

**Sektorstruktur und Klassifikation von
zweidimensionalen, konformen Quantenfeldtheorien
auf dem Halbraum**

Diplomarbeit

vorgelegt von

Ulrich Pennig

aus

Cloppenburg / Niedersachsen

Angefertigt im

Institut für Theoretische Physik

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

März 2006

INHALTSVERZEICHNIS

1. <i>Einführung</i>	5
1.1 Konforme Geometrie	6
1.2 Konforme Quantenfeldtheorie in $1 + 1$ -Dimensionen	7
1.3 Konforme Quantenfeldtheorie mit Randbedingungen	11
1.4 Aufbau der Arbeit	12
2. <i>Algebraische Quantenfeldtheorie auf dem Halbraum</i>	15
2.1 Geometrische Vorbetrachtungen	15
2.2 Chirale Netze auf dem Rand	15
2.2.1 Virasoro-Netze mit $c < 1$	18
2.3 Generierte Randnetze und induzierte Netze auf dem Halbraum	20
3. <i>Netze von Subfaktoren</i>	23
3.1 Auszüge aus der DHR-Theorie	24
3.1.1 Direkte Summe, Komposition und Intertwiner	25
3.1.2 Konjugation, Linksinverse und Dimension	27
3.1.3 Fusionsregeln der VIRASORO-Netze	31
3.2 Chirale Erweiterungen und Q-Systeme	33
3.2.1 Bedingte Erwartungen und minimaler Index	33
3.2.2 Rekonstruktion chiraler Erweiterungen aus Q-Systemen	36
3.3 Tensor kategorien	42
3.3.1 Graphischer Intertwinerkalkül	46
3.3.2 Reduziertes Feldbündel	47
3.3.3 Zweite Kohomologie einer Tensor kategorie	54
3.4 Konstruktion geladener Felder	58
3.4.1 Bilokalisierte Ladungen	60

4. Klassifizierung nichtlokaler, chiraler Erweiterungen	65
4.1 Perron-Frobenius-Theorie	69
4.2 Klassifizierung	72
5. Sektoridentifikationen	77
5.1 Symmetrie der Graphen (A_{2n}, D_{n+2}) und (D_{n+1}, A_{2n})	79
5.2 Symmetrie der Graphen (E_6, A_{12}) und (A_{10}, E_6)	81
6. Kanonische Endomorphismen	83
6.1 Kanonische Endomorphismen zu (A_{2n}, D_{n+2}) und (D_{n+1}, A_{2n})	84
6.2 Kanonische Endomorphismen zu (E_6, A_{12}) und (A_{10}, E_6)	85
6.3 Kanonische Endomorphismen zu (E_7, A_{18}) und (A_{16}, E_7)	86
6.4 Kanonische Endomorphismen zu (E_8, A_{30}) und (A_{28}, E_8)	88
7. Chirale und Lokale Felder im Modell (A_{10}, E_6)	91
7.1 Dualitätsmatrizen	92
7.2 R-Matrizen	95
7.3 Konstruktion eines chiralen Feldes und Bedingungen an Halbraumfelder	98
8. Zusammenfassung und Ausblick	103

1. EINFÜHRUNG

Seit der Geburtsstunde der Quantenfeldtheorie durch die ersten Arbeiten seitens DIRAC zur Quantisierung des elektromagnetischen Feldes [10] trug die Analyse von *Symmetrien* der betrachteten Modelle wesentlich zu deren Verständnis bei. Das Interesse an *konform-kovarianten* Systemen, das mit skaleninvarianten Modellen aus der statistischen Mechanik begann, mag zwar im Laufe der Jahre wechselhaft gewesen sein, ist aber bis heute ungebrochen: Konforme Quantenfeldtheorie ist Bestandteil der AdS-CFT-Korrespondenz (siehe [54] für eine Einführung), interessanter Modelle in der topologischen QFT [43], der String-Theorie, sowie mathematischer Entwicklungen wie der elliptischen Kohomologie [63] oder der Klassifizierung von 3-Mannigfaltigkeiten durch TURAEV-Invarianten [65]. Um diese Vielschichtigkeit konformer Theorien zu greifen, erweist sich der abstrakte Rahmen der *algebraischen Quantenfeldtheorie*, die auf den Ideen von HAAG und KASTLER [33] aufbaut, als ideal. Ihr Credo, den physikalischen Inhalt eines Modells allein aus einem zugehörigen Netz von Operatoralgebren zu rekonstruieren, erlaubt im konformen Fall zum Teil eine vollständige Klassifizierung (siehe zum Beispiel [41]).

Insbesondere gilt dies für niederdimensionale, konforme Quantenfeldtheorien. Tatsächlich ist die Symmetriegruppe der winkelerhaltenden Abbildung bei einer Raum- und einer Zeitdimension isomorph zur Gruppe $\text{Diff}_+(S^1) \times \text{Diff}_+(S^1) \cup \text{Diff}_-(S^1) \times \text{Diff}_-(S^1)$ mit den orientierungserhaltenden Diffeomorphismen des Kreises $\text{Diff}_+(S^1)$ und folglich unendlichdimensional. Gerade aus diesem Grund sind konforme Theorien auf einer zweidimensionalen Raumzeit nicht nur von mathematischer Eleganz. Vielmehr vereinfacht der hohe Grad an Symmetrie viele Problemstellungen, so dass sie ideale „*Toy-Models*“ abgeben, an denen sich Konstruktionen vor ihrer Verallgemeinerung messen müssen.

In diesem Sinn lassen sich auch die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Theorien auf der MINKOWSKI-Halbebene auffassen: Die Analyse eines zweidimensionalen Systems mit vorgegebenen Randbedingungen an einem Horizont ist ein erster Schritt zum Verständnis der höherdimensionalen Situation. Doch interessant ist das zweidimensionale Randwertproblem nicht zuletzt auch wegen des *holographischen Prinzips*, dass die volle Rekonstruktion der Bulk-Theorie aus vorgegebenen (nichtlokalen!) Daten auf dem Rand erlaubt. Phänomene ähnlich zu diesem sind — nicht erst seit der AdS-CFT-Korrespondenz — Gegenstand aktueller Diskussion. Auch die Klassifizierung der möglichen Randdaten, d.h. der chiralen Netze auf der reellen Achse, ist für sich interessant. So lassen sich zum Beispiel die auftretenden Tensor kategorien in die sehr viel größere Bikategorie vN der VON NEUMANN-Algebren einbetten, die im Rahmen der Entwicklung der elliptischen Kohomologie auftritt (siehe hierzu [63] und den Ausblick am Schluß dieser Arbeit).

1.1 Konforme Geometrie

Die folgenden Ausführungen sollen einen kurzen Überblick über die geometrischen Eigenschaften der konformen Gruppe geben. Sie umfasst per Definition alle winkeltreuen Transformationen. Für eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ mit $U, V \subset M$ lokal konform, falls $\varphi^* g = \Omega^2 g$ gilt¹ mit $\Omega : U \rightarrow \mathbb{R}_+$. In einer $d > 2$ -dimensionalen Raumzeit mit euklidischer oder LORENTZ-Signatur ergibt sich φ aus einer Komposition der folgenden Transformationen...

- Translationen: $x \mapsto x + a$,
- LORENTZ-Transformationen: $x \mapsto \Lambda x$ mit $\Lambda \in O(d-1, 1)$ bei MINKOWSKI-Signatur, $\Lambda \in O(d)$ bei euklidischer Signatur,
- Skalentransformationen: $x \mapsto e^\lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
- spezielle konforme Transformationen:

$$x \mapsto \frac{x - b(x \cdot x)}{1 - 2(b \cdot x) + x^2 b^2}.$$

Insbesondere letztere verhindern aufgrund der auftretenden Singularitäten eine Ausdehnung der lokalen Transformationen auf die gesamte Mannigfaltigkeit. Tatsächlich operiert die konforme Gruppe, bestehend aus konformen Diffeomorphismen, daher nicht auf der Raumzeit selbst, sondern auf deren Kompaktifizierung, gegeben durch...

$$N = \{(\xi_0 : \dots : \xi_{d+1}) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{R}) \mid \langle \xi \mid \xi \rangle_N = 0\},$$

... wobei die Signatur des Skalarproduktes im euklidischen Fall $(d+1, 1)$ im MINKOWSKI-Fall $(d, 2)$ ist [61]. Hierbei bezeichnet $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{R})$ den $d+1$ -dimensionalen reellen projektiven Raum, in den sich sowohl euklidischer, als auch MINKOWSKI-Raum einbetten lassen. Die Operation der konformen Gruppe auf N wird induziert durch die orthogonalen Transformationen² $SO_0(d+1, 1)$, bzw. $SO_0(d, 2)$ des umgebenden Raumes \mathbb{R}^{d+2} .

Diese Konstruktion löst das Problem der Singularitäten, jedoch gilt es, eine physikalische Stolperfalle zu überwinden: Denn spezielle konforme Transformationen sind in der Lage, raumartig separierte Gebiete im MINKOWSKI-Raum auf zeitartig getrennte abzubilden. Da Kausalität im Sinne der speziellen Relativitätstheorie durch kommutierende Quantenfelder bei raumartigen Abständen implementiert wird, hätte konforme Kovarianz ebenso deren zeitartige Kommutativität zur Folge. Dies verurteilt eine Menge interessanter Modelle zu unrecht als unphysikalisch und wird als EINSTEIN-Kausalitäts-Paradoxon bezeichnet. Eine Lösung dieses Problems, die von LÜSCHER und MACK in [51] vorgeschlagen wurde, sieht vor, die WICK-rotierte Version der konform-kompaktifizierten *euklidischen* Raumzeit zu studieren. Letztere ist vermöge der Parametrisierung...

$$N \ni \xi = (y, s, r) = (\sinh \tau, \vec{y}, s, \cosh \tau) \quad \Rightarrow \quad x^0 = \frac{\sinh \tau}{s + \cosh \tau}, \quad \vec{x} = \frac{\vec{y}}{s + \cosh \tau}$$

¹ $\varphi^* g(x, y) = g(D\varphi(x), D\varphi(y))$ ist der Pullback von φ .

² Da die Gruppe $SO(p, q)$ für $p, q \geq 1$ zwei Zusammenhangskomponenten besitzt, bezeichnet der Index 0 die Identitätskomponente.

... diffeomorph zu $S^{d-1} \times \mathbb{R} \ni ((\vec{y}, s), \tau)$. Im Sinne einer analytischen Fortsetzung, ist nun τ durch $i\tau$ zu ersetzen, was einem Übergang von hyperbolischen zu trigonometrischen Funktionen entspricht. Die MINKOWSKI-Ebene ist folglich periodisch in N eingebettet, zum Beispiel in folgendem Parameterbereich...

$$M = \{(\vec{y}, s, \tau) \in N \mid -\pi < \tau < \pi, \cos \tau + s > 0\}$$

Ebenso geht die Gruppenwirkung der $SO(d+1, 1)$ nach analytischer Fortsetzung in eine entsprechende $SO(d, 2)$ -Wirkung über. LÜSCHER und MACK zeigten nun, dass die Überlagerung $\widetilde{M} = S^{d-1} \times \mathbb{R}$ eine globale kausale Struktur besitzt, die durch die Operation der Überlagerung der $SO(d, 2)$ respektiert wird. Konforme Quantenfelder sind folglich auf \widetilde{M} zu definieren. Wie dieser Gedanke präzisiert werden kann, soll im nächsten Abschnitt skizziert werden.

Die konforme Gruppe der MINKOWSKI-Ebene umfasst im zweidimensionalen Fall nicht nur die orthogonalen Transformationen $SO(2, 2)$. Aufgrund der Produktform der Metrik...

$$dt^2 - dx^2 = dx^+ dx^- \quad \text{mit } x^+ = t + x, \quad x^- = t - x$$

... induziert jedes Paar von Diffeomorphismen $x^+ \mapsto u(x^+)$, $x^- \mapsto v(x^-)$ ein Element der konformen Gruppe, sofern beide orientierungserhaltend oder -umkehrend sind. Folglich ist sie isomorph zu $\text{Diff}_+(S^1) \times \text{Diff}_+(S^1) \cup \text{Diff}_-(S^1) \times \text{Diff}_-(S^1)$. Die beiden Faktoren dieses Produkts wirken auf die sogenannten *chiralen* Komponenten der Quantenfelder, d.h. jene die nur von x^\pm abhängen. Tatsächlich ist volle Diffeomorphismeninvarianz eine zu starke Forderung an den Vakuumvektor einer konformen Theorie. Sie reduziert sich auf *Möbiusinvarianz* der chiralen Komponenten, d.h. die Gruppenwirkung der ...

$$SO(2, 2) \simeq [SU(1, 1) \times SU(1, 1)] / \mathbb{Z}_2$$

... lässt den Vektor unverändert. Auch hier ist wieder die Überlagerung der Möbiusgruppe $Mb \simeq SU(1, 1) / \mathbb{Z}_2$ heranzuziehen. Somit wirken im Unterschied zum höherdimensionalen Fall jetzt zwei Kopien von \widetilde{Mb} auf den Raum $\widetilde{S^1} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \widetilde{S^1} \times \widetilde{S^1}$.

Im Sinne der Quantisierung der chiralen Symmetrien werden daher Darstellungen der Diffeomorphismengruppe $\text{Diff}_+(S^1)$ benötigt, die jedoch aufgrund der Gruppenkohomologie projektiv sind. Folglich lässt sich lediglich die *universelle zentrale Erweiterung* der $\text{Diff}(S^1)$ echt darstellen. Deren LIE-Algebra ist durch die sogenannte VIRASORO-Algebra mit den Generatoren L_n gegeben...

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \delta_{n+m,0} \frac{n}{12} (n^2 - 1) Z, \quad (1.1)$$

$$[L_n, Z] = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

... die in Kapitel 2.2.1 wieder aufgegriffen werden soll. Sie spielt eine zentrale Rolle in konformen Quantenfeldtheorien.

1.2 Konforme Quantenfeldtheorie in 1 + 1-Dimensionen

Im Sinne der von WIGHTMAN entworfenen Axiomatik sind Felder als operatorwertige Distributionen aufzufassen, deren Korrelationsfunktionen (*n-Punktfunktionen*)...

$$\langle \Omega \mid \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n) \Omega \rangle$$

...eine volle Rekonstruktion der Theorie erlauben. Skalierungskovarianz drückt sich durch einen Operator $U(\lambda)$ aus, der φ_i in folgender Weise transformiert...

$$U(\lambda) \varphi_i(x) U(\lambda)^* = \lambda^h \varphi_i(\lambda x) \quad , \quad U(\lambda) \Omega = \Omega \quad ,$$

...wobei die dabei auftretende Konstante h *Skalendimension* des Feldes φ_i heißt. Konforme Kovarianz entspricht einer Darstellung der konformen Gruppe auf dem zugehörigen Hilbertraum. Ferner ist zur Theorie ein erhaltenes Feld assoziiert, dass eine Interpretation als Energieflussdichte erlaubt, der symmetrische *Energie-Impuls-Tensor* $T_{\mu\nu}$ mit $\int T_{0\nu}(x) dx^1 = P_\nu$ und $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

Wie LÜSCHER und MACK in einem unveröffentlichten Manuskript 1976 bewiesen, implizieren diese Voraussetzungen bereits die folgenden weiteren Eigenschaften für $T_{\mu\nu}$ [52] (siehe auch [25]):

- Der Energie-Impuls-Tensor ist spurfrei und von der Skalendimension 2.
- $T_{\mu\nu}$ zerfällt in die *chiralen Komponenten*...

$$T_R(x^-) = \frac{1}{2} (T_{00}(t, x) + T_{01}(t, x)) \quad \text{und} \quad T_L(x^+) = \frac{1}{2} (T_{00}(t, x) - T_{01}(t, x)) \quad (1.3)$$

- T_R und T_L erfüllen $[T_L, T_R] = 0$. Sie sind LIE-Felder, deren Momente...

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2} \int dx (1 - ix)^{1-n} (1 + ix)^{1+n} T_R(x) \\ \bar{L}_n &= \frac{1}{2} \int dx (1 - ix)^{1-n} (1 + ix)^{1+n} T_L(x) \end{aligned}$$

...zwei unabhängigen VIRASORO-Algebren (1.1) genügen.

Folglich liefert jede Darstellung der VIRASORO-Algebren $\text{Vir}_+ \otimes \text{Vir}_-$ eine ebensolche des Energie-Impuls-Tensors und ist damit ein potentieller Kandidat für einen Hilbertraum der Theorie. Superauswahlsektoren entsprechen dabei den *irreduziblen* Darstellungen. In diesen wird das zentrale Element Z durch eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, die *zentrale Ladung*, repräsentiert, die folglich den Energie-Impuls-Tensor der Theorie fixiert. Tatsächlich lassen sich *alle* erhaltenen Ströme einer konformen Theorie in chirale Komponenten analog zu (1.3) zerlegen.

Eine besondere Bedeutung fällt denjenigen Feldern zu, die sich unter Wirkung der chiralen Dynamik, generiert durch T_L bzw. T_R , wie verallgemeinerte Dichten verhalten. Dies drückt sich durch die Kommutatorrelation...

$$-i [T_L(x^+), \varphi(y^+, y^-)] = -\partial_{y^+} \varphi(y^+, y^-) \delta(x^+ - y^+) + h \varphi(y^+, y^-) \delta'(x^+ - y^+)$$

...aus (entsprechend für T_R), die sich nach Integration über eine „infinitesimale Testfunktion“ ε in ...

$$i [T_L(\varepsilon), \varphi(y^+, \cdot)] = \left(\frac{d(y^+ + \varepsilon(y^+))}{dy^+} \right)^h \varphi(y^+ + \varepsilon(y^+), \cdot) - \varphi(y^+, \cdot)$$

... übersetzt. Felder dieser Art induzieren eine Höchstgewichtsdarstellung der chiralen VIRASORO-Algebra, indem sie einen Vektor $|h^+\rangle \otimes |h^-\rangle = \varphi(i, i) \Omega$ aus dem Vakuum erzeugen, der...

$$L_0 |h\rangle = h |h\rangle \quad \text{und} \quad L_n |h\rangle = 0 \quad \text{für } n \geq 1$$

...erfüllt. Dies entspricht einem Grundzustand des *konformen HAMILTON-Operators* L_0 mit den zugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $L_{\mp n}$. Ein Skalarprodukt auf dem Hilbertraum hat demnach der Hermitizitätsforderung $L_n^* = L_{-n}$ zu genügen. Ausgehend von diesen Voraussetzungen bewiesen FRIEDAN, QUI und SCHENKER vermöge der KAC-Determinanten-Formel [37], dass für $c < 1$ lediglich diskrete Werte der Paarung (c, h) gegeben durch...

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$h_{p,q}(m) = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad 1 \leq p \leq q \leq m.$$

...ein positiv (semi-)definites Skalarprodukt zulassen [21, 22, 27]. Mittels *Coset-Konstruktionen* gelang es GODDARD, KENT und OLIVE, zu zeigen, dass alle diese Werte für $c < 1$ gültige Modelle hervorbringen [28]. Primäre Felder der zu $c < 1$ korrespondierenden Skalendimensionen stehen in 1 : 1-Korrespondenz mit den *Superauswahlsektoren* des Energie-Impuls-Tensors. Konforme Felder lassen sich folglich in *Familien* gliedern, die aus einem primären Feld der Dimension (h^+, h^-) und sogenannten Deszendentenfeldern mit $(h^+ + n^+, h^- + n^-), n^\pm \in \mathbb{N}$ bestehen, die durch die Leiteroperatoren gewonnen werden.

In der Mitte der achtziger Jahre klassifizierten BELAVIN, POLYAKOV und ZAMOLODCHIKOV schließlich konforme Quantenfeldtheorien im zweidimensionalen *euklidischen* Raum mit endlich vielen primären Feldern. Sie formulierten deren n -Punktfunktionen als Lösungen bestimmter Differentialgleichungen, die im wesentlichen auf den WARD-Identitäten beruhen [1]. Auch hier manifestiert sich eine chirale Struktur der Form...

$$\langle \varphi(t_1, x_1) \cdots \varphi(t_n, x_n) \rangle = \sum_{i=1}^r f_+^i(x^+) f_-^i(x^-), \quad (1.4)$$

...die lediglich Abhängigkeiten von den Lichtkegelkoordinaten $x^\pm = (t_1 \pm x_1, \dots, t_n \pm x_n)$ aufweist. Da nur endlich viele primäre Felder betrachtet werden, erweisen sich auch die auftretenden Summen als endlich.

Wie bereits in Abschnitt 1.1 skizziert, ist der natürliche Parameterbereich *lokaler Felder* die Überlagerung \widetilde{M} des MINKOWSKI-Raumes. SCHROER, SWIECA und VÖLKEL modifizierten dieses Bild durch eine Zerlegung der chiralen Größen bezüglich des Zentrums der (Überlagerung der) konformen Gruppe [62]:

$$\psi^\alpha(x) = \sum_{\gamma, \beta} \varphi_{\gamma, \beta}^\alpha(x) \quad \text{mit} \quad \varphi_{\gamma, \beta}^\alpha(x) = P_\beta \psi^\alpha(x) P_\gamma,$$

$$Z = \sum_{\beta} e^{2\pi i h_\beta} P_\beta \quad \Rightarrow \quad Z \varphi_{\gamma, \beta}^\alpha(x) Z^* = e^{2\pi i (h_\beta - h_\gamma)} \varphi_{\gamma, \beta}^\alpha(x).$$

Die Indizes α, β und γ bezeichnen die konformen Familien bzw. die primären Felder der Theorie, so dass die Projektoren P_β eine Spektralzerlegung der Darstellung des Zentrums

bilden. Folglich interpolieren die Operatoren $\varphi_{\gamma,\beta}^\alpha(x)$ zwischen den Darstellungsräumen \mathcal{H}_γ und \mathcal{H}_β . Dies ist der Preis, der dafür zu zahlen ist, dass die nichtlokalen Felder $\varphi_{\gamma,\beta}^\alpha(x)$ auf M definiert sind. Als Operatoren zwischen verschiedenen Hilberträumen können diese Größen natürlich keine Kommutatorrelationen erfüllen. Dennoch bilden sie die Grundbausteine der Blöcke in (1.4). Dies rechtfertigt eine entsprechende Zerlegung des lokalen Feldes $\psi^{\alpha+,\alpha-}$ in ein Tensorprodukt *chiraler Austauschkomponenten*...

$$\psi^{\alpha+,\alpha-}(t,x) = \sum_{\substack{\beta_+,\gamma_+ \\ \beta_-,\gamma_-}} \varphi_{\gamma_+,\beta_+}^{\alpha+}(x^+) \otimes \varphi_{\gamma_-,\beta_-}^{\alpha-}(x^-). \quad (1.5)$$

Die Superauswahlsektoren, zwischen denen die Austauschfelder interpolieren, sind durch die Dreipunktfunktionen $\langle \psi^\beta(x_1) \Omega \mid \psi^\alpha(x_2) \psi^\gamma(x_3) \Omega \rangle$ der lokalen Felder fixiert. Sie liefern das Kompositionsgesetz von Superauswahlladungen in Form von formalen, assoziativen und kommutativen Fusionsregeln...

$$[\alpha] [\gamma] = \bigoplus_{i \in I} [\beta_i] \quad (1.6)$$

... mit einer Indexmenge I , die für endlich viele primäre Felder selbst endlich ist.

Natürlich induziert die Lokalität der konformen Blöcke in 1.4 einen entsprechenden Ersatz für die fehlenden Kommutatorrelationen — die *Austauschalgebra*, die von REHREN in [57] analysiert wurde. Die n -Punktfunktionen $\langle \dots \psi(x) \psi(y) \dots \rangle$ und $\langle \dots \psi(y) \psi(x) \dots \rangle$ gehen durch entsprechende analytische Fortsetzung der einen zur anderen auseinander hervor. Für raumartig getrennte x, y ist der Wert der beiden jedoch identisch. Dies ist nur dann mit der Blockstruktur verträglich, falls die permutierten Blöcke aus einer Linearkombination der ursprünglichen hervorgehen. REHREN und SCHROER transferierten diese Idee in [58] auf die Austauschfelder durch Einführung der komplexwertigen *R-Matrizen*...

$$\varphi_{\beta_0,\beta_1}^{\alpha_1}(x_1) \varphi_{\beta_1,\beta_2}^{\alpha_2}(x_2) = \sum_{\beta'} \left[R_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\beta_0,\beta_2)} \right]_{\beta_1,\beta'} \varphi_{\beta_0,\beta_1}^{\alpha_2}(x_2) \varphi_{\beta_1,\beta_2}^{\alpha_1}(x_1). \quad (1.7)$$

Nach FRÖHLICH lassen sie sich als Holonomien eines flachen Zusammenhangs eines Vektorbündels über dem Konfigurationsraum $\mathbb{C}^n \setminus D$ interpretieren [23]. D entspricht den Koinzidenzpunkten...

$$D = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j \text{ für ein Paar } i, j \text{ mit } i \neq j\}.$$

Weiterhin lässt sich aus den *R-Matrizen* eine Matrixdarstellung der ARTINSchen Zopfgruppe konstruieren, wobei die Assoziativität der Austauschalgebra die Zopfrelationen implementiert [58]. Die Zopfgruppe tritt auch als Fundamentalgruppe des Konfigurationsraumes in Erscheinung.

Die algebraische Quantenfeldtheorie gliedert all diese Aspekte in einen allgemeineren Gesamtkontext ein: Im Zentrum steht ein gerichtetes Netz $O \mapsto \mathcal{A}(O)$ von VON NEUMANN-Algebren über den Doppelkegeln des zweidimensionalen MINKOWSKI-Raumes, das die Forderung nach Lokalität und konformer Kovarianz erfüllt. Darin eingebettet findet sich ein irreduzibles Subnetz...

$$\mathcal{A}_+(I_+) \otimes \mathcal{A}_-(I_-) \subset \mathcal{A}(O), \quad (1.8)$$

... das durch Einschränken auf die Lichtkegelkoordinaten x^\pm aus \mathcal{A} hervorgeht und *selbst Lokalität erfüllt*. Der Archetyp eines solchen konformen Netzes wird durch den Energie-Impuls-Tensor, bzw. dessen chirale Komponenten generiert. Zweidimensionale konforme Quantenfeldtheorien ergeben sich aus lokalen Erweiterungen der Form (1.8). LONGO und REHREN schlugen in [48] ein Programm zu deren Klassifizierung vor, das für VIRASORO-Netze in [41] von KAWAHIGASHI und LONGO durchgeführt wurde.

Im allgemeineren Rahmen der lokalen Quantenfeldtheorie, der sich natürlich nicht nur auf zweidimensionale Modelle beschränkt, legten die Arbeiten [12] bis [15] von DOPLICHER, HAAG und ROBERTS den Grundstein zur algebraischen Behandlung der Superauswahlregeln einer großen Klasse von Modellen: Erfüllen Darstellungen des Observablennetzes das *DHR-Kriterium*, lassen sie sich auf lokalisierte Endomorphismen der zum Netz gehörigen universellen Algebra zurückziehen. Unitäre Äquivalenzklassen dieser Endomorphismen entsprechen nun den Superauswahlsektoren der Theorie. Für (kompaktifizierbare) chirale Netze erfüllen die physikalisch relevanten Darstellungen das Kriterium positiver Energie (L_0 ist von unten beschränkt), das in derartigen Netzen bereits die DHR-Bedingung impliziert.

Viele darstellungstheoretische Begriffe wie *Irreduzibilität* und die Zerlegung in *direkte Summen* lassen sich auf Endomorphismen transferieren. Fusionsregeln der Form (1.6) nehmen daher eine sehr konkrete Gestalt an: Sie ergeben sich aus der Komposition der zugehörigen Endomorphismen und deren anschließender Zerlegung in irreduzible Subsektoren. FREDENHAGEN, REHREN und SCHROER konstruierten in [19, 20] das *reduzierte Feldbündel* \mathcal{F} als Ersatz für eine Feldalgebra niederdimensionaler Quantenfeldtheorien. \mathcal{F} enthält die aus (1.5) bekannten interpolierenden Austauschfelder in Form *geladener Intertwiner*.

Auch diese geladenen Intertwiner erfüllen eine Austauschalgebra, induziert durch den *statistischen Operator*, der die Vertauschung zweier Endomorphismen, bzw. zweier Superauswahlchargen implementiert. Aufgrund der Topologie des zweidimensionalen Raumes oder der reellen Achse weist das kausale Komplement eines Doppelkegels bzw. eines Intervalls zwei Zusammenhangskomponenten auf. Daher führt die DHR-Theorie der Statistik nicht wie in vier Dimensionen zu Darstellungen der Permutations-, sondern der bereits erwähnten Zopfgruppe. Die R -Matrizen entstehen als Matrixelemente des statistischen Operators in endlich-dimensionalen Hilberträumen von Isometrien. In einfachen Fällen sind sie durch die Kenntnis der Fusionsregeln und der Skalendimensionen bereits eindeutig fixiert.

1.3 Konforme Quantenfeldtheorie mit Randbedingungen

Die ersten Betrachtungen konformer Quantenfeldtheorien auf dem Halbraum stammen für den Fall euklidischer Metrik von CARDY, der ähnlich BELAVIN, POLYAKOV und ZAMOLODCHIKOV n -Punktfunktionen primärer, lokaler Felder untersuchte. Mit den aus [1] bekannten Methoden wies er nach, dass die von den $2n$ Variablen x_i^\pm abhängigen n -Punktfunktionen auf dem Halbraum dieselben Differentialgleichungen erfüllen wie die chiralen konformen Blöcke der $2n$ -Punktfunktionen einer entsprechenden Theorie auf der vollen euklidischen Ebene. Daher ergeben sich erstere als Linearkombination der letzteren.

Eine physikalisch sinnvolle Forderung an den Energie-Impuls-Tensor für eine Theorie auf dem Halbraum scheint dadurch gegeben, dass ein Energiefluss über den Horizont bei $x = 0$ verboten wird. Dies war nicht nur der Ausgangspunkt von CARDYS Arbeit, sondern wird auch

Grundlage der vorliegenden Analyse sein. Die Forderung übersetzt sich in ein Verschwinden der Komponente $T_{01}(t, 0)$ des Energie-Impuls-Tensors. Da dieser jedoch in chirale Anteile (1.3) zerfällt, ergibt sich hieraus $T_L = T_R =: T$, folglich eine Identifizierung der beiden chiralen Komponenten. Wie diese heuristischen Betrachtungen bereits andeuten, besteht eine konforme Quantenfeldtheorie auf dem Halbraum nicht mehr aus zwei unabhängigen chiralen Algebren, vielmehr bricht die Randbedingung die Symmetrie und führt zur Identifizierung der beiden. Auch der zugehörige Hilbertraum ergibt sich nicht mehr als Tensorprodukt, sondern als Summe von Darstellungsräumen der VIRASORO-Algebra.

Im Sinne einer Klassifizierung ähnlich [41] ergeben sich konforme Quantenfeldtheorien aus *nichtlokalen*, chiralen Erweiterungen einer vorgegebenen Theorie $\mathcal{A}(I)$ auf dem Rand...

$$\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{B}(I)$$

...mittels einer algebraischen, holographischen Methode, die im Folgenden noch näher skizziert werden soll. Im Kern steht die Beobachtung, dass **nicht-chirale, lokale Felder im Halbraum** als eine Linearkombination von Produkten **nicht-lokaler, chiraler Felder auf dem Rand** darstellbar sind.

Analog zur Theorie auf dem vollen MINKOWSKI-Raum werden auch hier die geladenen Felder, zunächst auf dem Rand, dann aber ebenso im Halbraum durch geladene Intertwiner des Netzes \mathcal{B} ausgedrückt werden, die zwischen verschiedenen Sektoren des chiralen Netzes \mathcal{A} vermitteln. Dabei tragen die lokalen Felder der induzierten Theorie in der Halbebene ein bilokalisiertes Produkt von Ladungen der chiralen Algebra, im Gegensatz zum Tensorprodukt von Links- und Rechtsladungen im obigen Fall. Dies führt auch zu einer modellunabhängigen Erklärung für CARDYs Beobachtung, da in den konformen Blöcken der $2n$ -Punktfunktionen das Produkt zweier aufeinanderfolgender, geladener Felder jeweils Bestandteil eines lokalen Feldes auf dem Halbraum ist.

1.4 Aufbau der Arbeit

Kapitel 1 dient der Einführung des geeigneten Lesers in die konforme Quantenfeldtheorie und schlägt daher einen weiten Bogen über die frühen Resultate von BELAVIN, POLYAKOV und ZAMOLODCHIKOV [1] bis hin zu den jüngsten Verbindungen zur Subfaktor-Theorie durch die Arbeiten von KAWAHIGASHI, LONGO und REHREN [41, 48, 50]. Insbesondere werden hier ebenso die gewählten Randbedingungen an die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Theorien motiviert.

Die Grundlagen algebraischer Quantenfeldtheorie in der MINKOWSKI-Halbebene \mathcal{M}_+ sind Thema des Kapitels 2 dieser Arbeit. Nach einer kurzen Einführung in die Geometrie des Raumes \mathcal{M}_+ werden zentrale Ergebnisse aus [50] rezitiert. Von fundamentaler Bedeutung ist dabei die Definition des lokalen Netzes auf \mathbb{R} , spezialisiert auf den Fall der VIRASORO-Netze Vir_c mit $c < 1$ in Abschnitt 2.2.1. Nach Einführung des Begriffes der chiralen Erweiterung (2.4) und des induzierten Netzes auf dem Halbraum (Definition 2.3.4) mündet das Kapitel in dem Holographieresultat von REHREN, Satz 2.3.1.

Ein kurzer Einblick in die Grundbegriffe aus den Arbeiten von DOPLICHER, HAAG und ROBERTS [14, 15] und in deren Transfer auf niederdimensionale Quantenfeldtheorien durch

FREDENHAGEN, REHREN und SCHROER (siehe [19]) steht am Beginn des Kapitels 3. Eine wichtige Invariante in diesem Zusammenhang ist die Dimension. Additivität und Multiplikativität dieser Größe zitieren wir aus [19]. Mit der FROBENIUS-Reziprozität wird außerdem ein grundlegendes Werkzeug für die folgenden Kapitel bereitgestellt. Die Fusionsregeln der VIRASORO-Algebra (3.14), wie sie in den Arbeiten von LOKE [45] und KAWAHIGASHI [41] erarbeitet wurden, spielen in den Kapiteln 4, 5 und 6 eine zentrale Rolle.

Da chirale Erweiterungen als Inklusionen von VON NEUMANN-Algebren entstehen, fokussiert Kapitel 3 die Subfaktortheorie, die mittels der von LONGO entwickelten Q -Systeme eine Möglichkeit zu deren Klassifikation bereitstellt. Insbesondere ist Satz 3.2.2 aus [46] hervorzuheben, der eine physikalisch bedeutsame Größe – eben die Dimension eines Superauswahlsektors – mit einer mathematischen Invarianten verknüpft. Ebenso lassen sich viele andere Begriffsbildungen aus der DHR-Theorie auf das allgemeinere Setting von Homomorphismen zwischen Faktoren übertragen. Die \mathcal{A} - \mathcal{B} -, bzw. \mathcal{B} - \mathcal{A} -Morphismen sind in diesem Sinne die wegweisenden Konstruktionen, deren physikalische Bedeutung durch Satz 3.2.4, Korollar 3.2.1 und Satz 3.2.5 (zitiert aus [48]) deutlich wird. Nach der Definition des Q -Systems führt der Rekonstruktionssatz 3.2.8 aus [48] die Klassifizierung chiraler Erweiterungen auf die nächste Ebene.

Wie Dualitätsresultate von DOPLICHER und ROBERTS zeigen, lassen sich Fusionsregeln in Quantenfeldtheorien in einem sehr viel breiteren kategorientheoretischen Rahmen einbetten, der in Abschnitt 3.3 näher beleuchtet wird. Die ausführliche Ausarbeitung der Beispiele in diesem Kapitel ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit entstanden. Fundamental für das Klassifizierungsproblem ist insbesondere die Definition der Kategorie $\text{Ext}(\iota)$ einer chiralen Erweiterung in Beispiel 3.3.5. Den mit den Tensor kategorien verflochtenen graphischen Intertwinerkalkül aus Abschnitt 3.3.1 bringen wir im Beweis der Braiding-Fusion-Relationen, Satz 3.3.4, zur Anwendung. Zuvor noch wird die Konstruktion des reduzierten Feldbündels erläutert, die in [20] entwickelt wurde und in Kapitel 7 benötigt wird. Auch der Begriff der zweiten Kohomologie aus [41] einer Tensor kategorie wird im Rahmen dieser Arbeit durch Beispiele motiviert. Seine Bedeutung für das folgende Klassifikationsresultat besteht darin, dass er die Bestimmung der Q -Systeme auf die Bestimmung der (dualen) kanonischen Endomorphismen reduziert. Kapitel 3 schließt mit den Resultaten aus [50] zu chiralen geladenen Feldern und Halbtraumfeldern ab.

Kapitel 4 führt zunächst in die graphentheoretischen Hintergründe der Subfaktor-Theorie ein – durch die Definition des Fusionsgraphen 4.0.3 – und stellt Verbindungen zu BRATTELI-Diagrammen und der Subfaktor-Theorie von Typ II_1 -Faktoren nach JONES her, die vom Autor ausgearbeitet wurden. Außerdem wird der Fusionsring $K_0(\Delta)$ definiert, der für das Berechnen der kanonischen Endomorphismen zentral ist, aber auch zu einem weiteren Resultat des Autors, Satz 4.0.2, geführt hat, das eine Verbindung zwischen einer graphentheoretischen Eigenschaft und der Lokalität einer Erweiterung zieht. Nach Erläuterung der klassischen Resultate über die Klassifikation von COXETER-Graphen der Norm kleiner 2, zitieren wir aus [42] den Klassifikationssatz und erweitern diesen um die Konstruktion des Fusionsgitters.

Die Sektoridentifikationen aus Kapitel 5 sind eines der Hauptresultate der vorliegenden Arbeit. Alle Ausführungen gehen auf den Autor zurück, Lemma 5.0.2 und Satz 5.0.3 entstanden in Zusammenarbeit mit REHREN. Das Ziel dieses Teils ist der Transfer der Äquivalenzrelation der VIRASORO-Fusionsregeln auf entsprechende Identifizierungen in den Fusionsgraphen der Kategorie $\text{Ext}(\iota)$. Diese lassen sich auf einen Automorphismus des Fusionsgitters zurückführen

und liefern insbesondere für die Paarungen, die D_k -Graphen oder den Graphen E_6 enthalten, interessante Resultate.

Kapitel 6 widmet sich der Bestimmung der kanonischen Endomorphismen aus dem graphentheoretischen Setting heraus und vervollständigt damit das Klassifizierungsproblem chiraler Erweiterungen. Eine Zerlegung des kanonischen Endomorphismus in seine irreduziblen Komponenten ist gleichbedeutend mit einer Zerlegung des zugehörigen Hilbertraums einer Theorie in seine Superauswahlsektoren, was die physikalische Bedeutung dieses Teils erklärt. Auch hier gehen alle Sätze auf den Autor zurück.

Diese Arbeit schließt mit der Betrachtung eines konkreten Modells, nach dem Klassifikationsatz 4.2.2 gegeben durch das Gitter $A_{10} \times E_6 / \sim$, für das ein chirales Feld bestimmt werden soll. Dies geschieht einmal durch Betrachtung des zugehörigen Q -Systems, ein zweites Mal vermöge dessen Einbettung in das reduzierte Feldbündel. Insbesondere der letzte Weg erfordert eine intensive Kenntnis der DHR-Kategorie $\text{End}(\mathcal{A})$ des zugrundeliegenden VIRASORO-Netzes, was sich in die Bestimmung ausreichend vieler Dualitäts- und R -Matrizen übersetzt. Ferner wird in diesem Kapitel ausgeführt, warum eine naive Übertragung des chiralen Feldes auf ein Halbraumfeld fehlschlagen muss.

2. ALGEBRAISCHE QUANTENFELDTHEORIE AUF DEM HALBRAUM

2.1 Geometrische Vorbetrachtungen

Die zugrundeliegende Raumzeit der betrachteten Theorien ist die offene Halbebene...

$$\mathcal{M}_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

...im zweidimensionalen MINKOWSKI-Raum. Als Lokalisierungsregionen des Netzes bieten sich in natürlicher Weise die Doppelkegel innerhalb der Halbebene an. Gemeint sind damit offene Gebiete $O = \{(t, x) \mid t + x \in I, t - x \in J\} =: I \times J$, aufgespannt von zwei beschränkten offenen Intervallen I und J auf der Randachse $\mathbb{R} \times \{0\} = \partial\mathcal{M}_+$ der Raumzeit, so dass der Abschluss \overline{O} immer noch in \mathcal{M}_+ liegt. Sei weiterhin $L \subset \partial\mathcal{M}_+$ das kleinste offene Intervall, das sowohl I als auch J enthält, ferner sei K das Intervall $L \setminus (I \cup J)$, dann ist zu jedem möglichen Paar $K \subset L$ genau ein Doppelkegel assoziiert (siehe Abb. 2.1). Weiterhin spannt jedes Intervall I auf dem Rand eine keilförmige Region $W_I := \{(t, x) \mid t + x \in I, t - x \in I\}$ auf.

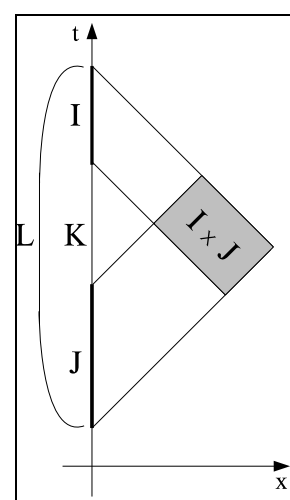


Fig. 2.1: Doppelkegel in \mathcal{M}_+ .

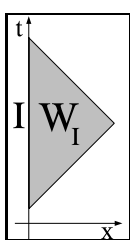


Fig. 2.2: W_I .

Die universelle Überlagerung der Möbius-Gruppe $G = \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ operiert durch Möbius-Transformationen in natürlicher Weise auf der Ein-Punkt-Kompaktifizierung des Randes $\partial\mathcal{M}_+ \cup \{\infty\} = S^1$. Dies induziert eine entsprechende Transformation auf den Doppelkegeln innerhalb \mathcal{M}_+ , dergestalt, dass Translationen der Intervalle in Zeittranslationen der Doppelkegel und Skalierungen wieder in ebensolche übergehen.

2.2 Chirale Netze auf dem Rand

Grundlegend für die Konstruktion konform kovarianter Netze im Halbraum \mathcal{M}_+ werden (nichtlokale) Erweiterungen chiraler Netze auf dem Rand sein. Sei \mathcal{I} die Familie beschränkter, offener Intervalle in \mathbb{R} , dann ist unter einem solchen Netz folgendes zu verstehen:

Definition 2.2.1 Ein gerichtetes Netz $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ ($I \in \mathcal{I}$) von VON NEUMANN-Algebren auf einem gemeinsamen Hilbertraum \mathcal{H}_0 heißt lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} , falls folgendes gilt:

- **Isotonie.** Sind $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ Intervalle mit $I_1 \subset I_2$, dann ist ebenso...

$$\mathcal{A}(I_1) \subset \mathcal{A}(I_2) .$$

- **Konforme Kovarianz.** Es existiert eine stark stetige, unitäre Darstellung U der Gruppe $G = \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ auf \mathcal{H}_0 , so dass...

$$U(g) \mathcal{A}(I) U(g)^* = \mathcal{A}(gI)$$

...für alle $g \in G$, für die $gI \in \mathcal{I}$ wieder ein Intervall ist. Hierbei operiert G auf \mathbb{R} durch Liften der Wirkung...

$$\tilde{g}x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = \frac{ax + b}{cx + d} \quad , \quad \tilde{g} \in PSL(2, \mathbb{R}) .$$

- **Positivität der Energie.** Der Generator der Translationen, der nach der Bemerkung in Abschnitt 2.1 die Zeittranslationen auf den Doppelkegeln induziert, ist ein positiver Operator.
- **Lokalität.** Sind I_1 und I_2 disjunkt, so gilt $\mathcal{A}(I_1) \subset \mathcal{A}(I_2)'$.
- **Existenz des Vakuums.** Es existiert ein Vektor Ω mit $\|\Omega\| = 1$ in \mathcal{H}_0 der $U(G)$ -invariant, zyklisch und separierend für die universelle Algebra...

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{A}(I)}^{\|\cdot\|}$$

...ist, wobei auf der rechten Seite die Normvervollständigung auftritt.

- **Eindeutigkeit des Vakuums.** Die einzigen $U(G)$ -invarianten Vektoren des Hilbert-raumes haben die Form skalarer Vielfache von Ω .

Notiz. Die Forderung nach Lokalität hat zur Folge, dass sich die so definierten chiralen Netze durch Kompaktifizierung zu konformen Präkogarben auf der $S^1 \subset \mathbb{C}$ erweitern lassen, wie sie zum Beispiel in [32] betrachtet werden. Hierzu ist die reelle Achse vermöge einer CAYLEY-Transformation...

$$z_{\pm} = \frac{1 + ix_{\pm}}{1 - ix_{\pm}} \quad , \quad x_{\pm} = i \frac{1 - z_{\pm}}{1 + z_{\pm}}$$

...in den Kreis einzubetten, wobei $\pm\infty$ auf den Punkt -1 abgebildet wird, wodurch sich zunächst ein Netz auf $S^1 \setminus \{-1\}$ ergibt, zusammen mit einer induzierten Darstellung U_{ind} der Möbius-Gruppe. Diese lässt sich jetzt dazu verwenden, auch die Algebren für Intervalle $I \subset S^1$, die den Punkt -1 enthalten, zu definieren. Dass dies in konsistenter Weise möglich ist, garantiert die Lokalitätsbedingung. Alle Einschränkungen, die in Definition 2.2.1 an die Gruppenoperation gestellt wurden, können daher für die Präkogarbe auf S^1 fallengelassen werden [9], Lemma 3.1 in [50].

Notiz. Um auch lokale Algebren für andere Teilmengen der reellen Achse betrachten zu können, definieren wir für $V \subset \mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}(V) = \bigvee_{\hat{I} \in \mathcal{I}, I \subset V} \mathcal{A}(\hat{I}) .$$

Die folgende Eigenschaft erweist sich aus mehreren Gründen als sinnvoll für chirale Netze, die Theorien auf dem Halbraum induzieren:

Definition 2.2.2 Ein konformes Netz \mathcal{A} auf \mathbb{R} heißt vollständig rational, falls es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- **μ -Index endlich.** Seien $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ zwei Intervalle, deren Abschlüsse in \mathbb{R} disjunkt sind, dann ist der Index der Inklusion $[\mathcal{A}(E')' : \mathcal{A}(E)]$ mit $E = I_1 \cup I_2$ und $E' = \mathbb{R} \setminus E$ endlich. Diese Eigenschaft impliziert eine besonders einfache Struktur der Superauswahlsektoren des Netzes \mathcal{A} , nämlich Rationalität. Hiernach besitzt \mathcal{A} nur endlich viele irreduzible Sektoren, jeweils von endlicher Dimension. Wir belassen es an dieser Stelle bei der Bemerkung und greifen deren Diskussion nach Definition des Index wieder auf (siehe Abschnitt 3.2.1).
- **starke Additivität.** Sind $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ zwei disjunkte Intervalle, so dass $I_1 \cup \{x\} \cup I_2 = I \in \mathcal{I}$ für ein $x \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\mathcal{A}(I) = \mathcal{A}(I_1) \vee \mathcal{A}(I_2) .$$

Im Sinne eines konstruktiven Ansatzes lässt sich diese Eigenschaft folgendermaßen interpretieren. Ergeben sich die Elemente der lokalen Algebren $\mathcal{A}(I)$ durch Verschmieren operatorwertiger Distributionen mit Testfunktionen. . .

$$\mathcal{A}(I) = \{ \Phi(f), \Phi(f)^* \mid \text{supp}(f) \subset I \}'' ,$$

. . . dann spielen einzelne (Rand-)Punkte für das Ausschmieren keine Rolle.

- **Split-Eigenschaft.** Seien $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ zwei Intervalle, deren Abschlüsse in \mathbb{R} disjunkt sind, dann ist $\mathcal{A}(I_1) \vee \mathcal{A}(I_2)$ natürlich isomorph zu $\mathcal{A}(I_1) \otimes \mathcal{A}(I_2)$. Diese Isomorphie übersetzt sich in ein Entkoppeln der chiralen Anteile in der Theorie auf dem Halbraum in Regionen, die den Rand nicht berühren. So werden die Doppelkegel $I \times J$ im Inneren von \mathcal{M}_+ gerade durch disjunkte Intervalle auf dem Rand erzeugt. Haben I und J nichtleeren Schnitt, so ragt die von ihnen induzierte Region über den Rand hinaus, so dass auch mit einer Entkopplung nicht mehr zu rechnen ist.

Für eine Analyse der Superauswahlstruktur von \mathcal{A} , für die die Arbeiten von DOPLICHER, HAAG und ROBERTS als Grundlage herangezogen werden sollen, ist die folgende Beobachtung essentiell.

