beta))\| \leq \kappa^{-2} \|\Xi\|_B, \quad (4.23)$$

außerdem:

$$\begin{aligned} \|\partial^\nu I(\Xi)\|_B &= \sup_{\beta \in B} \left\| -2 \frac{\beta^\nu}{(\beta, \beta)^2} \Xi(\iota(\beta)) + \frac{1}{(\beta, \beta)} \left(\frac{\delta^{\mu\nu}}{(\beta, \beta)} - 2 \frac{\beta^\mu \beta^\nu}{(\beta, \beta)^2} \right) (\partial_\mu \Xi)(\iota(\beta)) \right\| \\ &\leq 2\kappa^{-3} \|\Xi\|_B + \kappa^{-4} \|\partial^\nu \Xi\|_B + 2\kappa^{-4} \sum_{\mu} \|\partial_\mu \Xi\|_B, \end{aligned}$$

und damit

$$\|\partial^\nu I(\Xi)\|_B \leq 2\kappa^{-3} \|\Xi\|_B + 3\kappa^{-4} \sum_{\mu} \|\partial_\mu \Xi\|_B. \quad (4.24)$$

Daran sehen wir, dass I bezüglich der Topologie, die durch die Halbnormen induziert wird, stetig ist. Da I eine Involution ist, können Ξ und $I(\Xi)$ in diesen Ungleichungen ausgetauscht werden. Wir betonen noch einmal die wichtige Tatsache, dass I den Raum \mathcal{G} *in sich* überführt, was im Folgenden von zentraler Bedeutung sein wird.

Schritt 2: Sei l ein positiver, lichtartiger Vektor. Um die erste Hälfte des Lemmas zu beweisen, gehen wir von den Funktionen J^μ zu $I(l_\mu J^\mu)$ über. Da die Menge der positiven, lichtartigen Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^4 enthält, reicht es zu zeigen, dass die Menge der $l_\mu J^\mu$ für alle l dicht in \mathcal{G} ist. Da I eine bzgl. der Halbnormentopologie stetige Involution ist, reicht es zu zeigen, dass Linearkombinationen der $I(l_\mu J^\mu)$ die Funktion Ξ im Sinne von (4.22) approximieren. Dies hat den Vorteil, dass diese Funktionen sehr einfach aussehen, wie wir nun zeigen. Es ist durch Induktion recht einfach zu zeigen, dass $l_\mu J^\mu(\beta) = (-2)^m m! (l, \beta)^m (\beta, \beta)^{-(m+1)}$. Damit erhalten wir die wichtige Formel

$$I(l_\mu J^\mu)(\beta) = a_m (l, \beta)^m \quad m = \deg \mu \quad (4.25)$$

mit $a_m = 0$ für m ungerade oder $m = 0$ und $a_m = (-2)^m m!$ sonst. Es reicht also zu zeigen, dass entsprechende Linearkombinationen der Funktionen $\beta \mapsto (l, \beta)^m$ für gerade, positive m und gewisse positive lichtartige l jede Lösung der Wellengleichung auf der Menge B gleichmäßig approximieren.

Schritt 3: Hierzu bemerken wir, dass auf $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ die Funktionen $z \mapsto g_+(z) = \frac{1}{z} e^{i\sqrt{z}}$ und $z \mapsto g_-(z) = \frac{1}{z} e^{-i\sqrt{z}}$ beide analytisch sind, und sich damit auf jedem Kompaktum in \mathbb{C}^+ gleichmäßig durch Polynome in z approximieren lassen. Das bedeutet, dass sich die Funktionen $z \mapsto e^{\pm iz} = z^2 g_\pm(z^2)$ auf jedem Kompaktum C mit $C^2 \subset \mathbb{C}^+$ durch Polynome mit nur geraden, positiven Potenzen gleichmäßig approximieren lassen.

Für $\beta \in B$ gilt $\kappa|\mathbf{l}| \leq (l, \beta) \leq \kappa^{-1}|\mathbf{l}|$. Wenden wir das oben Gesagte auf das Kompaktum $[\kappa|\mathbf{l}|, \kappa^{-1}|\mathbf{l}|] \times i\{0\} \subset \mathbb{C}^+$ an. Das bedeutet, dass die Funktionen

$$(l, \beta) \mapsto ((l, \beta) + i0) \mapsto e^{\pm i(l, \beta)}$$

beide gleichmäßig durch Polynome in (l, β) mit nur geraden, positiven Koeffizienten approximiert werden können. Es gibt also zu jedem $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$ und jedem $\varepsilon > 0$ Konstanten

c_1^\pm, \dots, c_k^\pm , sodass

$$\sup_{\beta \in B} \left\| \sum_{n=1}^k c_n^\pm(l, \beta)^{2n} - e^{\pm i(l, \beta)} \right\| < \varepsilon \quad (4.26)$$

ist, mit $l = (|\mathbf{l}|, \mathbf{l})$.

Schritt 4: Seien die Funktionen $f_\pm \in L^1(\mathbb{R}^3, d^3\mathbf{1})$. Dann ist die Funktion

$$\beta \mapsto \int d^3\mathbf{1} f_+(\mathbf{l}) e^{i(l, \beta)} + \int d^3\mathbf{1} f_-(\mathbf{l}) e^{-i(l, \beta)} \quad (4.27)$$

auf jedem Kompaktum in V^+ gleichmäßig durch ebene Wellen derart approximierbar, dass es zum Kompaktum B und jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele positive und lichtartige Vektoren $l^{(1)}, \dots, l^{(n)}$ und Konstanten b_1^\pm, \dots, b_n^\pm mit:

$$\sup_{\beta \in B} \left\| \sum_{\pm} \sum_{j=1}^n b_j^\pm e^{\pm i(l^{(j)}, \beta)} - \sum_{\pm} \int d^3\mathbf{1} f_\pm(\mathbf{l}) e^{\pm i(l, \beta)} \right\| < \varepsilon. \quad (4.28)$$

Zusammen mit der Abschätzung (4.26) und Umordnung und Umbenennung der Summationsindices und Koeffizienten wissen wir also nun, dass sich jede Funktion der Form (4.27) gleichmäßig durch Linearkombinationen von $(l, \beta)^m$ mit m gerade und ungleich null (eventuell mit mehreren verschiedenen l) approximieren lässt.

5. Schritt: Bleibt noch zu zeigen, dass jedes $\Xi \in \mathcal{G}$, eingeschränkt auf B , eine Darstellung wie in Gleichung (4.27) erlaubt. Um dies einzusehen, wählen wir eine glatte Cauchyfläche in V^+ , die nicht B , dafür aber die Vergangenheit von B schneidet, und geben uns die Werte von Ξ als Cauchy-Angangsdaten auf dieser Fläche vor. Diese hat nun eine eindeutige Lösung, die wegen dieser Eindeutigkeit mit Ξ eingeschränkt auf B übereinstimmt. Wegen der Glattheitseigenschaften der Cauchy-Anfangsdaten erlaubt diese Lösung eine Darstellung der Form (4.27). In der Tat sind die f_\pm in dieser Darstellung bis auf eine integrable Singularität am Ursprung glatt und schnell fallend.

Letzter Schritt: Wir haben gezeigt, dass es zu jedem $\Xi \in \mathcal{G}$, auf B und zu jedem $\varepsilon > 0$ Koeffizienten c_j und positive, lichtartige Vektoren $l^{(j)}$, sodass

$$\sup_{\beta \in B} \left\| \sum_{j=1}^n c_j' (l^{(j)}, \beta)^{2j} - \Xi(\beta) \right\| < \varepsilon \quad (4.29)$$

gilt. Das heißt auch, dass es zu jedem Ξ solche Konstanten und Vektoren gibt, dass (4.29) für $I(\Xi)$ gilt. Wenden wir dann I auf beiden Seiten an und justieren wir das ε und (4.23) erhalten wir, dass

$$\sup_{\beta \in B} \left\| \sum_{j=1}^n c_{\mu_{2j}}^{(j)} J^{\mu_{2j}} - \Xi(\beta) \right\| < \varepsilon$$

mit $c^{(j)} = c'_j \frac{l^{(j)}}{a_{2j}}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Der Beweis des zweiten Teils der Behauptung verläuft analog. Wir geben nur die wesentlichen Punkte des Beweises an.

Zuerst zeigen wir, dass zu jeder glatten Lösung der Wellengleichung Ξ und jedem $\varepsilon > 0$ es Konstanten c_j , ungerade Zahlen m_j und positive, lichtartige Vektoren l_j gibt, sodass gilt:

$$\sup_{\beta \in B} \left\| \sum_{j=1}^n c_j (l_j, \beta)^{m_j} - \Xi(\beta) \right\| < \varepsilon \quad (4.30)$$

$$\sup_{\beta \in B} \left\| \partial_\beta^\nu \left(\sum_{j=1}^n c_j (l_j, \beta)^{m_j} - \Xi(\beta) \right) \right\| < \varepsilon. \quad (4.31)$$

Zu diesem Punkt betrachten wir die Funktionen $z \mapsto g_\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{\pm i\sqrt{z}}$, die analytisch auf \mathbb{C}^+ sind. Diese sind auf jedem Kompaktum durch eine gleichmäßig konvergente Potenzreihe approximierbar, und somit auch $e^{\pm iz} = z g_\pm(z^2)$ durch eine Potenzreihe, die nur ungerade Potenzen enthält. Aufgrund der Analytizität gilt dies auch für die jeweiligen partiellen Ableitungen. Weiterhin lassen sich Funktionen der Form (4.27) durch Linearkombinationen $e^{\pm i(l, \beta)}$ auf B approximieren, wie oben gezeigt wurde, und damit auch durch Linearkombinationen der $(l, \beta)^m$ mit ungeradem m . Aufgrund der Tatsache, dass die f_\pm sogar Schwartzfunktionen sind, gilt das aber auch für die jeweiligen Ableitungen. Damit gelten die Abschätzungen (4.30) und (4.31).

Es gilt $l_\mu J^\mu = a_m(l, \beta)^m (\beta, \beta)^{-(m+1)}$ und damit folgt

$$l_\mu J^{\mu\nu} = \partial_\beta^\nu a_m(l, \beta)^m (\beta, \beta)^{-(m+1)} = \partial_\beta^\nu I(a_m(l, \beta)^m).$$

Benutzen wir nun die Abschätzung (4.24), dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j d_{\mu_j} J^{\mu_j \nu} - \partial^\nu \Xi \right\|_B &= \left\| \partial^\nu \left(\sum_j I(a_j c_j (l_j, \beta)^{m_j}) - I(I(\Xi)) \right) \right\|_B \\ &\leq 2\kappa^{-3} \left\| \sum_j c_j a_j (l, \beta)^{m_j} - I(\Xi) \right\|_B \\ &\quad + 3\kappa^{-4} \sum_{\nu'} \left\| \partial^{\nu'} (a_j c_j (l, \beta)^{m_j} - I(\Xi)) \right\|_B. \end{aligned}$$

Diese beiden Terme können wir jedoch durch geeignete Wahl von c_j (und damit d_{μ_j}) nach oben durch ε abschätzen, womit die Behauptung bewiesen wäre.

Die Menge der thermalen Funktionen ist also dicht in der Menge der glatten Lösungen der Wellengleichung auf V^+ . Dies ist ein insofern äußerst wichtiges Resultat, als dass man

unter den thermalen Funktionen zwar die Energiedichte des Feldes finden kann, nicht aber Observablen wie die Entropiestromdichte oder die Temperatur (bzw. ihr Quadrat), welche für ein lorentzinvariantes Medium

$$S^\mu(\beta) = C \frac{\beta^\mu}{(\beta, \beta)} \quad T^2(\beta) = \frac{1}{(\beta, \beta)} \quad (4.32)$$

lauten (Siehe Kapitel 4.2.). Diese beiden können jedoch (als Elemente aus \mathcal{G}) durch Linearkombinationen von thermalen Funktionen beliebig gut angenähert werden, wenn man sich auf einen kompakten Temperaturmessbereich $B \subset V^+$ beschränkt. An dieser Stelle greift nun die Eigenschaft (2.14) der $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustände, die besagt, dass sie stetig bezüglich der Halbnormen (2.15) sind. Damit kann man die $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustände ω an jedem Punkt stetig auf die glatten Lösungen der Wellengleichungen fortsetzen, also

$$\mathcal{O} \ni x \longmapsto \omega(\Xi)(x), \quad \Xi \in \mathcal{G} \quad (4.33)$$

definieren. Weitohin kann man ω an jedem Punkt $x \in \mathcal{O}$ einen Wert der Entropiestromdichte oder des Quadrates der Temperatur zuordnen. Im Folgenden werden wir alle glatten Lösungen Ξ der Wellengleichung auf V^+ als zulässige Makroobservablen bezeichnen und ihre Werte eingesetzt in die Referenzzustände als

$$\omega_B(\Xi) \doteq \int_B d\rho(\beta) \Xi(\beta) \quad (4.34)$$

definieren.

5 Wichtige Makroobservablen

In diesem Abschnitt werden die thermalen Funktionen genauer untersucht und die wichtigsten unter ihnen identifiziert. Dies garantiert uns, dass die quadratischen Formen, die wir „thermale“ Operatoren genannt haben, in den KMS-Zuständen auch wirklich thermale Interpretationen besitzen.

5.1 Der Energie-Impulstensor

Die einfachste thermale Observable (4.17) ist

$$\lambda^{\mu\nu}(x) = \bar{\delta}^\mu : \bar{\psi}_{\dot{r}}(x) \sigma^{\nu, \dot{r}s} \psi_s(x) : \quad (5.1)$$

$$=: (\partial^\mu \bar{\psi}_{\dot{r}})(x) \sigma^{\nu, \dot{r}s} \psi_s(x) : - : \bar{\psi}_{\dot{r}}(x) \sigma^{\nu, \dot{r}s} \partial^\mu \psi_s(x) : \quad (5.2)$$

$$= 2i : \theta^{\nu\mu} : (x), \quad (5.3)$$

also bis auf eine Konstante der Energie-Impulstensor (4.8) der Theorie. Mit Gleichung (4.20) ergibt sich für die dazugehörige thermale Funktion

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu}(\beta) &= \omega_\beta \left(: \theta^{\mu\nu} : (x) \right) \\ &= \frac{\pi^2}{60} \left[\frac{4}{(\beta, \beta)^3} \beta^\mu \beta^\nu - \frac{1}{(\beta, \beta)^2} \eta^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die im Ruhesystem gemessene mittlere Energiedichte (in natürlichen Einheiten) ist damit

$$U(T) = \frac{\pi^2}{20} T^4, \quad (5.5)$$

wie man vom Stefan-Boltzmann-Gesetz auch erwarten würde. Es ist eine interessante Tatsache, dass die gesamte innere Energie des Modells thermischer Natur ist, und nichts davon in innerer Spannung oder dergleichen steckt, wie es bei masselosen Bosonen der Fall ist [1]. Das Phänomen der „missing energy“ scheint bosonischer Natur zu sein.

5.2 Die Entropiestromdichte

Wie im Kapitel (4.2) erläutert, ist das Ruhesystem und der Wert der Entropie in einer vektoriellen Größe zusammengefasst. Diese Größe wird Entropiestromdichte genannt. Man kann sie als Funktion der Temperatur berechnen, wenn man die Energie in Abhängigkeit der Temperatur kennt. Mit (4.11) und (5.4) folgt daraus

$$S^\mu(\beta) = \frac{\pi^2}{15} \frac{\beta^\mu}{(\beta, \beta)^2}. \quad (5.6)$$

Man sieht mit Gleichung (4.20) sofort, dass es keine thermale Observable (4.17) gibt, deren thermale Funktion die Form (5.6) hat. Der Raum der thermalen Observablen enthält also keine Observable „Entropiestromdichte“. Dennoch gilt

$$S^\mu(\beta) = -\frac{\pi^2}{30} \partial^\mu \left(\frac{1}{(\beta, \beta)} \right) \quad (5.7)$$

und damit $\square S^\mu = 0$. Die thermale Funktion (5.6) ist also eine glatte Lösung der Wellengleichung auf V^+ , somit kann man nach Lemma (4.1) für jedes Kompaktum $B \subset V^+$ und jede Schranke ε eine thermale Observable finden, deren thermale Funktion sich in diesem Temperaturbereich B nur um maximal ε von S^μ unterscheidet. Die Entropiestromdichte ist also eine zulässige Makroobservable.

5.3 Die Phasenraumdichte

Eine Makroobservable von besonderer Wichtigkeit für unsere Analyse ist die Phasenraumdichte $N_{q'}$, die die Dichte der Teilchen mit einem bestimmten Impuls $q' = (|\vec{q}|, \vec{q})$ misst. Diesen Operator kann man, ebenso wie im Falle der masselosen Bosonen in [1], durch eine zentrale Folge definieren.

Seien $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ und $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit den Normierungen $\int g = 1$ und $\int |h|^2 = 1$ und $0 < \alpha < 1$. Seien weiterhin für jeden Vektor $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor

$$v(\vec{q}) \doteq \frac{1}{\sqrt{|\vec{q}| - q^3}} \begin{pmatrix} q^1 - iq^2 \\ |\vec{q}| - q^3 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

und die Funktion

$$f_{\vec{q},n}(x) \doteq n^{-3/2-\alpha} g(n^{-\alpha} x^0) h(n^{-1} \vec{x}) e^{i(q',x)}. \quad (5.9)$$

mit $q' = (|\vec{q}|, \vec{q})$ definiert. Mit diesen Bausteinen definieren wir eine Folge durch:

$$n \longmapsto (2\pi)^{-3} \psi(v(\vec{q}) f_{\vec{q},n})^* \psi(v(\vec{q}) f_{\vec{q},n}). \quad (5.10)$$

Der Grenzwert dieser Folge existiert in den KMS-Zuständen, wie wir im Folgenden zeigen werden:

$$\omega_\beta(N_{q'}) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \omega_\beta \left(\psi(v(\vec{q}) f_{\vec{q},n})^* \psi(v(\vec{q}) f_{\vec{q},n}) \right) \quad (5.11)$$

Wir werden Gleichung (5.11) als Definition der Phasenraumdichte $N_{q'}$ betrachten. Der Grenzwert ist dabei unabhängig von der Zahl α^{12} und definiert in allen GNS-Darstellungen der Referenzzustände einen beschränkten Operator mit Norm $\|N_{q'}\| \leq (2\pi)^{-3}$ der mit allen Darstellern der Elemente aus \mathcal{F} kommutiert.

Um dieses zu beweisen, benötigen wir einige Hilfslemmata. Zur Vereinfachung der Notation lassen wir den Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ zuerst beliebig.

Hilfslemma 5.1 *Seien $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$, $v \in \mathbb{C}^2$ und $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt mit $f_{\vec{q},n}$ definiert wie in (5.9), dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta(\bar{\psi}(k) \psi(v f_{\vec{q},n})) = 0 \quad (5.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta(\psi(v f_{\vec{q},n})^* \psi(k)) = 0 \quad (5.13)$$

¹²Den Parameter α haben wir eingeführt, um die Verschmierung in Zeitrichtung etwas langsamer laufen zu lassen als in den Raumrichtungen. Dieses wird uns die Rechnungen etwas erleichtern, beeinflusst das Ergebnis aber nicht.

Beweis: Wegen

$$\tilde{f}_{\vec{q},n}(p) = n^{\frac{3}{2}} \tilde{g}(n^\alpha p^0 + n^\alpha |\vec{q}|) \tilde{h}(n\vec{p} + n\vec{q}) \quad (5.14)$$

gilt mit (4.1), dass

$$\begin{aligned} \omega_\beta(\bar{\psi}(k) \psi(vf_{\vec{q},n})) &= 2\pi n^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{v^T p'_M \tilde{k}(-p)}{1 + e^{-(\beta \cdot p)}} \tilde{g}(n^\alpha p^0 + n^\alpha |\vec{q}|) \tilde{h}(n\vec{p} + n\vec{q}) \\ &= 2\pi n^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} v^T p'_M \tilde{k}(-p) \frac{\tilde{g}(n^k |\vec{p}| + n^k |\vec{q}|) \tilde{h}(n\vec{p} + n\vec{q})}{1 + e^{-(\beta \cdot p')}} \\ &\quad + 2\pi n^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} v^T p'_M \tilde{k}(p) \frac{\tilde{g}(-n^k |\vec{p}| + n^k |\vec{q}|) \tilde{h}(-n\vec{p} + n\vec{q})}{1 + e^{-(\beta \cdot p')}} \\ &= I(n) + II(n) \end{aligned} \quad (5.15)$$

ist. Weil k kompakten Träger hat, ist \tilde{k} eine Schwartzfunktion und

$$\chi : \vec{p} \mapsto \left| \frac{v^T p'_M \tilde{k}(p)}{2|\vec{p}| (1 + e^{-(\beta \cdot p')})} \right|$$

ist stetig und beschränkt. Die Funktion $|\tilde{h}|$ ist integrabel, sei ihr Integral

$$C \doteq \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p |\tilde{h}(\vec{p})|. \quad (5.16)$$

Dann gilt nach der Eigenschaft von δ -Folgen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \chi(\vec{p}) \frac{|\tilde{h}(n\vec{p} - n\vec{q})|}{C} = \chi(\vec{q}) \quad (5.17)$$

und das zeigt, dass die Folge

$$\begin{aligned} n \mapsto I_n &\doteq 2\pi n^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \left| \frac{v^T p'_M \tilde{k}(p')}{2|\vec{p}| (1 + e^{-(\beta \cdot p')})} \right| |\tilde{h}(n\vec{p} - n\vec{q})| \\ &\quad + 2\pi n^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \left| \frac{v^T p'_M \tilde{k}(-p')}{2|\vec{p}| (1 + e^{-(\beta \cdot p')})} \right| |\tilde{h}(n\vec{p} + n\vec{q})| \end{aligned} \quad (5.18)$$

einen Grenzwert in \mathbb{R} hat. Damit konvergiert die Folge $n \mapsto n^{-\frac{3}{2}} I_n$ gegen null, und mit (5.15) gilt

$$|\omega_\beta(\bar{\psi}(k) \psi(vf_{\vec{q},n}))| \leq n^{-\frac{3}{2}} I_n G, \quad (5.19)$$

wenn G das Betragsmaximum von \tilde{g} ist. Damit folgt Behauptung (5.12). Behauptung (5.13) folgt durch Adjungieren.

Hilfslemma 5.2 Seien $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$, $v \in \mathbb{C}^2$ und $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$. Mit $f_{\vec{q},n}$ definiert wie in (5.9) gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta(\psi(v f_{\vec{q},n})^* \psi(v f_{\vec{q},n})) = \frac{v^T q_M \bar{v}}{2 |\vec{q}|} \frac{1}{e^{(\beta, q')} + 1}. \quad (5.20)$$

Beweis: Wieder gilt wegen (5.14), dass

$$\begin{aligned} \omega_\beta(\psi(v f_{\vec{q},n})^* \psi(v f_{\vec{q},n})) &= 2\pi n^3 \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{v^T p_M \bar{v}}{1 + e^{(\beta, p)}} |\tilde{g}(n^\alpha p^0 + n^\alpha |\vec{q}|)|^2 |\tilde{h}(n\vec{p} + n\vec{q})|^2 \\ &= 2\pi n^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} v^T p'_M \bar{v} \frac{|\tilde{g}(n^\alpha |\vec{p}| + n^\alpha |\vec{q}|)|^2 |\tilde{h}(n\vec{p} + n\vec{q})|^2}{1 + e^{-(\beta, p')}} \\ &\quad + 2\pi n^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} v^T p'_M \bar{v} \frac{|\tilde{g}(-n^\alpha |\vec{p}| + n^\alpha |\vec{q}|)|^2 |\tilde{h}(-n\vec{p} + n\vec{q})|^2}{1 + e^{(\beta, p')}} \\ &= I(n) + II(n). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Weil $|\tilde{g}|^2$ eine Schwartzfunktion ist, ist

$$G_n \doteq \sup_{\vec{p} \in \mathbb{R}^3} |\tilde{g}(n^\alpha |\vec{p}| + n^\alpha |\vec{q}|)|^2 \quad (5.22)$$

eine Nullfolge (hier geht die Eigenschaft $\alpha > 0$ ein). Weil $|\tilde{h}|^2$ eine Schwartzfunktion mit Integral 1 und

$$\chi : \vec{p} \longmapsto \frac{v^T p'_M \bar{v}}{|\vec{p}|(1 + e^{-(\beta, p')})} \quad (5.23)$$

stetig ist, gilt mit

$$I_n \doteq \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \chi(\vec{p}) |\tilde{h}(n\vec{p} + n\vec{q})|^2, \quad (5.24)$$

dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \chi(-\vec{q}) \quad (5.25)$$

ist. Dann gilt wegen $|I(n)| \leq G_n I_n$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = 0 \quad (5.26)$$

ist. Kümmern wir uns also um den Teil $II(n)$ in (5.21).

Variablensubstitution $\vec{u} = -n\vec{p} + n\vec{q}$ liefert $\vec{p} = -\frac{\vec{u}}{n} + \vec{q}$ und damit

$$\begin{aligned} II(n) &= 2\pi n^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} v^T p'_M \bar{v} \frac{|\tilde{g}(-n^\alpha |\vec{p}| + n^\alpha |\vec{q}|)|^2 |\tilde{h}(-n\vec{p} + n\vec{q})|^2}{1 + e^{(\beta, p')}} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 u}{2|\frac{-\vec{u}}{n} + \vec{q}|} v^T \left(\frac{-u'_M}{n} + q'_M \right) \bar{v} \frac{|\tilde{g}(n^\alpha |\frac{-\vec{u}}{n} + \vec{q}| + n^\alpha |\vec{q}|)|^2 |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{1 + e^{(\beta, -\frac{u'}{n} + q')}}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Im nächsten Schritt wird für die Funktionenfolge

$$F_n(\vec{u}) = \frac{\pi}{\left| \frac{-\vec{u}}{n} + \vec{q} \right|} \frac{|\tilde{g}(n^\alpha \left| \frac{-\vec{u}}{n} + \vec{q} \right| - n^\alpha |\vec{q}|)|^2 |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{e^{(\beta, -\frac{u'}{n} + q')} + 1} \quad (5.28)$$

eine Majorante konstruiert, um Limes und Integral in (5.27) vertauschen zu können. Die Konstruktion dieser Majorante unterscheidet sich leicht für die beiden Fälle $|\vec{q}| \leq 2$ und $|\vec{q}| > 2$.

Behandeln wir zuerst den Fall $|\vec{q}| \leq 2$. Es sei im Folgenden $U_n \doteq \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid (n - \frac{1}{2})|\vec{q}| < |\vec{u}| < (n + \frac{1}{2})|\vec{q}|\}$ und $B_n \doteq B_{\frac{1}{2}|\vec{q}}(n\vec{q})$. Man bemerke, dass $B_n \subset U_n$.

$$F(\vec{u})|_{U_n \setminus \{n\vec{q}\}} \doteq \begin{cases} 2\pi n \frac{G|\tilde{h}(\vec{u})|^2}{|-\vec{u} + n\vec{q}|^2} & \vec{u} \in B_n \\ 2\pi n \frac{G|\tilde{h}(\vec{u})|^2}{(\frac{1}{2}|\vec{q}|)^2} & \vec{u} \in U_n \setminus B_n. \end{cases}$$

Die Funktion F eingeschränkt auf $U_n \setminus \{n\vec{q}\}$ ist stetig und es gilt:

$$2\pi n \frac{G|\tilde{h}(\vec{u})|^2}{(\frac{1}{2}|\vec{q}|)^2} \leq F(\vec{u}) \quad \text{für } \vec{u} \in U_n \setminus \{n\vec{q}\}.$$

Wir berechnen das Integral von F über $U_n \setminus \{n\vec{q}\}$:

$$\begin{aligned} \int_{U_n} d^3u F(\vec{u}) &\leq \int_{U_n} d^3u |\tilde{h}(\vec{u})|^2 \left[\int_{B_n} d^3u \frac{2\pi n G}{|-\vec{u} + n\vec{q}|^2} + \int_{U_n} d^3u 2\pi n G \right] \\ &= \int_{U_n} d^3u |\tilde{h}(\vec{u})|^2 \left(2\pi n G \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{2}|\vec{q}| + \text{Vol}(U_n) \cdot 2\pi n G \right) \\ &\leq \int_{U_n} d^3u |\tilde{h}(\vec{u})|^2 [An + Bn^4] \\ &\leq Cn^3 \frac{D}{n^{10}} [(A + B)n^4] \leq E \frac{1}{n^3}, \end{aligned}$$

wenn n groß genug ist, denn $|\tilde{h}|^2$ ist schnell fallend. Damit ist F integrabel, nach dem Ausschöpfungskriterium. Um zu zeigen, dass F alle F_n majorisiert, werden drei Fälle unterschieden:

- $\vec{u} \in U_n \setminus \{n\vec{q}\}$ und $m = n$. Daraus folgt:

$$F_m(\vec{u}) = \frac{\pi n}{|-\vec{u} + n\vec{q}|} \frac{|\tilde{g}(\dots)|^2 |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{e^{(\beta, -\frac{u'}{n} + q')} + 1} \leq \frac{\pi n}{|-\vec{u} + n\vec{q}|} G |\tilde{h}(\vec{u})|^2.$$

Sei $\vec{u} \in B_n$, dann gilt: $|-\vec{u} + n\vec{q}| \geq |-\vec{u} + n\vec{q}|^2$, und damit:

$$\Rightarrow F_m(\vec{u}) \leq \frac{\pi n}{|-\vec{u} + n\vec{q}|^2} G |\tilde{h}(\vec{u})|^2 < 2\pi n \frac{G|\tilde{h}(\vec{u})|^2}{|-\vec{u} + n\vec{q}|^2} = F(\vec{u}).$$

Wenn jedoch andererseits $\vec{u} \in U_n \setminus B_n$, dann gilt: $|- \vec{u} + n\vec{q}| \geq \frac{1}{2}|\vec{q}|$, und damit:

$$F_m(\vec{u}) \leq \frac{\pi n}{|-\vec{u} + n\vec{q}|^2} G |\tilde{h}(\vec{u})|^2 \leq 2\pi n \frac{G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{(\frac{1}{2}|\vec{q}|)^2} = F(\vec{u}).$$

- Sei $\vec{u} \in U_n \setminus \{n\vec{q}\}$ und $m < n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} F_m(\vec{u}) &\leq \frac{\pi m G}{|-\vec{u} + m\vec{q}|} |\tilde{h}(\vec{u})|^2 \leq \frac{\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{|\vec{u}| - m|\vec{q}|} \\ &\leq \frac{\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{(n - \frac{1}{2} - m) |\vec{q}|} \leq \frac{\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{\frac{1}{2} |\vec{q}|} \\ &\leq \frac{\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{(\frac{1}{2} |\vec{q}|)^2} \\ &\leq \frac{2\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{(\frac{1}{2} |\vec{q}|)^2} = F(\vec{u}). \end{aligned}$$

- Nun sei $\vec{u} \in U_n \setminus \{n\vec{q}\}$ und $m > n$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} F_m(\vec{u}) &\leq \frac{\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{|-\vec{u} + m\vec{q}|} \leq \frac{\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{||\vec{u}| - m|\vec{q}||} \leq \frac{\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{m|\vec{q}| - |\vec{u}|} \\ &\leq \frac{\pi m G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{m|\vec{q}| - (n + \frac{1}{2}) |\vec{q}|} = \frac{m}{2m - 2n - 1} \frac{\pi G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{\frac{1}{2} |\vec{q}|}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} m > n &\Rightarrow m \geq n + 1 \\ \Rightarrow 4n^2 + 2n &\leq 4n^2 + 2n + (n - 1) = (4n - 1)(n + 1) \leq (4n - 1)m \\ 4n^2 + 2n &\leq (4n - 1)m \Rightarrow m \leq 4nm - 4n^2 - 2n \\ &\Rightarrow \frac{m}{2m - 2n - 1} \leq 2n \end{aligned}$$

Aus diesen drei Fällen folgt:

$$\begin{aligned} F_m(\vec{u}) &\leq \frac{m}{2m - 2n - 1} \frac{\pi G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{\frac{1}{2} |\vec{q}|} \leq \frac{2n \pi G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{\frac{1}{2} |\vec{q}|} \\ &\leq \frac{2n \pi G |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{(\frac{1}{2} |\vec{q}|)^2} \leq F(\vec{u}). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt: Für alle n, m gilt $F_m(\vec{u}) \leq F(\vec{u})$ für $\vec{u} \in U_n \setminus \{n\vec{q}\}$. Also haben wir für fast alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, dass $F_m(\vec{u}) \leq F(\vec{u})$ für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Damit ist F eine

Majorante für die Funktionenfolge $\{F_m\}_m$, wenn $|\vec{q}| \leq 2$, was zu beweisen war. Wenn $|\vec{q}| > 2$ ist, definieren wir die Majorante F als

$$F(\vec{u})|_{U_n \setminus \{n\vec{q}\}} \doteq \begin{cases} 2\pi n \frac{G|\tilde{h}(\vec{u})|^2}{|-\vec{u}+n\vec{q}|^2} & \vec{u} \in B_n \\ 2\pi n G|\tilde{h}(\vec{u})|^2 & \vec{u} \in U_n \setminus B_n. \end{cases} \quad (5.29)$$

Die Abschätzungen laufen dann äquivalent zum Fall $|\vec{q}| \leq 2$.

