

# Lokale Gleichgewichtszustände massiver Bosonen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Robert Hübener  
aus Magdeburg

angefertigt im

Institut für Theoretische Physik  
der Georg-August-Universität zu Göttingen  
2005

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN





## 0.1 Einleitung und Motivation

Seit langem werden Begriffe der Thermostatik und -dynamik zur Beschreibung von Systemen vieler Teilchen erfolgreich benutzt. In diesem Zusammenhang taucht oft der Begriff von Zuständen im 'lokalen thermischen Gleichgewicht' auf, der bedeuten soll, daß sich ein solcher Zustand zumindest mit lokaler Signifikanz durch Begriffe beschreiben läßt, die ihren konzeptuellen Ursprung in der Analyse von globalen Gleichgewichtszuständen haben, und außerdem rigoros, zum Beispiel mit Hilfe der statistischen Physik, auch nur auf solchen definiert wurden. Ein prominentes Beispiel für eine solche Größe ist die Temperatur.

Die rigorosen Begriffe der Gleichgewichtssysteme sind schon seit über einem halben Jahrhundert auch in Quantentheorien etabliert. Neben einer Übertragung von aus der klassischen statistischen Physik bekannten Modellen und Methoden auf die Quantenphysik –beispielsweise durch die vollkommen analoge Modellierung von Gleichgewichtszuständen durch Gibbsensembles in einer Fockraumdarstellung– konnten die alten Ergebnisse teilweise sogar in wesentlich mächtigerer Form und verknüpft mit Einblicken in tiefliegende Zusammenhänge grundlegender mathematischer Strukturen neugewonnen werden. Solche Züge zeigt die Charakterisierung und vollständige Klassifikation der Gleichgewichtszustände durch die nach Kubo-Martin-Schwinger benannten KMS-Bedingung in den 1960er Jahren, siehe [HHW67], die neben den der Gibbschen Methode zugänglichen endlichen Systemen auch unendliche beschreibt.

Ein gleichermaßen vertieftes Verständnis des lokalen thermischen Gleichgewichts einerseits und der Übertragbarkeit von Begriffen des globalen Gleichgewichts auf Nichtgleichgewichtszustände andererseits zu erreichen, ist ein großes Ziel der modernen Physik. So wurde in einer Arbeit von Buchholz, Ojima und Roos aus dem Jahre 2002 [BOR02] eine neuartige Methode, lokale thermische Gleichgewichtszustände und die dort zugänglichen Makroobservablen rigoros zu charakterisieren, vorgestellt. Diese Charakterisierung basiert auf einer präzisen Fassung der Idee, daß man lokal nicht zwischen lokalen und globalen Gleichgewichtszuständen unterscheiden kann.

Demnach wählt man zunächst eine Menge von thermischen Vergleichszuständen  $\mathcal{C}$ , beispielsweise KMS-Zustände in verschiedenen Bezugssystemen und deren Gemische. Des weiteren wählt man für einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^4$  der Raumzeit eine Menge von Observablen  $\mathcal{S}_x$ . Ein generischer Zustand  $\varphi$  wird nun als  $\mathcal{S}_x$ -thermischer, also am Punkt  $x$  lokal thermischer Zustand im Sinne dieser beiden Mengen bezeichnet, wenn er mit einem thermischen Vergleichszustand  $\omega_x \in \mathcal{C}$  in den Erwartungswerten aller Observablen aus  $\mathcal{S}_x$  übereinstimmt, und es ist möglich, gewisse thermische Eigenschaften des Referenzzustands  $\omega_x$  dann auch dem Zustand  $\varphi$  am Punkt  $x$  zuzuschreiben.

$$\varphi \text{ lokal thermisch am Punkt } x \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \omega_x \in \mathcal{C} : \forall \phi \in \mathcal{S}_x \text{ gilt } \omega_x(\phi) = \varphi(\phi)$$

Dies implementiert die Idee der lokalen Ununterscheidbarkeit von lokalem und globalem Gleichgewicht, wobei sich bewußt auf die Auswertung nur einer Teilmenge von Observablen beschränkt wurde. Eine Übereinstimmung auf *allen* Observablen der Feldalgebra würde nämlich implizieren, daß es sich bei  $\varphi$  um  $\omega_x$  handelt, also um einen Vergleichszustand, der per Voraussetzung schon rigoros untersucht ist. Die Beschränkung erlaubt also einerseits, überhaupt Zustände, die nicht Vergleichszustände sind, als thermisch zu charakterisieren, und andererseits läßt die Freiheit der Wahl von  $\mathcal{S}_x$  die Möglichkeit offen, bei der Thermalität strenge oder nachsichtige Maßstäbe anzulegen. Auch läßt sich mit Hilfe einer Hierarchie von Mengen  $\mathcal{S}_x$  auf natürliche Weise eine Hierarchie von entsprechend  $\mathcal{S}_x$ -thermischen Zuständen bezüglich ihrer Thermalisierung ermitteln.

Gibt es weiterhin für jeden Punkt  $x$  eines Gebietes  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$  einen solchen Vergleichszustand  $\omega_x$ , so hat der generische Zustand  $\varphi$  auf ganz  $\mathcal{O}$  eine Interpretation als thermischer Zustand – auch mit möglicherweise von Punkt zu Punkt variablen thermischen Eigenschaften, denn ein wesentliches, zentrales Merkmal des Formalismus ist die Zulässigkeit der Variation des zum jeweiligen Punkt  $x$  gehörigen Vergleichszustands  $\omega_x$ . Zustände dieser Art heißen dann  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermisch und ermöglichen eine formale, rigorose Analyse der raumzeitlichen Variationen der Zustandsgrößen.

Somit gewährt diese Methode auf der Grundlage natürlicher, anschaulicher Annahmen sowohl eine Charakterisierung und Klassifizierung einiger lokaler Gleichgewichtssysteme als auch einen Zugang zur Analyse ihrer thermischen Eigenschaften.

Kurz nach der Einführung dieser Methode wurde sie in einer weiteren Arbeit von Buchholz [Bu03] auf eine masselose, wechselwirkungsfreie, bosonische Theorie angewandt und lokale Gleichgewichtszustände konstruiert. Weiterhin wurden auch die makroskopische Eigenschaften  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischer Zustände dieser Theorie untersucht und einige Aussagen allgemeiner Natur bewiesen. Neben den interessanten Feststellungen, daß  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände kompatibel mit älteren Kriterien für lokales Gleichgewicht, wie der stoßfreien Boltzmann-Gleichung, sind und durch echte lokale Gleichgewichtszustände ein Zeitpfeil definiert wird, stellte sich unter anderem heraus, daß die Evolution makroskopischer Größen durch die Gesetzmäßigkeiten auf mikroskopischen Skalen bestimmt werden. Dies mag nicht überraschen, da die masselose Theorie skaleninvariant ist.

Die vorliegende Arbeit ist der Konstruktion und Analyse von  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen des *massiven* bosonischen Feldes gewidmet. Hierbei ist natürlich das Ziel, nichttriviale Beispiele zu finden, also solche, die sich nicht global im thermischen Gleichgewicht befinden. Auf dem Weg dorthin tritt der Einfluß der inhärenten Skale der Theorie, die die neu eingeführte Masse darstellt, mehrfach in Erscheinung.

Tatsächlich gibt es wesentliche Unterschiede zum masselosen Fall. So erlaubt die massive Theorie Ladung bzw. chemisches Potential und damit eine größere Menge von Vergleichszuständen und zusätzliche variable Parameter. Auch stellt sich heraus, daß der 'HotBang'-Zustand  $\omega_{hb}$ , der sowohl in der bosonischen als auch fermionischen masselosen Theorie existiert, in der hier vorliegenden Theorie nicht existieren kann, wohl aber andere nichttriviale lokale thermische Gleichgewichtszustände. Manche von diesen neuen Zuständen sind allerdings nur auf einer –gegenüber der Wahl im masselosen Fall der Originalarbeit [BOR02]– nochmals erweiterten Menge von Vergleichszuständen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermisch.

Auch benötigt die Antwort auf die Frage, welche Observablen zulässig sind, durch die veränderte Feldgleichung und die Erweiterung von  $\mathcal{C}$  neuartige Ansätze.

## 0.2 Überblick

In Kapitel 1 werden zunächst ein Modell des freien massiven bosonischen Feldes konstruiert, der Begriff des Zustands auf dem Feld gegeben, sowie wichtige Automorphismen wie die mit der Feldladung verknüpfte kompakte globale Eichgruppe und die Poincaré-Transformationen vorgestellt.

In Kapitel 2 werden dann die globalen Gleichgewichtszustände der Theorie entwickelt, die die Grundlage für die Menge der Vergleichszustände  $\mathcal{C}$  bilden und somit wesentlich für die Begrifflichkeit der  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität sind. Hier taucht als neue Eigenschaft bzw. weiterer Parameter globaler Gleichgewichtszustände das mit der Feldladung verknüpfte chemische Potential auf.

---

Alsdann wird im Kapitel 3 der Begriff  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität im massiven bosonischen Modell etabliert, und im Zuge dessen das Konzept des lokalen thermischen Gleichgewichts in vertiefter, präziser Weise erläutert. Dazu gehören die Beleuchtung modellspezifischer Aspekte, wie z.B. die Wahl der grundlegenden Menge  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{S}_x$ , sowie die Beziehung des Mikroskopischen mit dem Makroskopischen. Zudem können schon wichtige observable Größen wie der erhaltene Strom, Temperatur, chemisches Potential und der Energie-Impuls-Tensor gegeben werden.

Die Frage, welche thermischen Funktionen in den  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen überhaupt noch wohldefiniert und damit einer Untersuchung zugänglich sind, wird im Kapitel 4 behandelt. Zu diesen zulässigen Größen gehören, unter Annahme gewisser Voraussetzungen, neben den schon im vorigen Kapitel gegebenen u.a. auch die Phasenraumteilchendichte.

Im weiteren Verlauf der Arbeit –gewissermaßen nach der nötigen Vorarbeit– wird das Potential des formalen Apparats der  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität zur Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten der interessanten raumzeitlichen Variationen der zulässigen Makroobservablen genutzt und deren Transportgleichungen aufgestellt. Die Anwendung dieser Gleichungen auf die Phasenraumteilchendichte, verbunden mit der in diesem Zusammenhang bewiesenen Erkenntnis, daß alle makroskopische Information über einen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustand  $\omega$  in seinem Erwartungswert der Phasenraumteilchendichte  $(x, \bar{p}) \mapsto \omega(N_{\bar{p}})(x)$  kodiert ist, eröffnet einen Zugang zur Konstruktion von Darstellungen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischer Zustände. Diesem Thema ist das letzte Kapitel dieser Arbeit gewidmet.

# Inhaltsverzeichnis

0.1	Einleitung und Motivation . . . . .	iii
0.2	Überblick . . . . .	iv
<b>1</b>	<b>Das untersuchte Modell: Feldalgebra, Automorphismen und Zustände</b>	<b>1</b>
1.1	Konstruktion eines Modells des freien bosonischen massiven geladenen lokalen Quantenfeldes im Minkowskiraum . . . . .	1
1.1.1	Allgemeine Konstruktionsaspekte . . . . .	1
1.1.2	Konkretisierung: Das freie massive geladene bosonische Feld . . . . .	3
1.2	Automorphismen . . . . .	3
1.2.1	Die Poincarétransformationen . . . . .	3
1.2.2	Die globale Eichgruppe $G$ . . . . .	5
1.3	Zustände . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Globales thermisches Gleichgewicht</b>	<b>7</b>
2.0.1	Die KMS-Bedingung . . . . .	7
2.1	Gleichgewichtszustände <i>ohne</i> chemisches Potential: Die Zweipunktfunktion der $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände über $\mathcal{F}$ . . . . .	8
2.2	Das chemische Potential . . . . .	12
2.2.1	Vorbereitung – etwas Terminologie . . . . .	13
2.2.2	Eine Betrachtung der Eigenschaften der KMS-Zustände mit chemischem Potential . . . . .	14
2.3	Gleichgewichtszustände <i>mit</i> chemischem Potential: Die Zweipunktfunktion der $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände über $\mathcal{F}$ . . . . .	16
2.4	Die $n$ -Punktfunktion der $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände über $\mathcal{F}$ . . . . .	17
2.4.1	Implementierung der Poincarétransformationen auf den $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zuständen . . . . .	19
2.5	Das Vakuum . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Lokales thermisches Gleichgewicht – Grundlagen</b>	<b>21</b>
3.1	Vorüberlegungen . . . . .	21
3.1.1	Der Begriff der $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität . . . . .	21
3.1.2	Punktfelder, Auswahl eines Basisfeldes $\phi_0(x)$ . . . . .	22
3.1.3	Quadrate und höhere Potenzen von $\phi_0(x)$ , balancierte Ableitung, die Mengen $\mathcal{S}_x$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ . . . . .	22
3.2	Auswahl der thermischen Vergleichszustände und lokalthermalen Observablen des Feldes $\mathcal{F}$ . . . . .	23
3.2.1	Auswahl der Mengen $\mathcal{C}_{\beta, \mu}$ , $\mathcal{C}_{B, M}$ und $\mathcal{C}$ von thermischen Vergleichszuständen . . . . .	24
3.2.2	Auswahl der Menge $\mathcal{S}_x$ . . . . .	25
3.3	$\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität und Makroobservablen: der Übergang vom Mikroskopischen zum Makroskopischen . . . . .	27
3.3.1	Über die Beziehung des Mikroskopischen mit dem Makroskopischen . . . . .	28
3.3.2	Makroobservableneigenschaft zulässiger Observablen . . . . .	28
3.4	Beispiele von aus den lokalthermalen Observablen erhaltbaren thermischen Funktionen . . . . .	29
3.4.1	Der Strom . . . . .	29
3.4.2	Die Temperatur und das chemische Potential . . . . .	30

3.4.3	Der Energie-Impulstensor . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Der Raum der thermischen Funktionen</b>	<b>36</b>
4.1	Diskussion geeigneter Topologien . . . . .	36
4.1.1	Das Randverhalten der zu den lokalthermalen Observablen gehörigen Makroobservablen . . . . .	38
4.1.2	Auswahl geeigneter Topologien . . . . .	43
4.2	Ein Raum thermischer Funktionen im massiven Fall: die $\mathcal{T}_{m_0}$ -Klasse-Funktionen	44
4.3	Beispiele zulässiger thermaler Observabler und Interpretation als Makroobservablen . . . . .	45
4.3.1	Die Phasenraumteilchendichten $N_p^\pm$ . . . . .	45
4.3.2	Die Hilfsfunktionen $\nabla^\nu L_p^\pm$ . . . . .	46
4.3.3	Der Druck und die Entropie . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Transportgleichungen</b>	<b>50</b>
5.1	Bestimmung der Evolutionsgleichungen der zulässigen thermalen Observablen .	51
5.2	Evolution der Phasenraumteilchendichte . . . . .	53
5.3	Rekonstruierbarkeit von lokalen Gleichgewichtsfunktionalen aus der Phasenraumteilchendichte . . . . .	53
5.4	Gebiete lokalen Gleichgewichts . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Konstruktion von Beispielen nichttrivialer lokaler Gleichgewichtszustände</b>	<b>60</b>
6.1	Zur Frage, ob über $\mathcal{F}$ nichttriviale $\mathcal{S}_O$ -thermische Zustände mit scharfer Temperatur und scharfem chemischen Potential existieren (No Go-Theorem) . . .	60
6.2	Die Mengen $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$ und $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$ lokaler Zustände . . . . .	65
6.2.1	Die Menge $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$ nichtstationärer lokaler Zustände . . . . .	67
6.2.2	Die Menge $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$ stationärer lokaler Zustände . . . . .	70
6.2.3	Eine verschärfte Version der Positivitätsbedingungen (6.7) und (6.11) .	72
6.2.4	Ein Kriterium für die Erfüllbarkeit der Teilbedingung (6.14a) . . . . .	74
6.3	Vorbereitende Betrachtungen mit dem Ziel, $\mathcal{S}_O$ -thermische Zustände in den Mengen $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$ und $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$ zu finden . . . . .	75
6.3.1	Darstellungen von Funktionen $A$ und $B$ , die $\mathcal{S}_O$ -thermische Zustände ergeben . . . . .	75
6.3.2	Das Abfallverhalten der Funktionen $A$ und $B$ . . . . .	76
6.4	Zwei $\mathcal{S}_O$ -thermische Zustände aus $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$ bzw. $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$ . . . . .	81
6.4.1	Vorbereitung: Konstruktion und Analyse von Hilfsfunktionen . . . . .	81
6.4.2	Hauptsatz . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>92</b>
<b>A</b>	<b>Nachtrag einiger Beweise</b>	<b>95</b>
A.1	Beweis des Lemmas (2.2) . . . . .	95
A.2	Beweis des Lemmas (2.3) . . . . .	98
A.3	Beweis der Vertauschbarkeit von Summenbildung, Integration und Ableitung, die in Satz (4.4) benötigt wird . . . . .	100
<b>B</b>	<b>Einheiten, physikalische und mathematische Konventionen</b>	<b>102</b>
<b>C</b>	<b>Symboltabelle</b>	<b>103</b>

**Abbildungsverzeichnis**

1	$I^0$ im Ruhesystem von KMS-Zuständen $\omega_{\beta=(\sqrt{\beta^2},0,0,0)}^\mu$ . . . . .	31
2	Druck und Entropiedichte . . . . .	50

# 1 Das untersuchte Modell: Feldalgebra, Automorphismen und Zustände

## 1.1 Konstruktion eines Modells des freien bosonischen massiven geladenen lokalen Quantenfeldes im Minkowskiraum

Quantenfelder können mit Hilfe von  $*$ -Algebren in Verbindung mit auf ihnen definierten Morphismen und Funktionalen modelliert werden<sup>1</sup>. Hierbei müssen diese mathematischen Objekte natürlich so beschaffen sein, daß sie die experimentell beobachtete Physik wiedergeben, also die Quanteneigenschaften, die Struktur der zugrundeliegenden Raumzeit, Kausalität, etc.

Die Eigenschaften, die die Quantenfeldalgebren und Funktionale zur Feldbeschreibung tauglich machen, sowie die Auswahl der Morphismen stammen dabei aus einem allgemeinen minimalen Anforderungskatalog, den jede physikalische Theorie erfüllen muß, konkretisiert durch feldspezifische Aspekte.

Wir wollen nun das in dieser Arbeit untersuchte Modell konstruieren: Die  $*$ -Algebra eines freien bosonischen massiven geladenen lokalen Quantenfeldes im Minkowskiraum.

### 1.1.1 Allgemeine Konstruktionsaspekte

Ein Quantenfeld wird von einer Raumzeit getragen, und beide sind mathematisch-formal miteinander verknüpft. Bei der Raumzeit handelt es sich im vorliegenden Fall um den Minkowskiraum  $M = (\mathbb{R}^4, \eta)$ , den Ortsraum  $\mathbb{R}^4$  mit Metrik  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Den offenen Teilmengen  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$  dieser Raumzeit ordnen wir korrespondierende (Feld-)algebren  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  zu, deren Elemente die lokalen Feldoperatoren  $\phi(f)$  sind, wobei  $f$  eine Testfunktion mit Träger in  $\mathcal{O}$  ist.

Die Spezifizierung der Feldoperatoren mit Testfunktionen können wir folgendermaßen anschaulich motivieren. Die Mengen  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  enthalten (unter anderem) Operatoren, die Observablen entsprechen, d.h. als durch Messung zugängliche Größen interpretiert werden. Da es in der Realität problematisch ist, zielgerichtet eine Messung an einem exakt festgelegten Punkt zu einer exakt festgelegten Zeit durchzuführen, stammen die aussagekräftigsten physikalischen Begriffe, die wir uns von Feldern machen können, von Messreihen, die ein über ein Gebiet der Raumzeit gewichtetes Mittel der gemessenen Feldgröße ergeben. Dies spiegelt sich –nicht als zufällige Erscheinung, sondern als grundlegendes Prinzip verstanden– in der algebraischen Begriffsbildung wider; so wird die Wirkung von *allen* Feldoperatoren  $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ , also auch denen, die nicht Observablen entsprechen, durch Testfunktionen  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C})$  charakterisiert, die diese Gewichtung über Gebiete in der Raumzeit repräsentieren.

Doch nicht nur die Anschauung legt es nahe, diese Definition zu wählen. Eine weitergehende Idealisierung der Feldoperatoren, die dann Messungen bzw. Operationen am Punkt bedeuten sollen, wirft auch tiefliegende mathematisch-konzeptuelle Fragen auf, so z.B. falls Produkte dieser Feldoperatoren am selben Punkt auftreten.

Eine solche Idealisierung wird im Rahmen dieser Arbeit noch benötigt, ist aber in der benötigten Form aus den zunächst nicht idealisierten Operatoren ableitbar. Hierbei geht allerdings als wesentlicher Punkt eine Einschränkung der Menge der Zustände ein, in denen die idealisierten Formen betrachtet werden sollen (siehe hierzu Kapitel 3.1.2).

**Definition 1.1** ( *$*$ -Algebra auf flacher Raumzeit*) Sei  $M = (\mathbb{R}^4, \eta)$  (der Minkowskiraum) und bezeichne  $\mathcal{O} \subset M$  eine offene Teilmenge. Die Algebra  $\mathcal{F}$  von lokalen Operatoren eines sich

<sup>1</sup>Streng genommen ist dies nur eine Vermutung.

in  $M$  befindlichen Quantenfeldfeldes ist die Vereinigung

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\mathcal{O} \subset M, \mathcal{O} \text{ offen}} \mathcal{F}(\mathcal{O})$$

aller Algebren  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ , die aus dem Netz

$$M \supset \mathcal{O} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{O})$$

stammen. Dabei gelte die Inklusionsrelation

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{O}'). \quad (1.1)$$

Die Elemente der Algebren  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  sind hierbei als Polynome über  $\mathbb{C}$  implementiert, die von Objekten  $\phi(f)$

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \ni f \mapsto \phi(f) \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$$

und der Identität  $\hat{1}$  gebildet werden. Die Inklusionsrelation ist also aufgrund der Implikation  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \Rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}', \mathbb{C})$  automatisch erfüllt. Darüberhinaus trägt die Feldalgebra folgende Struktur.

- **Linearität in den Testfunktionen** Für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  und  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$  gilt

$$\phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \phi(f_1) + \lambda_2 \phi(f_2). \quad (1.2)$$

- **Existenz des hermitesch konjugierten Elements** Auf jeder Algebra  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  ist eine involutive, antilineare Operation  $*$  definiert, die einem Element  $a \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  sein hermitesch konjugiertes Element  $a^* \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  zuordnet.

$$* : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}), \quad \phi(f) \longmapsto \phi(f)^*, \quad (1.3)$$

sodaß

1.  $\phi(f)^* = \phi^*(\bar{f})$
2.  $\phi(f)^{**} = \phi(f)$
3.  $(c\hat{1})^* = \bar{c}\hat{1}$
4.  $(\sum_i c_i \phi(f_1) \dots \phi(f_n))^* = \sum_i \bar{c}_i \phi(f_n)^* \dots \phi(f_1)^*$

Dadurch werden die Algebren  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  und damit auch die Algebra  $\mathcal{F}$  zu  $*$ -Algebren.

- **Lokalität** Objekte, deren Träger raumartig getrennt sind, können sich nicht beeinflussen. Diese Eigenschaft äußert sich im Falle des hier vorliegenden bosonischen Feldes darin, daß der Kommutator<sup>2</sup> von Feldoperatoren, deren Argumente raumartig getrennt sind, verschwindet. Es gilt also

$$[\phi_1(f_1), \phi_2(f_2)] = 0, \quad \text{falls } \text{supp}(f_1) \times \text{supp}(f_2).$$

- **Existenz einer Feldgleichung** Die Feldoperatoren gehorchen einer Bewegungsgleichung.

---

<sup>2</sup>Im fermionischen Fall wäre es der Antikommutator.

- **Wirkung der Poincarégruppe** Auf der Feldalgebra  $\mathcal{F}$  ist eine Menge von  $*$ -Automorphismen  $\{\alpha_{\Lambda,a}\}$  (d.h. bijektiven, die algebraische Struktur erhaltende Abbildungen  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ) definiert, die die Wirkung der eigentlichen orthochronen Poincarégruppe  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  auf  $\mathcal{F}$  implementiert (siehe 'Automorphismen').
- **Wirkung einer Eichgruppe** Auf  $\mathcal{F}$  ist die automorphe Wirkung einer kompakten globalen Eichgruppe, genannt  $G$ , definiert, die die Algebra jedes endlichen Gebiets wieder auf sich selbst abbildet. Sie trägt wesentlich zum Begriff der Observablen bei (siehe 'Automorphismen'), und die Zustände der Feldalgebra sind invariant unter ihrer Wirkung.

### 1.1.2 Konkretisierung: Das freie massive geladene bosonische Feld

#### Kodierung der Masse und Angabe der Feldgleichung

**Definition 1.2 (Feldgleichung)** Die Feldoperatoren aus  $\mathcal{F}$  gehorchen der Klein-Gordon-Gleichung im Distributionensinne

$$(\square + m_0^2)\phi(x) = 0 \quad (1.4)$$

mit  $m_0^2 > 0$ . Es handelt sich um die Euler-Lagrange-Gleichung eines freien massiven Feldes.

**Kodierung der Ladung und Angabe der Vertauschungsrelation** Aus den Wightman-Axiomen kann man maßtheoretisch die sogenannte Källén-Lehmann-Darstellung der allgemeinen positiven Zweipunktfunktion  $W(\phi(x)\phi(y))$ , und somit auch den Erwartungswert des dazugehörigen Kommutators  $\sigma$ , ableiten. Für ein Klein-Gordon-Feld der Masse  $m_0$  erhält man auf diese Weise

$$\sigma(x-y) \doteq (2\pi)^{-3} \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) e^{-ip(x-y)}$$

im Sinne von Distributionen.  $\sigma$  erfüllt die Lokalisierungsbedingung nach Konstruktion.

**Definition 1.3 (Kommutatorrelation)** Es gelte im Sinne von Distributionen

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= 0 \\ [\phi^*(x), \phi^*(y)] &= 0 \\ [\phi^*(x), \phi(y)] &= [\phi(x), \phi^*(y)] = \sigma(x-y) \hat{1}. \end{aligned}$$

Außerdem definieren wir

$$\sigma_{f,g}(z) \doteq \int d^4x \int d^4y f(x) g(y-z) \sigma(x-y).$$

Durch diese Vertauschungsrelationen beschreibt die Feldalgebra  $\mathcal{F}$  ein geladenes bosonisches Feld.

## 1.2 Automorphismen

### 1.2.1 Die Poincarétransformationen

Bei der Charakterisierung der Feldalgebra wurde die Existenz von  $*$ -Automorphismen  $\alpha_{\Lambda,a}$  postuliert, die die Wirkung der eigentlichen orthochronen Poincarégruppe  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  auf das Feld implementieren. Die konkrete Definition ihrer Wirkung auf Feldoperatoren steht noch aus.

**Definition 1.4 (Poincarétransformationen)** Die Wirkung der Abbildungen  $\alpha_{\Lambda,a}$  auf Elemente aus  $\mathcal{F}$  sei definiert durch

$$\begin{aligned}\alpha_{\Lambda,a}\phi^{(\mu)}(f) &= (M^{-1})^{(\mu)}_{(\nu)}\phi^{(\nu)}(f_{(\Lambda,a)}) \\ \alpha_{\Lambda,a}(\sum_i c_i \phi(f_1)\dots\phi(f_n)) &= \sum_i c_i \alpha_{\Lambda,a}(\phi(f_1))\dots\alpha_{\Lambda,a}(\phi(f_n))\end{aligned}\tag{1.5}$$

wobei  $f_{(\Lambda,a)}(x) \doteq f(\Lambda^{-1}x - a)$  und  $(M^{-1})$  eine dem Tensorcharakter von  $\phi$  angepaßte Matrixdarstellung des Poincarégruppenelements  $(\Lambda, a)$  ist. Es gilt also

$$\alpha_{\Lambda,a}\mathcal{F}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}(\Lambda\mathcal{O} + a).$$

**Lemma 1.5** Bei den so definierten Abbildungen  $\alpha_{\Lambda,a}$ , die die Wirkung der eigentlichen orthochronen Poincarégruppe  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  vermitteln, handelt es sich um  $*$ -Automorphismen auf  $\mathcal{F}$ .