Satz 2.2.1 Für ein lokales, konform kovariantes Netz auf \mathbb{R} impliziert starke Additivität auch HAAG-Dualität, d.h. für $I \in \mathcal{I}$ gilt: . . .

$$\mathcal{A}(I')' = \mathcal{A}(I) .$$

Beweis

Aufgrund der Lokalität ist es möglich, das konforme Netz vermöge einer CAYLEY-Transformation in eine Präkogarbe auf S^1 einzubetten. Diese soll ebenso mit \mathcal{A} bezeichnet werden. Nach [6, 24] erfüllt \mathcal{A} die sogenannte BISOGNANO-WICHMANN-Eigenschaft, insbesondere ist die modulare Konjugation geometrisch implementiert. Als direkte Konsequenz ergibt sich zunächst HAAG-Dualität für die Präkogarbe. . .

$$\mathcal{A}(I)' = \mathcal{A}(I') = \mathcal{A}(I_1) \vee \mathcal{A}(I_2) \quad \text{mit } I' = S^1 \setminus I .$$

...mit einer Zerlegung von $I' = I_1 \cup \{-1\} \cup I_2$ in zwei Teilintervalle $I_1, I_2 \subset S^1$. Die letzte Identifizierung gilt, da sich die starke Additivität des Netzes \mathcal{A} auf die Präkogarbe überträgt. Anschließende Rücktransformation liefert das Resultat. \square

Satz 2.2.2 *Eindeutigkeit des Vakuumvektors Ω impliziert, dass alle lokalen Algebren Faktoren sind, d.h.*

$$\mathcal{A}(I)' \cap \mathcal{A} = \mathbb{C}1 .$$

Ferner gilt Irreduzibilität, d.h. $\mathcal{A}'' = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Beweis

Die einparametrische Gruppe der Translationen besitzt nach Voraussetzung einen positiven Generator und implementiert Automorphismen auf \mathcal{A}'' . Weiterhin ist Ω zyklisch für diese Algebra. Die Eindeutigkeit des Vakuums liefert jetzt nach Satz 3.3 aus [50]: $\mathcal{A}'' = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und somit Irreduzibilität.

Um die Faktoreigenschaft der lokalen Algebren zu sehen, ist \mathcal{A} zu einer Präkogarbe auf S^1 zu kompaktifizieren, wodurch die Eindeutigkeit des Vakuums nicht verletzt wird. Jetzt liefert Punkt (ii) des Satzes 1.2 in [32] das Resultat. \square

2.2.1 Virasoro-Netze mit $c < 1$

Die Gruppe der konformen Transformationen des zweidimensionalen MINKOWSKI-Raumes ist isomorph zum kartesischen Produkt $\text{Diff}_+(\mathbb{R}) \times \text{Diff}_+(\mathbb{R})$ der orientierungserhaltenden Diffeomorphismen der reellen Achse. Als konforme Gruppe der chiralen Komponenten ist daher $\text{Diff}_+(\mathbb{R})$ anzusehen, bzw. $\text{Diff}_+(S^1)$ als konforme Gruppe ihrer Kompaktifizierungen. Eingebettet in ihre LIE-Algebra liegt die Algebra der polynomialen Vektorfelder, deren Komplexifizierung von Operatoren l_n mit $n \in \mathbb{Z}$ aufgespannt wird, die die Kommutatorrelationen...

$$[l_n, l_m] = (n - m) l_{n+m}$$

...erfüllen — die WITT-Algebra. Im Sinne einer Quantisierung nach BARGMANN sind jetzt die zentralen Erweiterungen dieser Algebra interessant. Die einzige nichttriviale dieser Art ist durch die sogenannte VIRASORO-Algebra gegeben, die in ähnlicher Weise von Operatoren L_n mit $n \in \mathbb{Z}$ und einem zentralen Element Z generiert wird, so dass...

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m) L_{n+m} + \delta_{n+m,0} \frac{n}{12} (n^2 - 1) Z , \\ [L_n, Z] &= 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

LÜSCHER und MACK zeigten, dass in einer konform kovarianten Theorie mit erhaltenem Energie-Impuls-Tensor T , die Fourier-Moden der chiralen Komponenten von T notwendigerweise die Kommutatorrelationen der VIRASORO-Algebra erfüllen. Weiterhin generieren primäre Felder aus dem Vakuum einen Eigenvektor zu L_0 mit $L_0 |h\rangle = h |h\rangle$, h heißt auch Skalendimension. Dieser Vektor ist zyklisch für die Darstellung und wird von L_n mit $n > 0$ annihiliert.

In irreduziblen Darstellungen wird Z nach SCHURS Lemma durch eine Zahl repräsentiert, der zentralen Ladung c . Die von einem zyklischen Vektor $|h\rangle$ generierten, unitären, positiv

definiten Darstellungen¹ lassen sich vermöge der reellen Daten (c, h) vollständig klassifizieren [22, 27]. Für $c < 1$ ergibt sich eine diskrete Folge erlaubter Werte für das Tupel (c, h) gegeben durch:

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (2.1)$$

$$h_{p,q}(m) = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad 1 \leq p \leq q \leq m. \quad (2.2)$$

Satz 2.2.3 Sei $\rho_{c,h} : \text{Vir}_c \longrightarrow V$ eine Darstellung der VIRASORO-Algebra zu (c, h) , dann lässt sich eine lineare Fortsetzung $\bar{\rho}_{c,h}$ von $\rho_{c,h}$ zu einer projektiven Darstellung...

$$U_{c,h} : \text{Diff}_+(S^1) \longrightarrow U(\bar{V})$$

... auf der Normvervollständigung von V integrieren².

Beweis

siehe [30]. □

Da für c beliebig $h_{1,1} = 0$ gilt, existiert zu jedem zulässigen c bis auf Isomorphie genau eine irreduzible Darstellung mit $L_0|h\rangle = 0$ und wir definieren:

Definition 2.2.3 Sei U_c die induzierte, projektive Darstellung von $\text{Diff}(S^1)$ zu $(c, 0)$ auf einem Hilbertraum \mathcal{H}_0 , dann heißt...

$$\text{Vir}_c(I) = U_c(\text{Diff}(I))''$$

... für offene Intervalle $I \subset S^1$ die VIRASORO-Präkogarbe zu c . Hierin ist ...

$$\text{Diff}(I) = \{g \in \text{Diff}(S^1) \mid g|_{I'} = \text{id}_{I'}\}$$

... mit $I' = S^1 \setminus I$. Dekompaktifizierung bezüglich des Punktes $-1 \in S^1$ erzeugt hieraus ein lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} , das VIRASORO-Netz zu c , das ebenso mit Vir_c bezeichnet werden soll.

Notiz. Sei \mathcal{A} ein beliebiges HAAG-duales, lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} , dessen Möbius-Kovarianz U durch U_c zu einer Darstellung der Gruppe $\text{Diff}(S^1)$ erweitert wird, dann gilt für $I \in \mathcal{I}$:

$$U_c(\text{Diff}(I)) \subset \mathcal{A}(I')' = \mathcal{A}(I).$$

In diesem Sinne bilden die VIRASORO-Netze die minimalen Netze mit dieser Eigenschaft.

Satz 2.2.4 Das VIRASORO-Netz Vir_c mit Zentralladung $c < 1$ ist vollständig rational.

Beweis

siehe Korollar 3.4 in [40]. □

¹ Eine Darstellung der VIRASORO-Algebra heißt unitär, falls gilt: $L_n^* = L_{-n}$. Diese Forderung, die Normierungsbedingung $\langle h|h\rangle = 1$ und die Annihilationsbedingung legen das Skalarprodukt bereits bis auf Isomorphie vollständig fest.

² ... bezüglich des Skalarproduktes siehe erste Fußnote.

2.3 Generierte Randnetze und induzierte Netze auf dem Halbraum

Beispiele wie der eingangs erwähnte Energie-Impuls-Tensor zeigen, dass eine lokale, konforme Quantenfeldtheorie \mathcal{B}_+ auf dem Halbraum ein lokales Subnetz \mathcal{A}_+ chiraler Felder enthalten wird. Interessant ist nun, dass sich die Frage nach Theorien auf dem Halbraum im Falle HAAG-dualer Netze vollständig auf das Problem der Klassifizierung *nicht-lokaler* chiraler Erweiterungen des von \mathcal{A}_+ induzierten Randnetzes reduzieren lässt. Der Beweis hierzu soll im Folgenden skizziert werden, wobei das Netz \mathcal{A} als vollständig rational angenommen werden soll. Die eingangs erwähnte Überlegung motiviert...

Definition 2.3.1 *Ein lokales, konformes Netz auf \mathcal{M}_+ assoziiert zu einem lokalen, konformen Netz \mathcal{A} auf \mathbb{R} ist ein lokales, isotones Netz auf den Doppelkegeln innerhalb \mathcal{M}_+ ...*

$$O \mapsto \mathcal{B}_+(O)$$

... von VON NEUMANN-Algebren auf einem gemeinsamen Hilbertraum \mathcal{H}_B mit folgenden weiteren Eigenschaften:

- **konforme Kovarianz, Positivität der Energie, Existenz und Eindeutigkeit des Vakuums.** *Es existiert eine unitäre Darstellung U der Gruppe $G = \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ mit positivem Generator für die Untergruppe der Translationen, so dass...*

$$U(g) \mathcal{B}_+(O) U(g)^* = \mathcal{B}_+(gO) ,$$

... für jedes $g \in G$, das einen Doppelkegel $O = I \times J$ in \mathcal{M}_+ entlang des Pfades, der g repräsentiert in einen zweiten Doppelkegel $O' = gI \times gJ$ überführt, ohne \mathcal{M}_+ zu verlassen. Es existiert ein eindeutiger, invarianter Einheitsvektor $\Omega \in \mathcal{H}_B$, der zyklisch für $\mathcal{B} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_+(O)}$ (Vereinigung über alle Doppelkegel) ist.

- **Chirales Subnetz.** *Sei $\mathcal{A}_+(O) := \mathcal{A}(I) \vee \mathcal{A}(J)$ für $O = I \times J$, dann gibt es eine Darstellung π von \mathcal{A} auf \mathcal{H}_B , so dass...*

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{A}_+(O)) &\subset \mathcal{B}_+(O) , \\ U(g) \pi(\mathcal{A}_+(O)) U(g)^* &= \pi(\mathcal{A}_+(gO)) \end{aligned}$$

... für alle $U(g)$ wie oben.

- **Gemeinsame Irreduzibilität.** *Für jeden Doppelkegel $O \subset \mathcal{M}_+$ gilt...*

$$\mathcal{B}_+(O) \vee \pi(\mathcal{A}_+)' = \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B) . \quad (2.3)$$

Hierbei ist \mathcal{A}_+ die C^* -Algebra, die sich aus dem direkten Limes über alle Doppelkegel in \mathcal{M}_+ ergibt. Ihr schwacher Abschluss ist die VON NEUMANN-Algebra generiert durch alle $\pi(\mathcal{A}(I))$.

Notiz. Hinter der letzten Eigenschaft verbirgt sich die Überlegung, dass der Energie-Impuls-Tensor der chiralen Theorie den entsprechenden auf dem Halbraum induziert, der folglich Teil der Algebra $\bigvee_{I \subset \mathcal{I}} \pi(\mathcal{A}(I)) = \pi(\mathcal{A}_+)'$ ist. Lokal generiert dieser jedoch sowohl räumliche als

auch zeitliche Translationen. Daher sollte *eine* lokale Algebra $\mathcal{B}_+(O)$ zusammen mit $\pi(\mathcal{A}_+)$ bereits das komplette Netz aufspannen. Aufgrund der Eindeutigkeit des Vakuums folgt aber auch hier Irreduzibilität des Netzes \mathcal{B}_+ . Beide Ideen zusammen liefern die Grundlage für (2.3).

Notiz. Im Sinne operatorwertiger Distributionen drückt die Definition $\mathcal{A}_+(I \times J) = \mathcal{A}(I) \vee \mathcal{A}(J)$ nicht anderes aus, als dass die Integration eines chiral zerfallenden Feldes über einen Doppelkegel gleichbedeutend ist mit der Integration der Komponenten über I bzw. J .

Definition 2.3.2 *Ein lokales, konformes Netz \mathcal{B}_+ auf dem Halbraum induziert in kanonischer Weise ein nicht-lokales Netz $\partial\mathcal{B}_+$ auf dem Rand vermöge:*

$$\partial\mathcal{B}_+(I) := \bigvee_{O \subset W_I} \mathcal{B}_+(O) .$$

Zwei Wedge-Regionen zu I und $\tilde{I} \subset I'$ sind zeitartig zueinander lokalisiert, daher wird $\partial\mathcal{B}_+$ im allgemeinen nicht lokal sein. Andererseits lässt sich zu $\tilde{I} \subset I'$ immer ein Intervall $J \subset I'$ finden, so dass $\mathcal{A}_+(\tilde{I} \times J) = \mathcal{A}(\tilde{I}) \vee \mathcal{A}(J)$ und $\bigvee_{O \subset W_I} \mathcal{B}_+(O)$ raumartig zueinander sind. Somit bleibt *relative Lokalität* zu \mathcal{A} bestehen. Auch die konforme Kovarianz überträgt sich in derselben Weise, wie sie für lokale Netze auf \mathbb{R} definiert wurde, auf $\partial\mathcal{B}_+$. Da das zu \mathcal{B}_+ assoziierte Netz \mathcal{A} ein chirales Subnetz im oben beschriebenen Sinne ist, sind beide Kovarianzbegriffe miteinander verträglich. Somit ist die folgende Definition von fundamentaler Bedeutung:

Definition 2.3.3 *Sei \mathcal{A} ein lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} . Ein Netz von Inklusionen...*

$$\pi(\mathcal{A}(I)) \subset \mathcal{B}(I) \tag{2.4}$$

... heißt chirale Erweiterung von \mathcal{A} , falls \mathcal{B} ein irreduzibles, isotones, konform kovariantes und zu \mathcal{A} relativ lokales Netz von VON NEUMANN-Algebren indiziert durch $I \in \mathcal{I}$ auf einem Hilbertraum \mathcal{H}_B ist, so dass (2.4) Inklusionen von VON NEUMANN-Algebren sind. π ist hierbei eine konform kovariante Darstellung von \mathcal{A} auf \mathcal{H}_B , so dass beide Kovarianzbegriffe im oben beschriebenen Sinne verträglich sind.

Eine chirale Erweiterung heißt irreduzibel, falls alle lokalen Algebren $\mathcal{A}(I)$ und $\mathcal{B}(I)$ Faktoren sind, und für die relative Kommutante gilt:

$$\pi(\mathcal{A}(I))' \cap \mathcal{B}(I) = \mathbb{C} 1 .$$

Die obige Betrachtung wirft die Frage auf, ob sich zu einer gegebenen chiralen Erweiterung ebenso ein Netz auf dem Halbraum konstruieren lässt. Tatsächlich führt diese Idee zur folgenden Definition:

Definition 2.3.4 *Sei \mathcal{B} eine irreduzible, chirale Erweiterung zu einem lokalen, konformen Netz \mathcal{A} auf \mathbb{R} , dann heißt das lokale, isotone Netz \mathcal{B}_+^{ind} mit...*

$$\mathcal{B}_+^{ind}(O) := \mathcal{B}(L) \cap \mathcal{B}(K)'$$

... das induzierte Netz auf dem Halbraum. Hierbei ist $K \subset L$ die in Abbildung 2.1 gezeigte Paarung von Intervallen assoziiert zum Doppelkegel $O \subset \mathcal{M}_+$.

Hierin finden wir die Essenz des eingangs erwähnten *holographischen Prinzips*: Allein aus dem „Schatten“, den eine Theorie auf den Rand wirft, lässt sich eine neue Theorie im Halbraum rekonstruieren. In welchen Fällen die beiden übereinstimmen, wird der nächste „Hauptsatz“ der konformen QFT auf dem Halbraum zeigen:

Satz 2.3.1 (i) Das induzierte Netz $\mathcal{B}_+^{\text{ind}}$ zu einer chiralen Erweiterung \mathcal{B} ist ein lokales, konformes Netz auf \mathcal{M}_+ .

(ii) Es gilt:

$$\partial \left(\mathcal{B}_+^{\text{ind}} \right) (I) = \mathcal{B}(I) \quad \forall I \in \mathcal{I} . \quad (2.5)$$

(iii) Ist weiterhin \mathcal{B}_+ ein beliebiges lokales, konform kovariantes Netz auf \mathcal{M}_+ , dann gilt:

$$(\partial \mathcal{B}_+)^{\text{ind}}(O) = \mathcal{B}_+^{\text{dual}}(O) \quad \forall O \text{ Doppelkegel in } \mathcal{M}_+ \quad (2.6)$$

... mit $\mathcal{B}_+^{\text{dual}}(O) = \mathcal{B}_+(O')'$ und $\mathcal{B}_+(O') = \bigvee_{\tilde{O} \subset O'} \mathcal{B}_+(\tilde{O})$.

Beweis

(skizziert, Details siehe [50], Satz 2.9). Für Punkt (i) überträgt sich zunächst die konforme Kovarianz der chiralen Erweiterung auf das induzierte Netz. Aus vollständiger Rationalität von \mathcal{A} und Irreduzibilität der Netze \mathcal{A} und \mathcal{B} folgt vermöge eines Indexargumentes $U(g) \in \pi(\mathcal{A}_+)$ und damit gemeinsame Irreduzibilität.

Betrachte nun die Kommutante...

$$\partial \mathcal{B}_+^{\text{ind}}(L)' = \left(\bigvee_{K \subset L} (\mathcal{B}(L) \cap \mathcal{B}(K)') \right)' = \bigcap_{K \subset L} \mathcal{B}(L)' \vee \mathcal{B}(K) .$$

Nun lässt sich zeigen, dass sich die Split-Eigenschaft des Netzes \mathcal{A} aufgrund der relativen Lokalität auf die chirale Erweiterung \mathcal{B} überträgt, in dem Sinne, dass $\mathcal{B}(L)' \vee \mathcal{B}(K)$ natürlich isomorph ist zu $\mathcal{B}(L)' \otimes \mathcal{B}(K_0)$ für ein festes K_0 . Schnittbildung über alle $K \subset K_0$ und Trivialität an einem Punkt zeigen schließlich, dass $\partial \mathcal{B}_+^{\text{ind}}(L)' = \mathcal{B}(L)'$ und damit (ii) gilt.

Die letzte Behauptung ergibt sich aus der *Wedge-Dualität*: $\mathcal{B}(O'_>)' = \mathcal{B}(O_>)$, wobei $O_>$ die rechte Komponente des kausalen Komplementes des Doppelkegels O ist (Analoges gilt für die linke Komponente). Nun ist aber $O'_> = W_L$ und $W_K = O_<$, folglich:

$$\mathcal{B}_+^{\text{dual}}(O) = \mathcal{B}_+(O_>)' \cap \mathcal{B}_+(O_<)' = \partial \mathcal{B}_+(L) \cap \partial \mathcal{B}_+(K)' .$$

□

Satz 2.3.1 zeigt, dass sich alle HAAG-dualen, konform kovarianten, irreduziblen Netze aus ihrem generierten Randnetz rekonstruieren lassen. Dies reduziert das Klassifizierungsproblem darauf, alle möglichen chiralen Erweiterungen eines vorgegebenen Randnetzes zu finden. Dies soll im Folgenden im Falle der VIRASORO-Netze für $c < 1$ durchgeführt werden. Die Methoden, die hierbei zur Anwendung kommen, stammen im wesentlichen aus der Subfaktor-Theorie, bzw. aus deren Verallgemeinerung auf Typ III_1 -Faktoren.

3. NETZE VON SUBFAKTOREN

Von DOPLICHER, HAAG und ROBERTS begründet ist die DHR-Theorie das fundamentale Werkzeug zum Verständnis der Superauswahlstruktur algebraischer Quantenfeldtheorien. Grundlegend hierbei ist die Idee, physikalisch relevante Darstellungen der Algebra auf Endomorphismen derselben zurückzuführen. Durch Komposition der Endomorphismen und Zerlegung in (direkte) Summen ergeben sich dann auf einfache Weise neue Objekte, ähnlich Tensorprodukt und Summenzerlegung aus der Darstellungstheorie für Gruppen. Tatsächlich führten DOPLICHER und ROBERTS in [16] ihre Arbeiten auf dieser Ebene fort mit dem Ergebnis, die gesamte Theorie auf den Rahmen der C^* -Tensorkategorien abstrahieren zu können. Erwähnenswert ist die folgende Verallgemeinerung der TANNAKA-KREIN-Dualität:

Satz 3.0.2 *Sei $(\mathcal{T}, \varepsilon)$ eine strikt symmetrische C^* -Tensorkategorie mit direkter Summe, konjugierten Objekten und Unterobjekten, sei ferner der Morphismenraum $(\iota, \iota) = \mathbb{C}1$ mit dem Einsobjekt ι der Tensoroperation, dann existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige, kompakte Gruppe G und ein Isomorphismus. . .*

$$H : (\mathcal{T}, \varepsilon) \longrightarrow (U(G), \theta)$$

. . . von symmetrischen C^ -Tensorkategorien auf die Darstellungskategorie von G .*

Dies erlaubt als physikalische Anwendung die Rekonstruktion der Eichgruppe allein aus der Struktur der Superauswahlsektoren der Observablenalgebra in Quantenfeldtheorien auf dem $d > 2$ -dimensionalen Minkowskiraum, die gerade zu *symmetrischen* Tensorkategorien führen.

Zweidimensionalen Theorien oder eindimensionalen auf \mathbb{R} oder $S^1 \setminus \{-1\}$ fällt eine topologische Sonderrolle zu: Das kausale Komplement eines Doppelkegels bzw. Intervalls besitzt hier zwei Zusammenhangskomponenten. Dies führt dazu, dass der unitäre Operator ε , der im höherdimensionalen Fall die Vertauschung zweier Objekte — also die Symmetrie des Tensorproduktes — implementiert, nun eine Darstellung der Zopfgruppe statt der Permutationsgruppe generiert. Auf diese gezopften C^* -Tensorkategorien ist der obige Satz nicht mehr anwendbar, dennoch lassen sie sich als Ausdruck einer verallgemeinerten Symmetrie interpretieren.

Ähnlich der zweiten Kohomologie einer Gruppe enthält die zu einem quantenfeldtheoretischen Netz \mathcal{A} im Sinne von DOPLICHER, HAAG und ROBERTS assoziierte Tensorkategorie alle Informationen über dessen mögliche *lokale, wie nicht-lokale Erweiterungen* in Form sogenannter *Q-Systeme*, die von LONGO und REHREN in [48] entwickelt wurden. Angefangen bei [16] über [49] bis hin zu [48] ergibt sich somit eine Verallgemeinerung der — zunächst für Typ *II*-Faktoren von JONES entwickelten — *Subfaktor-Theorie* auf die in der Quantenfeldtheorie in natürlicher Weise auftretenden Typ *III*₁-Faktoren.

3.1 Auszüge aus der DHR-Theorie

Einen vollständigen Überblick über alle Entwicklungen in diesem Gebiet zu geben, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, daher fassen wir nur die relevanten Resultate zusammen, die sich für den $d \geq 2$ -dimensionalen Fall in aller Ausführlichkeit in [14] und [15], für konforme Präkogarben auf S^1 in [19] und [20] finden.

Für alles Folgende sei \mathcal{A} ein vollständig rationales, lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} mit universeller Algebra \mathcal{A} .

Definition 3.1.1 Eine Darstellung π von \mathcal{A} heißt DHR-Darstellung, falls ein Intervall $I_0 \in \mathcal{I}$ existiert, so dass...

$$\pi|_{\mathcal{A}(I_0)} \simeq \pi_0 ,$$

...wobei π_0 die Vakuum-Darstellung des Netzes \mathcal{A} bezeichnet und \simeq unitäre Äquivalenz meint. π heißt dann auch lokalisiert in I_0 .

Definition 3.1.2 Eine Darstellung π heißt konform kovariant, falls eine unitäre Darstellung U_π der Überlagerung der Möbius-Gruppe $G = \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ auf dem Darstellungsraum \mathcal{H}_π existiert, so dass für alle $I \in \mathcal{I}$ gilt:

$$U_\pi(g) \pi(\mathcal{A}(I)) U_\pi(g)^* = \pi(\mathcal{A}(gI)) \quad (3.1)$$

für alle $g \in G$, für die der g repräsentierende Pfad ein Intervall in ein anderes überführt, ohne dabei die Menge \mathcal{I} zu verlassen.

Zunächst scheint die Forderung der Lokalisierbarkeit an die Darstellungen ziemlich restriktiv. Tatsächlich ist sie es nicht! So lässt sich zunächst das Netz in eine konforme Präkogarbe auf S^1 einbetten. Eine konform kovariante Darstellung π geht dabei in eine konsistente Familie $I \mapsto \pi_I$ von konform kovarianten Darstellungen über, die zunächst nur für Intervalle definiert ist, die den Punkt -1 nicht enthalten. Mittels der Kovarianz lässt sich dies zu einer konsistenten Familie von Darstellungen über *allen* echten Intervallen des Kreises ausbauen. Für diese gilt der folgende Satz:

Satz 3.1.1 Gegeben ein echtes Intervall $I_0 \subset S^1$, dann ist jede konsistente Familie kovarianter Darstellungen $I \mapsto \pi_I$ positiver Energie auf einem separablen Hilbertraum \mathcal{H}_π unitär äquivalent zu einer in I_0 lokalisierten.

Beweis

Der Beweis nutzt die Tatsache, dass aufgrund der Topologie des Kreises, die kausalen Komplemente von Lokalisierungsregionen wieder ebensolche sind.

Aufgrund der Separabilität von \mathcal{H}_π , sind alle π_I lokal normal (siehe hierzu auch [64]). Folglich ist π_{I_0} eine normale Darstellung eines Typ III_1 -Faktors mit positiver Energie auf einem separablen Hilbert-Raum. Eine solche ist unitär äquivalent zur Vakuum-Darstellung $(\pi_0)_{I_0}$ vermöge $U : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_0$. Somit erfüllt $\tilde{\pi}_I(a) := U \pi_I(a) U^*$ das Gewünschte. \square

Anschließende Dekompaktifizierung zeigt den Satz auch für ein Netz auf \mathbb{R} mit den oben genannten Eigenschaften.

Betrachte eine Darstellung π lokalisiert in $I_0 \subset I$. Nach Voraussetzung existiert ein unitärer Operator V mit $V^* \pi(a) V = a$ für alle $a \in \mathcal{A}(I'_0)$. Setze nun...

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0) \quad , \quad a \mapsto V^* \pi(a) V .$$

... dann lässt sich vermöge der HAAG-Dualität des Netzes zeigen, dass dies tatsächlich einen *-*Endomorphismus* der universellen Algebra induziert. Außerdem gilt die unitäre Äquivalenz...

$$\pi \simeq \pi_0 \circ \rho ,$$

... wobei π_0 die Vakuumdarstellung bezeichnet [14], für konforme Präkogarden [20].

Notiz. Der Endomorphismus ist im gleichen Gebiet I_0 lokalisiert wie bereits die Darstellung in dem Sinne, dass gilt:

$$\rho|_{I'_0} = \text{id} .$$

Weiterhin kann die Lokalisierungsregion nach Satz 3.1.1 vermöge unitärer Operatoren in jedes andere Intervall geändert werden. Solche Endomorphismen heißen *transportabel*, die Operatoren *Ladungstransporter*. Die unitäre Äquivalenzklasse $[\rho]$ heißt auch (*Superauswahl-*) *Sektor*.

3.1.1 Direkte Summe, Komposition und Intertwiner

Sei nun $e \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ ein selbstadjungierter Projektor auf eine Unterdarstellung π von $\pi_0 \circ \rho$ (lok. in I_0), dann folgt zunächst aus $e \pi_0 \circ \rho(a) = \pi_0 \circ \rho(a) e$ zusammen mit der HAAG-Dualität, dass $e \in \mathcal{A}(I_0)$ ist. Aufgrund der Typ III₁-Eigenschaft existiert nun eine Isometrie $w : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0$ in $\mathcal{A}(I_0)$, so dass $ww^* = e$ und $w^*w = 1$ gilt. Sei...

$$\sigma(a) := w^* \rho(a) w .$$

War ρ lokalisiert in I_0 , so gilt dies auch für σ . Somit erhalten wir einen lokalisierten Endomorphismus, der eine zu π unitär äquivalente Darstellung induziert.

Natürlich lässt sich dieses Vorgehen vollkommen analog auch für $(1 - e)$ und die zugehörige Unterdarstellung wiederholen. Das Resultat sind zwei Isometrien w_1 und w_2 mit $w_1 w_1^* + w_2 w_2^* = 1$, so dass...

$$\rho(a) = w_1 \sigma_1(a) w_1^* + w_2 \sigma_2(a) w_2^* \tag{3.2}$$

...eine Zerlegung des Endomorphismus darstellt. Aufgrund der Orthogonalität $w_i^* w_j = \delta_{ij} 1$ lässt sich mit Recht von einer direkten Summe sprechen.

Notiz. Die Zerlegung (3.2) ist sektorerhaltend, denn für ein zweites Paar an Isometrien s_1 und s_2 und...

$$\rho(a) = s_1 \sigma_1(a) s_1^* + s_2 \sigma_2(a) s_2^*$$

...induziert $w_1 s_1^* + w_2 s_2^*$ die unitäre Äquivalenz. Auf Sektorniveau sei diese Zerlegung durch...

$$[\rho] = [\sigma_1] \oplus [\sigma_2] \quad \text{oder} \quad \rho \simeq \sigma_1 \oplus \sigma_2$$

...symbolisiert. Hierbei stellen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$ Untersektoren zu $[\rho]$ dar, was durch $\sigma_j \prec \rho$ (für $j \in \{1, 2\}$) zum Ausdruck kommen soll.

Notiz. Auch die Komposition zweier Endomorphismen respektiert die Sektorstruktur, denn mit $\rho' = \text{Ad}_u \circ \rho$ und $\sigma' = \text{Ad}_v \circ \sigma$ vermittelt $u\rho(v)$ die unitäre Äquivalenz zwischen $\rho \circ \sigma$ und $\rho' \circ \sigma'$.

Operatoren mit ähnlichen Eigenschaften wie w_i scheinen die zentrale Rolle bei der Analyse von Unterdarstellungen zu spielen, daher die folgende...

Definition 3.1.3 Ein Operator $t \in \mathcal{A}$ heißt Intertwiner der beiden lokalisierten Endomorphismen ρ_1 und ρ_2 , falls gilt:

$$t\rho_1(a) = \rho_2(a)t \quad \forall a \in \mathcal{A} . \quad (3.3)$$

Wir notieren dies durch $t : \rho_1 \longrightarrow \rho_2$.

Offensichtlich spannt die Menge aller Intertwiner zwischen zwei fixen Darstellungen σ und ρ einen linearen Raum auf, der mit...

$$\text{hom}(\sigma, \rho) := \{t \in \mathcal{A} \mid t : \sigma \longrightarrow \rho\}$$

...bezeichnet werden soll, für identische Quell- und Zielendomorphismen auch mit...

$$\text{End}(\rho) := \{t \in \mathcal{A} \mid t : \rho \longrightarrow \rho\} .$$

Wie sich durch Anwenden der $*$ -Operation auf Gleichung (3.3) ergibt, führt Adjungieren eines Intertwiners zu einem ebensolchen in umgekehrter Richtung.

Die Dimension der beiden Räume hängt lediglich von ihrer unitären Äquivalenzklasse ab, sind nämlich $u : \rho \longrightarrow \tilde{\rho}$ und $v : \sigma \longrightarrow \tilde{\sigma}$ unitäre Intertwiner, liefert $\psi : \text{hom}(\sigma, \rho) \longrightarrow \text{hom}(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho})$; $t \mapsto utv^*$ einen Isomorphismus.

Für die folgenden Ausführungen wird die Dimension der Intertwinerräume eine große Rolle spielen, daher definieren wir für zwei lokalisierte Endomorphismen:

$$\langle \rho \mid \sigma \rangle := \dim(\text{hom}(\rho, \sigma)) .$$

Wir halten ein Korollar aus SCHURs Lemma fest:

$$\langle \rho \mid \rho \rangle = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mathcal{A})' \cap \mathcal{A} = \mathbb{C}1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_0 \circ \rho \text{ irreduzibel} .$$

ρ heißt in diesem Fall ebenfalls *irreduzibel* (für konforme Präkogarben siehe hierzu auch [32], Korollar 2.10).

Ist $\sigma \prec \rho$ ein irreduzibler Subsektor, dann verleiht das Skalarprodukt...

$$(t, s) := t^*s \in \mathbb{C}1 \quad \text{mit} \quad t, s : \sigma \longrightarrow \rho$$

...dem Raum $\text{hom}(\sigma, \rho)$ eine (Prä-)Hilbertraumstruktur. Ist der Raum $\text{hom}(\sigma, \rho)$ von endlicher Dimension, ergeben sich an dieser Stelle echte Hilberträume. Dies wird im Folgenden der einzig interessante Fall sein.

Für $\rho \simeq \sigma_1 \oplus \sigma_2$ gilt weiterhin...

$$\text{hom}(\tau, \rho) \simeq \text{hom}(\tau, \sigma_1) \oplus \text{hom}(\tau, \sigma_2) ,$$

...denn für $t : \tau \longrightarrow \rho$ ergibt sich mit zwei orthogonalen Intertwinern $s_j : \sigma_j \longrightarrow \rho$ ($j = 1, 2$) mit $w = s_1^* t + s_2^* t$ eine lineare Abbildung des linken auf den rechten Raum. Wird $t_j : \tau \longrightarrow \sigma_j$ ($j = 1, 2$) auf $s_1 t_1 + s_2 t_2$ abgebildet, stellt dies die hierzu inverse Richtung dar. Als Korollar halten wir fest:

$$\langle \tau \mid \sigma_1 \oplus \sigma_2 \rangle = \langle \tau \mid \sigma_1 \rangle + \langle \tau \mid \sigma_2 \rangle .$$

Der oben beschriebenen Zerlegung eines Endomorphismus ρ entspricht damit die Wahl eines linear unabhängigen Systems des Intertwinerraums...

$$\text{End}(\rho) \simeq \text{hom}(\sigma_1, \rho) \oplus \text{hom}(\sigma_2, \rho)$$

...aus Intertwinern $t_j : \sigma_j \longrightarrow \rho$. Wird dies sukzessive zur Wahl einer Basis fortgesetzt, ergibt sich die Dekomposition eines Sektors in seine irreduziblen Bestandteile. Mit Hilfe des oben definierten Skalarproduktes lässt sich dann eine Orthonormalbasis mittels des GRAM-SCHMIDT-Verfahrens bestimmen.

3.1.2 Konjugation, Linksinverse und Dimension

Zwar lassen sich lediglich lokalisierte Automorphismen ρ der universellen Algebra tatsächlich umkehren, dennoch besteht — analog zur Darstellungstheorie für Gruppen — in bestimmten Fällen die Möglichkeit, einen zu ρ konjugierten Morphismus $\bar{\rho}$ zu finden, der unter Verknüpfung mit ρ die Identität als Subsektor enthält. Sehr eng an die Existenz konjugierter Endomorphismen ist der Begriff der Dimension geknüpft, einer sektorinvarianten Größe, die sich multiplikativ unter Kompositionen und additiv für direkte Summen verhält und allein aufgrund dieser Eigenschaften eine entscheidende Rolle bei der Klassifizierung der chiralen Erweiterungen spielen wird.

Definition 3.1.4 *Ein lokalisierter Endomorphismus $\bar{\rho}$ heißt konjugiert zu ρ , falls zwei isometrische Intertwiner $r : id \longrightarrow \bar{\rho}\rho$ und $\bar{r} : id \longrightarrow \rho\bar{\rho}$ existieren, die die Konjugationsgleichung:*

$$\bar{r}^* \rho(r) = r^* \bar{\rho}(\bar{r}) = d^{-1} 1 \quad (3.4)$$

...erfüllen (vgl. [49]) mit $d \in \mathbb{R}_+$. Das Minimum für d , das sich durch Variieren der Intertwiner r und \bar{r} erreichen lässt, heißt Dimension d_ρ von ρ .

Die obige Definition impliziert sofort:

Lemma 3.1.1 *Ist ρ konjugiert zu $\bar{\rho}$, so ist $\bar{\rho}$ konjugiert zu ρ . Außerdem gilt: $d_\rho = d_{\bar{\rho}}$.*

Eine erste Konsequenz dieser Definition ist die FROBENIUS-Reziprozität, die aus der Darstellungstheorie für Gruppen wohlbekannt ist und sich nahtlos auf den hier präsentierten allgemeineren Kontext überträgt.

Satz 3.1.2 (Frobenius-Reziprozität). *Besitzen ρ, σ und τ konjugierte Endomorphismen, dann gelten die folgenden Isomorphismen für Intertwinerräume:*

$$\text{hom}(\rho, \sigma \circ \tau) \simeq \text{hom}(\rho \circ \bar{\tau}, \sigma) \simeq \text{hom}(\bar{\sigma} \circ \rho, \tau) .$$

Beweis

Lösen r_τ und \bar{r}_τ die Konjugationsgleichung (3.4) für τ mit einer Konstanten d_τ , dann sind die Abbildungen...

$$\begin{aligned}\alpha &: \text{hom}(\rho, \sigma \circ \tau) \longrightarrow \text{hom}(\rho \circ \bar{\tau}, \sigma) \quad , \quad t \mapsto \sqrt{d_\tau} \sigma(\bar{r}_\tau^*) t \\ \beta &: \text{hom}(\rho \circ \bar{\tau}, \sigma) \longrightarrow \text{hom}(\rho, \sigma \circ \tau) \quad , \quad s \mapsto \sqrt{d_\tau} s \rho(r_\tau)\end{aligned}$$

...invers zueinander. Analoges gilt für r_σ , \bar{r}_σ mit d_σ und die Abbildungen: $t \mapsto \sqrt{d_\sigma} r_\sigma^* \bar{\sigma}(t)$ und $s \mapsto \sqrt{d_\sigma} \sigma(s) \bar{r}_\sigma$. \square

Weiterhin lässt sich vermöge r und dem konjugierten Endomorphismus $\bar{\rho}$ eine Abbildung ϕ konstruieren, die den bestmöglichen Ersatz für die fehlende Inverse darstellt.

Definition 3.1.5 *Eine beschränkte, positive, lineare Abbildung $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ heißt Linksinverse zum lokalisierten Endomorphismus ρ , falls gilt:*

$$\phi(\rho(a) b \rho(c)) = a \phi(b) c \quad , \quad (3.5)$$

$$\phi(1) = 1 \quad , \quad a, b, c \in \mathcal{A} \quad . \quad (3.6)$$

Sind ρ und $\bar{\rho}$ konjugiert und ist ϕ von der Form...

$$\phi(a) = r^* \bar{\rho}(a) r \quad (3.7)$$

...mit isometrischen Intertwinern, die (3.4) erfüllen und d minimieren, dann heißt ϕ Standardlinksinverse.

Die eingangs erwähnten R -Matrizen für die geladenen Felder sind als Substitut für Kommutatorrelationen eng an die Vertauschung der Komposition lokalisierter Endomorphismen geknüpft. Diese wiederum basiert auf einem neuen Intertwiner $\varepsilon(\rho, \sigma) \in \text{hom}(\rho \circ \sigma, \sigma \circ \rho)$, der das *Braiding* der noch zu konstruierenden gezopferten C^* -Tensorkategorie implementiert.

Definition 3.1.6 *Der unitäre Braiding-Operator ε ist durch die Bedingungen...*

$$\varepsilon(\sigma_1, \sigma_2) \sigma_1(t_2) t_1 = t_2 \rho_2(t_1) \varepsilon(\rho_1, \rho_2) \quad \forall t_i : \rho_i \longrightarrow \sigma_i \quad , \quad (3.8)$$

$$\varepsilon(\rho_1 \rho_2, \sigma) = \varepsilon(\rho_1, \sigma) \rho_1(\varepsilon(\rho_2, \sigma)) \quad , \quad \varepsilon(\rho, \sigma_1 \sigma_2) = \sigma_1(\varepsilon(\rho, \sigma_2)) \varepsilon(\rho, \sigma_1) \quad , \quad (3.9)$$

$$\varepsilon(\rho, id) = \varepsilon(id, \rho) = 1 \quad , \quad (3.10)$$

$$\varepsilon(\rho, \sigma) = 1 \quad , \quad \text{falls } \sigma < \rho \quad . \quad (3.11)$$

...eindeutig festgelegt [19]. Ist σ lokalisiert in I_0 dann ist in der Anfangsbedingung (3.11) die Notation $\sigma < \rho$ so zu verstehen, dass ρ in einem Intervall I_1 in der rechten Zusammenhangskomponente von I_0' lokalisiert ist.

Notiz. Als Konsequenz der Kozykel-Identitäten (3.9) und der Veträglichkeit mit Intertwinern (3.8) erfüllt ε die Zopfrelationen:

$$\rho_3(\varepsilon(\rho_1, \rho_2)) \varepsilon(\rho_1, \rho_3) \rho_1(\varepsilon(\rho_2, \rho_3)) = \varepsilon(\rho_2, \rho_3) \rho_2(\varepsilon(\rho_1, \rho_3)) \varepsilon(\rho_1, \rho_2) \quad . \quad (3.12)$$

Bezeichnen b_i die Generatoren der Zopfgruppe, entsteht durch die Setzung $b_i \mapsto \rho^{i-1}(\varepsilon(\rho, \rho))$ eine unitäre Darstellung derselben in \mathcal{A} .

Tatsächlich lässt sich $\varepsilon(\rho_1, \rho_2)$ explizit durch unitäre Intertwiner ausdrücken...

$$\varepsilon(\rho_1, \rho_2) = \rho_2(u_1^*) u_2^* u_1 \rho_1(u_2) \quad (3.13)$$

...mit $u_i : \rho_i \rightarrow \widehat{\rho}_i$, wobei ρ_i und $\widehat{\rho}_i$ raumartig mit $\widehat{\rho}_2 < \widehat{\rho}_1$ lokalisiert sind. Fundamentale Rechnungen zeigen, dass dies unabhängig von der Wahl der Intertwiner ist und (3.8), (3.9), (3.10) und (3.11) erfüllt sind.

Die Existenz der Linksinversen für transportable Endomorphismen folgt aus [14] Lemma 3.3. Lemma 5 und Lemma 2 in [60] zeigen sowohl die Eindeutigkeit der Standardlinksinversen, als auch die Eindeutigkeit konjugierter Endomorphismen bis auf unitäre Äquivalenz, wodurch auch Konjugation zu einer sektorerohaltenden Operation wird.

Satz 3.1.3 *Sei ϕ die Standardlinksinverse zu ρ , dann gilt:*

$$d_\rho = \|\phi(\varepsilon_\rho)\|^{-1} \quad \text{mit } \varepsilon_\rho = \varepsilon(\rho, \rho) .$$

Beweis

Aufgrund der Unitarität des Braiding gilt nach Lemma 4.3 in [49] für den Intertwiner $r : \text{id} \rightarrow \overline{\rho} \rho$, der die Standardlinksinverse implementiert:

$$\varepsilon(\overline{\rho}, \rho) r = u \overline{r}$$

...mit einem unitären Intertwiner $u : \rho \rightarrow \rho$ und dem zu r assoziierten \overline{r} . Aus (3.8) und (3.9) folgt: $r^* \overline{r}(\varepsilon(\rho, \rho)) = \rho(r^*) \varepsilon(\overline{\rho}, \rho)$. Nun ist:

$$\phi(\varepsilon_\rho) = r^* \overline{r}(\varepsilon(\rho, \rho)) r = \rho(r^*) \varepsilon(\overline{\rho}, \rho) r = \rho(r^*) u \overline{r} = u \rho(r^*) \overline{r} = d^{-1} u .$$

□

Notiz. Die Minimierungsbedingung an r in (3.7) zur Definition der Standardlinksinversen lässt sich nach obigem Satz auch durch die Forderung...

$$\phi(\varepsilon_\rho)^* \phi(\varepsilon_\rho) = \phi(\varepsilon_\rho) \phi(\varepsilon_\rho)^* \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) 1$$

...ersetzen. Weiterhin zeigt die obige Form in Verbindung mit (3.8) sofort, dass d_ρ tatsächlich eine Sektorinvariante darstellt.

Aufgrund des Satzes heißen Sektoren $[\rho]$, die $\phi(\varepsilon_\rho) \neq 0$ erfüllen, aus naheliegenden Gründen *endlichdimensional*¹. Lemma 6.1 in [14] zeigt, dass für jeden Projektor e auf einen Untersektor von ρ die folgende Abschätzung gilt:

$$\phi(e) \geq d_\rho^{-2} 1 .$$

Mit einer Zerlegung der 1 in abzählbar viele Projektoren auf irreduzible Subsektoren folgt...

$$1 = \sum_{i=1}^n \phi(E_i) \geq n d_\rho^{-2} 1 \quad \Rightarrow \quad n \leq d_\rho^2 .$$

Somit bedeutet $d_\rho < \infty$, dass ρ eine Zerlegung in endlich viele Subsektoren besitzt. Die Existenz des konjugierten Sektors ist damit äquivalent zur Endlichkeit der Dimension. Wie sich letztere unter Summenbildung verhält, zeigt der folgende Satz, den wir ebenso wie das folgende Lemma aus [19] rezitieren.

¹ oder von endlicher Statistik.

Satz 3.1.4 Sei $\rho \simeq \bigoplus_{i=1}^n \sigma_i$ ein lokalisierter Endomorphismus endlicher Dimension mit Standardlinksinverse ϕ , seien weiter σ_i irreduzible Submorphisamen mit isometrischen Intertwinern $w_i : \sigma_i \longrightarrow \rho$, dann gilt...

(i) Konjugation ist mit Unterobjekten verträglich:

$$\sigma_i \prec \rho \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma}_i \prec \bar{\rho} .$$

(ii) Die Standardlinksinverse zu σ_i nimmt die folgende Gestalt an:

$$\psi_i(a) = \frac{1}{\phi(w_i w_i^*)} \phi(w_i a w_i^*) \quad , \quad a \in \mathcal{A} ,$$

(iii)

$$d_\rho = \sum_{i=1}^n d_{\sigma_i} .$$

Beweis

zu (i): Sei Ω der Vakuumvektor von \mathcal{A} , betrachte den durch $\langle \Omega_i \cdot \mid \cdot \Omega_i \rangle$ mit $\Omega_i = N \bar{\rho}(w_i^*) r \Omega$ (N so, dass $\|\Omega_i\| = 1$) induzierten Vektorzustand und die Projektion \bar{e}_i auf $\bar{\rho}(\mathcal{A})\Omega_i$, dann gilt $\bar{e}_i = \bar{w}_i \bar{w}_i^*$ mit $\bar{w}_i : \bar{\sigma}_i \longrightarrow \bar{\rho}$. Nun ist $\bar{\sigma}_i(a) = \bar{w}_i^* \bar{\rho}(a) \bar{w}_i$ konjugiert zu σ_i durch den isometrischen Intertwiner $r_i = \phi(E_i)^{-1/2} \bar{w}_i^* \bar{\rho}(w_i^*) r$. Der Beweis, dass r_i isometrisch ist, benutzt die Irreduzibilität von σ_i !

zu (ii): $\lambda_i = \phi(w_i w_i^*) \in \text{hom}(\text{id}, \text{id}) \simeq \mathbb{C} 1$ ist reell. Wird ϕ daher durch r implementiert, ist:

$$\psi_i = \lambda^{-1/2} r^* \bar{\rho}(w_i a w_i^*) r \lambda^{-1/2} = \left(\lambda^{-1/2} r^* \bar{\rho}(w_i) \bar{w}_i \right) \bar{\sigma}_i(a) \left(\bar{w}_i^* \bar{\rho}(w_i^*) r \lambda^{-1/2} \right)$$

... mit \bar{w}_i wie oben. Wegen $\rho(w_i^*) \varepsilon_\rho \rho(w_i) = w_i \varepsilon_{\sigma_i} w_i^*$ nach (3.8) folgt...

$$\psi_i(\varepsilon_{\sigma_i}) = \lambda^{-1} w_i^* \phi(\varepsilon_\rho) w_i .$$

Weiter lässt sich zeigen, dass $\phi(\varepsilon_\rho)$ im Zentrum von $\rho(\mathcal{A})'$ liegt [19] und folglich mit $w_i w_i^*$ kommutiert. Somit folgt aus ϕ standard ψ_i standard.

zu (iii): Sei $e_i = w_i w_i^*$ ein Projektor auf den irreduziblen Submorphisamus σ_i . Jeder dieser Operatoren ist durch einen Spektralprojektor von $\phi(\varepsilon_\rho)$ beschränkt [19], daher gilt für einen Eigenwert κ_i von $\phi(\varepsilon_\rho)$ $\|\phi(\varepsilon_\rho)\|^{-1}$ auch $\phi(\varepsilon_\rho)e_i = \kappa_i d_\rho^{-1} e_i$. Damit...

$$\frac{\kappa_i}{d_{\sigma_i}} = \psi_i(\varepsilon_{\sigma_i}) = \phi(e_i)^{-1} w_i^* \phi(\varepsilon_\rho) w_i = \phi(e_i)^{-1} \frac{\kappa_i}{d_\rho}$$

... und schließlich...

$$1 = \phi(1) = \sum_{i=1}^n \phi(e_i) = \frac{\sum_{i=1}^n d_{\sigma_i}}{d_\rho} .$$

□

Die Zopfrelationen (3.12) führen sofort auf die Multiplikativität der statistischen Dimension. Dazu das folgende Lemma:

Lemma 3.1.2 *Sei ϕ die Standardlinksinverse zu ρ , sei weiter ϕ_1 diejenige zum irreduziblen Endomorphismus ρ_1 . Dann ist $\phi \circ \phi_1$ die Standardlinksinverse zu $\rho_1 \rho$ mit...*

$$\phi \circ \phi_1(\varepsilon_{\rho_1 \circ \rho}) = \lambda_1 \varepsilon(\rho, \rho_1) \phi(\varepsilon_\rho) \varepsilon(\rho_1, \rho) .$$

Beweis

Unter Ausnutzung der Beziehungen (3.9) ergibt sich zunächst:

$$\varepsilon_{\rho_1 \circ \rho} = \rho_1(\varepsilon(\rho_1, \rho)) \varepsilon_{\rho_1} \rho_1^2(\varepsilon_\rho) \rho_1(\varepsilon(\rho, \rho_1)) .$$

Anwenden der Linksinversen ϕ_1 erzeugt $\lambda_1 := \frac{\kappa_1}{d_{\rho_1}} = \phi_1(\varepsilon_{\rho_1})$ mit $|\kappa_1| = 1$ und liefert anhand der definierenden Eigenschaft (3.5) und der Zopfrelationen (3.12):

$$\phi_1(\varepsilon_{\rho_1 \circ \rho}) = \lambda_1 \varepsilon(\rho_1, \rho) \rho_1(\varepsilon_\rho) \varepsilon(\rho, \rho_1) = \lambda_1 \rho(\varepsilon(\rho, \rho_1)) \varepsilon_\rho \rho(\varepsilon(\rho_1, \rho)) .$$

Mit Hilfe der Linksinversen ϕ entsteht hieraus das Resultat. Ist ϕ_1 durch r_1 und ϕ durch r implementiert, dann liefert $\bar{\rho}(r_1) r : \text{id} \rightarrow \bar{\rho} \bar{\rho}_1 \rho_1 \rho$ einen isometrischen Intertwiner. Mit diesem folgt...

$$\phi \circ \phi_1(a) = r^* \bar{\rho}(r_1^*) \bar{\rho} \bar{\rho}_1(a) \bar{\rho}(r_1) r .$$

Unitarität des Braiding-Operators und die Voraussetzungen zeigen nun, dass dies die Standardlinksinverse ist. Als weitere Konsequenz notieren wir: $\bar{\rho} \bar{\rho}_1$ konjugiert zu $\rho_1 \rho$. \square

Korollar 3.1.1 *Sei $\rho = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_r$ die Verknüpfung endlich vieler irreduzibler lokalisierter Endomorphismen ρ_i , dann gilt für die statistischen Dimensionen:*

$$d_\rho = d_{\rho_1} d_{\rho_2} \dots d_{\rho_r} .$$

Beweis

Folgt per Induktion aus dem vorangegangenen Lemma unter Ausnutzung der Unitarität der statistischen Operatoren und der Beziehung $|\lambda_i| = \frac{1}{d_i}$ für irreduzible Morphismen. \square

3.1.3 Fusionsregeln der VIRASORO-Netze

Im Folgenden sei \mathcal{A} das VIRASORO-Netz auf \mathbb{R} zu einer festen Zentralladung $c < 1$ (ein sogenanntes *minimales Modell*). Seien weiter ρ und τ zwei lokalisierte Endomorphismen dieses Netzes, dann erlaubt die erläuterte Struktur die Zerlegung der Komposition in ihre irreduziblen Komponenten σ_i mit einer Indexmenge \mathcal{J} dergestalt, dass...

$$[\rho] \circ [\tau] = \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} \sigma_i .$$

Wie Abschnitt 3.2.1 noch zeigen wird, ist \mathcal{J} für (vollständig) rationale Netze immer endlich, da in diesem Fall die Sektoren von endlicher Dimension sind.