Kehren wir nun zurück zu Gleichung (5.27). Die Funktionenfolge F_m aus (5.28) konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$\vec{u} \longmapsto \frac{\pi}{|\vec{q}|} \frac{|\tilde{g}(0)|^2 |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{e^{(\beta, q')} + 1} \quad (5.30)$$

(hier geht die Eigenschaft $\alpha < 1$ ein), und so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 u \pi}{|-\frac{\vec{u}}{n} + \vec{q}|} \frac{|\tilde{g}(n^\alpha |-\frac{\vec{u}}{n} + \vec{q}| - n^\alpha |\vec{q}|)|^2 |\tilde{h}(\vec{u})|^2}{e^{(\beta, -\frac{u'}{n} + q')} + 1} = \frac{1}{2|\vec{q}|} \frac{1}{e^{(\beta, q')} + 1}, \quad (5.31)$$

denn $\tilde{g}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int g = (2\pi)^{-1/2}$ und $\int |h(\vec{x})|^2 = \int |\tilde{h}|^2 = 1$ nach Voraussetzung. Aus (5.31) und (5.27) folgt dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} II(n) = \frac{1}{2|\vec{q}|} \frac{1}{e^{(\beta, q')} + 1} \lim_{n \rightarrow \infty} v^T \left(\frac{-u'_M}{n} + q'_M \right) \bar{v} \quad (5.32)$$

$$= \frac{v^T q'_M \bar{v}}{2|\vec{q}|} \frac{1}{e^{(\beta, q')} + 1}, \quad (5.33)$$

und dies war die Behauptung.

Betrachtet man die Matrix q'_M für ein $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$:

$$q'_M = \begin{pmatrix} |\vec{q}| + q^3 & q^1 - iq^2 \\ q^1 + iq^2 & |\vec{q}| - q^3 \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

so ergibt sich, wenn v wie in Gleichung (5.8) gewählt wird

$$v(\vec{q})^T q'_M \overline{v(\vec{q})} = 2|\vec{q}|. \quad (5.35)$$

Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \omega_\beta(\psi(vf_{q,n})^* \psi(vf_{q,n})) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{e^{(\beta, q)} + 1}. \quad (5.36)$$

Diese beiden Hilfslemmata (5.1) und (5.2) benutzen wir, um den Besetzungszahloperator zu definieren:

Satz 5.1 Zu einem positiven, lichtartigen Vektor $q' = (|\vec{q}|, \vec{q})$ seien $v = v(\vec{q}) \in \mathbb{C}^2$ und $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ definiert wie in (5.9) und (5.36). Dann definiert die Folge

$$N_{q'} \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \psi(vf_{\vec{q},n})^* \psi(vf_{\vec{q},n}) \quad (5.37)$$

in der GNS-Darstellung eines jeden Referenzzustandes $\omega_B \in \mathcal{C}$ durch

$$\omega_B(A^* N_{q'} B) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \omega_B(A^* \psi(vf_{\vec{q},n})^* \psi(vf_{\vec{q},n}) B), \quad (5.38)$$

einen beschränkten Operator, der mit allen Darstellern von Elementen aus \mathcal{F} kommutiert. Es gilt:

$$\omega_B(A^* N_{q'} B) = \int_B d\rho(\beta) \omega_\beta(A^* B) N_{q'}(\beta). \quad (5.39)$$

Dabei ist $N_{q'}(\beta) \doteq \omega_\beta(N_{q'}) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{1+e^{(q',\beta)}}$.

Beweis: Nach Formel (B.14), die im Anhang bewiesen wird, folgt aus der Quasifreiheit der KMS-Zustände

$$\omega_\beta(A_1 \cdots A_n) = \sum_{\pi \in P_n^<} (-1)^\pi \omega_\beta(A_{\pi(1)} A_{\pi(2)}) \cdots \omega_\beta(A_{\pi(n-1)} A_{\pi(n)}). \quad (5.40)$$

Für alle $A = A_1 \cdots A_n$, $B = B_1 \cdots B_n$ mit $A_i, B_i = \psi(f_i)$ oder $\bar{\psi}(f_i)$ gilt

$$\begin{aligned} \omega_\beta(A^* N_{q'} B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta(A^* \psi(vf_{\vec{q},n})^* \psi(vf_{\vec{q},n}) B) \\ &= \omega_\beta(A_n^* \cdots A_1^* \psi(vf_{\vec{q},n})^* \psi(vf_{\vec{q},n}) B_1 \cdots B_n). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Nach Gleichung (5.40) können wir (5.41) in eine Summe von Produkten aufspalten, in denen immer zwei Felder in einem $\omega_\beta(\cdot)$ stehen. Laut Hilfslemma (5.1) verschwinden beim Grenzübergang alle Summanden, in denen ein $\psi(vf_{\vec{q},n})$ mit einem A_i oder B_j zusammen in einem Faktor stehen. Damit bleiben nur noch diejenigen Summanden übrig, in denen $\omega_\beta(\psi(vf_{\vec{q},n})^* \psi(vf_{\vec{q},n}))$ steht, welches man dann als Faktor vor die gesamte Summe ziehen kann. Der Übergang hier liefert nach Hilfslemma (5.2) das folgende Ergebnis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta(A^* \psi(vf_{\vec{q},n})^* \psi(vf_{\vec{q},n}) B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\beta(\psi(vf_{\vec{q},n})^* \psi(vf_{\vec{q},n})) \omega_\beta(A^* B) \quad (5.42)$$

$$= \omega_\beta(N_{q'}) \omega_\beta(A^* B) \quad (5.43)$$

$$= (2\pi)^{-3} \frac{1}{1+e^{(q',\beta)}} \omega_\beta(A^* B). \quad (5.44)$$

Integriert man in dieser Formel β über B , so erhält man Gleichung (5.39).

Sei nun $\omega_B \in \mathcal{C}$ ein Referenzzustand und das Tripel $(\pi_B, \mathfrak{h}_B, \Omega_B)$ die GNS-Darstellung von \mathcal{F} , die durch ω_B induziert wird.¹³ Definieren wir die dichte Teilmenge

$$X \doteq \pi_B(\mathcal{F}^0)\Omega_B, \quad (5.45)$$

¹³Siehe [5].

wobei \mathcal{F}^0 hier die in \mathcal{F} dicht liegende Algebra definiert, die aus allen endlichen Polynomen in $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ besteht. Dann ist wegen der Stetigkeit von π_B die Menge X dicht in \mathfrak{h}_B . Wir definieren nun die Sesquilinearform N_q durch

$$\langle \pi_B(A)\Omega_B | N_{q'} | \pi_B(A')\Omega_B \rangle \doteq \omega_B(A^* N_{q'} A') \quad (5.46)$$

mit $\omega_B(A^* N_{q'} A')$ wie in Gleichung (5.38) definiert. Dieses Ergebnis ist wohldefiniert, wie wir gezeigt haben. Außerdem impliziert (5.39), dass

$$N_{q'} \pi_B(A) = \pi_B(A) N_{q'} \quad (5.47)$$

für alle $A \in \mathcal{F}^0$, und wegen der Dichtheit von \mathcal{F}^0 in \mathcal{F} auch für alle $A \in \mathcal{F}$. Damit definiert N_q eine Sesquilinearform auf einem dichten Teilraum des Darstellungshilbertraumes. Seien nun aber $\Psi = [A]$ und $\Phi = [B]$ mit $A, A' \in \mathcal{F}^0$, dann ist nach GNS-Konstruktion

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \omega_B(A^* A') \quad (5.48)$$

und deswegen mit Gleichung (5.39) und der Cauchy-Schwartz-Ungleichung

$$\langle \Psi | N_{q'} | \Phi \rangle \leq \left(\int_B d\rho(\beta) N_{q'}(\beta) \right) \|\Psi\| \|\Phi\|. \quad (5.49)$$

Nun ist aber das Maß $d\rho(\beta)$ normiert und deswegen ist die so definierte Sesquilinearform beschränkt mit Norm $\|N_{q'}\| \leq (2\pi)^{-3}$. Also kann man sie zu einem beschränkten Operator mit derselben Norm auf den ganzen Hilbertraum fortsetzen. Dieser kommutiert noch immer mit alle $\pi_B(A)$, $A \in \mathcal{F}$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus Satz (5.1) folgt, dass die zentrale Folge in (5.10) eine Makroobservable im Sinne von Kapitel (2.5) definiert. Nach Gleichung (5.39) ist die thermale Funktion dieser Makroobservable gegeben durch

$$N_{q'}(\beta) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{1 + e^{(\beta, q')}}, \quad (5.50)$$

misst also die die Phasenraumdichte eines freien, masselosen Fermigases, wie von der Fermi-Dirac-Statistik vorhergesagt. Diese thermale Funktion ist eine glatte Lösung der Wellengleichung auf V^+ , wie man leicht sieht. Somit ist $N_{q'}$ eine zulässige Makroobservable, und wir können \mathcal{S}_O -thermalen Zuständen an jedem Punkt ihres Thermalitätsgebietes konsistent eine mittlere Phasenraumdichte zuordnen.

6 \mathcal{S}_O -thermale Zustände

In den letzten Kapiteln haben wir die thermalen Observablen bestimmt und die Wichtigsten von ihnen identifiziert. Mit diesem Wissen wenden wir uns nun wieder der Analyse der lokalen Gleichgewichtszustände zu.

6.1 Bewegungsgleichungen

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die mikroskopischen Bewegungsgleichungen (hier die Diracgleichung) das makroskopische Verhalten der Erwartungswerte der zulässigen Makroobservablen in \mathcal{S}_O -thermalen Zuständen vollständig bestimmen.

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$. Dann sind $\bar{\psi}_{\dot{r}}(f)$ und $\psi_s(f)$ Elemente in der C^* -Algebra \mathcal{F} , und die Felder $\bar{\psi}_{\dot{r}}$ und ψ_s sind damit \mathcal{F} -wertige Distributionen. Nun gilt für jede Distribution u und $\zeta \in \mathbb{R}^4$:

$$\frac{\partial}{\partial a^\mu} \left(a \mapsto u \circ \alpha_a \right)_{a=\zeta} = (\partial_\mu u) \circ \alpha_\zeta \quad (6.1)$$

$$\partial_\mu (u \circ \alpha_\zeta) = (\partial_\mu u) \circ \alpha_\zeta. \quad (6.2)$$

Die Abbildung $f \mapsto \bar{\psi}_{\dot{r}}(f)\psi(f)$ ist ebenfalls eine \mathcal{F} -wertige Distribution, die wir kurz mit $\bar{\psi}_{\dot{r}}\psi_s$ bezeichnen. Für jedes $\zeta \in \mathbb{R}^4$ ist dann auch

$$\frac{\partial}{\partial a^\mu} \left(a \mapsto (\bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_a) (\psi_s \circ \alpha_{-a}) \right)_{a=\zeta} \quad (6.3)$$

eine Distribution, und für ihre Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \left(a \mapsto (\bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_a) (\psi_s \circ \alpha_{-a}) \right)_{a=\zeta} &= \partial^\mu \left((\partial_\mu \bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_\zeta) (\psi_s \circ \alpha_\zeta) - (\bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_\zeta) (\partial_\mu \psi_s \circ \alpha_\zeta) \right) \\ &= (\square \bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_\zeta) (\psi_s \circ \alpha_\zeta) - (\bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_\zeta) (\square \psi_s \circ \alpha_\zeta) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

wegen (6.1) und (6.2) und der Tatsache, dass die Komponenten des Diracfeldes die Klein-Gordongleichung erfüllen (Gleichung (3.19)). Daraus folgt auch:

$$\begin{aligned} \square \left((\bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_\zeta) (\psi_s \circ \alpha_{-\zeta}) \right) &= 2(\partial_\mu \bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_\zeta) (\partial^\mu \psi_s \circ \alpha_{-\zeta}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial a^\mu} \frac{\partial}{\partial a_\mu} \left(a \mapsto (\bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_a) (\psi_s \circ \alpha_{-a}) \right)_{a=\zeta}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Weiterhin erhält man aus der Diracgleichung (3.18)

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu, \dot{r} s} \left(\partial_\mu + \frac{\partial}{\partial a^\mu} \right) \left(a \mapsto (\bar{\psi}_{\dot{r}} \circ \alpha_a) (\psi_t \circ \alpha_{-a}) \right)_{a=\zeta} &= 2(\sigma^{\mu, \dot{r} s} (\partial_\mu \bar{\psi}_{\dot{r}}) \circ \alpha_\zeta) (\psi_t \circ \alpha_{-\zeta}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu, \dot{r}s} \left(\partial_{\mu} - \frac{\partial}{\partial a^{\mu}} \right) \left(a \mapsto (\bar{\psi}_{\dot{t}} \circ \alpha_a)(\psi_s \circ \alpha_{-a}) \right)_{a=\zeta} &= -2(\bar{\psi}_{\dot{t}} \circ \alpha_{\zeta}) (\sigma^{\mu, \dot{r}s}(\partial_{\mu} \psi_s) \circ \alpha_{-\zeta}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Diese Rechnungen fassen wir symbolisch zusammen:

Lemma 6.1 *Die Felder erfüllen die folgenden Differentialgleichungen (im Sinne von Distributionen):*

- $\partial_{x^{\nu}} \partial_{\zeta^{\nu}} \bar{\psi}_{\dot{r}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta) = 0$
- $\square_x \bar{\psi}_{\dot{r}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta) = -\square_{\zeta} \bar{\psi}_{\dot{r}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta)$
- $\sigma^{\nu, \dot{r}s} (\partial_{x^{\nu}} + \partial_{\zeta^{\nu}}) \bar{\psi}_{\dot{r}}(x + \zeta) \psi_t(x - \zeta) = 0$
- $\sigma^{\nu, \dot{r}s} (\partial_{x^{\nu}} - \partial_{\zeta^{\nu}}) \bar{\psi}_{\dot{t}}(x + \zeta) \psi_s(x - \zeta) = 0$

Aus Lemma (6.1) folgt zusammen mit (4.17) und (4.12) sofort, dass für die thermalen Observablen folgendes gilt:

$$\partial_{\nu} \theta_{\dot{r}s}^{\nu\mu}(x) = 0 \quad (6.8)$$

$$\square \theta_{\dot{r}s}^{\mu}(x) + \theta_{\dot{r}s, \nu}^{\nu\mu}(x) = 0 \quad (6.9)$$

$$\sigma^{\nu, \dot{r}s} \theta_{\dot{r}t, \nu}^{\mu}(x) + \sigma^{\nu, \dot{r}s} \partial_{\nu} \theta_{\dot{r}t}^{\mu}(x) = 0 \quad (6.10)$$

$$\sigma^{\nu, \dot{r}s} \theta_{ts, \nu}^{\mu}(x) - \sigma^{\nu, \dot{r}s} \partial_{\nu} \theta_{ts}^{\mu}(x) = 0 \quad (6.11)$$

Für die $\lambda^{\mu\nu}(x)$ erhalten wir mit Gleichung (4.17):

$$\partial_{\tau} \lambda^{\tau\mu\nu}(x) = 0 \quad (6.12)$$

$$\square \lambda^{\mu\nu}(x) + \lambda_{\tau}^{\tau\mu\nu}(x) = 0 \quad (6.13)$$

$$\sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, si} \lambda_{\nu}^{\mu\tau}(x) - \sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, si} \partial_{\nu} \lambda^{\mu\tau}(x) = 0 \quad (6.14)$$

$$\sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, t\dot{r}} \lambda_{\nu}^{\mu\tau}(x) + \sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, t\dot{r}} \partial_{\nu} \lambda^{\mu\tau}(x) = 0. \quad (6.15)$$

Man sieht sofort mit Gleichung (4.19), dass die letzten vier Gleichungen zu den obigen vier äquivalent sind. Bilden wir in den letzten beiden Gleichungen noch die Spur über die freien Indices, so erhält man:

$$\partial_{\nu} \lambda^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (6.16)$$

$$\lambda_{\nu}^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (6.17)$$

Die Differentialgleichungen (6.12) - (6.15) bestimmen die raumzeitliche Entwicklung der Erwartungswerte von zulässigen Makroobservablen in $S_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zuständen, wie wir im Folgenden sehen werden.

6.2 Erwartungswerte und Transportgleichungen

Lemma 6.2 Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ ein Gebiet, ω ein $S_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand auf \mathcal{F} und Ξ eine zulässige Makroobservable. Dann gilt

$$\square \omega(\Xi)(x) = 0, \quad (6.18)$$

$$\partial^M \omega(\partial_M \Xi)(x) = 0, \quad (6.19)$$

$$(\partial^M)^T \omega((\partial_M)^T \Xi)(x) = 0. \quad (6.20)$$

Dabei soll ω als komponentenweise auf die Matrizen $\partial_M \Xi$ und $(\partial_M)^T \Xi$ angewandt verstanden werden.

Beweis: Aus den Gleichungen (6.13) und (2.12) folgt, dass für jede Wahl an Konstanten $c_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \square \omega \left(\sum c_{\mu\nu} \lambda^{\mu\nu}(x) \right) &= \omega \left(\square \sum c_{\mu\nu} \lambda^{\mu\nu}(x) \right) \\ &= -\omega \left(\sum c_{\mu\nu} \lambda_{\tau}^{\tau\mu\nu}(x) \right) \\ &= -\omega \left(\sum c_{\mu\nu} L_{\tau}^{\tau\mu\nu} \right)(x) = 0 \end{aligned}$$

ist. Die letzte Identität gilt wegen

$$L_{\tau}^{\tau\mu\nu}(\beta) = c_{\deg \mu+2} \partial_{\tau}^{\tau\mu\nu} \left(\frac{1}{(\beta, \beta)} \right) = c_{\deg \mu+2} \partial^{\mu\nu} \square \left(\frac{1}{(\beta, \beta)} \right) = 0.$$

Ausdrücke der Form $\sum c_{\mu\nu} L^{\mu\nu}(x)$ sind nach Lemma (4.1) dicht in der Menge der zulässigen Makroobservablen bzgl. der Halbnormen (2.15), und die $S_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustände sind nach Gleichung (2.14) stetig bezüglich dieser Halbnormen. Damit folgt :

$$\square \omega(\Xi)(x) = 0. \quad (6.21)$$

Um die Gleichungen (6.19) und (6.20) zu zeigen, benutzen wir die Gleichungen (6.14) und (6.15):

$$\sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, s\dot{t}} \lambda_{\nu}^{\mu\tau}(x) - \sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, s\dot{t}} \partial_{\nu} \lambda^{\mu\tau}(x) = 0 \quad (6.22)$$

$$\sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, t\dot{r}} \lambda_{\nu}^{\mu\tau}(x) + \sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, t\dot{r}} \partial_{\nu} \lambda^{\mu\tau}(x) = 0. \quad (6.23)$$

Dann bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} \sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, t\dot{r}} L_{\nu}^{\mu\tau}(\beta) &= c_{\deg \mu+2} \sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, t\dot{r}} \partial_{\nu}^{\mu\tau} \left(\frac{1}{(\beta, \beta)} \right) = c_{\deg \mu+2} \partial^{\mu} (\partial^M \partial_M)_{\dot{t}}^{\dot{r}} \left(\frac{1}{(\beta, \beta)} \right) \\ &= c_{\deg \mu+2} \partial^{\mu} \delta_{\dot{t}}^{\dot{r}} \square \left(\frac{1}{(\beta, \beta)} \right) = 0, \end{aligned}$$

ebenso wie auch $\sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, st} L_\nu^{\mu\tau}(\beta) = 0$ ist. Zusammen mit (6.23) und (6.22) folgt daraus, dass für jede Wahl von Konstanten c_μ

$$\partial_\nu \omega \left(\sum c_\mu \sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, st} L^{\mu\tau} \right) (x) = 0$$

$$\partial_\nu \omega \left(\sum c_\mu \sigma^{\nu, \dot{r}s} \sigma_{\tau, tr} L^{\mu\tau} \right) (x) = 0$$

gilt. Analog zum Beweis der beiden Gleichungen (6.47) und (6.48) nutzen wir Lemma 4.1 und die Stetigkeit der ω aus, um die Gleichungen

$$\sigma^{\nu, \dot{r}s} \partial_\nu \omega (\sigma_{\mu, st} \partial^\mu \Xi) = 0$$

$$\sigma^{\nu, \dot{r}s} \partial_\nu \omega (\sigma_{\mu, tr} \partial^\mu \Xi) = 0,$$

was wir mit der Notation (3.3) kurz als

$$\partial^M \omega (\partial_M \Xi) (x) = 0$$

$$(\partial^M)^T \omega ((\partial_M)^T \Xi) (x) = 0$$

schreiben können. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die letzten beiden Differentialgleichungen (6.19) und (6.20) kann in einer anderen Form schreiben:

Lemma 6.3 *Die Differentialgleichungen*

$$\partial^M \omega (\partial_M \Xi) (x) = 0 \tag{6.24}$$

$$(\partial^M)^T \omega ((\partial_M)^T \Xi) (x) = 0 \tag{6.25}$$

die die Funktion $x \rightarrow \omega(\Xi)(x)$ im Sinne von Distributionen erfüllen, sind äquivalent zu

$$\partial_\mu \omega (\partial^\mu \Xi) (x) = 0 \tag{6.26}$$

$$\partial_\mu \omega (\partial_\nu \Xi) (x) = \partial_\nu \omega (\partial_\mu \Xi) (x), \tag{6.27}$$

wobei $\partial_\mu \Xi$ diejenige zulässige Makroobservable ist, die zu der thermalen Funktion $\beta \mapsto \partial_\mu \Xi(\beta)$ gehört.

Beweis: Zuerst beweisen wir, dass aus (6.24) und (6.25) die Gleichungen (6.26) und (6.27) folgen. Dafür schreiben wir die Matrixgleichung

$$\begin{aligned} & \partial^M \omega (\partial_M \Xi) (x) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(\partial_0 \Xi - \partial_3 \Xi)(x) & \omega(-\partial_1 \Xi + i\partial_2 \Xi)(x) \\ \omega(-\partial_1 \Xi - i\partial_2 \Xi)(x) & \omega(\partial_0 \Xi + \partial_3 \Xi)(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in Komponenten aus, wobei wir im Folgenden der Übersichtlichkeit halber die Abkürzung

$$[\mu\nu] \doteq \partial_\mu \omega (\partial_\nu \Xi) (x). \tag{6.28}$$

benutzen:

$$[00] - [11] - [22] - [33] - [03] + [30] - i[12] + i[21] = 0, \quad (6.29)$$

$$-[01] + i[02] - [31] + i[32] + [10] - i[20] + [13] - i[23] = 0, \quad (6.30)$$

$$[10] + i[20] - [13] - i[23] - [01] + [31] - i[02] + i[32] = 0 \text{ und} \quad (6.31)$$

$$[00] - [11] - [22] - [33] - i[21] + i[12] - [30] + [03] = 0. \quad (6.32)$$

Ebenso erhält man aus der Gleichung

$$\begin{aligned} & (\partial^M)^T \omega ((\partial_M)^T \Xi)(x) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 + i\partial_2 \\ \partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(\partial_0 \Xi - \partial_3 \Xi)(x) & \omega(-\partial_1 \Xi - i\partial_2 \Xi)(x) \\ \omega(-\partial_1 \Xi + i\partial_2 \Xi)(x) & \omega(\partial_0 \Xi + \partial_3 \Xi)(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die vier Komponenten

$$[00] - [11] - [22] - [33] - [03] + [30] + i[12] - i[21] = 0, \quad (6.33)$$

$$-[01] - i[02] - [31] - i[32] + [10] + i[20] + [13] + i[23] = 0, \quad (6.34)$$

$$[10] - i[20] - [13] + i[23] - [01] + [31] + i[02] - i[32] = 0 \text{ und} \quad (6.35)$$

$$[00] - [11] - [22] - [33] + i[21] - i[12] - [30] + [03] = 0. \quad (6.36)$$

Addiert man nun die Gleichungen (6.29), (6.32), (6.33) und (6.36), so erhalten wir

$$4([00] - [11] - [22] - [33]) = 0, \quad (6.37)$$

und ist das ist nichts anderes als Gleichung (6.26). Damit vereinfachen sich die Terme (6.29), (6.32), (6.33) und (6.36). Addiert man (6.29) und (6.36), so erhält man

$$[21] - [12] = 0, \quad (6.38)$$

subtrahiert man (6.32) von (6.33), so erhält man

$$[03] - [30] = 0. \quad (6.39)$$

Weiterhin erhalten wir:

(6.30) - (6.34):

$$[02] + [32] - [20] - [23] = 0 \quad (6.40)$$

(6.31) - (6.35):

$$[02] - [32] - [20] + [23] = 0 \quad (6.41)$$

(6.30) + (6.34):

$$-[01] - [31] + [10] + [13] = 0 \quad (6.42)$$

(6.31) + (6.35):

$$[01] - [31] - [10] + [13] = 0 \quad (6.43)$$

Die Summe und Differenz von (6.40) und (6.41) ergeben

$$[02] - [20] = 0 \quad \text{und} \quad [32] - [23] = 0, \quad (6.44)$$

die Summe und Differenz von (6.42) und (6.43) ergeben

$$[01] - [10] = 0 \quad \text{und} \quad [31] - [13] = 0. \quad (6.45)$$

Wir fassen (6.38), (6.39), (6.44) und (6.45) zusammen zu

$$[\mu\nu] - [\nu\mu] = 0 \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (6.46)$$

was nichts anderes als Gleichung (6.27) ist.

Die andere Richtung der Äquivalenz ist nun leicht einzusehen. Angenommen, es gelten die Differentialgleichungen (6.26) und (6.27), was in der abgekürzten Notation (6.28) $[\mu\nu] = [\nu\mu]$ und $[00] - [11] - [22] - [33] = 0$ lautet. Dann sieht man sofort, dass jede der Gleichungen (6.29) bis (6.36) gilt, und diese sind nichts als die ausgeschriebenen Komponenten der Gleichungen (6.24) und (6.25). Damit ist die Äquivalenz gezeigt.

Damit können wir die Differentialgleichungen, die $x \mapsto \omega(\Xi)(x)$ im Sinne von Distributionen erfüllt, in anderer Form aufschreiben:

Proposition 6.1 *Sei ω ein $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand über \mathcal{F} und Ξ eine zulässige Makroobservable. Dann gilt:*

$$\square \omega(\Xi)(x) = 0 \quad (6.47)$$

$$\partial^\mu \omega(\partial_\mu \Xi)(x) = 0 \quad (6.48)$$

$$\partial_\mu \omega(\partial_\nu \Xi)(x) - \partial_\nu \omega(\partial_\mu \Xi)(x) = 0. \quad (6.49)$$

Beweis: Lemma 6.2 und Lemma 6.3.