**Beweis.** Nach Definition gilt die Relation

$$\alpha_{\Lambda,a}(\sum_i c_i \phi(f_1)\dots\phi(f_n)) = \sum_i c_i \alpha_{\Lambda,a}(\phi(f_1))\dots\alpha_{\Lambda,a}(\phi(f_n))$$

Weiterhin besitzt jeder Operator  $\alpha_{\Lambda,a}$  einen inversen Operator. Er lautet

$$\alpha_{\Lambda,a}^{-1} = \alpha_{\Lambda^{-1}, -\Lambda a}.$$

Die algebraische Struktur von  $\mathcal{F}$  bleibt unter der Wirkung der  $\alpha_{\Lambda,a}$  ebenfalls erhalten, wie wir folgendermaßen sehen: Die Zuordnung zweier hermitesch konjugierter Elemente  $a$  und  $a^*$  aus  $\mathcal{F}$  gemäß (1.3) wird nicht berührt, denn

$$\begin{aligned}\left(\alpha_{\Lambda,a}\left(c\phi^{(\mu)}(f)\right)\right)^* &= \left((M^{-1})^{(\mu)}_{(\nu)}\phi^{(\nu)}(f_{(\Lambda,a)})\right)^* \\ &= \left((M^{-1})^{(\mu)}_{(\nu)}\phi^{(\nu)}\right)^*(\bar{f}_{(\Lambda,a)}) = \alpha_{\Lambda,a}\left(\phi^{(\mu)}(f)^*\right).\end{aligned}$$

Auch die Inklusionsrelation (1.1) und die Zuordnung in (1.2) bleiben unberührt, wie man sich auf analoge Weise überzeugt. Da der D'Alambert-Operator  $\square$  poincaréinvariant ist, bleibt auch die Klein-Gordon-Gleichung (1.4), siehe 'Kodierung der Masse', erfüllt. Die Kommutatorrelation (1.1.2) erfordert ein Nachrechnen. Die Beziehungen  $[\phi^*(f_1), \phi(f_2)] = [\phi(f_1), \phi(f_2)^*] = \sigma_{f_1, f_2}(0) \hat{1}$  bzw.  $[\phi(f_1), \phi(f_2)] = [\phi(f_1)^*, \phi(f_2)^*] = 0$  müssen erhalten bleiben, siehe 'Kodierung der Ladung'. Nun ist einerseits

$$\alpha_{\Lambda,a}\underbrace{\sigma_{f_1, f_2}(0)}_{\text{C-Zahl}}\hat{1} = \sigma_{f_1, f_2}(0)\alpha_{\Lambda,a}\hat{1} = \sigma_{f_1, f_2}(0)\hat{1},$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\alpha_{\Lambda,a}[\phi^*(f_1), \phi(f_2)] &= [\alpha_{\Lambda,a}\phi^*(f_1), \alpha_{\Lambda,a}\phi(f_2)] \\ &= [\phi^*(f_{1,(\Lambda,a)}), \phi(f_{2,(\Lambda,a)})] \\ &= \int d^4y \int d^4z f_1(\Lambda^{-1}y - a) f_2(\Lambda^{-1}z - a) \sigma(y - z) \hat{1} \\ &= \int d^4y' \int d^4z' f_1(y') f_2(z') \sigma(\Lambda(y' - z')) \hat{1} \\ &= \sigma_{f_1, f_2}(0) \hat{1}.\end{aligned}$$

Die für dieses Ergebnis ausgenutzte Eigenschaft ist die Poincaréinvarianz von  $\sigma$ . Analog lassen sich die anderen Relationen zeigen. Die Wirkung von  $\alpha_{\Lambda,a}$  ändert also nichts an der Kommutatorrelation.  $\square$

**Definition 1.6 (Translationen)** Die Wirkung der Operatoren

$$\alpha_x \phi(f) \doteq \phi(f_x),$$

wobei  $f_x(y) \doteq f(y-x)$ , auf die Quantenfeldalgebra heißen Translationen.

### 1.2.2 Die globale Eichgruppe $G$

Auch die Eichgruppe  $G$  muß nun noch spezifiziert werden. Die globale Eichgruppe  $G$  sei gegeben durch die kompakte Liegruppe  $U(1)$ , und insbesondere sei die Wirkung eines Elementes  $g \in G = U(1)$  implementiert auf  $\mathcal{F}$  durch die Abbildung  $\gamma_g$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_g(\phi(f)) &= \phi(gf) = g\phi(f) \\ \gamma_g(\phi(f)^*) &= \phi(gf)^* = \bar{g}\phi(f)^* \\ \gamma_g\left(\sum c\phi(f_1)\dots\phi(f_n)^*\right) &= \sum c\phi(gf_1)\dots\phi(gf_n)^* \\ \gamma_g(\hat{1}) &= \hat{1}. \end{aligned}$$

**Lemma 1.7** Bei den so definierten Abbildungen  $\gamma_g$ , die die Wirkung der Eichgruppe  $G$  vermitteln, handelt es sich um  $*$ -Automorphismen auf  $\mathcal{F}$ .

**Beweis.** Nach Definition gilt

$$\gamma_g\left(\sum c\phi(f_1)\dots\phi(f_n)^*\right) = \sum c\phi(gf_1)\dots\phi(gf_n)^*.$$

Auch existiert zu jedem  $\gamma_g$  eine Umkehroperation; es handelt sich um  $\gamma_{\bar{g}}$ . Die algebraische Struktur bleibt ebenfalls unberührt. Es gilt

$$(\gamma_g(\phi(f)))^* = (\phi(gf))^* = (g\phi(f))^* = \bar{g}\phi(f)^* = \gamma_g(\phi(f)^*).$$

Auch die Eigenschaften (1.1), die Zuordnung in (1.3) und (1.2) sowie (1.4) bleiben erhalten, wie man sich leicht überzeugt. Die Kommutatorrelation erfordert ein Nachrechnen. Die Beziehungen  $[\phi^*(f_1), \phi(f_2)] = [\phi(f_1), \phi(f_2)^*] = \sigma_{f_1, f_2}(0) \hat{1}$  bzw.  $[\phi(f_1), \phi(f_2)] = [\phi(f_1)^*, \phi(f_2)^*] = 0$  müssen erhalten bleiben. Dazu betrachten wir einerseits

$$\gamma_g\left(\underbrace{\sigma_{f_1, f_2}(0) \hat{1}}_{\text{C-Zahl}}\right) = \sigma_{f_1, f_2}(0) \hat{1},$$

und andererseits

$$\gamma_g([\phi(f_1)^*, \phi(f_2)]) = [\bar{g}\phi(f_1)^*, g\phi(f_2)] = [\phi(f_1)^*, \phi(f_2)] = \sigma_{f_1, f_2}(0) \hat{1}.$$

Analog lassen sich die anderen Relationen zeigen. Die Wirkung von  $\gamma_g$  berührt die Kommutatorrelation also nicht.  $\square$

**Lemma 1.8** Für alle  $\gamma_g$ ,  $g \in G$ , und alle  $\alpha_{\Lambda, a}$ ,  $(\Lambda, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ , gilt

$$\gamma_g \circ \alpha_{\Lambda, a} = \alpha_{\Lambda, a} \circ \gamma_g.$$

**Beweis:** Dies ergibt sich direkt aus der Konstruktion dieser Automorphismen.  $\square$

**Definition 1.9 (Observablenalgebra)** Die  $G$ -Fixpunktalgebra von  $\mathcal{F}$  wird Observablenalgebra  $\mathfrak{A}$  genannt.

$$\mathfrak{A} = \{A \in \mathcal{F}; \gamma_g(A) = A \forall g \in G\}$$

Sie ist stabil unter Wirkung von  $\mathcal{P}_+^\dagger$ , da  $[\gamma_g, \alpha_{\Lambda, a}] = 0$ . Da die Observablen aus  $\mathcal{F}$  invariant unter globalen Eichoperationen sind, sind sie in der Observablenalgebra enthalten.

$\mathfrak{A}$  ist genau die von allen Elementen  $a^*a$  und der  $\hat{1}$  aufgespannte Unteralgebra von  $\mathcal{F}$ , wobei  $a \in \mathcal{F}$  Monom von  $\phi$  und  $\phi^*$ -Operatoren ist, da einzig diese aufgrund der Beziehungen

$$\begin{aligned} \gamma_g(a^*a) &= \dots \gamma_g(\phi(f)^*) \dots \gamma_g(\phi(f)) \dots = \dots g\phi(f)^* \dots \bar{g}\phi(f) \dots = \dots \phi(f)^* \dots \phi(f) \dots = a^*a \\ \gamma_g(c\hat{1}) &= c\hat{1} \end{aligned}$$

invariant sind ('...' ersetzt die anderen Faktoren).

### 1.3 Zustände

Zustände sind spezielle Funktionale über Feldalgebren. Die Anwendung eines solchen Funktionals auf eine Feldgröße wird hierbei als Bestimmung des Erwartungswertes der Feldgröße in diesem Zustand interpretiert.

**Definition 1.10 (Zustände)** Auf der Feldalgebra  $\mathcal{F}$  wird eine Menge  $\mathcal{F}^{*(+)}$  von Funktionalen  $\omega : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ , Zustände genannt, definiert. Zustände zeichnen sich durch folgende Eigenschaften aus:

- $\forall A \in \mathcal{F}$  gilt  $\omega(A^*A) \geq 0$  (Positivität, daher das (+))
- $\forall A, B \in \mathcal{F}, \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \omega(\lambda A + \mu B) = \lambda\omega(A) + \mu\omega(B)$  (Linearität)
- $\omega(\hat{1}) = 1$  (Normierung)
- Invarianz unter Eichoperationen  $\gamma_g, g \in G$
- Stetigkeit in den Testfunktionen, die die Feldoperatoren spezifizieren. Die dabei verwendete Topologie auf den Testfunktionen sei die Schwartzraumtopologie. Sie wird mit einer Familie von Halbnormen

$$\|f\|_{k,q} = \sup_x \left| x_0^{k_0} \dots x_3^{k_3} \left( \frac{\partial^{q_0+\dots+q_3}}{\partial x_0^{q_0} \dots \partial x_3^{q_3}} f \right) (x) \right|, \quad k_0, \dots, q_3 \in \mathbb{N}^0$$

definiert. Wir schreiben  $f_n \xrightarrow{S} f$ , wenn sämtliche Ableitungen von  $f_n$  auf jedem endlichen Gebiet gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von  $f$  konvergieren und in der Ungleichung  $\|f_n\|_{k,q} < C_{k,q}$  die Konstanten  $C_{k,q}$  unabhängig von  $n$  gewählt werden können. Für eine konvergente Folge von Familien von Testfunktionen  $(f_j^n)_{j=1\dots J}$  soll also gelten

$$(f_j^n)_{j=1\dots J} \xrightarrow{S} (f_j)_{j=1\dots J} \quad \Rightarrow \quad |\omega(\phi(f_1^n) \dots \phi(f_J^n)) - \omega(\phi(f_1) \dots \phi(f_J))| \rightarrow 0$$

Sei eine konvexe Menge  $W$  von Zuständen und daraus ein Zustand  $\omega$  gegeben. Besitzt die Zerlegung des Zustandes  $\omega = c_1\omega_1 + c_2\omega_2$ ,  $\omega_1, \omega_2 \in W$ , nur die triviale Lösung  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $c_1+c_2 = 1$ , so heißt der Zustand  $\omega$  extremal (in der Menge  $W$ ). Insbesondere ist die Extremalität eines Zustandes von der betrachteten Menge abhängig.

## 2 Globales thermisches Gleichgewicht

Für die Konstruktion und Analyse  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischer Zustände werden globale thermische Gleichgewichtszustände des Feldes benötigt. In diesen Zuständen sind makroskopische Größen wie die Temperatur bekannt, deren physikalische Bedeutung wir in einer geeigneten, später präzisierten Weise auf die  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustände übertragen wollen.

Die globalen Gleichgewichtszustände des Feldes  $\mathcal{F}$  sollen im folgenden konstruiert werden. Dabei gilt die Zielstellung, eine möglichst umfangreiche Menge zu erhalten, um möglichst viele  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustände betrachten zu können.

### 2.0.1 Die KMS-Bedingung

Mit Hilfe der nach Kubo-Martin-Schwinger benannten KMS-Bedingung können auf sehr elegante Weise die globalen thermischen Gleichgewichtszustände beschrieben werden, denn es ist, im Gegensatz zur Beschreibung durch Gibbsensembles in der Fockraumdarstellung, die Beschreibung unendlich ausgedehnter Systeme schon in natürlicher Weise enthalten. Auf dieses interessante Thema kann hier leider nicht weiter eingegangen werden, siehe hierzu [HHW67] und [HK64].

**Definition 2.1 (KMS-Bedingung)** Ein Zustand  $\omega_{\beta e}$  erfüllt die KMS-Bedingung auf einer Algebra  $\mathcal{A}$  bei inverser Temperatur  $\beta > 0$  im durch  $e$  gegebenem Lorentz-Bezugssystem, falls es für jedes Paar von Operatoren  $A, B \in \mathcal{A}$  eine Funktion  $h$  gibt, die analytisch im Streifen  $S_\beta \doteq \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \beta\}$  und stetig an den Rändern ist, sodaß

$$h(t) = \omega_{\beta e}(A\alpha_{te}(B)), \quad h(t + i\beta) = \omega_{\beta e}(\alpha_{te}(B)A), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ein Zustand  $\omega$  heißt  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustand auf  $\mathcal{A}$ , falls er diese KMS-Bedingung erfüllt.

Im folgenden werden wir mit Hilfe der KMS-Bedingung zunächst eine Darstellung der Zweipunktfunktionen der  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände auf der Feldalgebra  $\mathcal{F}$  konstruieren. Bei diesen Zuständen handelt es sich um Gleichgewichtszustände *ohne* chemisches Potential. Wie wir zeigen wollen, ist die Menge aller globalen Gleichgewichtszustände über  $\mathcal{F}$  aber noch umfangreicher. Daher werden wir im Anschluß an einen Exkurs, ob und wie wir die Menge der  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände erweitern können, die Zweipunktfunktion einer weiteren Klasse, der sogenannten  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände auf der Feldalgebra  $\mathcal{F}$ , konstruieren. Die Menge dieser Gleichgewichtszustände *mit* chemischem Potential stellt die maximale Erweiterung der Menge der  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände über  $\mathcal{F}$  dar. Schließlich können wir auf Basis der Zweipunktfunktion die Form der allgemeinen  $n$ -Punktfunktion der  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände über  $\mathcal{F}$  bestimmen. Auf diesem Wege werden Schritt für Schritt wesentliche Eigenschaften von Zuständen im globalen thermischen Gleichgewicht über  $\mathcal{F}$  herausgestellt.

Eine Einschränkung der Allgemeinheit wollen wir allerdings a priori noch machen. Unter den hier konstruierten globalen Gleichgewichtszuständen sollen keine Gemische unterschiedlicher Phasen auftreten – die globalen Gleichgewichtszustände sollen also schon allein durch die Angabe von Temperatur, chemischem Potential und Eigenzeitrichtung eindeutig identifizierbar sein. Da die KMS-Zustände mit gleicher Temperatur, chemischem Potential und Eigenzeitrichtung eine konvexe Menge bilden, gilt es also, in dieser Menge die extremalen Elemente zu

finden. Diese Forderung nach Extremalität führt uns zu einem Auswahlkriterium, das später besprochen wird.

Es darüberhinaus hilfreich, zunächst folgende vorbereitende Feststellungen zu machen.

**Lemma 2.2** *Die Distribution  $I^\mu$*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}) \ni (f, g) &\longmapsto I_{f,g}^\mu = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p \pm \mu e)}} \\ &\doteq 2\pi \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ \frac{\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e(p \pm \mu e)}} \Big|_{p^0 = \omega_{\vec{p}}} - \frac{\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e(p \pm \mu e)}} \Big|_{p^0 = -\omega_{\vec{p}}} \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $e$  zeitartig und  $\beta > 0$  sind, hat folgende Eigenschaften

1.  $I_{f,f}^\mu \geq 0$  für  $|\mu| \leq m_0$

2. Für  $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ ,  $f_i, g_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$  gilt

$$I_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2}^\mu = \lambda_1 \mu_1 I_{f_1, g_1}^\mu + \lambda_2 \mu_1 I_{f_2, g_1}^\mu + \lambda_1 \mu_2 I_{f_1, g_2}^\mu + \lambda_2 \mu_2 I_{f_2, g_2}^\mu$$

3.  $I_{f,g}^\mu$  ist stetig in den Testfunktionen, und zwar im Sinne

$$(f_n, g_n) \xrightarrow{\mathcal{S}} (f, g) \quad \Rightarrow \quad \left| I_{f_n, g_n}^\mu - I_{f, g}^\mu \right| \rightarrow 0$$

4.  $I_{f,g}^\mu$  ist stetig in  $\beta e \in V^+$  sowie  $\mu \in (-m_0, m_0)$

**Beweis.** Siehe Appendix, Kapitel A.1. □

**Lemma 2.3** *Die Funktion  $I_{f,g}^\mu$*

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto I_{f,g}^\mu(t) = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p \pm \mu e)}} e^{ipet}$$

wobei  $f$  und  $g$  Testfunktionen aus  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ ,  $e$  ein zeitartiger Einheitsviervektor und  $\beta > 0$  sind, ist analytisch und beschränkt im Streifen  $S_\beta \doteq \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \beta\}$  und stetig an seinen Rändern.

**Beweis.** Siehe Appendix, Kapitel A.2 □

## 2.1 Gleichgewichtszustände *ohne* chemisches Potential: Die Zweipunktfunktion der $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände über $\mathcal{F}$

**Satz 2.4** *Die Zweipunktfunktion der  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände auf  $\mathcal{F}$  ist gegeben durch<sup>3</sup>*

$$\omega_{\beta e}(\phi^*(f) \phi(g)) = \omega_{\beta e}(\phi(f) \phi^*(g)) = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e p}}, \quad (2.1)$$

bzw. (im Sinne von Distributionen)

$$\omega_{\beta e}(\phi^*(x) \phi(y)) = \omega_{\beta e}(\phi(x) \phi^*(y)) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e p}} e^{-ip(x-y)}.$$

---

<sup>3</sup>Bem: In der Theorie des ungeladenen Feldes ist  $\omega_{\beta e}(\phi(f)\phi(g)) = \omega_{\beta e}(\phi^*(f)\phi(g))$  und im geladenen Fall ist  $\omega_{\beta e}(\phi^*(f)\phi(g)) \neq \omega_{\beta e}(\phi(f)\phi(g)) = 0$ .

**Beweis.** Konstruktion mit Hilfe der KMS-Analytizitätsbedingung. Wir definieren zunächst i.S.v.D.

$$\begin{aligned} F(x) &\doteq \omega_{\beta e}(\phi^*(f) \alpha_x(\phi(g))) \\ G(x) &\doteq \omega_{\beta e}(\alpha_x(\phi(g)) \phi^*(f)) \stackrel{\text{KMS}}{=} F(x + i\beta e). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Betrachten wir weiterhin

$$\begin{aligned} \tilde{F}(p) &= (2\pi)^{-2} \int d^4x F(x) e^{-ipx} = (2\pi)^{-2} \int d^4x F(x + i\beta e) e^{-ip(x+i\beta e)} \\ &= \tilde{G}(p) e^{\beta e p}. \end{aligned}$$

Die Abänderung des Integranden ist zulässig, da  $F(te)$  nach KMS-Bedingung auf  $S_\beta$  analytisch, beschränkt und am Rande stetig ist. Des weiteren gilt

$$\begin{aligned} F_{f,g}(x) &\doteq \omega_{\beta e}(\phi^*(f) \alpha_x(\phi(g))) \\ &= \omega_{\beta e}([\phi^*(f), \alpha_x(\phi(g))]) + \omega_{\beta e}(\alpha_x(\phi(g)) \phi^*(f)) \\ &= \sigma_{f,g}(x) \hat{1} + \omega_{\beta e}(\alpha_x(\phi(g)) \phi^*(f)) \\ &= \sigma_{f,g}(x) + G_{f,g}(x). \end{aligned}$$

Wir folgern

$$\tilde{F}_{f,g}(p) = \tilde{\sigma}_{f,g}(p) + \tilde{G}_{f,g}(p) = \tilde{\sigma}_{f,g}(p) + e^{-\beta e p} \tilde{F}_{f,g}(p),$$

und bekommen somit die Identität

$$(1 - e^{-\beta e p}) \tilde{F}_{f,g}(p) = \tilde{\sigma}_{f,g}(p). \quad (2.3)$$

Wir können diese Gleichung durch Lorentztransformation auf die Form

$$(1 - e^{-\beta p_0}) \tilde{F}_{f,g}(p) = \tilde{\sigma}_{f,g}(p)$$

bringen, da  $e$  nach KMS-Bedingung zeitartig ist und somit ein durch Lorentztransformation zugängliches Bezugssystem existiert mit  $e = (|e|, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$ . Diese Gleichung gilt, wie oben ausgeführt, im Sinne von Distributionen. Durch  $\tilde{F}_{f,g}(\cdot)$  und  $\tilde{\sigma}_{f,g}(\cdot)$  werden also (mit den gleichen Symbolen bezeichnete) Distributionen definiert, für die Identität

$$(1 - e^{-\beta \cdot}) \tilde{F}_{f,g}[u] = \tilde{\sigma}_{f,g}[u] \quad (2.4)$$

gilt. Nun hat  $(1 - e^{-\beta p_0})^{-1}$  einen Pol von erster Ordnung bei  $p_0 = 0$ .

### Lösung von $xR = S$ im Sinne von Distributionen, Eindeutigkeit der Lösung

Eine Abhandlung hierzu findet sich z.B. in [BLT75], wo die folgende Ausführung z.T. motiviert wurde. Es seien  $R, S$  Distributionen, wobei  $S$  gegeben und  $R$  zu finden ist. Bezeichne weiterhin  $x$  die Funktion  $\mathbb{C} \ni z \mapsto x(z) = z$ , und  $u$  eine beliebige Testfunktion. Dann soll nach Voraussetzung gelten  $S[u] = xR[u] \doteq R[xu]$ .

Somit gilt für jede Testfunktion der Form  $v_0 = xv$ , daß  $R[v_0] = S[v]$ . Auf dem Teilraum der Testfunktionen  $\{u \in \mathcal{S}, u(0) = 0\}$  ist  $R$  demnach schon definiert. Sei  $u_1$  eine Testfunktion mit  $u_1(0) = 1$ . Eine beliebige Testfunktion  $u$  ist darstellbar als  $u(x) = u(0)u_1(x) + xv(x) = u(0)u_1(x) + v_0(x)$ , wenn auch im allg. nicht eindeutig. Es ist nun  $R[u] = u(0)R[u_1] + R[v_0] = R[u_1]\delta[u] + S[v]$ . Damit wird sichtbar, daß eine Distribution  $R$  mit der Eigenschaft  $xR = S$  erst

durch die (beliebige) Definition auf der Menge der  $u_1$  eindeutig bestimmt wird. Trotz der nicht eindeutigen Zerlegung von  $u$ , ist  $R$  –einmal festgelegt auf der Menge der  $u_1$ – dann eindeutig bestimmt. Die Nichteindeutigkeit stammt von der möglichen Transformation  $u_1 \rightarrow u'_1 = u_1 + w_0$ ,  $v_0 \rightarrow v'_0 = v_0 - u(0)w_0$ , wobei  $w_0(0) = 0$ . Damit erhalten wir  $R[u] = u(0)R[u'_1] + R[v'_0] = u(0)R[u_1] + u(0)R[w_0] + S[v] - u(0)S[w] = u(0)R[u_1] + S[v]$ , und können folglich für  $u_1$  stets eine Standardfunktion  $\overline{u_1}$  einsetzen.

Daher ist  $R[u] = c\delta[u] + S[v]$ , wobei  $\delta$  die Deltadistribution und  $u(x) = u(0)\overline{u_1}(x) + xv(x)$ ,  $c = R[\overline{u_1}]$  ist. Hiermit sind auch alle Fälle, in denen statt  $x$  eine analytische Funktion mit Nullstelle erster Ordnung steht, abgedeckt (Reihenentwicklung). q.e.d.

Bei der Übertragung dieses Ergebnisses auf die Gleichung (2.4) müssen wir noch beachten, daß die Konstante  $c$  zwar unabhängig von  $p_0$  ist, eine Restabhängigkeit in den anderen Variablen aber erhalten bleibt, und es sich bei der Konstante  $c$  also in Wirklichkeit um eine  $f$  und  $g$ –abhängige Größe  $c_{f,g}$  handelt. Demnach lautet die Lösung von (2.3)

$$\tilde{F}_{f,g}(p) = \frac{\tilde{\sigma}_{f,g}(p)}{1 - e^{-\beta ep}} + (2\pi)^2 c_{f,g} \delta(p),$$

und somit, mit dem Zwischenergebnis  $\tilde{\sigma}_{f,g}(p) = (2\pi)^3 \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)\varepsilon(p_0)\delta(p^2 - m^2)$ , die allgemeine Lösung für  $F_{f,g}(x)$

$$F_{f,g}(x) = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta ep}} e^{ipx} + c_{f,g}.$$

Es ist laut Definition

$$\omega(\phi^*(f)\phi(g)) = F_{f,g}(0) = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta ep}} + c_{f,g}.$$

Es stellt sich noch die Frage, ob  $(1 - e^{-\beta \cdot})$  ein Multiplikator der Distribution  $\tilde{F}_{f,g}$  ist. Die Antwort ist ja, denn erstens ist  $(1 - e^{-\beta \cdot}) \in \mathcal{C}^\infty$  und zweitens ist das Wachstum dieser Funktion auf dem Träger von  $\tilde{F}_{f,g}$  schwach genug, um von der Distribution aufgefangen zu werden. Zur Bestimmung der Konstanten  $c_{f,g}$  wird folgende Nebenbedingung ausgenutzt.

**Schwaches  $\alpha_{te}$ –Clustern** Wie in der Einleitung erwähnt, wollen wir von den hier konstruierten  $(\alpha_{te}, \beta)$ –KMS-Zuständen noch eine weitere Eigenschaft fordern: Sie sollen extremal sein, also bei gegebener Temperatur  $\beta$  nicht weiter in  $(\alpha_{te}, \beta)$ –KMS-Zustände zerlegbar.

Wir wollen dazu zunächst die Beziehung der globalen Gleichgewichtszustände und der Automorphismen  $\alpha_{\Lambda,a}$  näher betrachten. Es fällt nicht schwer einzusehen, daß alle KMS-Zustände (zeit-)translationsinvariant sind, aber nicht invariant unter Boosts und im allgemeinen auch nicht unter Drehungen. Insbesondere trifft dies auch für Gemische unterschiedlicher Phasen und ihre extremalen Konstituenten zu.

Wollen wir also einen extremalen Zustand in der Menge aller möglichen Gemische von unterschiedlichen Phasen oder Modifikationen mit gleicher Temperatur, chemischem Potential und Eigenzeitrichtung identifizieren, bietet sich daher als formales Kriterium an, daß ein solcher Zustand nicht mehr weiter in zeittranslationsinvariante Zustände zerlegbar sei. Mathematisch präzisiert bedeutet diese Eigenschaft, daß diese Zustände *extremal  $\alpha_{te}$ –invariant* sind, wobei  $\alpha_{te}$  der Zeittranslationsautomorphismus der Feldalgebra ist.

Nun ist ein extremal  $\alpha_{te}$ –invarianter KMS-Zustand primär, und primäre Zustände haben die schwache cluster-Eigenschaft. Auf diese Zusammenhänge können wir an dieser Stelle leider

nicht weiter eingehen. Siehe hierzu [Ha96]. In der folgenden Definition werden beide äquivalenten Eigenschaften zusammengefaßt.

Wir bemerken an dieser Stelle noch, daß die Eichinvarianz, also Invarianz unter Operationen von  $\gamma_g$ , a priori eine Eigenschaft aller Zustände ist, und diese Automorphismen des Feldes also kein weiteres Kriterium liefern. Damit sind auch schon alle Automorphismen der Feldalgebra  $\mathcal{F}$  ausgeschöpft.

**Definition 2.5** (*schwaches  $\alpha_{te}$ -Clustern*) Ein Zustand  $\omega$  heißt schwach  $\alpha_{te}$ -clusternd, wenn

1.  $\omega(\alpha_{te}A) = \omega(A)$
2.  $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^N \omega(A(\alpha_{te})^n B) = \omega(A)\omega(B)$ .

Zum Punkt 1). In den KMS-Zuständen gilt im Koordinatensystem mit  $e = (1, 0, 0, 0)$ , daß

$$\omega_\beta(B\alpha_{te}(A)) = \omega_\beta(\alpha_{te+i\beta e}(A)B).$$

Also ist (mit  $B = \hat{1}$ )  $\omega_\beta(\alpha_{te}(A))$  periodisch mit Periode  $i\beta$ . Da  $\omega_\beta(\alpha_e(A))$  außerdem laut Voraussetzung im Streifen  $0 < \text{Im } t < \beta$  analytisch und beschränkt und auf den Rändern des Streifens stetig ist, stellt dieser Ausdruck auf dem ganzen Streifen  $0 \leq \text{Im } t \leq \beta$  eine stetige, beschränkte Funktion dar. Nach Sätzen der Funktionentheorie ist er damit auf ganz  $\mathbb{C}$  analytisch, und auf jedem Streifen – und somit wegen der Periodizität auf ganz  $\mathbb{C}$  – beschränkt. Nach dem Liouvilleschen Satz ist daher  $\omega_{\beta e}(\alpha_x(A))$  konstant.

Zum Punkt 2). Aus Punkt zwei ergeben sich weitere Einschränkungen an die Zweipunkt-funktion. Seien  $A = \phi^*(f)$  und  $B = \phi(g)$ . Die Einpunktfunktionen  $\omega(\phi^*(f))$  und  $\omega(\phi(g))$  verschwinden aufgrund der Eichsymmetrie  $\omega = \omega \circ \gamma_g$ . Daher impliziert Punkt zwei

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^N \omega(\phi^*(f)(\alpha_{te})^n \phi(g)) \stackrel{!}{=} 0.$$

Betrachte (o.E im System mit Eigenzeit  $t$ )

$$\begin{aligned} & N^{-1} \sum_{n=1}^N \omega(\phi^*(f)(\alpha_t)^n \phi(g)) \\ &= N^{-1} \sum_{n=1}^N F_{f,g}(nt) \\ &= c_{f,g} + 2\pi \int d^3\vec{p} \left\{ \frac{\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e p}} \left[ \frac{e^{ip_0 t}}{e^{ip_0 t} - 1} \frac{e^{iNp_0 t} - 1}{N} \right] \Big|_{p_0=\omega_{\vec{p}}} - \dots \Big|_{p_0=-\omega_{\vec{p}}} \right\}, \end{aligned}$$

Nach Ergebnissen in Lemma (2.2) existiert  $2\pi \int d^3\vec{p} \frac{\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e p}} \Big|_{p_0=\pm\omega_{\vec{p}}}$ . Der Term  $\frac{\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e p}} \Big|_{p_0=\pm\omega_{\vec{p}}}$  ist stetig und beschränkt für  $m_0 > 0$ . Des weiteren sind die Funktionen

$$f_N(p_0 t) \doteq \begin{cases} 1 & p_0 t = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{e^{ip_0 t}}{e^{ip_0 t} - 1} \frac{e^{iNp_0 t} - 1}{N} & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig und im Betrag durch 1 beschränkt und konvergieren sogar als Folge in  $N$  für  $N \rightarrow \infty$  fast überall gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Somit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} 2\pi \int d^3 \vec{p} \frac{\tilde{f}(p) \tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta ep}} \left[ \frac{e^{ip_0 t}}{e^{ip_0 t} - 1} \frac{e^{iNp_0 t} - 1}{N} \right] \Bigg|_{p_0 = \pm \omega_{\vec{p}}} = 0,$$

und damit bekommen wir das Ergebnis

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^N \omega(\phi^*(f) (\alpha_t)^n \phi(g)) = c_{f,g}.$$

Soll also  $\omega$  schwach  $\alpha_{te}$ -clusternd bzw. extremal sein, muß  $c_{f,g} = 0$  gesetzt werden.