Die ersten Berechnungen der Fusionsregeln für minimale Modelle ergaben sich aus einer Analyse der sogenannten WARD-Identitäten, ihrerseits Differentialgleichungen, die den Dreipunktfunktionen aufzuerlegen sind. Sie entstehen aus der Quotientenbildung, die nötig ist,

um auf dem Hilbertraum ein positives Skalarprodukt zu erhalten. Die Äquivalenzklasse des Nullvektors liefert – sofern sie mehr als ein Element enthält – besagte Identitäten. Dieser Ansatz findet sich zum Beispiel in [17], Kapitel 7.3 und führt auf eine explizite Form der Regeln für die primären Felder:

$$\phi_{(r,s)} \times \phi_{(i,j)} = \sum_{\substack{k=1+|r-i| \\ k+r+i=1 \pmod{2}}}^{k_{\max}} \sum_{\substack{l=1+|s-j| \\ l+s+j=1 \pmod{2}}}^{l_{\max}} \phi_{(k,l)}$$

... mit $k_{\max} = \min(r+i-1, 2m-1-r-i)$ und $l_{\max} = \min(s+j-1, 2(m+1)-1-s-j)$ und $1 \leq r < m$, $1 \leq s < m+1$. Die Symmetrie der KAC-Tabelle $h_{r,s} = h_{m-r, m+1-s}$ (siehe (2.2)) spiegelt sich in einer Identifizierung der entsprechenden primären Felder wieder.

Dass sich dieses Resultat auf den Kontext der algebraischen Quantenfeldtheorie übertragen lässt, ist nicht trivial. Die oft zitierte Arbeit von LOKE zu diesem Thema [45] nutzt eine Verbindung zur Theorie der (M, M) -Bimoduln (mit einem Typ III-Faktor M) und die von CONNES entwickelte Fusion derselben, um aus unitären, projektiven Darstellungen der Gruppe $\text{Diff}(S^1)$ die Fusionsregeln entsprechender DHR-Endomorphismen der VIRASORO-Netze herzuleiten. Nichtsdestotrotz enthält diese Arbeit nach [40] eine Lücke im Beweis der starken Additivität, die aber in letzterem Papier durch einen alternativen Beweis geschlossen wurde. Somit lassen sich auch die irreduziblen Sektoren der VIRASORO-Netze mit $c < 1$ in ähnlicher Weise angeben, jedoch wählen wir an dieser Stelle eine Nummerierung, die bei 0 beginnt. Mit den irreduziblen Objekten ...

$$\Delta = \{\sigma_{i,j} \mid i \in \{0, \dots, m-2\}, j \in \{0, \dots, m-1\}\}$$

... folgt somit für die Fusionsregeln ...

$$\sigma_{r,s} \circ \sigma_{i,j} \simeq \bigoplus_{\substack{k=|r-i| \\ k+r+i=0 \pmod{2}}}^{k_{\max}} \bigoplus_{\substack{l=|s-j| \\ l+s+j=0 \pmod{2}}}^{l_{\max}} \sigma_{k,l} \quad (3.14)$$

... mit $k_{\max} = \min(r+i, 2m-(r+i))$ und $l_{\max} = \min(s+j, 2(m+1)-(s+j))$. Auch die Symmetrie bleibt erhalten: $[\sigma_{i,j}] = [\sigma_{m-2-i, m-1-j}]$. Anhand der expliziten Form (3.14) ist sofort ersichtlich, dass die Fusionsregeln kommutativ sind.

Eine Sonderrolle fällt den Sektoren $\sigma_{1,0}$ und $\sigma_{0,1}$ zu, deren Potenzen die Menge Δ aufspannen, in dem Sinne, dass zu jedem irreduziblen Sektor λ ein Tupel $(s, t) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ existiert, so dass $\lambda \prec \sigma_{1,0}^s \circ \sigma_{0,1}^t$. Sektoren mit dieser Eigenschaft heißen *Generatoren*. Im Falle der VIRASORO-Netze liefern die Fusionsregeln in ihrem Fall:

$$\sigma_{k,l} \circ \sigma_{1,0} \simeq \sigma_{k-1,l} \oplus \sigma_{k+1,l} \quad , \quad \sigma_{k,l} \circ \sigma_{0,1} \simeq \sigma_{k,l-1} \oplus \sigma_{k,l+1}$$

... mit $1 \leq k \leq m-3$, $1 \leq l \leq m-2$. Aufgrund der Regel ...

$$\sigma_{0,1}^2 \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,2}$$

... und deren Analogon für $\sigma_{1,0}$ besitzt Δ eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung — eine Unterteilung in *gerade* und *ungerade* Sektoren, die von der Komposition respektiert wird. Weiterhin zeigt (3.14), dass sämtliche irreduziblen Sektoren (und damit auch alle anderen) mit ihrem eigenen Konjugierten übereinstimmen ($\text{id} \prec \sigma_{r,s}^2$ mit Multiplizität 1), folglich *selbstkonjugiert* sind.

3.2 Chirale Erweiterungen und Q-Systeme

Die Arbeiten [12] und [15] legen den Grundstein für eine Rekonstruktion einer nichtobservablen Feldalgebra \mathcal{F} aus der Superauswahlstruktur der Observablenalgebra \mathcal{A} mit dem reduzierten Feldbündel als Resultat. Im Lichte des Satzes 3.0.2 offenbart sich die angewandte Methode als harmonische Analyse bezüglich der kompakten Eichgruppe G , wobei das Observablenetz die unter der Gruppenwirkung α_g invarianten Elemente enthält, die sich durch Mittelung über G als Fixpunktalgebra aus den lokalen Algebren $\mathcal{F}(O)$ herausfiltern lassen ($\mathcal{A}(O) = \mathcal{F}(O)^G$). Dieses Prinzip liefert das Leitmotiv für die folgenden Betrachtungen — allerdings auch nicht mehr, denn da die zugrundeliegende Tensorategorie ein Braiding besitzt, greift Satz 3.0.2 nicht mehr. Es existiert keine Eichgruppe G .

Trotzdem wird sich zeigen, dass chirale Erweiterungen eine Struktur besitzen, die ein angemessenes Substitut für den fehlenden Mittelungsprozess darstellen, die *bedingten Erwartungen*, durch deren Hilfe sich die harmonische Analyse verallgemeinern lässt. Die Subfaktortheorie für Typ *II*-Faktoren hält mit der JONES-Erweiterung eine kanonische Methode bereit, eine Algebra N „entlang“ einer gegebenen bedingten Erwartung zu einer Algebra M zu vergrößern. Dass diese Konstruktion auch für die in der Quantenfeldtheorie auftretenden Typ *III*₁-Faktoren noch funktioniert, liegt an der Endlichkeit einer – Index genannten – Invarianten, die zum einen die „Größe“ der Algebra $\mathcal{A}(O)$ innerhalb von $\mathcal{B}(O)$ misst, zum anderen in enger Verbindung mit der Superauswahlstruktur von \mathcal{A} steht. Letzteres wird zeigen, dass vollständige Rationalität von \mathcal{A} zusammen mit der physikalisch motivierten gemeinsamen Irreduzibilität garantieren, dass sich jede chirale Erweiterung aus einer JONES-Konstruktion ergibt.

LONGO und REHREN bewiesen in [48], dass bestimmte Tripel (ρ, w, x) innerhalb der zu \mathcal{A} gehörigen Tensorategorie, genannt *Q-Systeme*, bestehend aus einem lokalisierten Endomorphismus $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — dem (dualen) kanonischen Endomorphismus — und den Intertwinern $w : \text{id} \rightarrow \rho$ und $x : \rho \rightarrow \rho^2$ eine Erweiterung bis auf Isomorphie vollständig charakterisieren, was das Klassifizierungsproblem weiter reduziert. Wird ferner ρ fixiert, lassen sich die unitären Äquivalenzklassen der möglichen Q-Systeme als Analogon zur zweiten Kohomologie von Gruppen auffassen [35]. KAWAHIGASHI und LONGO präzisierten diese Feststellung in [41], indem sie eine Kozykel-Definition zusammen mit einer Trivialitätsbedingung aufstellten, deren Erfüllung eine Obstruktion gegen nichttriviale, objektfixierende Automorphismen der Tensorategorie darstellt. Sie zeigten anhand eines (verallgemeinerbaren) Beispiels, wie Trivialität der zweiten Kohomologie zur Eindeutigkeit des Q-Systems führt. Auch im Falle der VIRASORO-Netze mit $c < 1$ ist diese Bedingung erfüllt, so dass alle chiralen Erweiterungen bis auf Isomorphie vollständig durch ihre kanonischen Endomorphismen bestimmt werden.

3.2.1 Bedingte Erwartungen und minimaler Index

Die Essenz dessen, was der Mittelungsprozess über eine Gruppe G für die harmonische Analyse bedeutet, lässt sich vollkommen ohne Bezug zu G formulieren:

Definition 3.2.1 Sei $N \subset M$ eine Inklusion von VON NEUMANN-Algebren mit gemeinsamer 1. Eine positive, unitale, surjektive, lineare Abbildung $\varepsilon : M \rightarrow N$ heißt bedingte

Erwartung, falls sie die Bimodul-Eigenschaft erfüllt, d.h.

$$\varepsilon(n^* m n) = n^* \varepsilon(m) n \quad \forall n \in N, m \in M . \quad (3.15)$$

Eine bedingte Erwartung heißt normal, falls sie schwach-stetig ist. Im Folgenden sollen alle bedingten Erwartungen als normal und treu angenommen werden.

Notiz. Mittels eines Polarisationsargumentes folgt aus der Bimodul-Eigenschaft direkt:

$$\varepsilon(n_1 m n_2) = n_1 \varepsilon(m) n_2 \quad \forall n_1, n_2 \in N, m \in M .$$

Ausgedehnt auf Netze von Operatoralgebren scheint die folgende Definition angebracht:

Definition 3.2.2 Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ein Netz von Inklusionen von VON NEUMANN-Algebren über einer partialgeordneten Indexmenge \mathcal{J} , dann besitzt $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ eine konsistente Familie von bedingten Erwartungen...

$$\varepsilon^J : \mathcal{B}(J) \longrightarrow \mathcal{A}(J) ,$$

...falls diese verträglich mit den Inklusionen ist, d.h. $\varepsilon^{J_1} = \varepsilon^{J_2}|_{\mathcal{A}(J_1)}$ für $J_1 < J_2$.

Beispiel 3.2.1 Sei \mathcal{A} ein lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} , ferner ρ ein in $I_0 \in \mathcal{I}$ lokalisierter Endomorphismus endlicher Dimension mit Linksinverse ϕ , dann definiert...

$$\varepsilon = \rho \circ \phi : \mathcal{A} \longrightarrow \rho(\mathcal{A})$$

...eine konsistente Familie bedingter Erwartungen. Dieses Beispiel deutet bereits den Zusammenhang zwischen der Superauswahlstruktur und der im Folgenden definierten Invariante an.

Satz 3.2.1 (Pimsner-Popa). Sei $\varepsilon : M \longrightarrow N$ eine bedingte Erwartung, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}_+$, so dass:

$$\varepsilon(m_+) \geq \lambda^{-1} m_+ \quad (3.16)$$

...für alle positiven Elemente $m_+ \in M$.

Beweis

siehe [55]. □

Definition 3.2.3 Die kleinstmögliche Konstante λ in (3.16) heißt Index $\text{Ind}(\varepsilon)$. Existiert ein ε mit endlichem Index, folgt die Existenz einer bedingten Erwartung ε_0 , die diese Größe minimiert [34]. Dieser Wert heißt auch minimaler oder KOSAKI-Index der Inklusion...

$$[M : N] = \inf_{\varepsilon} \text{Ind}(\varepsilon) = \text{Ind}(\varepsilon_0) .$$

Beispiel 3.2.2 Sei $\varepsilon = \rho \circ \phi$ wie oben und sei ϕ durch r implementiert, dann gilt:

$$\rho(\phi(\bar{r} \bar{r}^*)) = \rho(r^* \bar{\rho}(\bar{r} \bar{r}^*) r) = d_\rho^{-2} 1 \geq d_\rho^{-2} \bar{r} \bar{r}^* .$$

Tatsächlich lässt sich zeigen, dass der Projektor $\bar{r} \bar{r}^*$ die Ungleichung (3.16) mit d_ρ^{-2} saturiert, daher ist $\text{Ind}(\varepsilon) = d_\rho^2$.

Da die Standardlinksinverse den Wert d_ρ minimiert, scheint der nächste Satz plausibel:

Satz 3.2.2 *Sei ρ ein lokalisierter Endomorphismus endlicher Dimension, dann gilt:*

$$[\mathcal{A} : \rho(\mathcal{A})] = d_\rho^2 .$$

Beweis

siehe [46], Satz 8.5. Hier wird der Satz zwar nur für irreduzible Endomorphismen bewiesen, aber da die Additivität der Dimension verträglich mit einer entsprechenden Eigenschaft von $[\mathcal{A} : \rho(\mathcal{A})]^{1/2}$ ist, überträgt sich dies ebenso auf reduzible. \square

Die Bedeutung des Theorems soll an dieser Stelle noch einmal betont werden: Es verbindet eine physikalisch interessante Größe, nämlich die Dimension eines Sektors, die an dessen statistisches Verhalten geknüpft ist, mit einer mathematischen Invarianten. Es wird später dazu dienen, auch für chirale Erweiterungen und die zugehörigen $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ den Begriff der Dimension zu definieren.

All diese Vorbetrachtungen wären sinnlos, ohne die folgende Erkenntnis...

Satz 3.2.3 *Sei $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung von endlichem Index, dann existiert eine konsistente, Vakuum-erhaltende Familie bedingter Erwartungen...*

$$\varepsilon^I : \mathcal{B}(I) \longrightarrow \mathcal{A}(I) .$$

Beweis

skizziert, Details siehe [59]. Nach einem Theorem von TAKESAKI existiert genau dann eine bedingte Erwartung $\varepsilon : M \rightarrow N$, die den Vakuumzustand² $\langle \Omega | \cdot | \Omega \rangle$ erhält, falls N invariant unter der modularen Automorphismengruppe σ_t von M bezüglich Ω ist. Nach einem weiteren Satz von BORCHERS stimmt die modulare Gruppe im vorliegenden Fall bis auf einen unitären 1-Kozykel im Zentrum der Eichgruppe von \mathcal{B} mit den Darstellern der (um den Faktor 2π skalierten) Dilatationen überein. Jetzt enthält das Netz \mathcal{B} ein eindeutiges, daher eichinvariantes, maximales, lokales Subnetz \mathcal{C} , welches aufgrund des zweiten Satzes die Voraussetzungen des ersten erfüllt, folglich existieren $\varepsilon_1^I : \mathcal{B}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$. Nun ist aber auch in der Inklusion $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{C}(I)$ jede Algebra $\mathcal{A}(I)$ stabil unter der modularen Gruppe von $\mathcal{C}(I)$, da letzteres aufgrund der Lokalität die BISOGNANO-WICHMANN-Eigenschaft erfüllt und der oben erwähnte Kozykel verschwindet, daher existiert auch $\varepsilon_2^I : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{A}(I)$. Verknüpfung dieser beiden bedingten Erwartungen bringt das Resultat. \square

Notiz. Mit der Definition des Index einer Inklusion und den bereits angedeuteten Verbindungen zur Superauswahlstruktur lässt sich die in Abschnitt 2.2 geforderte Endlichkeit des μ -Index...

$$[\mathcal{A}(E')' : \mathcal{A}(E)]$$

...mit $E = I_1 \cup I_2$ und zwei disjunkten Intervallen $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ genauer analysieren. Die im Sinne dieser Abhandlung wichtigste Konsequenz, ist wohl der folgende Zusammenhang:

$$[\mathcal{A}(E')' : \mathcal{A}(E)] = \sum_i d_{\rho_i}^2 ,$$

² Hierbei ist Ω zyklisch und separierend für M .

... wobei die Summe über alle irreduziblen Sektoren der zu \mathcal{A} gehörigen Tensorategorie läuft. Somit besitzen vollständig rationale Netze nur endlich viele irreduzible Sektoren und jeder ist von endlicher Dimension [39].

Notiz. Da nur chirale Erweiterungen vollständig rationaler Netze auf \mathbb{R} betrachtet werden, ist die Forderung nach endlichem Index im Falle irreduzibler Erweiterungen automatisch erfüllt, siehe hierzu zum Beispiel [40], Satz 2.3.

3.2.2 Rekonstruktion chiraler Erweiterungen aus Q -Systemen

Betrachte ein lokales, konformes Netz \mathcal{A} auf \mathbb{R} und eine chirale Erweiterung von endlichem Index $\pi(\mathcal{A}) \subset \pi^0(\mathcal{B})$ mit der definierenden Vakuum-Darstellung π^0 von \mathcal{B} . Nun faktorisiert π über einem Algebrenhomomorphismus $\iota : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, so dass $\pi = \pi^0 \circ \iota$. Im Folgenden soll π^0 außer in den Fällen, in denen es ausdrücklich nötig wird, nicht mehr notiert werden.

Das chirale Netz \mathcal{B} besitzt die REEH-SCHLIEDER-Eigenschaft [32], d.h. der Vakuumvektor Ω ist zyklisch und separierend für jede lokale Algebra $\mathcal{B}(I)$. Sei jetzt ein Intervall $I \in \mathcal{I}$ fixiert, dann lässt sich nach [11] ein Vektor $\Phi \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ finden, der zyklisch und separierend sowohl für $\iota(\mathcal{A}(I))$ als auch für $\mathcal{B}(I)$ ist. J_A, J_B seien die modularen Konjugationen bezüglich Φ . Dann definiert...

$$\gamma : \mathcal{B}(I) \rightarrow \mathcal{B}(I) \quad , \quad b \mapsto J_A J_B b J_B J_A =: (j_A \circ j_B)(b)$$

...einen Endomorphismus der Algebra $\mathcal{B}(I)$ dessen Bild innerhalb $\iota(\mathcal{A}(I))$ liegt, da...

$$j_A(\mathcal{B}(I)') \subset j_A(\iota(\mathcal{A}(I))') = \iota(\mathcal{A}(I)) \quad .$$

γ heißt *kanonischer Endomorphismus* der chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. Jede andere Wahl für Φ ändert γ lediglich zu $\text{Ad}(u) \circ \gamma$ mit einem unitären Operator $u \in \iota(\mathcal{A}(I))$ ab. Das Bild $\iota(\mathcal{A}_1)$ dieses Endomorphismus ist wieder eine VON NEUMANN-Algebra mit $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}(I)$.

Nach Satz 3.1 in [47] faktorisiert γ über einem Algebrenhomomorphismus $\bar{\tau} : \mathcal{B}(I) \rightarrow \mathcal{A}(I)$, so dass ...

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(I) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{B}(I) \\ & \searrow \bar{\tau} & \nearrow \iota \\ & \mathcal{A}(I) & \end{array}$$

...kommutiert³.

Um die Restriktion auf ein Intervall I wieder fallen zu lassen, ist das Verhalten von γ in gerichteten Netzen zu untersuchen. Eine fundamentale Erkenntnis in [48] ist nun, dass sich γ in der folgenden Weise ausdehnen lässt:

Satz 3.2.4 *Sei $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung. Dann existiert zu jedem Intervall $I \in \mathcal{I}$ ein unitärer *-Homomorphismus der C^* -Algebra $\bar{\tau} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, so dass $\iota \circ \bar{\tau}|_{\mathcal{B}(J)}$ ein kanonischer Endomorphismus für $\mathcal{B}(J)$ ist, falls $I \subset J$. Ferner wirkt $\bar{\tau}$ trivial auf $\mathcal{B}(I)' \cap \iota(\mathcal{A})$. Variation von I zu \tilde{I} verändert $\bar{\tau}$ lediglich durch Konjugation mit einem unitären Operator aus $\mathcal{A}(J)$ mit $I, \tilde{I} \subset J$.*

³ Streng genommen, muss hier $\mathcal{A}(I)$ isomorph zu $\mathcal{B}(I)$ vorausgesetzt werden. Dies kann aber vermöge eines Tensorproduktes mit einem auxiliären Faktor immer erreicht werden.

Beweis

siehe Korollar 3.3 in [48]. □

Zwar liefert γ damit keinen lokalisierten Endomorphismus des Netzes \mathcal{B} , dennoch gilt...

Korollar 3.2.1 *Sei $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung, sei γ eine mögliche Ausdehnung des kanonischen Endomorphismus aus dem letzten Theorem bezüglich eines Intervalls I , dann ist der duale kanonische Endomorphismus...*

$$\rho = \bar{\iota} \circ \iota$$

... ein transportabler, in I lokalisierter Endomorphismus des Netzes \mathcal{A} .

Beweis

Aufgrund der relativen Lokalität gilt $\iota(\mathcal{A}(I')) \subset \mathcal{B}(I)' \cap \iota(\mathcal{A})$. Daher geht die Trivialität des kanonischen Endomorphismus sofort in die DHR-Bedingung für ρ über. Transportabilität folgt daraus, dass alle möglichen Ausdehnungen von γ vermöge unitärer Intertwiner aus \mathcal{A} miteinander verknüpft sind. □

Satz 3.2.5 *Ist π_0 die Vakuumdarstellung des Netzes \mathcal{A} , ferner π^0 diejenige von \mathcal{B} , dann gelten die unitären Äquivalenzen...*

$$\pi^0 \simeq \pi_0 \circ \bar{\iota} \Rightarrow \pi^0 \circ \iota \simeq \pi_0 \circ \rho .$$

Beweis

siehe Satz 3.4 in [48]. □

Zwischen welchen Sektoren des Netzes \mathcal{A} die Feldoperatoren aus \mathcal{B} interpolieren, wird also maßgeblich durch den dualen kanonischen Endomorphismus ρ festgelegt. Die chirale Erweiterung induziert nun eine C^* -Kategorie, die dessen vollständige Bestimmung erlaubt. Zu deren Konstruktion zunächst die folgende...

Definition 3.2.4 *Ein unitaler $*$ -Homomorphismus $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ soll \mathcal{A} - \mathcal{B} -Morphismus heißen. Entsprechendes gilt für \mathcal{B} - \mathcal{A} -Morphismen. ι und $\bar{\iota}$ sind Beispiele für diese Konstruktionen.*

Interessant ist nun, dass sich sehr viele Begriffsbildungen aus der DHR-Theorie nahtlos auf diesen allgemeineren Kontext übertragen lassen, wie die Arbeiten [46, 47, 48] zeigen. Für einen \mathcal{B} - \mathcal{A} -Morphismus α sollen im Sinne dieser Kontinuität die unitären Äquivalenzklassen $[\alpha]$ auch \mathcal{B} - \mathcal{A} -Sektoren heißen.

Ist die chirale Erweiterung reduzibel, d.h. $\iota(\mathcal{A}(I))' \cap \mathcal{B}(I) \neq \mathbb{C}1$, lässt sich ein Projektor p aus der relativen Kommutante in zwei Isometrien zerlegen: $p = w w^*$ mit $w \in \mathcal{B}$. Die Definition von Unterobjekten überträgt sich auf diese Weise auf die \mathcal{B} - \mathcal{A} -Sektoren, ebenso ergibt sich...

$$\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B} \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow \langle \iota | \iota \rangle = 1 .$$

Gleiches gilt für die Konjugation: Zwei Sektoren $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ und $\bar{\alpha} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ heißen *konjugiert* zueinander, falls zwei isometrische Intertwiner $v : \text{id}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \alpha \circ \bar{\alpha}$ in \mathcal{B} und $w : \text{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \bar{\alpha} \circ \alpha$ in \mathcal{A} existieren, die die Gleichung...

$$\alpha(w)^* v = d_{\alpha}^{-1} 1_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad w^* \bar{\alpha}(v) = d_{\alpha}^{-1} 1_{\mathcal{A}} \quad (3.17)$$

...erfüllen. In diesem Ausdruck ist $d_{\alpha} = [\mathcal{B}(I) : \alpha(\mathcal{A}(I))]^{1/2}$ und wir werden diese Größe im Lichte des Theorems 3.2.2 als *Dimension* von α bezeichnen. Gleichung (3.17) ist mit (3.4) zu vergleichen und als Verallgemeinerung derselben zu identifizieren. Nun gilt...

Satz 3.2.6 (Frobenius-Reziprozität). *Besitzen die \mathcal{A} - \mathcal{B} -Morphismen α, β und der lokalisierte Endomorphismus ρ konjugierte Objekte, dann gilt:*

$$\text{hom}(\alpha, \beta \circ \rho) \simeq \text{hom}(\alpha \circ \bar{\rho}, \beta) \simeq \text{hom}(\bar{\beta} \circ \alpha, \rho) .$$

Beweis

... analog zu Satz 3.1.2. □

Satz 3.2.7 *Ist $\alpha \simeq \beta_1 \oplus \beta_2$ die Zerlegung eines \mathcal{B} - \mathcal{A} -Sektors in Subsektoren, so verhält sich die Dimension von α weiterhin additiv für diese Zerlegung, d.h. ...*

$$d_{\alpha} = d_{\beta_1} + d_{\beta_2} .$$

Beweis

siehe Satz 5.5 in [46]. □

Komposition dieser Morphismen macht natürlich nur noch Sinn, falls der Zielbereich des ersten mit dem Quellbereich des zweiten übereinstimmt, aber in allen diesen Fällen ergibt sich weiterhin Multiplikativität der Dimension (siehe Satz 4.5 in [46]).

Tatsächlich ist $\bar{\tau}$ *konjugiert* zu ι , im beschriebenen Sinne mit Intertwinern v und w , die nach Lemma 3.6 in [48] auch die ausgedehnten Endomorphismen mit dem Vakuumsektor verknüpfen. Nun lässt sich die Familie konsistenter bedingter Erwartungen mit minimalem Index vollständig aus der Kenntnis der Daten $\iota, \bar{\tau}$ und w rekonstruieren, denn ε stimmt mit folgender Abbildung überein:

$$\varepsilon : \mathcal{B} \longrightarrow \iota(\mathcal{A}) \quad , \quad b \mapsto \iota(w^*) \gamma(b) \iota(w) .$$

Es lässt sich leicht prüfen, dass ε die Bimodul-Eigenschaft erfüllt. Da die PIMSNER-POPA-Ungleichung durch $\varepsilon(v v^*) = d_{\iota}^{-2}$ saturiert wird, entspricht der Index von ε dem minimalen.

Sei b nun ein beliebiges Element aus \mathcal{B} , ferner $v : \text{id} \longrightarrow \gamma$, dann lässt sich b durch ein Element aus $\iota(\mathcal{A})$ zusammen mit v ausdrücken, vermöge der Identität:

$$b = d_{\iota} \iota(w^*) v b = d_{\iota}^2 \iota(w^*) \gamma(b) \iota(\bar{\tau}(v^*) w) v = d_{\iota}^2 \varepsilon(b v^*) v . \quad (3.18)$$

Diese Zerlegung bildet die Grundlage einer Verallgemeinerung der harmonischen Analyse, in der der Intertwiner v als „generierendes Funktional“ fungiert, aus dem sich die geladenen Felder herausprojizieren lassen.

Jones-Erweiterung

Die Subfaktor-Theorie nach JONES hält ein kanonisches Verfahren bereit, um Algebren „entlang“ bedingter Erwartungen zu erweitern. Wie die Identität (3.18) zeigt, entsteht $\mathcal{B}(I)$ aus $\mathcal{A}(I)$ durch Hinzufügen einer einzigen Isometrie v oder der zugehörigen Projektion $e = v v^*$. Um zu verstehen, wie sich v ohne Kenntnis von $\mathcal{B}(I)$ rekonstruieren lässt, ist erstmal der Bildraum $e\mathcal{H}_B$ zu identifizieren.

Hierzu sei ein Intervall $I \in \mathcal{I}$ fixiert und Φ ein Vektor in \mathcal{H}_B , der zyklisch für $\mathcal{B}(I)$ ist. Dann folgt Zyklizität des Vektors...

$$\Psi = v\Phi \in e\mathcal{H}_B \quad \text{mit } e = v v^*$$

...aufgrund der Identität (3.18) für $\iota(\mathcal{A}(I))$. Sei weiter $\iota(\mathcal{A}_1)$ die VON NEUMANN-Algebra, die sich als Bild des kanonischen Endomorphismus γ ergibt. Nun stellt...

$$\delta : \mathcal{A}(I) \longrightarrow \mathcal{A}_1 \quad , \quad a \mapsto \bar{\tau}(v^*) \rho(a) \bar{\tau}(v) \quad (3.19)$$

...eine bedingte Erwartung für die Inklusion $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}(I)$ dar, wie sich leicht nachprüfen lässt. Ψ induziert einen Vektorzustand auf $\mathcal{A}(I)$ der Form $\varphi(\cdot) = \langle \Psi | \iota(\cdot)\Psi \rangle$, für den gilt:

$$\varphi \circ \delta(a) = \langle \Psi | \gamma(v^*) \iota \circ \rho(a) \gamma(v) \Psi \rangle = \langle \Psi | \gamma(v^* \iota(a) v) v \Phi \rangle = \langle e \Psi | \iota(a) \Psi \rangle = \varphi(a) .$$

Folglich ist φ invariant unter der bedingten Erwartung mit dem Bild \mathcal{A}_1 . Dies zeigt via GNS-Konstruktion, dass die Projektion e auf den Raum $\iota(\mathcal{A}_1)\Psi$ abbildet [44, 46].

Von Bedeutung für den zentralen Rekonstruktionssatz dieses Kapitels ist die Umkehrung dieser Überlegungen, die angesprochene JONES-Erweiterung [36]. Ist nämlich die bedingte Erwartung $\delta : \mathcal{A}(I) \longrightarrow \mathcal{A}_1$ bekannt, dann liefert die GNS-Konstruktion zu $\varphi = \omega \circ \delta$ mit einem beliebigen treuen, normalen Zustand ω auf $\mathcal{A}(I)$ einen Vektor Ψ der zyklisch für $\mathcal{A}(I)$ ist. Sei e jetzt die Projektion auf den Unterraum $\mathcal{A}_1\Psi$, dann folgt aus den obigen Überlegungen:

$$\mathcal{B}(I) = \mathcal{A}(I) \vee \{e\} = (\mathcal{A}(I) \cup \{e\})'' .$$

Ist weiter ρ bekannt, dann reicht die Kenntnis der Intertwiner $\bar{\tau}(v)$, um daraus eine bedingte Erwartung zu rekonstruieren. Dies motiviert die folgende fundamentale Definition.

Definition 3.2.5 Sei \mathcal{A} ein vollständig rationales, lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} , dann heißt ein Tripel (ρ, w, x) bestehend aus einem lokalisierten Endomorphismus ρ und den isometrischen Intertwinern...

$$w : id \longrightarrow \rho \quad \text{und} \quad x : \rho \longrightarrow \rho^2$$

... (duales) Q-System, falls w und x die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$w^* x = d_\rho^{-1/2} 1 = \rho(w^*) x , \quad (3.20)$$

$$x x^* = \rho(x^*) x \quad \text{und} \quad x x = \rho(x) x . \quad (3.21)$$

Beispiel 3.2.3 Die Normierungsbedingung (3.17) sorgt dafür, dass $\bar{\tau}(v)$ (3.20) erfüllt. Die Intertwinereigenschaft von $v : id \longrightarrow \gamma$ garantiert (3.21).

Satz 3.2.8 (Rekonstruktionssatz). *Sei \mathcal{A} ein lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} , sei ferner ρ ein lokalisierter Endomorphismus, der $\text{id} \prec \rho$ genau einmal enthält. ρ ist genau dann der (duale) kanonische Endomorphismus einer irreduziblen chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, falls ein Q -System (ρ, w, x) in der Tensor-kategorie $\text{End}(\mathcal{A})$ existiert. Diese Erweiterung besitzt eine konsistente Familie bedingter Erwartungen ϵ , ferner ist der Index aller lokalen Inklusionen konstant und gleich der Dimension d_ρ . Die Erweiterung ist genau dann lokal, wenn x die Bedingung $\epsilon(\rho, \rho)x = x$ mit dem Braiding-Operator ϵ erfüllt [48].*

Beweis

Sei ρ lokalisiert in einem Intervall $I \in \mathcal{I}$. Dann definiert...

$$\delta(a) = x^* \rho(a) x$$

...eine bedingte Erwartung auf $\mathcal{A}(I)$ mit dem Bild $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}(I)$. Setze $\mathcal{B}(I)$ gleich der JONES-Erweiterung entlang dieser bedingten Erwartung und ι gleich dem Inklusionshomomorphismus...

$$\iota : \mathcal{A}(I) \longrightarrow \mathcal{B}(I) = \mathcal{A}(I) \vee \{e\} .$$

Wie in (3.18) ist $\mathcal{B}(I)$ nun von der Form...

$$\mathcal{B}(I) = \iota(\mathcal{A}(I))v$$

...mit einer Isometrie v , so dass $e = vv^*$ der JONES-Projektion auf den von $\iota(\mathcal{A}_1)$ generierten Unterraum entspricht. Der konjugierte \mathcal{B} - \mathcal{A} -Morphismus $\bar{\iota}$ ist nun durch $\bar{\iota}(\iota(a)v) = \rho(a)x$ zu rekonstruieren und liefert damit auch $\gamma = \iota \circ \bar{\iota}$. Lokal ergibt sich die bedingte Erwartung von $\mathcal{B}(I)$ auf $\mathcal{A}(I)$ durch...

$$\epsilon : \mathcal{B}(I) \longrightarrow \mathcal{A}(I) \quad , \quad b \mapsto w^* \bar{\iota}(b) w . \quad (3.22)$$

Sei jetzt ω der Vakuumzustand des Netzes \mathcal{A} , dann definiert $\omega \circ \epsilon$ einen unter ϵ invarianten Zustand auf $\mathcal{B}(I)$, aus dem via GNS-Konstruktion eine treue Darstellung π^0 mit Vakuumvektor Ω auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_B entsteht. Die Darstellung $\pi^0 \circ \iota$ von $\mathcal{A}(I)$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_A = \overline{(\pi^0 \circ \iota)(\mathcal{A}(I))\Omega} \subset \mathcal{H}_B$ lässt sich zu einer ebensolchen von \mathcal{A} vervollständigen. Damit ist ι auch für Elemente aus \mathcal{A} definiert. Aufgrund der Beziehung $v^* \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$ gilt...

$$\iota(a)v^*\Phi = v^* \iota(\rho(a))\Phi \quad , \quad \text{für } \Phi \in \mathcal{H}_A$$

...weiterhin für $a \in \mathcal{A}$. In \mathcal{A} stehen jetzt Ladungstransporter zur Verfügung, d.h. repräsentiert $\hat{\rho}$ denselben Sektor wie ρ , ist aber in I' lokalisiert, dann definiert...

$$\mathcal{B}(I') := \iota(\mathcal{A}(I'))u v$$

...mit einem unitären Intertwiner $u : \rho \longrightarrow \hat{\rho}$ die lokale Algebra $\mathcal{B}(I')$. $\mathcal{A}(I')$ enthält $\hat{w} : \text{id} \longrightarrow \hat{\rho}$ mit $\hat{w} = uw$, folglich existiert in $\mathcal{B}(I')$ mit $\iota(\hat{w}^*u)v : \iota \longrightarrow \iota$ ein Vielfaches der 1. Dies impliziert $\iota(\mathcal{A}(I')) \subset \mathcal{B}(I')$, wodurch \mathcal{B} zu einer Erweiterung von $\iota(\mathcal{A})$ wird. Sei jetzt $I' \cap I = \emptyset$, dann gilt mit $a \in \mathcal{A}(I)$:

$$\iota(u)v \iota(a) = \iota(u\rho(a))v = \iota(\hat{\rho}(a)u)v = \iota(a)\iota(u)v$$

...aufgrund der Lokalisierung von $\hat{\rho}$. Damit ist \mathcal{B} relativ lokal zu $\iota(\mathcal{A})$.

Mit $\widehat{x} = u \rho(u) x u^*$ und \widehat{w} wie oben definiert $\widehat{\tau}(\iota(a u) v) = \widehat{\rho}(a) \widehat{x}$ einen kanonischen Endomorphismus für $\iota(\mathcal{A}(I')) \subset \mathcal{B}(I')$. $(\widehat{\rho}, \widehat{w}, \widehat{x})$ liefert das (duale) Q-System dieser Inklusion. Die bedingte Erwartung...

$$\epsilon : \mathcal{B}(I') \longrightarrow \mathcal{A}(I') \quad , \quad b \mapsto \widehat{w}^* \widehat{\tau}(b) \widehat{w}$$

...erfüllt die Konsistenzbedingung wie anhand einer einfachen Rechnung aus der Definition der Intertwiner \widehat{w} und \widehat{x} folgt. Dies impliziert ebenso die Konsistenz der zugehörigen Darstellung der $\mathcal{B}(I)$ auf ein und derselben Vervollständigung \mathcal{H}_B , die ja aus $\omega \circ \epsilon$ hervorgeht. Da die JONES-Projektion die PIMSNER-POPA-Ungleichung saturiert und außerdem aufgrund der Konsistenz der bedingten Erwartung δ konstant im Netz \mathcal{B} ist, ergibt sich der Index durch...

$$[\mathcal{B}(I') : \mathcal{A}(I')]^{-1} 1 = \epsilon(v v^*) = u^* \widehat{w}^* \widehat{x} \widehat{x}^* \widehat{w} u = d_\rho^{-1} 1 .$$

Damit die Erweiterung selbst die Lokalisierungsbedingung erfüllt, muss $v \in \mathcal{B}(I)$ mit $\iota(u) v \in \mathcal{B}(I')$ für $I \cap I' = \emptyset$ kommutieren. Dies ist äquivalent zu $v v = \iota(u^*) v \iota(u) v$ und folglich zu...

$$\iota(x) v = \gamma(v) v = v v = \iota(u^*) v \iota(u) v = \iota(u^* \rho(u)) \iota(x) v .$$

Aufgrund des raumartigen Abstandes der beiden Intervalle, stimmt $u^* \rho(u)$ nun nach (3.13) mit dem Braiding-Operator ε_ρ überein. \square

Notiz. Die zunächst konstruierte Algebra \mathcal{A}_1 lässt sich genauer identifizieren. Sie ergibt sich als Bild der bedingten Erwartung δ . Sei $b = \iota(a) v$ ein beliebiges Element aus $\mathcal{B}(I)$, dann gilt...

$$\bar{\tau}(b) = \bar{\tau}(\iota(a) v) = \bar{\tau} \iota(a) \underbrace{x^* x}_1 = x^* \rho(\bar{\tau}(\iota(a) v)) x = \delta(\bar{\tau}(b)) .$$

Andererseits ist $\delta(a) = \bar{\tau}(v^* \iota(a) v) \in \bar{\tau}(\mathcal{B}(I))$ und damit $\mathcal{A}_1 = \bar{\tau}(\mathcal{B}(I))$. Die im Rekonstruktionssatz benutzte JONES-Erweiterung reduziert sich damit auf ein Fortsetzen der folgenden Sequenz von Inklusionen...

$$\iota \bar{\tau} \iota(\mathcal{A}(I)) \subset \iota \bar{\tau}(\mathcal{B}(I)) \subset \iota(\mathcal{A}(I)) \subset \mathcal{B}(I) ,$$

... bzw. der dualen Sequenz ...

$$\bar{\tau} \iota \bar{\tau}(\mathcal{B}(I)) \subset \bar{\tau} \iota(\mathcal{A}(I)) \subset \bar{\tau}(\mathcal{B}(I)) \subset \mathcal{A}(I) .$$

Für beide Folgen ist dies in beide Richtungen möglich. Treffenderweise heißen die Fortsetzungen nach links JONES-Tunnel, nach rechts JONES-Turm. Letztere ergeben sich durch Iterieren der oben beschriebenen JONES-Erweiterung.

Ein Anliegen der Subfaktor-Theorie ist das Verstehen eben solcher Inklusionssequenzen, die bereits für endlichdimensionale Algebren interessante Ergebnisse liefern. Für eine gute Einführung in diesen Zweig siehe zum Beispiel [29].

3.3 Tensorkategorien

Wie das eingangs erwähnte Dualitätsresultat von DOPLICHER und ROBERTS zeigt, lassen sich die Fusionsregeln konformer Quantenfeldtheorien in einem sehr viel breiteren kategorientheoretischen Rahmen betrachten. Tatsächlich belegen ähnliche Dualitätssätze für Quantengruppen die enge Verbindung zwischen deren Darstellungs- und den (symmetrischen) Tensorkategorien. Wie bereits angedeutet, induzieren die niederdimensionalen konformen Quantenfeldtheorien jedoch keine symmetrische Kategorie, sondern besitzen vielmehr ein *Braiding*. Auch dies lässt sich kategorientheoretisch abstrahieren: Die nötigen Definitionen werden in offensichtlicher Weise bereits durch Gleichung (3.8) bis (3.11) induziert. Die Frage ob, in welcher Form und zu welchen Objekten solche *gezopf*ten Tensorkategorien dual sind, war zum Zeitpunkt des Erscheinens dieser Diplomarbeit noch nicht geklärt, sondern Gegenstand aktueller Forschung.

Die fundamentalen Definitionen einer Kategorie, der Produktkategorie, einer Isomorphie und eines Funktors sind entsprechenden Standardwerken (z.B. [53]) zu diesem Thema zu entnehmen und sollen an dieser Stelle daher nicht wiederholt werden.

Definition 3.3.1 *Eine strikte Tensorkategorie (oder strikt monoidale Kategorie) ist eine Kategorie \mathcal{C} ausgestattet mit einem ausgezeichneten Objekt id und einem Funktor...*

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} ,$$

... der die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) **Assoziativität auf Objekten und Morphismen:**

$$\begin{aligned} (\rho \otimes \sigma) \otimes \tau &= \rho \otimes (\sigma \otimes \tau) \quad \forall \rho, \sigma, \tau \in \text{Obj}(\mathcal{C}) , \\ (s \otimes t) \otimes r &= s \otimes (t \otimes r) \quad \forall s \in \text{hom}(\rho, \rho'), t \in \text{hom}(\sigma, \sigma'), r \in \text{hom}(\tau, \tau') . \end{aligned}$$

(ii) **Einselement des Tensorproduktes:**

$$\begin{aligned} \text{id} \otimes \rho &= \rho \otimes \text{id} = \rho \quad \forall \rho \in \text{Obj}(\mathcal{C}) , \\ 1_{\text{id}} \otimes s &= s \otimes 1_{\text{id}} = s \quad \forall s \in \text{hom}(\rho, \rho') . \end{aligned}$$

(iii) **Distributivgesetz:**

$$\begin{aligned} (s \otimes t) \circ (u \otimes v) &= (s \circ u) \otimes (t \circ v) \quad \forall u \in \text{hom}(\rho, \rho'), v \in \text{hom}(\sigma, \sigma'), \\ & \quad s \in \text{hom}(\rho', \rho''), t \in \text{hom}(\sigma', \sigma'') . \end{aligned}$$

Beispiel 3.3.1 („Nicht“-Beispiel) Das sich aufdrängende kanonische Beispiel der Kategorie der Hilberträume über \mathbb{C} und ihrer Homomorphismen mit dem zugehörigen Tensorprodukt ist in obigem Sinne *keine* strikte Kategorie, aufgrund der Verletzung des Assoziativgesetzes und der Einselement-Identitäten. Da jedoch natürliche Isomorphismen...

$$\begin{aligned} \alpha &: (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_3 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3) \\ \beta &: \mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ \gamma &: \mathbb{C} \otimes \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

...für alle \mathcal{H}_i existieren, ist diese Kategorie bis auf Isomorphie strikt und lässt sich unter Vernachlässigung dieses marginalen Details als echt strikt betrachten.

Beispiel 3.3.2 Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} lassen sich vermöge der Ordnung \leq als Poset⁴-Kategorie auffassen, d.h. die Objekte sind durch die Zahlen selbst gegeben und es existiert genau ein Morphismus zwischen a und b , falls $a \leq b$. Bei Gleichheit entspricht dieser dem Identitätselement a_{id} . Das Produkt erhält die Ordnungsbeziehung zwischen den Objekten, durch die 1 ist ein Einselement gegeben. Somit zeigt dieses abstrakte Modell, dass es sehr wohl möglich ist, Tensorkategorien außerhalb der hier betrachteten zu finden.

Beispiel 3.3.3 Sei \mathcal{A} ein konformes Netz auf \mathbb{R} , ferner Δ eine Menge lokalisierter Endomorphismen von \mathcal{A} abgeschlossen unter Komposition, dann induziert Δ eine Tensorkategorie End_Δ vermöge aller bereits bekannten Definitionen, d.h. Objekte sind Elemente aus Δ . Intertwiner zwischen zwei Endomorphismen spannen die Morphismenräume auf, die damit eine lineare Struktur besitzen. Komposition der Endomorphismen liefert die Wirkung des Produktfunktors auf den Objekten. Auch das Tensorprodukt zweier Morphismen ergibt sich kanonisch aus bereits bekannten Strukturen:

$$t \otimes s := t\rho(s) : \rho \otimes \sigma \longrightarrow \rho' \otimes \sigma' \quad \text{für } t : \rho \longrightarrow \rho' \text{ und } s : \sigma \longrightarrow \sigma'. \quad (3.23)$$

Unitäre Intertwiner entsprechen gerade den Isomorphismen. Tensorkategorielle Aussagen, die Objekte nur bis auf Isomorphie unterscheiden, „sehen“ daher lediglich die Sektorstruktur einer konformen Quantenfeldtheorie.

Eben dieses letzte Beispiel zeigt, dass wir uns bisher unbewusst auf kategorientheoretischen Pfaden bewegt haben. Um nun auch die Zerlegung eines Endomorphismus in seine irreduziblen Bestandteile in diesem Rahmen zu begreifen, scheint die folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.3.2 Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Ein Objekt $\rho \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ heißt direkte Summe zweier Objekte σ_1 und σ_2 , falls zwei Morphismen $w_i \in \text{hom}(\sigma_i, \rho)$, $i \in \{1, 2\}$ existieren, so dass für alle $\rho' \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ und $s_i \in \text{hom}(\sigma_i, \rho')$ genau ein Morphismus s existiert, für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_1 & & \rho' \\
 \swarrow w_1 & \searrow s_1 & \\
 & \rho & \dashrightarrow s \dashrightarrow \\
 \nwarrow w_2 & \nearrow s_2 & \\
 \sigma_2 & &
 \end{array}$$

In einer Kategorie mit direkten Summen ist für zwei beliebige Objekte auch deren direkte Summe definiert.

Ein „abstract nonsense“-Argument zeigt schnell, dass direkte Summen bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt sind. Wir greifen für solche Objekte auf die bereits bekannte Notation $\rho \simeq \sigma_1 \oplus \sigma_2$ zurück.