Diese Bewegungsgleichungen, die für beliebige zulässige Makroobservablen Ξ gelten, nehmen im Fall der Phasenraumteilchendichte $\Xi = N_p$ eine besondere Form an:

Korollar 6.1 *Sei $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^4$ offen und ω ein $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand. Sei weiterhin p ein positiver, lichtartiger Vektor und N_p die Phasenraumdichte, also die durch $\beta \mapsto (2\pi)^{-3}(1 + e^{(\beta, p)})^{-1}$ definierte zulässige Makroobservable. Dann gilt*

$$\square \omega(N_p)(x) = 0 \quad (6.50)$$

$$p_\mu \partial^\mu \omega(N_p)(x) = 0 \quad (6.51)$$

$$p_\mu \partial_\nu \omega(N_p)(x) = p_\nu \partial_\mu \omega(N_p)(x) \quad (6.52)$$

für $x \in \mathcal{O}$. Die letzten beiden Behauptungen sind äquivalent zu

$$p_M \partial^M \omega(N_p)(x) = (p_M)^T (\partial^M)^T \omega(N_p)(x) = 0 \quad (6.53)$$

Beweis: Die Funktion

$$\beta \mapsto L_p(\beta) \doteq -(2\pi)^{-3} \ln(1 + e^{-(\beta,p)}) \quad \beta \in V^+ \quad (6.54)$$

definiert eine zulässige Makroobservable, da L_p die Wellengleichung auf V^+ erfüllt. Es gilt, dass

$$\partial^\nu L_p(\beta) = (2\pi)^{-3} \frac{p^\nu}{1 + e^{(\beta,p)}} = p^\nu N_p(\beta) \quad (6.55)$$

ist. Damit folgen alle Gleichungen (6.50) bis (6.52) aus Lemma 6.1, mit $\Xi = L_p$. Die behauptete Äquivalenz der letzten beiden zu (6.53) folgt aus Lemma 6.3 und Gleichung (6.55). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für einen $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustand interpretiert man die Abbildung

$$\mathcal{O} \times \partial\bar{V}^+ \ni (x, p) \longmapsto \bar{N}_p(x) \doteq \omega(N_p)(x) \quad (6.56)$$

als mittlere Phasenraumdichte des Zustands. Es sollte angemerkt werden, dass die so hergeleiteten Differentialgleichungen im Falle der Phasenraumdichte nicht unabhängig voneinander sind:

Lemma 6.4 *Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ offen und*

$$\mathcal{O} \times \partial\bar{V}^+ \ni (x, p) \longmapsto \bar{N}_p(x) \in \mathbb{C} \quad (6.57)$$

eine Funktion, die für festes p differenzierbar im Sinne von Distributionen ist. Die Funktion erfülle die folgenden Differentialgleichungen:

$$p_\mu \partial_\nu \bar{N}_p(x) = p_\nu \partial_\mu \bar{N}_p(x) \quad \text{für alle } p \in \partial\bar{V}^+, x \in \mathcal{O}. \quad (6.58)$$

Dann erfüllt \bar{N}_p auch

$$p_\mu \partial^\mu \bar{N}_p(x) = 0 \quad (6.59)$$

$$\square \bar{N}_p(x) = 0. \quad (6.60)$$

Beweis: Wählen wir zuerst einen Vektor $p = (1, \vec{p})$. Dann ist nach Voraussetzung:

$$p^i \partial^0 \bar{N}_p(x) = \partial^i \bar{N}_p(x). \quad (6.61)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^3 p^i p^i \partial^0 \bar{N}_p(x) = \sum_{i=1}^3 p^i \partial^i \bar{N}_p(x).$$

Damit folgt wegen $\sum_{i=1}^3 (p^i)^2 = 1$ Gleichung (6.59). Weiterhin folgt aus Gleichung (6.61):

$$\begin{aligned} \Delta \bar{N}_p(x) &= \sum_i \partial^i \partial^i \bar{N}_p(x) = \sum_{i=1}^3 \partial^i p^i \partial^0 \bar{N}_p(x) \\ &= \sum_{i=1}^3 p^i \partial^0 \partial^i \bar{N}_p(x) \\ &= \sum_{i=1}^3 p^i p^i \partial^0 \partial^0 \bar{N}_p(x) \\ &= (\partial^0)^2 \bar{N}_p(x), \end{aligned}$$

was nichts anderes als Gleichung (6.60) ist. Die obige Argumentationskette gilt genauso für Vielfache von Vektoren wie $p = (1, \vec{p})$, wie man leicht sieht.

Das obige Lemma zeigt, dass die Gleichung (6.52) die beiden Differentialgleichungen (6.50) und (6.51) impliziert, und damit nach Korollar 6.1 auch die Gleichungen (6.53).

6.3 \mathcal{S}_O -thermale Zustände und die Teilchendichte

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass jeder \mathcal{S}_O -thermale Zustand durch Gleichung (6.56) eine Phasenraumdichtenverteilung $(x, p) \mapsto \bar{N}_p(x)$ definiert. Wie wir im Folgenden zeigen werden, gilt umgekehrt: Gegeben eine solche Funktion, die die Eigenschaften aus Lemma 6.1 erfüllt und die in beiden Variablen schwach integrabel ist, dann definiert dieses \bar{N} ein lineares Funktional auf einer Unter algebra von \mathcal{F} .

Lemma 6.5 *Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ ein Gebiet und*

$$\mathcal{O} \times \partial \bar{V}^+ \ni (x, p) \longmapsto \bar{N}_p(x) \in \mathbb{R} \quad (6.62)$$

eine Funktion, die

$$p_\mu \partial_\nu \bar{N}_p(x) = p_\nu \partial_\mu \bar{N}_p(x) \quad (6.63)$$

im Sinne von Distributionen erfüllt, sowie schwach integrabel in beiden Variablen ist. Dann wird durch

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\psi}(f)\psi(g)) &\doteq \omega_\infty(\bar{\psi}(f)\psi(g)) \\ &+ i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^8} dx dy g^T(x) p'_M \bar{f}(y) \sin(x-y, p') \bar{N}_{p'}(x+y) \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(g)\bar{\psi}(f)) &\doteq \omega_\infty(\bar{\psi}(f)\psi(g)) \\ &- i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^8} dx dy g^T(x) p'_M \bar{f}(y) \sin(x-y, p') \bar{N}_{p'}(x+y) \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\varphi(\psi(g)\psi(f)) = \varphi(\bar{\psi}(g)\bar{\psi}(f)) = \varphi(\psi(f)) = \varphi(\bar{\psi}(f)) = 0 \quad (6.66)$$

mit $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathbb{C}^2)$ und $p' = (|\vec{p}'|, \vec{p}')$ ein quasifreies und eichinvariantes Funktional auf der Algebra

$$\mathcal{F}_\mathcal{O}^0 \doteq \bigcup_{\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}} \mathcal{F}(\mathcal{O}') \quad (6.67)$$

definiert.

Beweis: Es sei angemerkt, dass $\mathcal{F}_\mathcal{O}^0$ in Gleichung (6.67) eine normierte $*$ -Algebra mit der C^* -Eigenschaft ist. Sie ist jedoch nicht vollständig.

Das oben definierte Funktional ist mit Sicherheit ein quasifreies und eichinvariantes Funktional auf der freien Algebra, die von den $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(g)$ mit $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathbb{C}^2)$ erzeugt wird. Da $\mathcal{F}_\mathcal{O}^0$ aus der freien Algebra durch Herausteilen von Idealen entsteht, müssen wir testen, ob der Wert von φ auf diesen Idealen identisch null ist. Technisch bedeutet dies, dass folgende Relationen geprüft werden müssen:

- Kommutatorrelation:

$$\varphi(\bar{\psi}(f)\psi(g)) + \varphi(\psi(g)\bar{\psi}(f)) = \left\{ \bar{\psi}(f), \psi(g) \right\} \quad (6.68)$$

Diese Gleichung folgt aus der Definition (6.64) und (6.65), sowie $\omega_\infty(\bar{\psi}(f)\psi(g)) + \omega_\infty(\psi(g)\bar{\psi}(f)) = \left\{ \bar{\psi}(f), \psi(g) \right\}$.

- Stern-Relation:

$$\varphi(\bar{\psi}(f)\psi(g)) = \overline{\varphi(\bar{\psi}(\bar{g})\psi(\bar{f}))} \quad (6.69)$$

Dieses folgt ebenfalls aus der Definition, der Tatsache, dass ω_∞ diese Gleichung erfüllt, und dass \bar{N} eine reelle Funktion ist.

- Dirac-Gleichung:

$$\varphi\left(\bar{\psi}(f)\psi(-i(\partial^M)^T g)\right) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi\left(\bar{\psi}(i\partial^M f)\bar{\psi}(g)\right) = 0 \quad (6.70)$$

Hierfür benutzen wir, dass der Vakuumzustand Gleichung (6.70) erfüllt.

$$\begin{aligned} \varphi\left(\bar{\psi}(f)\psi(-i(\partial^M)^T g)\right) &= \omega_\infty\left(\bar{\psi}(f)\psi(-i(\partial^M)^T g)\right) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^8} dx dy ((\partial^M)^T g)^T(x) p'_M \bar{f}(y) \sin(x-y, p') \bar{N}_{p'}(x+y) \\ &= 0 - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^8} dx dy g^T(x) \tilde{\sigma}^\mu p'_M \bar{f}(y) \partial_{x^\mu} (\sin(x-y, p') \bar{N}_{p'}(x+y)) \end{aligned}$$

mit $\partial^M = \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu$. Wegen $a^M a_M = (a, a)1_2$ folgt damit:

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\bar{\psi}(f) \psi(-i(\partial^M)^T g)\right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^8} dx dy g^T(x) p'^M p'_M \bar{f}(y) (\cos(x-y, p')) \bar{N}(x+y, p') \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^8} dx dy g^T(x) \left((p'_M)^T ((\partial_x^M)^T \bar{N}(x+y, p')) \right)^T \bar{f}(y) \sin(x-y, p') \\ &= 0. \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus

$$(p^M)^T \partial_M^T \bar{N}_p(x) = 0 \quad (6.71)$$

folgt, was wegen Lemma 6.4 eine Konsequenz aus (6.63) ist. Die andere Gleichung in (6.70) beweist man analog.

Ein jeder $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermale Zustand resultiert in einer Phasenraumdichtenfunktion $\bar{N}_p(x)$, die gewisse Differentialgleichungen erfüllt. Das obige Resultat belegt einen (Teil-)Umkehrschluss: Gegeben eine Funktion $\bar{N}_p(x)$, die die entsprechenden Differentialgleichungen erfüllt, so kann man daraus ein lineares Funktional auf einer Teilmenge von \mathcal{F} konstruieren. Dieses impliziert nun eine gewisse Konsistenz des Ansatzes zur Charakterisierung von lokalthermalen Zuständen.

Das so konstruierte Funktional wird nun im Allgemeinen kein Zustand sein, wie man sich leicht überlegt. Nur wenn φ die zusätzliche Eigenschaft hat, positiv zu sein, also

$$\varphi(A^* A) \geq 0 \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_\mathcal{O}^0 \quad (6.72)$$

erfüllt, dann reicht dies nach Korollar C.1 aus dem Anhang aus, um einen eichinvarianten, quasifreien Zustand auf der C^* -Algebra $\mathcal{F}_\mathcal{O} = \overline{\mathcal{F}_\mathcal{O}^0}$, zu definieren. Lemma C.3 garantiert dann, dass φ zu einem Zustand auf ganz \mathcal{F} fortgesetzt werden kann. Es ist zwar nicht sicher, ob ein solcher Zustand irgendwelche thermale Eigenschaften besitzt, insbesondere, ob er ein $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermaler Zustand ist. Trotzdem besteht die Möglichkeit, dass man sich auf diese Weise $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermale Zustände verschaffen kann.

6.4 Lokale thermale Zustände scharfer Temperatur

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir diskutiert, wie man lokale thermale Zustände erhalten könnte. Man kann sich nun fragen, ob es $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermale Zustände geben kann, die lokal eine scharf definierte Temperatur haben, bei denen also an jedem Punkt der Referenzzustand ein KMS-Zustand ist. Man kann sich leicht überlegen, dass für einen solchen Zustand ω_{ST} dann nach (5.50) und (2.10) gelten muss, dass

$$\omega_{ST}(N_p)(x) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{1 + e^{(\beta(x), p)}} \quad (6.73)$$

ist, mit β einer schwach integriblen Funktion $\beta : V^+ \rightarrow V^+$, sodass die Differentialgleichungen (6.51) bis (6.52) in einem Distributionensinne gelten. Die x -Abhängigkeit von β ist jedoch nicht beliebig, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 6.6 *Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ offen und zusammenhängend und ω_{ST} ein \mathcal{S}_O -thermaler Zustand mit lokal scharfem Wert für β , also*

$$\omega_{ST}(N_p)(x) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{1 + e^{(\beta(x), p)}}. \quad (6.74)$$

Dann ist $\beta(x) = \lambda x + c$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^4$.

Beweis: Nach Lemma (6.1) gelten die folgenden Differentialgleichungen im Sinne von Distributionen:

$$\square \frac{1}{1 + e^{(\beta(x), p)}} = 0 \quad (6.75)$$

$$(p, \partial) \frac{1}{1 + e^{(\beta(x), p)}} = 0 \quad (6.76)$$

$$p_\mu \partial_\nu \frac{1}{1 + e^{(\beta(x), p)}} - p_\nu \partial_\mu \frac{1}{1 + e^{(\beta(x), p)}} = 0 \quad (6.77)$$

für alle $p \in \partial \bar{V}^+$. Definieren wir $f(t) \doteq 1/(1 + e^t)$ für $t > 0$, dann erhalten wir:

$$\square(\beta(x), p) f'((\beta(x), p)) + \partial_\mu(\beta(x), p) \partial^\mu(\beta(x), p) f''((\beta(x), p)) = 0 \quad (6.78)$$

$$((p, \partial)(\beta(x), p)) f'((\beta(x), p)) = 0 \quad (6.79)$$

$$((p_\mu \partial_\nu - p_\nu \partial_\mu)(\beta(x), p)) f'((\beta(x), p)) = 0 \quad (6.80)$$

Weil f' keine Nullstellen hat, können wir die letzten beiden Gleichungen auch als

$$p_\mu \partial^\mu(\beta(x), p) = 0 \quad (6.81)$$

$$p_\mu \partial_\nu(\beta(x), p) = p_\nu \partial_\mu(\beta(x), p) \quad (6.82)$$

schreiben. Nun gelten diese Gleichungen für alle positiven, lichtartigen p und wir setzen nun die beiden Vektoren $p = (1, 0, 0, 1)$ und $p = (1, 0, 0, -1)$ in (6.82) ein und erhalten:

$$\partial^1(\beta_0 - \beta_3) = 0 \quad \partial^2(\beta_0 - \beta_3) = 0 \quad (6.83)$$

$$\partial^1(\beta_0 + \beta_3) = 0 \quad \partial^2(\beta_0 + \beta_3) = 0 \quad (6.84)$$

$$\partial^3(\beta_0 - \beta_3) = \partial^0(\beta_0 - \beta_3) \quad (6.85)$$

$$\partial^3(\beta_0 + \beta_3) = -\partial^0(\beta_0 + \beta_3). \quad (6.86)$$

Addiert und subtrahiert man hier je die beiden Gleichungen in der ersten und der zweiten Zeile, so erhält man

$$\partial^2 \beta_0 = \partial^2 \beta_3 = \partial^1 \beta_0 = \partial^1 \beta_3 = 0, \quad (6.87)$$

addiert und subtrahiert man die letzten beiden Zeilen voneinander, so erhält man

$$\partial^0 \beta_0 = \partial^3 \beta_3, \quad \partial^0 \beta_3 = -\partial^3 \beta_0. \quad (6.88)$$

Man hätte in p anstatt $p^3 = 1$ z.B. auch $p^2 = 1$ und den räumlichen Rest zu Null setzen können, deswegen sind die Gleichungen (6.83)-(6.87) richtig, wenn man die Komponenten 1,2 und 3 beliebig permutiert, und so erhält man für feste μ und ν :

$$\partial^\mu \beta_\mu = \partial^\nu \beta_\nu \quad (\text{keine Summation}) \quad (6.89)$$

$$\partial^\mu \beta_\nu = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu. \quad (6.90)$$

Damit wissen wir, dass β der folgenden Gleichung genügen muss:

$$\partial^\mu \beta_\nu(x) = \lambda(x) \delta^\mu_\nu \quad \text{für } x \in \mathcal{O}, \quad (6.91)$$

mit $\lambda : V^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist aber

$$\partial^\mu(\beta(x), p) \partial_\mu(\beta(x), p) = \lambda(x)^2(p, p) = 0, \quad (6.92)$$

und da wir wissen, dass f'' keine Nullstellen hat, wird Gleichung (6.78) zu

$$\square(\beta(x), p) = 0 \quad \text{für alle } p \in \partial\bar{V}^+. \quad (6.93)$$

Und deswegen mit Gleichung (6.91):

$$(\partial\lambda(x), p) = 0 \quad \text{für alle } p \in \partial\bar{V}^+. \quad (6.94)$$

Da die Elemente aus $\partial\bar{V}^+$ eine Basis des \mathbb{R}^4 enthalten, gilt damit

$$\partial\lambda(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathcal{O}, \quad (6.95)$$

Also ist λ eine Konstante, denn \mathcal{O} ist zusammenhängend nach Voraussetzung. Damit gilt nach (6.91), dass

$$\beta(x) = \lambda x + c \quad (6.96)$$

mit $c \in \mathbb{R}^4$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, und das war die Behauptung.

Wenn es also einen $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand mit lokal scharf definierter Temperatur $\beta(x)$ gibt, so gibt es nur eine Möglichkeit, nämlich dass $\beta(x) = \lambda x + c$ ist. Es ist nun eine interessante Frage, ob diese einzige Möglichkeit eines $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustandes mit lokal scharfer Temperatur, überhaupt ein wohldefinierter Zustand ist, also ob die Phasenraumteilchendichte

$$\bar{N}_p(x) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{1 + e^{(\lambda x + c, p)}} \quad x \in \mathcal{O}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}^4 \quad (6.97)$$

mit Hilfe der Konstruktion aus Kapitel 6.3 überhaupt einen $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand definiert, und wie groß \mathcal{O} dann maximal sein kann. Diese Fragen werden wir im folgenden Kapitel klären.

7 Der Hot-Bang Zustand

7.1 Existenz und Positivität

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, dass, wenn es einen nichttrivialen $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustand ω gibt, der an jedem Punkt eine scharf definierte Temperatur $\beta(x)$ für $x \in \mathcal{O}$ hat, dieser die Eigenschaft

$$\omega(N_p)(x) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{1 + e^{(\lambda x + c, p)}} \quad x \in \mathcal{O}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (7.1)$$

haben muss. Wir werden diesen Zustand nun für $\lambda > 0$ und $c = 0$ konstruieren. Nach Kapitel 6.3 beschreibt

$$\begin{aligned} \omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f}) \psi(g)) &\doteq \omega_{\infty}(\bar{\psi}(\bar{f}) \psi(g)) \\ &\quad + i(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^s} dx dy g^T(x) p'_M \bar{f}(y) \frac{\sin(x - y, p')}{1 + e^{\lambda(p', x+y)}} \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \omega_{hb}(\psi(g) \bar{\psi}(\bar{f})) &\doteq \omega_{\infty}(\psi(g) \bar{\psi}(\bar{f})) \\ &\quad - i(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{|\vec{p}|} \int_{\mathbb{R}^s} dx dy g^T(x) p'_M \bar{f}(y) \frac{\sin(x - y, p')}{1 + e^{\lambda(p', x+y)}} \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f}) \bar{\psi}(\bar{g})) = \omega_{hb}(\psi(f) \psi(g)) = \omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f})) = \omega_{hb}(\psi(f)) \doteq 0 \quad (7.4)$$

für $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ und für $\lambda > 0$ ein quasifreies Funktional über einer dichten Teilmenge von \mathcal{F} , wenn die Integrale überhaupt existieren. Wie wir im Folgenden zeigen werden, existieren sie, wenn man sich auf $f, g \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)$, also Funktionen mit kompaktem Träger im Vorwärtslichtkegel beschränkt.

Hilfslemma 7.1 *Sei $f \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C})$ und $\mathbb{C}_+ \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Dann ist für jedes $p' = (|\vec{p}|, \vec{p})$ die Abbildung*

$$\mathbb{C}^4 \ni \zeta \longmapsto \tilde{f}(\zeta) \doteq \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx e^{i(x, \zeta)} f(x) \in \mathbb{C} \quad (7.5)$$

holomorph und es gilt: Es gibt ein $\delta > 0$ und für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $C_N > 0$, sodass

$$|\tilde{f}(zp')| \leq C_N \frac{e^{-\delta |\vec{p}| \text{Im } z}}{(1 + |z| |\vec{p}|)^N} \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}_+}. \quad (7.6)$$

Beweis: Die Aussage über die Holomorphie folgt aus der Kompaktheit des Trägers, weswegen unter dem Integralzeichen differenziert werden darf. Nach N -maligem partiellen Differenzieren erhält man für $z \in \overline{\mathbb{C}_+}$:

$$(-iz)^N |\vec{p}|^N \tilde{f}(zp') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx e^{iz(p', x)} \partial_0^N f(x). \quad (7.7)$$

Nun gilt nach Cauchy-Schwartz $e^{-\operatorname{Im} z(p',x)} \leq e^{-\delta \operatorname{Im} z |\vec{p}'|}$ mit $\delta \doteq \min_{x \in \operatorname{supp} f} x^0 - |\vec{x}| > 0$, weil $\operatorname{supp} f$ in V^+ enthalten und kompakt ist, und $\operatorname{Im} z \geq 0$. Bilden wir den Betrag auf beiden Seiten von Gleichung (7.7), so erhalten wir:

$$|\tilde{f}(zp')| \leq C_1 \frac{e^{-\delta |\vec{p}'| \operatorname{Im} z}}{|z|^N |\vec{p}'|^N} \quad |z| |\vec{p}'| \neq 0. \quad (7.8)$$

Andererseits ist \tilde{f} auf der Menge $\|\zeta\|_{eukl} \leq \sqrt{2}$ beschränkt, und damit gilt

$$|\tilde{f}(zp')| \leq C_2 e^{-\delta |\vec{p}'| \operatorname{Im} z} \quad \text{für alle } \|zp'\|_{eukl} \leq \sqrt{2}. \quad (7.9)$$

Es ist aber $\|zp'\|_{eukl} = \sqrt{2} |z| |\vec{p}'|$, also gilt Ungleichung (7.9) für alle $|z| |\vec{p}'| \leq 1$. Weiterhin gilt

$$\frac{1}{|z|^N |\vec{p}'|^N} \leq \frac{2^N}{(1 + |z| |\vec{p}'|)^N} \quad \text{für } |z| |\vec{p}'| \geq 1, \quad (7.10)$$

wie man leicht zeigt. Mit der Definition $C_N \doteq 2^N \max\{C_1, C_2\}$ folgt aus (7.10) mit den Ungleichungen (7.8) und (7.9) die Behauptung

$$|\tilde{f}(zp')| \leq C_N \frac{e^{-\delta |\vec{p}'| \operatorname{Im} z}}{(1 + |z| |\vec{p}'|)^N} \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}_+}. \quad (7.11)$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung können wir die Existenz des Funktionals zeigen:

Korollar 7.1 *Seien $f, g \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)$. Dann existieren die Integrale (7.2) und (7.3).*

Beweis: Weil je beide Komponenten von f und g die Voraussetzungen des Hilfslemmas (7.1) erfüllen und $|p^i| \leq |\vec{p}'|$ für $i = 1, 2, 3$ ist, existiert zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Zahl $C_N > 0$, sodass

$$|\tilde{g}^T(zp') p'_M \overline{\tilde{f}(zp')}| \leq \frac{C_N |\vec{p}'|}{(1 + |z| |\vec{p}'|)^{2N}} \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}_+} \quad (7.12)$$

gilt. Das zeigt, dass für jedes $z \in \overline{\mathbb{C}_+} \setminus \{0\}$

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}'|} \tilde{g}^T(zp') p'_M \overline{\tilde{f}(zp')} < \infty. \quad (7.13)$$

Weiterhin gilt wegen der Skaleninvarianz des Integrals für $z = r e^{i\phi}$

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}'|} \tilde{g}^T(r e^{i\phi} p') p'_M \overline{\tilde{f}(r e^{i\phi} p')} = \frac{2\pi}{r^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}'|} \tilde{g}^T(e^{i\phi} p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i\phi} p')}, \quad (7.14)$$

außerdem ist wegen Gleichung (7.12) die Abbildung

$$[0, \pi] \ni \phi \longmapsto \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}'|} \tilde{g}^T(e^{i\phi} p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i\phi} p')} \right| \leq C \quad (7.15)$$

beschränkt.

Sei nun $\lambda > 0$. Dann gilt wegen Gleichung (7.14) und Gleichung (7.15):

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{g}^T((\pm 1 + in\lambda)p') p'_M \overline{\tilde{f}((\pm 1 + in\lambda)p')} \right| \quad (7.16)$$

$$\leq 2\pi C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + n^2\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.17)$$

Die Existenz der Reihe (7.17) für jedes $\lambda \neq 0$ ist nicht schwer zu zeigen. Also konvergieren die beiden Reihen

$$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{g}^T((1 + in\lambda)p') p'_M \overline{\tilde{f}((1 + in\lambda)p')} \quad (7.18)$$

$$\text{und } 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{g}^T((-1 + in\lambda)p') p'_M \overline{\tilde{f}((-1 + in\lambda)p')} \quad (7.19)$$

absolut. Aus diesem Grund dürfen Integral und Summe vertauscht werden. Wegen

$$\tilde{g}^T((\pm 1 + in\lambda)p') p'_M \overline{\tilde{f}((\pm 1 + in\lambda)p')} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx dy g^T(x) p'_M \overline{f(y)} e^{\pm i(p', x-y)} e^{-n\lambda p'(x+y)} \quad (7.20)$$

erhält man als Summe der beiden Reihen (7.18) und (7.19):

$$\begin{aligned} & 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{g}^T((1 + in\lambda)p') p'_M \overline{\tilde{f}((1 + in\lambda)p')} \\ & + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{g}^T((-1 + in\lambda)p') p'_M \overline{\tilde{f}((-1 + in\lambda)p')} \\ & = 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \int dx dy g^T(x) p'_M \overline{f(y)} e^{i(p', x-y)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-\lambda(p', x+y)})^n \right) \\ & + 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \int dx dy g^T(x) p'_M \overline{f(y)} e^{-i(p', x-y)} \left((e^{-\lambda(p', x+y)}) \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-\lambda(p', x+y)})^{(n-1)} \right) \\ & = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \int dx dy g^T(x) p'_M \overline{f(y)} \left(\frac{e^{i(p', x-y)}}{1 + e^{\lambda(p', x+y)}} + \frac{e^{-i(p', x-y)}}{1 + e^{-\lambda(p', x+y)}} \right) \\ & = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \int dx dy g^T(x) p'_M \overline{f(y)} \left(\frac{2i \sin((p', x-y))}{1 + e^{\lambda(p', x+y)}} + e^{-i(p', x-y)} \right) \\ & = \omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f})\psi(g)). \end{aligned}$$

Aufgrund der Konvergenz der Reihen (7.18) und (7.19) existiert auch $\omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f})\psi(g))$. Genauso beweist man, dass $\omega_{hb}(\psi(g)\bar{\psi}(f))$ existiert. Durch die Gleichungen (7.2) - (7.4) ist folglich ein Funktional definiert, wenn die Funktionen f und g in (7.2) - (7.4) kompakten Träger im Vorwärtslichtkegel haben.

Das so definierte Funktional kann zu einem eichinvarianten, quasifreien Zustand auf \mathcal{F}_{V^+} fortgesetzt werden. Um dies zu zeigen, betrachten wir zunächst die Analytizitätseigenschaften von Funktionen der Form (7.13) genauer.