Wir bemerken an dieser Stelle, daß unter der Forderung nach Eichinvarianz der Zustände jeweils nur *eine* Zweipunktfunktion eines extremalen  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustands bei festem  $\beta$  möglich ist – die konvexe Menge der  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zweipunktfunktionen über  $\mathcal{F}$  mit festem  $\beta$  stellt sich also als trivial heraus. Umgekehrt können wir schließen, daß andere Modifikationen/Phasen (was immer sie darstellen mögen) nicht durch eichinvariante Zustände über  $\mathcal{F}$  beschrieben werden können.

Schließlich ergibt sich unter Zuhilfenahme der Lemmata (2.2) mit  $\mu = 0$  und (2.3), daß  $F_{f,g}(0)$  mit  $c_{f,g} = 0$  die Auswertung der Zweipunktfunktion eines Zustands ist, die nach Konstruktion die  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Bedingung erfüllt. Es gibt keine weiteren Zweipunktfunktionen von  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zuständen über  $\mathcal{F}$  im Sinne der Definition (1.3). Sie sind durch die Angabe von  $\beta$  also eindeutig bestimmt.  $\square$

## 2.2 Das chemische Potential

*Von Systemen, die aus geladenen Teilchen bestehen, ist bekannt, daß die Existenz eines chemischen Potentials, also einer Größe, die das Vorhandensein von Ladung energetisch 'bewertet', das Aussehen des Gleichgewichtszustands beeinflusst.*

Zunächst ein kleiner Vorgriff auf die Form der  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände über  $\mathcal{F}$ : Diese sind allein durch die Zweipunktfunktion bestimmt, wie man folgendermaßen sieht. Wegen der geforderten Eichsymmetrie  $\omega = \omega \circ \gamma_g$  der Zustände  $\omega$  muß die Einpunktfunktion verschwinden. Weiterhin gilt zwischen den  $n$ -Punkt-Funktionen und den  $(n-2)$ -Punkt-Funktionen aufgrund der KMS-Bedingung die rekursive Beziehung

$$\begin{aligned} \omega_{\beta e}(\widetilde{\alpha.(1)23\dots n})(p) &= \left( \sum_{m=1}^n \omega_{\beta e}([\alpha.(1), \widetilde{m}]23\dots \hat{m}\dots n)(p) \right) + \omega_{\beta e}(\widetilde{23\dots n\alpha.(1)})(p) \\ &\stackrel{\text{KMS}}{=} \left( \sum_{m=1}^n \omega_{\beta e}([\alpha.(1), \widetilde{m}]23\dots \hat{m}\dots n)(p) \right) + e^{-\beta ep} \omega_{\beta e}(\widetilde{\alpha.(1)23\dots n})(p), \end{aligned}$$

wobei  $m = \phi(f_m)$  und  $\hat{m}$  ausgelassen wird. Insbesondere stehen in der Summe Fouriertransformierte von  $(n-2)$ -Punkt-Funktionen.

Eine Größe, die dem chemischen Potential entsprechen könnte, kommt in den in Kapitel (2.1) konstruierten  $(\alpha_{te}, \beta)$ –KMS-Zweipunktfunktionen auf  $\mathcal{F}$  – und damit, der oben gemachten Bemerkung folgend, auch in den  $(\alpha_{te}, \beta)$ –KMS-Zuständen auf  $\mathcal{F}$  – nicht vor. Offenbar haben wir die Zweipunktfunktion einiger Gleichgewichtszustände gefunden – aber nicht alle. Die gewünschte Abhängigkeit der Gleichgewichtszustände von einem chemischen Potential wird durch eine Umformulierung der KMS-Bedingung erreicht, die darin besteht, die Zeittranslationsautomorphismen mit Eichautomorphismen zu koppeln.

Dahinter steht folgende, in [AKTH77] ausführlich dargelegte Idee. Es genügt, wenn die in Definition (2.1) formulierte KMS-Bedingung statt auf der ganzen Feldalgebra  $\mathcal{F}$  nur auf ihrer  $G$ –invarianten Teilmenge<sup>4</sup> erfüllt ist, der Observablenalgebra  $\mathfrak{A}$ , die u.a. die observablen Feldgrößen enthält. *Ziel dieses Kapitels ist es also, alle phasenübergangsfreie KMS-Zustände auf  $\mathcal{F}$  zu finden, deren Einschränkung auf  $\mathfrak{A}$  der KMS-Bedingung (2.1) genügen.* Die Frage, die sich nun stellt, ist, ob und wie man den Automorphismus  $\alpha_{te}$  von  $\mathfrak{A}$  zu einem Automorphismus  $\tilde{\alpha}_{te}$  auf  $\mathcal{F}$  fortsetzen kann, sodaß die mit dieser Fortsetzung  $\tilde{\alpha}_{te}$  konstruierten KMS-Zustände wieder phasenübergangsfreie KMS-Zustände sind.

Die gesuchte Fortsetzung von  $\alpha_{te}$  von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathcal{F}$  existiert, ist aber nicht eindeutig, und die maximale Menge möglicher Fortsetzungen enthält genau die Automorphismen, die in ihrer allgemeinen Form die Gestalt  $\tilde{\alpha}_{te} = \alpha_{te} \circ \gamma_{g(t)}$  besitzen, mit Einparametergruppen  $g(t) \in U(1)$ . Tatsächlich erzeugen dann diese Automorphismen auf der vorliegenden Feldalgebra  $\mathcal{F}$  mit Eichgruppe  $U(1)$  neue,  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ –KMS-Zustände genannte, Funktionale, die in ihrer Einschränkung auf  $\mathfrak{A}$   $(\alpha_{te}, \beta)$ –KMS-Zustände sind, aber mit den Zuständen, die unter Verwendung von  $\alpha_{te}$  entstanden sind, im allgemeinen nicht zusammenfallen.

Diese Behauptung wird nun unter Anwendung von Erkenntnissen aus einer Arbeit von Araki, Kastler, Takesaki und Haag aus dem Jahre 1977 [AKTH77] bewiesen. Sie ist die Quelle für die hier geführten fundamentalen Betrachtungen, jedoch wird dort mit  $C^*$ –Feldalgebren gearbeitet. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich bei der Feldalgebra  $\mathcal{F}$  im Gegensatz dazu um eine  $*$ –Algebra, auf der keine Norm definiert ist. Dies macht es nötig, den zentralen Satz zur Erweiterbarkeit der Menge der Gleichgewichtszustände für den vorliegenden Fall neu zu formulieren.

### 2.2.1 Vorbereitung – etwas Terminologie

Sei  $\tau$  ein  $*$ –Automorphismus

$$\tau \in \text{Aut}\mathcal{F},$$

sodaß  $\alpha_t$ ,  $\gamma_g$  und  $\tau$  paarweise kommutieren. Es kann sich hierbei beispielsweise um einen Operator  $\alpha_{t_0e}$  handeln, wobei  $t_0 > 0$ . Die Untergruppe

$$G_\varphi = \{g \in G; \varphi(\gamma_g(a)) = \varphi(a) \forall a \in \mathcal{F}\}$$

wird der *Stabilisator* von  $\varphi$  und die Untergruppe

$$Z(G_\varphi, G) = \{g \in G; gh = hg \forall h \in G_\varphi\}$$

*Zentralisator* von  $G_\varphi$  genannt. Da  $G$  abelsch ist, gilt  $G_\varphi = Z(G_\varphi, G) = G$ .

<sup>4</sup>Man beachte den sich hier widerspiegelnden, aus [DHR69.1] und [DHR69.2] wohlbekannten Zusammenhang zwischen Ladungsstruktur und globaler Eichgruppe!

### 2.2.2 Eine Betrachtung der Eigenschaften der KMS-Zustände mit chemischem Potential

Die Erweiterbarkeit von  $\alpha_{te}$  von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathcal{F}$  wird durch eine Eigenschaft der KMS-Zustände auf  $\mathcal{F}$  reglementiert, die sich beweisen läßt, ohne einen solchen Zustand tatsächlich konstruiert zu haben. Dazu zunächst ein allgemeines Lemma, dessen auf die  $*$ -Algebra  $\mathcal{F}$  anwendbarer Beweis sich in [AKTH77] findet.

**Lemma 2.6** [AKTH77] *Sei  $\varphi$  ein schwach  $\tau$ -clusternder Zustand auf einer Feldalgebra  $\mathcal{F}$  mit Eichgruppe  $G$ , dessen Einschränkung auf die  $G$ -invariante Unter algebra  $\mathfrak{A}$  von  $\mathcal{F}$  invariant unter Zeittranslationen ist:*

$$\varphi(\alpha_{te}(A)) = \varphi(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}, t \in \mathbb{R}, e^2 > 0.$$

Dann existiert eine (zu  $\varphi$  gehörige) stetige Einparametergruppe

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \varepsilon_t \in G,$$

sodaß  $\varphi$  invariant unter der modifizierten Zeittranslation

$$\tilde{\alpha}_{te}(a) = \alpha_{te}\gamma_{\varepsilon_t}(a), \quad a \in \mathcal{F}$$

ist. □

**Definition 2.7 (modifizierte KMS-Bedingung)** *Ein Zustand  $\omega_{\beta e}$  erfüllt die modifizierte KMS-Bedingung auf der Algebra  $\mathcal{F}$  bei inverser Temperatur  $\beta > 0$  im durch  $e$ ,  $e$  zeitartig, gegebenem Lorentz-Bezugssystem, falls es für jedes Paar von Operatoren  $a, b \in \mathcal{F}$  eine Funktion  $h$  gibt, die analytisch im Streifen  $S_\beta \doteq \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \beta\}$  und stetig an den Rändern ist, sodaß*

$$h(t) = \omega_{\beta e}(A\tilde{\alpha}_{te}(B)), \quad h(t + i\beta) = \omega_{\beta e}(\tilde{\alpha}_{te}(B)A), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ein Zustand  $\varphi$  heißt  $(\tilde{\alpha}_{te}, \beta)$ -KMS-Zustand auf  $\mathcal{F}$ , falls er diese KMS-Bedingung erfüllt.

Auf Lemma (2.6) baut nun der folgende zentrale Satz auf. Die Beweisidee ist ebenfalls durch ein Lemma in [AKTH77] motiviert.

**Satz 2.8** *Sei  $\varphi$  ein schwach  $\tau$ -clusternder Zustand auf  $\mathcal{F}$ , und wie in Lemma (2.6)  $\varepsilon_t \in G$  die zum Zustand  $\varphi$  gehörige Einparametergruppe, sodaß  $\varphi$  unter  $\tilde{\alpha}_{te}(a) = \alpha_{te}\gamma_{\varepsilon_t}(a)$  invariant ist. Ist die Einschränkung des Zustandes  $\varphi$  von  $\mathcal{F}$  auf  $\mathfrak{A}$  ein  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustand, dann ist  $\varphi$  ein  $(\tilde{\alpha}_{te}, \beta)$ -KMS-Zustand auf  $\mathcal{F}$ .*

**Beweis.** Seien  $a, a', b, b' \in \mathcal{F}$  und  $k(E)$  eine beliebige  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion von  $E \in \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger sowie

$$k_s^\sim(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt k(E) \exp(iEt + sE).$$

Da  $\tilde{\alpha}_{te}(A) = \alpha_{te}(A)$  für  $A \in \mathfrak{A}$ , ergibt die angenommene KMS-Bedingung, daß

$$\int dt \varphi(A(a, \tau^n a') \tilde{\alpha}_{te} A(\tau^m b, \tau^n b')) k_s^\sim(t) = \int dt \varphi([\tilde{\alpha}_{te} A(\tau^m b, \tau^n b')] A(a, \tau^n a')) k_0^\sim(t),$$

wobei  $A(a, \tau^n b) = \int_G \gamma_g(a^* \tau^n b) dg \in \mathfrak{A}$ . Die Mittelung zunächst über  $n$  und dann über  $m$  ergibt aufgrund der Cluster-Eigenschaft von  $\varphi$

$$\begin{aligned} & \int_G dg \int_G dh \int dt \varphi(\gamma_g(a^* \tau^n a') \tilde{\alpha}_{te} \gamma_h(\tau^m(b^*) \tau^n b')) k_{\beta}^{\tilde{}}(t) \\ &= \int_G dg \int_G dh \int dt \varphi([\tilde{\alpha}_{te} \gamma_h(\tau^m(b^*) \tau^n b')]) \gamma_g(a^* \tau^n a') k_0^{\tilde{}}(t) \\ \Rightarrow & \int_G dg \int_G dh \int dt \varphi(\gamma_g a^*) \varphi(\tilde{\alpha}_{te} \gamma_h b^*) \varphi(\gamma_g(a') \tilde{\alpha}_{te} \gamma_h b') k_{\beta}^{\tilde{}}(t) \\ &= \int_G dg \int_G dh \int dt \varphi(\tilde{\alpha}_{te} \gamma_h b^*) \varphi(\tilde{\alpha}_{te}(\gamma_h b') \gamma_g a') \varphi(\gamma_g a^*) k_0^{\tilde{}}(t). \end{aligned}$$

Aufgrund der  $\tilde{\alpha}_{te}$ -Invarianz von  $\varphi$  ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} & \int_G dg \int_G dh \int dt \varphi(\gamma_g a^*) \varphi(\gamma_h b^*) \varphi(\gamma_g(a') \tilde{\alpha}_{te} \gamma_h b') k_{\beta}^{\tilde{}}(t) \\ &= \int_G dg \int_G dh \int dt \varphi(\gamma_h b^*) \varphi(\tilde{\alpha}_{te}(\gamma_h b') \gamma_g a') \varphi(\gamma_g a^*) k_0^{\tilde{}}(t). \end{aligned}$$

Dies entspricht einem inneren Produkt

$$\langle f_a^{\varphi} \otimes f_b^{\varphi}, F(a', b', k_{\beta}^{\tilde{}}) \rangle_{G \times G} = \langle f_a^{\varphi} \otimes f_b^{\varphi}, G(a', b', k_0^{\tilde{}}) \rangle_{G \times G}$$

mit den Definitionen  $f_a^{\varphi} = \varphi(\gamma_g a)$  und

$$\begin{aligned} F(a', b', k_{\beta}^{\tilde{}}) &= \int dt \varphi(\gamma_g(a') \tilde{\alpha}_{te} \gamma_h b') k_{\beta}^{\tilde{}}(t) \in \mathcal{C}(G \times G) \\ G(a', b', k_0^{\tilde{}}) &= \int dt \varphi(\tilde{\alpha}_{te}(\gamma_h b') \gamma_g a') k_0^{\tilde{}}(t) \in \mathcal{C}(G \times G) \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Menge der Funktionen  $f_a^{\varphi} \otimes f_b^{\varphi}$  dicht in  $L^2(G \times G)$  liegt und daher bekommen wir

$$\int dt \varphi(\gamma_g(a') \tilde{\alpha}_{te} \gamma_h b') k_{\beta}^{\tilde{}}(t) = \int dt \varphi(\tilde{\alpha}_{te}(\gamma_h b') \gamma_g a') k_0^{\tilde{}}(t) \quad \forall a', b' \in \mathcal{F}, \quad \forall k.$$

Dies zeigt, daß  $\varphi$  die modifizierte KMS-Bedingung erfüllt.  $\square$

**Ergebnis und Anwendung: Modifizierte Dynamik** Die Einparametergruppen aus  $G = U(1)$  sind die Gruppen  $\{\exp\{i\kappa t\}, \kappa \in \mathbb{R}\}$ . Aus Gründen der Vertrautheit der Erscheinung wählen wir nun  $\kappa = -\mu$  und erhalten folglich die Menge

$$\{\alpha_{te}^{\mu} \doteq \alpha_{te} \gamma_{e^{-i\mu t}} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

von Automorphismen einer modifizierten Dynamik, die mögliche neue KMS-Zustände auf  $\mathcal{F}$  erzeugen. Mit ihnen werden im folgenden  $\mu$ -abhängige  $(\alpha_{te}^{\mu}, \beta)$ -KMS-Zustände auf  $\mathcal{F}$  konstruiert.

**Korollar 2.9** *Aus dem Satz (2.8) – in Verbindung mit der oben gegebenen Struktur der Eichgruppe  $G \simeq U(1)$  – folgt, daß mittels dieser Konstruktion alle Zustände der hier vorliegenden Feldalgebra  $\mathcal{F}$  mit Eichgruppe  $G \simeq U(1)$  gefunden werden, die in ihrer Einschränkung auf  $\mathfrak{A}$   $\alpha_{te}$ -clusternde  $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände sind.  $\square$*

### 2.3 Gleichgewichtszustände *mit* chemischem Potential: Die Zweipunktfunktion der $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände über $\mathcal{F}$

Die Zweipunktfunktion der extremalen  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände auf  $\mathcal{F}$  werden nun, den obigen Erkenntnissen entsprechend, vollständig analog zu denen ohne chemisches Potential, aber unter Verwendung der Automorphismengruppen  $\alpha_{te}^\mu$  statt  $\alpha_{te}$ , konstruiert.

**Satz 2.10** Die Zweipunktfunktion der  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände auf  $\mathcal{F}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(f)\phi(g)) &= 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p-\mu e)}} \\ \omega_{\beta e}^\mu(\phi(f)\phi^*(g)) &= 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p+\mu e)}} \\ \omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(f)\phi^*(g)) &= 0 \\ \omega_{\beta e}^\mu(\phi(f)\phi(g)) &= 0,\end{aligned}\tag{2.5}$$

bzw. (im Sinne von Distributionen)

$$\begin{aligned}\omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(x)\phi(y)) &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p-\mu e)}} e^{-ip(x-y)} \\ \omega_{\beta e}^\mu(\phi(x)\phi^*(y)) &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p+\mu e)}} e^{-ip(x-y)} \\ \omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(x)\phi^*(y)) &= 0 \\ \omega_{\beta e}^\mu(\phi(x)\phi(y)) &= 0.\end{aligned}$$

**Beweis.** Analog zu Satz (2.4). Betrachte zunächst  $\omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(f)\phi(g))$ . Sei  $\alpha_z^\mu \phi(f) \doteq \phi(f_z^\mu)$  wobei<sup>5</sup>  $f_z^\mu(x) = e^{-i\mu e z} f(x-z)$ . Es ist

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{f,g_z^\mu}(p) &= (2\pi)^{-2} \int d^4z e^{-ipz} \int d^4x \int d^4y f(x) e^{-i\mu e z} g(y-z) \\ &\quad \times (2\pi)^{-3} \int d^4q \varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m_0^2) e^{-iq(x-y)} \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^4z e^{-i(p+\mu e)z} \int d^4x \int d^4y f(x) g(y-z) \\ &\quad \times (2\pi)^{-3} \int d^4q \varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m_0^2) e^{-iq(x-y)} \\ &= \tilde{\sigma}_{f,gz}(p + \mu e).\end{aligned}$$

Somit wird die Fouriertransformierte des Ausdrucks  $F_{f,g^\mu}(z) \doteq \omega_{\beta e}(\phi^*(f)\alpha_z^\mu(\phi(g)))$  zu

$$\widetilde{F_{f,g^\mu}}(p) = \frac{\tilde{\sigma}_{f,g_z^\mu}(p)}{1 - e^{-\beta e p}} + (2\pi)^2 c_{f,g} \delta(p).$$

Also

$$F_{f,g^\mu}(z) = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0)\delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p-\mu e)}} e^{i(p-\mu e)z} + c_{f,g}.$$

<sup>5</sup>Im Bezugssystem, in dem  $z = te = (t, 0, 0, 0)$  läßt sich dieser Ausdruck zu  $f_t^\mu(\tau) = e^{-i\mu t} f(\tau - t)$  reduzieren.

Zur Extremalität, bzw.  $\alpha_{te}$ -cluster-Eigenschaft. Mit derselben Argumentation wie im Fall  $\omega_{\beta e}$  finden wir die  $\alpha_{te}^\mu$ -Invarianz der Zweipunktfunktion  $\omega_{\beta e}^\mu$ . Damit der zu  $\omega_{\beta e}^\mu$  gehörige quasifreie, eichinvariante Zustand  $\alpha_{te}^\mu$ -clusternd wird, müssen wir also noch wie bei  $\omega_{\beta e}$  fordern, daß  $c_{f,g} = 0$ .

Mittels der Beziehung  $\omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(f)\phi(g)) = F_{f,g^\mu}(0)$  ergibt sich (2.5). Der Fall  $\omega_{\beta e}^\mu(\phi(f)\phi^*(g))$  läßt sich analog behandeln. Das Ergebnis

$$\omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(f)\phi^*(g)) = \omega_{\beta e}^\mu(\phi(f)\phi(g)) = 0$$

erhalten wir, weil der Kommutator dieser Feldgrößen verschwindet und folglich im Konstruktionsschritt (2.4) für sie

$$(1 - e^{-\beta \cdot}) \tilde{F}'_{f,g}[u] = 0$$

gilt, mit einer analog zu (2.2) definierten,  $\omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(f)\phi^*(g))$  bzw.  $\omega_{\beta e}^\mu(\phi(f)\phi(g))$  entsprechenden, Distribution  $\widetilde{F}'_{f,g^\mu}$ .

Wir bemerken, daß die Zweipunktfunktion  $\omega_{\beta e}^\mu$  nur auf der Observablenalgebra  $\mathfrak{A}$  Werte ungleich Null annimmt; somit können wir wegen  $\alpha_{te}^\mu = \alpha_{te} \gamma_{e^{-i\mu t}}$  direkt auf die  $\alpha_{te}$ -Invarianz bzw.  $\alpha_{te}$ -cluster-Eigenschaft der Zweipunktfunktion  $\omega_{\beta e}^\mu$  schließen.

Schließlich ergibt sich auch hier unter Zuhilfenahme der Lemmata (2.2) und (2.3), daß  $F_{f,g^\mu}(0)$  mit  $c_{f,g} = 0$  die Auswertung der Zweipunktfunktion eines Zustands ist, die nach Konstruktion die  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Bedingung auf  $\mathcal{F}$  erfüllt. Auch hier erhalten wir wiederum das Ergebnis, daß es im Sinne der Definition (1.3) von Zuständen auf der Menge  $\mathcal{F}$  jeweils nur *eine* Zweipunktfunktion der eichinvarianten  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände zu einem Paar von Parametern  $(\beta, \mu)$  gibt.

Wie im Beweis des Lemmas (2.2), der sich im Appendix findet, bezüglich der Eigenschaften des Funktionals  $\mathcal{C}_0^\infty \times \mathcal{C}_0^\infty \ni (f, g) \mapsto I_{f,g}^\mu$  ausgeführt wurde, erhalten wir eine noch einschränkende Bedingung für Parameter  $\mu$ . Die für die Positivität dieses Funktionals wesentlichen Beziehungen  $\forall \vec{p} : 1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}} \pm \mu)} \geq 0$  und  $\forall \vec{p} : 0 \geq 1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}} \pm \mu)}$  sind genau dann erfüllt, wenn  $|\mu| \leq m_0$ . Teilchen mit Masse  $m_0 = 0$  können also keine Gleichgewichtszustände mit chemischem Potential  $\mu \neq 0$  haben. Die im massiven Fall mögliche Verschärfung  $|\mu| < m_0$  der obigen Bedingung läßt sich als nach physikalischen Gesichtspunkten sinnvolle Zusatzannahme interpretieren. Das chemische Potential ist eine Größe, die einerseits mit dem Verhältnis von positiver und negativer Ladungsdichte direkt verknüpft ist und andererseits den Energiegewinn durch Hinzufügen von Ladung repräsentiert. Ist der Betrag des chemischen Potentials größer als die Ruhemasse der Feldquanten, so entstehen spontan Teilchen, deren Gegenwart den Betrag des chemischen Potentials verringert. *Im weiteren sei also stets  $|\mu| < m_0$  gegeben.*  $\square$

## 2.4 Die n-Punktfunktion der $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände über $\mathcal{F}$

**Lemma 2.11 (Quasifreiheit)** *Ein  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustand auf  $\mathcal{F}$  ist allein durch seine Zweipunktfunktion bestimmt.*

**Beweis.** Wegen der geforderten Eichsymmetrie  $\omega = \omega \circ \gamma_g$  der Zustände  $\omega$  muß die Einpunktfunktion verschwinden. Weiterhin gilt zwischen den  $n$ -Punkt-Funktionen und den  $(n-2)$ -

Punkt-Funktionen eine rekursive Beziehung. Betrachten wir dazu

$$\begin{aligned} \omega_{\beta e}^{\mu}(\widetilde{\alpha.(1)23\dots n})(p) &= \left( \sum_{m=1}^n \omega_{\beta e}^{\mu}([\alpha.(1), m]23\dots \hat{m}\dots n)(p) \right) + \omega_{\beta e}^{\mu}(\widetilde{23\dots n\alpha.(1)})(p) \\ &\stackrel{\text{KMS}}{=} \left( \sum_{m=1}^n \omega_{\beta e}^{\mu}([\alpha.(1), m]23\dots \hat{m}\dots n)(p) \right) + e^{-\beta e(p \pm \mu e)} \omega_{\beta e}^{\mu}(\widetilde{\alpha.(1)23\dots n})(p), \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei  $m = \phi(f_m)$  und  $\hat{m}$  ausgelassen wird. Insbesondere stehen in der Summe Fouriertransformierte von  $(n-2)$ -Punkt-Funktionen. Durch Rekursion kommen wir zur Aussage des Lemmas.  $\square$

Die rekursive Anwendung der Regel (2.6) und Rücktransformation in den Ortsraum definiert uns eine Distribution  $\varphi_{\beta e}^{\mu}$ , die offenbar die  $(\alpha_{te}^{\mu}, \beta)$ -KMS-Bedingung erfüllt<sup>6</sup>. Wir bemerken, daß die Form (2.7) von  $\varphi_{\beta e}^{\mu}$  durch (2.6) eindeutig bestimmt ist, wenn wir wie stets die Freiheit von Phasenübergängen fordern.

$$\begin{aligned} &\varphi_{\beta e}^{\mu}(\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)) \\ &= \begin{cases} \sum_{\substack{\text{alle Paare,} \\ \text{lexikalisch geordnet}}} \omega_{\beta e}^{\mu}(\phi(x_{i_1})\phi(x_{i_2}))\dots\omega_{\beta e}^{\mu}(\phi(x_{i_{n-1}})\phi(x_{i_n})) & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Das Funktional  $\varphi_{\beta e}^{\mu}$ : ein Zustand über  $\mathcal{F}$**  Die notwendigen Eigenschaften, damit  $\varphi_{\beta e}^{\mu}$  ein phasenübergangsfreier Zustand über  $\mathcal{F}$  ist, sind Positivität, Stetigkeit in den Testfunktionen, Linearität, Normiertheit, Eichinvarianz und  $\alpha_{te}$ -Clustern. Zur Positivität:

**Lemma 2.12** *Die mittels Identität (2.7) auf Basis der  $(\alpha_{te}^{\mu}, \beta)$ -KMS-Zweipunktfunktion (2.1) konstruierten Funktionale  $\varphi_{\beta e}^{\mu}$  sind positiv, d.h. für ein Element*

$$\phi = \sum_i c_i \phi(f_{i,1})\dots\phi(f_{i,n})$$

der Feldalgebra gilt

$$\varphi_{\beta e}^{\mu}(\phi^* \phi) \geq 0.$$

**Beweis.** Für den Fall  $\phi = c\phi(f)$  siehe Lemma (2.2). Der Rest folgt aus dieser Eigenschaft (siehe Literatur).  $\square$

Des weiteren folgen Stetigkeit in den Testfunktionen, Linearität, Normiertheit und Eichinvarianz des Funktionals  $\varphi_{\beta e}^{\mu}$  wegen der Gültigkeit der Identität (2.7) sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der Zweipunktfunktion  $\omega_{\beta e}^{\mu}$ . Ebenso überträgt sich die  $\alpha_{te}$ -cluster-Eigenschaft der Zweipunktfunktion  $\omega_{\beta e}^{\mu}$  auf alle  $n$ -Punktfunktionen.

<sup>6</sup>Zum Begriff 'lexikalisch geordnet': wie die Bücher in einer Bibliothek 11, 12, 13, 21, 22...

**Zusammenfassung** Somit handelt es sich bei  $\varphi_{\beta e}^\mu$  um einen  $\alpha_{te}$ -clusternden  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustand auf  $\mathcal{F}$ . Er ist wegen der Eindeutigkeit der Zweipunktfunktion  $\omega_{\beta e}^\mu$  durch die Formel (2.7) als  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustand im Sinne der Definition (1.3) von Zuständen auf der Menge  $\mathcal{F}$  eindeutig bestimmt und bekommt das Symbol  $\omega_{\beta e}^\mu$ . Die Gültigkeit der Identität (2.7) macht  $\omega_{\beta e}^\mu$  zu einem quasifreien Zustand<sup>7</sup>.

Weiterhin zeigt Korollar (2.9), daß es nicht mehr KMS-Zustände auf  $\mathcal{F}$  geben kann, die in der Einschränkung auf  $\mathfrak{A}$   $(\alpha_{te}, \beta)$ -KMS-Zustände sind, als die Klasse

$$\left\{ \omega_{\beta e}^\mu, \quad e \in V_+, \beta \in \mathbb{R}_+, \mu \in [-m_0, m_0] \right\}.$$

#### 2.4.1 Implementierung der Poincarétransformationen auf den $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zuständen

Aufgrund der Eindeutigkeit der  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände kann eine einfache Formel für deren Poincarétransformation angegeben werden. Die Poincarétransformation des Feldes vor Auswertung eines Zustandes  $\omega_{\beta e} \circ \alpha_{\Lambda, a}^{-1}$  ändert  $\beta$  und  $\mu$  nicht, sondern wirkt nur auf  $e$ , wie die Darstellung der Zweipunktfunktion i.S.v.D. durch Formel (2.5) zeigt. Da es nur einen Zustand mit dem transformierten Vektor  $e$  gibt, gilt

$$\omega_{\beta e}^\mu \circ \alpha_{\Lambda, a}^{-1} = \omega_{\Lambda \beta e}^\mu.$$

Die Zeittranslationsinvarianz von  $\omega_{\beta e}^\mu$  bedeutet also eine generelle Translationsinvarianz und im Ruhesystem des KMS-Zustands ( $\beta^\mu = (\sqrt{\beta^2}, 0, 0, 0)$ ) herrscht offenbar Isotropie.