⁴ partially ordered set

Beispiel 3.3.4 Für das Beispiel der oben definierten Kategorie End_Δ ist lediglich Gleichung (3.2) neu zu interpretieren. Hierzu seien w_1 und w_2 so gewählt, dass sie eine Zerlegung der 1 bilden, d.h. $w_1 w_1^* + w_2 w_2^* = 1$. Nun muss s aufgrund der Kommutativität des obigen Diagramms die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$s w_1 = s_1 \quad \text{und} \quad s w_2 = s_2 .$$

Aufgrund der Vollständigkeit definiert jetzt...

$$s = s w_1 w_1^* + s w_2 w_2^* = s_1 w_1^* + s_2 w_2^*$$

...den geforderten Intertwiner in eindeutiger Weise. End_Δ ist folglich eine Kategorie mit direkten Summen.

Notiz. Da die Morphismenräume die Struktur einer abelschen Gruppe tragen und diese mit der Komposition verträglich ist, fällt End_Δ in die Klasse der Ab-Kategorien. Hierfür ist die Definition der direkten Summe äquivalent dazu, dass zu den zwei Morphismen $w_i \in \text{hom}(\sigma_i, \rho)$ zwei weitere Elemente $w'_i \in \text{hom}(\rho, \sigma_i)$ existieren, so dass die Identitäten...

$$w'_i \circ w_i = 1_{\sigma_i} \quad \text{und} \quad w_1 \circ w'_1 + w_2 \circ w'_2 = 1_\rho \quad (3.24)$$

...gelten. Für End_Δ lässt sich $w'_i = w_i^*$ wählen, dann reduziert sich (3.24) auf die Forderung nach Isometrie und Vollständigkeit der Intertwiner.

Tatsächlich besitzen die Intertwinerräume von End_Δ sehr viel mehr Struktur...

Definition 3.3.3 Eine Kategorie \mathcal{C} heißt C^* -Kategorie, falls jeder Morphismenraum ein Banachraum über \mathbb{C} mit einer antilinearen Involution $*$ ist, so dass ...

$$\begin{aligned} w \in \text{hom}(\rho, \sigma) \Rightarrow w^* \in \text{hom}(\sigma, \rho) \quad , \quad (w^*)^* = w \quad , \quad w^* w = 0 \Rightarrow w = 0 \quad , \\ \|s \circ t\| \leq \|s\| \cdot \|t\| \quad \text{für } s \in \text{hom}(\sigma, \tau) \quad , \quad t \in \text{hom}(\rho, \sigma) \quad , \quad \|s^* \circ s\| = \|s\|^2 \quad . \end{aligned}$$

In einer C^* -Tensorkategorie hat außerdem die Abschätzung $\|u \otimes v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ zu gelten.

Folglich ist jeder Endomorphismenraum eine C^* -Algebra. Die Beziehung zwischen C^* -Kategorie und C^* -Algebra ist damit vergleichbar mit derjenigen zwischen Gruppoid und Gruppe. Im Rahmen der kategoriellen $*$ -Involution lassen sich jetzt ebenso die Begriffe Isometrie, unitärer Morphismus und Projektor verallgemeinern. Insbesondere:

Definition 3.3.4 Eine Kategorie \mathcal{C} besitzt Unterobjekte, falls zu jedem Projektor $p = p \circ p = p^* \circ p$ eine Isometrie w existiert, so dass $p = w \circ w^*$.

Definition 3.3.5 Sei \mathcal{C} eine strikte C^* -Tensorkategorie, dann heißt ein Objekt $\bar{\rho}$ konjugiert zu ρ , falls zwei Isometrien $r : \text{id} \rightarrow \bar{\rho} \otimes \rho$ und $\bar{r} : \text{id} \rightarrow \rho \otimes \bar{\rho}$ existieren, die die Konjugationsgleichungen:

$$(\bar{r}^* \otimes 1_\rho) \circ (1_\rho \otimes r) = d^{-1} 1_\rho \quad (3.25)$$

$$(r^* \otimes 1_{\bar{\rho}}) \circ (1_{\bar{\rho}} \otimes \bar{r}) = d^{-1} 1_{\bar{\rho}} . \quad (3.26)$$

...für ein $d \in \mathbb{R}_+$ erfüllen. Der minimale Wert für d heißt Dimension des Objektes ρ .

Beispiel 3.3.5 Sei $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung, dann induziert diese Konstruktion eine C^* -Kategorie $\text{Ext}(\iota)$ mit den Objekten...

$$\text{Obj}(\text{Ext}(\iota)) = \{ \beta \prec \iota \circ \lambda \mid \lambda \in \text{End}(\mathcal{A}) \}$$

... und den Intertwinerräumen $\text{hom}(\alpha, \beta) \subset \mathcal{B}$ für $\alpha, \beta \in \text{Ext}(\iota)$. Mangels einer Möglichkeit die \mathcal{A} - \mathcal{B} -Morphismen in sinnvoller Weise zu verknüpfen, ist diese Kategorie *keine* Tensorkategorie, allerdings operiert $\text{End}(\mathcal{A})$ durch Verknüpfung von rechts auf $\text{Ext}(\iota)$ — eine Beziehung analog zu der zwischen Ring und (Rechts-)Modul. Natürlich existiert weiterhin eine Involution auf den Morphismenräumen, ebenso ist $\text{End}(\alpha)$ für alle $\alpha \in \text{Ext}(\iota)$ eine C^* -Algebra. $\text{Ext}(\iota)$ wird in Kapitel 4 eine zentrale Rolle spielen.

Beispiel 3.3.6 Sei G eine kompakte Gruppe. Unitäre Darstellungen von G auf endlichdimensionalen Hilberträumen bilden die Objekte der (endlichdimensionalen) Darstellungskategorie Rep_G von G , deren Morphismen die linearen G -äquivarianten Operatoren sind, d.h. $w \in \text{hom}(H_1, H_2)$ erfüllt ...

$$w \circ U_1(g) = U_2(g) \circ w .$$

Unter Berücksichtigung der obigen Notiz lässt sich dies als strikte C^* -Tensorkategorie behandeln. Konjugation in Rep_G liefert zu einem Darstellungsraum H dessen Dualraum H^* , auf dem die konjugierte Darstellung U^* operiert. Ist $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von H , entsprechend $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ die zugehörige duale Basis, dann lösen die isometrischen Intertwiner...

$$\begin{aligned} \bar{r} &: \mathbb{C} \longrightarrow H \otimes H^* \quad , \quad \lambda \mapsto \lambda \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i , \\ r &: \mathbb{C} \longrightarrow H^* \otimes H \quad , \quad \lambda \mapsto \lambda \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \otimes e_i \end{aligned}$$

... die Konjugationsgleichungen mit $d = n$. Dies entspricht dem minimalen Wert für d , so dass im Falle endlichdimensionaler Darstellungskategorien lineare und minimale Dimension der Darstellungsräume übereinstimmen. Tatsächlich war dies die Motivation für die Nomenklatur.

Beispiel 3.3.7 Die Gleichungen (3.25) und (3.26) reduzieren sich vermöge der Definition (3.23) auf (3.4). Somit ist natürlich auch End_Δ eine Kategorie mit konjugierten Objekten.

Die Beispiele zeigen, dass es für viele Tensorkategorien möglich ist, einen kanonischen Isomorphismus $\rho \otimes \sigma \longrightarrow \sigma \otimes \rho$ anzugeben — so zum Beispiel für die Kategorie der Hilberträume durch $v \otimes w \mapsto w \otimes v$. Für End_Δ ist durch den Braiding-Operator $\varepsilon(\rho, \sigma)$ ein solcher Intertwiner gegeben, dessen Form jedoch um einiges komplexer scheint. Eine simultane Beschreibung für alle Tensorkategorien führt zu den Begriffen *Braiding* und *Symmetrie*.

Definition 3.3.6 Sei \mathcal{C} eine strikte Tensorkategorie, sei ferner \otimes^{op} der Funktor...

$$\begin{aligned} \otimes^{\text{op}} &: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} , \\ (\rho, \sigma) &\mapsto \sigma \otimes \rho , \\ (s, t) &\mapsto t \otimes s \quad \text{für } s : \rho \longrightarrow \rho', t : \sigma \longrightarrow \sigma' . \end{aligned}$$

Dann heißt eine natürliche Transformation $\varepsilon : \otimes \longrightarrow \otimes^{\text{op}}$ Braiding, falls $\varepsilon(\rho, \sigma)$ für alle $\rho, \sigma \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ein Isomorphismus ist und Multiplikatивität im Sinne der folgenden kommutativen Diagramme gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 \rho \otimes \sigma \otimes \tau & \xrightarrow{\varepsilon(\rho \otimes \sigma, \tau)} & \tau \otimes \rho \otimes \sigma \\
 \downarrow 1_\rho \otimes \varepsilon(\sigma, \tau) & \nearrow \varepsilon(\rho, \tau) \otimes 1_\sigma & \\
 \rho \otimes \tau \otimes \sigma & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \rho \otimes \sigma \otimes \tau & \xrightarrow{\varepsilon(\rho, \sigma \otimes \tau)} & \sigma \otimes \tau \otimes \rho \\
 \downarrow \varepsilon(\rho, \sigma) \otimes 1_\tau & \nearrow 1_\sigma \otimes \varepsilon(\rho, \tau) & \\
 \sigma \otimes \rho \otimes \tau & &
 \end{array}$$

Sind alle Monodromiemorphismen $\varepsilon(\sigma, \rho) \circ \varepsilon(\rho, \sigma)$ trivial, heißt ε Symmetrie der Kategorie \mathcal{C} .

Beispiel 3.3.8 Sowohl die Kategorie der Hilberträume, als auch die Darstellungskategorie Rep_G besitzen vermöge $\varepsilon(H_1, H_2) = H_2 \otimes H_1$ eine Symmetrie.

Beispiel 3.3.9 Natürlich definiert der Operator ε das Braiding der Kategorie End_Δ . Hierbei übersetzt sich die Verträglichkeit mit Intertwinern (3.8) in die Natürlichkeitsforderung, während sich hinter den Kozykel-Identitäten (3.9) die Multiplikatивität verbirgt, wie ein Blick auf die Definition des Tensorproduktes (3.23) sofort zeigt. Tatsächlich handelt es sich hierbei für Endomorphismenkategorien, die von lokalen Netzen auf \mathbb{R} herrühren, um ein *echtes* Braiding. Es lässt sich durch die sogenannten R -Matrizen realisieren, die im Folgenden noch definiert werden sollen.

3.3.1 Graphischer Intertwinerkalkül

Viele interessante Relationen zwischen Intertwinerbasis, bestehend aus $t_{ij}^k : \rho_k \longrightarrow \rho_i \otimes \rho_j$ und dem Braiding-Morphismus ε sind direkte Konsequenzen der Multiplikatивität und der Natürlichkeit. Doch gerade aufgrund der Komplexität der ersteren, sind diese Beziehungen meist kontraintuitiv. Daher existiert eine interessante Methode zur Visualisierung, die das Einfügen von Einsen oder die Multiplikatивität zu topologischen Manipulationen an Strangdiagrammen reduziert. Da diese in 1 : 1-Korrespondenz zu den entsprechenden Intertwinern stehen, fällt diesem *graphischen Intertwinerkalkül* Beweiskraft zu.

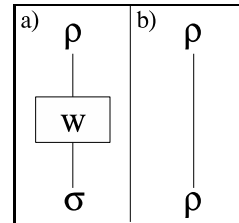


Fig. 3.1: a) $w : \rho \rightarrow \sigma$,
b) 1_ρ

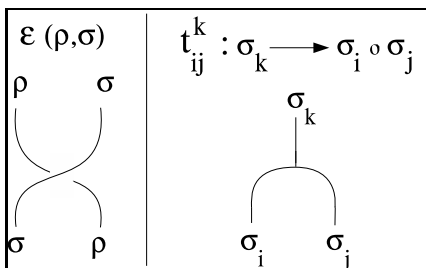


Fig. 3.2: Intertwinerbasis, Braiding

Wie in Abbildung 3.1 gezeigt, wird ein Intertwiner $w : \rho \longrightarrow \sigma$ dabei durch einen entsprechend gelabelten Strang dargestellt. Intertwinerbasis nehmen die Form von Gabelungen an, während der Braiding-Operator ε durch eine Überkreuzung repräsentiert wird, bei der eine Richtung ausgezeichnet ist. Solche Diagramme sind von Überlegungen zur Zopfgruppe wohlbekannt und sind graphischer Ausdruck der Nichttrivialität der Monodromiemorphismen. Nun entsprechen sowohl die in Abbildung 3.3

gezeigte Multiplikatивität, als auch die in Verbindung mit der Natürlichkeit daraus folgenden *Zopfrelationen* (siehe Abb. 3.4(c)) der Verschiebung von Strängen übereinander.

Verkettungen von Intertwinern ergeben sich durch Aneinanderreihen der Strangdiagramme in vertikaler Richtung, wobei wir hier die Konvention treffen, eine von links nach rechts notierte Folge von Morphismen von unten nach oben aufzuzeichnen. Somit steht der Morphismus, dessen Wirkung als erstes eintritt an oberster Position. Tensorprodukte äußern sich durch Anfügen entsprechender Stränge in horizontaler Richtung. So nimmt zum Beispiel die Gleichung...

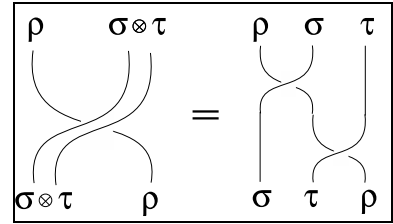
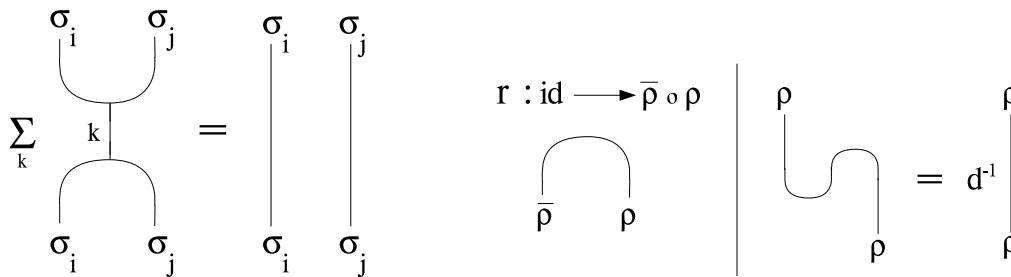


Fig. 3.3: Multiplikativität

$$\sum_k t_k \circ t_k^* = 1_{\sigma_i} \otimes 1_{\sigma_j} \quad \text{mit } t_k : \sigma_k \rightarrow \sigma_i \otimes \sigma_j$$

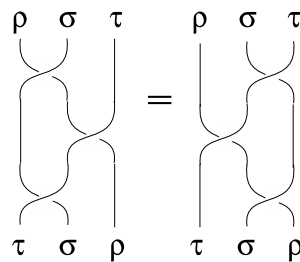
...graphisch die in 3.4(a) gezeigte Form an.

Ein Strang, der zur Tensoreins (id) der Kategorie führt, wird meist nicht notiert. Zum Beispiel stellt Abbildung 3.4(b) die Konjugationsgleichung (3.25) dar. Bei entsprechender Wahl der Normierung der Intertwiner r und \bar{r} , wären auch diese Manipulationen rein topologisch (ohne die zusätzliche Multiplikation mit d^{-1}) zu verstehen.



(a) Eins aus Basiselementen.

(b) Zur Konjugationsgleichung.



(c) Zopfrelationen.

Fig. 3.4: Grundlegende Operationen im graphischen Intertwinerkalkül

3.3.2 Reduziertes Feldbündel

Die Statistik geladener Felder drückt sich am grundlegendsten in deren Vertauschungsrelationen bei raumartigen Abständen aus. Für $d > 2$ -dimensionale Theorien ergeben sich hier Bose-, Fermi- oder Parastatistik. Im Sinne der DHR-Theorie interpolieren die zugehörigen

Operatoren zwischen unterschiedlichen Darstellungen der Observablenalgebra. SCHURs Lemma zeigt nun, dass sie insbesondere daher nicht Teil derselben sein können. Sie sind Elemente einer größeren (Feld-)Algebra, die sich aus der vollständigen Kenntnis der Sektorstruktur einer Theorie rekonstruieren lässt. In [19, 20] schlagen die Autoren das *reduzierte Feldbündel* \mathcal{F} als Modell einer solchen Algebra vor⁵. Insbesondere gehen Vertauschungsrelationen in \mathcal{F} zurück auf den bereits bekannten Braiding-Operator, der die *R-Matrizen* induziert. Ferner lassen sich Produkte von Elementen in \mathcal{F} gemäß einer *Operatorproduktentwicklung* zerlegen. Beide Konstruktionen stehen über die *Braiding-Fusion-Relationen* miteinander in Verbindung, die es ermöglicht, die *R-Matrizen* induktiv zu berechnen. Sie lassen sich mittels des graphischen Intertwinerkalküls aus dem letzten Kapitel leicht verstehen.

Definition 3.3.7 Sei \mathcal{A} ein lokales, konformes Netz auf \mathbb{R} , dann bezeichne $\text{End}(\mathcal{A})$ die Menge aller lokalisierten Endomorphismen von \mathcal{A} .

Eine Untermenge $\Delta \subset \text{End}(\mathcal{A})$ heißt System von Endomorphismen, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (i) $\text{id} \in \Delta$.
- (ii) Jeder Endomorphismus $\rho \in \Delta$ ist irreduzibel.
- (iii) Alle Elemente von Δ sind paarweise inäquivalent.
- (iv) Δ ist abgeschlossen unter Konjugation, d.h. $\rho \in \Delta \Rightarrow \bar{\rho} \in \Delta$.
- (v) Δ ist abgeschlossen unter Zerlegung von Tensorprodukten in direkte Summen, d.h. $\rho, \tau \in \Delta$ und $\rho \circ \tau \simeq \bigoplus_{i \in J} N_i \sigma_i \Rightarrow \sigma_i \in \Delta \quad \forall i \in J$.

Da die Operatoren des reduzierten Feldbündels zwischen Sektoren mit Repräsentanten aus einem System von Endomorphismen interpolieren, ist die folgende Definition angebracht:

Definition 3.3.8 Ein Tupel $e = (\rho_r, \sigma, \rho_s) \in \Delta \times \Delta \times \Delta$ heißt Superauswahl- oder Fusionskanal, falls ein isometrischer Intertwiner...

$$t_e : \rho_r \longrightarrow \rho_s \circ \sigma$$

... existiert. ρ_s heißt Quelle, ρ_r Ziel und σ Ladung des Kanals. Ist Δ abzählbar mit einer Indexmenge I , dann definieren wir $t_{si}^r = t_e$ mit $e = (\rho_r, \sigma_i, \rho_s)$ für $r, s, i \in I$. Ist $I \subset \mathbb{N}$, bezeichne der Index 0 die Identität. Eine endliche Folge von Fusionskanälen e_1, \dots, e_n heißt Pfad der Länge n , falls die Quelle des $i+1$ -ten Gliedes mit dem Ziel des i -ten übereinstimmt.

Notiz. Alle im Folgenden betrachteten Systeme von Endomorphismen werden abzählbar mit einer Indexmenge I sein und in den meisten Fällen nur endlich viele Elemente enthalten. Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass $\dim(\text{hom}(\rho_r, \rho_s \circ \sigma)) > 1$ ist, wodurch der Intertwiner t_e nicht eindeutig gegeben und die Notation t_{si}^r unzureichend wäre. In solchen Fällen ist eine Orthonormalbasis $t_{si, \alpha}^r$ zu wählen und der Multiplizitätsindex α den Kanaldaten hinzuzufügen. Um die Notation jedoch nicht zu überfrachten, soll dieser Index im Folgenden

⁵ Tatsächlich ist der Begriff „Bündel“ hier unangebracht und wohl mehr Relikt der Historie.

weitgehend unterdrückt werden. Weiterhin ist es möglich, für t_{j0}^j und t_{0j}^j die Identität zu wählen. Dies sei für alle folgenden Überlegungen vorausgesetzt.

Gegeben sei ein System von Endomorphismen Δ . Das reduzierte Feldbündel \mathcal{F} operiert als Teilmenge der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\Delta)$ auf dem Hilbertraum...

$$\mathcal{H}_\Delta = \bigoplus_{\rho \in \Delta} \mathcal{H}_\rho .$$

Hierbei ist \mathcal{H}_ρ gleich dem Vakuumhilbertraum \mathcal{H}_0 des Netzes \mathcal{A} , allerdings als Darstellungsraum zu $\pi_0 \circ \rho$. Für ein Element in \mathcal{H}_Δ verwenden wir daher die Notation...

$$\sum_{j \in I} |\rho_j, \psi_j\rangle \quad \text{mit } \psi_j \in \mathcal{H}_0 .$$

Das Skalarprodukt auf \mathcal{H}_0 induziert ein entsprechendes auf \mathcal{H}_Δ durch...

$$\langle \rho_i, \psi_i | \rho_j, \psi_j \rangle_\Delta = \delta_{ij} \langle \psi_i | \psi_j \rangle_0$$

Folglich lassen sich die Elemente von \mathcal{F} als operatorwertige Matrizen realisieren. Genauer besteht ein Element in \mathcal{F} aus einem Superauswahlkanal $e \in \Delta^3$ und einer Observablen $a \in \mathcal{A}$. Es soll durch...

$${}_r(a)_s^i \in \mathcal{F} \quad \text{für } e = (\rho_r, \sigma_i, \rho_s)$$

...notiert werden. \mathcal{F} operiert auf \mathcal{H}_Δ durch...

$${}_r(a)_s^i |\rho_j, \psi\rangle = \delta_{sj} |\rho_r, t_{si}^{r*} \rho_s(a) \psi\rangle . \quad (3.27)$$

In Produkten mehrerer Elemente aus \mathcal{F} sollen die intermediären Sektoren lediglich einmal notiert werden. Dies ist im Sinne des KRONECKER-Deltas nur konsistent. Ausgedrückt durch operatorwertige Matrizen entspricht (3.27)...

$${}_r \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & t_{si}^{r*} \rho_s(a) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vdots \\ \psi_s \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = {}_r \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t_{si}^{r*} \rho_s(a) \psi_s \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

...für eine endliche Indexmenge mit n Elementen. Die Observablenalgebra \mathcal{A} ist in Form von Diagonalmatrizen in \mathcal{F} eingebettet...

$$\vartheta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{F} \quad , \quad a \mapsto \sum_{i \in I} i(a)_i^0 = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_1(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n(a) \end{pmatrix} .$$

Auch die Intertwinerbasis findet sich in \mathcal{F} wieder, denn mit $a = 1$...

$${}_r(B)_s^{i,\alpha} := {}_r(1)_s^{i,\alpha} = {}_r \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & t_{si}^{r*} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Abgeschlossenheit unter der — bisher nur durch Anwendung auf einen Vektor — definierten Multiplikation ist nicht offensichtlich. Im Produkt des reduzierten Feldbündels spiegeln sich die Fusionsregeln der Sektoren wieder. Mit Hilfe der sogenannten *Dualitätsmatrizen* lässt sich daher ein Operator entlang eines Pfades der Länge 2 von ρ_j nach ρ_k in Elemente aus \mathcal{F} zerlegen. Im Sinne dieser *Operatorproduktentwicklung* benötigen wir zunächst...

Definition 3.3.9 Sei $e_1 = (\rho_k, \sigma_m, \rho_s)$, $e_2 = (\rho_s, \sigma_l, \rho_j)$ ein Pfad der Länge 2, dann definiert...

$$D_{ns} \begin{bmatrix} m & l \\ k & j \end{bmatrix} = t_{j,n}^{k*} \rho_j(t_{l,m}^{n*}) t_{j,l}^s t_{s,m}^k : \rho_k \longrightarrow \rho_k \quad (3.28)$$

... die zu (e_1, e_2) gehörige Fusions- oder Dualitätsmatrix.

Satz 3.3.1 Seien ${}_k(a_1)_s^m, {}_s(a_2)_j^l \in \mathcal{F}$, dann gilt die Operatorproduktentwicklung...

$${}_k(a_1)_s^m (a_2)_j^l = \sum_n \left(D_{ns} \begin{bmatrix} m & l \\ k & j \end{bmatrix} \right)^* {}_k(a_{12})_j^n$$

... mit $a_{12} = t_{l,m}^{n*} \sigma_l(a_1) a_2$. Diese lässt sich umkehren zur Operatorproduktzerlegung...

$$\sum_s D_{ns} \begin{bmatrix} m & l \\ k & j \end{bmatrix} {}_k(a_1)_s^m (a_2)_j^l = {}_k(a_{12})_j^n$$

... mit a_{12} wie oben.

Beweis

... in beiden Fällen durch Anwenden beider Seiten auf einen Vektor $|\rho_j, \psi\rangle \in \mathcal{H}_\Delta$ und Ausnutzen der Intertwinereigenschaften. \square

Korollar 3.3.1 Sei ${}_k(a_1)_s^m \in \mathcal{F}$ und $a_2 \in \mathcal{A}$. Die Einbettung der Observablenalgebra ϑ besitzt aufgrund der Wahl der Intertwinerbasen die Bimodul-Eigenschaft...

$${}_k(a_1)_s^m \vartheta(a_2) = {}_k(a_1 a_2)_s^m, \quad \vartheta(a_2) {}_k(a_1)_s^m = {}_k(\sigma_m(a_2) a_1)_s^m. \quad (3.29)$$

Beweis

Es gilt...

$$D_{ns} \begin{bmatrix} m & 0 \\ k & s \end{bmatrix} = D_{nk} \begin{bmatrix} 0 & m \\ k & s \end{bmatrix} = \delta_{n,m} 1.$$

Die Behauptung folgt durch Auswerten von a_{12} . \square

Tatsächlich lassen sich jetzt insbesondere die Operatoren ${}_k(B)_s^m$ in „kleinere“ Bestandteile zerlegen. Für den nächsten Satz gehen wir in diesem Sinne davon aus, dass ein Intertwiner...

$$t : \sigma_n \longrightarrow \sigma_{n-m} \circ \sigma_m$$

... existiert, wie es zum Beispiel bei den Fusionsregeln der VIRASORO-Algebra der Fall ist. Der Satz lässt sich natürlich auch allgemein formulieren, indem $n - m$ an entsprechender Stelle einfach ersetzt wird. Somit...

Korollar 3.3.2 Insbesondere gilt mit $a_1 = a_2 = 1$ für die Intertwiner in \mathcal{F} ...

$$\sum_s D_{ns} \begin{bmatrix} m & n-m \\ k & j \end{bmatrix} {}_k(B)_s^m (B)_j^{n-m} \vartheta(t_{n-m,m}^n) = {}_k(B)_j^n. \quad (3.30)$$

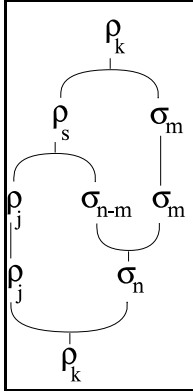


Fig. 3.5: D-Matrix

Um den Sinn dieser Zerlegung zu verstehen, sei Δ zum Beispiel ein System von Endomorphismen des VIRASORO-Netzes, welches vollständig durch den Generator $\sigma_{0,1}$ aufgespannt wird. Somit ist nur ein Ladungsindex entscheidend. Die Identität (3.30) zeigt nun, dass bis auf einen gemeinsamen Intertwiner Felder der Ladung n mit Quelle j und Ziel k als Linearkombinationen von Operatoren entlang aller möglichen Pfade der Ladung $\sigma_{0,1}$ entstehen. Diese Strangformulierung wird in Kapitel 7 eine entscheidende Rolle spielen.

Weiterhin zeigt ein Blick auf (3.27), dass die eingebetteten Observablen $\vartheta(\mathcal{A})$ zusammen mit den Intertwinern $r(B)_s^{i,\alpha}$ genügen, um ganz \mathcal{F} aufzuspinnen.

Tatsächlich existiert auf der Algebra \mathcal{F} auch eine involutive $*$ -Operation, durch die diese sogar zu einer C^* -Algebra wird. Hierzu lässt sich zunächst eine Konjugation auf den Superauswahlkanälen definieren — durch Austauschen von Quelle und Ziel und Konjugation der Ladung. Aus den zu $(\bar{e}, \bar{\rho}(a^*)r)$ mit $r : \text{id} \rightarrow \bar{\rho} \circ \rho$ gehörigen Operatoren ist es möglich, den zu (e, a) adjungierten Operator in \mathcal{F} zu konstruieren. Im Folgenden werden wir die Adjunktion im reduzierten Bündel nicht benötigen, daher sei für die Details auf [19, 20] verwiesen.

Bisher wurde bewusst auf die Definition der *lokalen Feldalgebren* $\mathcal{F}(I)$ verzichtet. Ein angemessener Ersatz für die Forderung nach Lokalität, die aus den oben erwähnten Gründen nicht tragbar ist, scheint die Forderung, dass Felder in $\mathcal{F}(I)$ mit *Observablen* in $\mathcal{A}(I')$ kommutieren sollen. Wir erheben dies zur Definition. . .

Definition 3.3.10 Ein Element $r(a)_s^i \in \mathcal{F}$ heißt lokalisiert in $I \in \mathcal{I}$, falls es mit den eingebetteten lokalen Observablen. . .

$$\vartheta(\mathcal{A}(I')) = \bigvee_{J \in \mathcal{I}, J \subset I'} \vartheta(\mathcal{A}(J))$$

. . . kommutiert. Ferner sei. . .

$$\mathcal{F}(I) := \left\{ r(a)_s^i \in \mathcal{F} \mid r(a)_s^i \text{ lokalisiert in } I \right\} .$$

Dass diese Definition nicht so unhandlich ist, wie es auf den ersten Blick scheint, zeigt. . .

Satz 3.3.2 $r(a)_s^i \in \mathcal{F}(I)$ genau dann, wenn ein unitärer Intertwiner $u : \sigma_i \rightarrow \hat{\sigma}_i$ existiert, so dass $\hat{\sigma}_i$ in I lokalisiert ist und $u a \in \mathcal{A}(I)$.

Beweis

Sei $a' \in \mathcal{A}(I')$. Dann gilt mit (3.29):

$$r(a)_s^i \vartheta(a') = r(a a')_s^i \quad , \quad \vartheta(a') r(a)_s^i = r(\sigma_i(a') a)_s^i .$$

Somit. . .

$$r(a)_s^i \in \mathcal{F}(I) \quad \Leftrightarrow \quad a a' = \sigma_i(a') a \quad \forall a' \in \mathcal{A}(I') . \tag{3.31}$$

Ausgehend von der Existenz von u ergibt sich aus $\text{Ad}_{u*} \circ \hat{\sigma}_i = \sigma_i$ die Behauptung.

Sei andererseits (3.31) vorausgesetzt, dann existiert aufgrund der Transportabilität von σ_i ein Intertwiner $u : \sigma_i \longrightarrow \widehat{\sigma}_i$ in der gewünschten Weise. Folglich...

$$\begin{aligned} a a' &= \sigma_i(a') a = (\text{Ad}_{u^*} \circ \widehat{\sigma}_i)(a') a = \text{Ad}_{u^*}(a') a \quad \Leftrightarrow \quad u a a' = a' u a \\ \Rightarrow \quad u a &\in \mathcal{A}(I')' = \mathcal{A}(I) . \end{aligned}$$

□

Kommutatorrelationen geladener Felder bei raumartigen Abständen lassen sich jetzt auf die bereits häufig erwähnten R -Matrizen zurückführen.

Definition 3.3.11 Seien $e_2 = (\rho_i, \sigma_k, \rho_n)$, $e_1 = (\rho_n, \sigma_l, \rho_j)$ und $e_4 = (\rho_i, \sigma_l, \rho_m)$, $e_3 = (\rho_m, \sigma_k, \rho_j)$ zwei Pfade der Länge 2. Dann definiert...

$$\left(R \begin{matrix} (ij) \\ (kl) \end{matrix} \right)_{mn} = t_{ml}^{i^*} t_{jk}^{m^*} \rho_j(\varepsilon(\sigma_l, \sigma_k)) t_{jl}^n t_{nk}^i$$

... die zu (e_1, \dots, e_4) gehörige R -Matrix, die als Intertwiner $\rho_k \longrightarrow \rho_k$ tatsächlich ein Vielfaches der 1 ist. R -Matrizen sind folglich \mathbb{C} -wertig.

Satz 3.3.3 Seien ${}_i(a_1)_n^k \in \mathcal{F}(I_1)$, ${}_n(a_2)_j^l \in \mathcal{F}(I_2)$ mit $I_1 < I_2$ zwei raumartig lokalisierte Elemente des reduzierten Feldbündels, dann gilt:

$$\sum_n \left(R \begin{matrix} (ij) \\ (kl) \end{matrix} \right)_{mn} {}_i(a_1)_n^k (a_2)_j^l = {}_i(a_2)_m^l (a_1)_j^k . \quad (3.32)$$

Beweis

Die linke Seite auf einem Vektor $|\rho_j, \psi\rangle \in \mathcal{H}_\Delta$ ausgewertet, liefert:

$$\begin{aligned} & \sum_n \left(R \begin{matrix} (ij) \\ (kl) \end{matrix} \right)_{mn} {}_i(a_1)_n^k (a_2)_j^l |\rho_j, \psi\rangle \\ &= \sum_n |\rho_i, t_{ml}^{i^*} t_{jk}^{m^*} \rho_j(\varepsilon(\sigma_l, \sigma_k)) t_{jl}^n t_{nk}^i t_{nk}^{i^*} \rho_n(a_1) t_{jl}^{n^*} \rho_j(a_2) \psi\rangle \\ &= |\rho_i, t_{ml}^{i^*} t_{jk}^{m^*} \rho_j(\varepsilon(\sigma_l, \sigma_k)) \sigma_l(a_1) a_2 \psi\rangle \end{aligned}$$

Aufgrund der Lokalisierung der Feldelemente existieren nun Intertwiner $u : \sigma_l \longrightarrow \widehat{\sigma}_l$ und $v : \sigma_k \longrightarrow \widehat{\sigma}_k$, so dass $v a_1 \in \mathcal{A}(I_1)$ und $u a_2 \in \mathcal{A}(I_2)$.

$$\begin{aligned} & |\rho_i, t_{ml}^{i^*} t_{jk}^{m^*} \rho_j(\varepsilon(\sigma_l, \sigma_k)) \sigma_l(v^*) \sigma_l(v a_1) u^* u a_2 \psi\rangle \\ &= |\rho_i, t_{ml}^{i^*} t_{jk}^{m^*} \rho_j(\varepsilon(\sigma_l, \sigma_k)) \sigma_l(v^*) u^* \widehat{\sigma}_k(u a_2) v a_1 \psi\rangle \\ &= |\rho_i, t_{ml}^{i^*} t_{jk}^{m^*} \rho_j(\sigma_k(a_2) a_1) \psi\rangle \\ &= |\rho_i, t_{ml}^{i^*} \rho_m(a_2) t_{jk}^{m^*} \rho_j(a_1) \psi\rangle = {}_i(a_2)_m^l (a_1)_j^k |\rho_j, \psi\rangle , \end{aligned}$$

... wobei hier (3.8) und (3.11) zum Einsatz kamen. □

Diese *Austauschalgebra* geladener Felder respektiert die Sektorstruktur und ist damit der angemessene Ersatz für die Lokalität der Observablenalgebra. Inversion der Gleichung (3.32) zeigt, dass für $I_1 > I_2$ die Matrix $\left(R_{(kl)}^{(ij)}\right)^{-1}$ die Vertauschung vermittelt. Die ausführliche graphische Darstellung der in Gleichung (3.32) auftretenden R -Matrix findet sich in Abbildung 3.6.

Konsistenterweise muss die Vertauschung zweier Felder dasselbe Resultat liefern wie die Zerlegung des einen und die anschließende Vertauschung mit beiden entstandenen Teilen. Diese Kompatibilität der *Austauschalgebra* mit der bereits definierten *Operatorproduktzerlegung* drückt sich durch entsprechende Beziehungen zwischen den Dualitäts- und den R -Matrizen aus — die *Braiding-Fusion-Relationen* (auch *Pentagon-Identitäten* genannt). Davon ausgehend, dass die Fusionsregeln einen Generator σ_1 besitzen, so dass...

$$\sigma_n \prec \sigma_{n-1} \circ \sigma_1$$

...gilt, ergibt sich der folgende Satz, der Ausgangspunkt für die explizite, induktive Bestimmung der R -Matrizen in Kapitel 7 sein wird.

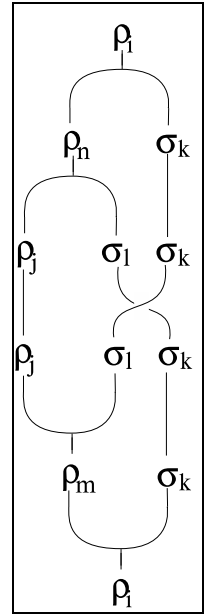


Fig. 3.6: R -Matrix

Satz 3.3.4 Falls Intertwiner $v : \sigma_k \rightarrow \sigma_{k-1} \circ \sigma_1$ bzw. $w : \sigma_l \rightarrow \sigma_{l-1} \circ \sigma_1$ existieren, gilt:

$$\begin{aligned} \left(R_{(kl)}^{(ij)}\right)_{mn} &= \sum_{s,t} \left(D_{sk} \begin{bmatrix} 1 & k-1 \\ i & n \end{bmatrix}\right)^* \left(R_{(k-1,l)}^{(s,j)}\right)_{tn} \left(R_{(1,l)}^{(i,t)}\right)_{ms} D_{kt} \begin{bmatrix} 1 & k-1 \\ m & j \end{bmatrix}, \\ \left(R_{(kl)}^{(ij)}\right)_{mn} &= \sum_{s,t} \left(D_{sl} \begin{bmatrix} 1 & l-1 \\ n & j \end{bmatrix}\right)^* \left(R_{(k,1)}^{(i,s)}\right)_{tn} \left(R_{(k,l-1)}^{(t,j)}\right)_{ms} D_{lt} \begin{bmatrix} 1 & l-1 \\ i & m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis

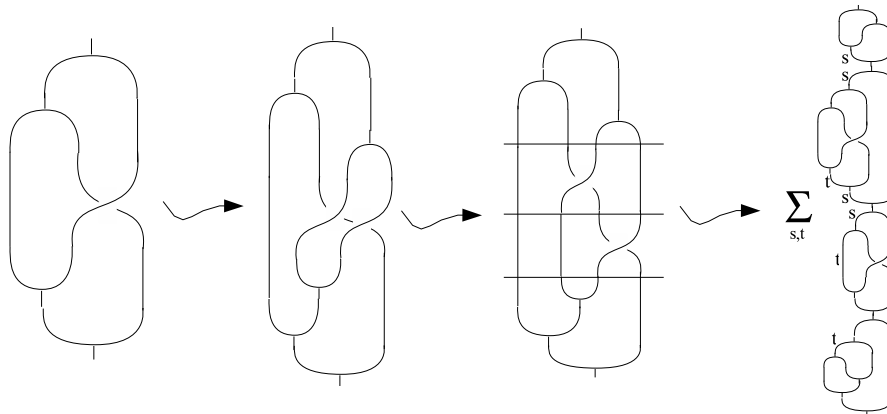


Fig. 3.7: Zum Beweis der Fusion-Braiding-Relationen.

Ausgehend von einer R -Matrix ist zunächst der zu σ_l , bzw. σ_k gehörige Strang mittels der Intertwiner w , bzw. v aufzuteilen. Dies ist in der in Abbildung 3.7 gezeigten Weise möglich aufgrund der Eigenschaft (3.8) des Braiding-Operators. Die Multiplikativität (3.9) erklärt den

nächsten Schritt. Anschließendes Einfügen entsprechender Einsen aus Intertwinerbasen an den markierten Stellen schließt den Beweis ab. Hierbei sind lediglich zwei Summationsindizes von Nöten, da alle übrigen Stränge durch die Irreduzibilität der beteiligten Morphismen bereits festgelegt sind. \square

3.3.3 Zweite Kohomologie einer Tensorategorie

Wie der Rekonstruktionssatz 3.2.8 zeigt, reduziert sich die Klassifizierung sämtlicher nichtlokaler, chiraler Erweiterungen eines lokalen, konformen Netzes \mathcal{A} auf das Problem der Bestimmung aller möglichen (dualen) Q-Systeme (ρ, w, x) . Falls ein solches Q-System existiert, dann lässt sich gleich eine ganze Äquivalenzklasse daraus konstruieren, denn mit einem unitären Intertwiner $u : \rho \rightarrow \rho$ erfüllt auch $(\rho, uw, u\rho(u)xu^*)$ die Bedingungen (3.20) und (3.21). IZUMI und KOSAKI bewiesen in [35] jedoch, dass dieses System nur eine unitär äquivalente chirale Erweiterung rekonstruiert.

Sei der kanonische Endomorphismus ρ fixiert, so stellt sich natürlich nun die Frage, ob es Intertwiner w_i, x_i ($i \in \{1, 2\}$) gibt, so dass (ρ, w_1, x_1) und (ρ, w_2, x_2) *inäquivalent* sind. In seiner Art erinnert dieses Problem an eine entsprechende Klassifizierung zentraler Erweiterungen einer Gruppe G . Das Resultat in diesem Fall brachte eine 1 : 1-Korrespondenz zwischen den entsprechenden Isomorphieklassen und Elementen der Gruppe $H^2(G, A)$ für die erweiternde abelsche Gruppe A . KAWAHIGASHI und LONGO griffen diese Idee auf und entwickelten eine verallgemeinerte zweite Kohomologie für die C^* -Tensorategorie $\text{End}(\mathcal{A})$, deren Trivialität gleichbedeutend ist mit der Äquivalenz aller Q-Systeme bei fixiertem kanonischen Endomorphismus.

Definition 3.3.12 Sei $\Delta \subset \text{End}(\mathcal{A})$ ein System von Endomorphismen, dann heißt eine Familie von unitären Intertwinern $c_{\lambda, \mu} \in \text{hom}(\lambda\mu, \lambda\mu)$ mit $\lambda, \mu \in \Delta$ unitärer 2-Kozykel, falls gilt. . .

(i) Für alle $\lambda \in \Delta$ ist $c_{\lambda, \text{id}} = 1_\lambda = c_{\text{id}, \lambda}$.

(ii) Für $\lambda, \mu, \nu \in \Delta$ gilt:

$$\bigoplus_{\sigma \in \Delta} c_{\lambda, \mu}^\sigma \otimes c_{\sigma, \nu}^\pi = \bigoplus_{\tau \in \Delta} c_{\lambda, \tau}^\pi \otimes c_{\mu, \nu}^\tau . \quad (3.33)$$

Hierbei bezeichne $c_{\lambda, \mu}^\pi \in \text{End}(\text{hom}(\pi, \lambda\mu))$ den Operator, den $c_{\lambda, \mu}$ durch Linksmultiplikation auf $\text{hom}(\pi, \lambda\mu)$ induziert.

Notiz. Aufgrund der Zerlegungen. . .

$$\begin{aligned} \text{hom}(\pi, \lambda\mu\nu) &\simeq \bigoplus_{\tau \in \Delta} \text{hom}(\pi, \lambda\tau) \otimes \text{hom}(\tau, \mu\nu) \\ &\simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta} \text{hom}(\sigma, \lambda\mu) \otimes \text{hom}(\pi, \sigma\nu) \end{aligned}$$

. . . ist (3.33) als Identität in $\text{End}(\text{hom}(\pi, \lambda\mu\nu))$ aufzufassen. Das dort auftauchende Tensorprodukt ist nicht mit dem der Kategorie $\text{End}(\mathcal{A})$ zu verwechseln!

Beispiel 3.3.10 Sei $\text{End}(\mathcal{A})$ eine Tensorkategorie, deren Objekte sämtlich Automorphismen sind, dann gilt nicht nur $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ für die Konjugation, vielmehr sind auch alle Morphismenräume eindimensional (oder 0) und die Fusionsregeln gehen in eine Gruppenmultiplikation über. Die Kategorie beschreibt eine endliche (da \mathcal{A} rational) Gruppe mit den Elementen $[\lambda]$. Die unitären Intertwiner $c_{\lambda,\mu}$ induzieren eine Abbildung...

$$c : G \times G \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$$

...die aufgrund (3.33) die Kozykelbedingung...

$$c(\lambda, \mu) \cdot c(\lambda\mu, \nu) = c(\lambda, \mu\nu) \cdot c(\mu, \nu)$$

...erfüllt, folglich gilt $c \in \text{Zykel}(G, S^1)$.

Beispiel 3.3.11 Sei \mathcal{C} eine strikte C^* -Tensorkategorie mit direkter Summe, Unterobjekten und Konjugation. Der oben eingeführte Begriff für 2-Kozykel lässt sich nahtlos auf diese allgemeinere Situation erweitern. Sei ferner Φ ein Automorphismus von \mathcal{C} , verträglich mit Komposition, direkter Summe und Tensorprodukt, der die Objekte (bis auf unitäre Äquivalenz) fixiert. Φ liefert nun insbesondere Automorphismen...

$$\Phi_{\lambda,\mu}^\nu \in \text{Aut}(\text{hom}(\nu, \lambda\mu)) .$$

Aufgrund der Zerlegung...

$$\text{hom}(\lambda\mu, \lambda\mu) \simeq \bigoplus_{\nu \in \Delta} \text{hom}(\nu, \lambda\mu) \otimes \text{hom}(\lambda\mu, \nu)$$

...induziert jede Familie $(\Phi_{\lambda,\mu}^\nu)_{\nu \in \Delta}$ nun einen unitären Intertwiner in $\text{hom}(\lambda\mu, \lambda\mu)$ der Form...

$$c_{\lambda,\mu} = \sum_{\nu \in \Delta} \Phi_{\lambda,\mu}^\nu(t_{\lambda\mu}^\nu) \circ t_{\lambda\mu}^{\nu*} \quad \text{mit} \quad \sum_{\nu \in \Delta} t_{\lambda\mu}^\nu \circ t_{\lambda\mu}^{\nu*} = 1_{\lambda\mu} .$$

Die Familie $c_{\lambda,\mu}$ bildet aufgrund der Verträglichkeit mit Komposition und Summenbildung einen 2-Kozykel. Analog induziert jeder 2-Kozykel einen entsprechenden Automorphismus der Tensorkategorie. Es besteht demnach eine 1 : 1-Korrespondenz zwischen objektfixierenden Automorphismen und 2-Kozykeln.

Zur vollständigen Definition der zweiten Kohomologie, die ja durch Kozykel modulo Koränder gegeben sein sollte, ist nun also noch ein entsprechender Äquivalenzbegriff auf den Zykeln einzuführen.

Definition 3.3.13 Seien $c_{\lambda,\mu}$ und $c'_{\lambda,\mu}$ unitäre 2-Kozykel, dann heißen diese äquivalent, falls eine Familie $\omega_\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ von Phasenfaktoren existiert, so dass...

$$c'_{\lambda,\mu} = \frac{\omega_\nu}{\omega_\lambda \omega_\mu} c_{\lambda,\mu}^\nu \in \text{End}(\text{hom}(\nu, \lambda\mu)) .$$

Ein 2-Kozykel heißt trivial, falls er äquivalent zu $1_{\lambda,\mu}$ ist.

Definition 3.3.14 Die komponentenweise Multiplikation zweier Kozykel ist möglich und stört weder deren definierende Eigenschaften, noch die Äquivalenzrelation. Weiter ist mit $c_{\lambda,\mu}$ auch $c_{\lambda,\mu}^*$ ein Kozykel, der aufgrund der Unitarität der Intertwiner gerade invers zum Ausgangszykel ist. Die so gewonnene Gruppe soll zweite Kohomologiegruppe der Tensor-kategorie heißen.

Beispiel 3.3.12 Für den Fall einer Automorphismenkategorie wie oben geht dieser Äquivalenzbegriff über in die aus der Gruppenkohomologie bekannte Definition, daher stimmt die zweite Kohomologiegruppe in diesem Fall tatsächlich mit $H^2(G, S^1)$ überein. Dies rechtfertigt nicht nur deren Definition, sondern beweist ebenso, dass Tensor-kategorien mit nichttrivialer zweiter Kohomologie existieren.

Eine große Klasse an Modellen weist nun dennoch eine triviale zweite Kohomologiegruppe auf, wie in [41] anhand des folgenden Satzes gezeigt wurde. . .

Satz 3.3.5 Sei $\Delta \subset \text{End}(\mathcal{A})$ ein System irreduzibler Endomorphismen mit einem selbstkonjugierten Generator $\sigma_1 \in \Delta$. Falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind. . .

- (i) $\langle \lambda \mid \mu \circ \sigma_1 \rangle \in \{0, 1\}$
- (ii) Entweder gilt $\sigma_1 \prec \sigma_1^2$ oder Δ besitzt eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung, in der σ_1 ungerade ist.
- (iii) Ist $\langle \lambda_4 \mid \sigma_1 \circ \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_2 \mid \lambda_1 \circ \sigma_1 \rangle = \langle \lambda_3 \mid \sigma_1 \circ \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_4 \mid \lambda_3 \circ \sigma_1 \rangle = 1$ mit $\lambda_i \in \Delta$, dann sind auch die Einträge der zugehörigen Dualitätsmatrix⁶ . . .

$$D_{\lambda_2 \lambda_3} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \lambda_1 \\ \lambda_4 & \sigma_1 \end{bmatrix} : \lambda_4 \longrightarrow \lambda_4$$

. . . ungleich 0.

- (iv) Für $\lambda, \nu_1, \nu_2 \in \Delta$ mit $\nu_i \prec \sigma_1^n$, $\lambda \prec \sigma_1 \circ \nu_i$ existiert $\mu \in \Delta$, $\mu \prec \sigma_1^{n-1}$ mit $\nu_i \prec \sigma_1 \circ \mu$.

. . . dann ist die zweite Kohomologiegruppe der Tensor-kategorie End_Δ trivial.