Lemma 7.1 *Sei $f \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)$. Dann ist die Funktion*

$$F : \mathbb{C}_+ \ni z \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(zp') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}^{-1}p')} \in \mathbb{C} \quad (7.21)$$

holomorph und für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C}_+ , die gegen ein $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konvergiert, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(z_n p') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}_n^{-1} p')} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(r p') p'_M \overline{\tilde{f}(r^{-1} p')}. \quad (7.22)$$

Beweis: Nach Hilfslemma (7.1) und mit Hilfe von

$$(1 + |z| |\vec{p}|) (1 + |\bar{z}^{-1}| |\vec{p}|) = 1 + |\vec{p}|^2 + |\vec{p}| (|z|^{-1} + |z|) \geq 1 + |\vec{p}|^2 \quad (7.23)$$

wissen wir, dass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $C_N > 0$ gibt, sodass

$$\left| \tilde{f}(zp') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}^{-1} p')} \right| \leq C_N \frac{|\vec{p}|}{(1 + |\vec{p}|^2)^N} \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}_+} \setminus \{0\} \quad (7.24)$$

ist. Sei γ ein in \mathbb{C}_+ verlaufender, geschlossener, zusammenziehbarer stückweise C^1 -Weg. Dann gilt

$$\int_{\gamma} dz F(z) = \int_0^1 dt \dot{\gamma}(t) F(\gamma(t)). \quad (7.25)$$

Wegen der Abschätzung (7.24) gilt der Satz von Fubini, und man darf die Integration über dt vor der Integration über d^3p in Gleichung (7.21) durchführen. Der Integrand

$$z \mapsto \tilde{f}(zp') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}^{-1} p')} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx dy f^T(x) p'_M \overline{f(y)} e^{i(p', zx - z^{-1}y)} \quad (7.26)$$

ist eine analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Der Weg γ verläuft in \mathbb{C}_+ , was einfach zusammenhängend ist, weswegen das Integral über dt und damit auch das über d^3p verschwindet. Daraus folgt:

$$\int_{\gamma} dz F(z) = 0. \quad (7.27)$$

Damit ist die Funktion F holomorph nach dem Integralsatz von Cauchy, da jedes Konturintegral über einen geschlossenen Weg im Definitionsbereich verschwindet. Dieselbe

Abschätzung (7.24) garantiert auch, dass man in der Formel (7.22) die Integration und den Grenzwertprozess vertauschen darf. Dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(z_n p') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}_n^{-1} p')} = \tilde{f}(r p') p'_M \overline{\tilde{f}(r^{-1} p')} \quad (7.28)$$

gilt, folgt sofort aus der Stetigkeit von $\tilde{f}(z p')$ bezüglich z . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lemma 7.2 *Sei $f \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)$ und $0 < \alpha < 1$. Sei im Folgenden*

$$\mathbb{C}_{+, \alpha} \doteq \{z \in \mathbb{C}_+ \mid \arg z < \frac{\pi}{1 + \alpha}\}. \quad (7.29)$$

Dann ist die Funktion

$$F_\alpha : \mathbb{C}_{+, \alpha} \ni z \longmapsto \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(z^{1+\alpha} p') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}^{\alpha-1} p')} \in \mathbb{C} \quad (7.30)$$

holomorph, und für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}_{+, \alpha}$, die gegen ein $r > 0$ konvergiert, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\alpha(z_n) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(r^{1+\alpha} p') p'_M \overline{\tilde{f}(r^{\alpha-1} p')}. \quad (7.31)$$

Beweis: Zuerst bemerken wir, dass

$$\mathbb{C}_{+, \alpha} \ni z \longmapsto z^{1+\alpha} \in \mathbb{C}_+ \quad (7.32)$$

in der Tat holomorphe Funktionen sind und wegen (7.32) das Integral (7.30) auch wirklich existiert. Nach Hilfslemma (7.1) und mit Hilfe von

$$(1 + |z^{1+\alpha}| |\vec{p}|) (1 + |\bar{z}^{\alpha-1}| |\vec{p}|) = 1 + |z|^{2\alpha} |\vec{p}|^2 + |\vec{p}| (|z|^{\alpha-1} + |z|^{1+\alpha}) \quad (7.33)$$

$$\geq 1 + |z|^{2\alpha} |\vec{p}|^2 \quad (7.34)$$

wissen wir, dass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $C_n > 0$ gibt, sodass

$$\left| \tilde{f}(z^{1+\alpha} p') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}^{\alpha-1} p')} \right| \leq C_N \frac{|\vec{p}|}{(1 + |z|^{2\alpha} |\vec{p}|^2)^N} \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}_+} \setminus \{0\} \quad (7.35)$$

ist. Sei nun γ ein geschlossener und zusammenziehbarer, stückweise C^1 -Weg in $\mathbb{C}_{+, \alpha}$ und $\Gamma \doteq \min_{t \in [0, 1]} |\gamma(t)|$. Dann ist

$$\left| \frac{1}{|\vec{p}|} \tilde{f}(\gamma(t)^{1+\alpha} p') p'_M \overline{\tilde{f}(\gamma(t)^{\alpha-1} p')} \right| \leq C_N \frac{1}{(1 + |\Gamma|^{2\alpha} |\vec{p}|^2)^N} \quad (7.36)$$

und damit

$$[0, 1] \times \mathbb{R}^3 \ni (t, \vec{p}) \longmapsto \frac{1}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(\gamma(t)^{1+\alpha} p') p'_M \overline{\tilde{f}(\gamma(t)^{\alpha-1} p')} \quad (7.37)$$

eine integrable Funktion. Aufgrund dessen darf die Integrationsreihenfolge von dt und d^3p vertauscht werden. Der Integrand

$$\mathbb{C}_{+, \alpha} \ni z \longmapsto \frac{1}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(z^{1+\alpha} p') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}^{\alpha-1} p')} \in \mathbb{C} \quad (7.38)$$

ist holomorph wegen (7.32), und damit gilt wegen derselben Argumentation wie im Beweis von Lemma (7.1), dass

$$\int_{\gamma} dz F_{\alpha}(z) = 0 \quad (7.39)$$

ist. Mit einem analogen Schluss wie im Beweis von Lemma (7.1) zeigt man unter Zuhilfenahme von Abschätzung (7.36), dass Gleichung (7.31) gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lemma 7.3 *Sei $f \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)$ und $0 < \alpha < 1$. Mit den Bezeichnungen aus Lemma (7.1) und (7.2) gilt*

$$z^{3\alpha} F_{\alpha}(z) = F(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_{+, \alpha}. \quad (7.40)$$

Beweis: Die Funktion $z \mapsto z^{3\alpha} F_{\alpha}(z)$ ist nach Lemma (7.2) holomorph auf $\mathbb{C}_{+, \alpha}$ und besitzt auf der positiven reellen Achse die stetigen Randwerte

$$r^{3\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(r^{1+\alpha} p') p'_M \overline{\tilde{f}(r^{\alpha-1} p')} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(rp') p'_M \overline{\tilde{f}(r^{-1} p')} \quad (7.41)$$

nach Skaleninvarianz des Integrals. Dies sind aber genau die stetigen Randwerte, die F auf der positiven, reellen Achse annimmt. Damit stimmen die beiden auf einer Teilmenge des Randes mit offenem Inneren überein und nach einer Anwendung des Schwarzschen Spiegelungsprinzips¹⁴ sind sie auf ihrem gesamten Definitionsbereich gleich. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lemma 7.4 *Sei $f \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)$ und F gegeben durch (7.21) wie in Lemma (7.1). Definieren wir*

$$[0, \pi] \ni \phi \longmapsto L(\phi) \doteq F(e^{i\phi}) \in \mathbb{C}. \quad (7.42)$$

Wenn L nicht konstant null ist, ist L positiv, unendlich oft differenzierbar auf $(0, \pi)$, stetig am Rand und logarithmisch konvex.

Beweis: Die Glattheit von L auf $(0, \pi)$ folgt aus der Holomorphie von F auf \mathbb{C}_+ . Aus Lemma 7.1 folgt, dass L stetig am Rand ist.

Weiterhin bemerken wir, dass

$$L(\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(e^{i\phi} p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i\phi} p')} \geq 0 \quad (7.43)$$

¹⁴Siehe [19].

gilt, weil die Matrix p'_M für jedes $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ positiv semidefinit ist. Damit gilt eine Form der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung, die wir nun benutzen:

$$\begin{aligned}
|F(z)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(zp') p'_M \overline{\tilde{f}(\bar{z}^{-1}p')} \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(re^{i\phi}p') p'_M \overline{\tilde{f}(r^{-1}e^{i\phi}p')} \right|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(re^{i\phi}p') p'_M \overline{\tilde{f}(re^{i\phi}p')} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(r^{-1}e^{i\phi}p') p'_M \overline{\tilde{f}(r^{-1}e^{i\phi}p')} \\
&= \frac{r^3}{r^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(e^{i\phi}p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i\phi}p')} \right)^2 \\
&= L(\phi)^2,
\end{aligned}$$

aufgrund der Skaleninvarianz des Integrals. Diese Abschätzung ist also unabhängig von r . Besitzt die Funktion L also eine Nullstelle, so verschwindet F auf einem von der Null ausgehenden, in die obere Halbebene reichenden Strahl, und ist damit nach dem Identitätssatz identisch Null. Dies hat zur Folge, dass L identisch Null ist. Im Folgenden schließen wir diesen Fall aus.

Nun wenden wir die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung auf die Gleichung (7.40) an. Sei $\phi \in (0, \pi)$, dann gilt für $0 < \alpha < \alpha_0 \doteq \frac{\pi}{\phi} - 1$, dass

$$|L(\phi)|^2 = |e^{3i\alpha} F_\alpha(\phi)|^2 \tag{7.44}$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(e^{i(1+\alpha)\phi}p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i(1-\alpha)\phi}p')} \right|^2 \tag{7.45}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(e^{i(1+\alpha)\phi}p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i(1+\alpha)\phi}p')} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}(e^{i(1-\alpha)\phi}p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i(1-\alpha)\phi}p')} \tag{7.46}$$

$$= L(\phi(1+\alpha))L((1-\alpha)\phi). \tag{7.47}$$

Also gibt es für jedes $\phi \in (0, \pi)$ ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass

$$2 \ln L(\phi) \leq \ln L(\phi + \varepsilon) + \ln L(\phi - \varepsilon) \quad \text{für alle } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{7.48}$$

weil $L > 0$. Damit folgt

$$(\ln L)''(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L(\phi + \varepsilon) + \ln L(\phi - \varepsilon) - 2 \ln L(\phi)}{\varepsilon^2} \geq 0. \tag{7.49}$$

Dies bedeutet, dass $\ln L$ konvex ist, was zu beweisen war.

Aus der Konvexität von $\ln L$ folgt die von L . Die Konvexität von L ist entscheidend, um die Positivität des Funktionals (7.2) - (7.4) zu beweisen, wie im Folgenden deutlich wird.

Lemma 7.5 Sei $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ und $L : [a, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ konvex, einmal stetig differenzierbar auf (a, π) , stetig am Rand und monoton wachsend. Weiterhin seien $a \leq b \leq c \leq \frac{\pi}{2}$ und

$$r : [0, \pi] \ni \phi \longmapsto r(\phi) = |\cos^3 \phi|. \quad (7.50)$$

Sei $g(\phi) \doteq r(\phi)L(\phi)$. Dann gilt

$$|g(b) - g(c)| \leq g(\pi - b) - g(\pi - c). \quad (7.51)$$

Beweis: Da g auf (a, π) einmal stetig differenzierbar sowie stetig am Rand ist, gilt für $a < \phi < \frac{\pi}{2}$ wegen der Konvexität und der Monotonie:

$$\begin{aligned} 0 \leq L(\phi) \leq L(\pi - \phi), & \quad r(\phi) = r(\pi - \phi), \\ 0 \leq L'(\phi) \leq L'(\pi - \phi), & \quad r'(\phi) = -r'(\pi - \phi) < 0. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Mit diesen Abschätzungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} |g'(\phi)| &\leq |L(\phi)| |r'(\phi)| + |L'(\phi)| |r(\phi)| \\ &= L(\phi) |r'(\phi)| + L'(\phi) r(\phi) \\ &\leq L(\pi - \phi) r'(\pi - \phi) + L'(\pi - \phi) r(\pi - \phi) \\ &= g'(\pi - \phi). \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} |g(b) - g(c)| &\leq \int_b^c |g'(\phi)| d\phi \leq \int_b^c g'(\pi - \phi) d\phi \\ &= \int_{\pi-c}^{\pi-b} g'(\phi) d\phi = g(\pi - b) - g(\pi - c), \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

Die Funktion L aus Lemma 7.4 ist konvex. Im Folgenden wird das Monotonieverhalten von L in zwei Fälle unterteilt. Diese werden der Übersichtlichkeit halber in den beiden folgenden Lemmata getrennt behandelt.

Lemma 7.6 Sei $L : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine positive, konvexe, auf $(0, \pi)$ einmal stetig differenzierbare und stetig auf den Rand fortsetzbare Funktion. Sei weiterhin L entweder monoton steigend oder monoton fallend. Mit der Definition

$$r(\phi) = |\cos^3 \phi|, \quad g(\phi) = r(\phi)L(\phi) \quad (7.53)$$

gilt für jede monoton steigende Folge $0 = \phi_0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \frac{\pi}{2},$$

für die

$$A_L \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(\phi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g(\pi - \phi_n).$$

absolut konvergiert, dass

$$A_L \geq 0 \tag{7.54}$$

ist.

Beweis: Sei L monoton steigend. Dann gilt nach Lemma 7.5 für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n-1})| \leq g(\pi - \phi_{2n-1}) - g(\pi - \phi_{2n}). \tag{7.55}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} A_L &= g(\phi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n-1}) + g(\pi - \phi_{2n-1}) - g(\pi - \phi_{2n}) \right] \\ &\geq g(\phi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[g(\pi - \phi_{2n-1}) - g(\pi - \phi_{2n}) - |g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n-1})| \right] \\ &\geq g(\phi_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Sei nun L monoton fallend. Dann erfüllt die durch $\bar{L}(\phi) = L(\pi - \phi)$ definierte Funktion die Voraussetzungen von Lemma 7.5. Sie ist insbesondere monoton steigend. Damit erhalten wir

$$|g(\pi - \phi_{2n+1}) - g(\pi - \phi_{2n})| \leq g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n+1}). \tag{7.56}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_L &= g(\pi - \phi_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n+1}) + g(\pi - \phi_{2n+1}) - g(\pi - \phi_{2n}) \right] \\ &\geq g(\pi - \phi_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n+1}) - |g(\pi - \phi_{2n+1}) - g(\pi - \phi_{2n})| \right] \\ &\geq g(\pi - \phi_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lemma 7.7 Sei $L : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine positive, konvexe, auf $(0, \pi)$ einmal stetig differenzierbare und stetig auf den Rand fortsetzbare Funktion. Sei weiterhin L weder monoton steigend noch monoton fallend. Sei

$$r(\phi) = |\cos^3 \phi|, \quad g(\phi) = r(\phi)L(\phi) \tag{7.57}$$

und $0 = \phi_0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ eine monoton steigende Folge, die gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert, und für die

$$A_L \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(\phi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g(\pi - \phi_n)$$

absolut konvergiert. Dann ist $A_L \geq 0$.

Beweis: Weil L weder monoton wächst noch monoton fällt, gibt es also zwei Punkte, an denen L' unterschiedliches Vorzeichen hat, und weil L' stetig auf $(0, \pi)$ ist, auch einen Punkt $\phi_{Null} \in (0, \pi)$ mit $L'(\phi_{Null}) = 0$. Die Funktion L ist konvex, L ist daher monoton fallend auf $[0, \phi_{Null}]$ und monoton steigend auf $[\phi_{Null}, \pi]$.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass ϕ_{Null} in der Folge der ϕ_n vorkommt. Ist dies nicht der Fall, existiert also ein m mit $\phi_m < \phi_{Null} < \phi_{m+1}$, dann definieren wir eine neue Folge $\{\tilde{\phi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n &= \phi_n && \text{für } n \leq m \\ \tilde{\phi}_{m+1} &= \tilde{\phi}_{m+2} &&= \phi_{Null} \\ \tilde{\phi}_{n+3} &= \phi_{n+1} && \text{für } n \geq m. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(\tilde{\phi}_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g(\pi - \tilde{\phi}_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(\phi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g(\pi - \phi_n) \\ & \quad + g(\phi_{Null}) - g(\phi_{Null}) + g(\pi - \phi_{Null}) - g(\pi - \phi_{Null}) \\ &= A_L, \end{aligned}$$

und die beiden Folgen liefern identische Werte für A_L . Damit können wir annehmen, dass ϕ_{Null} in den ϕ_n vorkommt.

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- $\phi_{Null} < \frac{\pi}{2}$

Die Funktion L ist auf $[0, \phi_{Null}]$ monoton fallend und auf $[\phi_{Null}, \pi]$ monoton wachsend. Daraus folgt mit Hilfe von (7.57) sofort, dass g auf $[0, \phi_{Null}]$ monoton fallend und auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ monoton steigend ist.

Wir beweisen im Folgenden, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die endliche Summe

$$A_L^m = g(\phi_0) + \sum_{n=1}^m \left[g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n-1}) + g(\pi - \phi_{2n-1}) - g(\pi - \phi_{2n}) \right] \geq 0 \quad (7.58)$$

ist. Sei $\phi_{2m} \leq \phi_{Null}$. Dann gilt, da g auf $[0, \phi_{Null}]$ monoton fällt und auf $[\pi - \phi_{Null}, \pi] \subset [\frac{\pi}{2}, \pi]$ monoton steigt, dass

$$A_L^m = g(\phi_{2m}) + \sum_{n=0}^{m-1} \left[g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n+1}) \right] + \sum_{n=1}^{m-1} \left[g(\pi - \phi_{2n-1}) - g(\pi - \phi_{2n}) \right]$$

nicht negativ ist. Die Aussage gilt also für jedes m mit $\phi_{2m} \leq \phi_{Null}$. Andererseits gilt für jedes m mit $\phi_{2m} > \phi_{Null}$, dass $\phi_{2m-1} \geq \phi_{Null}$ ist, weil ϕ_{Null} in den ϕ_n vorkommt. Also ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $\phi_{2m} > \phi_{Null}$

$$\begin{aligned} & g(\phi_{2m}) - g(\phi_{2m-1}) + g(\pi - \phi_{2m-1}) - g(\pi - \phi_{2m}) \\ & \geq - \left| g(\phi_{2m}) - g(\phi_{2m-1}) \right| + g(\pi - \phi_{2m-1}) - g(\pi - \phi_{2m}) \\ & \geq 0, \end{aligned}$$

nach Lemma 7.5, denn L ist auf $[\phi_{2m-1}, \pi]$ monoton steigend. Die Aussage (7.58) gilt also für jedes m . Damit gilt sei auch für den Grenzwert $m \rightarrow \infty$:

$$0 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} A_L^m = A_L. \quad (7.59)$$

- $\phi_{Null} = \frac{\pi}{2}$

In diesem Fall ist die Funktion L auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton fallend und auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ monoton steigend, und damit gilt dies auch für g . Damit folgt die Behauptung sofort aus

$$A_L = \sum_{n=0}^{\infty} \left[g(\phi_{2n}) - g(\phi_{2n-1}) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[g(\pi - \phi_{2n-1}) - g(\pi - \phi_{2n}) \right] \geq 0. \quad (7.60)$$

- $\phi_{Null} > \frac{\pi}{2}$

Wir definieren $\bar{L}(\phi) \doteq L(\pi - \phi)$ und $\bar{g}(\phi) \doteq r(\phi)\bar{L}(\phi) = g(\pi - \phi)$. Weiterhin sei $\bar{\phi}_{Null} \doteq \pi - \phi_{Null} < \frac{\pi}{2}$. Jetzt ist \bar{g} auf $[0, \bar{\phi}_{Null}]$ monoton fallend und auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ monoton steigend. Wir schreiben nun A_L um:

$$A_L = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \bar{g}(\phi_n) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \bar{g}(\pi - \phi_n) \quad (7.61)$$

$$= \bar{g}(\phi_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{g}(\phi_{2n+1}) - \bar{g}(\phi_{2n}) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{g}(\pi - \phi_{2n}) - \bar{g}(\phi_{2n+1}) \right], \quad (7.62)$$

und beweisen im Folgenden, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Summe

$$A_L^m = \bar{g}(\phi_0) + \sum_{n=0}^m \left[\bar{g}(\phi_{2n+1}) - \bar{g}(\phi_{2n}) + \bar{g}(\pi - \phi_{2n}) - \bar{g}(\phi_{2n+1}) \right] \quad (7.63)$$

nicht negativ ist. Sei $\phi_{2m+1} \leq \phi_{Null}$. Dann gilt, weil \bar{g} auf $[0, \phi_{Null}]$ monoton fällt und auf $[\pi - \phi_{Null}, \pi]$ monoton wächst, dass

$$\begin{aligned} A_L^m &= \bar{g}(\phi_0) + \sum_{n=0}^m \left[\bar{g}(\phi_{2n+1}) - \bar{g}(\phi_{2n}) + \bar{g}(\pi - \phi_{2n}) - \bar{g}(\phi_{2n+1}) \right] \\ &= \bar{g}(\phi_{2m+1}) + \sum_{n=1}^m \left[\bar{g}(\phi_{2n-1}) - \bar{g}(\phi_{2n}) + \sum_{n=0}^m \bar{g}(\pi - \phi_{2n}) - \bar{g}(\phi_{2n+1}) \right] \\ &\geq \bar{g}(\phi_{2m+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

ist. Diese Aussage gilt also für alle m mit $\phi_{2m+1} \leq \phi_{Null}$. Sei nun $\phi_{2m+1} > \phi_{Null}$. Weil ϕ_{Null} in den ϕ_n vorkommt, ist $\phi_{2m} \geq \phi_{Null}$. Die Funktion \bar{L} ist auf $[\phi_{Null}, \pi]$ monoton wachsend und damit gilt nach Lemma (7.5)

$$\begin{aligned} &\bar{g}(\phi_{2n+1}) - \bar{g}(\phi_{2n}) + \bar{g}(\pi - \phi_{2n}) - \bar{g}(\phi_{2n+1}) \\ &\geq \bar{g}(\pi - \phi_{2n}) - \bar{g}(\phi_{2n+1}) - \left| \bar{g}(\phi_{2n+1}) - \bar{g}(\phi_{2n}) \right| \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für alle m , somit gilt sie auch für den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} A_L^m = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \bar{g}(\phi_n) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \bar{g}(\pi - \phi_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(\phi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g(\pi - \phi_n) \\ &= A_L, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Wir fassen die Aussagen von Lemma 7.6 und 7.7 zusammen:

Proposition 7.1 *Sei $L : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine positive, konvexe, auf $(0, \pi)$ einmal stetig differenzierbare und stetig auf den Rand fortsetzbare Funktion. Seien*

$$r(\phi) = |\cos^3 \phi|, \quad g(\phi) = r(\phi)L(\phi), \quad (7.64)$$

und $0 = \phi_0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ eine monoton steigende Folge die gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert, für die

$$A_L \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(\phi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g(\pi - \phi_n).$$

absolut konvergiert. Dann ist $A_L \geq 0$.

Beweis: Lemma 7.6 und Lemma 7.7.

Dieses wichtige Resultat benutzen wir nun, um die Positivität des Funktional (7.2) - (7.3) zu beweisen.

Satz 7.1 Sei \mathfrak{h}_{V^+} der Einteilchenraum und \mathcal{F}_{V^+} die quasilokale Algebra des Vorwärtslichtkegels, wie in Kapitel (3.5) definiert. Dann ist durch die Gleichungen (7.2) - (7.3) ein quasifreier, eichinvarianter Zustand ω_{hb} auf der C^* -Algebra \mathcal{F}_{V^+} definiert.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)$. Sei weiterhin $z_n \doteq (1 + in\lambda) = r_n e^{i\phi_n}$, dann ist

$$\phi_n = \arctan \lambda n, \quad r_n = \frac{1}{\cos \phi_n}. \quad (7.65)$$

Definieren wir wie in Gleichung (7.50):

$$[0, \pi] \ni r(\phi) \doteq |\cos^3 \phi|, \quad (7.66)$$

und wie in Lemma (7.4):

$$[0, \pi] \ni L(\phi) \doteq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(e^{i\phi} p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i\phi} p')}. \quad (7.67)$$

Es gilt nun, wie im Beweis von Korollar (7.1) gezeigt wurde:

$$\begin{aligned} \omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f})\psi(f)) &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T((1 + i\lambda n)p') p'_M \overline{\tilde{f}((1 + i\lambda n))} \\ &\quad + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T((-1 + i\lambda n)p') p'_M \overline{\tilde{f}((-1 + i\lambda n))} \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(r_n e^{i\phi_n} p') p'_M \overline{\tilde{f}(r_n e^{i\phi_n} p')} \\ &\quad + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(r_n e^{i(\pi - \phi_n)} p') p'_M \overline{\tilde{f}(r_n e^{i(\pi - \phi_n)} p')} \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{r_n^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(e^{i\phi_n} p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i\phi_n} p')} \\ &\quad + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{r_n^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \tilde{f}^T(e^{i(\pi - \phi_n)} p') p'_M \overline{\tilde{f}(e^{i(\pi - \phi_n)} p')} \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r(\phi_n) L(\phi_n) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} r(\pi - \phi_n) L(\pi - \phi_n), \end{aligned}$$

wenn man die Skaleninvarianz des Integrals und Definitionen (7.66) und (7.67) benutzt. Nach Lemma (7.4) ist L konvex, positiv, glatt in $(0, \pi)$, stetig auf $[0, \pi]$ und erfüllt somit die Voraussetzungen von Korollar (7.1). Aus diesem folgt:

$$\omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f})\psi(f)) \geq 0. \quad (7.68)$$

Wir erhalten aufgrund der Antivertauschungsrelationen, der Formel (7.67)

$$\begin{aligned} \omega_{hb}(\psi(f)\bar{\psi}(\bar{f})) &= \left\{ \bar{\psi}(\bar{f}), \psi(f) \right\} - \omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f})\psi(f)) \\ &= r(0)L(0) + r(\pi)L(\pi) - \omega_{hb}(\bar{\psi}(\bar{f})\psi(f)) \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r(\pi - \phi_n)L(\pi - \phi_n) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} r(\phi_n)L(\phi_n) \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r(\phi_n)\bar{L}(\phi_n) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} r(\pi - \phi_n)\bar{L}(\pi - \phi_n) \end{aligned}$$

mit und $r(0) = r(\pi) = 1$ und $\bar{L}(\phi) = L(\pi - \phi)$. Die Funktion \bar{L} ist glatt auf $(0, \pi)$, stetig auf $[0, \pi]$, positiv und konvex. Damit gilt

$$\omega_{hb}(\psi(f)\bar{\psi}(\bar{f})) \geq 0. \quad (7.69)$$

Sei $X \subset \mathfrak{h}_{V^+}$ die dichte Teilmenge, die von allen $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(V^+, \mathbb{C}^2)$ erzeugt wird. Dann gilt mit Hilfe der Eichinvarianz

$$\omega_{hb}(A^*A) \geq 0 \quad (7.70)$$

$$\omega_{hb}(AA^*) \geq 0 \quad (7.71)$$

für alle $A \in X$. Das ist nach Korollar C.1 ausreichend, um ω_{hb} eindeutig nach ganz \mathcal{F}_{V^+} fortzusetzen.

7.2 Thermale Eigenschaften von ω_{hb}

Der Zustand, den wir im letzten Abschnitt konstruiert haben, ist ein lokaler Gleichgewichtszustand: er ist \mathcal{S}_{V^+} -thermal. Um dies zu zeigen, wählen wir ein $x \in V^+$. Dann berechnen wir mit Hilfe von (7.2) und (4.17)

$$\begin{aligned} \omega_{hb}(\lambda^{\mu\nu}(x)) &= \omega_{hb}(\check{\partial}^{\mu} : \bar{\psi}_{\check{r}}(x)\sigma^{\nu\check{r}s}\psi_s(x) :) \\ &= (2\pi)^{-3}\sigma^{\nu,\check{r}s} \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \lim_{\substack{\zeta \rightarrow 0 \\ \zeta^2 < 0}} \partial_{\zeta}^{\mu} \left(\varepsilon(p_0) \frac{e^{-i(p,y-z)}}{1 + e^{-\lambda(p,y+z)}} - \theta(p_0)e^{-i(p,y-z)} \right) \Big|_{\substack{y=x+\zeta \\ z=x-\zeta}} \\ &= (2\pi)^{-3}\sigma^{\nu,\check{r}s} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} p'_{s\check{r}} \lim_{\substack{\zeta \rightarrow 0 \\ \zeta^2 < 0}} \partial_{\zeta}^{\mu} \frac{e^{-i(p',2\zeta)} - e^{i(p',2\zeta)}}{1 + e^{\lambda(p',2x)}}. \end{aligned}$$

Wegen $x \in V^+$ gilt $e^{-(x,p')} \leq e^{-(x^0-|\vec{x}|)|\vec{p}'|} \leq 1$. Deswegen ist der Integrand schnell fallend, und wir dürfen den Bruch in eine geometrische Reihe entwickeln und Summation und Integration vertauschen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \omega_{hb}(\lambda^{\mu\nu}(x)) &= -(2\pi)^{-3} i \sigma^{\nu,rs} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \lim_{\substack{\zeta \rightarrow 0 \\ \zeta^2 < 0}} \partial_{\zeta}^{\mu} \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}'|} p'_{sr} \sin(2p', \zeta) e^{-2\lambda n(x,p')} \\ &= \omega_{2\lambda x}(\lambda^{\mu\nu}(x)) = L^{\mu\nu}(2\lambda x), \end{aligned} \quad (7.72)$$

wie ein direkter Vergleich mit Gleichung (4.14) zeigt.

Wir werden uns im Folgenden die Werte der einfachsten thermalen Observablen im Zustand ω_{hb} anschauen. Zuerst betrachten wir die zulässige Makroobservable T^2 , die durch die thermale Funktion $T^2(\beta) = \frac{1}{(\beta,\beta)}$ gegeben ist, also das Quadrat der Temperatur T darstellt. Es gilt mit (7.72):

$$\omega_{hb}(T^2)(x) = \frac{1}{4\lambda^2(x,x)}. \quad (7.73)$$

Das Quadrat der Temperatur ist also in jedem Punkt des Vorwärtslichtkegels definiert und divergiert am Rand. Für jeden Lorentzbeobachter, der am Nullpunkt des Minkowskiraumes startet und sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, fällt die Temperatur mit der Zeit t wie $1/t$ ab.

Der Erwartungswert der Entropiestromdichte S^{μ} nimmt nach Gleichung (5.6) und (7.72) im Hot-Bang-Zustand den Wert

$$\omega_{hb}(S^{\mu})(x) = \frac{\pi}{120\lambda^3} \frac{x^{\mu}}{(x,x)^2} \quad (7.74)$$

an. Die Produktionsrate der Entropie $\sigma = \partial_{\mu} \omega_{hb}(S^{\mu})(x)$ ist in diesem Fall

$$\sigma = 0, \quad (7.75)$$

wie man es von einem Modell, in dem keine dissipativen Effekte auftreten, erwarten würde.

Schauen wir uns nun die Phasenraum-Teilchendichte für einen Impuls $p \in \overline{\partial V}^+$ an:

$$\omega_{hb}(N_p)(x) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{1 + e^{2\lambda(x,p)}}. \quad (7.76)$$

Diese Funktion ist immer kleiner als $\frac{1}{2(2\pi)^3}$ und strebt gegen dieses Maximum, sobald x und p parallel werden. Um dieses zu verstehen, betrachten wir den Spurzustand ω_0 . Der Spurzustand ist quasifrei, eichinvariant, und seine Zweipunktfunktion ist durch

$$\omega_0(\bar{\psi}(f), \psi(g)) = \omega_0(\psi(g), \bar{\psi}(f)) = \frac{1}{2} \langle [f], [g] \rangle_{\mathfrak{h}} \quad (7.77)$$

gegeben. Man erhält ihn, wenn man in der Formel (4.1) für den KMS-Zustand β formal gegen Null gehen lässt, und er erfüllt die KMS-Bedingung zu $\beta = 0$, was mit der Definition (B.1) den Namen Spurzustand erklärt. Ihm entspricht eine unendlich hohe Temperatur. Während die thermalen Observablen (4.17) im Spurzustand nicht mehr messbar sind, existiert $\omega_0(N_p)$. Der Zustand hat also eine wohldefinierte Teilchendichte. Man sieht an der Form (4.1) und an (2.10), dass

$$\omega_0(N_p) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \quad (7.78)$$

ist. Am Rand des Lichtkegels herrschen folglich dieselben Verhältnisse wie im Spurzustand. Obwohl die Phasenraumdichte endlich ist, divergiert die Teilchendichte aller sich in x -Richtung bewegenden Teilchen:

$$\int_0^\infty dt \omega_{hb}(N_{tp'})(x) = \infty \quad (7.79)$$

wenn x und p' parallel sind, der Ausdruck bleibt jedoch endlich, wenn x und p' nicht parallel sind. Wenn man sich einem Punkt x auf dem Rand des Lichtkegels nähert, wird das Ruhesystem $\beta/|\beta|$ des Zustandes parallel zu x . Ein Beobachter dort würde also eine sehr heiße und dichte Stoßwellenfront ausmachen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit vom Nullpunkt des Raumes entfernt.

Der Zustand ω_{hb} beschreibt also einen Fluss von Teilchen, der vom Nullpunkt des Raumes ausgeht und sich isotrop in den Raum ausbreitet. Mit den Betrachtungen über die Temperatur und die Teilchendichte ergibt sich das Bild einer heißen Explosion am Zeitnullpunkt, als alle Fermionen auf einen Punkt konzentriert waren. Deswegen nennen wir den Zustand ω_{hb} den „Hot Bang“-Zustand.