### 2.5 Das Vakuum

Das Vakuum ergibt sich als Grenzwert verschwindender Temperatur, also  $\beta \rightarrow \infty$ . Wegen der Quasifreiheit genügt es wiederum, die Zweipunktfunktionen anzugeben. Die Einpunktfunktion ist natürlich auch im Limes identisch Null.

$$\begin{aligned} \omega_\infty(\phi(f)^* \phi(g)) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega_{\beta e}^\mu(\phi^*(f) \phi(g)) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p - \mu e)}} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} 2\pi \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ \frac{\tilde{f}(p) \tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e(p - \mu e)}} \Big|_{p^0 = \omega_{\vec{p}}} - \frac{\tilde{f}(p) \tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e(p - \mu e)}} \Big|_{p^0 = -\omega_{\vec{p}}} \right\} \\ &= 2\pi \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \Big|_{p^0 = \omega_{\vec{p}}} - 0 \right\} \\ &= 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2), \end{aligned}$$

denn aufgrund  $e(p - \mu e) \leq 0$  für  $p_0 \leq 0$  konvergiert  $(1 - e^{-\beta e(p - \mu e)})^{-1} \rightarrow \theta(p_0)$  gleichmäßig auf  $[-\infty, -m_0/2]$  und  $[m_0/2, \infty]$ , sodaß man den Grenzprozeß  $\beta \rightarrow \infty$  und die Integration

<sup>7</sup>Diese Eigenschaft ist natürlich eng mit der Feldgleichung verknüpft ('freies Feld'). Hierzu folgende Betrachtung: Wesentlich dafür, daß die im Beweis des Lemmas vorgenommenen Umformungen zur Identität (2.7) und somit zur Form eines quasifreien Zustands führen, ist die Art des Kommutators ( $c$ -Zahl), die über maßtheoretische Betrachtungen aus der Feldgleichung abgeleitet werden kann.

vertauschen kann. Im Sinne von Distributionen:

$$\omega_{\infty}(\phi^*(x)\phi(y)) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) e^{-ip(x-y)}.$$

Analog

$$\begin{aligned} \omega_{\infty}(\phi(f)\phi(g)^*) &= 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) \\ \omega_{\infty}(\phi(x)\phi^*(y)) &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) e^{-ip(x-y)}, \end{aligned}$$

wobei hier  $e(p + \mu e) \leq 0$  für  $p_0 \leq 0$ , und

$$\begin{aligned} \omega_{\infty}(\phi^*(f)\phi^*(g)) &= 0, & \omega_{\infty}(\phi(f)\phi(g)) &= 0, \\ \omega_{\infty}(\phi^*(x)\phi^*(y)) &= 0, & \omega_{\infty}(\phi(x)\phi(y)) &= 0. \end{aligned}$$

### 3 Lokales thermisches Gleichgewicht – Grundlagen

*Grundlegend für diese Arbeit ist der Thermalitätsbegriff, der in [BOR02] und [Bu03] vorgestellten Methode eigen ist.*

Die folgenden Kapitel dienen dazu, zunächst den Begriff der  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität präzise zu definieren und eine sinnvolle Wahl der lokalthermalen Observablen und Vergleichszustände zu treffen. Anschließend werden wir uns der Frage der Verbindungen zwischen mikroskopischer und makroskopischer Welt zuwenden und so z.B. die Menge der thermalen (Makro-)Observablen der Theorie betrachten und einige Beispiele konkret charakterisieren. Diese Überlegungen folgen in weiten Teilen dem Vorgehen in [BOR02] und [Bu03] und stellen in ihrer abstrakten, modellunabhängigen Form lediglich eine skizzenhafte Übersicht der dort und in umfangreichen Vorgängerarbeiten angestellten Gedankengänge dar. Auf diese Quellen sei hier ausdrücklich verwiesen, insbesondere [Bo00].

#### 3.1 Vorüberlegungen

##### 3.1.1 Der Begriff der $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität

$\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität ist eine Implementation der Idee der lokalen Ununterscheidbarkeit von lokalem und globalem Gleichgewicht, bzw. der Zustände, die diese Situationen beschreiben, wobei sich beim Vergleich bewußt auf die Auswertung nur einer Teilmenge von vielen möglichen Observablen beschränkt wird.

Hierzu wählen wir zunächst eine Menge von globalen Gleichgewichtszuständen  $\mathcal{C}$ , die Referenzzustände. Die Idee dahinter und die wesentliche Eigenschaft dieser Referenzzustände ist, daß die thermischen Meßgrößen und Begriffe, die wir auf (nichtglobale) Gleichgewichtszustände übertragen wollen, hier schon definiert und darüberhinaus durch zentrale Observable zugänglich sind. Zu dieser Art von Zuständen zählen beispielsweise KMS-Zustände in verschiedenen Bezugssystemen und deren Gemische. Des weiteren wählen wir für einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^4$  der Raumzeit eine Menge von Observablen  $\mathcal{S}_x$ .

Ein generischer Zustand  $\varphi$  wird als  $\mathcal{S}_x$ -thermischer, also am Punkt  $x$  lokal thermischer Zustand im Sinne der beiden Mengen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{S}_x$  bezeichnet, wenn er mit einem thermischen Vergleichszustand  $\omega_x \in \mathcal{C}$  in den Erwartungswerten aller Observablen aus  $\mathcal{S}_x$  übereinstimmt, und es ist möglich, gewisse thermische Eigenschaften des Referenzzustands  $\omega_x$  dann auch dem Zustand  $\varphi$  am Punkt  $x$  zuzuschreiben. Neben Übereinstimmungen auf einzelnen Punkten der Raumzeit ist für die Untersuchung von raumzeitlichen Entwicklungen von makroskopischen Observablen die Möglichkeit der Übereinstimmung eines Zustands mit von Punkt zu Punkt variiierenden Vergleichszuständen  $\omega_x$  auf zusammenhängenden Gebieten  $\mathcal{O}$  wesentlich. Diese  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität genannte Eigenschaft eines Zustandes  $\varphi$  erlaubt es, die raumzeitliche Evolution thermischer Größen in  $\varphi$  formal zu untersuchen.

**Definition 3.1 ( $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität)** *Ein Zustand  $\omega \in \mathcal{F}^{*(+)}$  soll  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermisch auf einem Gebiet  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$  heißen, wenn*

1. *es zu jedem Punkt  $x \in \mathcal{O}$  eines Gebietes der Raumzeit einen Vergleichszustand  $\omega_x \in \mathcal{C}$  gibt, sodaß für alle  $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$  gilt*

$$\omega(\phi(x)) = \omega_x(\phi(x)),$$

*wobei  $\mathcal{S}_x = \alpha_x(\mathcal{S}_0)$ , und*

2. die Funktionen  $x \mapsto \omega(\phi(x))$  schwach integrierbar in  $x$  sind.
3. Weitere Bedingungen bezüglich der Zustände  $\omega_x$ , siehe Kapitel 3.2.1.

Punkt 2. stellt sicher, daß die Zustände i.S.v.D. differenzierbar sind.

### 3.1.2 Punktfelder, Auswahl eines Basisfeldes $\phi_0(x)$

Alle im Kapitel 1 definierten, in der Feldalgebra  $\mathcal{F}$  enthalten, Feldoperatoren der Theorie haben Argumente aus  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ , die eine Verschmierung über raumzeitliche Gebiete bedeuten. Für die folgenden Analysen benötigen wir im Gegensatz dazu lineare Räume  $\mathcal{Q}_x$  von quadratischen Formen am Punkt, die wir als idealisierte Observablen mit lokaler, für einzelne Punkte der Raumzeit gültiger, Signifikanz betrachtet werden (*lokalthermale Observablen*). Wie sich zeigte, kann man sich diese quadratischen Formen unter gewissen Forderungen an die Zustände, in denen man messen will, aus Feldoperatoren in  $\mathcal{F}$  ableiten. Allerdings enthält  $\mathcal{Q}_x$  mehr Feldoperatoren, als zur Untersuchung der Nichtgleichgewichtszustände benötigt werden. Eine Teilmenge  $\mathcal{T}_x \subset \mathcal{Q}_x$  sollte ausreichen.

Sei  $\phi(f_i) \in \mathcal{F}$  und  $(f_i) = (\delta_i)$  eine Dirac-Folge aus  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ . In einer Vakuum-Sektor Hilbertraumdarstellung existiert für hinreichend große  $m$  im Formsinn der Norm-Grenzwert

$$(1 + H)^{-m} \phi(x) (1 + H)^{-m} = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 + H)^{-m} \phi(\delta_i) (1 + H)^{-m},$$

Diese sich aus Überlegungen in [FH81] ableitende Normbedingung ist mit der Eigenschaft des Feldes verwandt, daß die Feldgrößen nur im Fall großer Energie groß werden. Die so definierten Felder  $\phi(x)$  sind auf Zuständen mit  $\omega((1 + H)^{2m}) < \infty$  wohldefiniert. Der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum über den  $\phi$  mit

$$\|(1 + H)^{-m} \phi(x) (1 + H)^{-m}\| < \infty,$$

wobei  $\|\cdot\|$  die Operatornorm im entsprechenden Hilbertraum ist, wird mit  $\mathcal{Q}_{m,x}$ ,  $m > 0$  bezeichnet. Für zu kleine  $m < m_0$  wird  $\mathcal{Q}_{m,x} = \mathbb{C}\hat{1}$  gelten. Das Basisfeld  $\phi_0$  ist das Feld mit dem kleinsten Wert  $m$ , für das dies nicht gilt (wenn dies eindeutig sein sollte).

Die  $\mathcal{Q}_{m,x}$  sind im allgemeinen endlichdimensional und invariant unter den Poincarétransformationen, die  $x$  fest lassen. Es gilt  $\mathcal{Q}_{m,x} \subset \mathcal{Q}_{m',x}$  für  $m \leq m'$ .

### 3.1.3 Quadrate und höhere Potenzen von $\phi_0(x)$ , balancierte Ableitung, die Mengen $\mathcal{S}_x$ und $\mathcal{S}_\mathcal{O}$

Es wurde in [Bo00] gezeigt, daß für  $\phi_0 \in \mathcal{Q}_{m,x}$  im Formsinn eine wohldefinierte Näherung des Produkts  $\phi_0(x - \zeta)\phi_0(x + \zeta)$ ,  $\zeta$  raumartig, möglich ist. Für jedes  $q > 0$  gelingt mit endlich vielen Feldern  $\phi_j(x) \in \mathcal{Q}_{n,x}$  und analytischen Funktionen  $c_j(\zeta)$  die Abschätzung

$$\left\| (1 + H)^{-n} \left( \phi_0(x - \zeta)\phi_0(x + \zeta) - \sum_{j=1}^{J(q)} c_j(\zeta)\phi_j(x) \right) (1 + H)^{-n} \right\| \leq c|\zeta|^q.$$

Die Konvergenz ist so gut, daß die Beziehung auch für Ableitungen nach  $\zeta$  aufrecht erhalten werden kann. Der Raum  $\mathcal{N}(\phi_0^2)_{q,x}$ , der von den  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1 \dots J(q)$ , gebildet wird, enthält also Felder, mit denen sich  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \phi_0(x - \zeta)\phi_0(x + \zeta)$  und  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_\zeta \phi_0(x - \zeta)\phi_0(x + \zeta)$  begrifflich fassen lassen. Die auf diese Weise spezifizierte Ableitung des Quadrats von  $\phi_0$  durch Felder

$\phi_j$  wird *balancierte Ableitung* genannt. Das Feld  $\phi_j$  lebt dabei gewissermaßen im Mittelpunkt, dem sich  $\phi_0(x - \zeta)$  und  $\phi_0(x + \zeta)$  annähern.

Analog werden die Räume  $\mathcal{N}(\phi_0^p)_{q,x}$  gebildet. Es sei

$$\mathcal{T}_x \doteq \sum_{p,q} \mathcal{N}(\phi_0^p)_{q,x},$$

wobei  $\mathcal{N}(\phi_0^0)_{q,x} \doteq \mathbb{C}\hat{1}$  und  $\mathcal{N}(\phi_0^1)_{q,x} \doteq \mathbb{C}\phi_0$  ist.

Obige Betrachtungen wurden im Vakuumsektor angestellt. Der Hamiltonoperator  $H$  kann in thermischen Zuständen durch eine lokale Version  $H_{\mathcal{O}}$  ersetzt werden, in dem Sinne, daß  $H_{\mathcal{O}}$  ebenso wie  $H$  die Zeittranslationen der Observablen  $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$  induziert, d.h.  $[A, H] = [A, H_{\mathcal{O}}]$ , jedoch gelte für  $H_{\mathcal{O}}$  in gewissen Zuständen  $\omega((1 + H_{\mathcal{O}})^{2m}) < \infty$ . In diesen Zuständen  $\omega$  sind  $\phi(x)$  und  $\mathcal{T}_x$  analog zur obigen Vorgehensweise wohldefiniert, wobei die gemachten Aussagen einen lokalen Charakter erhalten.

Man beachte, daß auf den  $\omega_{\beta}^{\mu}$ -Zuständen aufgrund ihrer  $\alpha_x$ -Invarianz in Verbindung mit ihrer Stetigkeit in den Testfunktionen die Definition

$$\omega_{\beta}^{\mu}(A(x)) = \omega_{\beta}^{\mu}(A(f)), \quad \int f(x) dx = 1$$

gut ('wohl') ist, und die  $(\alpha_{t_e}^{\mu}, \beta)$ -KMS-Zustände somit auf die Räume  $\mathcal{Q}_{m,x}$  fortsetzbar sind. Dies ist eine formale Entsprechung der physikalischen Beobachtung, daß KMS-Zustände überall gleich aussehen (solange man das Bezugssystem nicht verläßt) und daher die Kopplung eines Meßgeräts an den Zustand auch auf beliebig kleinen Gebieten stattfinden kann (man kann den Träger von  $f$  beliebig verkleinern) wenn das Meßgerät nur empfindlich genug ist (die Beträge der Funktionswerte von  $f$  steigen im Mittel über den Träger, weil das Integral  $\int f(x) dx$  gleich bleiben muß). Die Stärke der beobachteten Felder ist also nicht nur im Mittel endlich, sondern auch nicht auf einzelne Punkte konzentriert.

Nun wäre es möglich, die ganze, eben definierte Menge  $\mathcal{T}_x$  als Menge der lokalthermalen Observablen zu wählen. Betrachtungen zeigen, daß jedoch die Beschränkung auf eine Teilmenge  $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$ , bei der man sich auf höchstens zweite Potenzen von  $\phi_0$  beschränkt, genügt, bzw. in gewisser Weise sogar besser ist (siehe Kapitel 3.2.2).

Schließlich können wir, ausgehend vom schon bestimmten Begriff der Menge der lokalthermalen Observablen am Punkt 0, zum Begriff einer Menge von lokalthermalen Observablen auf einem Gebiet  $\mathcal{O}$  gelangen. Hierzu werden wir die Operatoren aus der Menge  $\mathcal{S}_0$  mittels der auf  $\mathcal{F}$  definierten automorphen Poincarétransformationen auf jeden Punkt des Gebietes  $\mathcal{O}$  fortsetzen:

$$\mathcal{S}_x \doteq \alpha_x(\mathcal{S}_0), \quad x \in \mathcal{O}.$$

### 3.2 Auswahl der thermischen Vergleichszustände und lokalthermalen Observablen des Feldes $\mathcal{F}$

*Nach den einleitenden Betrachtungen, die bezüglich der Mengen  $\mathcal{S}_x$  und  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$  abstrakt geblieben sind, können wir nun die Menge  $\mathcal{S}_x$  in ihrer konkreten, modellabhängigen Form einführen. Aber nicht nur die Menge  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$  bestimmt den Begriff, den man sich von einem Zustand macht; dieser hängt auch noch wesentlich von der Menge der Vergleichszustände  $\mathcal{C}$  ab<sup>8</sup>, die wir nun auch konkret angeben wollen.*

<sup>8</sup>Man beachte, daß die Auswahl der Menge  $\mathcal{C}$  Einfluß auf eine sinnvolle Wahl von  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$  hat – so ist es z.B. nutzlos, thermale Observable zu wählen, die die Elemente in  $\mathcal{C}$  nicht trennen.

### 3.2.1 Auswahl der Mengen $\mathcal{C}_{\beta,\mu}$ , $\mathcal{C}_{B,M}$ und $\mathcal{C}$ von thermischen Vergleichszuständen

Die Grundlage dieser Auswahl bilden die oben diskutierten  $(\alpha_{te}^\mu, \beta)$ -KMS-Zustände. Es liegt nahe, zunächst Zustände mit gleicher Temperatur  $\beta$  und chemischem Potential  $\mu$  in einer Menge  $\mathcal{C}_{\beta,\mu}$  zusammenzufassen. Diese Zustände sind nach Konstruktion eindeutig, also folgt

$$\mathcal{C}_{\beta,\mu} = \left\{ \omega_\beta^\mu \right\}.$$

Zur Untersuchung von Zuständen, in denen die Temperatur oder das chemische Potential nur als statistische Größe bekannt ist, ist es notwendig, Gemische von Zuständen aus verschiedenen Mengen  $\mathcal{C}_{\beta,\mu}$  zum Vergleich heranzuziehen. Sei  $\rho$  eine positive Dichte mit Träger in  $B$  und  $M$ . Unter der Annahme, daß für alle Elemente  $\phi \in \mathcal{S}_0$  die Ausdrücke  $\rho(\beta, \mu) \omega_\beta^\mu(\phi)$  integrierbar sind, existiert eine Darstellung

$$\omega_{B,M}(\cdot) = \int_{B,M} d^4\beta d\mu \rho(\beta, \mu) \omega_\beta^\mu(\cdot),$$

wobei  $B \subset \overline{V^+}$ ,  $M \subset [-m_0, m_0]$  die Gebiete möglicher statistischer Fluktuation sind. Diese Zustände sind in den Mengen  $\mathcal{C}_{B,M}$  zusammengefaßt. Schließlich bildet die Vereinigung dieser Mengen  $\mathcal{C}_{B,M}$  die Menge der Vergleichszustände

$$\mathcal{C} \doteq \bigcup \mathcal{C}_{B,M}.$$

Es ist natürlich  $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}^{*(+)}$ .

In [Bu03], wo eine Theorie masseloser<sup>9</sup>, ungeladener Bosonen untersucht wurde, war es ausreichend<sup>10</sup>, ausschließlich solche Parametergebiete  $B$  zu wählen, die in einer kompakten Teilmenge des offenen Vorwärtslichtkegels  $V^+$  enthalten sind. Diese Wahl wird hier nicht vorausgesetzt, um die Vergleichszustände nicht zu weit einzuschränken. Es stellt sich insbesondere heraus, daß einige interessante mögliche nichttriviale lokale Gleichgewichtszustände in der hier vorliegenden massiven Theorie diese Eigenschaft nicht teilen – die Menge der zu erwartenden Temperaturen von in den folgenden Kapiteln konstruierten Beispielen wird typischerweise eine Dichte  $\rho$  mit Träger auf Teilen von  $\overline{V^+}$  besitzen, die keinen endlichen Abstand zu dessen Rand haben.

Unter Voraussetzung der Beschränkung auf Kompakta im Inneren von  $V^+$  können wir auf den makroskopischen Observablen eine sehr angenehme Topologie finden, definiert durch die Supremumshalbnorm. Der Vollständigkeit halber, und weil sie sinnvoll für die Herleitung der in dieser Arbeit verwendeten allgemeineren Klasse von Topologien auf den thermischen Funktionen ist, soll die Supremumshalbnorm hier kurz vorgestellt werden. Ihre Anwendung setzt jedoch einen weiteren technischen Punkt voraus. Dieser Punkt ist wichtig für die Fortsetzbarkeit dieser Zustände auf größere Mengen von Makroobservablen, als die, die wir allein durch die lokalthermalen Observablen erhalten. Zur Supremumshalbnorm siehe auch Kapitel 4.1.2.

3a. Sei  $\omega$  ein Zustand, der auf einem Gebiet  $\mathcal{O}$  die  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalitätseigenschaft sogar unter Beschränkung auf Vergleichszustände mit Temperaturdichten  $\beta \mapsto \rho_x(\beta, \mu)$  mit kompaktem Träger  $B_x \subset V^+$  besitzt. Also

$$\omega(\phi(x)) = \int d^4\beta d\mu \rho_x(\beta, \mu) \omega_\beta^\mu(\phi(0)),$$

mit  $x \in \mathcal{O}$ ,  $\phi(x) \in \mathcal{S}_x$ ,  $\text{supp}(\rho_x) \subset B_x$  kompakt.

<sup>9</sup>impliziert  $\mu = 0$

<sup>10</sup>(und praktisch für die mathematische Handhabung der Untersuchung der lokalen Gleichgewichtszustände)

In diesem Fall gelte

$$\forall x \in \mathcal{O} \Rightarrow B_x \in B$$

für ein von  $x$  unabhängiges Kompaktum  $B \subset V^+$ .

Im Fall, daß die Beschränkung des Temperaturträgers von  $\rho$  auf Gebiete, die einen endlichen Abstand zum Rand des Vorwärtslichtkegels besitzen, aufgehoben wird –dies sei hier der Fall– muß eine andere, allgemeinere Forderung gestellt werden.

Zur Bedeutung dieser Forderung siehe die Einleitung des Kapitels 4.1. U.a. folgt, falls sie erfüllt ist, die Stetigkeit der mit diesen Dichten definierten  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustände, sowie die Wohldefiniertheit der lokalthermalen Observablen in diesen Zuständen.

3b. Bei Aufhebung der Beschränkung auf Vergleichszustände mit Temperaturdichten, die kompakten Träger im Inneren des offenen Vorwärtslichtkegels  $V^+$  besitzen, gelte für alle thermischen Funktionen  $T$ , definiert durch

$$\overline{V^+} \times [-m_0, m_0] \ni (\beta, \mu) \longmapsto T(\beta, \mu) = \omega_{\beta}^{\mu}(\phi(0)), \quad \phi(0) \in \mathcal{S}_0$$

und die Dichten  $\rho_x$  der Referenzzustände, mit denen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität auf einem Gebiet  $\mathcal{O} \ni x$  etabliert werden soll, die Beziehung

$$\forall x \in \mathcal{O} : T \in L_1\left(\overline{V^+} \times [-m_0, m_0], d\rho_x\right).$$

### 3.2.2 Auswahl der Menge $\mathcal{S}_x$

Es ist möglich, in natürlicher Weise von einer Hierarchie von Zuständen bezüglich ihrer Thermalisierung zu sprechen. Einer solchen Klassifizierung liegt die Idee zugrunde, daß sich ein beliebiger Zustand und ein thermischer Vergleichszustand um so ähnlicher sind, je mehr Momente des Feldes sie auf dieselben Erwartungswerte abbilden. Die Konsistenz dieser Begriffsbildung wird durch die Beobachtung illustriert, daß alle  $p'$ -Punktfunktionen eindeutiger KMS-Zustände durch die  $p$ -Punktfunktionen festgelegt sind, falls  $p' \leq p$ . Wie in [BOR02] dargelegt, und auf den hier vorliegenden Rahmen übertragbar, wird die  $p$ -Punktfunktion eines KMS-Zustands durch seine Erwartungswerte der Feldgrößen

$$\phi_j(x) \in \mathcal{N}(\phi_0^p)_{q,x}$$

determiniert. Somit impliziert eine Übereinstimmung eines Vergleichszustands mit einem beliebigen Zustand auf einer Menge  $\mathcal{N}(\phi_0^p)_{q,x}$  eine Übereinstimmung auf allen  $p'$ -Punktfunktionen mit  $p' \leq p$ . Eine kanonische Wahl der lokalthermalen Observablen fängt also bei Momenten des Feldes niedriger Potenz  $p$  an, um eine möglichst geringe Thermalisierung bzw. Ähnlichkeit mit 'echten' thermischen Zuständen der zu untersuchenden Zustände *vorauszusetzen*.

Die Menge  $\mathbb{C}\hat{1}$  erlaubt es lediglich, einen Zustand auf Normiertheit zu testen und bringt daher kaum Information. Auch ergibt die Untersuchung der nächsthöheren Potenzen von Feldoperatoren, daß insbesondere

$$\phi(x), \phi^*(x), \phi(x)\phi(y), \phi^*(x)\phi^*(y)$$

mitsamt ihren Ableitungen von  $\omega \in \mathcal{C}$  auf die Null abgebildet werden. Neben der Eigenschaft, keine Observablen zu sein und daher auch keiner Messung zugänglich, trennen sie die Vergleichszustände also nicht und sind somit für die Analyse lokaler Gleichgewichtszustände im Rahmen der hier gewählten Vergleichszustände wertlos. Diese Kritikpunkte treffen auf die Feldgrößen

$$\phi^*(x)\phi(y), \phi(x)\phi^*(y)$$

nicht zu. Die Grenzwerte dieser Operatoren bei Annäherung an einen Punkt sowie die ihre Ableitungen approximierenden Felder im selben Grenzwert entsprechen also, zusammen mit Vielfachen der  $\hat{1}$ , der natürlichen Wahl einer Menge von lokalthermalen Observablen. Sie fordern die für eine Übereinstimmung zwischen einem zu untersuchenden Zustand und einem thermischen Vergleichszustand geringstmögliche Thermalisierung des zu untersuchenden Zustands, die nicht mehr vollkommen trivial ist.

Diese Grenzwerte sind in der Menge  $\mathcal{I}_x$  enthalten und finden durch die oben kurz skizzierte Methode der 'balancierten Ableitung' quadratischer Feldoperatoren (und solcher höherer Potenzen) Eingang in diese Arbeit. Die folgende Definition implementiert die modellspezifische Form dieser Ableitungsvorschrift.

Darüberhinaus ist es sinnvoll, die normalgeordneten Feldgrößen zu betrachten, da der unendlich große Erwartungswert nicht normalgeordneter Größen in einem Vergleichszustand die Summe aus dem ebenfalls unendlich großen Grenzwert im Vakuum und einem endlichen Teil ist, der von der Temperatur und dem chemischem Potential abhängt. Da das Vakuum für alle Vergleichszustände gleich aussieht, ist es angemessen, sich für parameterspezifische Untersuchungen auf den endlichen Rest zu beschränken, und folglich den Beitrag des Vakuums stets abzuziehen.

**Definition 3.2 (Auswahl von  $\mathcal{S}_x$ )** Die im folgenden verwendete Menge  $\mathcal{S}_x$  ist definiert als Menge der Polynome über  $\mathbb{C}$ , generiert durch die  $\hat{1}$  und sämtliche balancierten Ableitungen der normalgeordneten Quadrate  $:\phi_0^*\phi_0:(x)$  und  $:\phi_0\phi_0^*:(x)$  von  $\phi_0$  und  $\phi_0^*$ , welche unter Verwendung der Multiindex-Notation  $\underline{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m)$  und  $\partial_{\zeta}^{\underline{\kappa}} = \partial_{\zeta_{\kappa_1}} \dots \partial_{\zeta_{\kappa_m}}$  folgendermaßen definiert sind,

$$\tau_{*0}^{\underline{\kappa}}(x) \doteq \check{\partial}^{\underline{\kappa}} : \phi_0^*\phi_0 : (x) \doteq \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\kappa}} (\phi_0^*(x + \zeta)\phi_0(x - \zeta) - \omega_{\infty}(\phi_0^*(x + \zeta)\phi_0(x - \zeta))\hat{1}),$$

wobei  $\zeta$  raumartig ist. Analog  $\tau_{*0}^{\underline{\kappa}}(x) \doteq \check{\partial}^{\underline{\kappa}} : \phi_0\phi_0^* : (x)$ . Als Kurzschreibweise gelte in Zukunft, daß Vektor  $\beta_e$  zu einem Vektor  $\beta$  zusammengefaßt wird. Der Limes  $\zeta \rightarrow 0$  kann in den Referenzzuständen ausgeführt werden.

Um dies zu sehen, betrachten wir folgendes. Mit dem Ziel, die zugehörigen thermischen Funktionen, also die Auswertung dieser Observablen in den  $(\alpha_{te}^{\mu}, \beta)$ -KMS-Zuständen zu erhalten, setzen wir mit der von oben bekannten Integraldarstellung dieser Zustände an.

$$\begin{aligned} \omega_{\beta}^{\mu}(\tau_{*0}^{\underline{\kappa}}(x)) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\kappa}} \omega_{\beta}^{\mu}(\phi_0^*(x + \zeta)\phi_0(x - \zeta) - \omega_{\infty}(\phi_0^*(x + \zeta)\phi_0(x - \zeta))\hat{1}) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \partial_{\zeta}^{\underline{\kappa}} (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ e^{-2i\zeta\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta\vec{p}} e^{-\mu\sqrt{\beta^2}} - 1} - e^{2i\zeta\vec{p}} \frac{1}{1 - e^{\beta\vec{p}} e^{\mu\sqrt{\beta^2}}} \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $\vec{p} = (\omega_{\vec{p}}, \vec{p})$ .

Es ist  $\partial_{\zeta}^{\underline{\kappa}}$  unter dem Integral durch  $2^m(-i)^m \Pi_i \vec{p}^{\kappa_i}$  bzw.  $2^m(i)^m \Pi_i \vec{p}^{\kappa_i}$  ersetzbar. Der Grund dafür ist folgender. Die Funktion

$$f(\zeta, \vec{p}) = \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ e^{-2i\zeta\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta\vec{p}} e^{-\mu\sqrt{\beta^2}} - 1} - e^{2i\zeta\vec{p}} \frac{1}{1 - e^{\beta\vec{p}} e^{\mu\sqrt{\beta^2}}} \right\}$$

ist für jedes feste  $\zeta$  über  $\vec{p}$  integrierbar, weil sie durch die integrable Funktion  $f_i(\vec{p}) = \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ \frac{1}{e^{\beta\vec{p}} e^{-\mu\sqrt{\beta^2}} - 1} - \frac{1}{1 - e^{\beta\vec{p}} e^{\mu\sqrt{\beta^2}}} \right\}$  dominiert ist; hierbei beachte man  $\beta\vec{p} > \pm\mu\sqrt{\beta^2}$ .