Beweis

. . . siehe Satz 5.1 in [41]. □

Korollar 3.3.3 Ist $\mathcal{A} = \text{Vir}_c$ ein VIRASORO-Netz mit $c < 1$, dann ist die zweite Kohomologiegruppe der zugehörigen Tensor-kategorie $\text{End}(\mathcal{A})$ trivial. Ebenso besitzen die geraden Unterkategorien, die durch $\sigma_{0,2}$, $\sigma_{2,0}$, bzw. $\sigma_{2,2}$ aufgespannt werden, triviale Kohomologie.

Beweis

Anhand der Fusionsregeln (3.14) sind die Bedingungen (i) und (ii) leicht zu verifizieren, ebenso (iv). (iii) lässt sich zurückführen auf bekannte Zusammenhänge eines Tensorproduktes zweier Schleifengruppen $SU(2)_{n-1} \otimes SU(2)_{n-2}$, die in den entsprechenden Fällen ungleich 0 sind (Details siehe Satz 5.3, Punkt 3(a) in [41]). □

All dies wäre zwar interessant, aber für diese Arbeit bedeutungslos ohne das folgende. . .

⁶ Die hierzu konjugierte Matrix tritt unter dem Namen *Zusammenhang* in der Subfaktortheorie auf.

Korollar 3.3.4 *Ist $\mathcal{A} = \text{Vir}_c$ ein VIRASORO-Netz mit $c < 1$, dann ist ein Q-System (ρ, w, x) in $\text{End}(\mathcal{A})$ bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig durch den (dualen) kanonischen Endomorphismus bestimmt.*

Beweis

(skizziert). Seien $(\rho, w_i, x_i), i \in \{1, 2\}$ zwei Q-Systeme in $\text{End}(\mathcal{A})$, dann rekonstruieren diese zwei chirale Erweiterungen $\iota_i(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}_i$ mit $\bar{\tau}_i \iota_i = \rho$. Sei I ein Intervall, in dem ρ lokalisiert ist, $M_i = \mathcal{B}_i(I)$ und $N = \mathcal{A}(I)$, dann lässt sich durch Betrachtung der höheren relativen Kommutanten...

$$\begin{aligned} \mathbb{C}1 &= (M'_i \cap M_i) \subset (\iota_i(N)' \cap M_i) \subset (\iota_i \bar{\tau}_i(M_i)' \cap M_i) \subset (\iota_i \bar{\tau}_i \iota_i(N)' \cap M_i) \subset \dots \\ \mathbb{C}1 &= (N' \cap N) \subset (\bar{\tau}_i(M_i)' \cap N) \subset (\bar{\tau}_i \iota_i(N)' \cap N) \subset (\bar{\tau}_i \iota_i \bar{\tau}_i(M_i)' \cap N) \subset \dots \end{aligned}$$

... zeigen, dass $\iota_1(N) \subset M_1$ und $\iota_2(N) \subset M_2$ isomorph sind vermöge eines Automorphismus $\theta \in N$ (siehe [56], Korollar 6.4). Das bedeutet insbesondere $\bar{\tau}_2 = \theta \circ \bar{\tau}_1$, folglich $\theta(x_1) = x_2$, ebenso $\theta(w_1) = w_2$ und $\theta \circ \rho \circ \theta^{-1} = \rho$.

θ induziert einen objektfixierenden Automorphismus der Tensorkategorie End_ρ , die von Potenzen von ρ aufgespannt wird. Letztere ist nun eine der geraden Unterkategorien von $\text{End}(\mathcal{A})$, deren zweite Kohomologie verschwindet. Aufgrund der erwähnten 1 : 1-Korrespondenz zwischen Kozykeln und Automorphismen operiert θ auf den Räumen $\text{hom}(\mu_1 \dots \mu_m, \nu_1 \dots \nu_n)$ durch Multiplikation mit $\omega_{\mu_1} \dots \omega_{\mu_m} / \omega_{\nu_1} \dots \omega_{\nu_n}$ für alle $\mu_i, \nu_j \in \text{End}_\rho$ irreduzibel. Eine Zerlegung der Intertwiner bezüglich entsprechender Basen zeigt nun die unitäre Äquivalenz der beiden Q-Systeme (ρ, w_i, x_i) . \square

3.4 Konstruktion geladener Felder

Dieses Kapitel wird zeigen, inwiefern das Netz einer chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ Operatoren enthält, die sich als geladene Felder interpretieren lassen. Ein wichtiges Ergebnis ist die Erkenntnis, dass sich jeder Operator in \mathcal{B} in eine Summe zerlegen lässt, deren Summanden jeweils Produkte aus einem Observablen- und einem geladenen Anteil sind — ganz im Sinne einer verallgemeinerten harmonischen Analyse.

Ferner schlagen wir den Bogen zurück zur konformen Quantenfeldtheorie auf dem Halbraum (siehe Kapitel 1.3). Hier wird sich eine algebraische Variante zu CARDYs Beobachtung ergeben, die zeigt, dass das induzierte lokale, konforme Netz $\mathcal{B}_+^{\text{ind}}$ ausschließlich Sektoren enthält, die aus Kompositionen je zweier Ladungssektoren auf dem Randnetz entstehen.

Sowohl das Randnetz \mathcal{B} als auch die induzierte Theorie $\mathcal{B}_+^{\text{ind}}$ lassen sich in das reduzierte Feldbündel einbetten. Lokale Felder in der induzierten Theorie ergeben sich als Linearkombinationen eben *der* Operatoren, die a priori lediglich Zopfgruppenstatistik erfüllen. Es grenzt an ein Wunder, dass sich diese so kombinieren lassen, dass dabei tatsächlich lokale Felder möglich werden — entpuppt sich aber natürlich als Ergebnis des abstrakten Kalküls, der bis hierhin entwickelt wurde.

Sei ρ der (duale) kanonische Endomorphismus einer chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ von endlichem Index, ferner v der durch das zugehörige Q -System induzierte Intertwiner $v : \text{id} \rightarrow \gamma$ in \mathcal{B} . Dann zeigt das folgende Lemma, dass sich Intertwiner in \mathcal{A} in kanonischer Weise zu ebensolchen auf \mathcal{B} liften lassen.

Lemma 3.4.1 *Sei $\sigma_i \prec \rho$ ein irreduzibler Subsektor von ρ , $w_i : \sigma_i \rightarrow \rho$ der zugehörige Intertwiner in \mathcal{A} , dann existiert ein antilinearere Isomorphismus...*

$$\begin{aligned} \Psi : \bigoplus_i \text{hom}(\sigma_i, \rho) \simeq \text{hom}(\rho, \rho) &\longrightarrow \bigoplus_i \text{hom}(\iota, \iota \circ \sigma_i) \simeq \text{hom}(\iota, \iota \circ \rho) \\ w_i &\mapsto \psi_i = \iota(w_i^*) v \quad \text{mit } \Psi^{-1}(\psi_i) = d_\rho \epsilon(v \psi_i^*) . \end{aligned}$$

Hierbei ist $\epsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ die aus dem Q -System rekonstruierte bedingte Erwartung des Netzes.

Beweis

... durch explizite Rechnung ($\epsilon(v v^*) = d_\rho^{-1}$, $\epsilon(v b v^*) = \tau(b)$). □

Definition 3.4.1 *Sei σ ein lokalisierter Endomorphismus des Netzes \mathcal{A} , das Teil einer chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ ist. Dann heißt ein Intertwiner $\psi : \iota \rightarrow \iota \circ \sigma$ in \mathcal{B} geladener Intertwiner.*

Geladene Intertwiner interpolieren zwischen der Vakuumdarstellung $\pi^0 \circ \iota$ des Netzes \mathcal{A} auf \mathcal{H}_B und dem (geladenen) Sektor $\pi^0 \circ \iota \circ \sigma$. Für...

$$\mathcal{H}_B = \bigoplus_i \mathcal{H}_{\rho_i} \quad \text{mit } \rho_i \prec \rho \text{ irreduzibel}$$

...lässt sich π^0 nach Satz 3.2.5 als operatorwertige Matrixdarstellung mit...

$$\pi^0 \circ \iota(a) = \begin{pmatrix} \pi_0(a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_0 \circ \rho_1(a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_0 \circ \rho_n(a) \end{pmatrix}$$

...realisieren. Geladene Intertwiner treten jetzt in Form von Matrizen auf, deren Einträge Intertwinerbasen (aus \mathcal{A}) der Form $t_{ik}^j : \rho_j \longrightarrow \rho_i \circ \sigma_k$ (in der i -ten Zeile, j -ten Spalte) sind. Das Interpolationsverhalten dieser Operatoren rechtfertigt es, sie als die geladenen Felder der chiralen Theorie zu interpretieren.

Den Isomorphismus Ψ betrachtend ist festzustellen, dass der Intertwiner v die folgende Zerlegung besitzt:

$$v = \sum_{s,\alpha} \iota(w_{s,\alpha}) \psi_{s,\alpha} .$$

Hierbei läuft die Summe in s über alle inäquivalenten Submorphisimen von ρ , während α ein entsprechender Multiplizitätsindex ist. Wie oben bezeichnet $\psi_s = \Psi(w_s)$ das Bild der Intertwiner in \mathcal{A} . Hierdurch lässt sich die Zerlegung (3.18) weiter verfeinern zu...

$$b = d_\rho (\iota \circ \epsilon)(b v^*) v = d_\rho \sum_{s,\alpha} \underbrace{(\iota \circ \epsilon)(b \psi_{s,\alpha}^*)}_{\in \iota(\mathcal{A})} \psi_{s,\alpha} \quad \text{für } b \in \mathcal{B} . \quad (3.34)$$

Folglich werden im Falle endlichen Index der chiralen Erweiterung die lokalen Algebren $\mathcal{B}(I)$ von $\mathcal{A}(I)$ und endlich vielen geladenen Intertwinern aufgespannt. Im Sinne der bekannten Dualitätstheoreme für Gruppen, zum Beispiel der PONTRJAGIN-Dualität für abelsche oder der TANNAKA-Dualität für kompakte Gruppen, ist auch dies eine Zerlegung bezüglich irreduzibler Darstellungen — eine verallgemeinerte harmonische Analyse mit observablen Koeffizienten.

Natürlich gilt (3.34) auch für die geladenen Intertwiner selbst und liefert nach Einfügen einer 1 die *Operatorproduktentwicklung* zweier geladener Felder...

$$\psi_{s,\alpha} \psi_{r,\beta} = \sum_{u,\gamma,\delta} (\Gamma_{us}^r)_{\alpha\dots\delta} \iota(t_{sr,\delta}^u) \psi_{u,\gamma} \quad \text{mit } (\Gamma_{us}^r)_{\alpha\dots\delta} 1 = d_\rho t_{sr,\delta}^{u*} \epsilon(\psi_{s,\alpha} \psi_{r,\beta} \psi_{u,\gamma}^*) : \sigma_u \longrightarrow \sigma_u .$$

...mit einer orthonormalen Intertwinerbasis $t_{sr,\delta}^u : \rho_u \longrightarrow \rho_s \circ \rho_r$. Somit genügen die Strukturkonstanten Γ_{us}^r für die vollständige Kenntnis der chiralen Erweiterung. Mit $x = \bar{\tau}(v) = d_\rho \epsilon(vv^*)$ reduziert sich auch diese Frage auf ein Zerlegungsproblem in \mathcal{A} , denn...

$$x = \sum_{\substack{s,r,u \\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (\Gamma_{us}^r)_{\alpha\dots\delta} w_{s,\alpha} \rho_s(w_{r,\beta}) t_{sr,\delta}^u w_{u,\gamma}^* . \quad (3.35)$$

Sei nun U der Operator aus Satz 3.2.5, der die unitäre Äquivalenz zwischen π^0 und $\pi_0 \circ \bar{\tau}$ vermittelt. Insbesondere gilt für diesen $U^* \pi_0(x) U = U^* \pi_0 \circ \bar{\tau}(v) U = \pi^0(v)$. Folglich (ohne die Vakuumdarstellungen zu notieren)...

$$v^* = U^* x^* U = \sum_{\substack{s,r,u \\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (\Gamma_{us}^r)^*_{\alpha\dots\delta} (U^* w_{u,\gamma}) t_{sr,\delta}^{u*} (U^* w_{s,\alpha})^* (U^* \rho(w_{r,\beta}^*) U) .$$

Nun liften wir den Operator $(U^* w_{u,\gamma}) t_{sr,\delta}^{u*} (U^* w_{s,\alpha})^*$ ins reduzierte Feldbündel...

$$(U^* w_{u,\gamma}) t_{sr,\delta}^{u*} (U^* w_{s,\alpha})^* = E_{u,\gamma} u(B)_s^{r,\delta} E_{s,\alpha}^* .$$

Die Isometrien $E_p : \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_\Delta$ bilden den Sektor $\mathcal{H}_{\rho_p} \subset \mathcal{H}_B$ identisch auf sein Pendant in \mathcal{H}_Δ ab. Δ ist hierbei das System irreduzibler Endomorphismen, das $\text{End}(\mathcal{A})$ aufspannt. Die Ersetzung ist möglich, da ...

$$(U^* w_{s,\alpha})^* : \pi^0 \circ \iota \longrightarrow \pi_0 \circ \rho \longrightarrow \pi_0 \circ \rho_s$$

... aus der Darstellung der Observablenalgebra auf \mathcal{H}_B gerade $\pi_0 \circ \rho_s$ herausfiltert. Die Erweiterung auf das reduzierte Feldbündel entspricht damit der Fortsetzung des obigen Operators durch 0 auf dem orthogonalen Komplement in \mathcal{H}_Δ . Insgesamt...

$$v^* = \sum_{\substack{s,r,u \\ \alpha,\beta,\gamma,\delta}} (\Gamma_{us}^r)_{\alpha\dots\delta}^* E_{u,\gamma} u(B)_s^{r,\delta} E_{s,\alpha}^* \iota(w_{r,\beta}^*) .$$

Insbesondere ergibt sich hieraus für den (adjungierten) geladenen Intertwiner $\psi_{r,\beta}^* : \iota \circ \sigma_r \rightarrow \iota \dots$

$$\psi_{r,\beta}^* = v^* \iota(w_{r,\beta}) = \sum_{\substack{s,u \\ \alpha,\gamma,\delta}} (\Gamma_{us}^r)_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^* E_{u,\gamma} u(B)_s^{r,\delta} E_{s,\alpha}^* . \quad (3.36)$$

Bis auf die kanonischen Projektionen entsprechen diese damit Linearkombinationen der Intertwiner aus dem reduzierten Feldbündel, genauer lässt sich die Zerlegung (3.36) als Matrix über dem reduzierten Feldbündel interpretieren, die vermöge der Projektionen auf \mathcal{H}_B wirkt.

3.4.1 Bilokalisierte Ladungen

Inwieweit ist nun die Kenntnis der geladenen chiralen Felder bei der Identifizierung der lokalen Felder auf dem Halbraum – die ja unser Ausgangspunkt waren – hilfreich? Ein Blick auf das induzierte Netz...

$$\iota_+(\mathcal{A}_+(O)) \subset \mathcal{B}_+^{\text{ind}}(O)$$

... zeigt zunächst, dass es sich auch hierbei um ein Netz von Subfaktoren handelt, für das ein entsprechendes Q-System (ρ_+, w_+, x_+) existiert. Mit dem Ziel ein Analogon zur Zerlegung (3.36) zu finden, sind nun die irreduziblen Subsektoren des (dualen) kanonischen Endomorphismus ρ_+ von besonderem Interesse.

Zu deren Bestimmung ist eine geometrische Einschränkung zu treffen, indem zunächst nur Doppelkegel $O = I \times J$ betrachtet werden sollen, die aus zwei Intervallen I und $J = -I$ hervorgehen. Diese Situation lässt sich aus der allgemeinen mittels einer konformen Transformation problemlos herstellen und führt unter anderem dazu, dass die Intervalle L und K symmetrisch um 0 ausgedehnt sind. Weiterhin wählen wir jetzt ein System Δ von in I lokalisierten, irreduziblen Endomorphismen $\rho_i \in \text{End}(\mathcal{A})$, die durch Komposition und direkte Summen ganz $\text{End}(\mathcal{A})$ aufspannen. Nach [32] ist jetzt $\bar{\rho}_i = j \circ \rho_i \circ j$ mit $j(a) = J_A a J_A$ und der modularen Konjugation J_A des Netzes (\mathcal{A}, Ω) ein zu ρ_i konjugierter Sektor, der in $-I$ lokalisiert ist. Wir definieren $\bar{\Delta}$ als Menge der auf diese Weise konjugierten Endomorphismen.

Lemma 3.4.2 Sei $\rho_+ = \bar{\iota}_+ \circ \iota_+$ der duale kanonische Endomorphismus des Netzes

$$\iota_+(\mathcal{A}_+(O)) \subset \mathcal{B}_+^{\text{ind}}(O) .$$

Dann gilt:

$$\sigma_+ \prec \rho_+ \text{ irreduzibel} \Rightarrow \sigma_+ \simeq \sigma \circ \bar{\tau} \quad \text{mit } \sigma \in \Delta, \bar{\tau} \in \bar{\Delta} .$$

Beweis

(skizziert) Die unitäre Äquivalenz geht im wesentlichen auf die Split-Eigenschaft zurück, die für vollständig rationale Netze per Definition gegeben ist. Der natürliche Isomorphismus ...

$$\Psi : \mathcal{A}_+(O) = \mathcal{A}(I) \vee \mathcal{A}(-I) \longrightarrow \mathcal{A}(I) \otimes \mathcal{A}(-I) =: \mathcal{A}_{\otimes}(I)$$

... ermöglicht es, ρ_+ zunächst lokal als Endomorphismus von $\mathcal{A}_{\otimes}(I)$ aufzufassen. Mittels eines ähnlichen Ausdehnungsargumentes, das bereits für die kanonischen Endomorphismen γ zur Anwendung kam, lässt sich $\rho_+ \circ \Psi^{-1}$ zu einem lokalisierten Endomorphismus des gesamten Netzes erweitern. Für jeden Sektor $[\tau]$ von \mathcal{A} ist nun $\tau(\mathcal{A})''$ ein Typ I -Faktor, somit faktorisieren DHR-Darstellungen von \mathcal{A}_{\otimes} über solchen von \mathcal{A} . Für Details siehe [39], Lemma 27 und 31. \square

In diesem Lemma offenbart sich die bilokalisierte Ladungsstruktur konformer Quantenfeldtheorien auf dem Halbraum. Ein irreduzibler Endomorphismus $\sigma_+ \simeq \sigma \circ \bar{\tau}$ des Netzes \mathcal{A}_+ angewandt auf ein Element $a_i a_j$ mit $a_i \in \mathcal{A}(I)$ und $a_j \in \mathcal{A}(J)$ ergibt aufgrund der Lokalisierung $\sigma(a_i) \bar{\tau}(a_j)$, somit separieren die Ladungen an dieser Stelle wieder, treten jedoch immer paarweise auf. Dies rechtfertigt nicht nur den Terminus „bilokalisiert“, sondern liefert ebenso eine Erklärung für CARDYS Beobachtung auf Ebene der Superauswahlstruktur.

Geladene Intertwiner in $\mathcal{B}_+^{\text{ind}}$ interpolieren demnach zwischen ι_+ und $\iota_+ \circ \sigma \bar{\tau}$. Aufgrund der FROBENIUS-Reziprozität stimmt die Dimension dieses Intertwinerraums mit der Multiplizität des entsprechenden Paares als Subsektor von ρ_+ überein.

Nicht nur an diesem Punkt stellt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, \mathcal{A} - \mathcal{B} -Morphismen wie $\iota \circ \sigma$ im Sinne eines direkteren Zugangs zu einem lokalisierten Endomorphismus auf \mathcal{B} zu erweitern. Es stellt sich heraus, dass dies im allgemeinen nicht funktioniert. Jedoch existiert eine Konstruktion (nach ROBERTS), die diesem Ziel sehr nahe kommt...

Definition 3.4.2 Sei σ ein lokalisierter Endomorphismus des Netzes \mathcal{A} , $\rho = \bar{\iota} \iota$ der duale kanonische Endomorphismus einer chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ und ε der Braiding-Operator, dann definieren...

$$\begin{aligned} \alpha_{\sigma}^+ &:= \bar{\iota}^{-1} \circ \text{Ad}_{\varepsilon(\rho, \sigma)^*} \circ \sigma \circ \bar{\iota} , \\ \alpha_{\sigma}^- &:= \bar{\iota}^{-1} \circ \text{Ad}_{\varepsilon(\sigma, \rho)} \circ \sigma \circ \bar{\iota} \end{aligned}$$

... die α -induzierten Endomorphismen zu σ auf \mathcal{B}

Ist $\hat{\sigma}$ raumartig zu ρ mit $\rho < \hat{\sigma}$ lokalisiert, ferner $u : \sigma \longrightarrow \hat{\sigma}$ der zugehörige Ladungstransporter, dann impliziert $\varepsilon(\sigma, \rho) = \rho(u^*) u$ aus (3.13)...

$$\alpha_{\sigma}^-(b) = \bar{\iota}^{-1} \circ \text{Ad}_{\varepsilon(\sigma, \rho)} \circ \sigma \circ \bar{\iota}(b) = \bar{\iota}^{-1} \circ \text{Ad}_{\rho(u^*)} \circ \hat{\sigma} \circ \bar{\iota}(b) .$$

Liegen die Lokalisierungsregionen von ρ und σ innerhalb des Intervalls $[c, d]$, dann gilt weiter $\alpha_\sigma^-(b) = \text{Ad}_{\iota(u^*)}(b) = b$ für $b \in \mathcal{B}(I), I \subset]-\infty, c[$, denn in diesem Fall kommutiert b mit $\iota(u)$. Folglich ist α_σ^- innerhalb des Wedges lokalisiert. Analoges gilt für α_σ^+ in bezug auf das Intervall $]d, \infty[$. In beiden Fällen spielt die relative Position aller Lokalisierungsregionen eine entscheidende Rolle, daher ist es nur im Falle einer Symmetrie statt eines Braidings möglich, diese auf Doppelkegel einzuschränken.

α_σ^\pm operiert in folgender Weise auf \mathcal{B} :

$$\alpha_\sigma^\pm \circ \iota(a) = \iota \circ \sigma(a) \quad (3.37)$$

$$\alpha_\sigma^+(v) = \iota(\varepsilon(\rho, \sigma))v \quad \text{und} \quad \alpha_\sigma^-(v) = \iota(\varepsilon(\sigma, \rho)^*)v. \quad (3.38)$$

Anhand der algebraischen Eigenschaften lässt sich ein Zusammenhang zu den geladenen Intertwinern in $\mathcal{B}_+^{\text{ind}}$ herstellen.

Satz 3.4.1 *Die lineare Abbildung...*

$$\begin{aligned} \phi : \text{hom}(\alpha_\tau^+, \alpha_\sigma^-) &\longrightarrow \text{hom}(\iota_+, \iota_+ \circ \sigma \bar{\tau}) \\ t &\longmapsto d_\tau^{1/2} t \iota_+(\bar{\tau}_\tau) \quad \text{mit} \quad \phi^{-1}(\psi) = d_\tau^{1/2} \iota_+(\sigma(r_\tau^*)) \psi. \end{aligned}$$

... zwischen Intertwinern aus $\mathcal{B}_+^{\text{ind}}(O)$ ($O = I \times (-I)$) ist wohldefiniert und ein Isomorphismus.

Beweis

... siehe Satz 4.4 in [50]. □

Insbesondere bedeutet dies...

Korollar 3.4.1 *Sei ρ_+ der duale kanonische Endomorphismus der Inklusion...*

$$\iota_+(\mathcal{A}_+(O)) \subset \mathcal{B}_+^{\text{ind}}(O)$$

... mit O wie oben, dann gilt:

$$\rho_+ \simeq \bigoplus_{\sigma, \tau} Z_{\sigma, \tau} \sigma \circ \bar{\tau} \quad \text{mit} \quad Z_{\sigma, \tau} := \langle \alpha_\tau^+ \mid \alpha_\sigma^- \rangle \quad (3.39)$$

Notiz. Die Tragweite des Korollars ist an dieser Stelle nicht offensichtlich. Tatsächlich ist $Z_{\sigma, \tau}$ eine *modulare Invariante*. Um zu verstehen, was dies bedeutet, ist erneut ein Blick auf die Fusionsregeln zu werfen, denen ein System Δ von irreduziblen Endomorphismen unterliegt...

$$\lambda \circ \mu \simeq \bigoplus_{\kappa \in \Delta} N_{\lambda\mu}^\kappa \kappa.$$

Falls das Δ unterliegende Braiding nicht-entartet ist — d.h. id ist der einzige Sektor, der triviale Monodromie mit allen anderen Sektoren besitzt — sind die Matrizen...

$$S_{\lambda, \mu} = |z|^{-1} \sum_{\kappa \in \Delta} \frac{\omega_\lambda \omega_\mu}{\omega_\kappa} N_{\lambda\mu}^\kappa d_\kappa \quad \text{und} \quad T_{\lambda, \mu} = e^{-i\pi c/12} \delta_{\lambda, \mu} \omega_\lambda,$$

...mit den Konstanten...

$$\omega_\lambda 1 = d_\lambda \phi(\varepsilon_\lambda) \quad , \quad z = \sum_\lambda d_\lambda^2 \omega_\lambda \quad \text{und} \quad c = 4 \frac{\arg(z)}{\pi} \quad ,$$

... wohldefiniert. Hierbei ist ϕ eine Standardlinksinverse zu λ . S und T erfüllen die Identitäten $(ST)^3 = S^2$ und $S^2 T = T S^2$ und repräsentieren damit die Generatoren der modularen Gruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ in einer unitären Darstellung [38].

Z kommutiert nun mit diesen beiden Matrizen und folglich ebenso mit der gesamten Gruppenwirkung der $SL(2, \mathbb{Z})$ auf den Fusionsregeln. Die Eigenschaft der modularen Invarianz für eine Matrix Z mit positiven, ganzzahligen Einträgen und $Z_{\text{id}, \text{id}} = 1$ ist sehr restriktiv und erlaubt für zahlreiche Systeme Δ , für die S und T bekannt sind, die vollständige Klassifikation. Da andererseits Z eine Invariante der Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ ist, entspricht dies einer (partiellen) Klassifikation lokaler Erweiterungen [41].

Wir belassen es zunächst bei dieser Notiz und kehren zurück zur Einbettung geladener Intertwiner aus $\mathcal{B}_+^{\text{ind}} \subset \mathcal{B}$ in das reduzierte Feldbündel. Mit Hilfe des bereits im chiralen Fall benutzten Operators U lassen sich die Anforderungen an eine Basis geladener Intertwiner erneut auf Bedingungen im chiralen Randnetz \mathcal{A} zurückführen. Wie der Isomorphismus Ψ zeigt, induziert eine Orthonormalbasis des Raumes $\text{hom}(\alpha_\tau^+, \alpha_\sigma^-)$ bezüglich des Skalarproduktes...

$$\langle t, t' \rangle 1 := \iota_+(\bar{r}_\tau^*) t^* t \iota_+(\bar{r}_\tau) : \iota_+ \longrightarrow \iota_+$$

...eine entsprechende Basis zu $\text{hom}(\iota_+, \iota_+ \circ \sigma \bar{\tau})$. Bezeichne ψ_i diese Basiselemente, $\varphi_i = U \psi_i U^*$ deren Entsprechungen in \mathcal{A} in der Darstellung $\pi_0 \circ \bar{\iota}$, dann gilt...

$$\varphi_i \in \text{hom}(\rho, \rho \circ \sigma \bar{\tau}) \tag{3.40}$$

$$\varphi_i x = \rho(\sigma(\varepsilon(\rho, \bar{\tau})) \varepsilon(\sigma, \rho)^*) x \varphi_i \tag{3.41}$$

$$\varphi_i^* \varphi_j = d_\sigma d_\tau \delta_{ij} . \tag{3.42}$$

... und jede Lösung dieser Gleichungen induziert eine Orthonormalbasis geladener Intertwiner in $\mathcal{B}_+^{\text{ind}}$. In (3.42) manifestiert sich die Normierung, (3.41) ist Konsequenz der Intertwinereigenschaft $\psi_i : \text{id} \longrightarrow \alpha_\sigma^- \alpha_\tau^+$ in Verbindung mit (3.38). Aufgrund von (3.40) besitzt jedes Element des Lösungsraumes eine Zerlegung...

$$\varphi_i = \sum_{\substack{s, u, v \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta}} (\Xi_{suv}^i)_{\alpha \dots \delta} w_{s, \alpha} t_{s\sigma, \beta}^u t_{u\bar{\tau}, \gamma}^v w_{v, \delta}^* \quad \text{mit} \quad (\Xi_{suv}^i)_{\alpha \dots \delta} \in \mathbb{C} .$$

Die Summe über s , bzw. v läuft über alle irreduziblen Subsektoren von ρ , während u über alle möglichen intermediären Sektoren auf dem Pfad von ρ_v nach ρ_s summiert. Nach Liften dieser Zerlegung zurück zu $\mathcal{B}_+^{\text{ind}}$ entsteht das gewünschte Pendant zu (3.36):

$$\psi_i^* = \sum_{\substack{s, u, v \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta}} (\Xi_{suv}^i)^*_{\alpha \dots \delta} E_{v, \delta} \iota_u(B)^{\bar{\tau}, \gamma} (B)_s^{\sigma, \beta} E_{s, \alpha}^* . \tag{3.43}$$

Die Koeffizienten (Ξ_{suv}^i) sind – neben den möglichen Multiplizitäten $\alpha \dots \delta$ – modellspezifisch. Ihre Bestimmung aus (3.41) entspricht einer *vollständigen Klassifizierung* der zu einer chiralen Theorie assoziierten Halbraumtheorie.

4. KLASSIFIZIERUNG NICHTLOKALER, CHIRALER ERWEITERUNGEN

Durch die letzten Ausführungen hat sich das Problem der Klassifizierung nichtlokaler, chiraler Erweiterungen auf die Bestimmung der kanonischen Endomorphismen ρ reduziert, da aufgrund trivialer zweiter Kohomologie der Tensorategorie $\text{End}(\mathcal{A})$ das zugehörige Q-System (ρ, w, x) bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

Anstatt nun direkt die Suche nach Q-Systemen in $\text{End}(\mathcal{A})$ zu beginnen, lohnt zunächst ein Blick auf die durch einen gegebenen kanonischen Endomorphismus $\rho = \bar{\iota} \circ \iota$ induzierte C^* -Kategorie $\text{Ext}(\iota)$ von \mathcal{A} - \mathcal{B} -Morphismen. Die Rechtsverknüpfung mit Elementen aus $\text{End}(\mathcal{A})$ operiert assoziativ auf $\text{Ext}(\iota)$. Außerdem ist diese Operation verträglich mit der Zerlegung in direkte Summen, so dass die Fusionsregeln (3.14) entsprechende Konsistenzbedingungen an $\text{Ext}(\iota)$ stellen.

Tatsächlich genügt dies im Falle der VIRASORO-Netze Vir_c mit $c < 1$, um alle Möglichkeiten für $\text{Ext}(\iota)$ zu klassifizieren. Der Schlüssel hierzu ist eine graphentheoretische Beschreibung der Fusionsregeln. Anders als der bereits präsentierte graphische Intertwinerkalkül ist diese weit mehr als nur eine bloße Hilfestellung. Vielmehr entfalten hier klassische Resultate von KRONECKER, PERRON und FROBENIUS ihr volles Potential.

Definition 4.0.3 Sei $\Delta \subset \text{End}(\mathcal{A})$ ein System von Endomorphismen mit einem selbstkonjugierten Generator σ . Die Elemente aus Δ sind Knoten eines zum System gehörigen Fusionsgraphen G . Die Anzahl an Kanten zwischen λ und μ entspricht der Dimension $\langle \lambda \mid \mu \circ \sigma \rangle = \Gamma_{\mu\nu}$ und legt damit nicht nur die Inzidenzmatrix Γ zu G fest, sondern ebenso dessen Norm...

$$\|G\| := \|\Gamma\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \frac{\|\Gamma a\|}{\|a\|}.$$

Seien $G_i, i \in \{1, 2\}$ zwei Fusionsgraphen zu den Generatoren σ_i . Das Fusionsgitter $G_1 \times G_2$ besteht aus allen Paaren (v_1, v_2) mit Knoten v_i in G_i . Zwei Knoten (v, w) und (\bar{v}, w) sind horizontal verbunden, falls sie es in G_1 sind. Analoges gilt für vertikale Kanten.

Beispiel 4.0.1 Sei $\mathcal{A} = \text{Vir}_c$ ein VIRASORO-Netz mit $c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} < 1$. Das aufspannende System irreduzibler Endomorphismen Δ besitzt zwei Generatoren $\sigma_{1,0}$ und $\sigma_{0,1}$. Die zugehörigen Fusionsregeln (3.14) lassen sich daher durch das Gitter $A_{m-1} \times A_m / \sim$ modulo der Äquivalenzrelation $\sigma_{i,j} \simeq \sigma_{m-2-i, m-1-j}$ beschreiben. Abbildung 4.1 zeigt das Gitter unter Vernachlässigung der Äquivalenzrelation. In diesem Fall besitzt es eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung.

Beispiel 4.0.2 Sei $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung, ferner Δ ein System von Endomorphismen in \mathcal{A} . Jedes Element $\lambda \in \Delta$ lässt sich nun mit Hilfe der bereits beschriebenen

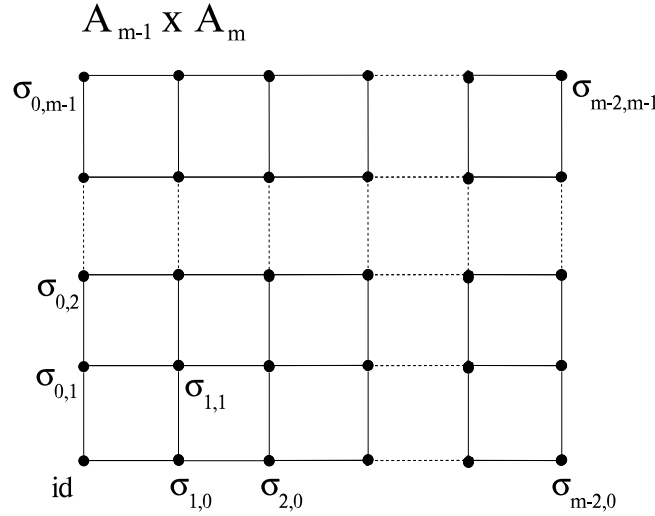


Fig. 4.1: Fusionsgitter eines VIRASORO-Netzes mit $c < 1$ (ohne Äquivalenzrelation!).

α -Induktion zu einem Endomorphismus α_λ^\pm des Netzes \mathcal{B} liften, wobei das Resultat natürlich nicht mehr irreduzibel sein muss. Diese Konstruktion erfüllt...

$$\alpha_{\mu \oplus \lambda}^\pm \simeq \alpha_\mu^\pm \oplus \alpha_\lambda^\pm \quad \text{und} \quad \alpha_{\mu \circ \lambda}^\pm \simeq \alpha_\mu^\pm \circ \alpha_\lambda^\pm$$

... (siehe [2]). Ist σ folglich ein Generator des Netzes \mathcal{A} , dann induziert Δ zwei Fusionsgraphen G_α^\pm in \mathcal{B} bezüglich α_σ^+ , respektive α_σ^- . Diese Graphen wurden für $SU(n)$ WZW-Modelle ausgiebig von BÖCKENBAUER und EVANS in [2], [3] und [4] studiert und stehen über Induktions-, Restriktionsgraphen in enger Verbindung mit der modularen Invarianten $Z_{\mu,\nu} = \langle \alpha_\nu^+, \alpha_\mu^- \rangle$.

Beispiel 4.0.3 Sei $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung und $\Delta_\iota \subset \text{Ext}(\iota)$ ein System von irreduziblen \mathcal{A} - \mathcal{B} -Morphismen, welches durch Komposition mit Elementen aus $\text{End}(\mathcal{A})$ und Zerlegung in direkte Summen die gesamte Kategorie aufspannt. Auch in diesem Fall lässt sich ein Fusionsgraph G_ι definieren, in dem die Anzahl der Kanten zwischen zwei Knoten $\alpha, \beta \in \Delta_\iota$ durch die Dimension $\langle \alpha | \beta \circ \sigma \rangle = \Gamma_{\alpha\beta}^{(\iota)}$ gegeben ist. Hierbei operiert ein Generator $\sigma \in \text{End}(\mathcal{A})$ von rechts auf $\text{Ext}(\iota)$.

Notiz. Allen drei Fällen liegen Inklusionssequenzen von VON NEUMANN-Algebren zu Grunde. So ist im Beispiel 4.0.1 für jeden Generator eine Tunnelkonstruktionen zu betrachten. Für $\sigma \in \{\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0}\}$ nimmt sie die folgende Gestalt an:

$$\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{A}) \supset \sigma^2(\mathcal{A}) \supset \sigma^3(\mathcal{A}) \supset \dots$$

Die Verbindung zu Intertwinerräumen und damit letztendlich auch zu den Fusionsgraphen liegt in der Betrachtung der *höheren relativen Kommutanten* dieser Sequenz...

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \cap \sigma(\mathcal{A})' \subset \mathcal{A} \cap \sigma^2(\mathcal{A})' \subset \mathcal{A} \cap \sigma^3(\mathcal{A})' \subset \dots, \\ \Leftrightarrow \mathbb{C} &= \text{End}(\text{id}) \subset \text{End}(\sigma) \subset \text{End}(\sigma^2) \subset \text{End}(\sigma^3) \subset \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Diese Folge von Inklusionen lässt sich durch ein BRATTELI-Diagramm beschreiben; eine mehrstufige Aneinanderkettung von Graphen, die wie folgt aufgebaut ist: Im k -ten Level des Diagramms werden die irreduziblen Subsektoren von σ^k durch Knotenpunkte notiert. Ist $\lambda \prec \sigma^k$ und $\mu \prec \sigma^{k+1}$, dann sind die zugehörigen Knoten durch $\langle \lambda \circ \sigma \mid \mu \rangle$ Kanten zu verbinden. Für den Fall der VIRASORO-Fusionsregeln findet sich der resultierende Graph in Abbildung 4.2.

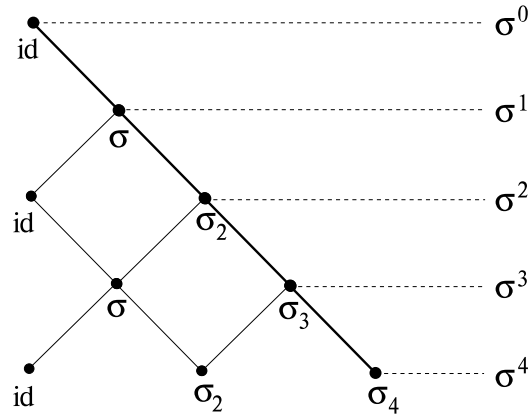


Fig. 4.2: BRATTELI-Diagramm der VIRASORO-Fusionsregeln für den Generator $\sigma_{0,1}$.

Ist der Generator selbstkonjugiert, gilt $\text{id} \prec \sigma^2$, somit reproduziert das Diagramm nach zwei Schritten die vorangegangenen Knoten, respektive Verknüpfungen. Aufgrund der vollständigen Rationalität sind lediglich endlich viele Schritte nötig, bis auf diese Weise keine neuen Sektoren mehr hinzukommen. Der Fusionsgraph zu σ ergibt sich nun durch Reduzieren des Diagramms auf die in jedem Schritt *neu* auftauchenden Sektoren, bzw. Kanten, wie sich durch Vergleich der beiden Definitionen leicht nachprüfen lässt.

Nach Wahl einer Basis aus minimalen Projektoren $e_{\lambda,k}^{i,j} = w_i w_j^* : \sigma^k \rightarrow \lambda \rightarrow \sigma^k$ mit $i, j \in \{1, \dots, \langle \lambda \mid \sigma^k \rangle\}$ und orthonormalen Intertwinern $w_i : \lambda \rightarrow \sigma^k$ entpuppt sich $\text{End}(\sigma^k)$ als direkte Summe endlichdimensionaler Matrixalgebren. Die Inklusion wird durch...

$$\theta : \text{End}(\sigma^k) \longrightarrow \text{End}(\sigma^{k+1}) \quad , \quad e_{\lambda,k}^{i,j} \mapsto \sum_{\mu \prec \lambda \circ \sigma} e_{\mu,k+1}^{i,j}$$

...nach entsprechender linearer Ausdehnung vermittelt. Zentrale Projektionen sollen mit...

$$e_{\lambda,k} := \sum_{i=1}^{\langle \lambda \mid \sigma^k \rangle} e_{\lambda,k}^{i,i}$$

...bezeichnet werden. Mit...

$$p_{\mu,\lambda} = e_{\mu,k+1} \theta(e_{\lambda,k}) \quad \text{und} \quad M = \text{End}(\sigma^{k+1}) \quad , \quad N = \text{End}(\sigma^k)$$

... gilt nun ...

$$\langle \lambda \circ \sigma \mid \mu \rangle = [p_{\mu,\lambda} M p_{\mu,\lambda} : p_{\mu,\lambda} \theta(N) p_{\mu,\lambda}]^{1/2} \quad .$$

Folglich stimmt die obige Definition des BRATTELI-Diagramms mit der für Typ II_1 -Faktoren in [29], Kapitel 2 getroffenen überein. Analog zu (4.1) lassen sich auch die Sequenzen...

$$\begin{aligned} \text{End}(\iota) &\subset \text{End}(\iota \circ \sigma) \subset \text{End}(\iota \circ \sigma^2) \subset \text{End}(\iota \circ \sigma^3) \subset \dots \\ \text{End}(\alpha_\sigma^\pm) &\subset \text{End}(\alpha_\sigma^{\pm 2}) \subset \text{End}(\alpha_\sigma^{\pm 3}) \subset \text{End}(\alpha_\sigma^{\pm 4}) \subset \dots \end{aligned}$$

... analysieren.

Beispiel 4.0.4 Sei $G = A_k$ der Fusionsgraph einer chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eines VIRASORO-Netzes mit $c < 1$ zum Generator $\sigma_{1,0}$. Sei ferner $\tilde{\iota}$ einer der beiden extremalen Vertices. Dann repräsentieren die Knoten des A_k -Graphen der Reihe nach die irreduziblen Sektoren $\tilde{\iota}, \tilde{\iota} \circ \sigma_{1,0}, \dots, \tilde{\iota} \circ \sigma_{k-1,0}$.

Der Fusionsring $K_0(\Delta)$

Ausgehend von einem System irreduzibler Endomorphismen $\Delta \subset \text{End}(\mathcal{A})$ lassen sich die durch Tensorprodukt und direkte Summen bereits vorhandenen monoidalen Strukturen zu einem Ring erweitern.

Definition 4.0.4 Sei Δ wie erwähnt, dann spannt $\Delta_0 = \Delta \cup \{0\}$ mit den Verknüpfungen...

$$\rho \oplus 0 \simeq 0 \oplus \rho \simeq \rho \quad \text{und} \quad 0 \otimes \rho \simeq \rho \otimes 0 \simeq 0$$

... eine additive Halbgruppe $S(\Delta)$ auf, die nach Konstruktion mit dem Tensorprodukt (gegeben durch Komposition) verträglich ist. Nun definiert...

$$K_0(\Delta) = \{(\rho, \sigma) \in S(\Delta) \times S(\Delta)\} / \sim$$

... unter der Äquivalenzrelation...

$$(\alpha, \beta) \sim (\gamma, \delta) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \oplus \delta \simeq \beta \oplus \gamma$$

... und mit den Verknüpfungen...

$$\begin{aligned} (\rho, \sigma) \oplus (\lambda, \mu) &:= (\rho \oplus \lambda, \sigma \oplus \mu) \\ \text{und } (\rho, \sigma) \otimes (\lambda, \mu) &:= (\rho \otimes \lambda \oplus \sigma \otimes \mu, \rho \otimes \mu \oplus \sigma \otimes \lambda) \end{aligned}$$

... den Fusionsring $K_0(\Delta)$. Ein Blick auf die Konstruktion zeigt, dass es sich hierbei um den GROTHENDIECK-Ring über $S(\Delta)$ handelt. Das Element $[\rho, \sigma] \in K_0(\Delta)$ soll durch $\rho \ominus \sigma$ notiert werden. Aufgrund der Eindeutigkeit der Zerlegung in direkte Summen, ist $S(\Delta)$ vermöge $\rho \mapsto [\rho, 0]$ injektiv in $K_0(\Delta)$ eingebettet. Die Dimensionsklammer $\langle \cdot | \cdot \rangle$ lässt sich in natürlicher Weise auf $K_0(\Delta)$ fortsetzen. Ferner wird in den folgenden Kapiteln Δ häufig mit seiner Einbettung in $K_0(\Delta)$ identifiziert werden.

Notiz. Ein Blick auf die Fusionsregeln (3.14) der VIRASORO-Algebra zeigt, dass jedes Element aus dem zu einem Generator $\sigma \in \{\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0}\}$ gehörigen System irreduzibler Endomorphismen $\Delta_\sigma \subset K_0(\Delta_\sigma)$ durch ein Polynom in σ ausgedrückt werden kann. Für Systeme mit dieser Eigenschaft ist der folgende Zusammenhang zwischen den Fusionsgraphen G_α^+ und G_ι bemerkenswert...

Satz 4.0.2 Sei $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung, ferner $\Delta \subset \text{End}(\mathcal{A})$ und $\Delta_\iota \subset \text{Ext}(\iota)$ mit Generatoren $\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0}$ wie oben. Besitzt Δ die Eigenschaft aus obiger Notiz und stimmen die Graphen G_α^+ und G_ι bzgl. aller Generatoren überein, dann ist die Erweiterung lokal.

Beweis

Da $\lambda, \mu \in K_0(\Delta)$ durch Polynome $P_1(\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0})$ und $P_2(\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0})$ ausgedrückt werden können, sind durch die Fusionsgraphen die Dimensionen der Intertwinerräume...

$$\begin{aligned} \langle \iota \circ \lambda \mid \iota \circ \mu \rangle &= \langle \iota \otimes P_1(\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0}) \mid \iota \otimes P_2(\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0}) \rangle \\ \text{und } \langle \alpha_\lambda^+ \mid \alpha_\mu^+ \rangle &= \langle \alpha_{P_1(\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0})}^+ \mid \alpha_{P_2(\sigma_{0,1}, \sigma_{1,0})}^+ \rangle \end{aligned}$$

... bereits fixiert. Übereinstimmung der beiden Graphen impliziert nun...

$$\langle \iota \mid \iota \circ \rho \rangle = \langle \text{id} \mid \alpha_\rho^+ \rangle .$$

Aufgrund der Wirkung (3.37) der α -induzierten Endomorphismen auf ι , gilt: $\text{hom}(\text{id}, \alpha_\rho^+) \subset \text{hom}(\iota, \iota \circ \rho)$. Folglich sind die beiden Räume isomorph. Damit ist insbesondere $v = \bar{\iota}(x) \in \text{hom}(\text{id}, \alpha_\rho^+)$. Mit (3.38):

$$\iota(x)v = \gamma(v)v = vv = \alpha_\rho^+(v)v = \iota(\varepsilon(\rho, \rho)x)v \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_\rho x = x .$$

□

Dieser Satz bringt folglich eine rein graphische Eigenschaft in Verbindung mit einer physikalisch sehr interessanten — eben der Lokalität. Dieses doch recht überraschende Resultat, das im Rahmen dieser Arbeit entstand, mag die Bedeutung der Fusionsgraphen für den Fall der VIRASORO-Netze hervorheben.

4.1 Perron-Frobenius-Theorie

Jeder Fusionsgraph G zu einem Generator σ ist eindeutig durch seine Inzidenzmatrix $\Gamma_{\mu\nu}$ charakterisiert. Diese operiert auf Vektoren, deren Einträge durch Elemente aus Δ indiziert sind. Das kanonische Beispiel für einen solchen Vektor enthält die Dimensionen der Sektoren $(d_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$. Aus der Definition des Fusionsgraphen ergibt sich sofort das folgende für die Klassifizierung entscheidende Resultat...

Lemma 4.1.1 $(d_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ ist ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix $\Gamma_{\mu\nu}$ mit positiven, ganzzahligen Einträgen zum Eigenwert d_σ .

Beweis

$$\sum_{\nu \in \Delta} \Gamma_{\mu\nu} d_\nu = \sum_{\nu \in \Delta} \langle \mu \circ \sigma \mid \nu \rangle d_\nu = d_{\mu \circ \sigma} = d_\sigma d_\mu ,$$

... wobei hier Additivität (siehe Satz 3.1.4), respektive Multiplikativität (siehe Korollar 3.1.1) der Dimensionen und die Fusionsregeln auszunutzen sind. □

Eine klassische Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Vektoren dieser Art wurde von PERRON und FROBENIUS bewiesen. Sie bezieht sich auf irreduzible Matrizen mit nichtnegativen Einträgen. Zur Erinnerung...

Definition 4.1.1 Sei $M \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix, dann heißt sie *reduzibel*, falls eine Permutation $\gamma \in S_m$ existiert, die M in eine Blockmatrix $\gamma M \gamma^{-1}$ überführt (γ wirkt durch Vertauschen der Basisvektoren).

Insbesondere gilt. . .

Satz 4.1.1 Sei G ein zusammenhängender Graph, dann ist seine Inzidenzmatrix Γ irreduzibel.