Obwohl das Modell keine dissipativen Effekte beschreibt, kehrt der Zustand in ferner Zukunft in einem gewissen Sinne wieder zum Vakuum zurück, wie wir nun zeigen. Die Form für ω_{hb} lautet

$$\omega_{hb}(\bar{\psi}(f)\psi(g)) = \omega_\infty(\bar{\psi}(f)\psi(g)) + S_{hb}(f, g) \quad (7.80)$$

$$\omega_{hb}(\psi(g)\bar{\psi}(f)) = \omega_\infty(\psi(g)\bar{\psi}(f)) - S_{hb}(f, g) \quad (7.81)$$

mit

$$S_{hb}(f, g) = (2\pi)^{-3} i \int \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \int dx dy \frac{g^T(x) p'_M f(y) e^{i(p', x-y)}}{1 + e^{\lambda(p', x+y)}}. \quad (7.82)$$

Lemma 7.8 *Sei $a \in V^+$ ein positiver, zeitartiger Vektor. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}_{V^+}$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{hb} \circ \alpha_{ta}(A) = \omega_\infty(A). \quad (7.83)$$

Beweis: Wegen der Quasifreiheit und Linearität reicht es, die Aussage (7.83) für Paare $\bar{\psi}(f)\psi(g)$ und $\psi(g)\bar{\psi}(f)$ zu testen. Mit den Gleichungen (7.80) und (3.15) prüfen wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} i \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \int dx dy \frac{g^T(x) p'_M f(y) e^{i(p', x-y)}}{1 + e^{\lambda(p', x+y+2at)}} \quad (7.84)$$

$$= (2\pi)^{-3} i \int \frac{d^3 p}{2|\vec{p}|} \int dx dy \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g^T(x) p'_M f(y) e^{i(p', x-y)}}{1 + e^{\lambda(p', x+y+2at)}} \quad (7.85)$$

$$= 0. \quad (7.86)$$

Die Vertauschung von Integral und Limes ist hierbei für alle $t > 0$ möglich, da $a \in V^+$ ist. Deswegen wird der Integrand in Gleichung (7.84) durch eine integrable Funktion majorisiert:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2|\vec{p}|} \frac{g^T(x) p'_M f(y) e^{i(p', x-y)}}{1 + e^{\lambda(p', x+y+2at)}} \right| &\leq \frac{1}{2|\vec{p}|} \frac{|g^T(x) p'_M f(y)|}{1 + e^{\lambda(p', x+y)}} \\ &\leq \frac{1}{2|\vec{p}|} \frac{|g^T(x) p'_M f(y)|}{1 + e^{\lambda \delta |\vec{p}|}}. \end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (7.83) gezeigt.

Der Zustand ω_{hb} strebt somit in ferner Zukunft wieder zum Vakuum. Dieses hat jedoch nichts mit einer Rückkehr zu globalem Equilibrium einer lokalen Störung zu tun, denn in dem zu betrachtenden Modell gibt es keine Wechselwirkung und deswegen keine dissipativen Effekte. Die Störung $S_{hb}(f, g)$, die ω_{hb} im Vergleich zu ω_∞ darstellt, verteilt sich nur immer gleichmäßiger über den Minkowskiraum.

Nach Lemma C.3 kann man ω_{hb} zu einem Zustand auf ganz \mathcal{F} fortsetzen. Diesen Zustand wird man allerdings nicht in einer einfachen Form wie in (7.2) darstellen können. Das Thermalitätsgebiet eines solchen fortgesetzten Zustandes ist immer noch V^+ , wie man sich leicht überlegt: Hierfür betrachtet man für einen positiven, lichtartigen Vektor $p \in \partial \bar{V}^+$ die zulässige Makroobservable M_p , die durch die Funktion $\beta \rightarrow (p, \beta)$ gegeben ist.¹⁵ Weil die thermale Funktion von M_p positiv ist, ist M_p ein positiver Operator. Also muss $\omega_{hb}(M_p)(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{O}$ sein, wenn der fortgesetzte Zustand $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermal ist. Es gilt

$$\omega_{hb}(M_p)(x) = 2\lambda(p, x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{O}. \quad (7.87)$$

Dies ist nur dann für alle $p \in \partial \bar{V}^+$ positiv, wenn $\mathcal{O} \subset V^+$ ist.

¹⁵Der fortgesetzte Zustand ist immer noch stetig bezüglich der Halbnormen (4.21). Somit sind die zulässigen Makroobservablen auch im fortgesetzten Zustand messbar.

8 Singularitätensatz

8.1 Gebiete maximaler Thermalität

Im vergangenen Kapitel haben wir ein Beispiel eines Zustandes geliefert, der \mathcal{S}_{V^+} -thermal ist. Dieser Zustand hat also nur im Vorwärtslichtkegel eine thermale Interpretation. Und das ist in einem gewissen Sinne auch eine obere Schranke für die Größe des Thermalitätsgebietes, wie im folgenden Kapitel gezeigt wird.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass jeder $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustand ω , für den gilt, dass \mathcal{O} einen lichtartigen Kegel enthält, entweder trivialerweise $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ thermal ist, mit $\omega = \omega_B \in \mathcal{C}$, oder ein Thermalitätsgebiet \mathcal{O} besitzt, das in einem simplizialen Kegel¹⁶ enthalten ist. Um unsere Analyse zu vereinfachen, werden wir anstatt ω den regularisierten Zustand $\omega_f \doteq \int dy f(y) \omega \circ \alpha_y$ betrachten. Hierbei ist f eine nicht-negative Testfunktion mit kompaktem Träger um $0 \in \mathbb{R}^4$ zentriert und mit $\int f = 1$. Die Menge der thermalen Vergleichszustände \mathcal{C} ist konvex. Also folgt aus der $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalität von ω , dass ω_f $\mathcal{S}_{\mathcal{O}'}$ -thermal mit $\mathcal{O}' = \{x \in \mathcal{O} \mid x + \text{supp } f \subset \mathcal{O}\}$ ist. Aufgrund der Stetigkeit der ω bezüglich der Halbnormen (4.21) folgt

$$|\partial^\mu \omega_f(\Xi)(x)| \leq c^\mu \|\Xi\|_B \quad (8.1)$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathcal{O} , wobei die c^μ bestimmte Konstanten und $B \subset V^+$ kompakt sind.

Sei p ein positiver, lichtartiger Vektor, dann definieren wir mit Γ_p die Menge der zulässigen Makroobservablen, die durch die 1 und thermale Funktionen der Form $\beta \mapsto \Gamma(\beta, p)$ gegeben sind, wenn Γ eine glatte Funktion von \mathbb{R}^+ nach \mathbb{C} ist. Die Γ_p sind damit unitale, abelsche *-Algebren. Sie enthalten die für uns im Folgenden sehr wichtigen Elemente E_p und M_p^n , die durch die thermalen Funktionen

$$\beta \mapsto E_p(\beta) \doteq e^{i(p, \beta)} \quad (8.2)$$

$$\beta \mapsto M_p^n(\beta) \doteq (\beta, p)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (8.3)$$

gegeben sind. Da ω_f ein Zustand ist, definiert für festes $x \in \mathcal{O}'$ die Zuordnung $\Xi \mapsto \omega_f(\Xi)(x)$ für $\Xi \in \Gamma_p$ einen Zustand auf Γ_p . Einige wichtige Eigenschaften dieser Zustände sind:

Lemma 8.1 *Sei ω_f ein wie oben regularisierter $\mathcal{S}_{\mathcal{O}'}$ -thermaler Zustand. Dann gilt für $x \in \mathcal{O}'$:*

$$a) \quad p_\mu \partial_\nu \omega_f(E_p)(x) = p_\nu \partial_\mu \omega_f(E_p)(x),$$

$$b) \quad |\omega_f(E_p)(x)| \leq 1,$$

¹⁶Ein simplizialer Kegel ist ein Schnitt von charakteristischen Halbräumen. „Charakteristisch“ heißt, dass jeder der Ränder dieser Halbräume tangential zu einem lichtartigen Vektor liegt.

c) $\mathcal{O}' \times \partial\overline{V}^+ \ni (x, p) \mapsto \omega_f(E_p)(x)$ lässt sich zu einer glatten Funktion auf $\mathcal{O}' \times \mathbb{C}^4$ fortsetzen, wobei die Funktion $\mathbb{C}^4 \ni k \mapsto \omega_f(E_k)(x)$ für jedes $x \in \mathcal{O}'$ holomorph ist.

$$d) 0 \leq \omega_f(M_p^{n+1})(x) \leq \left(\omega_f(M_p^n)(x)\right)^{n/(n+1)} \left(\omega_f(M_p^{2n+1})(x)\right)^{1/(n+1)}$$

Beweis: Behauptung a) folgt aus Lemma (6.1) und der Beziehung $\partial^\nu E_p = ip^\nu E_p$. Da ω_f ein Zustand ist, gilt nach Cauchy-Schwartz $|\omega_f(E_p \cdot 1)(x)|^2 \leq \omega_f(E_p^* E_p)(x) \omega_f(1)(x) = 1$, was b) beweist. Die von Teil c) postulierte Erweiterung lautet:

$$\beta \mapsto E_k(\beta) \doteq \left(\cos(\beta^0 |\vec{k}|) + ik^0 \frac{\sin(\beta^0 |\vec{k}|)}{|\vec{k}|} \right) e^{-\vec{k} \cdot \vec{\beta}}.$$

Man bemerke, dass dies für $k \in \mathbb{R}^4$ eine Potenzreihe in den Komponenten von k ist und damit eine Potenzreihe für komplexe k definiert. Aufgrund der in Gleichung (8.1) angesprochenen Stetigkeitseigenschaften ist die so definierte Abbildung

$$(x, k) \mapsto \omega_f(E_k)(x)$$

glatt und holomorph für festes x . Die letzte Behauptung des Lemmas ist eine direkte Konsequenz aus der Hölderungleichung

$$\left| \int_A fg \right| \leq \left(\int_a |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a |g|^q \right)^{1/q}$$

wenn $0 < p, q < 1$ und $p^{-1} + q^{-1} = 1$ sind, wenn man berücksichtigt, dass die Operatoren M_p^n positive Elemente in Γ_p sind, da sie positive thermale Funktionen haben.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den zentralen Satz dieses Abschnitts formulieren.

Satz 8.1 Sei ω ein $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermaler Zustand, wobei \mathcal{O} ein Gebiet des \mathbb{R}^4 ist, das einen lichtartigen Kegel enthält. Dann gibt es folgende Möglichkeiten:

- a) $\omega = \omega_B$, d.h. $\omega(\Xi)(x) = \int_B d\mu(\beta) \Xi(\beta)$ hängt nicht von x ab.
- b) $\omega(\Xi)(x)$ hängt nichttrivial von x ab (für mindestens ein Ξ) und es gibt einen zeitartigen simplizialen Kegel (einen Schnitt von charakteristischen Halbräumen), der \mathcal{O} enthält.

Beweis: Wie oben schon erklärt, wählen wir eine positive Testfunktion f und betrachten den regularisierten Zustand ω_f , der $\mathcal{S}_{\mathcal{O}'}$ -thermal ist. Dann enthält die Menge

$$\mathcal{O}' = \{x \in \mathcal{O} \mid x + \text{supp } f \subset \mathcal{O}\} \quad (8.4)$$

ebenfalls einen lichtartigen Kegel, sei dies o.B.d.A. V^+ . Sei p nun ein beliebiger positiver, zeitartiger Vektor. Definieren wir jetzt

$$x \mapsto \overline{E}_p(x) \doteq \omega_f(E_p)(x), \quad x \in \mathcal{O}' \quad (8.5)$$

und führen wir Lichtkegelkoordinaten ein, per $x_{\pm} = x^0 \pm \vec{e} \cdot \vec{x}$ und $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}$, wobei $\vec{e} \doteq \vec{p}/|\vec{p}|$ ist. Die Koordinate x_+ wächst in Richtung von p , die Koordinate x_- wächst in die Richtung senkrecht zu x_+ in der Ebene, die von p und $(1, 0, 0, 0)$ aufgespannt wird. Der Vektor \vec{x}_{\perp} parametrisiert die beiden übriggebliebenen Richtungen, sodass die vier Koordinaten ein Orthonormalsystem (im euklidischen Sinn) in \mathbb{R}^4 bilden.

Wir schreiben Gleichung a) aus Lemma 8.1 um:

$$e_i \partial_0 \bar{E}_p(x) = \partial_i \bar{E}_p(x), \quad x \in \mathcal{O}', \quad (8.6)$$

und erhalten damit die Aussagen, dass $\bar{E}_p(x)$ (für ein festes p) nur von $x_- = (e, x)$ abhängen kann.

Wir variieren nun p . Aufgrund der Analytizitätseigenschaften von \bar{E}_p , die wir in Teil c) des Lemmas gezeigt haben, können wir die Funktion in eine Potenzreihe entwickeln:

$$\bar{E}_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |\vec{p}|^m c_{\mu}(x) e^{\mu}, \quad (8.7)$$

wobei $e = (1, \vec{e})$ und $m = \deg \mu$ sind. Alle Koeffizienten c_{μ} sind glatt in x und damit können nach dem, was wir im letzten Schritt gezeigt haben, die Funktionen $x \mapsto c_{\mu}(x) e^{\mu}$ nur von $x_- = (e, x)$ nichttrivial abhängen. Durch k -faches Differenzieren und Anwenden der Kettenregel erhalten wir damit

$$(y, \partial) c_{\mu}(x) e^{\mu} = (y, e)^k \partial_0^k c_{\mu}(x) e^{\mu} \quad (8.8)$$

für alle $\vec{e} \in S^2$, $x \in \mathcal{O}'$ und $y \in \mathbb{R}^4$. Drücken wir die Produkte der Komponenten von \vec{e} in Kugelflächenfunktionen aus, so wird klar, dass für $k > m = \deg \mu$ diese Gleichung nur erfüllt werden kann, wenn $\partial_0^k c_{\mu}(x) e^{\mu} = 0$ ist. Also ist jede Funktion $x \mapsto c_{\mu}(x) e^{\mu}$ ein Polynom in (e, x) vom Grad m oder weniger, dessen Koeffizienten Polynome in den Komponenten von \vec{e} sind.

Benutzen wir nun, dass

$$\bar{E}_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\vec{p}|^m i^m}{m!} \omega_f(M_e^m)(x) \quad (8.9)$$

ist, dann folgt aus dem oben Gesagten, dass die Funktion

$$x \mapsto \omega_f(M_e^m)(x) = (-i)^m m! c_{\mu}(x) e^{\mu}, \quad x \in \mathcal{O}' \quad (8.10)$$

Polynome vom Grad m oder weniger sind. Diese Polynome sind wegen der Positivität von M_e^m nicht negativ. Darüberhinaus gibt es ein m , sodass das entsprechende Polynom von erster Ordnung in (e, x) ist, wenn nicht $x \mapsto \omega_f(M_e^m)(x)$ konstant für alle $m \in \mathbb{N}$ ist. Um dieses einzusehen, nehmen wir an, dass die $x \mapsto \omega_f(M_e^k)(x)$ konstant seien für $k = 0, 1, \dots, m-1$. Dann folgt aus Teil d) von Lemma (8.1), und weil der Grad von $x \mapsto \omega_f(M_e^{(2m-1)})(x)$ höchstens $2m-1$ ist, dass $x \mapsto \omega_f(M_e^m)(x)$ nicht schneller als

$|x|^{(2m-1)/m}$ wächst und damit entweder konstant oder ein Polynom ersten Grades in (e, x) sein muss.

Sei nun ω kein Referenzzustand, womit es ein Ξ gibt, sodass $\omega(\Xi)(x)$ und damit o.B.d.A auch $\omega_f(\Xi)(x)$ nichttrivial von x abhängt. Dann gibt es auch ein M_e^m , für das dieses gilt, da die lineare Hülle der M_e^m dicht bezüglich der $\|\cdot\|_B$ in dem Raum der Makroobservablen liegt. Aus diesem Grund und dem oben Gesagten dürfen wir annehmen, dass

$$\omega_f(M_e^m)(x) = P_f(\vec{e})(e, x) + Q_f(\vec{e}), \quad x \in \mathcal{O}'$$

für alle $\vec{e} \in S^2$ ist. Die P_f und Q_f sind dabei Polynome in den Komponenten von \vec{e} , und P_f ist nicht identisch Null. Aber wie schon erwähnt, sind die M_e^m positive Makroobservablen, und damit muss

$$P_f(\vec{e})(e, x) + Q_f(\vec{e}) \geq 0, \quad x \in \mathcal{O}'$$

gelten. Weil P_f ein Polynom und nicht identisch null ist, definiert $P_f(\vec{e}) = 0$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^3 . Weil $Q_f(\vec{e}) > 0$ für alle \vec{e} ist, folgt daraus, dass

$$\mathcal{O}' \subset \bigcap_{\vec{e}} \{x \mid (e, x) \geq -Q_f(\vec{e})/P_f(\vec{e})\}$$

für alle \vec{e} mit $P_f(\vec{e}) > 0$ gelten muss. Damit ist aber insbesondere \mathcal{O}' enthalten im Schnitt von vier charakteristischen Halbräumen und damit in einem simplizialen Kegel. Da der Träger von f kompakt ist, gilt das eben Gesagte auch für \mathcal{O} , was zu zeigen war.

Selbstverständlich ist die Wahl von V^+ als Lichtkegel in obigem Beweis rein willkürlich. Durch Translation und Spiegelung kann man jeden Lichtkegel in V^+ überführen.

8.2 Singularitäten

In diesem Zusammenhang ist folgendes Beispiel von Interesse: Angenommen, ein Zustand ω beschreibt einen nichttrivialen, makroskopischen, hydrodynamischen Fluss von Teilchen. Das heißt, dass sich das Ruhesystem von ω von Punkt zu Punkt ändert. Das Ruhesystem $\beta/|\beta|$ kann man bestimmen, indem man für $e \in \partial\bar{V}^+$ die Makroobservablen M_e aus Gleichung (8.3) benutzt. Deren thermale Funktion sind durch $\beta \mapsto M_e(\beta) = (e, \beta)$ gegeben. Wir wählen uns eine Funktion f mit kompaktem Träger, der sich um den Nullpunkt des Minkowskiraumes konzentriert und bilden $\omega_f = \int f(y)\omega \circ \alpha_y$. Nun hängt $\omega_f(M_e)(x)$ o.B.d.A nichttrivial von x ab, und damit ist die Funktion $x \mapsto \omega_f(M_e)(x)$ ein Polynom ersten Grades in (e, x) (Siehe den Beweis des Satzes 8.1). Es gilt also:

$$x \mapsto \omega_f(M_e)(x) = c_\omega(e, x - x_\omega), \quad (8.11)$$

mit einer Konstanten $c_\omega \neq 0$ und $x_\omega \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Nehmen wir an, die Konstante sei positiv, dann muss x im Kegel $x_\omega + V^+$ sein, weil $\omega_f(M_e)(x)$ für alle e positiv sein muss. Da alle $e \in \partial\bar{V}^+$ eine Basis des \mathbb{R}^4 enthalten, kann man den mittleren Temperaturvektor $\beta(x)$ aus genügend vielen Messungen der M_e rekonstruieren, und so jedem Punkt eine

mittlere Temperatur und ein „mittleres Ruhesystem“ zuordnen. An der Gleichung (8.11) wird klar, dass der mittlere Temperaturvektor am Punkt x einfach $c_\omega(x - x_\omega)$ ist. Daraus ergeben sich folgende Schlüsse:

Die Funktionen $x \mapsto \omega_f(M_e)(x)$ gehen gegen Null, wenn man sich dem Punkt x_ω , also dem Apex des Kegels nähert. Folglich divergiert die Temperatur dort. Weiterhin wird das Ruhesystem, wenn man sich mit x einem Punkt p auf dem Rand nähert, parallel zu p . Auch am Rand des Kegels geht die mittlere Temperatur also gegen unendlich. Dadurch, dass das Ruhesystems dort in Richtung von p zeigt, würde ein Beobachter an einem solchen Punkt einen starken Teilchenfluss messen, der von x_ω ausgeht und sich in den Raum ergießt.

Ein Beobachter, der also in einem begrenzten Raumgebiet einen hydrodynamischen Fluss wie (8.11) als Neutrino hintergrund misst, würde durch diese Analyse zum Schluss kommen, dass dieser Hintergrund die Folge einer sehr heißen Explosion irgendwann in der Vergangenheit ist, der danach schnell zu lokalem Gleichgewicht gefunden hat. Diese Schlussfolgerung beruht allerdings auf der Hypothese, dass sich der Hintergrund in ganz $x_\omega + V^+$ in lokalem thermodynamischen Gleichgewicht befindet.

Satz 8.1 macht deutlich, dass das Gebiet \mathcal{O} , in dem ein Zustand $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermal sein kann, nicht beliebig ist. Vielmehr stellt ein simplizialer Kegel, oder wie im obigen Falle V^+ , eine Art maximales Gebiet dar, in dem ein Zustand eine thermale Interpretation besitzen kann. Dies ist insofern interessant, als dass in solchen Zuständen die Zeitspiegelungs - Symmetrie gebrochen ist. Während die Theorie des freien, masselosen Diracfeldes T-invariant ist, ist diese Invarianz z.B. in ω_{hb} gebrochen. Der Zustand zeichnet also eine Zeitrichtung aus.

9 Darstellung der experimentellen Situation

Neutrinos sind die zweithäufigsten Teilchen im Kosmos. Im Gegensatz zu Photonen, die durch ihre elektromagnetische Wechselwirkung stark an Materie gekoppelt sind, konnten sich Neutrinos schon recht bald nach dem Urknall ungehindert ausbreiten. So nimmt man an, dass sich die Photonen erst ungefähr $8 \cdot 10^5$ Jahre nach dem Urknall vom Rest soweit entkoppelten, dass die Materie für sie durchsichtig wurde. Diese Photonen bildeten die heute messbare Hintergrundstrahlung. Verschiedene Modellrechnungen ergeben, dass dies für Neutrinos schon nach einem Zeitraum von der Größenordnung von einer Sekunde der Fall gewesen sein könnte [14], [16]. Aus diesem Grund erhofft man sich, aus der Vermessung der kosmischen Neutrino-Hintergrundstrahlung wertvolle Rückschlüsse auf die Zeit kurz nach dem Urknall gewinnen zu können. Gerade in letzter Zeit sind die Möglichkeiten, Neutrinos zu detektieren, stark verbessert worden (Kamiokande, Super-Kamiokande), so dass die Forschung in diesem Bereich starken Aufwind erhält.

Wir wenden im Folgenden das Modell des Hot-Bang-Zustandes auf den Neutrinohintergrund an. Da Neutrinos fast wechselwirkungsfrei und fast masselos¹⁷ sind, stellt dieses Modell eine gute Näherung dar.

Zuerst müssen wir durch Abgleich mit experimentellen Daten den Parameter λ in Gleichung (7.2) bestimmen. Aus (7.73) folgt für die Zeitabhängigkeit der Temperatur

$$T(t) = \frac{1}{2\lambda t}. \quad (9.1)$$

Vom heutigen Neutrinohintergrund nimmt man an, dass er eine Temperatur von ungefähr $T_H \approx 1,95K$ hat [15], [14]. Das ergibt (in natürlichen Einheiten) einen Wert von

$$T_H = 1,37 \cdot 10^{-32} = \frac{1}{2\lambda t_H}. \quad (9.2)$$

Gehen wir von einem Alter des Universums aus, das sich im Bereich von 15 Milliarden Jahren, also $t_H = 2,55 \cdot 10^{62}$ Planckzeiten befindet, so ergibt sich ein Wert von

$$\lambda = 1,43 \cdot 10^{-30}. \quad (9.3)$$

Mit Gleichung (7.76) folgt, dass die Teilchendichte am Punkt $x = (t, 0, 0, 0)^T$

$$N(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \omega_{hb}(N_{p'}) (x) \approx 0,9 \pi^{-2} T(t)^3 \quad (9.4)$$

beträgt. Das ergibt eine heutige Teilchendichte (wieder in natürlichen Einheiten) von $N \approx 2,51 \cdot 10^{-97}$, was etwa

$$N \approx 56,8 \text{ cm}^{-3} \quad (9.5)$$

¹⁷Kosmologische Überlegungen liefern eine Obergrenze von einigen wenigen zehntel eV für die Masse des Elektronenneutrinos [14].

entspricht. Dies stimmt mit dem Literaturwert [13] überein.

Aus kosmologischen Überlegungen heraus nimmt man an, dass die Neutrinos eine Sekunde nach dem Urknall vom Rest der Materie entkoppelten. So wurde die heutige (immer noch nicht nachweisbare) Hintergrundstrahlung der Temperatur $T = 1,95K$ gebildet. [13], [16] Zum Zeitpunkt des Entkoppelns hatten die Neutrinos eine Temperatur von $1MeV$, was ca. $1,159 \cdot 10^{10}K$ oder auch $8,22 \cdot 10^{-23}$ Plancktemperaturen entspricht. Mit dem λ aus Gleichung (9.3) liefert Gleichung (9.1) für $t = 1s$ ($= (5,39 \cdot 10^{-44})^{-1}$ Planckzeiten) eine Temperatur von ungefähr $2,66 \cdot 10^{18}K$. Dieses Resultat ist deutlich höher als vermutet und legt folgenden Gedankengang nahe:

Man geht davon aus [13], dass die Neutrinos zum Zeitpunkt ihrer Entkopplung und danach lokal im thermodynamischen Gleichgewicht gewesen sind, und der Raum sich gleichmäßig ausgedehnt hat. Nehmen wir also an, dass ab etwa einer Sekunde nach dem Urknall der Hot Bang ein akkurates Modell für die Neutrinos ist. Im Zeitraum bis eine Sekunde nach dem Urknall jedoch könnten Dinge geschehen sein, die mit unserem Modell nicht mehr gut beschrieben werden. Insbesondere könnte die Expansion des Raumes anders abgelaufen sein, als es das Modell des Lichtkegels erwarten ließe. Nehmen wir also an, dass heute, zum Zeitpunkt t_H , $t_f = 15$ Milliarden Jahre nach der Entkopplung der Neutrinos, eine Temperatur von $T = 1,95K$ ($= 1,37 \cdot 10^{-32}$ Plancktemperaturen) herrscht, und die Neutrinos zum Zeitpunkt der Entkopplung $t_H - t_f$ eine Temperatur von $1,159 \cdot 10^{10}K$ oder $8,22 \cdot 10^{-23}$ Plancktemperaturen hatten. Setzen wir diese Parameter in Gleichung (9.1) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{2\lambda t_H} = 1,37 \cdot 10^{-32} \quad (9.6)$$

$$\frac{1}{2\lambda(t_H - t_f)} = 8,22 \cdot 10^{-23}. \quad (9.7)$$

Setzen wir $t_f = 2,55 \cdot 10^{62}$ Planckzeiten ein, so erhalten wir für λ fast denselben Parameter wie oben:¹⁸

$$\lambda = 1,43 \cdot 10^{-30}. \quad (9.8)$$

Setzen wir diesen Parameter jedoch wieder in Gleichung (9.7) ein, so erhalten wir

$$t_H - t_f = 4,25 \cdot 10^{51}, \quad (9.9)$$

was $2,29 \cdot 10^8s$ oder 2650 Jahren entspricht. Es ergibt sich also folgendes Bild:

¹⁸Das Ergebnis unterscheidet sich erst in der neunten Nachkommastelle.

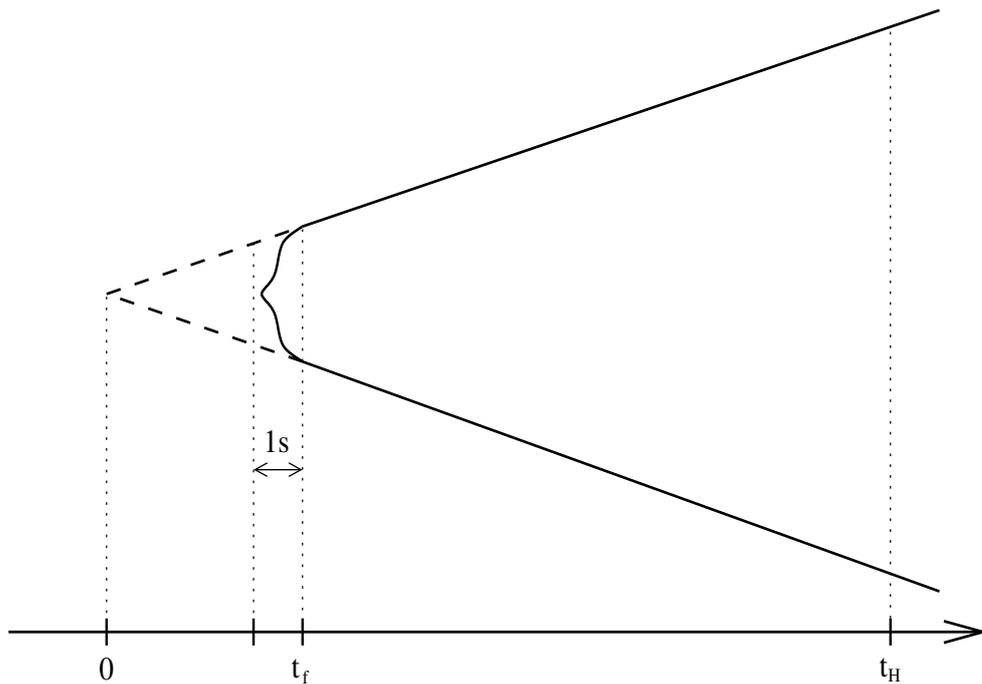


Abb.1: Im Zeitraum nach t_f verhält sich der Neutrinohintergrund so, wie vom Hot-Bang-Modell vorausgesagt (durchgezogene Linie). Rechnet man zurück, so sagt das Modell jedoch ein falsches Alter des Universums voraus (gestrichelte Linie). Da zum Zeitpunkt t_f das Universum eine Sekunde alt war, muss es in der Zeit davor sehr viel stärker expandiert sein, als das Modell vermuten lässt.