Weiterhin ist sie für jedes feste  $\vec{p}$  nach den Komponenten von  $\zeta$  differenzierbar und es gilt

$$|\partial_\zeta^\kappa f(\zeta, \vec{p})| \leq 2^m \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} (\Pi_{\kappa_i} \bar{p}_i) \left\{ \frac{1}{e^{\beta \bar{p}} e^{-\mu \sqrt{\beta^2 - 1}} - 1} - \frac{1}{1 - e^{\beta \bar{p}} e^{\mu \sqrt{\beta^2 - 1}}} \right\}$$

wobei die rechte Seite eine über  $\vec{p}$  integrable Funktion darstellt. Damit gilt nach Sätzen der Analysis, daß

$$\partial_\zeta^\kappa \int d^3 \vec{p} f(\zeta, \vec{p}) = \int d^3 \vec{p} \partial_\zeta^\kappa f(\zeta, \vec{p}).$$

Analoge Argumente treffen auf alle weiteren Ableitungen nach Komponenten von  $\zeta$  zu.

Wir erhalten, mit  $c_m = 2^{m-1} i^m (2\pi)^{-3}$ , im Grenzwert  $\zeta \rightarrow 0$

$$\omega_\beta^\mu(\tau_{*o}^\kappa(x)) = c_m \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} (\Pi_i \bar{p}^{\kappa_i}) \left\{ (-1)^m \frac{1}{e^{\beta \bar{p}} e^{-\mu \sqrt{\beta^2 - 1}} - 1} - \frac{1}{1 - e^{\beta \bar{p}} e^{\mu \sqrt{\beta^2 - 1}}} \right\}. \quad (3.1)$$

Der Integralausdruck auf der rechten Seite ist eine für jede Indexmenge  $\underline{\kappa}$  in  $\beta$  analytische Funktion; es existiert also jede der auf die obige Weise definierten balancierten Ableitungen in den KMS-Zuständen und somit auch in den Referenzzuständen. Die obige Form kann weiter umgewandelt werden zu

$$\omega_\beta^\mu(\tau_{*o}^\kappa(x)) = c_m \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} (\Pi_i \bar{p}^{\kappa_i}) \left\{ (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta \bar{p} + n\mu \sqrt{\beta^2 - 1}} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta \bar{p} - n\mu \sqrt{\beta^2 - 1}} \right\}. \quad (3.2)$$

## Bemerkungen

1. Für die lokalthermale Observablen gilt offenbar die Beziehung

$$\omega_\beta^\mu(\tau_{*o}^\kappa(x)) = (-1)^m \omega_\beta^\mu(\tau_{o*}^\kappa(x)),$$

da ein Wechsel von  $\phi_0^* \phi_0$  zu  $\phi_0 \phi_0^*$  den Übergang  $\mu \rightarrow -\mu$  bedeutet.

2. Im Fall ungerader  $m$  gilt  $\mu = 0 \Rightarrow \omega_\beta^\mu(\tau_{*o}^\kappa(x)) = \omega_\beta^\mu(\tau_{o*}^\kappa(x)) = 0$ .
3. Definieren wir noch  $T_{*o}^\kappa(\beta, \mu) \doteq \omega_\beta^\mu(\tau_{*o}^\kappa(x))$ ,  $T_{o*}^\kappa(\beta, \mu) \doteq \omega_\beta^\mu(\tau_{o*}^\kappa(x))$ . Das Symbol  $T^\kappa(\beta, \mu)$  steht für  $T_{*o}^\kappa(\beta, \mu)$  oder  $T_{o*}^\kappa(\beta, \mu)$

### 3.3 $\mathcal{S}_O$ -Thermalität und Makroobservablen: der Übergang vom Mikroskopischen zum Makroskopischen

Wie in [Bu03] gezeigt, und auf das massive Feld mit chemischem Potential übertragbar, liefern die idealisierten, oben entwickelten und am Punkt wirkenden Feldoperatoren  $\phi(x)$  dieselbe Information über die thermischen Vergleichszustände wie gewisse, ihnen entsprechende Makroobservablen  $\Phi$ .

### 3.3.1 Über die Beziehung des Mikroskopischen mit dem Makroskopischen

Aufgrund der Vertauschbarkeit der Feldoperatoren auf raumartigen Abständen in Verbindung mit deren Lokalisation in kompakten Gebieten, läßt sich durch die Wahl der Testfunktionsfolge  $f_n$  mit  $f_n(x) = n^{-4}f(n^{-1}x - x_n)$ , (wobei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int d^4x f(x) = 1$  und  $(x_n)$  eine Folge ist, die schnell genug raumartig divergiert) mit Hilfe des idealisierten, am Punkt wirkenden Feldoperators  $\phi(x)$  über die Beziehung

$$\phi(f_n) = \int d^4x f_n(x) \phi(x)$$

eine Zentralfolge  $\phi(f_n)$  definieren. Deren Grenzwert

$$\Phi \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(f_n)$$

existiert in allen durch Referenzzustände generierten Hilbertraumdarstellungen und definiert dort eine zentrale Observable. Betrachten wir die Eindeutigkeit der KMS-Zustände und deren Translationsinvarianz<sup>11</sup>, so ergibt sich unter Anwendung des Ergodizitätssatzes, daß für jeden Vergleichszustand  $\omega_\rho$  über die Beziehung

$$\omega_\rho(A^* \Phi A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\rho(A^* \phi(f_n) A) = \int d\rho(\beta, \mu) \omega_\beta^\mu(A^* A) \omega_\beta^\mu(\phi(0)) \quad (3.3)$$

die Zentralzerlegung von  $\Phi$  bestimmt wird. Die Observable  $\Phi$  wird im wesentlichen also durch die sogenannte *thermische Funktion*  $(\beta, \mu) \mapsto \Phi(\beta, \mu)$

$$(\beta, \mu) \rightarrow \Phi(\beta, \mu) \doteq \omega_\beta^\mu(\phi(0))$$

charakterisiert. Wir bezeichnen diese zentralen Observablen als *Makroobservable*.

### 3.3.2 Makroobservableeneigenschaft zulässiger Observablen

Eine Observable kann nun auf zwei Arten als 'makroskopisch in einem  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustand  $\omega$ ' charakterisiert werden. Einerseits ist es möglich, daß eine thermische Funktion  $T$  zu einem Feldoperator  $\phi(x)$  gehört, der auf einfache Weise direkt angebbar und in den Referenzzuständen auf die in Kapitel 3.3.1 beschriebene Weise als 'mit einer makroskopischen Observable  $\Phi$  äquivalent' identifizierbar ist. Hierzu gehören, den obigen Ausführungen folgend, diejenigen thermischen Funktionen, die durch Auswertung der lokalthermalen Observablen in den KMS-Zuständen entstehen. Wir wollen sie im folgenden als *lokalthermale Funktionen* bezeichnen. Sie transformieren sich wie Lorentztensoren.

$$(\beta, \mu) \rightarrow T^\kappa(\beta, \mu) \doteq \omega_\beta^\mu(\tau^\kappa(0)), \quad \tau^\kappa(0) \in \mathcal{S}_0$$

Diese direkte Methode ist erweiterbar. Sichtbar wird dies im Kontext der lokalen Äquivalenz von  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen mit gewissen, durch die Referenzzustände definierten Funktionalen. Hierzu folgendes.

<sup>11</sup> Aufgrund der Translationsinvarianz der KMS - Zustände sind natürlich auch die Erwartungswerte dieser Operatoren in den Vergleichszuständen unabhängig von  $x$  und daher gilt für die in den Testfunktionen stetigen Objekte  $\omega_\beta^\mu(\phi(f_n))$  die Identität  $\omega_\beta^\mu(\phi(f_n)) = \omega_\beta^\mu(\phi(0)) \int d^4x f_n(x) = \omega_\beta^\mu(\phi(0))$ , falls –wie hier– die  $f_n$  normiert sind.

Durch die Dichten  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0] \ni (\beta, \mu) \mapsto \rho(\beta, \mu)$ , die die thermischen Vergleichszustände aus  $\mathcal{C}$

$$\omega_\rho(\cdot) = \int_{\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]} d\rho(\beta, \mu) \omega_\beta^\mu(\cdot)$$

charakterisieren, werden Funktionale auf lokalthermalen Funktionen  $T^\kappa$  mittels

$$\rho[T^\kappa] \doteq \int_{\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]} d\rho(\beta, \mu) T^\kappa(\beta, \mu)$$

definiert. Die lokale Äquivalenz eines Referenzzustands  $\omega_{\rho(x)}$  und eines generischem  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustands  $\omega$  impliziert dann

$$\omega(T^\kappa)(x) \doteq \omega_{\rho(x)}(\tau^\kappa(0)) = \rho(x)[T^\kappa], \quad x \in \mathcal{O}.$$

Diese Äquivalenz der Auswertung des Zustands  $\omega$  auf der Observable  $T^\kappa$  mit der Auswertung des Funktional  $\rho$  auf der lokalthermalen Funktion  $T^\kappa(\cdot, \cdot)$  läßt sich auf natürliche Weise auch für mögliche weitere, durch die Funktionen  $T^\kappa(\cdot, \cdot)$  approximierbare, sogenannte *zulässige thermische Funktionen*  $\Xi(\cdot, \cdot)$  und zugehörige Observable  $\Xi$  verallgemeinern durch

$$\omega(\Xi)(x) = \rho(x)[\Xi(\cdot, \cdot)],$$

wobei  $\Xi \approx \sum c_\kappa T^\kappa$  in einer zunächst rein heuristischen Notation. Die Frage nach den approximierbaren thermischen Funktionen und der Fortsetzbarkeit der Funktionale  $\rho(x)[\cdot]$  auf diese größere Menge wird in Kapitel 4 weiter beleuchtet, und es zeigt sich, daß unter gewissen Voraussetzungen an die  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustände z.B. auch die Phasenraumteilchendichte zu den zulässigen Funktionen gehört. Da die lokalthermalen Observablen zu makroskopischen Größen korrespondieren, ist  $\Xi$  also auch makroskopisch.

Während der Raum der lokalthermalen Funktionen  $T^\kappa$  prinzipiell abschließbar ist, ist die Grenzwertbildung der zu diesen Funktionen korrespondierenden Elemente in  $\mathcal{S}_x$  nicht trivial; der zugehörige Grenzwert wird sich im allgemeinen nicht in  $\mathcal{S}_x$  befinden. Eine Approximation von zulässigen Observablen durch Makroobservable  $T^\kappa$  kann aber auf jeden Fall im Sinne einer gewissen Topologie, auf die später noch eingegangen wird, mit beliebiger Genauigkeit geleistet werden.

Die interessanten raumzeitlichen Variationen der Erwartungswerte der Makroobservablen in  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen sind Gegenstand weiterer Untersuchungen.

### 3.4 Beispiele von aus den lokalthermalen Observablen erhaltbaren thermischen Funktionen

Einige interessante Makroobservablen können schon direkt aus den lokalthermalen Observablen abgeleitet und daher schon vor der eigentlichen Besprechung der Menge der zulässigen thermischen Funktionen, also sämtlicher durch die lokalthermalen Funktionen approximierbaren, analysiert werden.

#### 3.4.1 Der Strom

In der klassischen Theorie eines geladenen Klein-Gordon-Feldes handelt es sich hierbei um die erhaltene Größe

$$j^\lambda = -i \left[ \left( \partial^\lambda \phi^* \right) \phi - \phi^* \left( \partial^\lambda \phi \right) \right]$$

Aufgrund der Beziehung

$$\begin{aligned}\partial_\mu^{[\xi]} \phi_0^*(x + \xi) \phi_0(x - \xi) &= \left( \partial_\mu^{[\xi]} \phi_0^*(x + \xi) \right) \phi_0(x - \xi) + \phi_0^*(x + \xi) \left( \partial_\mu^{[\xi]} \phi_0(x - \xi) \right) \\ &= \left( \partial_\mu^{[x]} \phi_0^*(x + \xi) \right) \phi_0(x - \xi) - \phi_0^*(x + \xi) \left( \partial_\mu^{[x]} \phi_0(x - \xi) \right)\end{aligned}$$

ist die ihr entsprechende, in der Menge  $\mathcal{S}_x$  enthaltene, normalgeordnete Form gegeben durch

$$\iota^\lambda(x) = -i\tau_{*0}^\lambda(x).$$

Sie nimmt auf den KMS-Zuständen die Erwartungswerte

$$\begin{aligned}I^\lambda(\beta, \mu) &= \omega_\beta^\mu \left( I^\lambda \right) (x) = \omega_\beta^\mu \left( \iota^\lambda(0) \right) = -i\omega_\beta^\mu \left( \tau_{*0}^\lambda(0) \right) \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \frac{\sinh \mu \sqrt{\beta^2}}{\cosh \mu \sqrt{\beta^2} - \cosh \beta \vec{p}} \vec{p}^\lambda\end{aligned}$$

an.  $I^\lambda(\beta, \mu)$  ist erhalten (siehe Kapitel 5.1).

Im Ruhesystem des KMS-Zustands ( $\beta^\mu = (\sqrt{\beta^2}, 0, 0, 0)$ ) ergibt sich erwartungsgemäß, daß der räumliche Anteil des Stroms verschwindet, wie man durch einen Wechsel  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  sofort ermittelt. Dieser erbringt nämlich unmittelbar, daß  $I_k(\beta, \mu) = -I_k(\beta, \mu)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Sei  $\nu = \mu\sqrt{\beta^2}$  und  $b = \sqrt{\beta^2}$ . Die lorentzskalare Größe

$$\Gamma^0 \left( \sqrt{\beta^2}, \mu\sqrt{\beta^2} \right) \doteq \text{signum} \{ I^0(\beta, \mu) \} \sqrt{I^\lambda(\beta, \mu) I_\lambda(\beta, \mu)},$$

die Dichte der durch das chemische Potential hervorgerufenen Ladung im Ruhesystem, hat den Wert

$$\Gamma^0(b, \nu) = (2\pi^2)^{-1} \int_0^\infty dq \frac{q^2 \sinh \nu}{\cosh \nu - \cosh \omega_q b}. \quad (3.4)$$

Siehe dazu Abbildung 1. Man beachte, daß die Kurven für  $\mu \rightarrow \pm m_0$ , auch wenn es nicht so aussieht, stetig in einen Grenzwert gehen (siehe Kapitel 4.1.1). Offenbar ist  $\Gamma^0(b, \nu)$  gleich Null, falls das chemische Potential Null, die Temperatur Null oder die Ruhemasse unendlich groß ist – auch dies entspricht der Erwartung. Wir bemerken, daß diese Größe für jeden Beobachter denselben Wert annimmt.

### 3.4.2 Die Temperatur und das chemische Potential

Betrachten wir zunächst die Funktion  $T^{\mathbf{0}}$ .

$$T^{\mathbf{0}}(\beta, \mu) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta\vec{p}} \cosh \left( n\mu\sqrt{\beta^2} \right)$$

$T^{\mathbf{0}}$  ist eine lorentzskalare Funktion und nimmt somit in jedem zeitartig zu  $\beta$  liegenden Bezugssystem denselben Wert an. Dies manifestiert sich natürlich auch in der obigen Darstellung, denn sowohl das Maß  $\frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}}$  als auch der Integrand sind lorentzinvariant. Somit erhalten wir unter der Lorentztransformation des zeitartigen Vektors  $\beta \mapsto (\sqrt{\beta^2}, 0, 0, 0)$  die folgende Form der Funktion

$$T^{\mathbf{0}}(\beta, \mu) = (2\pi^2)^{-1} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{\omega_q} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\sqrt{\beta^2}\omega_q} \cosh \left( n\mu\sqrt{\beta^2} \right) \doteq \mathbf{T}^{\mathbf{0}} \left( \sqrt{\beta^2}, \mu\sqrt{\beta^2} \right).$$

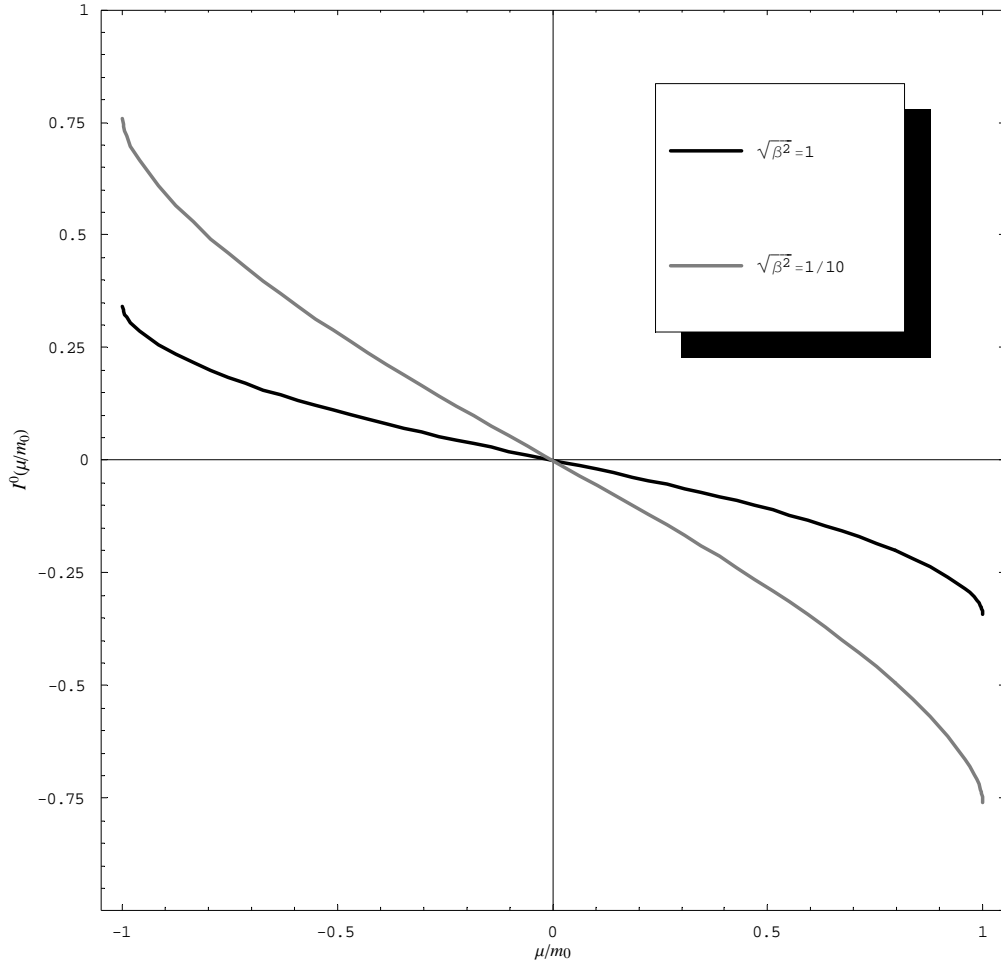


Abbildung 1:  $I^0$  im Ruhesystem von KMS-Zuständen  $\omega_{\beta=(\sqrt{\beta^2}, 0, 0, 0)}^{\mu}$ .

Durch das Hinzunehmen der Ladungsdichte im Ruhesystem  $\Gamma^0$  erhalten wir mit der Definition

$$\mathbb{R}^+ \times [-m_0, m_0] \ni (\sqrt{\beta^2}, \mu) \leftrightarrow (\mathbf{T}^0(\sqrt{\beta^2}, \mu\sqrt{\beta^2}), \Gamma^0(\sqrt{\beta^2}, \mu\sqrt{\beta^2}))$$

eine injektive Abbildung – diese induziert natürlich eine Bijektion in ihre Bildmenge. Somit können wir prinzipiell  $\sqrt{\beta^2}$  und  $\mu$  aus  $\mathbf{T}^0$  und  $\Gamma^0$  gewinnen.

Um uns die Injektivität klarzumachen, betrachten wir einmal die Kurven im Raum  $\mathbb{R}^+ \times [-m_0, m_0] \ni (\sqrt{\beta^2}, \mu)$ , die konstante Werte von  $\mathbf{T}^0$  und  $\Gamma^0$  auszeichnen, und schreiben dabei

$$\Gamma^0(b, \nu) = (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2 \sinh \nu}{\cosh \nu - \cosh \omega_q b} \doteq (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\infty} dq \mathbf{i}^0(b, \nu, q)$$

$$\mathbf{T}^0(b, \nu) = (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{\omega_q} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nb\omega_q} \cosh(n\nu) \doteq (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\infty} dq \mathbf{t}^0(b, \nu, q).$$

Parametrisieren wir die Kurven konstanter Werte  $\Gamma^0$  bzw.  $\mathbf{T}^0$  konkret mit  $t \mapsto (b_{\Gamma^0}(t), \nu_{\Gamma^0}(t))$ , bzw.  $t \mapsto (b_{\mathbf{T}^0}(t), \nu_{\mathbf{T}^0}(t))$ , so erhalten wir für konstantes  $\Gamma^0$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial \Gamma^0}{\partial b} \frac{\partial b_{\Gamma^0}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma^0}{\partial \nu} \frac{\partial \nu_{\Gamma^0}}{\partial t} \quad (3.5)$$

Analog  $\mathbf{T}^0$ . Rechnungen ergeben

$$0 > \frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial b}, \quad \frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial b} = 2\omega_q \frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial \nu} \stackrel{\geq 1}{\geq} 0 \quad (3.6)$$

und

$$-\frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial \nu} / \frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial b} \stackrel{\geq 2}{\geq} \frac{1}{\omega_q}, \quad 0 \stackrel{\leq 3}{\leq} -\frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial \nu} / \frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial b} \stackrel{\leq 4}{\leq} \frac{1}{\omega_q}. \quad (3.7)$$

Gleichheit an den Stellen  $\stackrel{\geq 1}{\geq}$  bzw.  $\stackrel{\leq 3}{\leq}$  liegt nur im Fall  $\nu = 0$  vor, und dies ist äquivalent zu  $\Gamma^0 = 0$ . Dieser Fall ist leicht zu identifizieren und da  $b \mapsto \mathbf{T}^0(b, 0)$  offenbar streng monoton fällt, ist die Umkehrung  $(\mathbf{T}^0(b, 0), 0) \mapsto (b, 0)$  kein Problem.

Betrachten wir nun  $\nu > 0$ . Wir bemerken, daß in diesem Fall  $\partial \Gamma^0 / \partial b \neq 0 \neq \partial \mathbf{T}^0 / \partial \nu$  und formen Formel (3.5) und ihr Analogon für  $\mathbf{T}^0$  um und erhalten

$$0 < \frac{\partial b_{\Gamma^0}}{\partial \nu_{\Gamma^0}} = -\frac{\partial \Gamma^0}{\partial \nu} / \frac{\partial \Gamma^0}{\partial b}, \quad 0 < \frac{\partial b_{\mathbf{T}^0}}{\partial \nu_{\mathbf{T}^0}} = -\frac{\partial \mathbf{T}^0}{\partial \nu} / \frac{\partial \mathbf{T}^0}{\partial b}$$

Mit den Erkenntnissen aus (3.6) und (3.7) bilden wir (unter mehrfacher Anwendung des Satzes über die Vertauschbarkeit von Integration und Ableitung bei parameterabhängigen Integralen) die folgende Kette von Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{\Gamma^0}}{\partial \nu_{\Gamma^0}} &= -\frac{\partial \Gamma^0}{\partial \nu} / \frac{\partial \Gamma^0}{\partial b} = -\frac{\int_0^\infty dq \frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial \nu}(b, \nu, q)}{\int_0^\infty dq \frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial b}(b, \nu, q)} \\ &> -\frac{\int_0^\infty dq \frac{1}{\omega_q} \frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial b}(b, \nu, q)}{\int_0^\infty dq \frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial b}(b, \nu, q)} = -\frac{\int_0^\infty dq \frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial \nu}(b, \nu, q)}{\int_0^\infty dq \omega_q \frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial \nu}(b, \nu, q)} \\ &> -\frac{\int_0^\infty dq \frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial \nu}(b, \nu, q)}{\int_0^\infty dq \frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial b}(b, \nu, q)} = -\frac{\partial \mathbf{T}^0}{\partial \nu} / \frac{\partial \mathbf{T}^0}{\partial b} = \frac{\partial b_{\mathbf{T}^0}}{\partial \nu_{\mathbf{T}^0}} > 0. \end{aligned}$$

Das Integral verbessert hierbei die Relationen  $\stackrel{\geq 2}{\geq}$  und  $\stackrel{\leq 4}{\leq}$  in den Ungleichungen (3.7) zu  $>$  bzw.  $<$ , da  $-\frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial \nu} = \frac{1}{\omega_q} \frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial b}$  bzw.  $-\frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial \nu} = \frac{1}{\omega_q} \frac{\partial \mathbf{t}^0}{\partial b}$  nur an einem einzigen Punkt gilt (nämlich bei  $\omega_q = \nu/b = \mu$ , unmöglich, da  $\mu < m_0$ ). Die Integranden  $\left(-\frac{\partial \mathbf{i}^0}{\partial \nu}\right)$  etc. müßten nun an diesem Punkt konzentriert sein, damit die entsprechenden Integrale gleich sind. Dies ist aber nicht der Fall.

Bei jedem Schnittpunkt zweier Kurven  $\nu \mapsto b(\nu)$  konstanter Werte  $\Gamma^0$  und  $\mathbf{T}^0$  ist also die Ableitung der Kurve mit konstantem  $\Gamma^0$  größer als die Ableitung der Kurve mit konstantem  $\mathbf{T}^0$ . Der Fall  $\nu < 0$  kann analog gezeigt werden, dabei kehren sich nur die Größenverhältnisse der Ableitungen um. Daraus folgt auch schon, daß ein Wertevektor  $(\mathbf{T}^0(b, \mu b), \Gamma^0(b, \mu b))_0$  nur an einem Paar von Parametern  $(b, \mu b)_0$  angenommen werden kann.

Es ist zu bemerken, daß die Aussagekraft der auf diese Weise erhaltenen Größen begrenzt ist. So gehören zwar  $\Gamma^0$  und  $\mathbf{T}^0$  zu den lokalthermalen Funktionen und werden somit durch die Auswertung von in  $\mathcal{S}_x$  enthaltenen Observablen in den  $\mathcal{S}_O$ -thermischen Zuständen erhalten.

Somit sind auch ihre Schwankungsquadrate und ähnliche Größen zugänglich, also die gesamte Information, die wir gewöhnlich voraussetzen, um uns im Rahmen der Quantenfeldtheorie ein vollständiges Bild einer Observablen machen zu können.

Dies trifft allerdings für die aus den Funktionen  $\mathbb{I}^0$  und  $\mathbb{T}^0$  abgeleiteten Funktionen  $b$  und  $\mu$  nicht zu. Sie gehören nicht zu den lokalthermalen Funktionen und a priori ist es auch nicht klar, ob sie durch solche approximierbar, also zulässig sind. Siehe hierzu die Einleitung des Kapitels 4 und Kapitel 4.2. Allein den obigen Betrachtungen folgend, können wir zwar ihren Zahlenwert angeben, aber keine darüberhinausgehende Information gewinnen.

Wie wir in Kapitel 6.1 herausstellen werden, ist es sogar ein wesentliches Merkmal nicht-trivialer  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischer Zustände in der massiven bosonischen Theorie, daß sie keine scharfe Temperatur besitzen können. Diese Tatsache schränkt den Wert der Information über den Erwartungswert von  $\beta$  natürlich ein.

### 3.4.3 Der Energie-Impulstensor

Mittels der Noether-Theorie kann man aus der freien Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m_0^2 \phi^* \phi)$$

den klassischen symmetrischen (kanonischen) Energie-Impulstensor

$$T_{\mu\nu}^N = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi^*) \partial_\nu \phi + (\partial_\nu \phi^*) \partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} ((\partial_\rho \phi^*) \partial^\rho \phi - m_0^2 \phi^* \phi)$$

ableiten. Die Variation von  $\mathcal{L}$  ist dabei bis auf einen divergenzfreien Term bestimmt – es ist jedoch von vornherein nicht klar, ob und mit welchem divergenzfreien Term man  $T_{\mu\nu}^N$  ergänzen soll.

Ein allgemeinrelativistischer Zugang zu dieser Thematik bedient sich einer Lagrangedichte, die neben der Minimalkopplung  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$  auch noch eine Kopplung an die Krümmung beinhaltet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\nabla^\mu \phi^* \nabla_\mu \phi - m_0^2 \phi^* \phi) - \sigma R \phi^* \phi$$

Durch Variation der Metrik und das dem vorliegenden Fall angemessene Einsetzen der Minkowskimetrik in das Ergebnis gelangt man so zu einer allgemeineren Form von  $T_{\mu\nu}^N$ , nämlich

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi^*) \partial_\nu \phi + (\partial_\nu \phi^*) \partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} ((\partial_\rho \phi^*) \partial^\rho \phi - m_0^2 \phi^* \phi) - \sigma (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi^* \phi. \quad (3.8)$$

Ein spezieller Fall, der im folgenden benutzt werden wird, ist durch die Wahl  $\sigma = 1/6$  gegeben. Es ist die für die Untersuchung von skaleninvarianten Theorien natürliche Wahl, siehe auch [GM92], denn hier gilt  $T^\mu{}_\mu = m_0^2 \phi^* \phi$ , also Spurfreiheit, falls  $m_0 = 0$ .

Dieser sich auf Variation der Metrik stützende Ansatz bietet ad hoc leider wenig Einsicht in die feldtheoretischen Aspekte der zugrundeliegenden Symmetrien. Allerdings kann diese Form des Energie-Impulstensors auch auf rigorose Weise im Rahmen einer Theorie hergeleitet werden, die sich ähnlich dem Noether-Theorem direkt auf Symmetrien der Felder bezieht [GM92]<sup>12</sup>, und ist als 'verbesserter' Energie-Impuls-Tensor bekannt.