Beweis

Eine Permutation der Basisvektoren entspricht einer Umnummerierung der Knoten. Existiert nun eine Permutation $\gamma \in S_m$, die Γ in die Blockform. . .

$$\gamma \Gamma \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

. . . überführt, dann bedeutet dies, dass die Knoten aus Block A nicht mit Knoten aus Block B verbunden sind. \square

Definition 4.1.2 Sei $M \in M_{k \times k}(\mathbb{R}_+)$ eine quadratische Matrix. Ein **PERRON-FROBENIUS-VEKTOR** $\xi \in \mathbb{R}_+^k$ zu M ist ein Eigenvektor der Matrix mit nichtnegativen Einträgen.

Satz 4.1.2 (Perron, Frobenius) Sei $M \in M_{k \times k}(\mathbb{R}_+)$ eine irreduzible, symmetrische Matrix mit nichtnegativen Einträgen, dann existiert ein, bis auf Normierung eindeutiger **PERRON-FROBENIUS-VEKTOR** ξ zu einem einfachen Eigenwert d . Ferner gilt: $\|M\| = d$.

Beweis

. . . siehe [26]. \square

Die *entscheidenden* Konsequenzen aus dem vorangegangenen Satz zieht das folgende. . .

Korollar 4.1.1 Ist Γ die Inzidenzmatrix eines zusammenhängenden Fusionsgraphen G zu einem Generator σ , dann gilt. . .

(i) $d_\sigma = \|G\|$.

(ii) Ist die Dimension d_λ eines Knotens λ bekannt, sind dadurch bereits die Dimensionen aller Knoten in G fixiert.

(iii) Ist $G_1 \times G_2$ ein Fusionsgitter bezüglich zweier kommutierender Generatoren mit Knoten $v_i \in G_1, i \in I$ bzw. $w_j \in G_2, j \in J$ und wird ρ durch einen Knoten (v_i, w_j) repräsentiert, dann gilt. . .

$$d_\rho = N a_{v_i} b_{w_j}$$

. . . mit einer gemeinsamen Normierungskonstanten N und zwei **PERRON-FROBENIUS-VEKTOREN** $(a_{v_r})_{r \in I}$ bzw. $(b_{w_s})_{s \in J}$.

Beweis

Wie die einleitende Bemerkung gezeigt hat, ist $(d_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ ein PERRON-FROBENIUS-Vektor der Matrix Γ zum Eigenwert d_σ . Die Kenntnis der Dimension eines Knotens fixiert die Normierung dieses Vektors. Für ein Gitter wie in (iii) sind die Dimensionen in jeder Zeile, bzw. jeder Spalte durch die Fusionsgraphen G_i bis auf Normierung festgelegt. \square

Beispiel 4.1.1 Das Fusionsgitter $A_{m-1} \times A_m$ der VIRASORO-Netze $\mathcal{A} = \text{Vir}_c$ aus Abbildung 4.1 zum Generatorenpaar $(\sigma_{1,0}, \sigma_{0,1})$ lässt sich alternativ durch die Inzidenzmatrizen Γ_{m-1} und Γ_m beschreiben. Hierbei ist $\Gamma_k \in M_{k \times k}$ die Matrix:

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der zum PERRON-FROBENIUS-Eigenvektor $(d_\lambda)_{\lambda \in \Delta_k}$ gehörige Eigenwert d_k dieser Matrix ist

$$d_k = 2 \cos \left(\frac{\pi}{k+1} \right).$$

Entsprechend gilt nach Korollar 4.1.1...

$$d_{\sigma_{1,0}} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{m} \right) \quad \text{und} \quad d_{\sigma_{0,1}} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{m+1} \right). \quad (4.2)$$

Abbildung 4.3 zeigt den auf die Länge 1 normierten Eigenvektor zu d_m , daher folgt aus $d_{\text{id}} = 1$ für die übrigen Dimensionen:

$$d_{\sigma_{k,l}} = d_{\sigma_{k,0}} d_{\sigma_{0,l}} = \frac{\sin \left(\frac{(k+1)\pi}{m} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{m} \right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{(l+1)\pi}{m+1} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{m+1} \right)}. \quad (4.3)$$

Insbesondere halten wir fest, dass...

$$\|A_{m-1}\| = 2 \cos \left(\frac{\pi}{m} \right) < 2 \quad \text{und} \quad \|A_m\| = 2 \cos \left(\frac{\pi}{m+1} \right) < 2. \quad (4.4)$$

Graphen, deren Norm echt kleiner als 2 ist, zeichnen sich durch eine besonders einfache Gestalt aus. So verhindert diese Bedingung das Auftreten von Zykeln, die mehr als einen Knoten enthalten. Wird weiterhin verlangt, dass der Graph eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung zulassen soll, schließt dies auch diejenigen mit Zykeln bestehend aus einer Kante an einem Knoten — die sogenannten *Tadpole*-Graphen aus. Tatsächlich legt die Normbeschränkung auch die Menge der möglichen PERRON-FROBENIUS-Eigenwerte fest, wie das folgende Resultat beweist, das auf KRONECKER zurückgeht.

Satz 4.1.3 (Kronecker) Sei $M \in M_{k \times k}(\mathbb{Z})$. Dann ist entweder...

$$\|M\| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

...für eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ oder $\|M\| \geq 2$.

Beweis

...siehe [29]. □

Definition 4.1.3 Ist G ein zusammenhängender Fusionsgraph mit $\|G\| < 2$, dann heißt die in $\|G\| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$ auftretende Konstante m die COXETER-Zahl des Graphen.

Die Normbedingung stellt sich als so restriktiv heraus, dass sie eine **vollständige Klassifizierung** aller (graduierten) Graphen erlaubt, die sie erfüllen. Wie Abbildung 4.3 zeigt, reduziert sich die Liste auf die A_m -, D_m - und $E_{6,7,8}$ -Graphen [29].

<p>A_m</p> <p>Coxeter: $m+1$</p>	<p>D_m</p> <p>Coxeter: $2m-2$</p>
<p>E_6</p> <p>Coxeter: 12</p>	<p>E_7</p> <p>Coxeter: 18</p>
<p>E_8</p> <p>Coxeter: 30</p>	<p> $a = \sin\left(\frac{6\pi}{18}\right) / 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{18}\right)$ $b = \sin\left(\frac{6\pi}{18}\right) / 2 \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$ $c = \sin\left(\frac{4\pi}{18}\right) / 2 \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$ $d = \sin\left(\frac{7\pi}{30}\right) / 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{30}\right)$ $e = \sin\left(\frac{7\pi}{30}\right) / 2 \cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ $f = \sin\left(\frac{5\pi}{30}\right) / 2 \cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ </p>

Fig. 4.3: Graduierte Graphen der Norm kleiner 2 mit zugehörigen COXETER-Zahlen und auf Länge 1 normierten PERRON-FROBENIUS-Vektoren.

4.2 Klassifizierung

Dieser Abschnitt entwickelt das fundamentale Resultat zur Klassifizierung nichtlokaler, chiraler Erweiterungen. Wie schon den Fusionsregeln (3.14) der VIRASORO-Netze lässt sich jeder chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ ein **Gitter** aus Graphen zuordnen. Die einzelnen Faktoren sind dabei durch die Fusionsgraphen G_ι der Tensorategorie $\text{Ext}(\iota)$ (siehe Beispiel 3.3.5) zu

den Generatoren $\sigma_{0,1}$ bzw. $\sigma_{1,0}$ gegeben. Aufgrund des Lemmas 4.1.1 gilt notwendigerweise $\|G_\iota\| < 2$, somit löst die Klassifizierung des letzten Abschnittes gleichzeitig auch dieses Problem.

Tatsächlich besitzt jeder, der in Abbildung 4.3 gezeigten graduierten Graphen eine Realisierung als Fusionsgraph einer Tensor-kategorie. Die diesen Kategorien zugrundeliegende Konstruktion geht zurück auf die Darstellungstheorie der Schleifengruppe $LSU(2)$ zu $SU(2)$ und findet sich zum Beispiel bei WASSERMANN in [66]. Elemente in $LSU(2)$ sind glatte Abbildungen ...

$$g : S^1 \longrightarrow SU(2) .$$

Die Gruppenverknüpfung ist durch punktweise Multiplikation gegeben.

Jede unitäre Darstellung einer solchen Gruppe ist projektiv und entspricht damit der *echten* Darstellung einer zentralen Erweiterung von $LSU(2)$:

$$S^1 \longrightarrow \widetilde{LSU}(2) \longrightarrow LSU(2) .$$

Diese wiederum entstehen aus 2-Kozykeln, die eine isomorphe Erweiterung hervorbringen, falls sie sich nur um einen Korand unterscheiden. Daher klassifiziert $H^2(LSU(2), \mathbb{Z}) \simeq H^3(SU(2), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ die möglichen zentralen Erweiterungen bis auf Isomorphie.

Von besonderem Interesse sind jetzt Darstellungen der Gruppe $LSU(2)$ von *positiver Energie*. Dieser Terminus bezieht sich auf eine weitere Gruppenwirkung der S^1 durch Translation des Argumentes...

$$R_\vartheta(g)(\varphi) = g(\varphi - \vartheta) .$$

In Darstellungen positiver Energie sind die zugehörigen Operatoren der Wirkung R_ϑ von unten beschränkt.

In einer irreduziblen Darstellung kann die Wirkung der zentralen Erweiterung aufgrund von SCHURs Lemma lediglich durch Multiplikation mit einem Skalar $e^{2\pi i l}$ realisiert werden, daher lässt sich jeder irreduziblen, projektiven Darstellung positiver Energie eine positive, ganzzahlige Invariante l , genannt *Level* zuordnen, die die Wirkung der zentralen Erweiterung charakterisiert.

Für jeden Level l existiert nun eine Vakuumdarstellung π_0 auf einem entsprechenden Hilbertraum.

Werden lediglich in einem offenen Intervall $I \subset \mathcal{I}$ lokalisierte Gruppenelemente $LSU(2)_I$ betrachtet, die außerhalb des Intervalls auf 1 abbilden, so spannen diese ein Netz $SU(2)_l$ von VON NEUMANN-Algebren auf, gegeben durch...

$$\mathcal{A}(I) = \pi_0(LSU(2)_I)'' . \tag{4.5}$$

Nach [66] erfüllt das Netz *Lokalität*, *HAAG-Dualität* im Vakuumsektor und *Faktorialität* neben anderen interessanten Eigenschaften. Es stellt damit ein weiteres Beispiel für ein lokales Netz auf \mathbb{R} dar und induziert eine Tensor-kategorie, die auf dem Level l die folgenden irreduziblen Objekte besitzt...

$$\Delta_l = \{\lambda_0, \dots, \lambda_l\} .$$

Realisiert werden diese Objekte durch die irreduziblen Darstellungen der Gruppe $LSU(2)$ auf dem Level l . Sie unterliegen den Fusionsregeln ...

$$\lambda_r \circ \lambda_i \simeq \bigoplus_{\substack{k=|r-i| \\ k+r+i=0 \pmod{2}}}^{k_{\max}} \lambda_k \quad (4.6)$$

... mit $k_{\max} = \min(r+i, 2m - (r+i))$, die in [66] mittels der CONNES-Fusion von Bimodulen über VON NEUMANN-Algebren hergeleitet wurden.

Entscheidend ist das folgende Theorem, das die *nichtlokalen* Erweiterungen dieses Netzes mit den bereits bekannten Graphen verbindet.

Definition 4.2.1 *Ist G ein Graph mit Symmetriegruppe \mathcal{G} , ferner v ein Knoten in G , dann bezeichne $[v]$ die Symmetrieklasse des Knotens unter der Wirkung von \mathcal{G} .*

Satz 4.2.1 *Ist G einer der Graphen aus Abbildung 4.3 mit COXETER-Zahl m , ferner v ein Knoten in G , dann ist $(G, [v])$ eine vollständige Invariante für die irreduziblen Erweiterungen des Netzes $SU(2)_m$.*

Beweis

...siehe Theorem 2.1 in [42]. Die grundlegende Konstruktion der zugehörigen Subfaktoren stammt von GOODMAN, DE LA HARPE und JONES (siehe Kapitel 4.5 in [29]) und liefert zu jedem der in Abbildung 4.3 gezeigten Graphen eine Typ II_1 -Subfaktor-Inklusion. Tensorieren mit einem entsprechenden III_1 -Faktor stellt die Verbindung zum Theorem her (siehe Appendix in [5]). Der eindeutige Zusammenhang zwischen Graph und Q-System ergibt sich daraus, dass die zweite Kohomologie der $SU(2)_k$ -Tensorkategorien verschwindet. \square

Notiz. Wie ein Vergleich zwischen (3.14) und (4.6) zeigt, sind die von den Generatoren $\sigma_{0,1}$, $\sigma_{1,0}$ aufgespannten Unterkategorien isomorph zu den zu $SU(2)_{m-1}$ bzw. $SU(2)_m$ assoziierten. Die obige Klassifizierung legt somit nahe, Grapheninvarianten chiraler Erweiterungen unter den Gittern $G_1 \times G_2$ mit Graphen G_i aus Abbildung 4.3 zu suchen. Tatsächlich wird einer der Graphen aus Gründen der Parität immer ein A_k -Graph sein. Wir halten die folgenden Resultate über die Dimensionen der Knoten eines solchen Gitters fest:

Lemma 4.2.1 *Sei m eine positive ungerade, ganze Zahl und G ein A_k -, D_k - oder $E_{6,7,8}$ -Graph mit COXETER-Zahl n , so dass $|n - m| = 1$. Sei weiterhin $(d_\mu)_{\mu \in \Delta}$ ein PERRON-FROBENIUS Vektor für G . Mit ...*

$$s(j) = \frac{\sin\left(\frac{j\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)} \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, m-1$$

... sind dann die Mengen ...

$$\left\{ \frac{d_\mu}{d_\lambda} \mid \mu, \lambda \text{ Knoten von } G \right\}$$

... und ...

$$\{s(2), s(3), \dots, s(m-2)\}$$

... disjunkt.

Beweis

... siehe Satz 3.2 in [42] □

Der folgende Satz, der ebenso wie die letzten Resultate in [42] erarbeitet wurde, *löst* das Klassifizierungsproblem chiraler Erweiterungen und ist damit einer der Eckpfeiler dieser Arbeit: In Kombination mit der Symmetrieklasse eines Knotens, stehen die in obiger Notiz erwähnten Gitter in eindeutigem Zusammenhang mit den möglichen chiralen Erweiterungen.

Satz 4.2.2 *Zu jeder chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} = \text{Vir}_c$ und $c < 1$ ist in eindeutiger Weise ein punktiertes Gitter $(G_1 \times G_2, ([v], [w]))$ assoziiert. Hierbei sind G_1, G_2 ADE-Graphen, deren COXETER-Zahlen sich um 1 unterscheiden. (v, w) ist ein Punkt des Gitters $G = G_1 \times G_2$. Ferner lässt sich jedes solche Tupel als chirale Erweiterung eines VIRASORO-Netztes realisieren.*

Beweis

Sei $A_{m-1} \times A_m$ das Fusionsgitter des VIRASORO-Netztes $\mathcal{A} = \text{Vir}_c$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei m ungerade. Dies lässt sich durch Vertauschen der Faktoren des Gitters immer erreichen. Sei ferner $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung. Wie in Beispiel 4.0.3 sind zu $\text{Ext}(\iota)$ zwei Fusionsgraphen G_1 bezüglich $\sigma_{1,0}$ und G_2 bezüglich $\sigma_{0,1}$ assoziiert. Korollar 4.1.1 impliziert nun, dass G_1 ein Graph mit COXETER-Zahl m ist. Ein Blick auf Abbildung 4.3 zeigt, dass die Parität die Möglichkeiten auf $G_1 = A_{m-1}$ einschränkt. Sei nun...

$$\Delta_l^{\text{ev}} := \left\{ \beta \prec \iota \circ \sigma_{1,0}^{2k} \text{ irreduzibel} \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

... die Menge der geraden Knoten in G_1 . Weiter sei $\tilde{\iota} \in \Delta_l^{\text{ev}}$ der Knoten kleinster Dimension, der für ungerades m eindeutig gegeben ist. Ein weiterer Blick auf Abbildung 4.3 bringt die durch $d_{\tilde{\iota}}$ normierten PERRON-FROBENIUS-Vektoren...

$$\left\{ \frac{d_\lambda}{d_{\tilde{\iota}}} \mid \lambda \in \Delta_l^{\text{ev}} \right\} = \left\{ s(1), \dots, s\left(\frac{m-1}{2}\right) \right\} \quad (4.7)$$

... mit den Bezeichnungen aus Lemma 4.2.1. Nun sei \tilde{G} der Fusionsgraph zu $\text{Ext}(\tilde{\iota})$ bezüglich $\sigma_{0,1}$.

Als nächstes ist zu zeigen, dass $\tilde{\rho} = \tilde{\iota} \tilde{\iota}$ lediglich Subsektoren der Form $\sigma_{0,k}$ mit $0 \leq k \leq m-1$ enthält. Aus der Annahme $\sigma_{2l,k} \prec \tilde{\rho}$ mit $l > 0$ ergibt sich mittels FROBENIUS-Reziprozität:

$$\langle \tilde{\iota} \circ \sigma_{2l,0} \mid \tilde{\iota} \circ \sigma_{0,k} \rangle > 0 \quad (4.8)$$

Da zu $\tilde{\iota}$ ein extremaler Knoten des Graphen A_{m-1} assoziiert ist, folgt wie in Beispiel 4.0.4 die Irreduzibilität des Sektors $\beta = \tilde{\iota} \circ \sigma_{2l,0}$. (4.8) bedeutet somit, dass ein von einem Knoten aus \tilde{G} repräsentierter Sektor γ äquivalent zu β ist. Den Vertex zu $\tilde{\iota}$ haben beide Graphen gemein, folglich mit (4.7)...

$$s(a) = \frac{d_\beta}{d_{\tilde{\iota}}} = \frac{d_\gamma}{d_{\tilde{\iota}}}$$

... mit $1 \leq a \leq \frac{m-1}{2}$. Dies erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 4.2.1 und führt daher auf $a = 1 \Rightarrow d_\beta = d_{\tilde{\iota}}$. Da jedoch $\tilde{\iota} \in \Delta_l^{\text{ev}}$ eindeutig gegeben ist, impliziert dies $l = 0$ und damit

einen Widerspruch. Aufgrund der Symmetrie $\sigma_{i,j} \simeq \sigma_{m-2-i,m-1-j}$ ist die Behauptung vom Anfang des Abschnitts damit bewiesen.

Sei λ ein irreduzibler Sektor aus $\text{Ext}(\tilde{\iota})$, der durch einen Knoten aus \tilde{G} repräsentiert wird. Da G_1 ein A_{m-1} -Graph ist, existiert ein $0 \leq j \leq m-2$ mit $\tilde{\iota} \circ \sigma_{j,0} \simeq \iota$. Hierfür gilt...

$$\langle \lambda \circ \sigma_{j,0} \mid \lambda \circ \sigma_{j,0} \rangle = \langle \bar{\lambda} \lambda \mid \sigma_{j,0}^2 \rangle = 1, \quad (4.9)$$

...denn die Fusionsregeln (3.14) zeigen, dass $\sigma_{j,0}^2$ lediglich Sektoren der Form $\sigma_{2l,0}$ enthält. Eine vollkommen analoge Argumentation wie oben lässt sich auch für λ führen, wodurch sich (4.9) vollends erklärt. Folglich bildet die Verknüpfung mit $\sigma_{j,0}$ irreduzible Sektoren auf ebensolche ab. Daher stimmen die BRATTELI-Diagramme und damit auch die Fusionsgraphen zu $\tilde{\iota} \circ \sigma_{j,0} \circ \sigma_{0,1}^k$ und $\tilde{\iota} \circ \sigma_{0,1}^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ überein. Dies impliziert $\tilde{G} = G_2$. Außerdem werden λ und $\lambda \circ \sigma_{j,0}$ durch denselben Knoten in G_2 repräsentiert.

Diese Konstruktion lässt sich natürlich für beliebige Verknüpfungen mit $\sigma_{k,0}$, $0 \leq k \leq m-2$ durchführen. Sie liefert in jedem Vertex des A -Graphen eine entsprechende vertikale Kopie von G_2 . Da λ und $\lambda \circ \sigma_{k,0}$ durch denselben Knoten in \tilde{G} dargestellt werden, sind die Kopien folglich durch horizontale A_{m-1} -Fusionsgraphen bezüglich $\sigma_{1,0}$ wie in Beispiel 4.0.4 verbunden.

Sei ι repräsentiert durch den Knoten (v, w) des Gitters, dann ist $(G_1 \times G_2, ([v], [w]))$ die gesuchte Invariante. Da Fusionsgraphen lediglich bis auf Automorphie festgelegt sind, gilt dies auch für den Vertex (v, w) .

Eine Zerlegung von $\tilde{\rho}$ in irreduzible Submorphisamen enthält lediglich Sektoren der Form $\sigma_{0,0}, \sigma_{0,2}, \dots, \sigma_{0,m-1}$. Aufgrund der $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung der durch $\sigma_{0,1}$ aufgespannten Unterkategorie können nur gerade Indizes auftauchen. Die hiervon generierte Tensorcategory ist isomorph zum geraden Teil der Tensorcategory zu $SU(2)_{m-1}$. Aus Satz 4.2.1 folgt Eindeutigkeit des Q-Systems für $(G_2, [w])$ und folglich auch für $\iota = \tilde{\iota} \circ \sigma_{j,0}$.

Sei umgekehrt ein punktiertes Gitter $(G_1 \times G_2, ([v], [w]))$ gegeben, so lässt sich weiterhin o.B.d.A. annehmen, dass $G_1 = A_{m-1}$ gilt. Sei $\sigma_{j,0}$ einer der beiden Vertizes der Symmetrieklasse $[v]$. Die Tensorcategory, die durch $\sigma_{0,0}, \sigma_{0,1}, \dots, \sigma_{0,m-1}$ aufgespannt wird, ist isomorph zur entsprechenden Kategorie des Netzes $SU(2)_{m-1}$. Diesen Isomorphismus und Satz 4.2.1 ausnutzend, erhalten wir eine Realisierung von $(G_2, [w])$ als Erweiterung $\tilde{\iota}$. Mit $\iota := \tilde{\iota} \circ \sigma_{j,0}$ zeigt eine analoge Argumentation wie im ersten Teil, dass $\tilde{G} = G_2$ ist. \square

5. SEKTORIDENTIFIKATIONEN

Die in Satz 4.2.2 hergeleitete Grapheninvariante einer chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ beschreibt noch nicht deren Fusionsregeln, da sie die Symmetrie der VIRASORO-Algebra ...

$$\sigma_{i,j} \simeq \sigma_{m-2-i, m-1-j} \quad (5.1)$$

...nicht berücksichtigt. Wie in vorherigen Kapiteln bezeichne...

$$\Delta = \{ \sigma_{i,j} \mid i = 0, \dots, m-2, j = 0, \dots, m-1 \}$$

...die irreduziblen Objekte der zugehörigen Tensorategorie $\text{End}(\Delta)$ mit den Generatoren $\sigma_{1,0}$ und $\sigma_{0,1}$, so dass m der COXETER-Zahl des Fusionsgraphen zu $\sigma_{1,0}$ entspricht.

Das Ziel des folgenden Kapitels ist es daher, zu untersuchen, auf welche Weise sich diese Symmetrie auf die Fusionsgitter der Erweiterungen auswirkt. Natürlich sind auch hier in entsprechender Weise Sektoren miteinander zu identifizieren.

Die weiter oben bewiesene FROBENIUS-Reziprozität, Assoziativität und Kommutativität der Fusionsalgebra und die Dimensionsklammer werden hierbei hilfreiche Dienste leisten. Der besseren Übersicht halber sei wie im Beweis zu Satz 4.2.2 die Nummerierung der Sektoren so gewählt, dass der erste Index die Position im A -Graphen gerader Knotenzahl wiedergibt. Mit...

$$m_1 = \begin{cases} m-1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ m-2 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad m_2 = \begin{cases} m-2 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ m-1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

...sind die Elemente in Δ damit von der Form $\sigma_{i,j}$, $i \in \{0, \dots, m_1\}$, $j \in \{0, \dots, m_2\}$.

Verknüpfung mit dem Morphismus $\sigma_{0,m_2} \simeq \sigma_{m_1,0}$, der die Dimension 1 besitzt und folglich ein *Automorphismus* ist, liefert Aufschluss über die Symmetrie (5.1). Denn für ein Fusionsgitter $G_1 \times G_2$ permutiert diese Operation entweder die Knoten in G_1 (als Wirkung von $\sigma_{m_1,0}$) oder diejenigen in G_2 (σ_{0,m_2} entsprechend). In gewisser Weise ist damit die „Wurzel“ aus der Symmetrie gezogen. Eine doppelte Ausführung einmal in der einen, dann in der anderen Gestalt, induziert auf den Knoten des Gitters eine Abbildung...

$$\vartheta : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2 \quad , \quad (v, w) \mapsto (\vartheta_1(v), \vartheta_2(w)) \quad (5.2)$$

...bestehend aus Automorphismen ϑ_i der Graphen G_i . Wie noch zu zeigen sein wird, ist ϑ genau die Symmetrietransformation, die die gesuchte Äquivalenzrelation beschreibt.

Für $G_i \in \{A_k, D_l, E_6\}$ mit $k \geq 1, l \geq 5$ enthält $\text{Aut}(G_i)$ zwei Elemente. Im Fall D_4 ist ϑ_2 ein selbstinverses Element der Permutationsgruppe S_3 und damit eine der drei Transpositionen

oder die Identität. In den übrigen Fällen ist die Automorphismengruppe trivial. Sei λ repräsentiert durch einen Knoten (v_0, w) des Gitters $A_{m_1+1} \times G$ mit einem der beiden äußeren Vertizes v_0 des Graphen A_{m_1+1} , dann entsprechen den übrigen Knoten des A -Graphen die Sektoren $\lambda \circ \sigma_{k,0}$ wie in Beispiel 4.0.4. Somit ist...

$$\lambda \circ \sigma_{k,0} \circ \sigma_{m_1,0} \simeq \lambda \circ \sigma_{m_1-k,0} .$$

Dies ändert den Grad des Knotens. Folglich ist der induzierte Automorphismus \mathfrak{D}_1 *nicht* die Identität, sondern das eindeutige nichttriviale Element der Gruppe $\text{Aut}(A_{m_1+1})$.

Wie bereits angedeutet, induziert (5.2) die auf dem Fusionsgitter einer Erweiterung zu wählende Äquivalenzrelation wie Satz 5.0.3 zeigt. Doch zuvor...

Lemma 5.0.2 *Zwei Knoten (v, w_1) und (v, w_2) eines Fusionsgitters $G_1 \times G_2$ aus Satz 4.2.2, die im gleichen vertikalen Untergraphen liegen und denselben Sektor repräsentieren, sind identisch.*

Beweis

Da beide Knoten denselben Sektor repräsentieren, stimmen auch ihre Dimensionen überein. Folglich besitzen beide denselben Grad in der $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung der vertikalen Untergraphen, bzw. des zugehörigen BRATTELI-Diagramms. In letzterem repräsentieren Knoten gleichen Grades unterschiedliche Sektoren, somit gilt $w_1 = w_2$. \square

Notiz. Als Ergänzung zu Lemma 5.0.2 sei angemerkt, dass in den horizontalen Subgraphen sehr wohl zwei Vertizes denselben Sektor repräsentieren können, sofern sich ihr Grad unterscheidet. Als Beispiel betrachte man $A_{m-1} \times A_m$ für ungerades m .

Satz 5.0.3 *Sei $G_1 \times G_2$ das Fusionsgitter einer chiralen Erweiterung wie in Satz 4.2.2, sei ferner $\alpha \in \Delta_l$ repräsentiert durch (v_1, w_1) , $\beta \in \Delta_l$ durch (v_2, w_2) . Ist $\alpha \simeq \beta$, dann gilt entweder $(v_1, w_1) = (v_2, w_2)$ oder $(v_1, w_1) = \mathfrak{D}(v_2, w_2)$.*

Beweis

Seien a, b zwei PERRON-FROBENIUS-Vektoren der Graphen G_1 bzw. G_2 . Nun existiert ein Sektor $\tilde{\alpha}$ repräsentiert durch einen Knoten (v_0, w_1) , wobei v_0 einer der äußeren beiden Vertizes des Graphen $G_1 = A_{m_1+1}$ ist, so dass...

$$\tilde{\alpha} \circ \sigma_{j,0} \simeq \alpha$$

...für ein $j \in \{0, \dots, m_1\}$. Aufgrund der FROBENIUS-Reziprozität impliziert dies...

$$\tilde{\alpha} \prec \alpha \circ \sigma_{j,0} \simeq \beta \circ \sigma_{j,0} .$$

Die Zerlegung der rechten Seite in eine direkte Summe beinhaltet demnach einen irreduziblen Sektor $\tilde{\beta}$ repräsentiert durch einen Knoten (\tilde{v}_2, w_2) äquivalent zu $\tilde{\alpha}$. Korollar 4.1.1, Punkt (iii) in Verbindung mit den PERRON-FROBENIUS-Vektoren für A -Graphen aus Abb. 4.3 bringt...

$$s(c) = \frac{a_{\tilde{v}_2}}{a_{v_0}} = \frac{b_{w_1}}{b_{w_2}} = \frac{a_{v_2}}{a_{v_1}}$$

...mit der Notation aus Lemma 4.2.1 für ein $1 \leq c \leq m_1 + 1$. Nach letzterem ist der obige Ausdruck gleich 1, insbesondere also $a_{v_1} = a_{v_2}$ und $b_{w_1} = b_{w_2}$. Da a und b injektive Invarianten auf den Symmetrieklassen der Graphen G_1 bzw. G_2 sind (ein Blick auf Abb. 4.3 bestätigt dies), folgt...

$$v_1 = v_2 \quad \text{oder} \quad v_1 = \vartheta_1(v_2) .$$

Ist $v_1 = v_2$, dann greift Lemma 5.0.2, folglich ist auch $w_1 = w_2$. Ist $v_1 = \vartheta_1(v_2)$, dann lässt sich das Lemma auf (v_1, w_1) und $\vartheta(v_2, w_2)$ anwenden. In dem Fall gilt $w_1 = \vartheta_2(w_2)$. \square

Somit genügt die Kenntnis über die Wirkung des Automorphismus ϑ_2 zur vollständigen Bestimmung der Äquivalenzrelation des induzierten Fusionsgitters. Wird die durch $(v, w) \sim \vartheta(v, w)$ generierte Äquivalenzrelation durch \sim notiert, dann beschreibt $G_1 \times G_2 / \sim$ die Fusionsregeln der chiralen Erweiterung. Für Gitter der Form $A_{m-1} \times A_m$ gilt natürlich...

Satz 5.0.4 *Ist $A_{m-1} \times A_m$ das Fusionsgitter einer chiralen Erweiterung, dann ist ϑ_2 nicht-trivial. Für die chiralen Erweiterungen, die die Graphen E_7 oder E_8 enthalten, ist ϑ_2 trivial.*

Beweis

Wird α repräsentiert durch einen der Eckpunkte des Gitters, dann sind alle übrigen Knoten zu Sektoren der Form $\alpha \circ \sigma_{i,j}$ assoziiert. Dementsprechend wirkt auch ϑ_2 nicht-trivial. In diesem Fall ist die Kategorie $\text{Ext}(\iota)$ isomorph zur Tensorategorie $\text{End}(\mathcal{A})$ des VIRASORO-Netzes.

Im Falle der Graphen $G \in \{E_7, E_8\}$ ist $\text{Aut}(G)$ trivial. \square

5.1 Symmetrie der Graphen (A_{2n}, D_{n+2}) und (D_{n+1}, A_{2n})

Im Sinne des letzten Abschnitts sollen zunächst die beiden Fälle untersucht werden, die einen D -Graphen enthalten. Grundlage der Analyse wird folglich das in Abbildung 5.1 gezeigte Gitter sein. Die Nomenklatur ist hierbei so gewählt, dass α einem der beiden Sektoren kleinster Dimension entspricht. Im Falle D_k für $k \geq 5$ bildet $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ die beiden zugehörigen Vertizes aufeinander ab, so dass keine der beiden Möglichkeiten ausgezeichnet ist. Δ_ι sei das aufspannende System irreduzibler \mathcal{A} - \mathcal{B} -Morphismen der chiralen Erweiterung. Weiterhin sei...

$$l = \frac{m_2}{2} .$$

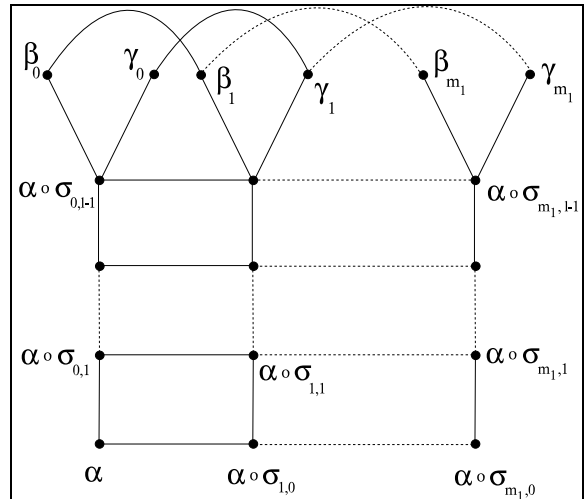


Fig. 5.1: Skizze der Graphen (A_{2n}, D_{n+2}) .

Satz 5.1.1 *Sei $A_{m_1+1} \times D_{l+2}$ das Fusionsgitter einer chiralen Erweiterung, ferner $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ der Automorphismus (5.2). ϑ_2 wirkt genau dann trivial auf D_{l+2} , falls $4 \mid m_2$.*

Beweis

Zunächst soll der Fall $l + 2 > 4$ werden, für den $\text{Aut}(D_{l+2})$ lediglich zwei Elemente enthält. Angenommen \varnothing_2 ist die Identität, so folgt insbesondere...

$$\beta_i \circ \sigma_{0,l-1} \simeq \beta_i \circ \sigma_{0,m_2} \circ \sigma_{0,l-1} \simeq \beta_i \circ \sigma_{0,l+1} \quad (5.3)$$

Ferner gilt $\beta_i \circ \sigma_{0,l} \circ \sigma_{0,1} \simeq \alpha \circ \sigma_{i,l-1} \circ \sigma_{0,l}$ aufgrund der Kommutativität. Nun enthält $\alpha \circ \sigma_{i,l-1} \circ \sigma_{0,l} \simeq \alpha \circ \sigma_{i,1} \oplus \alpha \circ \sigma_{i,3} \oplus \dots \alpha \circ \sigma_{i,m_2-1}$ den Sektor $\alpha \circ \sigma_{i,l}$ maximal einmal. Für diesen gilt:

$$\alpha \circ \sigma_{i,l} \simeq \alpha \circ \sigma_{i,l-1} \circ \sigma_{0,1} \ominus \alpha \circ \sigma_{i,l-2} \simeq \beta_i \oplus \gamma_i .$$

Alle übrigen Beiträge sind (wie durch Ausnutzen der Symmetrie \varnothing_2 ersichtlich) irreduzibel und inäquivalent zu β_i . Folglich...

$$\langle \beta_i \circ \sigma_{0,l} \circ \sigma_{0,1} \mid \beta_i \rangle = \langle \alpha \circ \sigma_{0,l-1} \circ \sigma_{0,l} \mid \beta_i \rangle \leq 1 .$$

Mit (5.3) bedeutet dies...

$$\langle \beta_i \circ \sigma_{0,l} \circ \sigma_{0,1} \mid \beta_i \rangle = 2 \langle \beta_i \circ \sigma_{0,l-1} \mid \beta_i \rangle = 0 .$$

Analog folgt auch $\langle \beta_i \circ \sigma_{0,l-1} \mid \gamma_i \rangle = 0$.

Weiterhin bringt die FROBENIUS-Reziprozität für $2s \leq l \dots$

$$\langle \beta_i \circ \sigma_{0,2s} \mid \alpha \circ \sigma_{0,l} \rangle = \langle \beta_i \mid \alpha \circ \sigma_{0,l} \circ \sigma_{0,2s} \rangle = 1 , \quad (5.4)$$

...denn $\alpha \circ \sigma_{0,l} \circ \sigma_{0,2s} \simeq \alpha \circ \sigma_{0,l-2s} \oplus \alpha \circ \sigma_{0,l-2s+2} \oplus \dots \alpha \circ \sigma_{0,l+2s}$ enthält $\alpha \circ \sigma_{0,l}$ genau einmal, während alle übrigen Summanden erneut irreduzibel und inäquivalent zu β_i sind. Da die obige Argumentation gezeigt hat, dass $\beta_i \circ \sigma_{0,l-1}$ weder β_i noch γ_i enthält, führt (5.4) bei ungeradem l zu einem Widerspruch. Folglich ist l gerade.

Wird umgekehrt l als gerade vorausgesetzt, dann enthält $\beta_i \circ \sigma_{0,l}$ nach (5.4) entweder γ_i oder β_i . Zunächst sei $\beta_i \prec \beta_i \circ \sigma_{0,l}$ angenommen. Aufgrund der Beziehung $\beta_i \circ \sigma_{0,l} \circ \sigma_{0,m_2} \simeq \beta_i \circ \sigma_{0,l}$ (da $m_2 - l = l$) folgt mittels FROBENIUS-Reziprozität aus (5.4)...

$$\langle \beta_i \circ \sigma_{0,m_2} \mid \beta_i \circ \sigma_{0,l} \rangle = 1 . \quad (5.5)$$

$\beta_i \circ \sigma_{0,m_2}$ kann nur äquivalent zu β_i oder γ_i sein. Da nach Annahme $\gamma_i \not\prec \beta_i \circ \sigma_{0,l}$, zeigt (5.5) damit $\beta_i \circ \sigma_{0,m_2} \simeq \beta_i$. Analog lässt sich der Fall $\gamma_i \prec \beta_i \circ \sigma_{0,l}$ behandeln — mit dem Resultat $\gamma_i \circ \sigma_{0,m_2} \simeq \gamma_i$, was den Beweis für $l + 2 > 4$ abschließt.

Tatsächlich ist der Satz auch für $l + 2 = 4$ gültig. Seien α_i, β_i und γ_i die drei äußeren Knoten des Graphen D_4 , δ_i der zentrale, dann gilt:

$$\alpha_i \circ \sigma_{0,1} \simeq \delta_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_i \circ \sigma_{0,2} \simeq \alpha_i \circ \sigma_{0,1}^2 \ominus \alpha_i \simeq \beta_i \oplus \gamma_i$$

... und entsprechend auch für $\beta_i \circ \sigma_{0,2}$ und $\gamma_i \circ \sigma_{0,2}$. Folglich...

$$\alpha_i \circ \sigma_{0,4} \simeq \alpha_i \circ \sigma_{0,2}^2 \ominus \alpha_i \circ \sigma_{0,2} \ominus \alpha_i \simeq \alpha_i \oplus \gamma_i \oplus \alpha_i \oplus \beta_i \ominus \beta_i \ominus \gamma_i \ominus \alpha_i \simeq \alpha_i .$$

Dann natürlich auch $\beta_i \circ \sigma_{0,4} \simeq \beta_i$ und $\gamma_i \circ \sigma_{0,4} \simeq \gamma_i$. Folglich ist \varnothing_2 trivial. \square

Nach Satz 5.1.1 ist \mathcal{D}_2 somit für die Gitter...

$$A_{4k} \times D_{2k+2} \quad \text{und} \quad D_{2k+2} \times A_{4k+2}$$

... mit $k \in \mathbb{N}_0$ trivial, in allen anderen Fällen der eindeutige nichttriviale Automorphismus des Graphen. Abbildung 5.2 zeigt Beispiele für beide Fälle. Hier zeigt sich ein weiteres Phänomen: Wird nämlich die Äquivalenzrelation mitberücksichtigt, so tauchen auch die vorher durch die Graduierung ausgeschlossenen **Tadpole**-Graphen wieder auf.

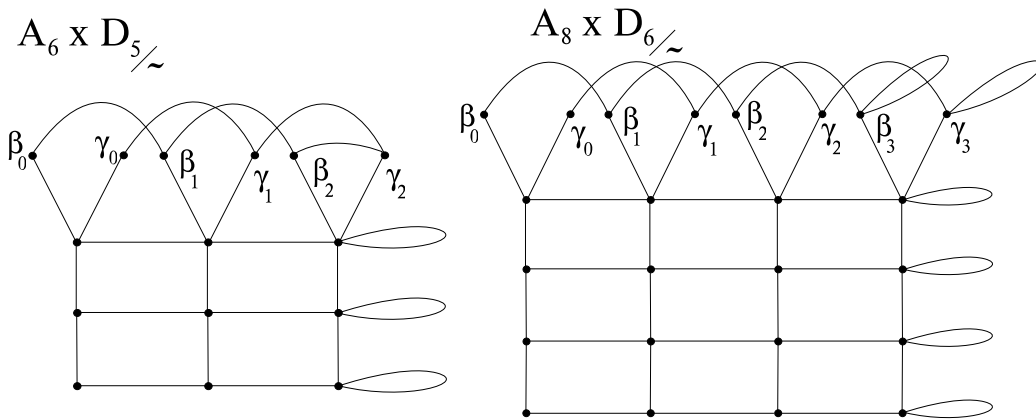


Fig. 5.2: Beispiele für D -Graph-Gitter mit nicht-trivialer $(A_6 \times D_5 / \sim)$, bzw. trivialer $(A_8 \times D_6 / \sim)$ Operation \mathcal{D}_2 .

5.2 Symmetrie der Graphen (E_6, A_{12}) und (A_{10}, E_6)

Als nächstes sollen die Paarungen betrachtet werden, die den Graphen E_6 enthalten, der sich unter den exzeptionellen Fällen durch eine besonders hohe Symmetrie auszeichnet. Während für die anderen beiden Ausnahmegrphen die Dimension der Knoten einer nichttrivialen Identifizierung im Wege steht, kann und wird diese im vorliegenden Fall tatsächlich auftreten, wie die folgende Argumentation zeigt.

Wieder sei die Nummerierung der Generatoren $\sigma_{i,j}$ so gewählt, dass sich der erste Index auf den A -Graphen bezieht, mit $i \in \{0, \dots, m_1\}, j \in \{0, \dots, m_2\}$, m_1 wie im letzten Abschnitt und $m_2 = 10$. Mit α sei konsequenterweise ein Repräsentant der Klasse $([v_0], [w_0])$ der Knoten minimaler Dimension bezeichnet (einer der vier Eckpunkte des Gitters $A_k \times E_6$).

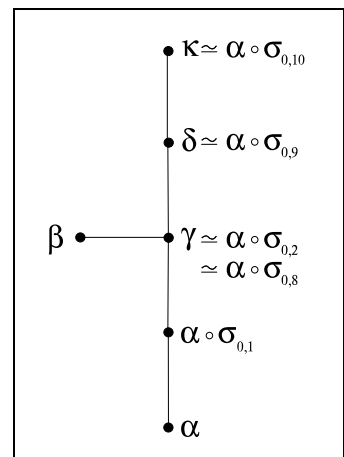


Fig. 5.3: Identifizierung der Knoten in E_6 .

Betrachten wir zunächst den Teilgraphen $G = \{\iota \prec \alpha \circ \sigma_{0,1}^n \mid n \in \mathbb{N}, \iota \text{ irreduzibel}\} = v_0 \times E_6$. Sechs der elf Sektoren $\alpha \circ \sigma_{0,k}$ mit $k \in \{0 \dots 10\}$ erweisen sich als irreduzibel und folgen dem Satz:

Satz 5.2.1 *Die Sektoren $\alpha \circ \sigma_{0,k}$ mit $k \in \{0, 1, 2, 8, 9, 10\}$ sind irreduzibel und entsprechen, wie in Abbildung 5.3 gezeigt, Knoten von G . Außerdem ist die Wirkung von \mathfrak{D}_2 gegeben durch das eindeutige nichttriviale Element der Gruppe $\text{Aut}(E_6)$.*

Beweis

Irreduzibilität für $k \in \{0, 1\}$ ist klar. Nun lässt sich die Rekursionsbeziehung...

$$\alpha \circ \sigma_{0,l} \simeq \alpha \circ \sigma_{0,l-1} \circ \sigma_{0,1} \ominus \alpha \circ \sigma_{l-2}$$

...verwenden, um $\alpha \circ \sigma_{0,l}$ für $l \in \{2, \dots, 7\}$ zu berechnen. Mit dem folgenden Resultat...

$$\begin{aligned} \alpha \circ \sigma_{0,2} &\simeq \gamma & , & & \alpha \circ \sigma_{0,3} &\simeq \beta \oplus \delta & , & & \alpha \circ \sigma_{0,4} &\simeq \kappa \oplus \gamma \\ \alpha \circ \sigma_{0,5} &\simeq \delta \oplus \alpha \circ \sigma_{0,1} & , & & \alpha \circ \sigma_{0,6} &\simeq \gamma \oplus \alpha & , & & \alpha \circ \sigma_{0,7} &\simeq \beta \oplus \alpha \circ \sigma_{0,1} \end{aligned}$$

Beide Elemente in $\text{Aut}(E_6)$ fixieren den Vertex γ , daher gilt $\alpha \circ \sigma_{0,2} \simeq \alpha \circ \sigma_{0,8}$. Da $\alpha \circ \sigma_{0,4}$ und $\alpha \circ \sigma_{0,6}$ inäquivalent sind, kann \mathfrak{D}_2 nicht trivial sein. Dies legt auch $\kappa \simeq \alpha \circ \sigma_{0,10}$ fest, ebenso $\delta \simeq \alpha \circ \sigma_{0,9}$. \square

Vollkommen analog gilt dieser Beweis natürlich ebenso für die Teilgraphen $G_i = \{\iota \prec \alpha \circ \sigma_{i,0} \circ \sigma_{0,1}^n \mid n \in \mathbb{N}, \iota \text{ irreduzibel}\}$. Als direkte Konsequenz aus den Sätzen 5.2.1 und 5.0.3 notieren wir:

Korollar 5.2.1 *Es gelten die Sektoridentifikationen:*

$$\begin{aligned} \alpha \circ \sigma_{i,0} &\simeq \kappa_{m_1-i} & \alpha \circ \sigma_{i,1} &\simeq \delta_{m_1-i} \\ \alpha \circ \sigma_{i,2} &\simeq \alpha \circ \sigma_{m_1-i,2} & \beta_i &\simeq \beta_{m_1-i} \end{aligned}$$

...mit $i \in \{0, \dots, m_1\}$ und den Bezeichnungen der Sektoren wie in Abbildung 6.1.

6. KANONISCHE ENDOMORPHISMEN

Anhand der zum VIRASORO-Netz gehörigen Tensorategorie lässt sich nun für ein gegebenes Paar $(G_1 \times G_2, ([v_1], [v_2]))$ die Zerlegung des zugehörigen kanonischen Endomorphismus in seine irreduziblen Komponenten bestimmen. Dies entspricht nach Satz 3.2.5 der Zerlegung des Hilbertraums der chiralen Theorie in dessen Superauswahlsektoren.

Sei $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ eine chirale Erweiterung eines VIRASORO-Netzes $\mathcal{A} = \text{Vir}_c$ mit $c < 1$, so fixieren folglich die Multiplizitäten der Superauswahlsektoren $\sigma_{i,j}$ im zugehörigen (dualen) kanonischen Endomorphismus $\rho = \bar{\tau} \iota$ diesen vollständig bis auf unitäre Äquivalenz. Die Vielfachheit des Sektors $\sigma_{i,j}$ in ρ ist allerdings aufgrund der FROBENIUS-Reziprozität gleich derjenigen des \mathcal{A} - \mathcal{B} -Morphismus ι in $\iota \circ \sigma_{i,j}$. Letztere ergibt sich allerdings aus Betrachtungen am Fusionsgitter $G_1 \times G_2 / \sim$ (siehe Satz 4.2.2) der Erweiterung. Dieser Weg soll im Folgenden für *alle* möglichen Graphenpaare besprochen werden.

Hierbei sei G_1 immer der A_k -Graph gerader Knotenzahl (A_k^{ev}) der Paarung, $\sigma_{1,0}$ der zugehörige Generator. In allen Fällen genügt es, den (bis auf Symmetrie) ersten vertikalen Subgraphen $(G_1 \times G_2, ([v_0], [v_2]))$ mit den extremalen Knoten v_0 in G_1 zu betrachten. Auch in diesem Untergraphen lassen sich die kanonischen Endomorphismen der von inneren Vertizes repräsentierten Sektoren zurückführen auf diejenigen, die äußeren Knoten entsprechen. Dazu halten wir die folgenden „Rechenregeln“ fest, wobei die Konstanten m_1 und m_2 so gewählt seien wie in Kapitel 5:

Satz 6.0.2 *Sei $G_1 \times G_2 / \sim$ ein Fusionsgitter wie oben, ferner sei α repräsentiert durch den Knoten (v, w) des Gitters und $\rho^\alpha = \bar{\alpha} \alpha$ der zugehörige (duale) kanonische Endomorphismus. Dann gilt:*

- (i) *Existiert $\tilde{\alpha}$ repräsentiert durch den extremalen Knoten (v_0, w_0) , so dass $\tilde{\alpha} \circ \sigma_{j,i} \simeq \alpha$ mit $0 \leq j \leq \frac{m_1}{2}$, $0 \leq i \leq \frac{m_2}{2}$, dann gilt für $\rho^{\tilde{\alpha}} = \bar{\tilde{\alpha}} \tilde{\alpha}$:*

$$\rho^\alpha = \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{2j} \bigoplus_{\substack{l=0 \\ l \text{ gerade}}}^{2i} \rho^{\tilde{\alpha}} \circ \sigma_{k,l} . \quad (6.1)$$

- (ii) *Ist $v \in [v_0]$ einer der äußeren beiden Punkte des A_k^{ev} -Graphen, dann enthält ρ^α nur Sektoren der Form $\sigma_{0,2l}$.*

Beweis

Punkt (i) ist eine Konsequenz aus den Fusionsregeln (3.14) und der Beziehung...

$$\rho^\alpha \simeq \sigma_{j,i} \circ \rho^{\tilde{\alpha}} \circ \sigma_{j,i} \simeq \rho^{\tilde{\alpha}} \circ \sigma_{j,i}^2 .$$

Zu (ii): ρ^α enthält lediglich Sektoren der Form $\sigma_{0,k}$ wie im Beweis zu 4.2.2. Verschiedene Knoten in G_2 repräsentieren unterschiedliche Sektoren nach Lemma 5.0.2. Folglich ist G_2 graduiert (um von α aus zu einem Sektor gleichen Grades zu gelangen sind zwei „Schritte“ im Fusionsgraphen nötig). \square

Notiz. Die Bedingung $j \leq \frac{m_1}{2}$ ist für die Gültigkeit des Satzes 6.0.2 notwendig, stellt aber aufgrund der im letzten Kapitel hergeleiteten Symmetrie \ni der induzierten Graphen keine Einschränkung dar, da sich die übrigen Endomorphismen aus der Identifizierung der Knoten ergeben.