Geht man von den heute allgemein akzeptierten Werten aus und setzt das Modell des sich gleichförmig ausdehnenden Universums an, wie es das Hot-Bang-Modell suggeriert, so muss man annehmen, dass die Neutrinos von der Singularität bis zum Zeitpunkt ihrer Enkopplung etwa 2500 Jahre gebraucht haben. Kosmologische Modelle sagen jedoch eine Größenordnung dieses Zeitraumes von einer Sekunde voraus. Dieses legt nahe, dass sich das Universum innerhalb dieses Zeitraumes erheblich schneller ausgedehnt hat als danach, dass es also vor der Neutrinoentkopplung eine Phase der inflationären Expansion gegeben haben muss. Geht man also von einer gleichmäßigen Expansion aus, so würde das Universum eine Sekunde nach dem Urknall so aussehen, als wäre es schon deutlich älter. In der Tat geht man heute davon aus, dass im Zeitraum von $10^{-36}s$ bis $10^{-33}s$ nach dem Urknall eine solche inflationäre Phase stattfand, in der sich das Universum extrem stark aufblähte. Diese Phase fiel in den Zeitraum der Symmetriebrechung zwischen starker und elektroschwacher Wechselwirkung, und resultierte aus einem Phasenübergang des Higgsfeldes, bei dem spontan extreme Mengen kinetischer Energie freigesetzt wurden. Diese verursachten der Vorstellung nach eine starke Expansion innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes [16].

10 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das von Buchholz, Ojima und Roos entwickelte Konzept zur Charakterisierung von lokalen thermodynamischen Gleichgewichtszuständen [2] auf das Modell des freien, masselosen Diracfeldes angewandt.

Die Referenzzustände sind die für dieses Modell wohlbekannten KMS-Zustände ω_β und deren Mischungen, in denen β in einer kompakten Menge variiert. Aus der Menge der thermalen Observablen \mathcal{T}_x am Punkt x wurde, analog zum Vorgehen in [2] ein Teilraum $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$ ausgewählt und die Elemente darin als die balancierten Ableitungen der normalgeordneten Wickquadrate des Feldes identifiziert. Die von den thermalen Observablen induzierten Makroobservablen wurden berechnet. Analog zum bosonischen Fall in [2] sind diese Makroobservablen dicht in der Menge der glatten Lösungen der Wellengleichung auf V^+ . Dies ermöglichte es, mit geeigneten Makroobservablen wichtige thermale Größen wie die Phasenraum-Teilchendichte N_p oder die Entropiestromdichte S^μ zu approximieren. Zustände mit einer lokalen thermalen Interpretation bezüglich \mathcal{S}_x mit $x \in \mathcal{O}$ (kurz: $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermale Zustände) besitzen also definierte Erwartungswerte dieser Größen und somit eine konsistente thermale Interpretation am Punkt x .

In diesem Zusammenhang ist es bemerkenswert, dass, anders als im bosonischen Fall, der Energie-Impulstensor $\theta^{\mu\nu} : (x)$ ein Element der thermalen Observablen am Punkt x ist: $\theta^{\mu\nu} : (x) \in \mathcal{S}_x$. Im Falle masseloser Bosonen kann man den Energie-Impulstensor als eine Summe eines Elementes aus \mathcal{S}_x und eines „Rests“ schreiben, dessen Erwartungswert in allen Referenzzuständen verschwindet. Dieses führte zu einem Phänomen der „missing energy“, welches jedoch im Falle der masselosen Fermionen nicht auftritt. Der „Rest“ ist hier identisch null, was bedeutet, dass die gesamte Energie des Systems thermaler Natur ist. Die „missing energy“ scheint ein bosonisches Phänomen zu sein.

Weiterhin wurden die Auswirkungen, die die mikroskopischen Bewegungsgleichungen (in diesem Fall die Diracgleichung) auf das raumzeitliche Verhalten der Erwartungswerte in $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zuständen haben, untersucht. Bemerkenswert ist es hier, dass die Diracgleichung zu mehr Einschränkungen führt als die Klein-Gordon-Gleichung. Während im Falle der masselosen Bosonen für die Erwartungswerte einer zulässigen Makroobservable Ξ in einem $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermalen Zustand die Gleichungen

$$\square \omega(\Xi)(x) = 0$$

$$\partial_\mu \omega(\partial^\mu \Xi)(x) = 0$$

für $x \in \mathcal{O}$ gelten, kommt im Falle der masselosen Fermionen die Bedingung

$$\partial_\mu \omega(\partial_\nu \Xi)(x) = \partial_\nu \omega(\partial_\mu \Xi)(x)$$

für $x \in \mathcal{O}$ dazu. Für die Phasenraumdichte $\overline{N}_p(x) = \omega(N_p)(x)$ ergibt sich folgende Gleichung:

$$p_\mu \partial_\nu \overline{N}_p(x) = p_\nu \partial_\mu \overline{N}_p(x).$$

In Kapitel 6.3 wurde demonstriert, dass eine vorgegebene Phasenraumdichtenfunktion $(x, p) \mapsto \overline{N}_p(x)$, die die obige Differentialgleichung erfüllt, auch wieder ein Funktional auf einer Unteralgebra von \mathcal{F} definiert. Es bleibt eine noch ungeklärte Frage, unter welchen Bedingungen ein solches Funktional positiv ist, also einen Zustand auf \mathcal{F} definiert. Weiterhin gibt es noch kein Kriterium, um herauszufinden, ob ein solcher Zustand irgendwelche thermalen Eigenschaften besitzt.

Sucht man nach $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zuständen, die einen lokal scharf definierten Temperaturvektor $\beta(x)$ haben, so findet man (wie im Bosefall) als einzige Möglichkeit $\beta(x) = \lambda x + c$. Dieses definiert in der Tat einen Zustand, ω_{hb} , der Hot-Bang-Zustand genannt wird. Er beschreibt den Fluss eines thermodynamischen Systems im Lichtkegel $V^\pm - c$, wobei das Vorzeichen des Lichtkegels das Vorzeichen von λ ist. Am Rand des Kegels divergieren Temperatur und Energiedichte, sodass ω_{hb} die Zukunft einer heißen Explosion bei $-c \in \mathbb{R}^4$ beschreibt, woraus auch der Name „Hot Bang“-Zustand resultiert.

Letztendlich wurde ein Resultat analog zum bosonischen Fall bewiesen: Ein jeder $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustand, dessen Thermalitätsgebiet \mathcal{O} einen lichtartigen Kegel enthält, ist entweder ein Referenzzustand (und damit trivialerweise $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4}$ -thermal), oder besitzt ein Thermalitätsgebiet \mathcal{O} , welches seinerseits in einem simplizialen Kegel enthalten ist. Solche nichttrivialen $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermale Zustände zeichnen also eine Zeitrichtung aus, die durch einen solchen Kegel determiniert wird. Es ist bemerkenswert, dass die Bedingung an die Zustände, in einem hinreichend großen Gebiet lokal im thermodynamischen Gleichgewicht zu sein, zu Zuständen führt, die eine Zeitrichtung auszeichnen.

In einer kurzen numerischen Analyse wurde das Modell des Hot-Bang-Zustandes auf den Neutrinohintergrund angewandt. Dabei hat sich gezeigt, dass das Modell Hinweise auf eine inflationäre Phase liefert, die sich irgendwann im Bereich bis eine Sekunde nach dem Urknall abgespielt haben muss. Dies entspricht dem Bild, das man heutzutage von der frühen Phase nach dem Urknall hat.

Es wäre wünschenswert, dieses Modell noch zu verfeinern. Der nächste logische Schritt wäre es, eine nicht verschwindende Masse zuzulassen. Damit könnten thermodynamische Eigenschaften freier Fermionengase modelliert werden, wie sie zum Beispiel benutzt werden, um Atomkerne oder Elektronen in Festkörpern zu beschreiben.

Desweiteren könnte man Fermionen auf gekrümmten Raumzeiten betrachten. Für den allgemeinen Fall wird dies nicht ohne weiteres möglich sein, weil eine beliebige Raumzeit keine Symmetrien besitzen muss. Man würde sich zunächst auf die Analyse maximal symmetrischer Raumzeiten beschränken müssen, auf denen es wenigstens einen Zeittranslationsautomorphismus und damit den Begriff der KMS-Zustände gibt. Es wäre besonders interessant, die Form der maximalen Gebiete zu bestimmen, in denen ein Zustand lokal im Gleichgewicht sein kann.

Aus Zeitgründen konnte eine interessante Fragestellung die thermalen Observablen betreffend nicht mehr beantwortet werden: Die thermalen Observablen $\lambda^{\mu\nu}(x)$ aus Gleichung

(4.17) sind symmetrisch bezüglich der ersten $m = \deg \boldsymbol{\mu}$ Indices, weil diese durch (miteinander kommutierende) Ableitungen zustande kommen. Dies gilt für den letzten Index a priori nicht, da dieser durch eine Kontraktion mit der Paulimatrix σ^ν entsteht. Obwohl z.B. die thermale Observable $\lambda^{\mu\nu}(x) - \lambda^{\nu\mu}(x)$ nicht verschwinden sein muss, ist die zugehörige thermale Funktion $L^{\mu\nu} - L^{\nu\mu}$ null (Gleichung (4.20)). Die thermale Observable verschwindet also in allen Referenzzuständen. Daher könnte man auf die Idee kommen, diese thermalen Observablen ebenso wie nichtobservable Felder oder $\partial_x : \bar{\psi}(x)\psi(x) :$ von der Analyse auszuschließen, und sich nur auf die symmetrisierten Observablen $\lambda^{(\mu\nu)}(x)$ zu beschränken. So würde man weniger Forderungen an die lokalen thermalen Zustände stellen. Es ist nicht klar, ob die so gewonnenen $\mathcal{S}'_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustände weniger Beschränkungen unterliegen als die $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zustände, die in dieser Arbeit untersucht worden sind. Die $\lambda^{(\mu\nu)}(x)$ reichen aus, um alle zulässigen Makroobservablen zu approximieren. Trotzdem könnte es sein, dass sie gewissen Differentialgleichungen nicht mehr genügen müssen und somit weniger Bedingungen an das raumzeitliche Verhalten von $\mathcal{S}'_{\mathcal{O}}$ -thermalen Zuständen stellen.

A Anhang: Konventionen

A.1 Der Minkowskiraum

Die in dieser Arbeit untersuchten Quantenfelder leben auf dem Minkowskiraum, d.h. dem \mathbb{R}^4 mit der Paarung („Minkowskiprodukt“)

$$(a, b) \doteq a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3, \quad a = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (\text{A.1})$$

Für die Indices der Vektoren aus dem Minkowskiraum benutzen wir griechische Buchstaben μ, ν, τ, ρ , wenn sie von 0 bis 3 reichen sollen, und lateinische Buchstaben i, j, k, l , wenn nur die räumlichen Komponenten 1 bis 3 gemeint sein sollen. Die Komponenten eines Vektors a lauten also a^μ . Indices an einem Vektor (oder Tensor) kann man nach oben oder nach unten ziehen mithilfe des Minkowskiproduktes (A.1). Definieren wir die Metrik η als $\eta_{\mu\nu} \doteq \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, so sind die $a_\mu \doteq \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} a^\nu$ die Komponenten des zu a dualen Vektors $b \mapsto (a, b)$. Tauchen zwei gleiche Indices in einer Formel auf, so wird implizit die Summation über diese Indices angenommen, wenn einer der beiden oben und der andere unten steht. Man kann also schreiben:

$$(a, b) = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu. \quad (\text{A.2})$$

Die Fouriertransformierte einer Funktion f auf dem Minkowskiraum definieren wir als

$$\tilde{f}(p) \doteq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} dp e^{i(p,x)} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} dp e^{ip_\mu x^\mu} f(x). \quad (\text{A.3})$$

Die Fourierrücktransformation ergibt sich dann zu:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^4} dx e^{-i(p,x)} \tilde{f}(p). \quad (\text{A.4})$$

Wenn die Funktion f mehrere Komponenten hat, dann ist die Fouriertransformation von f komponentenweise zu verstehen, und \tilde{f} hat dann ebensoviele Komponenten wie f .

A.2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe

Unter einer Lorentztransformation Λ verstehen wir eine lineare Abbildung des Minkowskiraumes in sich selbst, die die Paarung (A.1) invariant lässt:

$$(\Lambda a, \Lambda b) = (a, b) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}^4. \quad (\text{A.5})$$

Wir bezeichnen die Komponenten der Matrix Λ mit $\Lambda^\mu{}_\nu$ und schreiben:

$$(\Lambda a)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu. \quad (\text{A.6})$$

Alle diese Lorentztransformationen bilden eine Gruppe, die man mit \mathcal{L} bezeichnet und Lorentzgruppe nennt. Sie besitzt vier Zusammenhangskomponenten. Die Zusammenhangskomponente der Identität bezeichnet man als eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe \mathcal{L}_+^\uparrow . Sie enthält alle Lorentztransformationen Λ mit $\det \Lambda = 1$ und $\Lambda^0_0 \geq 1$.

Man bezeichnet alle affinen Transformationen, die die Paarung (A.1) invariant lassen, als Poincarétransformationen und schreibt sie als Paare (Λ, a) mit $\Lambda \in \mathcal{L}$ und $a \in \mathbb{R}^4$. Ein solches Paar wirkt auf ein Element aus dem Minkowskiraum b durch

$$(\Lambda, a)b \doteq \Lambda b + a. \quad (\text{A.7})$$

Die Poincarétransformationen bilden ebenfalls eine Gruppe, die man als \mathcal{P} bezeichnet und Poincarégruppe nennt. Das Verknüpfungsgesetz lautet, wie man an (A.7) sieht:

$$(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_2 a_1 + a_2). \quad (\text{A.8})$$

Das zu (Λ, a) inverse Element lautet $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$. Auch diese Gruppe hat vier Zusammenhangskomponenten. Die Zusammenhangskomponente der Identität der Poincarégruppe nennt man die eigentliche, orthochrone Poincarégruppe, und bezeichnet sie als \mathcal{P}_+^\uparrow .

A.3 Spingruppe

Man benötigt zur Beschreibung des Transformationsverhaltens von Fermionen nicht die Poincarégruppe, sondern deren Überlagerung. [17] Die Lorentzgruppe besitzt eine zweifache Überlagerung, die man als Spingruppe oder auch $Spin(1, 3)$ bezeichnet. Das heißt, es gibt einen Gruppenhomomorphismus

$$\xi : Spin(1, 3) \longrightarrow \mathcal{L}, \quad (\text{A.9})$$

sodass für jedes $\Lambda \in \mathcal{L}$ die Menge $\xi^{-1}\{\Lambda\} = (S, -S)$ aus zwei Elementen aus $Spin(1, 3)$ mit entgegengesetztem Vorzeichen besteht.

Auch $Spin(1, 3)$ ist nicht zusammenhängend: Man bezeichnet die Zusammenhangskomponente der Identität mit $Spin_0(1, 3)$. Die Gruppe $Spin_0(1, 3)$ ist die zweifache Überlagerung von \mathcal{L}_+^\uparrow . Die Abbildung ξ lässt sich zu einem Gruppenhomomorphismus von $Spin_0(1, 3)$ nach \mathcal{L}_+^\uparrow einschränken, sodass wieder $\xi^{-1}\{\Lambda\} = (S, -S)$ mit $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ und $S \in Spin_0(1, 3)$ gilt. Analog zum Schritt von \mathcal{L}_+^\uparrow zu \mathcal{P}_+^\uparrow können wir nun die zweifache Überlagerung von \mathcal{P}_+^\uparrow definieren, die wir mit $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ bezeichnen und deren Elemente aus Paaren (S, a) mit $S \in Spin_0(1, 3)$ und $a \in \mathbb{R}^4$ bezeichnen, und die mit dem Verknüpfungsgesetz

$$(S_1, a_1)(S_2, a_2) = (S_1 S_2, \xi(S_1)a_2 + a_1) \quad (\text{A.10})$$

und dem Inversen

$$(S, a)^{-1} = (S^{-1}, -\xi(S)^{-1}a). \quad (\text{A.11})$$

ausgestattet ist.

A.4 Spinoren

Im vorangehenden Kapitel haben wir die Spingruppe $Spin_0(1,3)$ definiert. Man kann zeigen¹⁹, dass $Spin_0(1,3)$ und die Matrixgruppe $SL(2, \mathbb{C})$ homomorph zueinander sind. Der Homomorphismus sei mit

$$\rho : Spin_0(1,3) \longrightarrow SL(2, \mathbb{C}) \quad (\text{A.12})$$

bezeichnet. Die Überlagerungsabbildung von $SL(2, \mathbb{C})$ nach \mathcal{L}_+^\uparrow kann man wie folgt darstellen:

Definieren wir für jeden Vierervektor $a \in \mathbb{R}^4$ die folgenden Matrizen:

$$a_M \doteq \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & a^0 - a^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a^M \doteq \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & -a^1 + ia^2 \\ -a^1 - ia^2 & a^0 + a^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

dann kann man zeigen, dass es zu jedem $A \in SL(2, \mathbb{C})$ eine orthochrone, eigentliche Lorentztransformation Λ gibt, sodass

$$Aa_M A^\dagger = (\Lambda a)_M \quad \text{und} \quad (A^{-1})^\dagger a^M A^{-1} = (\Lambda a)^M \quad (\text{A.14})$$

gilt. Man sieht sofort, dass A und $-A$ dasselbe Λ liefern. In der Tat gilt, dass die so gewonnene Abbildung $A \mapsto \Lambda$ nichts anderes als $\xi \circ \rho^{-1}$ ist. Die beiden Abbildungen

$$Spin_0(1,3) \ni S \xrightarrow{\rho} A \quad \in GL(\mathbb{C}^2) \quad (\text{A.15})$$

$$Spin_0(1,3) \ni S \xrightarrow{\rho} A \longmapsto (A^{-1})^\dagger \quad \in GL(\mathbb{C}^2) \quad (\text{A.16})$$

die beiden einzigen²⁰ irreduziblen Darstellungen von $Spin_0(1,3)$. Die Teilchen, die sich nach der ersten Darstellung transformieren, nennt man ungepunktete, jene, die sich nach der zweiten Darstellung transformieren, gepunktete Spinoren. Dieses hat folgende Ursache:

Obwohl beide Darstellungsräume der Darstellungen (A.15) und (A.16) \mathbb{C}^2 sind, bezeichnet man die Komponenten der Vektoren des ersten mit ψ_r , $r = 1, 2$ und die des zweiten mit $\psi_{\dot{r}}$, $\dot{r} = 1, 2$. Der Punkt über den Komponenten des zweiten Satzes soll daran erinnern, dass sich die Teilchen dieser Darstellung anders transformieren als die des ersten. Analog zu den Indices der Minkowskivektoren kann man auch die der Spinoren nach oben und nach unten ziehen, und zwar mittels der „Metrik“ ϵ sowie deren Inversen ϵ^{-1} . Auf den „gepunkteten“ und „ungepunkteten“ \mathbb{C}^2 ist ϵ in Koordinaten durch

$$\epsilon_{rs} = \epsilon_{\dot{r}\dot{s}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

¹⁹Siehe z.B.: [17]

²⁰Genauer: Es gibt bis auf Äquivalenz genau zwei irreduzible Darstellungen von $Spin_0(1,3)$. Die Darstellungen (A.15) und (A.16) sind irreduzibel und nicht äquivalent.

gegeben. Aufgrund der Antisymmetrie von ϵ ist es wichtig, über welchen der Indices von ϵ summiert. Wir wählen den zweiten:

$$\psi^r = \epsilon^{rs}\psi_s \quad \psi_r = \epsilon_{rs}\psi^s \quad (\text{A.18})$$

Die Komponenten der Matrizen A bzw. $(A^{-1})^\dagger$ sind gegeben durch A_r^s und $A_{\dot{r}}^{\dot{s}}$. Die Komponenten von a_M und a^M werden mit $a_{r\dot{s}}$ und $a^{\dot{r}s}$ bezeichnet. Für die Spinorindices gelten die folgenden Regeln:

- Transponieren vertauscht die Indices einer Matrix:

$$A^r_s = (A^T)^s_r. \quad (\text{A.19})$$

- Komplex konjugieren wechselt gepunktete und nicht gepunktete Indices:

$$A_{\dot{r}}^{\dot{s}} = \overline{A_r^s}, \quad \overline{a_{s\dot{r}}} = a_{\dot{s}r}. \quad (\text{A.20})$$

- Weil für jede invertierbare 2×2 -Matrix M die Gleichung $\epsilon M \epsilon^{-1} = \det M (M^{-1})^T$ gilt, bedeutet dies:

$$A^r_s = ((A^{-1})^T)_r^s. \quad (\text{A.21})$$

In der Tat ist wegen $\det a_M = \det a^M = (a, a)$

$$a_M a^M = (a, a) \quad (\text{A.22})$$

und damit, wenn $(a, a) \neq 0$,

$$(a_M)^{-1} = (a, a) a^M, \quad (\text{A.23})$$

was mit (A.19) und (A.21) die Indexwahl $a_{r\dot{s}}$ und $a^{\dot{r}s}$ rechtfertigt.

A.5 Paulimatrizen

In dieser Arbeit wird häufig von den Paulimatrizen Gebrauch gemacht. Sie sind durch

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

definiert. Kürzen wir diesen Satz Matrizen mit σ_μ ab, so erkennt man leicht, dass mit (A.13) die Identität

$$a_M = a^\mu \sigma_\mu \quad (\text{A.25})$$

gilt. Aus diesem Grund bezeichnen wir die Komponenten der Paulimatrizen mit $\sigma_{\mu, r\dot{s}}$. Es gilt

$$\sigma_\mu^{\dot{r}s} = \pm \sigma_{\mu, s\dot{r}}, \quad (\text{A.26})$$

wobei das Pluszeichen für $\mu = 0$ und das Minuszeichen für $\mu = 1, 2, 3$ gilt. Es gelten die wichtigen Identitäten:

$$\sigma_{\mu, r\dot{s}} \sigma_\nu^{\dot{s}r} = 2\eta_{\mu\nu} \quad (\text{A.27})$$

$$\eta^{\mu\nu} \sigma_{\mu, r\dot{s}} \sigma_\nu^{\dot{t}t} = 2\delta_r^t \delta_{\dot{s}}^{\dot{t}}. \quad (\text{A.28})$$

B Anhang: KMS-Zustände

B.1 Grundlegendes

In diesem Kapitel gehen wir genauer auf die Analyse der KMS-Zustände ein (Siehe hierzu auch [3] und [5]). Die allgemein gebräuchliche Definition für KMS-Zustände zeichnet eine Zeitentwicklung aus, sie ist also nicht Lorentz-kovariant. In [8] wird erstmalig eine relativistische Version der Definition eines KMS-Zustandes beschrieben, die den nichtrelativistischen Fall als Spezialfall enthält. Die relativistische Definition ist also stärker. Im Falle der masselosen, freien Fermionen fallen jedoch beide Definitionen zusammen.

Definition B.1 Sei $\beta \in V^+$. Ein Zustand ω_β über einer C^* -Algebra \mathcal{F} heißt **KMS-Zustand zur Temperatur** β , wenn gilt: Für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gibt es eine Funktion

$$H_{AB} : \mathbb{R}^4 \times i(\bar{V}^+ \cap (\beta - \bar{V}^+)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

für die gilt:

(i) H_{AB} ist stetig, beschränkt und analytisch im Inneren ihres Definitionsbereiches.

(ii)

$$\begin{aligned} H_{AB}(a + i0) &= \omega_\beta(A(\alpha_a B)) \\ H_{AB}(a + i\beta) &= \omega_\beta((\alpha_a B)A) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

Den Definitionsbereich von H_{AB} , als Teilmenge von \mathbb{C}^4 , nennt man auch eine Röhre mit Basis $(\bar{V}^+ \cap (\beta - \bar{V}^+))$.

Im Temperaturvektor β sind die inverse Temperatur $|\beta| = (\beta, \beta)^{\frac{1}{2}} = (k_B T)^{-1}$ und das Ruhesystem, gegeben durch einen Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^4$, durch $\beta = |\beta|e$ zusammengefasst. Der Zustand ω_β beschreibt ein thermodynamisches System, welches sich an jedem Punkt des Minkowskiraumes im thermodynamischen Gleichgewicht zur inversen Temperatur $|\beta|$ im Ruhesystem e befindet.

Im Folgenden wird gezeigt, dass es im Falle masseloser Fermionen zu jedem gegebenen $\beta \in V^+$ genau einen KMS-Zustand gibt. Weiterhin sind die Abbildungen $\beta \rightarrow \omega_\beta(A)$ schwach integrierbar für jedes $A \in \mathcal{F}$. Wir werden eine explizite Formel für die Zustände ω_β angeben können.

B.2 Die fouriertransformierte KMS-Bedingung

Wir leiten nun eine Art Fouriertransformation der KMS - Bedingung her, die in unseren späteren Rechnungen gebraucht wird.

Dazu definieren wir für alle $A, B \in \mathcal{F}$ die folgenden Funktionen:

$$F_{AB}, G_{AB} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{B.1})$$

$$F_{AB} \doteq \omega_\beta(B(\alpha_a A)) = H_{AB}(a + i0) \quad (\text{B.2})$$

$$G_{AB} \doteq \omega_\beta((\alpha_a A)B) = H_{AB}(a + i\beta) \quad (\text{B.3})$$

Diese Funktionen sind, da beschränkt und stetig, auf kanonische Art und Weise temperierte Distributionen. Deren Fouriertransformierten existieren und sind ebenfalls temperierte Distributionen. Wir bezeichnen sie als \tilde{F}_{AB} und \tilde{G}_{AB} .

Um uns die Arbeit zu vereinfachen, beschränken wir unsere Rechnungen im Folgenden auf die eindimensionale komplexe (Zeit-)Ebene. Definieren wir die Funktionen

$$h_{AB} : \mathbb{C} \supset \mathbb{R} \times i[0, |\beta|] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h_{AB}(t + iu) \doteq H_{AB}(e(t + iu)) \quad \text{mit } e = \frac{\beta}{|\beta|}$$

sowie

$$f_{AB}, g_{AB} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f_{AB}(t) \doteq h_{AB}(t + i0)$$

$$g_{AB}(t) \doteq h_{AB}(t + i|\beta|).$$

Dann ist die Funktion h_{AB} stetig, beschränkt und im Inneren ihres Definitionsbereiches analytisch. f_{AB} und g_{AB} sind beschränkt und stetig und damit temperierte Distributionen. Es gilt $f_{AB}(t) = F_{AB}(et)$ und $g_{AB}(t) = G_{AB}(et)$. Für die Funktionen und die durch sie induzierten temperierten Distributionen benutzen wir im Folgenden dieselben Symbole.

Sei nun $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger, sowie $\int \psi = 1$. Definieren wir die Funktionenfolge

$$\psi_n(t) \doteq n\psi(nt) \quad n \in \mathbb{N},$$

dann konvergiert die Folge in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gegen δ_0 . Weiterhin ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(f_{AB} * \psi_n)(t) \doteq \int dy f_{AB}(t - y)\psi_n(y)$$

eine glatte und beschränkte Funktion. Die so definierte Folge liegt in $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und konvergiert gegen f_{AB} in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Definieren wir nun

$$f_{AB}^n(t) \doteq (f_{AB} * \psi_n)(t) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2} \quad (\text{B.4})$$

und

$$g_{AB}^n(t) \doteq (g_{AB} * \psi_n)(t) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2}, \quad (\text{B.5})$$

so erhalten wir zwei Funktionenfolgen, die ganz in $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ verlaufen und in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gegen f_{AB} und g_{AB} konvergieren²¹.

Lemma B.1 *Seien die Funktionenfolgen f_{AB}^n und g_{AB}^n wie in (B.4) und (B.5) definiert. Zu jedem Folgenglied existiert also die Fouriertransformierte als Element in $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Es gilt:*

$$\tilde{f}_{AB}^n(\varepsilon) = \tilde{g}_{AB}^n\left(\varepsilon - \frac{|\beta|}{n^2}\right) e^{-|\beta|\left(\varepsilon - \frac{|\beta|}{2n^2}\right)}$$

oder äquivalent dazu:

$$\tilde{g}_{AB}^n(\varepsilon) = \tilde{f}_{AB}^n\left(\varepsilon + \frac{|\beta|}{n^2}\right) e^{|\beta|\left(\varepsilon + \frac{|\beta|}{2n^2}\right)}$$

Beweis: Die Funktion h_{AB} ist im Inneren ihres Definitionsbereiches analytisch. Da jedes ψ_n kompakten Träger hat, ist für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ die Funktion

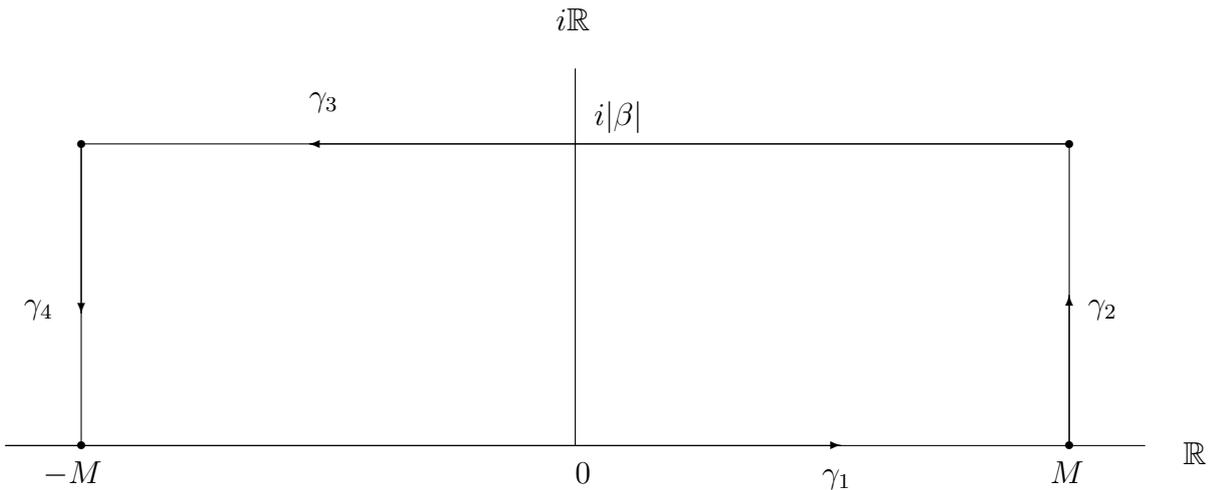
$$h_{AB}^n : (t, u) \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} dy h_{AB}((t-y) + iu) \psi_n(y) \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t+iu}{n}\right)^2} \quad (\text{B.6})$$

auf $\mathbb{R} \times i[0, |\beta|] \subset \mathbb{C}$ analytisch. Weiterhin haben wir:

$$f_{AB}^n(t) = h_{AB}^n(t + i0) \quad (\text{B.7})$$

$$g_{AB}^n(t) = h_{AB}^n(t + i|\beta|) e^{\frac{1}{2} \frac{2i|\beta|t - |\beta|^2}{n^2}}. \quad (\text{B.8})$$

Wählen wir nun den folgenden Integrationsweg:



²¹Beweise für diese Aussage finden sich in [9].

so folgt aus der Funktionentheorie, dass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} h_{AB}^n(z) e^{iz\varepsilon} dz = 0 \quad (\text{B.9})$$

ist, da der Integrand $z \mapsto h_{AB}^n(z) e^{iz\varepsilon}$ holomorph ist. Man bemerke, dass die Wege γ_i von dem Parameter M abhängen.