Im vorliegenden mathematischen Rahmen wird der Energie-Impulstensor  $T_{\mu\nu}$  durch eine entsprechende normalgeordnete symmetrische Form repräsentiert, deren Spur in vollkommen analoger Weise  $m_0^2 \tau^0$  ist.

<sup>12</sup>ergänzend siehe auch [FR99]

**Satz 3.3** Eine im vorliegenden formalen Rahmen dem Energie-Impulstensor  $T_{\mu\nu}$  entsprechende normalgeordnete symmetrische Form, deren Spur  $m_0^2\tau^{\mathbf{0}}$  ist, ist

$$\theta^{\lambda\nu}(x) = -\frac{1}{4}\tau^{\lambda\nu}(x) + \frac{1}{12}\left\{\partial^\lambda\partial^\nu - g^{\lambda\nu}\square\right\}\tau^{\mathbf{0}}(x).$$

**Beweis.** Die Feldgleichung ist  $(\square_x + m_0^2)\phi_0(x) = 0$  i.S.v.D. Dementsprechend gelten für das klassische, geladene Klein-Gordon-Feld die Identitäten (sei dabei der Kürze wegen  $\phi_0^* = \phi_0^*(x + \xi)$  und  $\phi_0 = \phi_0(x - \xi)$ )

$$\begin{aligned}\partial_{[x]}^\lambda\partial_{[x]}^\nu\phi_0^*\phi_0 &= \partial_{[\xi]}^\lambda\partial_{[\xi]}^\nu\phi_0^*\phi_0 + 2\left(\partial_{[x]}^\lambda\phi_0^*\right)\partial_{[x]}^\nu\phi_0 + 2\left(\partial_{[x]}^\nu\phi_0^*\right)\partial_{[x]}^\lambda\phi_0 \\ \square_{[x]}\phi_0^*\phi_0 &= -2m_0^2\phi_0^*\phi_0 + 2\left(\partial_{[x]}^\rho\phi_0^*\right)\partial_{[x]\rho}\phi_0\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\left(\partial_{[x]}^\lambda\phi_0^*\right)\partial_{[x]}^\nu\phi_0 + \left(\partial_{[x]}^\nu\phi_0^*\right)\partial_{[x]}^\lambda\phi_0\right) &= -\frac{1}{4}\partial_{[\xi]}^\lambda\partial_{[\xi]}^\nu\phi_0^*\phi_0 + \frac{1}{4}\partial_{[x]}^\lambda\partial_{[x]}^\nu\phi_0^*\phi_0 \\ \left(\partial_{[x]}^\rho\phi_0^*\right)\partial_{[x]\rho}\phi_0 - m_0^2\phi_0^*\phi_0 &= \frac{1}{2}\square_{[x]}\phi_0^*\phi_0\end{aligned}$$

Wenden wir diese Identitäten auf (3.8) mit  $\sigma = 1/6$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}T^{\lambda\nu}(x) &= \lim_{\xi\rightarrow 0}\left\{\left[-\frac{1}{4}\partial_{[\xi]}^\lambda\partial_{[\xi]}^\nu\phi_0^*\phi_0 + \frac{1}{4}\partial_{[x]}^\lambda\partial_{[x]}^\nu\phi_0^*\phi_0\right] - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\square_{[x]}\phi_0^*\phi_0\right) - \frac{1}{6}\left(\partial_{[x]}^\lambda\partial_{[x]}^\nu - g^{\lambda\nu}\square_{[x]}\right)\phi_0^*\phi_0\right\} \\ &= \lim_{\xi\rightarrow 0}\left\{-\frac{1}{4}\partial_{[\xi]}^\lambda\partial_{[\xi]}^\nu\phi_0^*\phi_0 + \frac{1}{12}\left\{\partial_{[x]}^\lambda\partial_{[x]}^\nu - g^{\lambda\nu}\square_{[x]}\right\}\phi_0^*\phi_0\right\},\end{aligned}$$

was, nach Normalordnung, obiger Form  $\theta^{\lambda\nu}(x)$  entspricht. Nach Bemerkung (1) in Kapitel 1 ist  $\tau_{*o}^{\lambda\nu}(x) = \tau_{o*}^{\lambda\nu}(x)$ , daher sei das Symbol  $\tau^{\lambda\nu}(x)$  verwendet. Die Spureigenschaft ergibt sich aus

$$\square_{[x]}\phi_0^*\phi_0 = -\square_{[\xi]}\phi_0^*\phi_0 - 4m_0^2\phi_0^*\phi_0,$$

denn damit erhalten wir

$$\begin{aligned}T^\lambda_\lambda &= \lim_{\xi\rightarrow 0}\left\{-\frac{1}{4}\partial_{[\xi]}^\lambda\partial_{[\xi]\lambda}\phi_0^*\phi_0 + \frac{1}{12}\left\{\partial_{[x]}^\lambda\partial_{[x]\lambda} - g^\lambda_\lambda\square_{[x]}\right\}\phi_0^*\phi_0\right\} \\ &= \lim_{\xi\rightarrow 0}\left\{-\frac{1}{4}\square_{[\xi]}\phi_0^*\phi_0 - \frac{1}{4}\square_{[x]}\phi_0^*\phi_0\right\} \\ &= \lim_{\xi\rightarrow 0}m_0^2\phi_0^*\phi_0.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Bei der Auswertung von  $\theta^{\lambda\nu}(x)$  auf den KMS-Zuständen leisten die Ableitungsterme keinen Beitrag, da diese Zustände raumzeitlich nicht variieren.  $\theta^{\lambda\nu}(x)$  nimmt auf den KMS-Zuständen den Wert

$$E^{\lambda\nu}(\beta, \mu) = \omega_\beta^\mu(\theta^{\lambda\nu}(0)) = -\frac{1}{4}\omega_\beta^\mu(\tau^{\lambda\nu}(0))$$

an. Es liegt nahe, diese thermische Funktion –also den Erwartungswert von  $\theta^{\lambda\nu}(x)$  auf den KMS-Zuständen– als den *thermischen Anteil* der Energie-Impulsdichte zu deuten, und die

Ableitungsterme als einen Zusatz, der nicht in  $\mathcal{S}_x$  enthalten ist. Wir führen dementsprechend zusätzlich zu  $\theta^{\lambda\nu}(x)$  noch den um die Ableitungsterme reduzierten Tensor der thermischen Energie-Impulsdichte ein

$$\epsilon^{\lambda\nu}(x) \doteq -\frac{1}{4}\tau^{\lambda\nu}(x),$$

mit dem wir diesen thermischen Anteil der Energie-Impulsdichte auf  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen messen werden.

Die Erwartungswerte der Tensoren  $\theta^{\lambda\nu}$  und  $\epsilon^{\lambda\nu}$  stimmen auf KMS-Zuständen überein, weil der Term  $\frac{1}{12}\left\{\partial_{[x]}^\lambda\partial_{[x]}^\nu - g_{\mu\nu}\square_{[x]}\right\}\tau^{\mathbf{0}}(x)$  in den globalen Gleichgewichtszuständen verschwindet – jedoch wird durch ihn in  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen im allgemeinen ein Zusatzterm an nicht-thermischer Energie-Impulsdichte erzeugt, der auf die Existenz von Inhomogenitäten in solchen Zuständen zurückzuführen ist.

Wir bemerken, daß der Zusatzterm mit Messungen, die durch Operatoren aus  $\mathcal{S}_x$  repräsentiert werden, nicht entdeckbar ist. Der in den globalen Gleichgewichtszuständen vollkommen ausreichende Begriff der lokalen Energiedichte, der mittels des Tensors  $\epsilon^{\lambda\nu}$  gewonnen wird, zeigt in den lokalen, bzw.  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen also (überraschenderweise) Unzulänglichkeiten. Hier wird klar, daß eine Übertragbarkeit von Begriffen des globalen auf das lokale Gleichgewicht nicht trivial ist.

Bei einer experimentellen Bestimmung des Energie-Impulstensors eines massiven bosonischen Feldes könnte man diese Erkenntnisse zukünftig berücksichtigen.

## 4 Der Raum der thermischen Funktionen

### 4.1 Diskussion geeigneter Topologien

Außer der Menge der aus den lokalthermalen Observablen hervorgehenden Makroobservablen gibt es auf  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen eine weitere, größere Klasse. Es handelt sich um Makroobservablen, die nicht notwendigerweise lokalthermalen Observablen entsprechen, aber durch solche im Sinne einer geeigneten Topologie approximiert werden können.

Wir rufen zunächst in Erinnerung, wie  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität eines Zustands und die Zulässigkeit von Observablen in ihm kanonisch zusammenhängen. Jeder  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustand korrespondiert zu einer dichtewertigen Funktion  $\mathcal{O} \ni x \mapsto \rho_x$ , wobei jede Dichte  $\rho_x$  Träger in  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]$  besitzt

$$\mathcal{O} \ni x \mapsto \omega_\rho(\cdot)(x) = \int_{\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]} d\rho_x(\beta, \mu) \omega_\beta^\mu(\cdot),$$

und diese dichtewertige Funktion  $\rho_x$  definiert auf dem Raum der möglichen thermischen Funktionen eine Menge von Funktionalen  $\rho(x)[\cdot]$  und somit eine Topologie. Es ist leicht zu einzu-sehen, daß es sich bei diesem Raum möglicher thermischer Funktionen um die Menge

$$\bigcap_{x \in \mathcal{O}} L_1 \left( \overline{V^+} \times [-m_0, m_0], d\rho_x \right),$$

kurz  $L_{1,\rho}$ , handelt, denn die Elemente von  $L_{1,\rho}$  sind genau diejenigen, für die ein Erwartungswert in allen Funktionalen  $\rho(x)[\cdot]$  existiert. Wir stellen uns vor, daß es für jede dieser thermischen Funktionen  $\Xi(\cdot, \cdot)$  eine Observable  $\Xi$  gibt, sodaß  $\omega_\rho(\Xi)(x) = \rho(x)[\Xi(\cdot, \cdot)]$ . Physikalisch bedeutsam ist für uns nur eine Teilmenge davon, nämlich der Abschluß der lokalthermalen Funktionen in der Topologie von  $L_{1,\rho}$ . Diese thermischen Funktionen gehören zu Makroobservablen, wie die Erläuterungen in Kapitel 3.3.2 zeigen, und werden *zulässige Observablen* genannt.

Seien nun  $\tau^{\underline{\kappa}}(0)$  lokalthermale Observable und  $T^{\underline{\kappa}}$  die korrespondierende lokalthermische Funktion. Es stellt sich unmittelbar die Frage, in welchen Zuständen –also für welche Dichten  $\rho$ – denn die Menge  $\{T^{\underline{\kappa}}\}$ , die wir in  $L_{1,\rho}$  abschließen wollen, überhaupt selbst in  $L_{1,\rho}$  enthalten ist. Wie wir noch herausstellen werden, sind die Funktionen  $T^{\underline{\kappa}}$  stetig in  $\beta$  und  $\mu$  in  $V^+ \times [-m_0, m_0]$  und haben ein Randverhalten am Rand von  $\overline{V^+} \ni \beta$  wie  $(\beta^2)^{-g}$ , wobei  $m+1 \geq g \geq m+1/2$  mit  $\underline{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m)$ . Wir können also schon festhalten, daß  $\rho$  so beschaffen sein muß, daß die Funktionen  $(\beta^2)^{-g}$  für alle  $g \in \mathbb{N}$  in  $L_{1,\rho}$  enthalten sind.

Es ergeben sich bezüglich der Vervollständigung der Menge  $\{T^{\underline{\kappa}}\}$  einige technische Fragen. Betrachten wir die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \left| \omega_\rho \left( \Xi - \sum_{\underline{\kappa}} c_{\underline{\kappa}} \tau^{\underline{\kappa}}(0) \right) \right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \left| \int_{\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]} d\rho(\beta, \mu) \omega_\beta^\mu \left( \Xi - \sum_{\underline{\kappa}} c_{\underline{\kappa}} \tau^{\underline{\kappa}}(0) \right) \right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \left| \int_{\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]} d\rho(\beta, \mu) \left( \Xi(\beta, \mu) - \sum_{\underline{\kappa}} c_{\underline{\kappa}} T^{\underline{\kappa}}(\beta, \mu) \right) \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Nun ist bei normierter Dichte  $\rho$  mit Träger in einem kompakten Gebiet  $B_c \subset V^+$  und integrierbaren Funktionen  $\Xi$  aufgrund der Stetigkeit von  $T^{\underline{\kappa}}$  im Inneren von  $V^+$  die Bedingung

$$\sup_{\beta \in B_c, \mu \in [-m_0, m_0]} \left| \Xi(\beta, \mu) - \sum_{\underline{\kappa}} c_{\underline{\kappa}} T^{\underline{\kappa}}(\beta, \mu) \right| < \varepsilon$$

offenbar ein hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit der letzten Ungleichung. Obwohl wir dieses Szenario bei den kommenden Betrachtungen explizit berücksichtigen wollen, wird die im masselosen Fall benutzte Beschränkung des Trägers von  $\rho$  auf kompakte Temperaturgebiete  $B_c \subset V^+$  ja in dieser Arbeit nicht mehr notwendigerweise vorausgesetzt, um die Menge der Vergleichszustände nicht zu weit einzuschränken.

Wir möchten also neue Ansätze finden, die im Gegensatz zur aus [BOR02] bekannten Supremumshalbnorm auf kompakten Gebieten  $B_c$ , auch Temperaturbereiche in  $V^+$  berücksichtigt, die beispielsweise beliebig nahe gegen den Rand gehen. Diese Absicht führt auf natürliche Weise zu Abschätzungen der Art

$$\sigma(\beta, \mu) \left| \Xi(\beta, \mu) - \sum_{\underline{\kappa}} c_{\underline{\kappa}} T^{\underline{\kappa}}(\beta, \mu) \right| < \varepsilon f(\beta, \mu),$$

wobei  $\sigma$  eine Dichte ist, die –wie  $\rho$ – die Divergenzen der Funktionen  $T^{\underline{\kappa}}$  unterdrückt und  $f$  eine normierte, integrierbare Funktion. Es ist mit Hilfe der oben geführten Abschätzungen leicht zu sehen, daß auf diese Weise die Zulässigkeit von  $\Xi$  auf einer ganzen Klasse von Zuständen  $\omega_\rho$ ,  $\rho \leq \sigma$  etabliert wird, wobei die Relation ' $\leq$ ' im schwachen Sinn gilt. Es ist also idealerweise  $\sigma \geq \rho$ , denn dann wird gleichzeitig Zulässigkeit und die Beziehung  $\{T^{\underline{\kappa}}\} \subset L_{1,\rho}$  gesichert.

Das Prinzip  $\mathcal{S}_O$ –Thermalität gestattet es nun, alle zulässigen Observablen auf den  $\mathcal{S}_O$ –thermischen Zuständen zu betrachten und ihnen dort *dieselbe physikalische Bedeutung* zuzusprechen, die sie in den Vergleichszuständen haben, da in ihnen ja die Makroobservablen  $\tau^{\underline{\kappa}}$  dicht liegen und die  $\mathcal{S}_O$ –thermischen Zustände nach Konstruktion stetig in den  $\tau^{\underline{\kappa}}$  sind. Mit diesem Schritt findet der Transfer einer erweiterten Klasse von Begriffen, die nur im globalen Gleichgewicht eine wohldefinierte Bedeutung haben, auf sich nicht global im thermischen Gleichgewicht befindliche Zustände statt. Zu dieser erweiterten Klasse gehören idealerweise viele –im Gegensatz zu den lokalthermalen Observablen– physikalisch bedeutsame und aussagekräftige Größen wie die Phasenraumteilchendichte.

**Definition 4.1 (Zulässigkeit von thermischen Funktionen)** Sei  $R_z$  eine Menge von positiven normierten Dichten auf  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]$ . Sei  $\sigma$  eine weitere positive normierte Dichte auf  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]$  und es gelte  $c\sigma \geq \rho$  für alle Dichten  $\rho \in R_z$  mit einer Konstanten  $c > 0$ . Eine thermische Funktion  $\Xi$  heie zulässig auf der Menge von Zuständen  $\{\omega_\rho, \rho \in R_z\}$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  endlich viele Konstanten  $c_{\underline{\kappa}}$  und zugehörige, aus lokalthermalen Observablen  $\tau^{\underline{\kappa}}(0)$  hervorgehende, thermische Funktionen  $T^{\underline{\kappa}}(\beta, \mu)$  gefunden werden können, sodaß die Ungleichungen

$$\sigma(\beta, \mu) \left| \Xi(\beta, \mu) - \sum_{\underline{\kappa}} c_{\underline{\kappa}} T^{\underline{\kappa}}(\beta, \mu) \right| < \varepsilon f(\beta, \mu),$$

für alle  $\beta \in V^+$  und alle  $\mu \in [-m_0, m_0]$  gelten, wobei  $f$  eine normierte, integrierbare Funktion über  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]$  darstellt.

Diese Auffassung von Zulässigkeit umfaßt die Supremumshalbnorm, wie zum Beispiel durch die Wahl  $\sigma = f = \frac{1}{\text{Vol}(B_c)} \chi_{B_c}$  deutlich wird.

**Lemma 4.2** Sei  $R_z$  eine Menge von positiven normierten Dichten auf  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]$ . Sei  $\sigma$  eine weitere positive normierte Dichte auf  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]$ , die einen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustand generiert, in dem die lokalthermalen Observablen zulässig sind. Es gelte  $c\sigma \geq \rho$  für alle Dichten  $\rho \in R_z$  mit einer Konstanten  $c > 0$ . Ein Funktional  $\omega$ , für das  $\omega(\cdot)(x) = \omega_{\rho_x}(\cdot)$  mit der Bedingung  $\forall x \in \mathcal{O} : \rho_x \in R_z$  gilt, definiert unter diesen Voraussetzungen eine in den Testfunktionen aus  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C})$  stetige Abbildung im Sinne der Schwartzraumtopologie

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \ni f \longmapsto \omega(\phi(f)), \quad \phi(0) \in \mathcal{S}_0$$

**Beweis.** Denn sei  $\phi(0) \in \mathcal{S}_0$  und  $|f - g|_{L_1} < \delta$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} |\omega(\phi(f)) - \omega(\phi(g))| &= |\omega(\phi(f - g))| \\ &= \left| \int_{\mathcal{O}} d^4x (f(x) - g(x)) \int d\rho(\beta, \mu, x) \omega_\beta^\mu(\phi(0)) \right| \\ &< |f - g|_{L_1} c \left| \int d\sigma(\beta, \mu) \omega_\beta^\mu(\phi(0)) \right| \\ &< \delta c |\Phi|_{L_{1,\sigma}}, \end{aligned}$$

und  $c|\Phi|_{L_{1,\sigma}}$  ist sowohl endlich (nach Voraussetzung) als auch unabhängig von  $f$  und  $g$ . Die durch  $|\cdot|_{L_1}$  erzeugte Topologie ist gröber als die des Schwartzraums. Daraus folgt das Lemma.  $\square$

Es ist nun sinnvoll, zunächst eine genaue Untersuchung des Divergenzverhaltens der (im Inneren von  $V^+$  stetigen) lokalthermalen Observablen am Rand des Temperaturlichtkegels ( $\beta^2 \rightarrow 0$ ) vorzunehmen. Analoge Betrachtungen werden dann natürlich auch für den neuen Parameter  $\mu$  angestellt. Schließlich können mit Hilfe dieser gewonnenen Informationen Klassen von Zuständen und ihre zugehörigen zulässigen Observablen angegeben werden.

#### 4.1.1 Das Randverhalten der zu den lokalthermalen Observablen gehörigen Makroobservablen

**Lemma 4.3** Seien  $n, r \in \mathbb{N}$  und  $\alpha, m_0 \in \mathbb{R}^+$ . Für die Funktionen

$$\begin{aligned} \alpha &\longmapsto I(\alpha) \doteq \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2m_0q\alpha} e^{-nq} \\ \alpha &\longmapsto J(\alpha, r) \doteq \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2m_0q\alpha} e^{-nq} \end{aligned}$$

sind folgende Abschätzungen wahr:

$$\begin{aligned} |I(\alpha)| &< \frac{1}{n^2} (1 + \sqrt{2m_0\alpha}) \\ |J(\alpha, r)| &< \frac{1}{n^{3/2}} \frac{1}{\alpha^{r-1/2}} k(r) \sqrt{\frac{\pi m_0}{2}}, \end{aligned}$$

mit  $k(r) = (2r - 1)!!/2^r$ .

**Beweis.** Die Existenz des Integrals  $I(\alpha)$  und die erste Ungleichung ergeben sich folgendermaßen. Geht man mit der Beziehung

$$a, b \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 > a^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq \sqrt{a^2 + b^2} > 0$$

in das Integral  $\int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} = \int_0^\infty dq \sqrt{q + 2m_0\alpha} \sqrt{q} e^{-nq}$  hinein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} \\ &\leq \int_0^\infty dq (\sqrt{q} + \sqrt{2m_0\alpha}) \sqrt{q} e^{-nq} = \frac{1}{n^2} + \sqrt{2m_0\alpha} \frac{1}{n^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &< \frac{1}{n^2} + \sqrt{2m_0\alpha} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

mit  $a = \sqrt{q}$ ,  $b = \sqrt{2m_0\alpha}$ .

Um die Wohldefiniertheit des Ausdrucks  $J(\alpha, r)$  zu zeigen, transformiert man die zunächst die Integrationsvariable

$$\int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} = \frac{1}{n^2} \int_0^\infty dp \sqrt{p^2 + 2pnm_0\alpha} e^{-p}.$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} \sqrt{p^2 + 2pnm_0\alpha} e^{-p} = k(r) \frac{(2pm_0n)^r}{(p^2 + 2pnm_0\alpha)^{r-1/2}} e^{-p},$$

sind auf  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  stetig und von einer integralen Funktion dominiert, wie folgende Abschätzung zeigt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \int_0^\infty dp \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} \sqrt{p^2 + 2pnm_0\alpha} e^{-p} &= \frac{1}{n^2} k(r) \int_0^\infty dp \frac{(2pm_0n)^r}{(p^2 + 2pnm_0\alpha)^{r-1/2}} e^{-p} \\ &< \frac{1}{n^2} k(r) \int_0^\infty dp \frac{(2pm_0n)^r}{(2pnm_0\alpha)^{r-1/2}} e^{-p} = \frac{1}{n^{3/2}} k(r) \sqrt{2m_0} \frac{1}{\alpha^{r-1/2}} \int_0^\infty dp \sqrt{p} e^{-p} \\ &= \frac{1}{n^{3/2}} k(r) \frac{1}{\alpha^{r-1/2}} \sqrt{\frac{\pi m_0}{2}} \end{aligned}$$

Neben der Differenzierbarkeit von  $I(\alpha)$ , die benötigt wird, um  $J(\alpha, r)$  zu einem wohldefinierten Ausdruck zu machen, wurde hiermit auch die zweite Ungleichung gezeigt.  $\square$

Für die weitere Untersuchung des Randverhaltens der zu den lokalthermalen Observablen gehörigen Makroobservablen ist es sinnvoll, auf  $V^+ \times \mathbb{R}$  folgenden Ableitungsoperator einzuführen. Diese Idee geht zurück auf [BuPM].

$$\nabla^\lambda \doteq \frac{\partial}{\partial \beta_\lambda} - \frac{\beta^\lambda}{\beta^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}$$

Er hat die leicht nachzurechnenden Eigenschaften

- Für reguläre Funktionen  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\nabla^\lambda F(\beta \bar{p} \pm \sqrt{\beta^2} \mu) = \bar{p}^\lambda F'(\beta \bar{p} \pm \sqrt{\beta^2} \mu)$
- $[\nabla^\lambda, \nabla^\kappa] = 0$
- $[\nabla^\lambda f g](\beta^2, \mu) = [f(\nabla^\lambda g)](\beta^2, \mu) + [(\nabla^\lambda f) g](\beta^2, \mu)$

An dieser Stelle lassen sich schon einige Beobachtungen notieren. Sei im folgenden  $\alpha \doteq \sqrt{\beta^2}$ . Zunächst ergibt sich durch Rechnung, daß sich am Rand von  $V^+$  der Term

$$\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \prod_{\kappa_1, \dots, \kappa_s} \frac{\beta^{\kappa_i}}{\alpha} \quad \text{wie} \quad \alpha^{-(s+2r)}$$

verhält. An der Spitze von  $V^+$  ist das Verhalten sogar besser; hier soll aber nur der schlimmste Fall betrachtet werden. Des weiteren gilt

$$\nabla^\lambda I(\alpha) = \frac{\beta^\lambda}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} I(\alpha),$$

und daher erkennen wir mit Hilfe des Lemmas (4.3), daß sich

$$\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} I(\alpha) \quad \text{besser als} \quad \alpha^{1/2-2r}$$

verhält für  $r \in \mathbb{N}$  und wie 1 für  $r = 0$ . Weiterhin errechnen wir, daß

$$\nabla^\lambda e^{-n\alpha(m_0 \pm \mu)} = -m_0 \frac{\beta^\lambda}{\alpha} n e^{-n\alpha(m_0 \pm \mu)}$$

und sich daher

$$\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} e^{-n\alpha(m_0 \pm \mu)} \quad \text{wie} \quad \begin{cases} \alpha^{1-2r} & r \neq 0 \\ 1 & r = 0 \end{cases}$$

verhält. Es sei zusätzlich bemerkt, daß  $\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} e^{-n\alpha(m_0 \pm \mu)}$  maximal  $r$  Faktoren  $n$  hervorbringt.

**Satz 4.4** *Die zu einer lokalthermalen Observablen  $\tau^{\underline{\kappa}}(0)$ ,  $\underline{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ , gehörige thermische Funktion  $|T^{\underline{\kappa}}(\beta, \mu)|$  divergiert am Rand des Vorwärtslichtkegels  $\overline{V^+} \ni \beta$  wie  $(\beta^2)^{-(m+1)}$  ( $m$  gerade) bzw.  $(\beta^2)^{-(m+1/2)}$  ( $m$  ungerade und  $\mu \neq 0$ ). Gemäß Bemerkung (2) in Kapitel 3.2.2 gilt  $T^{\underline{\kappa}}(\beta, 0) = 0$ , falls  $m$  ungerade.*

**Beweis.** *Die im folgenden vorgenommenen Vertauschungen der Reihenfolge von Summenbildung, Integration und Ableitung durch  $\nabla$  werden durch das Lemma (A.1) im Kapitel A.3 des Appendix gerechtfertigt.*

*Erster Schritt – Umformung* Die zu den lokalthermalen Observablen gehörigen thermischen Funktionen haben laut Identität (3.2) die Form

$$T_{*0}^{\underline{\kappa}}(\beta, \mu) = c_m \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} (\Pi_i \vec{p}^{\kappa_i}) \left\{ (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(\beta \bar{p} - \sqrt{\beta^2} \mu)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(\beta \bar{p} + \sqrt{\beta^2} \mu)} \right\},$$

bzw.  $\mu \rightarrow -\mu$ . Mit dem Operator  $\nabla$  schreiben wir

$$\begin{aligned} T_{*0}^{\underline{\kappa}}(\beta, \mu) &= c_m \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \nabla^{\kappa_1} \dots \nabla^{\kappa_m} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta \bar{p} - \sqrt{\beta^2} \mu)} + (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta \bar{p} + \sqrt{\beta^2} \mu)} \right\} \\ &= \nabla^{\kappa_1} \dots \nabla^{\kappa_m} \left\{ c_m \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta \bar{p} - \sqrt{\beta^2} \mu)} + (-1)^m c_m \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta \bar{p} + \sqrt{\beta^2} \mu)} \right\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Das Herausziehen der Ableitungsoperatoren aus dem Integral ist auf  $(\beta, \mu) \in V^+ \times (-m_0, m_0)$ , also dem Definitionsbereich von  $T_{*0}^{\kappa}$ , nach Lemma (A.1.1) erlaubt.

Sowohl das Maß  $d^3\vec{p}/\omega_{\vec{p}}$  als auch die anderen  $\vec{p}$ -abhängigen Terme  $\beta\vec{p} \mp \sqrt{\beta^2}\mu$  sind lorentz-invariant, daher ist der vorteilhafte Wechsel ins Bezugssystem mit  $\beta = (\sqrt{\beta^2}, \vec{0})$  möglich. Die Ausführung des Winkelanteils und ein Wechsel der Integrationsvariablen  $|\vec{p}| \rightarrow s = \omega_{\vec{p}} - m_0$  bringt

$$c_m \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta\vec{p} \mp \sqrt{\beta^2}\mu)} = 4\pi c_m \int_0^{\infty} ds \sqrt{s^2 + 2sm_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n\sqrt{\beta^2}(s+m_0 \mp \mu)}.$$

Ein weiterer Wechsel  $\sqrt{\beta^2}s \rightarrow q$  ergibt

$$= \frac{4\pi c_m}{\beta^2} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\sqrt{\beta^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-nq - n\sqrt{\beta^2}(m_0 \mp \mu)}.$$

Sei

$$\begin{aligned} h_m^{\mp} : \mathbb{R}^+ \times (-m_0, m_0) &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}^0 \\ (\alpha, \mu) &\longmapsto 4\pi c_m \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-nq - n\alpha(m_0 \mp \mu)}. \end{aligned}$$

Laut Lemma (A.1.2) sind Summe und Integral vertauschbar. Somit haben wir die Funktion

$$h_m^{\mp} : (\alpha, \mu) \longmapsto 4\pi c_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0 \mp \mu)} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq}$$

vor uns und Formel (4.1) wird zu

$$T_{*0}^{\kappa}(\beta, \mu) = \nabla^{\kappa_1} \dots \nabla^{\kappa_m} \left\{ \frac{1}{\beta^2} h_m^- \left( \sqrt{\beta^2}, \mu \right) + (-1)^m \frac{1}{\beta^2} h_m^+ \left( \sqrt{\beta^2}, \mu \right) \right\},$$

die es nun zu betrachten gilt.