Im Fall der Gitter $A_{m-1} \times A_m$, liefert Satz 6.0.2, Punkt (i) sofort eine vollständige Klassifizierung der kanonischen Endomorphismen:

Satz 6.0.3 *Seien (v_0, w_0) einer der Eckpunkte des Gitters $A_{m-1} \times A_m$, ferner sei α der durch diesen Knoten repräsentierte Sektor, dann gilt mit $\iota_{j,m} = \alpha \circ \sigma_{j,m}$ und $\rho_{j,m} = \bar{\tau}_{j,m} \circ \iota_{j,m}$ für $0 \leq j \leq \frac{m_1}{2}, 0 \leq m \leq \frac{m_2}{2}$*

$$\rho_{j,m} \simeq \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{2j} \bigoplus_{\substack{l=0 \\ l \text{ gerade}}}^{2m} \sigma_{k,l}$$

Beweis

Nach Satz 5.0.4 ist $\bar{\alpha} \simeq \text{id} \simeq \sigma_{m_1, m_2}$. Alle anderen Sektoren $\alpha \circ \sigma_{i,j}$ sind inäquivalent zu α . Mit Satz 6.0.2, Punkt (i) folgt das Resultat. \square

6.1 Kanonische Endomorphismen zu (A_{2n}, D_{n+2}) und (D_{n+1}, A_{2n})

In bezug auf die D_{l+2} -Graph-Paarungen seien m_1, m_2 und l so gewählt wie in Kapitel 5, Abb. 5.1, ebenso der Sektor α . Gegeben sei ferner $\iota_s = \alpha \circ \sigma_{0,s}$ mit $s \leq l-1$ — repräsentiert durch einen entsprechenden Knoten des ersten vertikalen D_{l+2} -Subgraphen. Der zugehörige (duale) kanonische Endomorphismus sei $\rho_s = \bar{\tau}_s \circ \iota_s$. Für die Zerlegung von ρ_s in irreduzible Komponenten gilt:

Satz 6.1.1 *Sei α ein Sektor repräsentiert durch einen extremalen Knoten in $A_{2n} \times G_2 / \sim$ mit $G_2 \in \{D_{n+1}, D_{n+2}\}$, dann gilt für $\iota_s = \alpha \circ \sigma_{0,s}$ und $\rho_s = \bar{\tau}_s \circ \iota_s$ für $0 \leq s \leq l-1$:*

$$\rho_s \simeq \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{2s} \sigma_{0,k} \oplus \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{2s} \sigma_{0, m_2 - k} .$$

Beweis

Der Automorphismus \ni_2 (siehe auch Satz 5.1.1) fixiert die Knoten der Sektoren $\alpha \circ \sigma_{0,j} \simeq \alpha \circ \sigma_{0, m_2 - j}$ für $0 \leq j \leq l-1$. Folglich gilt $\alpha \simeq \alpha \circ \sigma_{0, m_2}$, somit ist $\sigma_{0, m_2} \prec \rho_0$. Alle anderen Elemente dieser Sequenz sind zwar irreduzibel, aber inäquivalent zu α , da sie durch einen anderen Knoten des Graphen repräsentiert werden.

Die Zerlegung ...

$$\alpha \circ \sigma_{0,l} \simeq \beta_0 \oplus \gamma_0$$

...schließt auch den Index l aus der Liste der zu α äquivalenten Sektoren aus. Somit:

$$\rho_0 = \bar{\alpha} \circ \alpha \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,m_2} .$$

Eine Anwendung des Satzes 6.0.2 vervollständigt den Beweis:

$$\rho_s \simeq \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{2s} \rho_0 \circ \sigma_{0,k} \simeq \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{2s} \sigma_{0,k} \oplus \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{2s} \sigma_{0,m_2-k} .$$

□

Satz 6.1.2 Für den durch β_0 induzierten kanonischen Endomorphismus gilt:

$$\bar{\beta}_0 \circ \beta_0 \simeq \bigoplus_{\substack{k=0 \\ 4k \leq m_2}} \sigma_{0,4k} .$$

Beweis

Aus (5.4) im Beweis zu Satz 5.1.1 ist zu entnehmen, dass für $0 \leq 2s \leq l$ gilt...

$$\langle \beta_i \circ \sigma_{0,2s} \mid \alpha \circ \sigma_{0,l} \rangle = \langle \beta_i \circ \sigma_{0,2s} \mid \alpha \circ \sigma_{0,l} \circ \sigma_{0,m_2} \rangle = \langle \beta_i \circ \sigma_{0,m_2-2s} \mid \alpha \circ \sigma_{0,l} \rangle = 1 ,$$

Ist $\beta_0 \prec \beta_0 \circ \sigma_{0,2s}$, so folgt $\langle \beta_0 \circ \sigma_{0,2} \mid \beta_0 \circ \sigma_{0,2s} \rangle \leq 1$, d.h. für $1 \leq 2s \leq m_2 - 1$:

$$\langle \beta_0 \mid \beta_0 \circ \sigma_{0,2s-2} \rangle + \underbrace{\langle \beta_0 \mid \beta_0 \circ \sigma_{0,2s} \rangle}_{=1} + \langle \beta_0 \mid \beta_0 \circ \sigma_{0,2s+2} \rangle \leq 1 .$$

Somit impliziert $\beta_0 \prec \beta_0 \circ \sigma_{0,2s}$ auch $\gamma_0 \prec \beta_0 \circ \sigma_{0,2s+2}$. Analog folgt: $\gamma_0 \prec \beta_0 \circ \sigma_{0,2s} \Rightarrow \beta_0 \prec \beta_0 \circ \sigma_{0,2s+2}$. Nun beweist $\gamma_0 \prec \beta_0 \circ \sigma_{0,2}$ die Behauptung. □

6.2 Kanonische Endomorphismen zu (E_6, A_{12}) und (A_{10}, E_6)

Der Ausnahmefall höchster Symmetrie wurde bereits in Kapitel 5.2 behandelt. Die dort angeführten Ideen reichen aus, um den zu einem extremalen Vertex gehörigen kanonischen Endomorphismus in seine irreduziblen Komponenten zu zerlegen — siehe Satz 5.2.1.

Satz 6.2.1 Seien $[w_0]$ und $[v_0]$ die Symmetrieklassen extremaler Vertizes in E_6 bzw. $G_1 \in \{A_{12}, A_{10}\}$, sei ferner α ein Sektor repräsentiert durch einen Knoten aus $([v_0], [w_0]) \in G_1 \times E_6$, β wie in Abbildung 5.3, dann gilt für $\iota_m = \alpha \circ \sigma_{0,m}$ und $\rho_m = \bar{\iota}_m \circ \iota_m$ für $0 \leq m \leq 2$:

$$\rho_0 \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,6} \tag{6.2}$$

$$\rho_1 \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,2} \oplus \sigma_{0,4} \oplus 2\sigma_{0,6} \oplus \sigma_{0,8} \tag{6.3}$$

$$\rho_2 \simeq \text{id} \oplus 2\sigma_{0,2} \oplus 3\sigma_{0,4} \oplus 3\sigma_{0,6} \oplus 2\sigma_{0,8} \oplus \sigma_{0,10} \tag{6.4}$$

$$\rho^\beta = \bar{\beta} \circ \beta \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,4} \oplus \sigma_{0,6} \oplus \sigma_{0,10} . \tag{6.5}$$

Beweis

Wie Satz 5.2.1 gezeigt hat, gilt $\rho_0 \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,6}$. Die Zerlegungen (6.3) und (6.4) ergeben sich direkt aus Satz 6.0.2. Es bleibt (6.5). Da ∂_2 den zu β assoziierten Knoten fixiert gilt $\beta \simeq \beta \circ \sigma_{0,m_2}$. Somit muss auch ρ^β symmetrisch unter dieser Operation sein. Die Fusionsregeln liefern für $\beta \circ \sigma_{0,2}$ die Zerlegung...

$$\beta \circ \sigma_{0,2} \simeq \alpha \circ \sigma_{0,1} \oplus \alpha \circ \sigma_{0,9} .$$

Folglich gilt mittels FROBENIUS-Reziprozität:

$$2 = \langle \beta \circ \sigma_{0,2} | \beta \circ \sigma_{0,2} \rangle = \underbrace{\langle \beta | \beta \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle \beta | \beta \circ \sigma_{0,2} \rangle}_{=0} + \langle \beta | \beta \circ \sigma_{0,4} \rangle$$

Aufgrund der oben erwähnten Symmetrie unter Verknüpfung mit $\sigma_{0,10}$ müssen auch die Sektoren $\beta \circ \sigma_{0,6}$ und $\beta \circ \sigma_{0,10}$ jeweils β einmal als Subsektor enthalten, während dies für $\beta \circ \sigma_{0,8}$ dadurch gerade unmöglich wird. \square

6.3 Kanonische Endomorphismen zu (E_7, A_{18}) und (A_{16}, E_7)

Der nächste Ausnahmefall betrifft die Graphenpaarungen, die das DYNKIN-Diagramm E_7 enthalten, dessen Symmetriegruppe trivial ist. Die Dimensionen aller Vertizes sind verschieden, hieraus lässt sich als erstes der Schluß ziehen, dass sämtliche kanonischen Endomorphismen invariant unter Verknüpfung mit dem Automorphismus $\sigma_{0,16}$ sind. Sei α – wie in den vorigen Kapiteln – einer der beiden Sektoren kleinster Dimension des Gitters $G_1 \times E_7$ mit $G_1 \in \{A_{18}, A_{16}\}$. Dann führen Fusionsregeln und Symmetrie auf eine Bezeichnung der Knoten des Graphen wie in Abbildung 6.1. Wir halten fest:

Satz 6.3.1 *Es gilt:*

$$\bar{\alpha} \circ \alpha \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,8} \oplus \sigma_{0,16}$$

Beweis

Aus der Assoziativität der Fusionsalgebra erhalten wir:

$$\alpha \circ \sigma_{0,4} \simeq \beta \oplus \delta \quad \Rightarrow \quad \bar{\alpha} \circ \alpha \not\simeq \sigma_{0,4} .$$

Der irreduzible Sektor $\alpha \circ \sigma_{0,2}$ tritt in der Zerlegung von $\alpha \circ \sigma_{0,4}$ nicht auf, daher:

$$0 = \langle \alpha \circ \sigma_{0,2} | \alpha \circ \sigma_{0,4} \rangle = \langle \alpha | \alpha \circ \sigma_{0,2} \rangle + \langle \alpha | \alpha \circ \sigma_{0,4} \rangle + \langle \alpha | \alpha \circ \sigma_{0,6} \rangle .$$

Die Suche nach Sektoren, die α enthalten, erweist sich erst bei $\alpha \circ \sigma_{0,8}$ als erfolgreich, denn...

$$2 = \langle \alpha \circ \sigma_{0,4} | \alpha \circ \sigma_{0,4} \rangle = \underbrace{\langle \alpha | \alpha \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle \alpha | \alpha \circ \sigma_{0,2} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \alpha | \alpha \circ \sigma_{0,4} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \alpha | \alpha \circ \sigma_{0,6} \rangle}_{=0} + \langle \alpha | \alpha \circ \sigma_{0,8} \rangle .$$

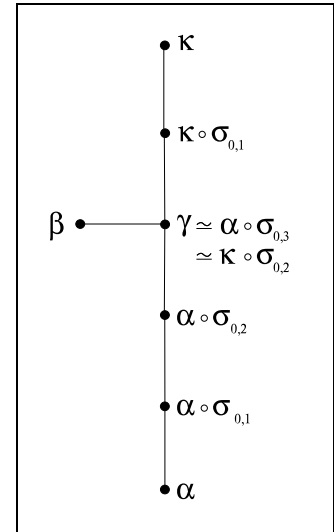


Fig. 6.1: Identifizierung der Knoten in E_7 .

Alle übrigen behaupteten Sektorbeziehungen ergeben sich aus der Symmetrie unter Verknüpfung mit $\sigma_{0,16}$, die $\alpha \circ \sigma_{0,10}$ bis $\alpha \circ \sigma_{0,14}$ aus- und $\alpha \circ \sigma_{0,16}$ einschließt. \square

Auch hier legt dies bereits alle anderen kanonischen Endomorphismen fest, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 6.3.2 *Seien $[w_0]$ und $[v_0]$ die Symmetrieklassen extremaler Vertizes in E_7 bzw. $G_1 \in \{A_{16}, A_{18}\}$, sei ferner α ein Sektor repräsentiert durch einen Knoten aus $([v_0], [w_0]) \in G_1 \times E_6$, β und κ wie in Abbildung 6.1, dann gilt für $\iota_m = \alpha \circ \sigma_{0,m}$ und $\rho_m = \bar{\iota}_m \circ \iota_m$ für $0 \leq m \leq 3$, bzw. für $\iota_n^\kappa = \kappa \circ \sigma_{0,n}$ und $\rho_n^\kappa = \bar{\iota}_n^\kappa \circ \iota_n^\kappa$ für $0 \leq n \leq 1$:*

$$\rho_0 \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,8} \oplus \sigma_{0,16} \quad (6.6)$$

$$\rho_1 \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,2} \oplus \sigma_{0,6} \oplus 2\sigma_{0,8} \oplus \sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,14} \oplus \sigma_{0,16} \quad (6.7)$$

$$\rho_2 \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,2} \oplus 2\sigma_{0,4} \oplus 2\sigma_{0,6} \oplus 3\sigma_{0,8} \oplus 2\sigma_{0,10} \oplus 2\sigma_{0,12} \oplus \sigma_{0,14} \oplus \sigma_{0,16} \quad (6.8)$$

$$\rho_3 \simeq \text{id} \oplus 2\sigma_{0,2} \oplus 3\sigma_{0,4} \oplus 4\sigma_{0,6} \oplus 4\sigma_{0,8} \oplus 4\sigma_{0,10} \oplus 3\sigma_{0,12} \oplus 2\sigma_{0,14} \oplus \sigma_{0,16} \quad (6.9)$$

$$\rho_0^\kappa \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,6} \oplus \sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,16} \quad (6.10)$$

$$\rho_1^\kappa \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,2} \oplus \sigma_{0,4} \oplus 2\sigma_{0,6} \oplus 2\sigma_{0,8} \oplus 2\sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,12} \oplus \sigma_{0,14} \oplus \sigma_{0,16} \quad (6.11)$$

$$\rho^\beta \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,4} \oplus \sigma_{0,6} \oplus \sigma_{0,8} \oplus \sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,12} \oplus \sigma_{0,16} . \quad (6.12)$$

Beweis

Die Zerlegung des zu α gehörigen Endomorphismus ρ_0 ergibt sich aus Satz 6.3.1. Schließlich klärt Satz 6.0.2 die Form von (6.7) bis (6.9). Die unitäre Äquivalenz $\alpha \circ \sigma_{0,3} \simeq \kappa \circ \sigma_{0,2}$ und die Irreduzibilität des Sektors $\kappa \circ \sigma_{0,2}$ geben Anlass zu folgenden Überlegungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \rho_3 \mid \text{id} \rangle = \langle \kappa \circ \sigma_{0,2} \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \rangle = \underbrace{\langle \kappa \mid \kappa \rangle}_{=1} + \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \rangle + \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,4} \rangle \\ 2 &= \langle \rho_3 \mid \sigma_{0,2} \rangle = \langle \kappa \circ \sigma_{0,2} \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \circ \sigma_{0,2} \rangle \\ &= \underbrace{\langle \kappa \circ \sigma_{0,2} \mid \kappa \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \kappa \circ \sigma_{0,2} \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \rangle}_{=1} + \langle \kappa \circ \sigma_{0,2} \mid \kappa \circ \sigma_{0,4} \rangle \\ \Rightarrow 1 &= \underbrace{\langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,4} \rangle}_{=0} + \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,6} \rangle \\ 3 &= \langle \rho_3 \mid \sigma_{0,4} \rangle = \langle \kappa \circ \sigma_{0,2} \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \circ \sigma_{0,4} \rangle \\ &= \langle \kappa \mid \kappa \rangle + 2 \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \rangle + 3 \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,4} \rangle + 2 \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,6} \rangle + \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,8} \rangle \\ \Rightarrow 0 &= \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,8} \rangle . \end{aligned}$$

Die restlichen Subsektoren des kanonischen Endomorphismus ρ_0^κ ergeben sich aus der Symmetrie unter Verknüpfung mit $\sigma_{0,16}$. Da natürlich auch $\rho_1^\kappa \simeq \rho_0^\kappa \oplus \rho_0^\kappa \circ \sigma_{0,2}$ lässt sich die Zerlegung von ρ_1^κ aus der von ρ_0^κ gewinnen. Auf ähnliche Weise lässt sich ρ^β filtern. Hier

nutzen wir $\beta \circ \sigma_{0,1} \simeq \alpha \circ \sigma_{0,3}$.

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \rho_3 \mid \text{id} \rangle = \langle \beta \circ \sigma_{0,1} \mid \beta \circ \sigma_{0,1} \rangle = \underbrace{\langle \beta \mid \beta \rangle}_{=1} + \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,2} \rangle \\
2 &= \langle \rho_3 \mid \sigma_{0,2} \rangle = \langle \beta \circ \sigma_{0,1} \mid \beta \circ \sigma_{0,1} \circ \sigma_{0,2} \rangle = \underbrace{\langle \beta \mid \beta \rangle}_{=1} + 2 \underbrace{\langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,2} \rangle}_{=0} + \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,4} \rangle \\
3 &= \langle \rho_3 \mid \sigma_{0,4} \rangle = \langle \beta \circ \sigma_{0,1} \mid \beta \circ \sigma_{0,1} \circ \sigma_{0,4} \rangle = \underbrace{\langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,2} \rangle}_{=0} + 2 \underbrace{\langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,4} \rangle}_{=1} + \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,6} \rangle \\
4 &= \langle \rho_3 \mid \sigma_{0,6} \rangle = \langle \beta \circ \sigma_{0,1} \mid \beta \circ \sigma_{0,1} \circ \sigma_{0,6} \rangle = \underbrace{\langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,4} \rangle}_{=1} + 2 \underbrace{\langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,6} \rangle}_{=1} + \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,8} \rangle
\end{aligned}$$

Auch hier ergeben sich die übrigen Subsektoren aus der Symmetrie. \square

6.4 Kanonische Endomorphismen zu (E_8, A_{30}) und (A_{28}, E_8)

Für den letzten Ausnahmefall lassen sich aufgrund der Ähnlichkeit des Graphen E_8 zu E_7 die Argumente des letzten Abschnitts übertragen. Auch hier sorgt die triviale Symmetriegruppe für eine Invarianz der kanonischen Endomorphismen unter Verknüpfung mit $\sigma_{0,28}$. Seien die Bezeichnungen der durch die Knoten repräsentierten Sektoren wie in Abbildung 6.2 gewählt. Analog zur Argumentation in Satz 6.3.1 lässt sich jetzt die Zerlegung des extremalen Sektors α durchführen.

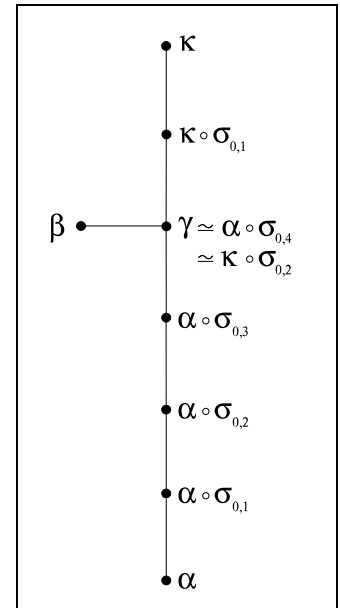


Fig. 6.2: Identifizierung der Knoten in E_8 .

Satz 6.4.1 *Es gilt:*

$$\bar{\alpha} \circ \alpha \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,18} \oplus \sigma_{0,28} .$$

Beweis

Die Assoziativität der Fusionsregeln liefert die folgenden beiden Zerlegungen:

$$\alpha \circ \sigma_{0,5} \simeq \beta \oplus \delta \quad , \quad \alpha \circ \sigma_{0,7} \simeq \alpha \circ \sigma_{0,3} \oplus \delta .$$

Aus der Irreduzibilität des Sektors $\alpha \circ \sigma_{0,4}$ ergibt sich...

$$1 = \langle \alpha \circ \sigma_{0,4} \mid \alpha \circ \sigma_{0,4} \rangle = \underbrace{\langle \alpha \mid \alpha \rangle}_{=1} + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,2} \rangle + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,4} \rangle + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,6} \rangle + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,8} \rangle .$$

Die Dimensionen der folgenden beiden Intertwinerräume ergeben sich, wie die obigen Zerlegungen zeigen zu 2, daher...

$$\begin{aligned}
2 &= \langle \alpha \circ \sigma_{0,5} \mid \alpha \circ \sigma_{0,5} \rangle = \underbrace{\langle \alpha \mid \alpha \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,2} \rangle + \dots + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,8} \rangle}_{=0} + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,10} \rangle \\
2 &= \langle \alpha \circ \sigma_{0,7} \mid \alpha \circ \sigma_{0,7} \rangle = \underbrace{\langle \alpha \mid \alpha \rangle + \dots + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,10} \rangle}_{=2} + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,12} \rangle + \langle \alpha \mid \alpha \circ \sigma_{0,14} \rangle .
\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie genügt dies, um auch die übrigen behaupteten Sektorbeziehungen zu beweisen. \square

Anhand dieser Information lassen sich in Analogie zum letzten Abschnitt alle kanonischen Endomorphismen zu extremalen Vertizes des Gitters bestimmen.

Satz 6.4.2 *Seien $[w_0]$ und $[v_0]$ die Symmetrieklassen extremaler Vertizes in E_8 bzw. $G_1 \in \{A_{28}, A_{30}\}$, sei ferner α ein Sektor repräsentiert durch einen Knoten aus $([v_0], [w_0]) \in G_1 \times E_8$, β und κ wie in Abbildung 6.2, dann gilt für $\iota_m = \alpha \circ \sigma_{0,m}$ und $\rho_m = \bar{\iota}_m \circ \iota_m$ für $0 \leq m \leq 4$, bzw. für $\iota_n^\kappa = \kappa \circ \sigma_{0,n}$ und $\rho_n^\kappa = \bar{\iota}_n^\kappa \circ \iota_n^\kappa$ für $0 \leq n \leq 1$:*

$$\rho_0 \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,18} \oplus \sigma_{0,28} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \simeq & \text{id} \oplus \sigma_{0,2} \oplus \sigma_{0,8} \oplus 2\sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,12} \\ & \oplus \sigma_{0,16} \oplus 2\sigma_{0,18} \oplus \sigma_{0,20} \oplus \sigma_{0,26} \oplus \sigma_{0,28} \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \simeq & \text{id} \oplus \sigma_{0,2} \oplus \sigma_{0,4} \oplus \sigma_{0,6} \oplus 2\sigma_{0,8} \oplus 3\sigma_{0,10} \oplus 2\sigma_{0,12} \oplus 2\sigma_{0,14} \\ & \oplus 2\sigma_{0,16} \oplus 3\sigma_{0,18} \oplus 2\sigma_{0,20} \oplus \sigma_{0,22} \oplus \sigma_{0,24} \oplus \sigma_{0,26} \oplus \sigma_{0,28} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \rho_3 \simeq & \text{id} \oplus \sigma_{0,2} \oplus 2\sigma_{0,4} \oplus 3\sigma_{0,6} \oplus 3\sigma_{0,8} \oplus 4\sigma_{0,10} \oplus 4\sigma_{0,12} \oplus 4\sigma_{0,14} \\ & \oplus 4\sigma_{0,16} \oplus 4\sigma_{0,18} \oplus 3\sigma_{0,20} \oplus 3\sigma_{0,22} \oplus 2\sigma_{0,24} \oplus \sigma_{0,26} \oplus \sigma_{0,28} \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \rho_4 \simeq & \text{id} \oplus 2\sigma_{0,2} \oplus 3\sigma_{0,4} \oplus 4\sigma_{0,6} \oplus 5\sigma_{0,8} \oplus 6\sigma_{0,10} \oplus 6\sigma_{0,12} \oplus 6\sigma_{0,14} \\ & \oplus 6\sigma_{0,16} \oplus 6\sigma_{0,18} \oplus 5\sigma_{0,20} \oplus 4\sigma_{0,22} \oplus 3\sigma_{0,24} \oplus 2\sigma_{0,26} \oplus \sigma_{0,28} \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\rho_0^\kappa \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,6} \oplus \sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,12} \oplus \sigma_{0,16} \oplus \sigma_{0,18} \oplus \sigma_{0,22} \oplus \sigma_{0,28} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^\kappa \simeq & \text{id} \oplus \sigma_{0,2} \oplus \sigma_{0,4} \oplus 2\sigma_{0,6} \oplus 2\sigma_{0,8} \oplus 3\sigma_{0,10} \oplus 3\sigma_{0,12} \oplus 2\sigma_{0,14} \\ & \oplus 3\sigma_{0,16} \oplus 3\sigma_{0,18} \oplus 2\sigma_{0,20} \oplus 2\sigma_{0,22} \oplus \sigma_{0,24} \oplus \sigma_{0,26} \oplus \sigma_{0,28} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \rho^\beta \simeq & \text{id} \oplus \sigma_{0,4} \oplus \sigma_{0,6} \oplus \sigma_{0,8} \oplus 2\sigma_{0,10} \oplus \sigma_{0,12} \oplus 2\sigma_{0,14} \\ & \oplus \sigma_{0,16} \oplus 2\sigma_{0,18} \oplus \sigma_{0,20} \oplus \sigma_{0,22} \oplus \sigma_{0,24} \oplus \sigma_{0,28} . \end{aligned} \quad (6.20)$$

Beweis

Wie in Satz 6.3.2 ergeben sich auch hier die Endomorphismen ρ_0 bis ρ_4 zu α anhand unserer Vorbereitung aus Satz 6.4.1, bzw. aus Satz 6.0.2. Aufgrund der Sektoräquivalenz zwischen $\kappa \circ \sigma_{0,2}$ und $\alpha \circ \sigma_{0,4}$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \rho_4 \mid \text{id} \rangle = \underbrace{\langle \kappa \mid \kappa \rangle}_{=1} + \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \rangle + \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,4} \rangle \\ 2 &= \langle \rho_4 \mid \sigma_{0,2} \rangle = \underbrace{\langle \kappa \mid \kappa \rangle}_{=1} + 3 \underbrace{\langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,2} \rangle}_{=0} + 2 \underbrace{\langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,4} \rangle}_{=0} + \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{0,6} \rangle . \end{aligned}$$

Für $l \in \{2, \dots, 5\}$ lassen sich die aufsteigenden Dimensionen der Intertwinerräume in ähnlicher Weise ausnutzen, um aus...

$$(l+1) = \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{2l-4} \rangle + 2 \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{2l-2} \rangle + 3 \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{2l} \rangle + 2 \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{2l+2} \rangle + \langle \kappa \mid \kappa \circ \sigma_{2l+4} \rangle .$$

... weitere Subsektoren des kanonischen Endomorphismus ρ_0^κ zu identifizieren. Alle restlichen ergeben sich dann aus der Symmetrie unter Verknüpfung mit $\sigma_{0,28}$. Ist ρ_0^κ vollständig zerlegt, folgt $\rho_1^\kappa \simeq \rho_0^\kappa \circ (\text{id} \oplus \sigma_{0,2})$ sofort hieraus.

Eine ähnliche Prozedur lässt sich ebenfalls für den Sektor β durchführen unter Verwendung der unitären Äquivalenz $\beta \circ \sigma_{0,1} \simeq \alpha \circ \sigma_{0,4}$. Für $l \in \{1, \dots, 5\}$ gilt:

$$(l + 1) = \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,2l-2} \rangle + 2 \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,2l} \rangle + \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,2l+2} \rangle .$$

Den fehlenden Sektor $\sigma_{0,14}$ erfasst dann die folgende Beziehung:

$$6 = \langle \rho_4 \mid \sigma_{0,12} \rangle = \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,10} \rangle + 2 \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,12} \rangle + \langle \beta \mid \beta \circ \sigma_{0,14} \rangle .$$

Auch hier gibt die Symmetrie Aufschluss über die übrigen Sektoren. □

7. CHIRALE UND LOKALE FELDER IM MODELL (A_{10}, E_6)

Dieses Kapitel widmet sich der Betrachtung der konkreten chiralen Erweiterung $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, die durch das Graphenpaar (A_{10}, E_6) beschrieben wird. Als ausgezeichneten Punkt des Graphen wählen wir den Knoten α aus Abb. 5.3. Dies liefert den dualen kanonischen Endomorphismus...

$$\rho_\alpha = \bar{\alpha} \circ \alpha \simeq \text{id} \oplus \sigma_{0,6} . \quad (7.1)$$

Ziel ist die Bestimmung eines geladenen chiralen Feldes in seiner Einbettung in das reduzierte Feldbündel. Eine offensichtliche Fortsetzung dieses Feldes auf den Halbraum wird sich als *nichtlokal* herausstellen. Die Gründe hierfür werden diskutiert. Effektiv sind nach (3.36) die Konstanten (Γ_{us}^t) zu berechnen. Wie in Abschnitt 7.3 zu sehen sein wird, lassen sich Einschränkungen an (Γ_{us}^t) zum einen aus der Austauschalgebra gewinnen, zum anderen sind im Falle des analysierten Modells bereits die Bedingungen an das zugehörige Q-System restriktiv genug, um diese zu fixieren. Beide Ergebnisse werden verglichen und führen zu konsistenten Resultaten.

Alle Endomorphismen, die für beide Zerlegungen in Frage kommen, entstammen dem folgenden System...

$$\Delta := \{ \sigma \prec \sigma_{0,1}^k \text{ irreduzibel} \mid k \in \mathbb{N} \}$$

... von selbstkonjugierten Sektoren, dessen Elemente mit $\text{id} = \rho_0, \dots, \rho_{10}$ bezeichnet werden sollen, ebenso seien die zugehörigen Dimensionen durch $d_i = d_{\rho_i}$ indiziert. Tritt ein Endomorphismus als Ladung auf, werden wir ihn durch σ_i statt mit ρ_i notieren, obwohl σ_i auch dann natürlich ein Element aus Δ ist. (7.1) entnehmen wir...

$$\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_6$$

... als Vakuumhilbertraum des chiralen Netzes, auf dem \mathcal{A} dargestellt ist durch...

$$\iota(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \rho_6(a) \end{pmatrix} .$$

Nun wird $\mathcal{B}(I)$ aufgespannt durch $\mathcal{A}(I)$ und zwei geladene Felder $\psi_0 = \iota(w_0^*)v$ und $\psi_6 = \iota(w_6^*)v$ mit $w_j : \rho_j \rightarrow \rho_\alpha$. Hier wie in allen Modellen ist ψ_0 aufgrund der Konjugationsgleichung (3.17) ein Vielfaches der 1. Folglich konzentriert sich der interessante Feldinhalt in ψ_6 . Mit (3.36)...

$$\psi_6^* = (\Gamma_{06}^6)^* E_{0 \ 0}(B)_6^6 E_6^* + (\Gamma_{60}^6)^* E_{6 \ 6}(B)_0^6 E_0^* + (\Gamma_{66}^6)^* E_{6 \ 6}(B)_6^6 E_6^* . \quad (7.2)$$

Die Bestimmung der Konstanten Γ_{ij}^k erfordert die Kenntnis der DHR-Kategorie $\text{End}(\mathcal{A})$ des Modells. Im reduzierten Feldbündel übersetzt sich dies in die Bestimmung hinreichend vieler Dualitäts- und R -Matrizen. Die nun folgenden Bemühungen widmen sich diesem Problem.

7.1 Dualitätsmatrizen

Sukzessives Anwenden der Operatorproduktzerlegung (3.30) erlaubt es, ein Feld der Ladung n in \mathcal{B} als Produkt aus n Feldern der Ladung 1 zu gewinnen. Wir treffen die Definition...

$${}_k(a)_j := {}_k(B)_j^1 .$$

Dann liefert (3.30)...

$${}_k(B)_j^n = \sum_{\underline{l}} c_n(\underline{l}) {}_{l_0}(a)_{l_1}(a)_{l_2} \cdots {}_{l_{n-1}}(a)_{l_n}(T_n)_{l_n} . \quad (7.3)$$

...mit $T_n = t_{1,1}^2 \cdots t_{n-2,1}^{n-1} t_{n-1,1}^n : \sigma_n \longrightarrow \sigma_1^n$. Die Summanden sind indiziert durch einen Vektor $\underline{l} \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ mit $l_0 = k$ und $l_n = j$, folglich läuft die Summe über alle möglichen Pfade mit fixen Endsektoren k und j . Tatsächlich ist diese Strangformulierung der geladenen Felder älter als die Beschreibung vermöge Tensor kategorien, siehe hierzu zum Beispiel [58], Kapitel 7. Natürlich beeinflusst die Wahl der Intertwinerbasen, die für das reduzierte Feldbündel getroffen werden muss, die Form der Strangkoeffizienten $c_n(\underline{l})$. Eine (nicht normierte) explizite Angabe findet sich ebenfalls in [58]:

$$c_n(\underline{l}) = N \prod_{j=1}^{n-1} i^{l_j+1} [l_j + 1]^{-1} \quad \text{mit } [x] := \sqrt{\frac{\sin(\frac{\pi x}{m})}{\sin(\frac{\pi}{m})}} \quad (7.4)$$

...mit einer Normierungskonstanten $N \in \mathbb{C}$. m entspricht hierbei der COXETER-Zahl des Graphen, der die Fusionsregeln in \mathcal{A} beschreibt (in diesem Fall ist dies A_{11} und damit $m = 12$). N wie auch die noch zu berechnenden Dualitätsmatrizen hängen nur von Invarianten der möglichen Pfade von ρ_j nach ρ_k ab. Eine solche ist zum Beispiel die Anzahl der Schritte, die in einer Kette in Richtung eines höheren respektive niedrigeren Sektors gemacht werden. Seien diese mit p resp. q bezeichnet, dann gilt:

$$p + q = n \quad \text{und} \quad k = j + p - q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{n - k + j}{2} \quad , \quad p = \frac{n + k - j}{2} .$$

Unter allen möglichen Pfaden von ρ_j nach ρ_k zeichnet sich $\underline{l}^{\max} = (k, k+1, \dots, k+q, k+q-1, \dots, j)$ durch seine Extremalität aus (Abbildung 7.1, fett gezeichnet). Der Vergleich eines beliebigen Pfades \underline{l} mit \underline{l}^{\max} zeigt nun aufgrund der übereinstimmenden Parität der einzelnen Einträge, dass die Differenz...

$$\sum_{i=1}^{n-1} (l_i^{\max} - l_i) =: 2 A_{\underline{l}}$$

...nur gerade Werte annehmen kann, weshalb $A_{\underline{l}}$ tatsächlich ganzzahlig ist. Abbildung 7.1 zeigt die geometrische Interpretation für $A_{\underline{l}}$ als die Anzahl eingeschlossener Kästchen zwischen \underline{l} und \underline{l}^{\max} (mit Punkten markiert). Mit...

$$N = i^{-\sum_{i=1}^{n-1} (l_i^{\max}+1)} \tilde{N} \quad , \quad \tilde{N} \in \mathbb{R}$$

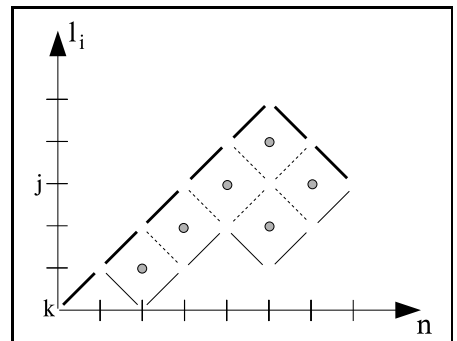


Fig. 7.1: Zum Normierungsfaktor.

...folgt daher...

$$c_n(\underline{l}) = \tilde{N} (-1)^{-A_{\underline{l}}} \prod_{j=1}^{n-1} [l_j + 1]^{-1} \in \mathbb{R} .$$

Die Strangkoeffizienten entstehen per Definition aus einem Produkt sukzessiver Dualitätsmatrizen. Mit einer orthonormalen Basis aus Intertwinern sind letztere gerade unitär. Ein Blick auf die Operatorproduktzerlegung (3.30) zeigt nun, dass dies für die weitere Normierung...

$$\sum_{\underline{l}} |c_n(\underline{l})|^2 = 1$$

...impliziert, wobei die Summe erneut über alle möglichen Pfade mit festen Endsektoren k und j läuft. Tatsächlich lässt sich nun \tilde{N} in geschlossener Form angeben...

Lemma 7.1.1

$$\sum_{\underline{l}} \prod_{i=1}^{n-1} [l_i + 1]^{-2} = \frac{[k+1]^2 [j+1]^2 ([n]!)^2}{([p]!)^2 ([q]!)^2} \prod_{l=k+1-p}^{j+1+p} [l]^{-2} \quad \text{mit } [x]! = [x][x-1]! \text{ und } [0]! = 1 .$$

Beweis

Zunächst sind zwei Sonderfälle zu betrachten: Ist $j = k + n$, existiert lediglich ein Pfad der Form $(k, k+1, \dots, k+n)$. In diesem Fall gilt $q = n$ und $p = 0$, folglich...

$$\begin{aligned} \frac{[k+1]^2 [k+n+1]^2 ([n]!)^2}{([0]!)^2 ([n]!)^2} \prod_{l=k+1}^{k+n+1} [l]^{-2} &= [k+1]^2 [k+n+1]^2 \prod_{l=k+1}^{k+n+1} [l]^{-2} \\ &= \prod_{l=k+2}^{k+n} [l]^{-2} = \sum_{\underline{l}} \prod_{i=1}^{n-1} [l_i + 1]^{-2} . \end{aligned}$$

Eine vollkommen analoge Rechnung zeigt, dass beide Seiten auch für $q = 0$ und $p = n$, die zweite Ausnahme, übereinstimmen.

Alle übrigen Fälle ergeben sich anhand eines Induktionsargumentes. Mit $n = 1$ folgt zunächst $j = k \pm 1$. Daher gilt mit $n = 1, j = k + 1 \Rightarrow q = 1, p = 0$:

$$\frac{[k+1]^2 [k+2]^2 ([1]!)^2}{([0]!)^2 ([1]!)^2} \prod_{l=k+1}^{k+2} [l]^{-2} = [k+1]^2 [k+2]^2 \prod_{l=k+1}^{k+2} [l]^{-2} = 1 ,$$

... bzw. mit $n = 1, j = k - 1 \Rightarrow q = 0, p = 1$...

$$\frac{[k+1]^2 [k]^2 ([1]!)^2}{([1]!)^2 ([0]!)^2} \prod_{l=k}^{k+1} [l]^{-2} = [k+1]^2 [k]^2 \prod_{l=k}^{k+1} [l]^{-2} = 1 ,$$

... was in beiden Fällen mit dem Ergebnis des leeren Produktes — und damit der linken Seite — übereinstimmt.

Am Anfang des Induktionsschrittes von $n - 1$ auf n steht die Erkenntnis, dass sich jeder Pfad \underline{l} mit $l_0 = k$ und $l_n = j$ zerlegen lässt gemäß (\underline{s}^i, j) mit $i \in \{1, 2\}$, so dass $s_{n-1}^1 = j + 1$ und $s_{n-1}^2 = j - 1$. Hiermit...

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{l}} \prod_{i=1}^{n-1} [l_i + 1]^{-2} &= \sum_{\underline{s}^1} \prod_{i=1}^{n-2} [s_i^1 + 1]^{-2} [j + 2]^{-2} + \sum_{\underline{s}^2} \prod_{i=1}^{n-2} [s_i^2 + 1]^{-2} [j]^{-2} \\ &= \frac{[k + 1]^2 ([n - 1]!)^2}{([p - 1]!)^2 ([q]!)^2} \prod_{l=k+2-p}^{j+1+p} [l]^{-2} + \frac{[k + 1]^2 ([n - 1]!)^2}{([p]!)^2 ([q - 1]!)^2} \prod_{l=k+1-p}^{j+p} [l]^{-2} \\ &= \frac{[k + 1]^2 ([n - 1]!)^2}{([p]!)^2 ([q]!)^2} \prod_{l=k+1-p}^{j+1+p} [l]^{-2} ([p]^2 [k + 1 - p]^2 + [q]^2 [j + p + 1]^2) . \end{aligned}$$

Der resultierende Klammerausdruck lässt sich mittels der Dimensionen der zugehörigen Sektoren ausdrücken, so dass eine Anwendung der Fusionsregeln zu folgender Vereinfachung führt:

$$d_{p-1} d_{k-p} + d_{q-1} d_{k+q} = \sum_{\substack{s=|j-(n-1)| \\ s+k-1=0 \pmod{2}}}^{k-1} d_s + \sum_{\substack{t=|k+1| \\ t+k-1=0 \pmod{2}}}^{t_{\max}} d_t = d_{n-1} d_j = [n]^2 [j + 1]^2 ,$$

...mit $t_{\max} = \min(n - 1 + j, 2m - (n - 1 + j))$. Aufgrund der Beziehung $k - 1 \pmod{2} = k + 2q - 1 \pmod{2} = n + j - 1 \pmod{2}$ stimmt auch die Parität der Summanden. \square

Definition 7.1.1 Um die folgenden Ausdrücke in kompakter Form notieren zu können, definieren wir:

$$[x]_{t+1}^+ := [x] \cdot [x + 1] \cdots [x + t] \quad \text{und} \quad [x]_{t+1}^- := [x] \cdot [x - 1] \cdots [x - t] \quad , \quad [x]_0^\pm := 1 .$$

Korollar 7.1.1 Für die normierten Strangkoeffizienten $c_n(\underline{l})$ gilt:

$$c_n(\underline{l}) = \frac{[p]! [q]! [k + 1 - p]_{n+1}^+}{[k + 1] [j + 1] [n]!} (-1)^{-A_{\underline{l}}} \prod_{j=1}^{n-1} [l_j + 1]^{-1} . \quad (7.5)$$

Beweis

Die linke Seite aus Lemma 7.1.1 ist \tilde{N}^{-2} . \square

In Strangdarstellung liefert nun die Operatorproduktzerlegung eine Bedingung an die zugehörigen Dualitätsmatrizen...

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{l}} c_n(\underline{l}) k(a)_{l_1} \cdots l_{n-1}(a)_j (T_n)_j & \quad (7.6) \\ &= \sum_{s, \underline{s}^n, \underline{s}^{n-m}} D_{ns} \begin{bmatrix} m & n - m \\ k & j \end{bmatrix} c_m(\underline{s}^m) c_{n-m}(\underline{s}^{n-m}) k(a)_{s_1^m} \cdots s_{m-1}^m(a)_s(a)_{s_1^{n-m}} \cdots s_{m-1}^{n-m}(a)_j (\tilde{T}_n)_j \end{aligned}$$

...mit $T_n : \sigma_n \rightarrow \sigma_1^n$ wie oben und $\tilde{T}_n = T_{n-m} \sigma_{n-m}(T_m) t_{n-m, m}^n$. Es stellt sich natürlich als erstes die Frage, ob $T_n, \tilde{T}_n \in \text{hom}(\sigma_n, \sigma_1^n)$ konsistent gewählt werden können. Tatsächlich zeigt ein einfaches Induktionsargument, dass im Falle der Fusionsregeln (3.14)...

$$\langle \sigma_n | \sigma_1^n \rangle = 1$$

...gilt. Somit stimmen die isometrischen Intertwiner T_n und \tilde{T}_n bis auf eine Phase überein. Diese kann jedoch durch Manipulation der Basiselemente $t_{n-m,m}^n$ in Übereinstimmung gebracht werden.

Durch Koeffizientenvergleich der einzelnen Stränge lassen sich die Dualitätsmatrizen aus (7.6) extrahieren. In den Schrittkoordinaten...

$$\begin{aligned} q &= \frac{n-k+j}{2} \quad , \quad \tilde{q} = \frac{m-k+s}{2} \quad , \quad \hat{q} = \frac{n-m-s+j}{2} \quad , \\ p &= \frac{n+k-j}{2} \quad , \quad \tilde{p} = \frac{m+k-s}{2} \quad , \quad \hat{p} = \frac{n-m+s-j}{2} \quad . \end{aligned}$$

...entsteht mit Hilfe der Identität $[k+1-p]_{n+1}^+ = [k+1-p]_{\tilde{q}}^+ [s+1-\hat{p}]_{n-m+1}^+ [k+1+q]_{\tilde{p}}^-$ der Ausdruck...

$$\begin{aligned} D_{ns} \begin{bmatrix} m & n-m \\ k & j \end{bmatrix} &= \frac{c_n(\underline{l})}{c_m(\underline{s}^m) c_{n-m}(\underline{s}^{n-m})} \\ &= (-1)^{A_{\underline{l}} - A_{\underline{s}^m} - A_{\underline{s}^{n-m}}} \frac{[p]! [q]! [k+1-p]_{n+1}^+ [m]! [s+1] [n-m]!}{[n]! [\tilde{p}]! [\tilde{q}]! [k+1-\tilde{p}]_{m+1}^+ [s+1-\hat{p}]_{n-m+1}^+ [\hat{q}]! [\hat{p}]!} \\ &= (-1)^{(q-\tilde{q})\tilde{p}} \frac{[p]_{\tilde{p}}^- [q]_{\tilde{q}}^- [k+1-p]_{\tilde{q}}^+ [k+1+q]_{\tilde{p}}^- [m]! [s+1]}{[n]_{\tilde{m}} [\tilde{p}]! [\tilde{q}]! [k+1-\tilde{p}]_{m+1}^+} \quad . \end{aligned} \quad (7.7)$$

Um das Vorzeichen zu verstehen, ist ein Blick auf Abbildung 7.2 zu werfen. Wie zu sehen ist, entspricht $A_{\underline{l}} - A_{\underline{s}^m} - A_{\underline{s}^{n-m}}$ gerade der Anzahl an Quadraten, die von einem Rechteck mit den Ausmaßen \tilde{p} und $q - \tilde{q}$ begrenzt werden.

Insbesondere liefert nun die obige Gleichung für den Fall $n = 1$ die Relationen...

$$\begin{aligned} \kappa d_j^n(k+1) &:= D_{n,k+1} \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ k & j \end{bmatrix} = \frac{[q] [k+1-p]}{[n] [k+1]} \\ \kappa d_j^n(k-1) &:= D_{n,k-1} \begin{bmatrix} 1 & n-1 \\ k & j \end{bmatrix} = (-1)^q \frac{[p] [k+1+q]}{[n] [k+1]} \quad , \end{aligned}$$

...die sich im nächsten Abschnitt noch als nützlich erweisen werden.

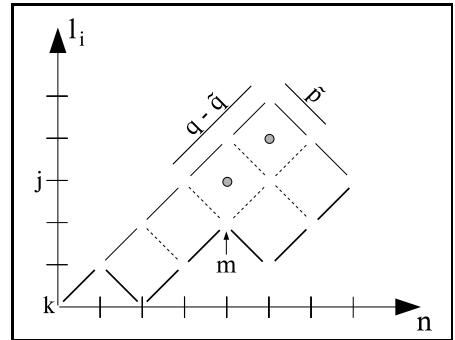


Fig. 7.2: Vorzeichen der D -Matrizen.

7.2 R-Matrizen

Lokale Felder auf dem Halbraum ergeben sich nach (3.43) als Linearkombinationen von Elementen aus dem reduzierten Feldbündel, die anstatt Lokalität lediglich eine Austauschgebra mit zugehörigen R -Matrizen erfüllen. Die Braiding-Fusion-Relationen erlauben nun eine rekursive Bestimmung der letzteren. Der Grundstein hierzu wurde in [57] gelegt: Die Zopfrelationen (3.9) liefern nach Einfügen entsprechender Einsen eine Zopfbedingung an die R -Matrizen. Diese ermöglicht nun eine bis auf Ähnlichkeitstransformationen vollständige Klassifizierung derselben für Felder mit Ladung σ_1 . Eine unitäre Lösung des Problems, die die

Arbeitsgrundlage für alles folgende bildet, sieht folgendermaßen aus...

$$\begin{aligned} \left(R_{(1,1)}^{(k,k+2)} \right)_{k+1,k+1} &= \left(R_{(1,1)}^{(k,k-2)} \right)_{k-1,k-1} = (\eta \xi) (-\xi) , \\ \left(R_{(1,1)}^{(k,k)} \right)_{k\pm 1,k\pm 1} &= \frac{(\eta \xi)}{[k+1]^2} \begin{pmatrix} -\xi^{k+1} & [k][k+2] \\ [k][k+2] & \xi^{-(k+1)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.8)$$

...mit zwei komplexen Phasen $\xi = -\exp\left(\pi i \frac{m\pm 1}{m}\right)$ und $\eta = \exp\left(-\pi i \frac{m\pm 3}{2m}\right)$ und den COXETER-Zahlen $(m \pm 1, m)$ des Fusionsgitters. Diese beiden Parameter sind so angepasst, dass die Statistikphasen der minimalen Modelle richtig reproduziert werden.