Hilfslemma B.1 Sei $M \in \mathbb{R}$ und

$$\xi(M) \doteq i \int_0^{|\beta|} du h_{AB}^n(M + iu). \quad (\text{B.10})$$

Dann gilt:

$$\lim_{M \rightarrow \pm\infty} \xi(M) = 0.$$

Beweis: Die Dreiecksungleichung liefert:

$$\begin{aligned} |\xi(M)| &\leq \int_0^{|\beta|} du \left| \int_{\mathbb{R}} dy h_{AB}((M - y) + iu) \psi_n(y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M+iu}{n}\right)^2} e^{i\varepsilon(M+iu)} \right| \\ &\leq |\beta| \frac{\Psi}{n} \hat{H} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{n}\right)^2} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{|\beta|}{n}\right)^2} e^{|\beta|} \\ &= C e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Hierbei ist \hat{H} das Maximum von H_{AB} (welches nach Voraussetzung beschränkt ist) und Ψ das Volumen von $\text{supp } \psi$. Geht $|M|$ gegen unendlich, dann geht $|\xi(M)|$ gegen null, woraus die Behauptung folgt.

Da f_{AB}^n eine Schwartzfunktion ist, existiert die Fouriertransformierte und ist gleich

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{AB}^n(\varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt f_{AB}^n(t) e^{it\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt h_{AB}^n(t + i0) e^{it\varepsilon} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_1(M)} h_{AB}^n(z) e^{iz\varepsilon} dz. \end{aligned}$$

Es gilt aber nun nach Gleichung (B.9), dass

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_3} h_{AB}^n(z) e^{iz\varepsilon} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_1} h_{AB}^n(z) e^{iz\varepsilon} dz + \xi(M) - \xi(-M)$$

mit $\xi(M)$ definiert wie in (B.10). Damit existiert auch

$$-\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_3} h_{AB}^n(z) e^{iz\varepsilon} dz = \tilde{f}_{AB}^n(\varepsilon).$$

und ergibt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{AB}^n(\varepsilon) &= - \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_3} h_{AB}^n(z) e^{iz\varepsilon} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt h_{AB}^n(t + i|\beta|) e^{i\varepsilon(t+i|\beta|)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt g_{AB}^n(t) e^{-\frac{2i|\beta|t+|\beta|^2}{2n^2}} e^{-\varepsilon|\beta|} e^{i\varepsilon t} \\
&= \tilde{g}_{AB}^n\left(\varepsilon - \frac{|\beta|}{n^2}\right) e^{-|\beta|\left(\varepsilon - \frac{|\beta|}{2n^2}\right)},
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Korollar B.1 *Seien ω_β ein KMS - Zustand zur Temperatur β über \mathcal{F} und $A, B \in \mathcal{F}$. Dann gilt für die Fouriertransformierten von f_{AB} und g_{AB} die sogenannte **fouriertransformierte KMS - Bedingung**:*

$$\tilde{f}_{AB} = e^{|\beta|} \cdot \tilde{g}_{AB}. \quad (\text{B.11})$$

Beweis: Die Folgen \tilde{f}_{AB}^n und \tilde{g}_{AB}^n konvergieren in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gegen \tilde{f}_{AB} und \tilde{g}_{AB} . Wenn man \tilde{f}_{AB}^n und \tilde{g}_{AB}^n mit einer Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ faltet, Gleichung (B.6) anwendet, und danach den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ausführt, folgt die Behauptung.

B.3 Eichinvarianz und Quasifreiheit

In der Analyse der KMS-Zustände beschränken wir uns auf Zustände, die zusätzlich zur KMS-Bedingung noch die Eichinvarianz erfüllen. Die Feldalgebra des freien, masselosen Diracfeldes hat die Liegruppe $U(1)$ als Eichgruppe. Wir suchen nach solchen KMS-Zuständen, die

$$\omega_\beta(\alpha_\varphi A) = \omega_\beta(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F} \quad (\text{B.12})$$

erfüllen. Die Eichinvarianz ist eine natürliche Forderung, die man an die KMS-Zustände stellen kann, da $\omega_\beta(A)$ den Erwartungswert für eine Observable $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ darstellt. Umeichungen sind eine Operation ähnlich einer Koordinatentransformation, deswegen geht man davon aus, dass Messergebnisse nicht von einer speziellen Eichung, also der Wahl eines speziellen Koordinatensystems abhängen. Fordert man Eichinvarianz, so folgt aus $\alpha_{\frac{\pi}{2}}\psi(f) = -\psi(f)$ und der entsprechenden Gleichung für $\bar{\psi}(f)$, dass

$$\omega_\beta(A_1 \cdots A_n) = 0 \quad \text{für } A_i = \psi(f_i) \text{ oder } \bar{\psi}(f_i) \text{ und } n \text{ ungerade.} \quad (\text{B.13})$$

Ist das Argument in ω_β ein Produkt aus einer ungeraden Anzahl von ψ und $\bar{\psi}$, verschwindet das Ergebnis. Bleibt zu zeigen, was $\omega_\beta(A_1 \cdots A_n)$ liefert, wenn n gerade ist. Wir werden sehen, dass sich die Werte von $\omega_\beta(A_1 \cdots A_n)$ für beliebige gerade n berechnen lassen, wenn man die für $n = 2$ kennt.

Hilfslemma B.2 Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{h} \subset \mathcal{F}$, mit n gerade und ω_β ein KMS - Zustand über \mathcal{F} . Dann gilt:

$$\omega_\beta(A_1 \cdots A_n) = \sum_{i=2}^n (-1)^n \omega_\beta(A_1 A_i) \omega_\beta(A_3 \cdots \widehat{A}_i \cdots A_n) \quad (\text{B.14})$$

wobei \widehat{A}_i dafür steht, dass der Faktor A_i im Produkt nicht vorkommen soll.

Beweis: Durch sukzessives aneinander Vorbeitauschen errechnet sich

$$\{A_1, A_2 \cdots A_n\} = \sum_{i=2}^n (-i)^n \{A_1, A_i\} A_2 \cdots \widehat{A}_i \cdots A_n \quad (\text{B.15})$$

Ersetzen wir nun A_1 durch $\alpha_a A_1$ und wenden die KMS - Bedingung an. Es seien im Folgenden für $A, B \in \mathcal{F}$ die Funktionen $F_{AB}(a) = \omega_\beta(B(\alpha_a(A)))$ und $G_{AB}(a) = \omega_\beta((\alpha_a(A)B))$ definiert. Dann gilt, wenn wir ω_β auf Gleichung (B.15) anwenden:

$$F_{(A_1)(A_2 \cdots A_n)}(a) + G_{(A_1)(A_2 \cdots A_n)}(a) = \sum_{i=2}^n (-i)^n (F_{A_1 A_i}(a) + G_{A_1 A_i}(a)) \omega_\beta(A_2 \cdots \widehat{A}_i \cdots A_n)$$

Setzen wir nun $a = et$ mit $e = \frac{\beta}{|\beta|}$ und $t > 0$ und wenden die fouriertransformierte KMS-Bedingung (Korollar B.1) an, so erhalten wir:

$$\tilde{g}_{(A_1)(A_2 \cdots A_n)}(1 + e^{-|\beta|t}) = \sum_{i=2}^n (-i)^n (\tilde{g}_{A_1 A_i}(1 + e^{-|\beta|t})) \omega_\beta(A_2 \cdots \widehat{A}_i \cdots A_n)$$

als Gleichung zwischen temperierten Distributionen. Teilen wir durch ($t \mapsto 1 + e^{-|\beta|t}$), was möglich ist, da die Funktion keine Nullstellen hat, so erhalten wir nach der Zurücktransformation mit $t = 0$

$$\omega_\beta(A_1 \cdots A_n) = \sum_{i=2}^n (-1)^n \omega_\beta(A_1 A_i) \omega_\beta(A_3 \cdots \widehat{A}_i \cdots A_n),$$

was zu beweisen war.

Lemma B.2 Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{h} \subset \mathcal{F}$, mit geradem n . Dann gilt

$$\omega_\beta(A_1 \cdots A_n) = \sum_{\pi \in P_n^<} (-1)^\pi \omega_\beta(A_{\pi(1)} A_{\pi(2)}) \cdots \omega_\beta(A_{\pi(n-1)} A_{\pi(n)}) \quad (\text{B.16})$$

Hierbei sei $P_n^<$ die Menge aller Permutationen π in n Variablen, für die gilt:

$$\begin{aligned} \pi(2k-1) &< \pi(2k) & k &= 1, \dots, n \\ \pi(2k-1) &< \pi(2k+1) & k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

und $(-1)^\pi$ das Signum der Permutation π . Als Beispiel: Für $n = 4$ sieht die obige Behauptung wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\omega_\beta(A_1 A_2 A_3 A_4) &= \omega_\beta(A_1 A_2) \omega_\beta(A_3 A_4) \\ &\quad - \omega_\beta(A_1 A_3) \omega_\beta(A_2 A_4) \\ &\quad + \omega_\beta(A_1 A_4) \omega_\beta(A_2 A_3).\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\pi(1) = 1$ für $\pi \in P_{<}^n$. Einen Zustand mit der Eigenschaft (B.16) nennen wir quasifrei

Beweis: Durch Induktion. Da $P_{<}^2 = \{id\}$, ist das Lemma wahr für $n = 2$. Sei das Lemma wahr für ein bestimmtes (gerades) $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit Hilfslemma B.2:

$$\begin{aligned}\omega_\beta(A_1 \cdots A_n) &= \sum_{i=2}^n (-1)^n \omega_\beta(A_1 A_i) \omega_\beta(A_2 \cdots \widehat{A}_i \cdots A_n) \\ &= \sum_{i=2}^n (-1)^n \omega_\beta(A_1 A_i) \sum_{\pi \in P_{<}^{(n-1)}} (-1)^\pi \omega_\beta(A_{\pi(2)} A_{\pi(3)}) \cdots \widehat{A}_i \cdots \omega_\beta(A_{\pi(n-1)} A_{\pi(n)}) \\ &= \sum_{\pi \in P_{<}^n} (-1)^\pi \omega_\beta(A_{\pi(1)} A_{\pi(2)}) \cdots \omega_\beta(A_{\pi(n-1)} A_{\pi(n)}),\end{aligned}$$

womit die Behauptung auch für n gilt. Damit gilt sie aber für alle geraden n , was zu beweisen war.

B.4 Eindeutigkeit des KMS-Zustandes

Aus Eichinvarianz und Quasifreiheit des KMS-Zustandes wird deutlich, dass, wenn es einen KMS-Zustand gibt, er vollständig durch $\omega_\beta(A_1 A_2)$, für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{h} \subset \mathcal{F}$ determiniert ist. Wir werden nun zeigen, dass in unserer Feldalgebra alle $\omega_\beta(A_1 A_2)$ allein aus der fouriertransformierten KMS-Bedingung folgen. Gibt es also einen KMS-Zustand zu einem Temperaturvektor β , so ist er eindeutig.

Lemma B.3 Sei $\beta \in V^+$ und ω_β ein dazugehöriger KMS-Zustand über der Feldalgebra \mathcal{F} und $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$. Dann gilt:

$$\omega_\beta(\psi(f) \psi(g)) = \omega_\beta(\bar{\psi}(f) \bar{\psi}(g)) = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\omega_\beta(\psi(f) \bar{\psi}(g)) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{(\beta, p)}}. \quad (\text{B.18})$$

Insbesondere ist der zu einer gegebenen Temperatur β gehörende KMS-Zustand durch Eichinvarianz und Quasifreiheit eindeutig.

Beweis: Zuerst beweisen wir die Gleichung (B.18). Der Zustand ω_β ist ein KMS - Zustand. Damit gibt es zu $A = \psi(f)$ und $B = \bar{\psi}(g)$ die Funktionen H_{AB} , F_{AB} und G_{AB} wie in (B.1)-(B.3), die wir analog regularisieren, das heißt, f_{AB}^n , $g_{AB}^n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ seien genauso definiert wie in Gleichungen (B.4) und (B.5).²² Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_{AB}(t) + g_{AB}(t) &= F_{AB}(et) + G_{AB}(et) = \omega_\beta(\bar{\psi}(g)\alpha_{et}(\psi(f))) + \omega_\beta(\alpha_{et}(\psi(f))\bar{\psi}(g)) \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p) e^{i(te,p)}. \end{aligned}$$

Wir verwenden die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \partial V &= \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p, p) = 0\} \\ \int_{\partial V} d\mu(p) &= \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \\ \chi(p) &= \varepsilon(p_0) \tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p), \end{aligned}$$

um die Rechnungen übersichtlicher zu gestalten. Nun verschmieren wir die obigen Funktionen und erhalten mit den Gleichungen (B.4) und (B.5):

$$f_{AB}^n(t) + g_{AB}^n(t) = 2\pi e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\partial V} d\mu(p) \chi(p) e^{i(e(t-y), p)} \psi_n(y).$$

Fouriertransformieren liefert:

$$\tilde{f}_{AB}^n(\varepsilon) + \tilde{g}_{AB}^n(\varepsilon) = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\partial V} d\mu(p) \left[\chi(p) e^{-iy(e,p)} \psi_n(y) e^{it(e,p)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2} e^{it\varepsilon} \right].$$

Da der Betrag des Integranden auf der rechten Seite integrierbar ist, können wir nach dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge vertauschen, und die Integration über t zuerst ausführen. Nun ist aber

$$\int_{\mathbb{R}} dt e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2 + it((e,p)+\varepsilon)} = \sqrt{2\pi} n e^{-\frac{n^2}{2}((e,p)+\varepsilon)^2},$$

wie man durch quadratische Ergänzung errechnet. Weiterhin ist die Funktion

$$\phi(y, \varepsilon) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}((e,p)+\varepsilon)^2} \psi(y)$$

eine Schwartzfunktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(y, \varepsilon) dy d\varepsilon = 1,$$

²²Es ist ein unglücklicher Umstand, dass in den Formeln die ähnlich aussehenden Funktionen f und g , sowie f_{AB}^n und g_{AB}^n vorkommen, obwohl sie nichts miteinander zu tun haben.

und damit geht die Funktionenfolge $\phi_n(y, \varepsilon) \doteq n^2 \phi(ny, n\varepsilon)$ in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ gegen $\delta_{(0, -(e,p))}$. Genau diese Funktionenfolge haben wir in unserem Integral:

$$\tilde{f}_{AB}^n(\varepsilon) + \tilde{g}_{AB}^n(\varepsilon) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\partial V} d\mu(p) \left[\chi(p) e^{iy(e,p)} \phi_n(y, \varepsilon) \right]. \quad (\text{B.19})$$

Nun gilt nach Lemma B.1:

$$\tilde{g}_{AB}^n(\varepsilon) = \tilde{f}_{AB}^n\left(\varepsilon + \frac{|\beta|}{n^2}\right) e^{|\beta|(\varepsilon + \frac{|\beta|}{2n^2})} \quad (\text{B.20})$$

und weiterhin, weil $f_{AB}^n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, also differenzierbar ist:

$$\tilde{f}_{AB}^n\left(\varepsilon + \frac{|\beta|}{n^2}\right) = \tilde{f}_{AB}^n(\varepsilon) + k(\varepsilon) \frac{|\beta|}{n^2} + T_n(\varepsilon) \quad (\text{B.21})$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 T_n(\varepsilon) = 0. \quad (\text{B.22})$$

Man sieht sofort, dass für jedes feste n die Funktionen k und T Schwartzfunktionen von ε sind. Setzen wir die Gleichungen (B.20) und (B.21) in (B.19) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{AB}^n(\varepsilon) + \left(k(\varepsilon) \frac{|\beta|}{n^2} + T_n(\varepsilon) \right) \frac{1}{1 + e^{|\beta|(\varepsilon + \frac{|\beta|}{2n^2})}} \\ = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\partial V} d\mu(p) \frac{\chi(p) e^{iy(e,p)} \phi_n(y, \varepsilon)}{1 + e^{|\beta|(\varepsilon + \frac{|\beta|}{2n^2})}}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Betrachten wir

$$j_n(\varepsilon) \doteq \frac{1}{1 + e^{|\beta|(\varepsilon + \frac{|\beta|}{2n^2})}},$$

dann sieht man, dass $0 \leq j_n \leq 1$ und die j_n gleichmäßig gegen $\varepsilon \mapsto (1 + e^{|\beta|\varepsilon})^{-1}$ konvergieren. Nun seien l_n und S_n die Fourierrücktransformaten von $j_n k$ und $j_n T_n$. Dann gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz, dass l_n gleichmäßig gegen eine Schwartzfunktion l konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Mit diesem Wissen wenden wir die Fourierrücktransformation auf Gleichung (B.23) an und führen den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ aus. Damit geht die linke Seite von Gleichung (B.23) gegen $f_{AB}(t)$. Den Grenzwert auf

der linken Seite betrachten wir etwas genauer:

$$f_{AB}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_{\mathbb{R}} d\varepsilon \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\partial V} d\mu(p) \frac{\chi(p) e^{iy(e,p)} \phi_n(y, \varepsilon)}{1 + e^{|\beta|(\varepsilon + \frac{|\beta|}{2n^2})}} e^{-it\varepsilon} \quad (\text{B.24})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_{\mathbb{R}} d\varepsilon \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\partial V} d\mu(p) \frac{\chi(p) e^{iy(e,p)} \phi_n(y, \varepsilon)}{1 + e^{|\beta|\varepsilon}} e^{-it\varepsilon} \quad (\text{B.25})$$

$$= 2\pi \int_{\partial V} d\mu(p) \frac{\chi(p)}{1 + e^{-|\beta|(e,p)}} e^{it(e,p)} \quad (\text{B.26})$$

$$= 2\pi \int dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{-(\beta,p)}} e^{i(et,p)}. \quad (\text{B.27})$$

Die Umformung von der zweiten auf die dritte Zeile ist aus folgendem Grund erlaubt: Gegeben sei eine Funktionenfolge j_n stetiger Funktionen auf \mathbb{R} , die gleichmäßig gegen eine Funktion j konvergieren. Weiterhin existiere eine Folge ψ_n , die in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gegen δ_t mit $t \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} dt' j_n(t') \psi_n(t') = j(t). \quad (\text{B.28})$$

In der Tat gilt dies auch für höhere Dimensionen, und weil die Funktionenfolge

$$j_n(y, \varepsilon) = 2\pi \int_{\partial V} d\mu(p) \frac{\chi(p) e^{iy(e,p)}}{1 + e^{|\beta|(\varepsilon + \frac{|\beta|}{2n^2})}} e^{-it\varepsilon} \quad (\text{B.29})$$

stetig ist und gleichmäßig gegen die Funktion

$$j(y, \varepsilon) = 2\pi \int_{\partial V} d\mu(p) \frac{\chi(p) e^{iy(e,p)}}{1 + e^{|\beta|\varepsilon}} e^{-it\varepsilon} \quad (\text{B.30})$$

konvergiert, ist die Umformung erlaubt gewesen.

Damit sind wir fertig, denn es gilt:

$$f_{AB}(0) = h(0) = \omega_\beta(\bar{\psi}(g) \psi(f)). \quad (\text{B.31})$$

Daraus folgt:

$$\omega_\beta(\bar{\psi}(g) \psi(f)) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{-(\beta,p)}}. \quad (\text{B.32})$$

Mit den Antikommutatorrelationen erhält man daraus

$$\omega_\beta(\psi(f) \bar{\psi}(g)) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{(\beta,p)}}, \quad (\text{B.33})$$

was die Behauptung (B.18) ist. Um die Gleichungen (B.17) zu zeigen, wählen wir $A = \psi(f)$ und $B = \psi(g)$ und erhalten

$$f_{AB}(t) = \omega_\beta\left(\psi(g) (\alpha_a \psi(f))\right) \quad (\text{B.34})$$

$$g_{AB}(t) = \omega_\beta\left((\alpha_a \psi(f)) \psi(g)\right). \quad (\text{B.35})$$

Für diese gilt nach der fouriertransformierten KMS - Bedingung ebenfalls

$$\tilde{f}_{AB} = e^{-|\beta| \cdot} \tilde{g}_{AB}. \quad (\text{B.36})$$

Nun gilt $f_{AB}(t) + g_{AB}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ aufgrund der Antivertauschungsrelationen. Damit gilt aber auch

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f}_{AB} + \tilde{g}_{AB} \\ &= \tilde{g}_{AB} e^{-|\beta| \cdot} + \tilde{g}_{AB} \\ &= \tilde{g}_{AB} (1 + e^{-|\beta| \cdot}). \end{aligned}$$

Nun ist das Multiplizieren mit der Funktion $t \mapsto (1 + e^{-|\beta|t})$ ein Automorphismus auf $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, weil die Funktion keine Nullstellen hat. Damit gilt

$$\tilde{g}_{AB} = 0,$$

und daraus folgt

$$g_{AB}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Also gilt $\omega_\beta(\psi(f) \psi(g)) = 0$. Auf die gleiche Art und Weise zeigt man, dass $\omega_\beta(\bar{\psi}(\xi) \bar{\psi}(\zeta)) = 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Man hätte die Gleichungen (B.17) auch allein aus der Eichinvarianz erhalten können. Der explizite Beweis soll zeigen, dass die Gleichungen jedoch auch im Falle von nicht eichinvarianten KMS-Zuständen gelten.²³

Korollar B.2 Sei ω_β ein KMS-Zustand über \mathcal{F} und $f_i, g_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\omega_\beta\left((\psi(f_1) \cdots \psi(f_n))^* (\psi(g_1) \cdots \psi(g_n))\right) = \det \left\{ \omega_\beta(\psi(f_i)^* \psi(g_j)) \right\}_{i,j=1}^n \quad (\text{B.37})$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Lemma B.2, der Gleichung $\omega_\beta(\psi(f) \psi(g)) = \omega_\beta(\bar{\psi}(f) \bar{\psi}(g)) = 0$ für alle $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ und der Leibnitzformel für die Determinante.

²³In dieser Arbeit beschränken wir uns auf eichinvariante KMS-Zustände. Nicht eichinvariant wären KMS-Zustände zum Beispiel in Modellen, die Phasenübergänge beschreiben.

B.5 Existenz des KMS-Zustandes

Aus Korollar B.2 folgt: Wenn es zu $\beta \in V^+$ einen KMS - Zustand gibt, dann ist dieser eindeutig. Denn durch die Relationen aus Lemma (B.3), der Eichinvarianz, der Quasifreiheit und der Linearität liegt ω auf ganz \mathcal{F} fest. Nun müssen wir zeigen, dass es überhaupt einen KMS - Zustand über \mathcal{F} gibt. Auf dem im Einteilchenraum \mathfrak{h} dicht liegenden Teilraum X , der von den $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ aufgespannt wird, definiert

$$\omega(\psi(f) \psi(g)) = \omega(\bar{\psi}(f) \bar{\psi}(g)) = 0 \quad (\text{B.38})$$

$$\omega(\psi(f) \bar{\psi}(g)) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{(\beta, p)}} \quad (\text{B.39})$$

ein eichinvariantes Funktional ω . Nun müssen wir prüfen, ob dieses Funktional positiv ist, also ob $\omega(\bar{\psi}(f)\psi(f))$ und $\omega(\psi(f)\bar{\psi}(f))$ beide positiv für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ sind.

Lemma B.4 *Sei $\beta \in V^+$, und ω das durch (B.38) und (B.39) definierte eichinvariante und quasifreie lineare Funktional auf X . Dann ist $\omega(A^*A) \geq 0$ für alle $A \in X$. Weiterhin kann man ω eindeutig zu einem quasifreien, eichinvarianten Zustand auf ganz \mathcal{F} fortsetzen.*

Beweis: Sei $A = \psi(f) + \bar{\psi}(\bar{g})$ für $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$. Dann gilt mit (B.38) und (B.39), dass

$$\omega(A^*A) = \omega(\bar{\psi}(\bar{f})\psi(f)) + \omega(\psi(g)\bar{\psi}(\bar{g})) \quad (\text{B.40})$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{\bar{f}}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} \quad (\text{B.41})$$

$$+ 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{g}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{(\beta, p)}}. \quad (\text{B.42})$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{\bar{f}}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \frac{\tilde{f}^T(p') p'_M \tilde{\bar{f}}(-p')}{1 + e^{-(\beta, p')}} - 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \frac{\tilde{f}^T(p') p'_M \tilde{\bar{f}}(-p')}{1 + e^{-(\beta, p')}} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

mit $p' = (|\vec{p}|, \vec{p})$ und $'p = (-|\vec{p}|, \vec{p})$. Substitution von $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ im zweiten Integral liefert mit $\tilde{\bar{f}}(-p) = \tilde{f}(p)$:

$$(\text{B.43}) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \frac{\tilde{f}^T(p') p'_M \tilde{f}(p')}{1 + e^{-(\beta, p')}} + 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2|\vec{p}|} \frac{\tilde{f}^T(-p') p'_M \tilde{f}(-p')}{1 + e^{(\beta, p')}}. \quad (\text{B.44})$$

Nun ist aber die Matrix

$$p'_M = \begin{pmatrix} |\vec{p}| + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + p^2 & |\vec{p}| - p^3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.45})$$

positiv semidefinit, denn die Spur ist positiv und die Determinante null. Damit ist die Funktion

$$\vec{p} \mapsto \frac{1}{2|\vec{p}|} \frac{\tilde{f}^T(p') p'_M \tilde{f}(p')}{1 + e^{-(\beta, p')}} \geq 0 \quad (\text{B.46})$$

nicht negativ und darum ist (B.43) ≥ 0 . Genauso ergibt sich

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{g}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{(\beta, p)}} \geq 0, \quad (\text{B.47})$$

und damit ist $\omega(A^*A) \geq 0$ für alle $A \in X$. Aus Korollar C.1 folgt, dass ω eindeutig zu einem Zustand auf ganz \mathcal{F} fortgesetzt werden kann.

Um die Frage zu klären, ob der so definierte Zustand ω ein KMS-Zustand ist, brauchen wir das folgende Hilfslemma.

Hilfslemma B.3 *Sei $p \in \mathbb{R}^4$ mit $(p, p) = 0$. Sei darüberhinaus $\beta \in V^+$ und $b \in \mathbb{R}^4 + i(\overline{V}^+ \cap (\beta - \overline{V}^+))$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{e^{(b, p)} + e^{(b-\beta, p)}} \leq 1$$

Beweis: Es gibt zwei Möglichkeiten:

(i) $p_0 \geq 0$: Dann haben wir wegen $b \in \overline{V}^+$ dass:

$$\begin{aligned} (b, p) \geq 0 &\Rightarrow e^{(b, p)} \geq 1 \\ \Rightarrow e^{(b, p)} + e^{(b-\beta, p)} \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{e^{(b, p)} + e^{(b-\beta, p)}} \leq 1 \end{aligned}$$

(ii) $p_0 < 0$: Dann wiederum gilt wegen $b - \beta \in \overline{V}^-$ dass:

$$\begin{aligned} (b - \beta, p) \geq 0 &\Rightarrow e^{(b-\beta, p)} \geq 1 \\ \Rightarrow e^{(b, p)} + e^{(b-\beta, p)} \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{e^{(b, p)} + e^{(b-\beta, p)}} \leq 1 \end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung.

Korollar B.3 *Seien $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ und $\beta \in V^+$. Sei*

$$h : \mathbb{R}^4 + i(\overline{V}^+ \cap (\beta - \overline{V}^+)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h(z) \doteq 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} e^{i(z, p)}$$

mit $(z, p) \doteq (a, p) + i(b, p)$ wenn $z = a + ib$ $a, b \in \mathbb{R}^4$. Dann ist die Funktion h auf ihrem Definitionsbereich beschränkt und holomorph. Außerdem ist sie stetig auf den Rand ihres Definitionsbereiches fortsetzbar (wir bezeichnen die Fortsetzung ebenfalls mit h).

Beweis: Für $a \in \mathbb{R}^4$ und $b \in (\overline{V}^+ \cap (\beta - \overline{V}^+))$ gilt, wegen:

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} e^{i(z, p)} \right| &= \left| \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{e^{(b, p)} + e^{(b - \beta, p)}} e^{i(a, p)} \right| \\ &\leq \left| \tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p) \right|, \end{aligned}$$

für $(p, p) = 0$ als Konsequenz aus Korollar B.3. Dies ist aber eine über den Lichtkegel integrierbare Funktion, und damit existiert das Integral. Weiterhin ist der Integrand stetig und wird durch

$$p \longmapsto \left| p_{r\dot{s}} \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \right| \quad (\text{B.48})$$

majorisiert, also ist auch das Integral stetig in z , und für $a \in \mathbb{R}^4$ und $b \in (\overline{V}^+ \cap (\beta - \overline{V}^+))$ gilt:

$$|h(a + ib)| \leq 2\pi \int_{\partial V} d\mu(p) \left| p_{r\dot{s}} \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \right|, \quad (\text{B.49})$$

womit Beschränktheit gezeigt wäre. Bleibt die Holomorphie zu zeigen.

Sei γ ein in der Röhre $\mathbb{R}^4 \times i(V^+ \cap (\beta - V^+)) \subset \mathbb{C}^4$ verlaufender, geschlossener, stückweise C^1 -Weg. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 2\pi \int_0^1 dt \dot{\gamma}(t) \left(\int_{\partial V} d\mu(p) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} e^{i(\gamma(t), p)} \right)$$

Nun ist aber der Integrand beschränkt, und somit dürfen wir nach dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge vertauschen:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h(z) dz &= 2\pi \int_{\partial V} d\mu(p) \left(\int_0^1 dt \dot{\gamma}(t) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} e^{i(\gamma(t), p)} \right) \\ &= 2\pi \int_{\partial V} d\mu(p) \left(\int_{\gamma} dz \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} e^{i(z, p)} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn der Integrand ist analytisch und die Röhre kontrahierbar, also verschwindet jedes Integral über einen geschlossenen Weg. Da das Integral über jeden geschlossenen Weg von h verschwindet, ist h analytisch, was zu beweisen war.