*Zweiter Schritt–Randverhalten* Die Strategie in diesem Schritt ist folgende. Für den Operator  $\nabla$  gilt die Produktregel. Der Term

$$\nabla^{\kappa_1} \dots \nabla^{\kappa_m} \frac{1}{\beta^2} h_m^{\mp} \left( \sqrt{\beta^2}, \mu \right)$$

ist somit eine Summe von Produkten aus Ableitungen der Funktion  $\beta \mapsto 1/\beta^2$  und Ableitungen von  $h_m^{\mp}$ . Beide werden auf ihr Randverhalten hin untersucht und wir erhalten das Ergebnis, daß die Anwendung der Ableitungsoperatoren auf die Funktion  $\beta \mapsto 1/\beta^2$  stärkere Divergenzen hervorruft als die Anwendung auf  $h_m^{\mp}$ . Diese sind leicht abzuschätzen.

Betrachte zunächst

$$\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} h_m^{\mp}(\alpha, \mu) = \nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} 4\pi c_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0 \mp \mu)} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq},$$

wobei  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ . Mit Hilfe des Lemmas (A.1.3) kommen wir zur Form

$$4\pi c_m \sum_{n=1}^{\infty} \nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \left( \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0 \mp \mu)} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} \right). \quad (4.3)$$

Nach der Produktregel ergeben sich bei der Ableitung der Summanden endlich viele Terme

$$\nabla^{\lambda_{i_1}} \dots \nabla^{\lambda_{i_s}} \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0 \mp \mu)} \nabla^{\lambda_{j_1}} \dots \nabla^{\lambda_{j_{r-s}}} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq},$$

wobei die disjunkten Mengen  $\{i_1, \dots, i_s\}$  und  $\{j_1, \dots, j_{r-s}\}$  in der Vereinigung die Menge  $\{1, \dots, r\}$  ergeben.

Die auf Seite 40 gemachten Beobachtungen ergeben, daß sich

$$\nabla^{\lambda_{j_1}} \dots \nabla^{\lambda_{j_{r-s}}} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} \begin{cases} \text{wie } 1 & \text{falls } r - s = 0 \\ \text{besser als } \alpha^{1/2-2(r-s)} & \text{sonst} \end{cases}$$

verhält und sich der Term

$$\nabla^{\lambda_{i_1}} \dots \nabla^{\lambda_{i_s}} \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0 \mp \mu)} \text{ wie } \begin{cases} \alpha^{1-2s} & s \neq 0 \\ 1 & s = 0 \end{cases}$$

verhält.

Insgesamt erhalten wir somit für (4.3) das Randverhalten  $\alpha^{1/2-2r}$ . Selbst für  $r = m$  ist maximal  $\alpha^{1/2-2m}$  erreichbar. Eine wichtige weitere Beobachtung in diesem Zusammenhang wollen wir ebenfalls festhalten: Der Grenzprozeß  $\mu \rightarrow \pm m_0$  ruft überhaupt keine Divergenzen hervor.

Wegen des sich insgesamt ergebenden Randverhaltens

$$\nabla^{\kappa_1} \dots \nabla^{\kappa_r} h_m^{\mp} \sim \begin{cases} \alpha^{1/2-2r} & r \neq 0 \\ 1 & r = 0 \end{cases}$$

stammt der am stärksten divergente Term in  $\nabla^{\kappa_1} \dots \nabla^{\kappa_m} \frac{1}{\beta^2} h_m^{\mp}$  somit von der Wirkung der Ableitungsoperatoren auf die Funktion  $\beta \mapsto 1/\beta^2$  und nicht auf  $h_m^{\mp}$ , denn

$$\nabla^{\kappa_1} \dots \nabla^{\kappa_m} \frac{1}{\beta^2} \sim \alpha^{-2-2m}.$$

Folglich ist der in der Divergenz führende Term von  $T^{\kappa}(\beta, \mu)$  für 'm gerade' gegeben durch

$$4\pi c_m \left[ \frac{\partial}{\partial \beta_{\kappa_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \beta_{\kappa_m}} \frac{1}{\beta^2} \right] \left( h_m^+ \left( \sqrt{\beta^2}, \mu \right) + h_m^- \left( \sqrt{\beta^2}, \mu \right) \right) \\ \sim \frac{\beta^{\kappa_1} \dots \beta^{\kappa_m}}{(\beta^2)^{m+1}} \left( h_m^+(0, \mu) + h_m^-(0, \mu) \right),$$

wobei  $h_m^{\pm}(0, \mu)$  nicht von  $\mu$  abhängt.

Im Fall 'm ungerade' kommen wir auf dieselbe Weise zu dem Ergebnis, daß der am stärksten divergente Term

$$4\pi c_m \left[ \frac{\partial}{\partial \beta_{\kappa_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \beta_{\kappa_m}} \frac{1}{\beta^2} \right] \left( h_m^+ \left( \sqrt{\beta^2}, \mu \right) - h_m^- \left( \sqrt{\beta^2}, \mu \right) \right)$$

ist. Für kleine  $\alpha$  (und  $\mu \neq 0$ ) geht  $h_m^+(\alpha, \mu) - h_m^-(\alpha, \mu)$  wie  $\sinh \alpha \sim \alpha$ ; dadurch verringert sich die Divergenzordnung auf  $1/(\beta^2)^{m+1/2}$ . Somit folgt die Behauptung.  $\square$

### 4.1.2 Auswahl geeigneter Topologien

An dieser Stelle sollen nun geeignete konkrete Ansätze zur Etablierung der Zulässigkeit gewisser thermischer Funktionen angegeben werden. Wir verfolgen hierbei das Hauptziel, daß diese Ansätze sich idealerweise auf ganze Klassen von interessanten  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen anwenden lassen.

**Die Supremumshalbnorm** Die Supremumshalbnorm ist nützlich im Zusammenhang mit Vergleichszuständen  $\omega_x$ , bei denen es sich um Gemische mit einer Temperatur auf kompaktem Träger  $B_x$  handelt.

Auf einer kompakten Menge  $B_c \times [-m_0, m_0] \subset V^+ \times [-m_0, m_0]$  existiert für Funktionen  $\Xi$ , die stetig auf  $V^+ \times [-m_0, m_0]$ <sup>13</sup> sind, die Supremumshalbnorm  $\|\cdot\|_{B_c}$ , definiert durch

$$\|\Xi\|_{B_c} \doteq \sup_{\beta \in B_c, \mu \in [-m_0, m_0]} |\Xi(\beta, \mu)|.$$

Damit diese Definition anwendbar ist, seien alle Mengen  $B_x$ ,  $x \in \mathcal{O}$ , der im Kontext der Supremumshalbnorm betrachteten  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände in der gemeinsamen, kompakten Menge  $B_c \subset V^+$  enthalten – hierdurch wird der mit der Supremumshalbnorm etablierte Zulässigkeitsbegriff zu einem Spezialfall des in der Definition (4.1) gegebenen, wie durch die Wahl  $\sigma = f = \frac{1}{\text{vol}(B_c)} \chi_{B_c}$  deutlich wird.

Im masselosen Fall erzeugt diese Halbnorm die 'Standardtopologie' [BOR02], [Bu03]. Der Umstand, daß in dieser massiven, bosonischen Theorie  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität auch unter Berücksichtigung von Vergleichszuständen etabliert werden soll, die Gemische mit *nicht* kompaktem Träger  $\subset V^+$  der Temperatur sind, verringert den Gebrauchswert der Supremumshalbnorm  $\|\cdot\|_{B_c}$  im Kontrast zum masselosen Fall erheblich. Sie ist daher hier nur der Vollständigkeit halber angeführt.

**Die Kegelhalbnorm** Wir führen nun auf der Menge der in  $V^+ \times [-m_0, m_0]$  stetigen Funktionen die Kegelhalbnorm  $\|\cdot\|_{V_b^+}$  ein. Sie ist, unter Benutzung von verschobenen Lichtkegeln

$$\overline{V_b^+} = \overline{\left\{ v + \left( b, \vec{0} \right), v \in V^+ \right\}}, \quad \text{mit } b > 0,$$

gegeben durch

$$\|\Xi\|_{V_b^+} \doteq \sup_{\beta \in \overline{V_b^+}, \mu \in [-m_0, m_0]} |\Xi(\beta, \mu)|.$$

Es ist leicht zu sehen, daß auf diese Weise ein Zulässigkeitsbegriff auf Zuständen mit  $\text{supp}(\rho) \subset \overline{V_b^+}$  im Sinne der Definition (4.1) etabliert werden kann.

Die Kegelhalbnorm hebt somit zwar die Kompaktheitsforderung an den Träger der Dichte  $\rho$  des betrachteten  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustands auf, erlaubt es aber dennoch nicht, daß der Träger von  $\rho$  beliebig nahe an den Rand des Vorwärtslichtkegels heranreicht. Trotzdem ist sie für erste Betrachtungen sehr nützlich, weil bekannt ist, daß –ihre Anwendbarkeit vorausgesetzt– eine interessante Klasse von thermischen Funktionen unter ihrer Maßgabe zulässig ist, unter anderem die Phasenraumteilchendichte. Die Menge dieser Funktionen heißt  $\mathcal{T}_{m_0}$ -Klasse, mehr dazu in Kapitel 4.2.

Diese Norm läßt offenbar auch eine Behandlung von  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen zu, die eine Dichte  $\rho$  mit kompaktem Träger besitzen und macht die Supremumshalbnorm somit überflüssig.

<sup>13</sup>nach Kapitel 4.1.1

**Exponentiell abfallendes  $\sigma$**  Möchten wir nun im Sinne von Definition (4.1) eine Topologie auf ganz  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]$  etablieren, so legt das polynomiale Wachstum der zu den lokalthermalen Observablen gehörigen thermischen Funktionen  $T^{\underline{k}}$  nahe,  $\sigma$  zum Rand von  $\overline{V^+}$  hin so stark fallen zu lassen, daß bei Multiplikation von  $\sigma$  mit Polynomen in  $(\beta^2)^{-1}$  noch Konvergenz auftritt. Der Parameter  $\mu$  macht in Bezug auf Divergenzen keine Probleme und so kann  $\sigma(\beta, \mu) = \sigma(\beta)$  gewählt werden.

Einige Vielzahl solcher Funktionen  $\sigma$  kann mit Hilfe der Exponentialfunktion angegeben werden. Beispiele sind

- $\sigma_1(\beta) \doteq e^{-\lambda/\beta^2}, \quad \lambda > 0$
- $\sigma_2(\beta) \doteq e^{-1/(\beta^2)^k}, \quad k > 0$
- $\sigma_{k, \beta_{\max}}(\beta_0, |\vec{\beta}|) \doteq \begin{cases} \chi_{[0, \beta_{\max}]}(\beta_0) e^{-\frac{1}{(\beta_0 - |\vec{\beta}|)^k}} & \text{falls } \beta \in V^+, \quad |\vec{\beta}| < \beta_0/2, \quad 0 < k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und ähnliche. Die Funktion  $\sigma_{k, \beta_{\max}}$  wird noch eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von  $\mathcal{S}_0$ -thermischen Zuständen des massiven bosonischen Feldes spielen.

## 4.2 Ein Raum thermischer Funktionen im massiven Fall: die $\mathcal{T}_{m_0}$ -Klasse-Funktionen

Betrachte für  $m_0 > 0$  die Klasse  $\mathcal{T}_{m_0}$  von Funktionen  $\Xi(\beta)$ , die eine Integraldarstellung in der Form

$$\Xi(\beta) = \int d^4 p \theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) \xi(\vec{p}) \frac{1}{e^{\beta p} - 1}$$

erlauben, wobei  $\xi(\vec{p})$  eine summierbare Dichte auf  $\mathbb{R}^3$  darstellt.  $\mathcal{T}_{m_0}$  ist eine Teilmenge der thermischen Funktionen.

**Lemma 4.5 [Bro04]** Sei  $\Xi(\beta) \in \mathcal{T}_{m_0}$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert für jeden Kegel  $\overline{V_b^+}$  (mit  $b > 0$ ) eine endliche Familie von lokalthermalen Observablen  $\{\tau^{\underline{k}}, \tau^{0\underline{k}}\}$  mit zugehörigen Konstanten  $c_{\underline{k}}, c_{0\underline{k}}$ , sodaß

$$\sup_{\beta \in \overline{V_b^+}} \left| \Xi(\beta) - \sum (c_{\underline{k}} T^{\underline{k}}(\beta) + c_{0\underline{k}} T^{0\underline{k}}(\beta)) \right| < \varepsilon.$$

□

Dieses Lemma läßt sich in analoger Weise für den Fall mit chemischem Potential  $|\mu| < m_0$  formulieren, wenn man folgende Form von  $\Xi$  annimmt.

$$\Xi(\beta, \mu) = \int d^4 p \theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) \xi_+(\vec{p}) \frac{1}{e^{\beta p + \mu \sqrt{\beta^2}} - 1} + \int d^4 p \theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) \xi_-(\vec{p}) \frac{1}{e^{\beta p - \mu \sqrt{\beta^2}} - 1} \quad (4.4)$$

mit summierbaren Dichten  $\xi_{\pm}(\vec{p})$ , wodurch eine analoge Abschätzung

$$\sup_{\beta \in \overline{V_b^+}, \mu \in [-m_0, m_0]} \left| \Xi(\beta, \mu) - \sum (c_{\underline{k}} T^{\underline{k}}(\beta, \mu) + c_{0\underline{k}} T^{0\underline{k}}(\beta, \mu)) \right| < \varepsilon$$

möglich wird.

$\mathcal{T}_{m_0}$ -Klasse-Funktionen sind folglich in der Kegelhalbnorm approximierbar, und somit zulässig in  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen, deren zugehörige dichtewertigen Funktionen  $\mathcal{O} \ni x \mapsto \rho_x$  in eine Teilmenge von Dichten über  $\overline{V^+} \times [-m_0, m_0]$  abbildet, die einen Träger mit endlichem Abstand zum Rand des Vorwärtslichtkegels besitzen.

Wir können uns an dieser Stelle der Frage der Zulässigkeit von Observablen in  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen, deren zugehörige Dichten  $\rho$  beliebig nahe an den Rand des Vorwärtslichtkegels gehen, nicht mehr zuwenden. Die Frage, ob und um welche Funktionen sich die Menge der lokalthermischen Funktionen unter diesen Voraussetzungen bei Abschluß in  $L_{1,\rho}$  vergrößert, muß an einer anderen Stelle geklärt werden.

### 4.3 Beispiele zulässiger thermaler Observabler und Interpretation als Makroobservablen

*Von Interesse bei der Untersuchung von Zuständen nahe dem thermischen Gleichgewicht sind Größen wie die Phasenraumteilchendichte, Entropiedichte u.ä.*

#### 4.3.1 Die Phasenraumteilchendichten $N_{\bar{p}}^{\pm}$

Das vorliegende Feld beherbergt zwei Arten von Teilchen: positiv und negativ geladene. Die Phasenraumteilchendichten beider Sorten können getrennt ermittelt werden. Im endlichen Volumen  $V$  sind sie gegeben durch

$$N_p^+ = \frac{1}{V} a^\dagger(p) a(p), \quad N_p^- = \frac{1}{V} b^\dagger(p) b(p),$$

wobei  $a^\dagger$  und  $a$  die Erzeuger und Vernichter der positiven Feldquanten und  $b^\dagger$  und  $b$  die der negativen sind. Im thermodynamischen Limes erhalten wir

$$N_{\bar{p}}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\omega_{\bar{p}} \phi_0(f_{\bar{p},n}) \phi_0(f_{\bar{p},n})^*, \quad N_{\bar{p}}^- = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\omega_{\bar{p}} \phi_0(f_{\bar{p},n})^* \phi_0(f_{\bar{p},n})$$

mit einer Testfunktion  $f_{\bar{p},n}$ , z.B.  $f_{\bar{p},n}(x) = n^{-3/2-k} g(n^{-k}x_0) h(n^{-1}\vec{x}) e^{i\bar{p}x}$ , wobei  $g$  und  $h$  den Bedingungen  $\int dx_0 g(x_0) = 1$  und  $\int d^3\vec{x} |h(\vec{x})|^2 = 1$  genügen sollen und  $k < 1$  ist. Diesen Grenzwert können wir in allen Vergleichszuständen  $\omega \in \mathcal{C}$  ausführen und erhalten

$$N_{\bar{p}}^+(\beta, \mu) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{e^{\beta\bar{p} + \mu\sqrt{\beta^2 - 1}} - 1}, \quad N_{\bar{p}}^-(\beta, \mu) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{e^{\beta\bar{p} - \mu\sqrt{\beta^2 - 1}} - 1}.$$

Die Gesamt-Phasenraumteilchendichte ist dabei die Summe der Phasenraumlichkeiten aller Teilchensorten

$$N_{\bar{p}}^{\text{ges}} = N_p^+ + N_p^-.$$

Wenden wir uns der Frage zu, ob wir hier Operatoren vor uns haben, die zu Makroobservablen äquivalent sind. Ersetzen wir die obige Wahl von  $f_{\bar{p},n}$  durch die Testfunktionenfolge  $f'_{\bar{p},n}$  so erhalten wir, den Überlegungen in Kapitel (3.3.1) folgend, in allen durch thermische

Zustände generierten Hilbertraumdarstellungen im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  die makroskopischen Feldoperatoren

$$N_{\vec{p}}^{\pm'} \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\vec{p}}^{\pm}(f'_{\vec{p},n}).$$

Weiterhin gehören die Funktionen  $N_{\vec{p}}^{\pm}$  zur verallgemeinerten  $\mathcal{T}_{m_0}$ -Klasse mit den spezifischen, summierbaren Dichten

$$\begin{aligned} N_{\vec{p}}^{\pm} : \xi_{\pm, \vec{p}}(\vec{q}) &= (2\pi)^{-3} \delta(\vec{p} - \vec{q}) 2\omega_{\vec{q}} \\ \xi_{\mp, \vec{p}}(\vec{q}) &= 0, \end{aligned}$$

und sind damit in jeder Kegelnorm zulässig. Daher handelt es sich bei den Observablen  $N_{\vec{p}}^{\pm'}$  in jeder durch eine Kegelhalbnorm induzierten Topologie, bzw. zugehörigen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen, um *zulässige Makroobservable*.

### 4.3.2 Die Hilfsfunktionen $\nabla^{\nu} L_{\vec{p}}^{\pm}$

Betrachten wir die Funktionen

$$L_{\vec{p}}^{\pm}(\beta, \mu) : V^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta \longmapsto (2\pi)^{-3} \ln \left( 1 - e^{-\beta \vec{p} \mp \sqrt{\beta^2 \mu}} \right)$$

und die daraus abgeleiteten Funktionen

$$\nabla^{\nu} L_{\vec{p}}^{\pm}(\beta, \mu) = (2\pi)^{-3} \frac{1}{e^{\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu}} - 1} \vec{p}^{\nu},$$

Konzentrieren wir uns auf letzere. Sie stammen von den Operatoren

$$\nabla^{\nu} L_{\vec{p}}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\omega_{\vec{p}} \vec{p}^{\nu} \phi_0(f_{\vec{p},n}) \phi_0(f_{\vec{p},n})^*, \quad \nabla^{\nu} L_{\vec{p}}^- = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\omega_{\vec{p}} \vec{p}^{\nu} \phi_0(f_{\vec{p},n})^* \phi_0(f_{\vec{p},n}),$$

die wie im Fall  $N_{\vec{p}}^{\pm}$  demonstriert, in den Referenzzuständen auch als Grenzwerte von Zentralfolgen angebbbar sind

$$\nabla^{\nu} L_{\vec{p}}^{\pm'} \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla^{\nu} L_{\vec{p}}^{\pm}(f'_{\vec{p},n}).$$

Zudem sind die Funktionen  $\nabla^{\nu} L_{\vec{p}}^{\pm}$  durch Einsetzen der summierbaren Dichten

$$\begin{aligned} \xi_{\pm, \vec{p}}(\vec{q}) &= (2\pi)^{-3} \delta(\vec{p} - \vec{q}) 2\omega_{\vec{q}} \vec{q}^{\nu} \\ \xi_{\mp, \vec{p}}(\vec{q}) &= 0 \end{aligned}$$

aus (4.4) zu gewinnen. Somit gehören sie zur verallgemeinerten  $\mathcal{T}_{m_0}$ -Klasse, und es handelt sich nun ebenfalls in jeder durch eine Kegelhalbnorm induzierten Topologie, bzw. zugehörigen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen, um *zulässige Makroobservable*.

### 4.3.3 Der Druck und die Entropie<sup>14</sup>

Aus der Thermostatik ist bekannt (siehe [Di78]), daß man dem thermischen Energietensor in Gleichgewichtszuständen gewisse thermische Funktionen entnehmen kann. So ist

$$E^{\lambda\nu}(\beta^2, \mu) = Q(\beta^2, \mu) e^{\lambda} e^{\nu} - P(\beta^2, \mu) g^{\lambda\nu}.$$

<sup>14</sup>Die Zulässigkeit dieser beiden Funktionen und ihre Eigenschaft, Makroobservable zu sein, bleibt zunächst eine Hypothese.

Hierbei entspricht  $P(\beta^2, \mu)$  dem Druck. Die Entropiestromdichte  $S^\lambda(\beta, \mu)$  transformiert sich wie ein Viervektor, daher gilt die Beziehung

$$S^\lambda(\beta, \mu) = S(\beta^2, \mu) e^\lambda,$$

wobei die Entropiedichte  $S(\beta^2, \mu)$  mit der Größe  $Q(\beta^2, \mu)$  über die Gleichung

$$S(\beta^2, \mu) = (\beta^2)^{1/2} Q(\beta^2, \mu)$$

verknüpft ist. Während die so definierte Größe  $S$  auf den KMS-Zuständen als Entropiedichte wohlbekannt ist, ist diese Interpretation in den  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen nicht trivial, kann aber gerechtfertigt werden, wenn die Zulässigkeit von  $S$  in der behandelten Theorie geklärt ist (siehe Appendix A in [BOR02]).

**Lemma 4.6** *Die thermischen Funktionen Druck  $P$  und Entropiedichte  $S$  sind gegeben durch die Funktionen*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times [-m_0, m_0] \ni (\beta^2, \mu) &\longmapsto S(\beta^2, \mu) \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{(\beta^2)^{1/2}} \{8F_{2,0}(\beta^2, \mu) + \beta^2 F_{2,2}(\beta^2, \mu) - 4F'_{2,1}(\beta^2, \mu)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times [-m_0, m_0] \ni (\beta^2, \mu) &\longmapsto P(\beta^2, \mu) \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{\beta^2} \{2F_{2,0}(\beta^2, \mu) - F'_{2,1}(\beta^2, \mu)\}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} F_{m,l}(\beta^2, \mu) &\doteq m_0^l \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \left\{ \text{Li}_{m-l}(e^{-\beta \vec{p} + \mu \sqrt{\beta^2}}) + (-1)^m \text{Li}_{m-l}(e^{-\beta \vec{p} - \mu \sqrt{\beta^2}}) \right\} \\ F'_{m,l}(\beta^2, \mu) &\doteq m_0^l \partial_{m_0} \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \left\{ \text{Li}_{m-l}(e^{-\beta \vec{p} + \mu \sqrt{\beta^2}}) + (-1)^m \text{Li}_{m-l}(e^{-\beta \vec{p} - \mu \sqrt{\beta^2}}) \right\}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Die zu lösende Aufgabe ist das Extrahieren der Koeffizienten der Tensoren  $e^\mu e^\lambda$  und  $g^{\mu\lambda}$  aus den Ausdrücken (3.1) bzw. (3.2) für  $\underline{k} = \mu\lambda$ .

*Erster Schritt.* Zum Erhalten einer Form von  $E^{\lambda\nu}(\beta, \mu)$ , die der obigen entspricht, betrachten wir zunächst den Ausdruck (3.2). Hieraus erhält man - Integration und die Reihenbildung sind unter der Bedingung  $\beta \vec{p} \pm \mu \sqrt{\beta^2} > 0$  vertauschbar<sup>15</sup> - die Form

$$\begin{aligned} \omega_\beta^\mu(\tau_{*0}^{\underline{k}}(x)) &= 2c_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \left\{ \frac{\sinh n\mu \sqrt{\beta^2}}{\cosh n\mu \sqrt{\beta^2}} \right\} \partial_\beta^{\underline{k}} \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} e^{-n\beta \vec{p}} \\ &= 8\pi c_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \left\{ \frac{\sinh n\mu \sqrt{\beta^2}}{\cosh n\mu \sqrt{\beta^2}} \right\} \partial_\beta^{\underline{k}} \int_0^\infty dq \frac{q}{\omega_q} e^{-n\beta_0 \omega_q} |\vec{\beta}|^{-1} \sinh(n |\vec{\beta}| q), \end{aligned}$$

<sup>15</sup> Aufgrund von dominierter Konvergenz, da die Funktionenfolgen  $\mathbb{N} \ni N \mapsto f_N^\pm$ ;  $f_N^\pm(\vec{p}) = \frac{1}{\omega_{\vec{p}}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^m} e^{-n\beta \vec{p} \mp n\mu \sqrt{\beta^2}}$  zwei Folgen integrierbarer Funktionen sind, die jeweils von den integrierbaren Funktionen  $g^\pm(\vec{p}) = \frac{1}{\omega_{\vec{p}}} \text{Li}_m(e^{-\beta \vec{p} \mp \mu \sqrt{\beta^2}})$  dominiert werden, gegen die sie (im entsprechenden Fall) überall konvergieren.

wobei die obere Wahl in der geschweiften Klammer für den Fall 'm ungerade' und die untere für den Fall 'm gerade' steht. Den Integralausdruck in der Summe kann man mit Hilfe der modifizierten Besselfunktionen  $K_s(z) = \int_0^\infty dt e^{-z \cosh t} \cosh st$  vereinfachen. Es gilt<sup>16</sup>

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty dq \frac{q}{\omega_q} e^{-n\beta_0 \omega_q} |\vec{\beta}|^{-1} \sinh(n|\vec{\beta}|q) \\
&= \frac{1}{2|\vec{\beta}|_n} \partial_{|\vec{\beta}|} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{e^{n|\vec{\beta}|q - n\beta_0 \omega_q}}{\omega_q} = \frac{1}{2|\vec{\beta}|_n} \partial_{|\vec{\beta}|} \int_{-\infty}^\infty dt e^{n\alpha m_0 (\sinh \varphi_0 \sinh t - \cosh \varphi_0 \cosh t)} \\
&= \frac{1}{2|\vec{\beta}|_n} \partial_{|\vec{\beta}|} \int_{-\infty}^\infty dt e^{-n\alpha m_0 \cosh(t-\varphi_0)} = \frac{1}{|\vec{\beta}|_n} \partial_{|\vec{\beta}|} K_0(n\alpha m_0) = -\frac{1}{n\alpha} \partial_\alpha K_0(n\alpha m_0) \\
&= \frac{m_0}{\alpha} K_1(n\alpha m_0),
\end{aligned}$$

und somit

$$\omega_\beta^\mu (\tau_{\ast_0}^\kappa(x)) = 8\pi m_0 c_m \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{m+1}} \left\{ \frac{\sinh n\mu\sqrt{\beta^2}}{\cosh n\mu\sqrt{\beta^2}} \right\} \partial_\beta^\kappa \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} K_1(n\sqrt{\beta^2}m_0) \right\}. \quad (4.5)$$

*Zweiter Schritt.* Elementare Rechnungen zeigen, daß (mit der Kürze halber gewählter Notation  $K_i = K_i(n\sqrt{\beta^2}m_0)$  usw.)

$$\begin{aligned}
& \partial_\beta^{\lambda\nu} \left\{ (\beta^2)^{-1/2} K_1 \right\} \\
&= e^\lambda e^\nu (\beta^2)^{-3/2} \left[ \left( n\sqrt{\beta^2}m_0 \right)^2 K_1'' - K_1 \right] + g^{\lambda\mu} (\beta^2)^{-3/2} \left[ \left( n\sqrt{\beta^2}m_0 \right) K_1' - K_1 \right] \\
&= \left\{ e^\lambda e^\nu (\beta^2)^{-3/2} \left[ \left( n\sqrt{\beta^2}m_0 \right)^2 K_1 + 4 \left( n\sqrt{\beta^2}m_0 \right) K_0 + 8K_1 \right] \right. \\
&\quad \left. - g^{\lambda\mu} (\beta^2)^{-3/2} \left[ \left( n\sqrt{\beta^2}m_0 \right) K_0 + 2K_1 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Diese Vorüberlegung erlaubt unter Benutzung der oben gegebenen Definitionen von  $F$  und  $F'$  zusammen mit den Identitäten

$$\begin{aligned}
& (\beta^2)^{-(k+1)/2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{k+1}} \left\{ \frac{\sinh n\mu\sqrt{\beta^2}}{\cosh n\mu\sqrt{\beta^2}} \right\} (n\sqrt{\beta^2}m_0)^l K_1(n\sqrt{\beta^2}m_0) \\
&= (\beta^2)^{-(k-1)/2} \frac{m_0^{l-1}}{8\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \left\{ \text{Li}_{k-l}(e^{-\beta\vec{p}+\mu\sqrt{\beta^2}}) + (-1)^k \text{Li}_{k-l}(e^{-\beta\vec{p}-\mu\sqrt{\beta^2}}) \right\} \\
&= (\beta^2)^{-(k-1)/2} (8\pi m_0)^{-1} F_{k,l}(\beta^2, \mu),
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
& (\beta^2)^{-(k+1)/2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{k+1}} \left\{ \frac{\sinh n\mu\sqrt{\beta^2}}{\cosh n\mu\sqrt{\beta^2}} \right\} (n\sqrt{\beta^2}m_0)^l K_0(n\sqrt{\beta^2}m_0) \\
&= -(\beta^2)^{-(k-l+1)/2} \frac{m_0^{l-1}}{8\pi} \partial_{m_0} \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \left\{ \text{Li}_{k-l}(e^{-\beta\vec{p}+\mu\sqrt{\beta^2}}) + (-1)^k \text{Li}_{k-l}(e^{-\beta\vec{p}-\mu\sqrt{\beta^2}}) \right\} \\
&= -(\beta^2)^{-(k-l+1)/2} (8\pi m_0)^{-1} F'_{k,l}(\beta^2, \mu),
\end{aligned}$$

<sup>16</sup>Mit  $q = m_0 \sinh t$  und  $\omega_q = m_0 \cosh t$  sowie  $|\vec{\beta}| = \alpha \sinh \varphi_0$  und  $\beta_0 = \alpha \cosh \varphi_0$ .

die Schreibweise

$$\begin{aligned}
 E^{\lambda\nu}(\beta, \mu) &= 8\pi m_0 c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cosh(n\mu\sqrt{\beta^2}) \partial_{\beta}^{\lambda\nu} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} K_1(n\sqrt{\beta^2} m_0) \right\} \\
 &= (4\pi^3 \beta^2)^{-1} \left\{ e^{\lambda} e^{\nu} [8F_{2,0}(\beta^2, \mu) + \beta^2 F_{2,2}(\beta^2, \mu) - 4F'_{2,1}(\beta^2, \mu)] \right. \\
 &\quad \left. - g^{\lambda\nu} [2F_{2,0}(\beta^2, \mu) - F'_{2,1}(\beta^2, \mu)] \right\}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Ein Wort zum Divergenzverhalten dieser thermischen Funktionen. Wir bemerken, daß  $F_{m,l}$  für gerades  $m$  folgende Form hat.

$$F_{m,l}(\beta^2, \mu) = \frac{1}{\beta^2} \left( h_{m-l}^+(\sqrt{\beta^2}, \mu) + h_{m-l}^-(\sqrt{\beta^2}, \mu) \right), \quad m \text{ gerade}$$

Den Erkenntnissen aus Satz (4.4) zufolge, geht die Funktion  $h_{m-l}^+(\sqrt{\beta^2}, \mu)$  für  $\sqrt{\beta^2} \rightarrow 0$  stetig in einen Grenzwert, und somit divergiert  $F_{m,l}(\beta^2, \mu)$  wie  $(\beta^2)^{-1}$  am Rand des Vorwärtslichtkegels. Eine analoge Betrachtung ergibt, daß  $F'_{m,l}(\beta^2, \mu)$  schwächer als  $(\beta^2)^{-1}$  in den Rand des Vorwärtslichtkegels geht, falls  $m$  gerade.