Für die Vertauschung eines einfach geladenen Feldes mit einem n -fach geladenen lässt sich die Induktion vollständig durchführen. Erneut seien hierzu ganzzahlige Schrittkoordinaten gewählt...

$$\begin{aligned} q_+ &= \frac{n-k+j+1}{2} , & q_- &= \frac{n+k-j-1}{2} , \\ p_+ &= \frac{n+k-j+1}{2} , & p_- &= \frac{n-k+j-1}{2} . \end{aligned}$$

Das Argument benutzt außerdem die folgende Rechenregel für die Dimensionen minimaler Modelle.

Lemma 7.2.1 *Mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt...*

$$[a]^2 [c]^2 [b+1]^2 + [b-a]^2 [c]^2 + [b-a]^2 [c-b-1]^2 [b]^2 = [a+c-b]^2 [b]^2 [b+1]^2 .$$

...wobei wir $[-a] := i[a]$ für $a > 0$ definieren.

Beweis

Eine Anwendung der Additionstheoreme und anschließendes Faktorisieren bringt...

$$\begin{aligned} & [a]^2 [c]^2 [b+1]^2 + [b-a]^2 [c]^2 + [b-a]^2 [c-b-1]^2 [b]^2 \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{m}\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{m}\right)} \left[\sin\left(\frac{\pi b}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi b}{m}\right) \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \right] \cdot \\ & \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi a}{m}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi b}{m}\right) \sin\left(\frac{\pi c}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi b}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi c}{m}\right) \right) \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{\pi a}{m}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi b}{m}\right) \sin\left(\frac{\pi c}{m}\right) - \sin\left(\frac{\pi b}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi c}{m}\right) \right) \right] \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{m}\right) \sin\left(\frac{\pi(b+1)}{m}\right) \sin\left(\frac{\pi(a+c-b)}{m}\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{m}\right)} = [a+c-b]^2 [b]^2 [b+1]^2 . \end{aligned}$$

□

Satz 7.2.1 *Mit (7.8) als Induktionsanfang gilt...*

$$\begin{aligned} \left(R_{(1,n)}^{(k,j)} \right)_{j\pm 1,k\pm 1} &= \\ \frac{(\eta \xi)^n}{[k+1][j+1]} & \begin{pmatrix} -\xi^{k+1+q_-} [p_+] [q_+] & (-\xi)^{q_-} [k+1-p_+] [k+1+q_+] \\ (-\xi)^{p_-} [k+1-p_+] [k+1+q_+] & (-1)^{n-1} \xi^{q_- - j - 1} [p_+] [q_+] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Beweis

Mit $k = j$ und $n = 1$ folgen $q_+ = p_+ = 1$ und $q_- = p_- = 0$. Dies reduziert (7.9) auf den Induktionsanfang (7.8).

Die Braiding-Fusion-Relationen zusammen mit den Fusionskoeffizienten ${}_k d_j^n$ aus dem letzten Abschnitt ergeben für den ersten Matrixeintrag...

$$\begin{aligned} \left(R_{(1,n)}^{(k,j)} \right)_{j-1,k-1} &= \sum_{t,u} {}_{k-1} d_j^n(t) \left(R_{(1,1)}^{(k,t)} \right)_{u,k-1} \left(R_{(1,n-1)}^{(u,j)} \right)_{j-1,t} {}_k d_{j-1}^n(u) \\ &= (\eta \xi)^n \left(-\xi^{k+1+q_-} \right) \frac{[p_+][q_+]}{[k+1][j+1]} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{[p_-]^2 [k+1+q_-]^2 [k+1]^2 + [k+1-p_+]^2 [k+1+q_-]^2 + [k+1-p_+]^2 [q_-]^2 [k]^2}{[n]^2 [k]^2 [k+1]^2} \right). \end{aligned}$$

Lemma (7.2.1) zeigt nun mit $a = p_-$, $b = k$ und $c = k+1+q_-$...

$$\begin{aligned} &[p_-]^2 [k+1+q_-]^2 [k+1]^2 + [k+1-p_+]^2 [k+1+q_-]^2 + [k+1-p_+]^2 [q_-]^2 [k]^2 \\ &= [p_- + q_- + 1]^2 [k]^2 [k+1]^2 = [n]^2 [k]^2 [k+1]^2. \end{aligned}$$

Die Argumentation für den zweiten Eintrag läuft vollkommen analog...

$$\begin{aligned} \left(R_{(1,n)}^{(k,j)} \right)_{j-1,k+1} &= (\eta \xi)^n (-\xi)^{q_-} \frac{[k+1-p_+][k+1+q_+]}{[k+1][j+1]} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{[q_-]^2 [k+1-p_-]^2 [k+1]^2 - [p_+]^2 [q_-]^2 + [p_+]^2 [k+1+q_-]^2 [k+2]^2}{[n]^2 [k+1]^2 [k+2]^2} \right). \end{aligned}$$

Diesmal folgt mit $a = k+1+q_-$, $b = k+1$ und $c = p_+$...

$$\begin{aligned} &[q_-]^2 [k+1-p_-]^2 [k+1]^2 - [p_+]^2 [q_-]^2 + [p_+]^2 [k+1+q_-]^2 [k+2]^2 \\ &= [q_- + p_+]^2 [k+1]^2 [k+2]^2 = [n]^2 [k+1]^2 [k+2]^2. \end{aligned}$$

Für den dritten Eintrag...

$$\begin{aligned} \left(R_{(1,n)}^{(k,j)} \right)_{j+1,k-1} &= (\eta \xi)^n (-\xi)^{p_-} \frac{[k+1-p_+][k+1+q_+]}{[k+1][j+1]} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{[p_-]^2 [k+1+q_-]^2 [k+1]^2 - [q_+]^2 [p_-]^2 + [q_+]^2 [k+1-p_-]^2 [k]^2}{[n]^2 [k]^2 [k+1]^2} \right). \end{aligned}$$

...schließt die Wahl $a = k+q_+$, $b = k$ und $c = p_-$ die Induktion. Zu guter Letzt...

$$\begin{aligned} \left(R_{(1,n)}^{(k,j)} \right)_{j-1,k-1} &= (\eta \xi)^n (-1)^{n-1} \xi^{q_- - j} \frac{[p_+][q_+]}{[k+1][j+1]} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{[q_-]^2 [k+1-p_-]^2 [k+1]^2 + [k+1+q_+]^2 [k+1-p_-]^2 + [p_-]^2 [k+1+q_+]^2 [k+2]^2}{[n]^2 [k+1]^2 [k+2]^2} \right). \end{aligned}$$

...stimmt auch dieser Eintrag, wie Lemma (7.2.1) mit $a = p_-$, $b = k+1$ und $c = k+1+q_+$ beweist. \square

Leider ist die obige Argumentation nicht so ohne weiteres auf den Fall allgemeiner R -Matrizen anzuwenden. Wie die Fusionsregeln (3.14) zeigen, spannen die von 0 verschiedenen Einträge

der Matrix $\left(R_{(d,n)}^{(k,j)}\right)$ für $d < n < \frac{m}{2}$ eine $(d+1) \times (d+1)$ -Matrix auf, was einer induktiven Bestimmung einen Riegel vorschreibt. Dennoch soll dieser Weg noch einen Schritt weiter verfolgt werden. Mit $q = \frac{n-k+j}{2}$ und $p = \frac{n+k-j}{2}$ wie oben gilt...

Korollar 7.2.1

$$\begin{aligned}
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j-2,k-2} &= (\eta \xi)^{2n} \xi^{2(k+q)} \frac{[p][p+1][q][q+1]}{[k+1][k][j+1][j]}, \\
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j-2,k} &= (\eta \xi)^{2n} (-1)^q \xi^{2q+k} \frac{[k-p][p+1][k+1+q][q][2]}{[k][k+2][j+1][j]}, \\
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j-2,k+2} &= (\eta \xi)^{2n} (-\xi)^{2(q-1)} \frac{[k+1-p][k-p][k+1+q][k+2+q]}{[k+1][k+2][j+1][j]}, \\
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j,k-2} &= (\eta \xi)^{2n} (-1)^p \xi^{n+k} \frac{[k-p][p][k+1+q][q+1][2]}{[k][k+1][j][j+2]}, \\
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j,k} &= (\eta \xi)^{2n} (-\xi)^n \frac{1}{[k+1]^2[j+1]^2[2]^2[k][k+2][j][j+2]} \\
&\quad \cdot ([k-p]^2[k+1+q]^2[k+2]^2[j+2]^2 - [p+1]^2[q]^2[k]^2[j+2]^2 - \\
&\quad - [p]^2[q+1]^2[k+2]^2[j]^2 + [k+1-p]^2[k+2+q]^2[k]^2[j]^2) \\
&= (\eta \xi)^{2n} (-\xi)^n \frac{1}{[k][k+2][j][j+2]} \cdot \left(\frac{1}{2} [2(k+1)]^2 [k-j]^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} [2(k+1)]^2 [n]^2 + [n+1]^2 + [k+1]^2 [n-k-1]^2 \right), \\
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j,k+2} &= (\eta \xi)^{2n} (-1)^{n+q-1} \xi^{2q-j} \frac{[k+1-p][p+1][k+2+q][q][2]}{[k+1][k+2][j+2][j]}, \\
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j+2,k-2} &= (\eta \xi)^{2n} (-\xi)^{2(p-1)} \frac{[k+1-p][k-p][k+1+q][k+2+q]}{[k][k+1][j+1][j+2]}, \\
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j+2,k} &= (\eta \xi)^{2n} (-1)^{q-1} \xi^{n-j} \frac{[k+1-p][p][k+2+q][q+1][2]}{[k][k+2][j+1][j+2]}, \\
\left(R_{(2,n)}^{(k,j)}\right)_{j+2,k+2} &= (\eta \xi)^{2n} \xi^{2(q-j-1)} \frac{[p][p+1][q][q+1]}{[k+2][k+1][j+1][j+2]},
\end{aligned}$$

Beweis

... ist reine Anwendung der Braiding-Fusion-Relationen ausgehend von den in Satz 7.9 bestimmten R -Matrizen in Verbindung mit den entsprechenden Rechenregeln für die Dimensionen der Sektoren — auf eine explizite Ausführung soll an dieser Stelle verzichtet werden. \square

7.3 Konstruktion eines chiralen Feldes und Bedingungen an Halbraumfelder

Die im letzten Kapitel erarbeiteten allgemeinen Ergebnisse zu Dualitäts- und R -Matrizen lassen sich nun auf das konkrete Modell $A_{10} \times E_6 / \sim$ anwenden. Als ausgezeichneter Knoten, der zur vollständigen Festlegung der Invarianten aus Satz 4.2.2 nötig ist, soll der extremale

Vertex α des Gitters gewählt werden. Der zugehörige kanonische Endomorphismus ρ aus Satz 6.2.1 besitzt nach (4.3) aus Kapitel 4 die folgende Dimension. . .

$$\rho \simeq \text{id} \oplus \sigma_6 \quad \Rightarrow \quad d_\rho = 1 + \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = 3 + \sqrt{3}.$$

Aus der Literatur sind bereits einige interessante Fakten über diese chirale Erweiterung bekannt. So bestimmten BÖCKENBAUER und EVANS in [3] den α -induzierten Fusionsgraphen bezüglich $\alpha_{\sigma_0,1}^+$ und fanden auch hier E_6 als Resultat. Da ρ nur Sektoren enthält, die durch den Generator $\sigma_{0,1}$ erzeugt werden, impliziert Satz 4.0.2, dass die Erweiterung selbst lokal ist. Ist $v : \text{id}_B \rightarrow \iota \circ \bar{\tau}$ der geladene Intertwiner aus (3.18) lokalisiert in $\mathcal{B}(I)$ und v' sein Gegenstück in $\mathcal{B}(I')$ wie im Beweis zu Satz 3.2.8 mit $I \cap I' = \emptyset$, dann kommutieren v und v' . Dies überträgt sich in eine entsprechende Lokalisierungsforderung an das geladene Feld ψ_6 vom Anfang des Kapitels.

Da sich dieses als Matrix mit Elementen im reduzierten Feldbündel interpretieren lässt, kann nun die Austauschalgebra (3.32) in ihrer konkreten Realisierung aus (7.9) und Korollar 7.2.1 benutzt werden, um Einschränkungen an die gesuchten Koeffizienten zu finden. Hierzu werden die R -Matrizen zweier Felder der Ladung σ_6 benötigt. Anstatt diese jedoch direkt zu berechnen, soll ψ_6 in zwei σ_3 -geladene Felder zerlegt werden (siehe Satz 3.3.1), was es ermöglicht, einfachere R -Matrizen für die Vertauschung von Feldern der Ladungen σ_6 mit σ_3 zu verwenden.

Seien in diesem Sinne ${}_j A_k = E_j {}_j(B)_k^3 E_k^*$ und ${}_j B_k = E_j {}_j(B)_k^6 E_k^*$ lokalisiert in I , analog ${}_j B'_k$ in I' mit $I \cap I' = \emptyset$, so ergibt sich ψ_6 lokalisiert in I durch. . .

$$\begin{aligned} \psi_6^* &= (\Gamma_{06}^6)^* {}_0 B_6 + (\Gamma_{60}^6)^* {}_6 B_0 + (\Gamma_{66}^6)^* {}_6 B_6 \\ &= (\Gamma_{06}^6)^* {}_0 A_3 A_6 + (\Gamma_{66}^6)^* \left(D_{63} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6 A_3 A_6 + D_{65} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6 A_5 A_6 \right. \\ &\quad \left. + D_{67} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6 A_7 A_6 + D_{69} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6 A_9 A_6 \right) + (\Gamma_{60}^6)^* {}_6 A_3 A_0 \end{aligned}$$

. . . mit Dualitätsmatrizen, die sich anhand von (7.7) berechnen lassen. Wir geben das Resultat unter Verwendung der Notation aus (7.4) mit der COXETER-Zahl $m = 12$ an. Außerdem lässt sich die Symmetrie des E_6 -Graphen ausnutzen, die sich in $[6-j] = [6+j]$ für $0 \leq j \leq 6$ niederschlägt. . .

$$\begin{aligned} D_{63} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= -\frac{[2]^2 [3]^2}{[5]^3 [6]^2} = -\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)^2}, & D_{65} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \frac{[2]^2 [3]^4}{[4] [5]^3 [6]} = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+1)}, \\ D_{67} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= -\frac{[2]^2 [3]^2}{[5] [6]^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, & D_{69} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= -\frac{[2]}{[4] [5]} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+1)}. \end{aligned}$$

Sei ψ'_6 in I' , ψ_6 in I lokalisiert, so dass $I < I'$, um den Anforderungen für Vertauschungen mittels R -Matrizen gerecht zu werden. Dann kommutieren aufgrund der Lokalität die beiden geladenen Felder. Um zu sehen, welche Einschränkung dies an die Koeffizienten stellt, ist das

folgende Produkt zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\psi'_6 \psi_6 &= \left[(\Gamma_{06}^6)^* {}_0B'_6 + (\Gamma_{60}^6)^* {}_6B'_0 + (\Gamma_{66}^6)^* {}_6B'_6 \right] \left[(\Gamma_{06}^6)^* {}_0B_6 + (\Gamma_{60}^6)^* {}_6B_0 + (\Gamma_{66}^6)^* {}_6B_6 \right] \\
&= (\Gamma_{66}^{6*})^2 D_{63} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6B'_6 A_3 A_6 + (\Gamma_{66}^{6*})^2 D_{65} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6B'_6 A_5 A_6 \\
&+ (\Gamma_{66}^{6*})^2 D_{67} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6B'_6 A_7 A_6 + (\Gamma_{66}^{6*})^2 D_{69} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6B'_6 A_9 A_6 \\
&+ (\Gamma_{06}^{6*}) (\Gamma_{60}^{6*}) {}_6B'_0 A_3 A_6 .
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Da die Konstanten Γ_{ki}^j lokalisierungsunabhängig sind, stimmen sie für ψ_6 und ψ'_6 überein. Am Beispiel des Summanden ${}_6A_3A_6$ soll nun die Wirkung der Austauschalgebra demonstriert werden. Um den Koeffizienten vor ${}_6A_3A_6B'_6$ in $\psi'_6 \psi$ mit demjenigen in (7.10) zu vergleichen, sind an letzterem Ausdruck die folgenden Vertauschungen durchzuführen, die jeweils mit dem Produkt der zugehörigen R -Matrizen gezeigt sind:

$$\begin{aligned}
{}_6B'_6 A_3 A_6 &\rightsquigarrow {}_6A_3 B'_3 A_6 \rightsquigarrow {}_6A_3 A_6 B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,3)} \right)_{6,3} \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{3,6} \\
{}_6B'_6 A_5 A_6 &\rightsquigarrow {}_6A_3 B'_5 A_6 \rightsquigarrow {}_6A_3 A_6 B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,5)} \right)_{6,3} \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{5,6} \\
{}_6B'_6 A_7 A_6 &\rightsquigarrow {}_6A_3 B'_7 A_6 \rightsquigarrow {}_6A_3 A_6 B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,7)} \right)_{6,3} \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{7,6} \\
{}_6B'_6 A_9 A_6 &\rightsquigarrow {}_6A_3 B'_9 A_6 \rightsquigarrow {}_6A_3 A_6 B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,9)} \right)_{6,3} \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{9,6} \\
{}_6B'_0 A_3 A_6 &\rightsquigarrow {}_6A_3 B'_3 A_6 \rightsquigarrow {}_6A_3 A_6 B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,3)} \right)_{0,3} \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{3,6}
\end{aligned}$$

Somit besteht der nächste Schritt in der Bestimmung der entsprechenden R -Matrizen mit Hilfe der Braiding-Fusion-Relationen aus Satz 3.3.4 aufbauend auf (7.9) und Korollar 7.2.1. Da die zugehörigen Rechnungen einfach, aber umfangreich sind, sollen an dieser Stelle lediglich die Resultate präsentiert werden. Die Konstanten in (7.8) liefern im vorliegenden Fall:

$$\xi = -\exp\left(\frac{11}{12}\pi i\right) \quad \text{und} \quad \eta = \exp\left(-\frac{3}{8}\pi i\right) .$$

Damit gilt nun...

$$\begin{aligned}
\left(R_{(3,6)}^{(6,3)} \right)_{6,3} &= -\xi^9 (\eta \xi)^{18} \frac{[2]^2 [3]^2}{[5]^3 [6]^2} , & \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{3,6} &= -\xi^9 (\eta \xi)^{18} \frac{[2]^2 [3]^2}{[5]^3 [6]^2} , \\
\left(R_{(3,6)}^{(6,5)} \right)_{6,3} &= -\xi^{14} (\eta \xi)^{18} \frac{[2]^2 [3]^4}{[5]^3 [6]^2} , & \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{5,6} &= -\xi^4 (\eta \xi)^{18} \frac{[2]^2 [3]^4}{[5]^3 [4] [6]} , \\
\left(R_{(3,6)}^{(6,7)} \right)_{6,3} &= -\xi^{21} (\eta \xi)^{18} \frac{[2]^2 [3]^2}{[5] [6]^2} , & \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{7,6} &= -\xi^{-3} (\eta \xi)^{18} \frac{[2]^2 [3]^2}{[5] [6]^2} , \\
\left(R_{(3,6)}^{(6,9)} \right)_{6,3} &= -\xi^{30} (\eta \xi)^{18} \frac{1}{[5]} , & \left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{9,6} &= -\xi^{-12} (\eta \xi)^{18} \frac{[2]}{[4] [5]} , \\
\left(R_{(3,6)}^{(3,6)} \right)_{0,3} &= -\xi^{21} (\eta \xi)^{18} \frac{1}{[5]} .
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der beiden Seiten in $\psi'_6 \psi_6 = \psi_6 \psi'_6$ führt auf das Gleichungssystem...

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{66}^{6*})^2 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)^6} + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^3} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) - \frac{2}{(\sqrt{3}+1)^3} (\Gamma_{06}^{6*}) (\Gamma_{60}^{6*}) \\ &= (\Gamma_{66}^{6*})^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)^2} \right) \Rightarrow \frac{(\Gamma_{66}^{6*})^2}{(\Gamma_{06}^{6*}) (\Gamma_{60}^{6*})} = \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Das Resultat (7.11) soll mit dem Ergebnis einer direkten Berechnung der Koeffizienten verglichen werden: Die Normierung des Q-Systems aus Kapitel 3, (3.20) fixiert eine der Konstanten aufgrund des Zusammenhangs (3.35) zwischen dem Intertwiner $x : \rho \rightarrow \rho^2$ und den geladenen Feldern. Entsprechend liefert auch die Isometrieforderung $x^* x = 1$ eine Einschränkung an Γ_{us}^t . Im Falle des vorliegenden E_6 -Modells ist dies restriktiv genug, um die Koeffizienten vollständig zu fixieren.

$$\begin{aligned} w_0^* x = d_\rho^{-1/2} 1 & \Rightarrow \Gamma_{60}^6 = d_\rho^{-1/2} \quad \text{und} \quad \Gamma_{00}^0 = d_\rho^{-1/2}, & (7.12) \\ \rho(w_0^*) x = d_\rho^{-1/2} 1 & \Rightarrow \Gamma_{66}^0 = d_\rho^{-1/2}, \\ x^* x = 1 & \Rightarrow |\Gamma_{60}^6|^2 + |\Gamma_{66}^0|^2 + |\Gamma_{66}^6|^2 = 1 \\ & \text{und} \quad |\Gamma_{00}^0|^2 + |\Gamma_{06}^6|^2 = 1, \\ & \Rightarrow \Gamma_{66}^6 = \sqrt{1 - 2d_\rho^{-1}} \quad \text{und} \quad \Gamma_{06}^6 = \sqrt{1 - d_\rho^{-1}}. & (7.13) \end{aligned}$$

Einsetzen der Ergebnisse (7.12) und (7.13) in den Quotienten aus (7.11) liefert auch in diesem Fall...

$$\frac{(\Gamma_{66}^{6*})^2}{(\Gamma_{06}^{6*}) (\Gamma_{60}^{6*})} = \sqrt{2}.$$

Notiz. An dieser Stelle ist festzuhalten, dass die obige Methode zur Bestimmung der Koeffizienten natürlich völlig unabhängig vom E_6 -Modell ist. Vielmehr lässt sie sich auf alle Erweiterungen anwenden, deren (dualer) kanonischer Endomorphismus lediglich in zwei irreduzible Elemente zerfällt.

Die in Abschnitt 3.4 behandelte modulare Invariante $Z_{\mu,\nu} = Z_{\sigma_i,\sigma_j} =: Z_{ij}$ legt nun die möglichen Paare bilokalisierter Ladungen fest. Für das Modell (A_{10}, E_6) ist sie vollständig bekannt und lautet:

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (i, j) \in \{(0, 0), (0, 6), (6, 0), (6, 6)\} \\ 1 & , \text{ falls } (i, j) \in \{(4, 4), (4, 10), (10, 4), (10, 10)\} \\ 1 & , \text{ falls } (i, j) \in \{(3, 3), (3, 7), (7, 3), (7, 7)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Blick auf die Operatorproduktzerlegung von ψ_6 lässt eine einfache Fortsetzung auf den Halbraum \mathcal{M}_+ vermuten. Ist $O = I \times J$ ein Doppelkegel wie in Abschnitt 2.1, Abb. 2.1, dann sei ${}_j A_k^+ = E_j {}_j(B)_k^3 E_k^*$ lokalisiert in I , ${}_j A_k^-$ entsprechend lokalisiert in J . Nun ist ...

$$\begin{aligned} \Psi_6^* &= (\Gamma_{06}^6)^* {}_0 A_3^+ A_6^- + (\Gamma_{66}^6)^* \left(D_{63} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6 A_3^+ A_6^- + D_{65} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6 A_5^+ A_6^- \right. \\ &+ \left. D_{67} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6 A_7^+ A_6^- + D_{69} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} {}_6 A_9^+ A_6^- \right) + (\Gamma_{60}^6)^* {}_6 A_3^+ A_0^- \end{aligned}$$

...ein möglicher Kandidat für ein Feld des bilokalisierten Ladungspaars $(3, 3)$. Tatsächlich kommutiert es (in den Bezeichnungen aus Abb. 2.1) mit Elementen aus $\mathcal{B}(L')$ wie die obige Analyse mittels der R -Matrizen belegt. Dies entspricht der Kommutativität mit Elementen aus $\mathcal{B}(\tilde{O})$, wobei \tilde{O} in der rechten Zusammenhangskomponente des kausalen Komplementes zum Doppelkegel O liegt.

Ferner lässt sich nach [20] ein kontrollierbarer Skalenlimes am Feld ψ_6 durchführen, der es auf eine punktiert lokalisierte Größe $\Psi_6(x^+, x^-)$ reduziert. Wird an dieser der Grenzwert $x^+ \rightarrow x^-$ durchgeführt, so geht Ψ_6 natürlich in ψ_6 über.

Um den Anforderungen eines lokalen Feldes gerecht zu werden, ist nun zu prüfen, ob Ψ_6 mit Elementen aus der Randalgebra $\mathcal{B}(K)$ kommutiert. Um dies am Beispiel des Summanden ${}_6A_3^+ A_6^-$ durchzuführen, sind die folgenden Vertauschungen zu betrachten:

$$\begin{aligned}
{}_6B'_6 A_3^+ A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ B'_3 A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ A_6^- B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,3)}\right)_{6,3}^- \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)}\right)_{3,6} \\
{}_6B'_6 A_5^+ A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ B'_5 A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ A_6^- B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,5)}\right)_{6,3}^- \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)}\right)_{5,6} \\
{}_6B'_6 A_7^+ A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ B'_7 A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ A_6^- B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,7)}\right)_{6,3}^- \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)}\right)_{7,6} \\
{}_6B'_6 A_9^+ A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ B'_9 A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ A_6^- B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,9)}\right)_{6,3}^- \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)}\right)_{9,6} \\
{}_6B'_0 A_3^+ A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ B'_3 A_6^- &\rightsquigarrow {}_6A_3^+ A_6^- B'_6 && \left(R_{(3,6)}^{(6,3)}\right)_{0,3}^- \cdot \left(R_{(3,6)}^{(3,6)}\right)_{3,6}
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichne der Index $'-'$ die R -Matrix, die die Vertauschung unter entgegengesetzter Lokalisationsforderung vermittelt. Nach [58] gilt die Symmetrie...

$$\left(R_{(3,6)}^{(\cdot,\cdot)}\right)^- = \left(R_{(6,3)}^{(\cdot,\cdot)}\right)^* = \overline{\left(R_{(3,6)}^{(\cdot,\cdot)}\right)}$$

...aufgrund der Unitarität der R -Matrizen. Folglich lassen sich die obigen Resultate verwenden, um Ψ_6 auf Lokalität zu prüfen. Dies führt auf einen Widerspruch zu (7.11). Das Feld besitzt also lediglich eine Wedge-Lokalisierung.

Anhand der Gleichung (3.41) aus Abschnitt 3.4 lässt sich das Scheitern dieses Ansatzes erklären: Werden irreduzible Sektoren, assoziiert zu einzelnen Superauswahlladungen, mittels entsprechender Intertwiner in folgender Form herausprojiziert:

$$\rho(t_\mu t_\mu^*) \varphi_i x = \sum_\lambda \rho(t_\mu t_\mu^* \sigma(\varepsilon(\rho, \bar{\tau})) \varepsilon(\sigma, \rho)^* t_\lambda t_\lambda^*) x \varphi_i$$

...mit $t_\mu : \mu \rightarrow \sigma \circ \bar{\tau}$, so entkoppelt das Gleichungssystem *nicht* in Gleichungen, die lediglich eine Ladung involvieren. Vielmehr treten Kopplungsterme auf, die in der Einbettung ins reduzierte Feldbündel dazu führen, dass in einem angemessenen Ansatz für ein Halbraumfeld Ψ der Ladung $(3, 3)$ auch Terme der Form ${}_0A_3^+ A_0^-$, sowie Linearkombinationen von ${}_6A_i^+ A_6^-$ der Gesamtladung 0 zu berücksichtigen sind.

8. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Die vorliegende Arbeit baut auf einem Klassifikationsresultat aus [42] auf, das Erweiterungen $\iota(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ chiraler VIRASORO-Netze mit $c < 1$ eine graphentheoretische Invariante in Gestalt eines Fusionsgitters $G_1 \times G_2$ zuordnet [42]. Ausgehend von den Superauswahlsektoren des Vir_c -Netzes, dessen irreduzible Subsektoren sich in kanonischer Weise durch Elemente $\sigma_{i,j}$ mit den Fusionsregeln aus (3.14) nummerieren lassen, ergeben sich die beiden Graphen G_1 und G_2 aus den BRATTELI-Diagrammen der Intertwinerräume...

$$\text{End}(\iota) \subset \text{End}(\iota \circ \sigma) \subset \text{End}(\iota \circ \sigma^2) \subset \text{End}(\iota \circ \sigma^3) \subset \dots$$

...bezüglich der beiden Generatoren $\sigma \in \{\sigma_{1,0}, \sigma_{0,1}\}$. Da diesen beiden Graphen dieselbe Normbeschränkung auferliegt, die auch für das Fusionsgitter $A_{m-1} \times A_m$ des Vir_c -Netzes gilt, lassen sich die Möglichkeiten anhand klassischer Resultate von PERRON und FROBENIUS vollständig klassifizieren. Das Ergebnis sind Paarungen der Form $A_{2k} \times G_2$ mit $G_2 \in \{D_l, E_6, E_7, E_8, A_{2k\pm 1}\}$ so, dass sich die COXETER-Zahlen der beiden Faktoren um 1 unterscheiden. Zu diesen Gittern ist eine Kategorie $\text{Ext}(\iota)$ assoziiert, deren Objekte Morphismen der Form $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sind (im allgemeinen *keine* Tensorkategorie).

Dieses abstrakte Klassifikationsresultat steht in enger Verbindung mit der konformen Quantenfeldtheorie in der MINKOWSKI-Halbebene \mathcal{M}_+ , da nach einem Ergebnis von LONGO und REHREN jede **nichtlokale** chirale Erweiterung zu einer **lokalen** (HAAG-dualen) Theorie im Halbraum assoziiert ist [50].

Im Rahmen dieser Arbeit wird $\text{Ext}(\iota)$ einer genaueren Analyse unterzogen, indem die den Fusionsregeln der VIRASORO-Algebra unterliegende Äquivalenzrelation...

$$\sigma_{i,j} \simeq \sigma_{m-2-i, m-1-j} \quad \text{für } A_{m-1} \times A_m$$

...auf $G_1 \times G_2$ transferiert wird. Die zugehörige Identifikation der Knoten des Gitters ist dabei maßgeblich durch ein Element der Automorphismengruppe $\mathfrak{D}_2 \in \text{Aut}(G_2)$ festgelegt. Es erweist sich für $G_2 \in \{D_{2k}, E_7, E_8\}$ als trivial und ist in allen übrigen Fällen das eindeutige nichttriviale Element der Gruppe.

Anhand des Fusionsgitters zu $\text{Ext}(\iota)$ lassen sich mittels kombinatorischer Argumente, in die auch die hergeleitete Äquivalenzrelation einfließt, die für die chirale Erweiterung charakteristischen (dualen) kanonischen Endomorphismen bestimmen, die Teil eines Q -Systems sind. Diese von LONGO gefundene vollständige Invariante einer Inklusion von VON NEUMANN-Algebren lässt sich nicht nur auf die in der algebraischen Quantenfeldtheorie betrachteten Netze übertragen, sondern hat auch eine physikalische Bedeutung: Eine Zerlegung des kanonischen Endomorphismus in seine irreduziblen Bestandteile kommt einer Zerlegung des Hilbertraums der Halbraumtheorie in dessen Superauswahlsektoren gleich. Aufgrund eines

kohomologischen Argumentes von KAWAHIGASHI ist außerdem im Fall der VIRASORO-Netze das zu einer chiralen Erweiterung gehörige Q -System bereits vollständig durch die Kenntnis des kanonischen Endomorphismus ρ fixiert. In allen auftretenden Fällen wird ρ aus dem Fusionsgitter hergeleitet.

Mit der Kenntnis der Superauswahlstruktur einer chiralen Theorie, besteht der nächste Schritt in der konkreten Berechnung von Feldinhalten. Hierzu wird benutzt, dass sich sowohl chirale Felder, als auch entsprechende Größen in der Halbraumtheorie durch Matrizen über dem reduzierten Feldbündel realisieren lassen. In diesem Bild übersetzt sich die Struktur der Kategorie $\text{End}(\mathcal{A})$ in die sogenannten Dualitäts- und R -Matrizen, die in der Operatorproduktentwicklung auftauchen, bzw. eine Austauschalgebra aufspannen (siehe [58]). Letztere lassen sich anhand der Braiding-Fusion-Beziehung, die auf der Assoziativität des Feldbündels bezüglich Operatorzerlegung und Vertauschung beruht, berechnen, was im Rahmen dieser Arbeit in dem Umfang, wie es für das betrachtete (lokale) Modell $A_{10} \times E_6 / \sim$ nötig ist, geschieht. Tatsächlich erweisen sich die Rechnungen hierzu als so umfangreich, dass eine Bestimmung der chiralen Felder lediglich in diesem einfachen Fall möglich ist. Die Methode erweist sich für explizite (d.h. insbesondere nicht numerische) Berechnungen an allgemeinen chiralen Erweiterungen als nicht praktikabel. Dennoch lässt sich für den vorliegenden Fall ein chirales Feld vollständig bestimmen, da die Bedingungen, die das Q -System an diese Größe stellt, restriktiv genug sind. Das Resultat wird mit den Einschränkungen verglichen, die anhand der Austauschalgebra aufgrund der Lokalität an das Feld zu stellen sind mit konsistentem Resultat. Weiterhin wird gezeigt, dass eine naive Ausdehnung des chiralen Feldes auf ein ebensolches in der Halbraumtheorie scheitern muss. Leider ist es aus zeitlichen Gründen nicht mehr möglich gewesen, ein konkretes, lokales Feld auf dem Halbraum in seiner Parametrisierung durch Elemente aus dem reduzierten Feldbündel anzugeben.

Die vorliegende Arbeit lässt sich in unterschiedliche Richtungen weiterverfolgen: Zum einen ist es sicherlich interessant, konforme Quantenfeldtheorien mit anderen Randbedingungen zu analysieren, etwa mit zwei Horizonten. Zum anderen stellt sich auch die Frage, ob die auftretenden gezopften (Tensor-)Kategorien im Sinne des Dualitätsresultats von DOPLICHER und ROBERTS als entsprechende duale Größe zu einer und falls ja, welcher Struktur interpretiert werden können. Außerdem sind lokale Netze über der reellen Achse, bzw. konform-kovariante Präkogarben über S^1 und deren Fusionsregeln aufgrund von Entwicklungen in der topologischen Quantenfeldtheorie wieder ins Blickfeld der Forschung geraten [63]: Im Zuge der Entwicklung der sogenannten elliptischen Kohomologie, die als K -Theorie von String-Bündeln in Erscheinung treten soll, tritt zum Beispiel die *Bikategorie* der VON NEUMANN-Algebren vN auf, deren Objekte, wie der Name bereits andeutet, VON NEUMANN-Algebren sind. Morphismen zwischen zwei solchen Algebren M und N sind M - N Bimoduln, die 2-Morphismen der Bikategorie entsprechen Intertwinern dieser Bimoduln. Es existieren monoidale Strukturen auf vN , gegeben durch die bereits erwähnte CONNES-Fusion. Tatsächlich sind die Tensor-kategorien $\text{End}(M)$, die sich nach Einschränkung eines Netzes auf ein Intervall ergeben, *Unterkategorien* von vN , die nur aus einem Objekt bestehen. Die Endomorphismen induzieren Bimoduln, deren Verknüpfung in das CONNES-Fusionsprodukt übergeht. Entsprechend gehen auch Intertwiner auseinander hervor. Es ist eine interessante Frage, inwiefern diese Unterkategorien für die Entwicklung der elliptischen Kohomologie von Bedeutung sind.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BELAVIN, A.A.; POLYAKOV, A.M.; ZAMOLODCHIKOV, A.B.; *Infinite Conformal Symmetry in Two-dimensional Quantum Field Theory.*; Nuclear Physics B, **241** 1984, S. 333-380
- [2] BÖCKENBAUER, J.; EVANS, D.; *Modular Invariants, Graphs and α -Induction for Nets of Subfactors. I.*; Comm. Math. Phys., **197** 1998, S. 361-386
- [3] BÖCKENBAUER, J.; EVANS, D.; *Modular Invariants, Graphs and α -Induction for Nets of Subfactors. II.*; Comm. Math. Phys., **200** 1999, S. 57-103
- [4] BÖCKENBAUER, J.; EVANS, D.; *Modular Invariants, Graphs and α -Induction for Nets of Subfactors. III.*; Comm. Math. Phys., **205** 1999, S. 183-228
- [5] BÖCKENBAUER, J.; EVANS, D.E.; KAWAHIGASHI, Y.; *Chiral Structure of Modular Invariants for Subfactors.*; Comm. Math. Phys., **210** 2000, S. 733-784
- [6] BRUNETTI, R.; GUIDO, D.; LONGO, R.; *Modular Structure and Duality in Conformal Quantum Field Theory.*; Comm. Math. Phys., **156** 1993, S. 201-219
- [7] BUCHHOLZ, D.; SCHULZ-MIRBACH, H.; *Haag Duality in Conformal Quantum Field Theory.*; Reviews in Mathematical Physics, **2** 1990, S. 105-125
- [8] CARDY, J.; *Conformal Invariance and Surface Critical Behavior.*; Nuclear Physics B, **240** 1984, S. 49-85
- [9] D'ANTONI, C.; LONGO, R.; RADULESCU, F.; *Conformal Nets, Maximal Temperature and Models from Free Probability.*; Journal of Operator Theory, **45** 2001, S. 195-208
- [10] DIRAC, P.A.M.; *The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation.*; Proc. Roy. Soc. Ser. A **114** 1927, 243
- [11] DIXMIER, J.; MARÉCHAL, O.; *Vecteurs totalisateur d'une algèbre de von Neumann.*; Comm. Math. Phys. **22** 1971, S. 44-50
- [12] DOPLICHER, S.; HAAG, R.; ROBERTS, J.E.; *Fields, Observables and Gauge Transformations I.*; Comm. Math. Phys. **13** 1969, S. 1-23
- [13] DOPLICHER, S.; HAAG, R.; ROBERTS, J.E.; *Fields, Observables and Gauge Transformations II.*; Comm. Math. Phys. **15** 1969, S. 173-200
- [14] DOPLICHER, S.; HAAG, R.; ROBERTS, J.E.; *Local Observables and Particle Statistics I.*; Comm. Math. Phys. **23** 1971, S. 199-230

- [15] DOPLICHER, S.; HAAG, R.; ROBERTS, J.E.; *Local Observables and Particle Statistics II.*; Comm. Math. Phys. **35** 1974, S. 49-85
- [16] DOPLICHER, S.; ROBERTS, J.E.; *A New Duality Theory for Compact Groups.*; Inventiones Mathematicae **98** 1989, S. 157-218
- [17] FRANCESCO, P.; MATHIEU, P.; SÉNÉCHAL, D.; *Conformal Field Theory.*; Springer Verlag New York, Inc. 1997, S. 211ff.
- [18] FREDENHAGEN, K.; *Generalizations of the Theory of Superselection Sectors.*; in [38], S. 379
- [19] FREDENHAGEN, K.; REHREN, K.-H.; SCHROER, B.; *Superselection Sectors with Braid Group Statistics and Exchange Algebras I: General Theory.*; Comm. Math. Phys.. **125** 1989, S. 201-226
- [20] FREDENHAGEN, K.; REHREN, K.-H.; SCHROER, B.; *Superselection Sectors with Braid Group Statistics and Exchange Algebras II: Geometric Aspects and Conformal Covariance.*; Reviews in Mathematical Physics. **Special Issue** 1992, S. 113-157
- [21] FRIEDAN, D.; QIU, Z.; SHENKER, S.; *Conformal Invariance, Unitarity and Critical Exponents in Two Dimensions.*; Physical Review Letters. **52** 1984, S. 1575-1578
- [22] FRIEDAN, D.; QIU, Z.; SHENKER, S.; *Details of the Non-Unitary Proof for Highest Weight Representations of the Virasoro Algebra.*; Comm. Math. Phys.. **107** 1986, S. 535-542
- [23] FRÖHLICH, J.; *Statistics of Fields, the Yang-Baxter Equation and the Theory of Knots and Links.*; Non-perturbative Quantum Field Theory, Cargèse 1987, S. 71-100
- [24] FRÖHLICH, J.; GABBIANI, F.; *Operator Algebras and Conformal Field Theory.*; Comm. Math. Phys., **155** 1993, S. 569-640
- [25] FURLAN, P.; SOTKOV, G.M.; TODOROV, I.T.; *Two-dimensional Conformal Quantum Field Theory.*; Riv. del Nuovo Cimento, **12** 1989, S. 1-203
- [26] GANTMACHER, F.R.; *The Theory of Matrices.*; Volume 2, Chelsea 1960
- [27] GODDARD, P.; KENT, A.; OLIVE, D.; *Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras.*; Comm. Math. Phys., **103** 1986, S. 105-119
- [28] GODDARD, P.; KENT, A.; OLIVE, D.; *Virasoro Algebras and Coset Space Models.*; Phys. Lett. B **152** 1985, S. 88
- [29] GOODMAN, F.M.; DE LA HARPE, P.; JONES, V.F.R.; *Coxeter Graphs and Towers of Algebras.*; Springer Verlag, 1989
- [30] GOODMAN, R.; WALLACH, N.R.; *Projective Unitary Positive-Energy Representations of $\text{Diff}(S^1)$.*; Functional Analysis, **63** 1985, S. 299-321
- [31] GUIDO, D.; LONGO, R.; *Relativistic Invariance and Charge Conjugation in Quantum Field Theory.*; Comm. Math. Phys. **148** 1992, S. 521-551

-
- [32] GUIDO, D.; LONGO, R.; *The Conformal Spin and Statistics Theorem.*; Comm. Math. Phys. **181** 1996, S. 11-36
- [33] HAAG, R.; KASTLER, D.; *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory.*; J. Math. Phys. **5** 1964, S. 848
- [34] HIAL, F.; *Minimizing Indices of Conditional Expectations on a Subfactor.*; Publ. RIMS (Kyoto) **24** 1988, S. 673-678
- [35] IZUMI, M.; KOSAKI, H.; *On a Subfactor Analogue of the Second Cohomology.*; Reviews in Mathematical Physics **14** 2002, S. 733-757
- [36] JONES, V. F. R.; *Index of Subfactors.*; Inventiones Mathematicae **72** 1983, S. 1-25
- [37] KAC, V.; *Funct. Anal. and Appl.* **16** 1982, S. 114
- [38] KASTLER, D.; *The Algebraic Theory of Superselection Sectors.*; World Scientific, 1990
- [39] KAWAHIGASHI, Y.; LONGO, R.; MÜGER, M.; *Multi-Interval Subfactors and Modularity of Representations in Conformal Field Theory.*; Comm. Math. Phys. **219** 2001, S. 631-669
- [40] KAWAHIGASHI, Y.; LONGO, R.; *Classification of Local Conformal Nets. Case $c < 1$.*; Annals of Mathematics **160** 2004, S. 493-522
- [41] KAWAHIGASHI, Y.; LONGO, R.; *Classification of Two-dimensional Local Conformal Nets with $c < 1$ and 2-cohomology Vanishing for Tensor Categories.*; Comm. Math. Phys. **244** 2004, S. 63-97
- [42] KAWAHIGASHI, Y.; LONGO, R.; PENNIG, U.; REHREN, K.H.; *The Classification of Non-local Chiral CFT with $c < 1$.*; Preprint
- [43] KOHNO, T.; *Conformal Field Theory and Topology.*; Translations of Mathematical Monographs, Volume 210
- [44] KOSAKI, H.; *Extension of Jones' theory on Subfactors to Arbitrary Factors.*; Journal of Functional Analysis **66** 1986, S. 123-140
- [45] LOKE, T.; *Operator Algebras and Conformal Field Theory of the Discrete Series Representations of $\text{Diff}(S^1)$.*; PhD-Arbeit an der University of Cambridge, 1994
- [46] LONGO, R.; *Index of Subfactors and Statistics of Quantum Fields. I.*; Comm. Math. Phys. **126** 1989, S. 217-247
- [47] LONGO, R.; *Index of Subfactors and Statistics of Quantum Fields. II.*; Comm. Math. Phys. **130** 1990, S. 285-309
- [48] LONGO, R.; REHREN, K.-H.; *Nets of Subfactors.*; Reviews in Mathematical Physics **7** 1995, S. 567-597
- [49] LONGO, R.; ROBERTS, J.E.; *A Theory of Dimension.*; K-Theory **11** 1997, S. 103-159

- [50] LONGO, R.; REHREN, K.H.; *Local fields in Boundary Conformal QFT.*; Reviews in Mathematical Physics **16** 2004, S. 909
- [51] LÜSCHER, M.; MACK, G.; *Global Conformal Invariance in Quantum Field Theory.*; Comm. Math. Phys. **41** 1975, S. 203-234
- [52] LÜSCHER, M.; MACK, G.; *The Energy Momentum Tensor of Critical Quantum Field Theories in 1+1 Dimensions.*; unveröffentlichtes Manuskript, Hamburg, 1976
- [53] MACLANE, S.; *Categories for the Working Mathematician.*; Springer Verlag 1997, second edition
- [54] PETERSEN, J.L.; *Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS-CFT.*; Int. J. Mod. Phys. **A14** 1999, S. 3597-3672
- [55] PIMSNER, M.; POPA, S.; *Entropy and Index for Subfactors.*; Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **19** 1986, S. 57-106
- [56] POPA, S.; *Classification of Subfactors and their Endomorphisms.*; CBMS Regional Conference Series, Amer. Math Soc. **86** 1995
- [57] REHREN, K.H.; *Locality of Conformal Fields in Two Dimensions: Exchange Algebra on the Light-Cone.*; Comm. Math. Phys. **116** 1988, S. 675
- [58] REHREN, K.H.; SCHROER, B.; *Einstein Causality and Artin Braids.*; Nuclear Physics B **312** 1989, S. 715-750
- [59] REHREN, K.H.; *On Local Boundary CFT and Non-Local CFT on the Boundary.*; Beitrag zu "Rigorous Quantum Field Theory", Symposium zu Ehren von J. Bros
- [60] ROBERTS, J.E.; *The Statistical Dimension, Conjugation and the Jones Index.*; Reviews in Mathematical Physics **7** 1995, S. 631-643
- [61] SCHOTTENLOHER, M.; *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory.*; Lecture Notes in physics, Springer-Verlag 1997
- [62] SCHROER, B.; SWIECA, J.A.; VÖLKEL, A.H.; *Global Operator Expansions in Conformally Invariant Relativistic Quantum Field Theory.*; Phys. Rev. D **11**, 1975, S. 1509-1520
- [63] STOLZ, S.; TEICHNER, P. *What is an Elliptic Object?*; Proceedings of the 2002 Oxford Symposium in honour of the 60th birthday of Graeme Segal, Cambridge University Press
- [64] TAKESAKI, M.; *Theory of Operator Algebras I.*; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979
- [65] TURAEV, V.G. *Quantum Invariants of Knots and 3-manifolds*; deGruyter, Berlin, New York 1994
- [66] WASSERMANN, A.; *Operator Algebras and Conformal Field Theory. III. Fusion of Positive Energy Representations of $LSU(n)$ Using Bounded Operators*; Inventiones Mathematicae **133** 1998, S. 467-538

Danksagung

Diese letzte Seite möchte ich all denjenigen widmen, die mich im Verlauf meines Physikstudiums — insbesondere während der Entstehungsphase dieser Arbeit — unterstützt und begleitet haben. Ohne sie wäre diese Diplomarbeit nicht möglich gewesen. Mein Dank gilt. . .

- meinem Referenten *Prof. Dr. Rehren* für die freundliche Aufnahme in die Arbeitsgruppe *Quantenfeldtheorie* und die Möglichkeit ein anspruchsvolles, abstraktes Thema aus diesem Bereich zu bearbeiten.
- *Prof. Dr. Buchholz* für die Übernahme des Korreferates und seine Unterstützung bei meiner Aufnahme in die Studienstiftung.
- *Nora Seeliger* für ihren Realismus, ihre Freude an Mathematik und Physik, die ich so gerne teile, für jedes Gespräch mit ihr, ihre Unterstützung und ihren Rat.
- *Dong-Du Mai*, der sich trotz des bald nahenden Sonnenaufgangs tapfer mit mir durch die Seiten dieser Arbeit gekämpft hat, immer auf der Suche nach Rechtschreibfehlern, für gemeinsame Kaffeepausen zusammen mit *Johanna Röder* und ein offenes Ohr zu jeder Tageszeit.
- *Andreas Lochmann, Jan Schlemmer, Hauke Obersteller, Marten Kopp und Georg Stahl* für einige amüsante und aufregende Szenarien in fernen Landen, die mich desöfteren aus dem tristen Alltag rissen.
- *allen meinen Freunden*, die ich aufgrund dieser Arbeit oft schmerzlich vernachlässigen musste und die dennoch niemals den Kontakt aufgaben.
- *Friedrich Nietzsche* für die Lebensweisheit aus der Kriegsschule des Lebens: „Was mich nicht umbringt, macht mich härter“.
- *meinen Eltern und meinem Bruder Roland Pennig*, die zu keinem Zeitpunkt den Glauben an mich verloren haben.