Lemma B.5 *Sei ω derjenige eichinvariante und quasifreie Zustand über \mathcal{F} , der durch (B.38) - (B.39) für ein bestimmtes $\beta \in V^+$ definiert ist. Dann ist ω ein KMS-Zustand zur Temperatur β .*

Beweis: Zu testen ist, ob ω die KMS-Bedingung aus Definition B.1 erfüllt. Ohne Einschränkung testen wir sie für $A = A_1 \cdots A_m$ und $B = A_{m+1} \cdots A_n$, mit $A_i = \psi(f_i)$ oder $\bar{\psi}(f_i)$.

Weil ω quasifrei ist, gilt

$$\omega(AB) = \omega(A_1 \cdots A_n) = \sum_{\pi \in P_{<}^n} (-1)^\pi \omega(A_{\pi(1)} A_{\pi(2)}) \cdots \omega(A_{\pi(n-1)} A_{\pi(n)}),$$

also erhalten wir, wenn wir A und B vertauschen

$$\omega(BA) = \omega(A_{m+1} \cdots A_n A_1 \cdots A_m) = \sum_{\pi \in P_{<}^n} (-1)^\pi \omega(B_{\pi(1)} B_{\pi(2)}) \cdots \omega(B_{\pi(n-1)} B_{\pi(n)}) \quad (\text{B.50})$$

mit

$$\begin{aligned} B_{\pi(2j-1)} &= A_{\pi(2j-1)}, & B_{\pi(2j)} &= A_{\pi(2j)} && \text{für } \pi(2j-1), \pi(2j) < m+1 \\ &&&&& \text{oder } \pi(2j-1), \pi(2j) > m \\ B_{\pi(2j-1)} &= A_{\pi(2j)}, & B_{\pi(2j)} &= A_{\pi(2j-1)} && \text{für } \pi(2j-1) < m+1, \pi(2j) > m \\ &&&&& \text{oder } \pi(2j-1) > m, \pi(2j) < m+1. \end{aligned}$$

Wir definieren uns nun die Funktion

$$\begin{aligned} H_{AB} &: \mathbb{R}^4 \times i(\bar{V}^+ \cap (\beta - \bar{V}^+)) \longrightarrow \mathbb{C} \\ H_{AB}(z) &\doteq \sum_{\pi \in P_{<}^n} (-1)^\pi h_{\pi(1)\pi(2)}(z) \cdots h_{\pi(n-1)\pi(n)}(z). \end{aligned}$$

Die Funktionen h_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ haben denselben Definitionsbereich wie H_{AB} und seien gegeben durch die folgende Regel:

- Falls $i, j < m+1$ oder $i, j > m$, dann sei $h_{ij}(z) = \omega(A_i A_j)$, also konstant.
- Falls $i < m+1$ und $j > m$ (oder umgekehrt), dann sei

$$\begin{aligned} h_{ij}(z) &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{(\beta, p)}} e^{-i(z, p)} && \text{für } A_i = \psi(f), A_j = \bar{\psi}(g) \\ h_{ij}(z) &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^4} dp \delta(p^2) \varepsilon(p_0) \frac{\tilde{f}^T(p) p_M \tilde{g}(-p)}{1 + e^{-(\beta, p)}} e^{i(z, p)} && \text{für } A_i = \bar{\psi}(g), A_j = \psi(f) \end{aligned}$$

und $h_{ij}(z) = 0$ für alle anderen Möglichkeiten, also $A_i = \psi(f)$, $A_j = \psi(g)$ oder $A_i = \bar{\psi}(f)$, $A_j = \bar{\psi}(g)$.

Die h_{ij} sind so gebaut, dass $h_{ij}(a + i0) = \omega(A_i(\alpha_a A_j))$ und $h_{ij}(a + i\beta) = \omega((\alpha_a A_j)A_i)$ für $i < m + 1$ und $j > m$ (oder umgekehrt) gelten, wie man an der Form (B.38) und (B.39) sieht. Wenn wir noch berücksichtigen, dass $\omega(\alpha_a(A_i)\alpha_a(A_j)) = \omega(\alpha_a(A_i A_j)) = \omega(A_i A_j)$, dann sehen wir nach Gleichung (B.50), dass H_{AB} so konstruiert ist, dass

$$H_{AB}(a + i0) = \omega(A_1 \cdots A_m \alpha_a(A_{m+1} \cdots A_n))$$

$$H_{AB}(a + i\beta) = \omega(\alpha_a(A_{m+1} \cdots A_n) A_1 \cdots A_m)$$

ist. Außerdem ist H_{AB} als Linearkombination von Produkten von (nach Korollar B.3) stetigen, beschränkten und im Inneren ihres Definitionsbereiches holomorphen Funktionen natürliche ebenfalls stetig, beschränkt und im Inneren ihres Definitionsbereiches holomorph. Die KMS-Bedingung wird also für alle Elemente aus \mathcal{F}^0 erfüllt. \mathcal{F}^0 ist hierbei die dicht liegenden Unter algebra von \mathcal{F} , die aus allen endlichen Summen von endlichen Produkten von $\psi(f)$ und $\bar{\psi}(f)$ erzeugt wird. Wegen der Stetigkeit von ω bezüglich der C^* -Norm findet man die entsprechenden Funktionen H_{AB} aber auch für Elemente A und B aus dem Abschluss von \mathcal{F}^0 , also \mathcal{F} . Damit ist die Behauptung bewiesen, und ω ist ein KMS-Zustand zur Temperatur β .

C Anhang: Zustände auf CAR-Algebren

C.1 Positivitätsproblem von Zuständen auf CAR-Algebren

Es ist nicht schwer zu zeigen [10], dass jeder quasifreie, eichinvariante Zustand ω auf einer C^* -Algebra $\mathcal{F} = \text{CAR}(\mathfrak{h})$ einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ mit $0 \leq T \leq 1$ definiert, sodass

$$\omega\left((a(f_1) \cdots a(f_n))^* a(g_1) \cdots a(g_n)\right) = \det \left\{ \langle f_i | T g_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n \quad (\text{C.1})$$

gilt. Wie wir im Folgenden zeigen werden, gilt auch die Umkehrung, dass jeder solche Operator T durch Gleichung (C.1), $\omega(a^\sharp(f_1) \cdots a^\sharp(f_{2n+1})) = 0$ und $\omega(1) = 1$ einen quasifreien, eichinvarianten Zustand auf \mathcal{F} definiert. Hierbei soll $a^\sharp(f)$ ein Platzhalter für $a(f)$ oder $a(f)^*$ sein. Es sei bemerkt, dass $T = id_{\mathfrak{h}}$, die Identität auf \mathfrak{h} , den Fall des wohlbekanntenen Spurzustandes ω_0 darstellt (Siehe Gleichung (7.77)).

Sei \mathfrak{h} ein separabler Hilbertraum und $\tilde{\mathcal{F}} = \text{CAR}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$. Sei e_1, e_2, \dots eine Orthonormalbasis von \mathfrak{h} , dann ist die Menge

$$\varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \cdots \varepsilon_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \quad (\text{C.2})$$

mit $\varepsilon_i = (e_i, 0)$ oder $\varepsilon_i = (0, e_i)$ eine Basis für $\tilde{\mathcal{F}}$. Betten wir \mathfrak{h} in $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ durch

$$\mathfrak{h} \hookrightarrow (\mathfrak{h}, 0) \hookrightarrow (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \quad (\text{C.3})$$

ein, so definiert (C.3) eine stetige Einbettung

$$\mathcal{F} = \text{CAR}(\mathfrak{h}) \hookrightarrow \text{CAR}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}) = \tilde{\mathcal{F}} \quad (\text{C.4})$$

von \mathcal{F} in eine abgeschlossene C^* -Unter algebra von $\tilde{\mathcal{F}}$. Diese Einbettung nennen wir P . Man kann aber auch wieder von $\tilde{\mathcal{F}}$ auf \mathcal{F} zurückprojizieren, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma C.1 Seien \mathfrak{h} , \mathcal{F} , $\tilde{\mathcal{F}}$ und die ε_i definiert wie oben. Dann kann man die Abbildung

$$\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\cdots\varepsilon_{i_k} \longmapsto \begin{cases} e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} & \text{wenn } \varepsilon_{i_j} = (e_{i_j}, 0) \text{ für alle } j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

eindeutig zu einem stetigen $*$ -Homomorphismus von $\tilde{\mathcal{F}}$ auf \mathcal{F} fortsetzen. Diesen nennen wir Q .

Beweis: Da die Abbildung auf einer Basis definiert ist und Norm 1 hat, wie man leicht erkennt, kann man die Abbildung auf ganz $\tilde{\mathcal{F}}$ (mit $Q(1) = 1$) fortsetzen. Durch diese Konstruktion ist klar, dass $Q \circ P = id_{\mathcal{F}}$ und Q ein $*$ -Homomorphismus ist.

Lemma C.2 Sei \mathfrak{h} ein Hilbertraum, $\mathcal{F} = \text{CAR}(\mathfrak{h})$ und $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ ein selbstadjungierter Operator mit $0 \leq T \leq 1$. Dann kann die Abbildung

$$a(f_1)^* \cdots a(f_n)^* a(g_1) \cdots a(g_m) \longmapsto a(Tf_1)^* \cdots a(Tf_n)^* a(Tg_1) \cdots a(Tg_m) \quad (\text{C.6})$$

eindeutig zu einem $*$ -Homomorphismus B_T von \mathcal{F} nach \mathcal{F} fortgesetzt werden.

Beweis: Der Operator T ist selbstadjungiert, positiv und hat $\|T\| \leq 1$, also existiert auf $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ der Operator

$$\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \ni \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Th + \sqrt{1-T^2}h' \\ Th' - \sqrt{1-T^2}h \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}, \quad (\text{C.7})$$

von dem man leicht zeigt, dass er das Skalarprodukt auf $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ respektiert und ein Inverses hat, nämlich

$$\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \ni \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Th - \sqrt{1-T^2}h' \\ Th' + \sqrt{1-T^2}h \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}, \quad (\text{C.8})$$

Also ist diese Abbildung, die wir U nennen, auf $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ unitär. Dann ist die Abbildung

$$\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\cdots\varepsilon_{i_k} \longmapsto (U\varepsilon_{i_1})(U\varepsilon_{i_2})\cdots(U\varepsilon_{i_k}) \quad (\text{C.9})$$

nach Satz 5.2.5. aus [3] eindeutig zu einem $*$ -Automorphismus auf $\tilde{\mathcal{F}}$ fortsetzbar. Diesen nennen wir γ . Wir konstruieren nun mit Q aus Lemma C.1 und P aus Gleichung C.4 die Abbildung

$$B_T \doteq Q \circ \gamma \circ P, \quad (\text{C.10})$$

die von \mathcal{F} nach \mathcal{F} führt und ein $*$ -Homomorphismus ist, weil die einzelnen Teilabbildungen es sind. Weiterhin gilt nach Konstruktion

$$B_T(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}) = (Te_{i_1})(Te_{i_2})\cdots(Te_{i_k}). \quad (\text{C.11})$$

Damit also nach Linearität

$$B_T(a^\sharp(f_1)\cdots a^\sharp(f_n)) = a^\sharp(Tf_1)\cdots a^\sharp(Tf_n), \quad (\text{C.12})$$

und das war die Behauptung.

Damit folgt:

Satz C.1 Sei \mathfrak{h} ein separabler Hilbertraum und T ein selbstadjungierter, positiver Operator mit $\|T\| \leq 1$. Dann ist durch

$$\omega\left((a(f_1) \cdots a(f_n))^* a(g_1) \cdots a(g_n)\right) = \det \left\{ \langle f_i | T g_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n \quad (\text{C.13})$$

ein Zustand auf $\mathcal{F} = \text{CAR}(\mathfrak{h})$ definiert.

Beweis: Aufgrund der Voraussetzungen existiert $T^{\frac{1}{2}}$ als selbstadjungierter, positiver Operator mit Norm kleiner eins. Sei ω_0 der Spurzustand, und $B_{T^{\frac{1}{2}}}$ definiert wie in Lemma C.2. Sei

$$\omega_T \doteq \omega_0 \circ B_{T^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{C.14})$$

was sicher ein lineares Funktional auf \mathcal{F} ist. Da $B_{T^{\frac{1}{2}}}$ ein *-Homomorphismus ist, gilt für jedes $A \in \mathcal{F}$

$$B_{T^{\frac{1}{2}}}(A^*A) = (B_{T^{\frac{1}{2}}}(A))^*(B_{T^{\frac{1}{2}}}(A)). \quad (\text{C.15})$$

Positive Elemente werden also auf positive Elemente abgebildet. Da der Spurzustand positiv ist, ist ω_T es somit auch, also ein Zustand. Es gilt:

$$\omega_0\left((a(f_1) \cdots a(f_n))^* a(g_1) \cdots a(g_n)\right) = \det \left\{ \langle f_i | g_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n, \quad (\text{C.16})$$

und damit

$$\begin{aligned} \omega_T\left((a(f_1) \cdots a(f_n))^* a(g_1) \cdots a(g_n)\right) &= \omega_0\left((a(T^{\frac{1}{2}}f_1) \cdots a(T^{\frac{1}{2}}f_n))^* a(T^{\frac{1}{2}}g_1) \cdots a(T^{\frac{1}{2}}g_n)\right) \\ &= \det \left\{ \langle T^{\frac{1}{2}}f_i | T^{\frac{1}{2}}g_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n \\ &= \det \left\{ \langle f_i | T g_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n. \end{aligned}$$

Der so aus T entstehende Zustand ω_T ist eindeutig, weil B_T es ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Der obige Satz hat eine wichtige Konsequenz:

Korollar C.1 Sei $X \subset \mathfrak{h}$ eine dichte Teilmenge eines separablen Hilbertraumes. Gegeben eine positives, lineares Funktional auf allen $a(f)^*a(g)$ und $a(f)a(g)^*$, $f, g \in X$, also

$$\omega(a^*(f)a(f)) \geq 0 \quad (\text{C.17})$$

$$\omega(a(f)a(f)^*) \geq 0 \quad (\text{C.18})$$

für alle $f, g \in X$. Dann definiert ω einen eichinvarianten, quasifreien Zustand auf \mathcal{F} .

Beweis: Es gilt

$$\{a(f)^*, a(f)\} = \{a(f), a(f)^*\} = \|f\|_{\mathfrak{h}}^2, \quad (\text{C.19})$$

und damit sind Gleichungen (C.17) und (C.18) äquivalent zu

$$\omega(a^*(f)a(f)) \leq \|f\|_{\mathfrak{h}}^2 \quad (\text{C.20})$$

$$\omega(a(f)a(f)^*) \leq \|f\|_{\mathfrak{h}}^2. \quad (\text{C.21})$$

Damit wird ω durch

$$f, g \longmapsto \omega(a^*(f)a(g)) \quad (\text{C.22})$$

zu einer beschränkten, positiven Sesquilinearform auf X , und lässt sich zu einer beschränkten, positiven Sesquilinearform auf \mathfrak{h} fortsetzen, mit $\|\omega\| \leq 1$. Damit gibt es einen positiven, selbstadjungierten Operator T mit Norm $\|T\| \leq 1$, sodass

$$\omega(a(f)^*a(g)) = \langle f, Tg \rangle \quad \text{für } f, g \in \mathfrak{h} \quad (\text{C.23})$$

gilt. Somit können wir ω nach Satz C.1 auf ganz \mathcal{F} zu einem eichinvarianten, quasifreien Zustand ω fortsetzen, für den gilt:

$$\omega\left((a(f_1) \cdots a(f_n))^* a(g_1) \cdots a(g_n)\right) = \det \left\{ \omega(a(f_i)^* a(g_j)) \right\}_{i,j=1}^n \quad (\text{C.24})$$

$$= \det \left\{ \langle f_i | T g_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n. \quad (\text{C.25})$$

Das war zu zeigen.

C.2 Fortsetzung von positiven Funktionalen

Im Laufe dieser Arbeit begegnen wir Zuständen, die nur auf einer C^* -Unteralgebra von \mathcal{F} definiert sind. Man kann diese Zustände auf ganz \mathcal{F} fortsetzen, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma C.3 *Sei $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ ein abgeschlossener Teilraum eines separablen Hilbertraumes. Sei ω ein eichinvariantes, quasifreies Zustand auf $\text{CAR}(\mathfrak{k})$, was auf kanonische Art und Weise eine C^* -Unteralgebra von $\mathcal{F} = \text{CAR}(\mathfrak{h})$ ist. Dann kann man ω zu einem eichinvarianten, quasifreien Zustand ω' auf \mathcal{F} fortsetzen.*

Beweis: ω ist ein lineares Funktional auf $\text{CAR}(\mathfrak{k})$, einem abgeschlossenem Teilraum von \mathcal{F} . Das Funktional ω ist normiert mit $\|\omega\| = 1$, und deswegen garantiert uns der Satz von Hahn-Banach, dass man ω zu einem linearen Funktional ω' auf ganz \mathcal{F} mit $\|\omega'\| = 1$ fortsetzen kann. Aus der Normierung von ω' folgt

$$\omega'\left(a(f)^*a(f)\right) \leq \|f\|_{\mathfrak{h}}^2 \quad (\text{C.26})$$

$$\omega'\left(a(f)a(f)^*\right) \leq \|f\|_{\mathfrak{h}}^2 \quad (\text{C.27})$$

für alle $f \in \mathfrak{h}$. Aufgrund der Ativertauschungsrelationen

$$\{a(f)^*, a(f)\} = \{a(f), a(f)^*\} = \|f\|_{\mathfrak{h}}^2, \quad (\text{C.28})$$

und $\omega'(1) = 1$ folgt daraus

$$\omega'(a(f)^*a(f)) \geq 0 \tag{C.29}$$

$$\omega'(a(f)a(f)^*) \geq 0. \tag{C.30}$$

Das reicht nach Korollar C.1 aus, um $\omega'(A^*A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{F}$ zu garantieren. Das war die Behauptung.

D Anhang: Symbolverzeichnis

$\langle \cdot \cdot \rangle$	Skalarprodukt auf \mathfrak{h} .
$\ \cdot \ _B$	Halbnorm für Funktionen Ξ auf V^+ : $\ \Xi\ _B = \sup_{\beta \in B} \Xi(\beta) $.
$(\cdot)^*$	Die Sterninvolution auf \mathcal{F} angewandt auf (\cdot) .
\doteq	„Ist definiert als“.
\square	D'Alembertscher Operator $\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2$.
0_2	2×2 -Nullmatrix.
1_2	2×2 -Einheitsmatrix.
a	Translationsvektor $a \in \mathbb{R}^4$.
$a(f)$	Element aus einer C^* -Algebra.
(a, b)	Minkowskiprodukt zwischen $a, b \in \mathbb{R}^4$.
a^μ	Eine reelle Zahl: $a^\mu = a^{\mu_1 \dots \mu_m} = a^{\mu_1} a^{\mu_2} \dots a^{\mu_m}$
$a_\mu b^\mu$	Summation über den Mehrfachindex μ : $a_\mu b^\mu = \sum_{\mu_1} \dots \sum_{\mu_m} a_{\mu_1 \dots \mu_m} b^{\mu_1 \dots \mu_m}$.
ϕ	Die Matrix $\phi = a_\mu \gamma^\mu$.
a_M	Die Matrix $a_M = a^\mu \sigma_\mu$.
a^M	Die Matrix $a^M = a^\mu \tilde{\sigma}_\mu$.
$\alpha_{(S,a)}$	Automorphe Wirkung des Elementes (S, a) auf \mathcal{F} .
α_φ	Globale Eichtransformation auf \mathcal{F} .
A	Element aus $SL(2, \mathbb{C})$ oder Element aus \mathcal{F} .
A^T	Für $A \in SL(2, \mathbb{C})$ das Transponierte von A .
A^\dagger	Das hermitesch konjugierte von A .
$[A, B]$	Kommutator von A und B . Ist gleich $AB - BA$.
$\{A, B\}$	Antikommutator von A und B . Ist gleich $AB + BA$.
\mathcal{A}	Observablenalgebra. Menge der Fixpunkte unter allen α_φ .
β	Temperaturvektor $\beta \in V^+$. $\sqrt{(\beta, \beta)}^{-1} = k_B T$.
B	Kompakte Teilmenge des Vorwärtslichtkegels.
$B_r(\vec{x})$	Offene Kugel um $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit Radius r .
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	Menge der beschränkten Operatoren auf \mathcal{H} .
\mathbb{C}_+	Die Menge der komplexen Zahlen mit $\text{Im } z > 0$.
$\overline{\mathbb{C}_+}$	Die Menge der komplexen Zahlen mit $\text{Im } z \geq 0$.
\mathcal{C}	Menge der Referenzzustände ω_B .
$\text{deg } \mu$	Der Grad des Multiindex μ . Wenn $\mu = (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m)$, dann $\text{deg } \mu = m$.
$d\rho(\beta)$	Normiertes Maß auf B .
δ_x	Deltadistribution bei $x \in \mathbb{R}^4$: $\delta_x(f) = f(x)$.
$\partial \overline{V}^+$	Rand des Vorwärtslichtkegels: $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid (x, x) = 0, x^0 \geq 0\}$.
∂^μ	Mehrfache Ableitung: $\partial^\mu = \partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2} \dots \partial^{\mu_m}$.
$\tilde{\partial}^\mu$	Balancierte Ableitung.
$\mathcal{D}(X, Y)$	Raum der glatten Funktionen von X nach Y mit kompaktem Träger.
$\mathcal{D}'(X, Y)$	Raum der Distributionen der Funktionen in $\mathcal{D}(X, Y)$.
$\varepsilon(p_0)$	Vorzeichenfunktion: $\varepsilon(x) = x/ x $, $\varepsilon(0) := 0$.
$\eta^{\mu\nu}$	Minkowskimetrik $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.
f	Funktion aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$ oder $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$.

\tilde{f}	Die Fouriertransformierte von f .
\bar{f}	Komplex Konjugiertes von f .
$f_{(\Lambda,a)}$	Die um die Transformation (Λ, a) verschobene Funktion $f_{(\Lambda,a)}$ mit $f_{(\Lambda,a)}(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$.
f_a	Die um a verschobene Funktion $f_a(x) = f(x - a)$.
\mathcal{F}^0	Vereinigung aller $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ mit endlichem \mathcal{O} .
$\mathcal{F}_{\mathcal{O}}^0$	Vereinigung aller $\mathcal{F}(\mathcal{O}')$ mit $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.
\mathcal{F}	Abschluss von \mathcal{F}^0 in der C^+ -Norm.
$\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$	Abschluss von $\mathcal{F}^0(\mathcal{O})$ in der C^* -Norm.
G	Eichgruppe, in dieser Arbeit $U(1)$.
$GL(2, \mathbb{C})$	Menge der invertierbaren komplexen 2×2 -Matrizen.
γ	Geschlossener Weg in der komplexen Ebene.
γ^μ	Gammamatrizen, die die Bedingung $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}1$ erfüllen.
\mathfrak{h}	Einteilchenhilbertraum, ist in \mathcal{F} eingebettet.
\mathcal{H}	Darstellungshilbertraum einer C^* -Algebra.
$i\rlap{/}\partial$	Diracoperator: $\rlap{/}\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$.
$\int_\gamma dz$	Konturintegral in der komplexen Ebene über den Weg γ .
\mathfrak{S}	Dieses Symbol wird in der Arbeit nicht verwendet.
l	Positiver lichtartiger Vektor $l \in \partial\bar{V}^+$.
$L^{\mu\nu}$	Die von $\lambda^{\mu\nu}(x)$ erzeugte zulässige Makroobservable.
$\lambda^{\mu\nu}(x)$	Thermale Observable. Linearkombination aus den $\theta_{rs}^\mu(x)$.
Λ	Eigentliche, orthochrone Lorentztransformation.
(Λ, a)	Element aus \mathcal{P}_+^\uparrow mit $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ und $a \in \mathbb{R}^4$.
\mathcal{L}_+^\uparrow	Eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe.
$\boldsymbol{\mu}$	Multiindex $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m)$.
$\boldsymbol{\mu\nu}$	Multiindex. Wenn $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m)$, dann $(\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m \nu)$.
N_p	Für $p \in \partial\bar{V}^+$ die Phasenraumdicke zum Impuls p .
$N_p(\beta)$	Die thermale Funktion der Phasenraumdicke N_p .
$\bar{N}_p(x)$	Teilchendichte am Punkt $x \in \mathbb{R}^4$ mit Impuls $p \in \partial\bar{V}^+$.
ω	Zustand auf einer C^* -Algebra.
ω_0	Spurzustand auf der CAR-Algebra.
ω_∞	Vakuumzustand auf der CAR-Algebra.
ω_β	KMS-Zustand zum Temperaturvektor β .
ω_B	Statistisches Gemisch von KMS-Zuständen $\omega_B = \int_B d\rho(\beta)\omega_\beta$, für ein normalisiertes Maß $d\rho$ auf B .
\mathcal{O}	Offene Teilmenge des \mathbb{R}^4 , manchmal auch endlich, d.h. mit kompaktem Abschluss.
p'	Für $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ ist $p' = (\vec{p} , \vec{p}) \in \partial\bar{V}^+$.
P^n	Menge der Permutation in n Symbolen.
$P_{<}^n$	Menge der Permutationen $\pi \in P^n$ mit $\pi(2k - 1) < \pi(2k + 1)$ und $\pi(2k - 1) < \pi(2k)$.
$(-1)^\pi$	Vorzeichen der Permutation $\pi \in P^n$.
\mathcal{P}_+^\uparrow	Eigentliche, orthochrone Poincarégruppe.
\mathcal{Q}_x	Raum der quadratischen Formen, die Messungen an einem Punkt $x \in \mathbb{R}^4$ symbolisieren.

$\text{supp } f$	Der Träger von f . Abschluss der Menge aller Punkte, an denen $f \neq 0$ ist.
S	Element aus $Spin_0(1, 3)$.
S^2	Einheitskugelschale $\{\vec{e} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{e} \cdot \vec{e} = 1\}$ in \mathbb{R}^3 .
S^μ	Entropiestromdichte.
$SL(2, \mathbb{C})$	Komplexe 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. Homomorph zu $Spin_0(1, 3)$.
$Spin(1, 3)$	Spingruppe.
$Spin_0(1, 3)$	Zusammenhangskomponente der Identität von $Spin(1, 3)$. Universelle Überlagerung von \mathcal{L}_+^\uparrow .
σ_μ	Die Pauli - Spinmatrizen.
$\tilde{\sigma}_\mu$	$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$, und $\tilde{\sigma}_i = -\sigma_i$ für $i = 1, 2, 3$.
$\sigma_{\mu, r\dot{s}}$	Die $(r\dot{s})$ -te Komponente der μ -ten Paulimatrix.
\mathcal{S}_x	Raum, der von den balancierten Ableitungen der Wickquadrate an einem Punkt aufgespannt wird. $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$.
$\mathcal{S}(X, Y)$	Raum der schnell fallenden Funktionen von X nach Y .
$\theta(x)$	Heavisidedistribution. $\theta(x) = 1$, wenn $x > 0$, sonst 0.
$:\theta^{\mu\nu}:(x)$	Normalgeordneter Energie-Impulstensor.
$\theta_{r\dot{s}}^\mu(x)$	Thermale Observable. Element aus \mathcal{S}_x .
\mathcal{T}_x	Raum der thermalen Observablen bezüglich eines Punkte $x \in \mathbb{R}^4$. $\mathcal{T}_x \subset \mathcal{Q}_x$.
v^\dagger	Das hermitesch Adjungierte des Vektors v . $v^\dagger = \bar{v}^T$.
V_+	Vorwärtslichkegel $V^+ = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid (x, x) > 0, x^0 > 0\}$.
\bar{V}^+	Abschluss des Vorwärtslichkegels $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid (x, x) \geq 0, x^0 \geq 0\}$.
φ	Lineares Funktional auf einer C^* -Algebra.
ξ	Überlagerungshomomorphismus $\xi : Spin_0(1, 3) \rightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$.
Ξ	Zulässige Makroobservable.
$\psi(f)$	Feldoperator aus \mathcal{F} für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2)$.
$\bar{\psi}(f)$	Feldoperator aus \mathcal{F} . $\bar{\psi}(f) = \psi(f)^*$.
ψ^\sharp	Platzhalter für ψ oder $\bar{\psi}$.

E Anhang: Literaturverzeichnis

Literatur

- [1] Buchholz, D.: *On Hot Bangs and the Arrow of Time in Relativistic Quantum Field Theory*. Commun. Math. Phys. **237**, 271-288 (2003)
- [2] Buchholz, D., Ojima, I., Roos, H.: *Thermodynamic Properties of Non-Equilibrium States in Quantum Field Theory*. Annals Phys. **297**, 219 (2002)
- [3] Bratteli, O., Robinson, D.W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*. Vol 2: Equilibrium states. Berlin: Springer Verlag, 1996
- [4] Ynduráin, F.J.: *Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Field Theory*. Berlin: Springer Verlag, 1996
- [5] Haag, R.: *Local Quantum Physics*. Berlin: Springer Verlag, 1992
- [6] Borchers, H.-J.: *Translation Group and Particle Representations in Quantum Field Theory*. Berlin: Springer Verlag, 1992
- [7] Dixon, W.G.: *Special Relativity*. Cambridge University Press, 1979
- [8] Buchholz, D., Bros, J.: *Towards a relativistic KMS-condition*. arXiv: hep-th/9807099
- [9] Friedlander, G., Joshi, M.: *Introduction to The Theory of Distributions: 2nd Edition*, Cambridge University Press, 1998
- [10] Balslev, E., Manuceau, J., Verbeure, A.: *Representations of Anticommutation Relations and Bogoliubov Transformations*. Commun. Math. Phys. **8**, 315-326 (1968)
- [11] Haag, R., Hugenholtz, N., Winnink, M.: *On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics*. Commun. Math. Phys. **5**, 215 (1967)
- [12] Hugenholtz, N., Kadison, R.: *Automorphisms and Quasi-Free States of the CAR Algebra*. Commun. Math. Phys. **43**, 181-197 (1975)
- [13] Ringwald, A.: *How to detect the cosmic neutrino background?* arXiv: hep-ph/0301157
- [14] Pastor, S.: *Relic neutrinos: Neutrino properties from cosmology*. arXiv: hep-ph/0306233
- [15] Hannestad, S.: *Neutrinos in Cosmology*. arXiv: hep-ph/0404239
- [16] Unsöld, A., Baschek, B.: *Der neue Kosmos*. 7.Auflage, Berlin: Springer Verlag 2002

- [17] Jost, R.: *The General Theory of Quantized Fields*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1965
- [18] Heßling, H.: *On the Local Equilibrium Condition*. arXiv:hep-th/0106039
- [19] Conway, J.: *Functions of One Complex Variable: 2nd Edition*. New York: Springer Verlag 1978