Folglich divergieren Entropiedichte und Druck wie  $(\beta^2)^{-3/2}$  bzw.  $(\beta^2)^{-2}$ . Zur Illustration siehe Abbildung 2 auf Seite 50. Es fällt auf, daß das chemische Potential nicht viel Einfluß besitzt.

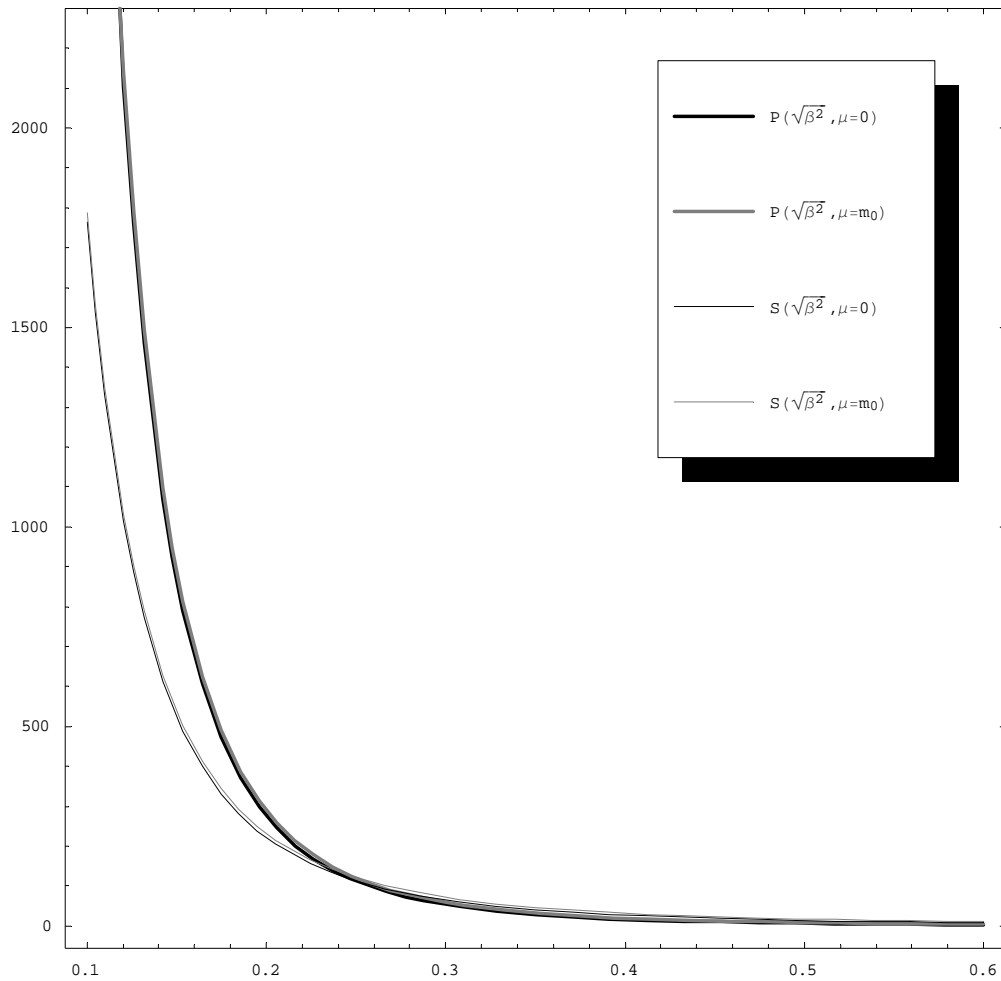


Abbildung 2: Druck und Entropiedichte

## 5 Transportgleichungen

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln sowohl die Klasse von  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen als auch die auf ihnen definierten zulässigen Observablen eingeführt wurden, kann man sich nun der Untersuchung dieser Zustände widmen. Wichtige Informationen über die  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustände sind u.a. in Transportgleichungen bzw. in der Evolution der zulässigen Observablen kodiert.

Eine interessante Frage ist, welchen Einfluß die Masse des Feldes auf die thermischen Aspekte der Theorie hat. Eine wichtige Antwort darauf liegt in den Zusammenhängen zwischen mikroskopischer und makroskopischer Dynamik; darin, wie die erste die zweite bestimmt.

Eine Theorie, die aus den Gesetzen und Dynamiken, die die Feldquanten beherrschen, die thermischen Eigenschaften von Zuständen des Feldes ableitet, stellt in gewisser Weise eine Verbindung zwischen zwei unterschiedlichen Welten dar, da Quanteneffekte auf Längen relevant

werden, die viele Größenordnungen kleiner sind als die typischerweise untersuchten thermischen Phänomene. Im Fall einer masselosen, also skaleninvarianten Theorie ist der Schritt von der einen Welt zur anderen konzeptuell nicht schwer, da das Feld aufgrund der Skaleninvarianz in allen Größenordnungen gleich aussieht. Durch Einführung einer Masse, die eine natürliche inhärente Skale darstellt ( $[Masse] = [Länge]^{-1}$ ), wird die Einsicht in diese Verbindung erst interessant.

Im masselosen bosonischen Fall führte die Feldgleichung in Verbindung mit der Lokalitätsbedingung zu folgender Evolution makroskopischer Observablen.

$$\partial_\nu \omega (\partial^\nu \Xi) (x) = 0, \quad \square \omega (\Xi) (x) = 0$$

für  $x \in \mathcal{O}$ , falls  $\omega$  ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischer Zustand und  $\Xi$  eine zulässige thermische Funktion ist.

Darüberhinaus ist es in der masselosen Theorie möglich, daß ein nichttrivialer  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischer Zustand einen Vorwärtslichtkegel ausfüllt. Ob die Dynamik des massiven Falls andere Ergebnisse liefert, scheint wissenswert.

Bei der nun folgenden Untersuchung der zulässigen thermischen Funktionen nimmt die Phasenraumteilchendichte eine Sonderstellung ein, denn unter anderem kann mit ihrer Hilfe die Boltzmann-Gleichung formuliert werden. Das Verschwinden des Stoßterms in dieser Gleichung ist *die* klassische Bedingung zur Charakterisierung lokalen Gleichgewichts, und anhand der Transportgleichungen der Phasenraumteilchendichte läßt sich zeigen, daß in den  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen die stoßfreie Boltzmann-Gleichung tatsächlich gilt. Der Umstand, daß zur Bestimmung dieser Zustände allerdings keine der klassischen Annahmen zur Natur der Teilchenbewegung wie Wechselwirkung und molekulares Chaos gemacht wurden, läßt hoffen, daß der Begriff der  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität einen unkonventionellen Ansatz zum Verständnis der Entwicklung von thermischen Zuständen und der Herkunft von Thermalisierung liefern kann.

Einen noch weitaus wichtigeren Beitrag zur Theorie der  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustände leistet die Phasenraumteilchendichte weiterhin dadurch, daß sie –wie in den Folgekapiteln ausgeführt werden wird– der Schlüssel zur Konstruktion dieser Zustände in der massiven Theorie ist. Das Wissen um ihre Eigenschaften stellt somit die Grundlage dafür dar, mit generischen Phasenraumteilchendichtefunktionen generische  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustände zu konstruieren.

## 5.1 Bestimmung der Evolutionsgleichungen der zulässigen thermalen Observablen

Die Referenzzustände, die einen  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustand charakterisieren, werden im allgemeinen über den Punkten  $x \in \mathcal{O}$  variieren. Durch diese Ortsabhängigkeit der Vergleichszustände stellt sich eine Ortsabhängigkeit der Erwartungswerte der in einem  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustand betrachteten Observablen ein. Diese raumzeitlichen Variationen wollen wir jetzt untersuchen.

Zwecks weiterer Betrachtungen rechnet man mit Hilfe der Feldgleichung aus:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda^{[x]} \partial^{[\zeta] \lambda} \phi_0(x + \zeta) \phi_0(x - \zeta) &= 0 \\ \square_x \phi_0(x + \zeta) \phi_0(x - \zeta) &= -\square_\zeta \phi_0(x + \zeta) \phi_0(x - \zeta) + 4m_0^2 \phi_0(x + \zeta) \phi_0(x - \zeta) \end{aligned}$$

i.S.v.D. Dies impliziert für eine lokalthermale Observable  $\tau^\kappa(x)$

$$\partial_\lambda^{[x]} \tau^{\lambda \kappa}(x) = 0 \tag{5.1a}$$

$$\square_x \tau^\kappa(x) = -\tau_\lambda^{\lambda \kappa}(x) + 4m_0^2 \tau^\kappa(x). \tag{5.1b}$$

**Lemma 5.1** Sei  $\omega$  ein  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischer Zustand und  $\Xi$  eine zulässige Makroobservable. Dann gilt i.S.v.D.

$$\square\omega(\Xi)(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathcal{O}.$$

Ist weiterhin  $\Xi^\nu$  eine zulässige Makroobservable, so gilt

$$\partial_\nu\omega(\Xi^\nu)(x) = 0.$$

In diese Klasse fallen beispielsweise zulässige Funktionen  $\nabla^\nu\Xi$ , die zu thermischen Funktionen  $(\beta, \mu) \mapsto \nabla^\nu\Xi(\beta, \mu)$  gehören.

**Beweis.** In den KMS-Zuständen gilt die Identität  $-T_\lambda^{\lambda\kappa} + 4m_0^2T^\kappa = 0$  aufgrund der Beziehung

$$\begin{aligned} \omega_\beta^\mu \left( -T_\lambda^{\lambda\kappa} + 4m_0^2T^\kappa \right) (x) \\ &= \omega_\beta^\mu \left( -\tau_\lambda^{\lambda\kappa}(x) + 4m_0^2\tau^\kappa(x) \right) \stackrel{1}{=} \omega_\beta^\mu(\square_x\tau^\kappa(x)) \\ &= \square_x\omega_\beta^\mu(T^\kappa)(x) \stackrel{2}{=} 0, \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen  $\stackrel{1}{=}$  aufgrund Formel (5.1b) gilt und das Gleichheitszeichen  $\stackrel{2}{=}$  in der Translationsinvarianz der KMS-Zustände begründet ist. Betrachten wir weiterhin folgende Gleichungen, nun mit einem  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustand  $\omega$  und  $x \in \mathcal{O}$ ,

$$\begin{aligned} \square\omega \left( \sum_{\text{endlich}} c_{\underline{\kappa}}T^\kappa \right) (x) &= \square\omega \left( \sum_{\text{endlich}} c_{\underline{\kappa}}\tau^\kappa(x) \right) \\ &= \omega \left( \sum_{\text{endlich}} c_{\underline{\kappa}}\square\tau^\kappa(x) \right) = \omega \left( \sum_{\text{endlich}} c_{\underline{\kappa}} \left( -\tau_\lambda^{\lambda\kappa}(x) + 4m_0^2\tau^\kappa(x) \right) \right) \\ &= \omega \left( \sum_{\text{endlich}} c_{\underline{\kappa}} \left( -T_\lambda^{\lambda\kappa} + 4m_0^2T^\kappa \right) \right) (x) = 0. \end{aligned}$$

Die Einsicht, daß für zulässige Observablen  $\square\omega(\Xi)(x) = 0$  ist, folgt jetzt aus der Stetigkeit der  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustände in Verbindung mit der Tatsache, daß die Menge der zulässigen thermischen Funktionen die Vervollständigung der Menge der aus den lokalthermalen Observablen hervorgehenden thermischen Funktionen  $\{T^\kappa\}$  in der durch  $\omega$  definierten Topologie<sup>17</sup> sind. Siehe auch Kapitel 4.

Betrachten wir nun folgende Gleichung, mit einem  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustand  $\omega$  und  $x \in \mathcal{O}$ ,

$$\partial_\nu\omega \left( \sum_{\text{endlich}} c_{\underline{\kappa}}T^{\nu\kappa} \right) (x) = \partial_\nu\omega \left( \sum_{\text{endlich}} c_{\underline{\kappa}}\tau^{\nu\kappa}(x) \right) = \omega \left( \sum_{\text{endlich}} c_{\underline{\kappa}}\partial_\nu\tau^{\nu\kappa}(x) \right) = 0,$$

die aus Formel (5.1a) abgeleitet werden kann. Die zweite Aussage des Lemmas folgt somit wiederum aus der Stetigkeit der  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustände und der Eigenschaft der zulässigen thermischen Funktionen, in der Vervollständigung der Menge  $\{T^\kappa\}$  in der durch  $\omega$  definierten Topologie zu liegen.  $\square$

<sup>17</sup>...bzw. einer noch feineren Topologie...

**Korollar 5.2** *Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß der Strom  $I^\mu(\beta, \mu)$  in  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen erhalten ist.  $\square$*

Diese Evolutionsgleichungen sind dieselben wie im masselosen Fall. Auf dieser Ebene hat sich ein Unterschied beider Theorien also nicht manifestiert. Im Gegenteil, den erhaltenen Transportgleichungen scheint eine universelle Bedeutung beizukommen.

## 5.2 Evolution der Phasenraumteilchendichte

**Satz 5.3** *Sei  $\omega$  ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischer Zustand und  $\bar{p}$  ein positiver zeitartiger Vektor auf  $H_{m_0}^+$  und seien die Phasenraumteilchendichten  $N_{\bar{p}}^\pm$  sowie die Hilfsfunktionen  $\nabla^\nu L_{\bar{p}}^\pm$  zulässig für  $\omega$ . Dann gilt i.S.v.D. für die Phasenraumteilchendichten  $N_{\bar{p}}^\pm$  der unterschiedlich geladenen Sorten von Feldquanten*

$$\bar{p}^\nu \partial_\nu \omega(N_{\bar{p}}^\pm)(x) = 0 \quad (5.2a)$$

$$\square \omega(N_{\bar{p}}^\pm)(x) = 0 \quad (5.2b)$$

für  $x \in \mathcal{O}$ .

**Beweis:** Betrachte die Funktionen (siehe Kapitel 4.3.2)

$$L_{\bar{p}}^\pm(\beta, \mu) : V^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta \longmapsto (2\pi)^{-3} \ln \left( 1 - e^{-\beta \bar{p}^\mp \sqrt{\beta^2 \mu}} \right)$$

Nun gilt  $\nabla^\nu L_{\bar{p}}^\pm(\beta, \mu) = \bar{p}^\nu N_{\bar{p}}^\pm(\beta, \mu)$  und damit auf  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen

$$\bar{p}^\nu \partial_\nu \omega(N_{\bar{p}}^\pm)(x) = \partial_\nu \omega(\bar{p}^\nu N_{\bar{p}}^\pm)(x) = \partial_\nu \omega(\nabla^\nu L_{\bar{p}}^\pm)(x) = 0.$$

Damit folgt (5.2a). Gleichung (5.2b) ist eine direkte Konsequenz von Lemma (5.1).  $\square$

Gleichung (5.2a) zeigt die Gültigkeit der stoßfreien Boltzmann-Gleichung in den  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen mit zulässigen Größen  $N_{\bar{p}}^\pm$  und  $\nabla^\nu L_{\bar{p}}^\pm$ , die somit übereinstimmend auch nach diesem klassischen Kriterium als lokal thermische Zustände identifiziert werden.

## 5.3 Rekonstruierbarkeit von lokalen Gleichgewichtsfunktionalen aus der Phasenraumteilchendichte

In den vorangegangenen Kapiteln waren die Phasenraumteilchendichten  $N_{\bar{p}}^\pm$  auf  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen untersucht worden, und wir haben gesehen, daß die Phasenraumteilchendichten, Zulässigkeit von  $N_{\bar{p}}^\pm$  und  $\nabla^\nu L_{\bar{p}}^\pm$  vorausgesetzt, den Differentialgleichungen (5.2a) und (5.2b) genügen. Eine im weiteren Verlauf dieses Kapitels bewiesene, interessante und für die Konstruktion von  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen sehr wichtige Beobachtung ist, daß die Phasenraumteilchendichteverteilungen  $x \longmapsto \omega(N_{\bar{p}}^\pm)(x)$  und das Maß  $\rho$  mit  $\omega(\cdot)(x) = \int d\rho(\beta, \mu, x) \omega_\beta^\mu(\cdot)$  dieselbe Information über einen  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustand  $\omega$  liefern.  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustände (bzw. ihre Maße) können somit aus den Erwartungswerten von  $N_{\bar{p}}^\pm$  rekonstruiert, bzw. *ansatzweise* aus generischen Funktionen  $\overline{N_{\bar{p}}^\pm} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^{+,0}$ , die obigen Differentialgleichungen gehorchen, *konstruiert* werden.

**Lemma 5.4** Gegeben seien zwei Funktionen  $\overline{N_{\vec{p}}^{\pm}}$

$$\mathbb{R}^4 \times H_{m_0}^+ \supset \mathcal{O} \times H_{m_0}^+ \ni (x, \vec{p}) \mapsto \overline{N_{\vec{p}}^{\pm}}(x) \in \mathbb{R}^{+,0},$$

schwach integrierbar in  $x$  und  $\vec{p}$ , mit den Eigenschaften (i.S.v.D.)

$$\vec{p}^\nu \partial_\nu \overline{N_{\vec{p}}^{\pm}}(x) = 0, \quad \square \overline{N_{\vec{p}}^{\pm}}(x) = 0. \quad (5.3)$$

Dann wird durch

$$\begin{aligned} & \varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) \\ &= \omega_\infty(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) + \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left[ e^{-i\vec{p}(x-y)} \overline{N_{\vec{p}}^+} \left( \frac{x+y}{2} \right) + e^{i\vec{p}(x-y)} \overline{N_{\vec{p}}^-} \left( \frac{x+y}{2} \right) \right] \\ & \varphi(\phi_0(x) \phi_0^*(y)) \\ &= \omega_\infty(\phi_0(x) \phi_0^*(y)) + \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left[ e^{-i\vec{p}(x-y)} \overline{N_{\vec{p}}^-} \left( \frac{x+y}{2} \right) + e^{i\vec{p}(x-y)} \overline{N_{\vec{p}}^+} \left( \frac{x+y}{2} \right) \right] \\ & \varphi(\phi_0(x) \phi_0(y)) = \varphi(\phi_0^*(x) \phi_0^*(y)) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

über  $\mathcal{O}$  i.S.v.D. die Zweipunktfunktion eines quasifreien eichinvarianten Funktionals definiert, mit den Eigenschaften

1.  $\varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y) - \phi_0(y) \phi_0^*(x)) = \sigma(x-y)$
2.  $(\square_x + m_0^2) \varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) = 0 = (\square_x + m_0^2) \varphi(\phi_0(x) \phi_0^*(y))$

**Beweis:** zur Eichinvarianz Betrachten wir die Auswertung des Funktionals  $\varphi$

$$\varphi(\phi(f)^* \phi(g)) = \int d^4 x \int d^4 y \varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) \bar{f}(x) g(y).$$

Die Eichoperationen haben die Wirkung  $\phi(f)^* \mapsto \gamma_\lambda[\phi(f)^*] = e^{-i\lambda} \phi(f)^* = \phi(e^{i\lambda} f)^*$ , bzw.  $\phi(g) \mapsto \gamma_\lambda[\phi(g)] = e^{i\lambda} \phi(g) = \phi(e^{i\lambda} g)$ , also ergibt sich durch Einsetzen unmittelbar

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_\lambda[\phi(f)^* \phi(g)]) &= \int d^4 x \int d^4 y \varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) \overline{e^{i\lambda} f}(x) e^{i\lambda} g(y) \\ &= \int d^4 x \int d^4 y \varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) \bar{f}(x) g(y) = \varphi(\phi(f)^* \phi(g)). \end{aligned}$$

Zu den weiteren Punkten

1. Der zweite Summand in (5.4) ist invariant unter  $\phi_0^*(x) \phi_0(y) \mapsto \phi_0(y) \phi_0^*(x)$ , er verschwindet also, wenn wir  $\varphi(\phi_0(y) \phi_0^*(x))$  von  $\varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y))$  abziehen. Der bei dieser Subtraktion verbleibende Restterm entspricht dem des Vakuumzustands und erfüllt die geforderte Relation<sup>18</sup>.
2. Es gilt  $(\square_x + m_0^2) \omega_\infty(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) = 0$ . Weiterhin rechnen wir i.S.v.D. mit dem Restterm

$$\begin{aligned} & (\square_x + m_0^2) \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left[ e^{-i\vec{p}(x-y)} \overline{N_{\vec{p}}^+} \left( \frac{x+y}{2} \right) + e^{i\vec{p}(x-y)} \overline{N_{\vec{p}}^-} \left( \frac{x+y}{2} \right) \right] \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left[ (\square_x + m_0^2) e^{-i\vec{p}(x-y)} \overline{N_{\vec{p}}^+} \left( \frac{x+y}{2} \right) \right] + \left[ (\square_x + m_0^2) e^{i\vec{p}(x-y)} \overline{N_{\vec{p}}^-} \left( \frac{x+y}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

<sup>18</sup>bekanntes Resultat

Es ist, ebenfalls i.S.v.D.,

$$\begin{aligned}
& (\square_x + m_0^2) e^{-i\bar{p}x} \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x/2) \\
&= \left(-ip^\lambda\right) (-ip_\lambda) e^{-i\bar{p}x} \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x/2) + \underbrace{2e^{-i\bar{p}x} \left(-ip^\lambda\right) \partial_\lambda \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x/2)}_0 + e^{-i\bar{p}x} (\square_x + m_0^2) \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x/2) \\
&= -m_0^2 e^{-i\bar{p}x} \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x/2) + m_0^2 e^{-i\bar{p}x} \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x/2) + \underbrace{e^{-i\bar{p}x} \square_x \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x/2)}_0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analog der zweite Term. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

### Bemerkungen:

1. Im folgenden werden wir noch zeigen, daß die hier eingesetzten Funktionen  $\overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x)$  den Erwartungswerten der Phasenraumteilchendichten  $N_{\bar{p}}^{\pm}$  am Punkt  $x$  entsprechen. Die Forderung, daß  $\overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}$  nach  $\mathbb{R}^{+,0}$  abbildet, ist somit für die Interpretierbarkeit von  $N_{\bar{p}}^{\pm}$  als Phasenraumteilchendichte notwendig.
2. Dennoch bemerken wir, daß die Bedingungen

$$\bar{p}^\nu \partial_\nu \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x) = 0, \quad \square \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x) = 0$$

an  $\overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}$  nicht nur aus der in Satz (5.3) gewonnenen Einsicht entspringen, daß die Phasenraumteilchendichtenverteilungen  $N_{\bar{p}}^{\pm}(x)$  in  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen unter Voraussetzung der Zulässigkeit von  $N_{\bar{p}}^{\pm}$  und  $\nabla^\nu L_{\bar{p}}^{\pm}$  diesen Differentialgleichungen tatsächlich genügen, sondern sie stellen insbesondere eine hinreichende Bedingung dafür dar, daß die nach Formel (5.4) konstruierte Zweipunktfunktion die Feldgleichung

$$(\square_x + m_0^2) \omega(\phi^*(x) \phi(y)) = 0$$

i.S.v.D. erfüllt.

Der Ansatz aus Lemma (5.4) führt zunächst nur zu einem Funktional über  $\mathcal{F}$  – ob es auch ein Zustand (über z.B. einem Gebiet  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ ) ist, hängt davon ab, ob es zusätzlich die Positivitätsbedingung

$$0 \leq \int d^4x \int d^4y \varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) \overline{f(x)} f(y) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$$

erfüllt. Auch bleibt selbst im Fall mit Positivität a priori noch unklar, ob der entstandene Zustand  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermisch ist, also ob es einen entsprechenden Vergleichszustand, respektive eine zugehörige positive Dichte  $\rho$  gibt. Beide Bedingungen müssen bei der Konstruktion im Einzelfall geklärt werden.

Schließlich stellt sich die Frage, ob die suggestive Bezeichnung  $\overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}$  gerechtfertigt ist, also das so konstruierte Funktional  $\varphi$  auch –angenommen es handelt sich um einen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustand, in dem die Observablen  $N_{\bar{p}}^{\pm}$  zulässig sind– unter gegebener Konstruktionsvorschrift (5.4) die Erwartungswerte  $\varphi(N_{\bar{p}}^{\pm})(x) = \overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x)$  der Phasenraumteilchendichte zurückliefert.

**Lemma 5.5** Sei durch die Konstruktion (5.4) die Zweipunktfunktion eines  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustands  $\varphi$  i.S.v.D. gegeben, in dem die Observablen  $N_{\vec{p}}^\pm$  zulässig sind. Die bei dieser Konstruktion eingesetzten Funktionen  $\overline{N_{\vec{p}}^\pm}$  entsprechen dann den Erwartungswerten der Phasenraumteilchendichten  $\varphi(N_{\vec{p}}^\pm)(x)$  in diesem Zustand.

**Beweis:** Für  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustände  $\varphi$  gibt es ein positives, normiertes Maß  $\rho$  auf  $V^+ \times [-m_0, m_0] \times \mathcal{O}$ , sodaß gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) &= \int d\rho\left(\beta, \mu, \frac{x+y}{2}\right) \omega_\beta^\mu(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) \\ &= \int d\rho\left(\beta, \mu, \frac{x+y}{2}\right) \left[ \omega_\beta^\mu(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) - \omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) \right] \\ &\quad + \int d\rho\left(\beta, \mu, \frac{x+y}{2}\right) \omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y)). \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist gleich  $\omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y))$ . Somit impliziert die obige Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi(\phi_0^*(x)\phi_0(y) - \omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y))\hat{1}) \\ = \int d\rho\left(\beta, \mu, \frac{x+y}{2}\right) \left[ \omega_\beta^\mu(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) - \omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) \right], \end{aligned}$$

und mit der von Identität (3.1) bekannten Form von

$$\omega_\beta^\mu(\phi_0^*(x)\phi_0(y) - \omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y))\hat{1})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi(\phi_0^*(x)\phi_0(y) - \omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y))\hat{1}) \\ = \int d\rho\left(\beta, \mu, \frac{x+y}{2}\right) (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left[ \frac{e^{-i\vec{p}(x-y)}}{e^{\beta\vec{p}+\mu\sqrt{\beta^2-1}} - 1} + \frac{e^{i\vec{p}(x-y)}}{e^{\beta\vec{p}-\mu\sqrt{\beta^2-1}} - 1} \right] \\ = \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left[ e^{-i\vec{p}(x-y)} \underbrace{\int d\rho\left(\beta, \mu, \frac{x+y}{2}\right) \frac{(2\pi)^{-3}}{e^{\beta\vec{p}+\mu\sqrt{\beta^2-1}}}}_{\varphi(N_{\vec{p}}^+)(\frac{x+y}{2})} \right. \\ \left. + e^{i\vec{p}(x-y)} \underbrace{\int d\rho\left(\beta, \mu, \frac{x+y}{2}\right) \frac{(2\pi)^{-3}}{e^{\beta\vec{p}-\mu\sqrt{\beta^2-1}}}}_{\varphi(N_{\vec{p}}^-)(\frac{x+y}{2})} \right] \end{aligned}$$

unter Anwendung des Satzes von Fubini, da die Funktionen  $e^{\mp i\vec{p}(x-y)} (e^{\beta\vec{p}\pm\mu\sqrt{\beta^2-1}} - 1)^{-1}$  in den Parametern  $\beta, \mu$  und  $\vec{p}$  Lebesgue-integrabel sind. In dieser Darstellung sind die Funktionen  $\varphi(N_{\vec{p}}^\pm)(\frac{x+y}{2})$  eindeutig bestimmt bis auf Abänderungen auf Nullmengen. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Offenbar ist die Konstruktionsvorschrift in sich schlüssig; aus den ggf. zulässigen Phasenraumteilchendichten eines  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustands  $\omega$  läßt sich derselbe Zustand  $\omega$  wieder

zurückgewinnen. Auch erhalten wir KMS-Zustände, falls  $d\rho$  als ein von  $(x + y)$  unabhängiges  $\delta$ -Maß in  $\beta$  und  $\mu$  gewählt, und somit ein reines Planckspektrum als Phasenraumteilchendichte verwandt wird.

**Zusammenfassung** Es ist über die Konstruktionsvorschrift (5.4) möglich, aus gegebenen beliebigen Funktionen  $\overline{N_{\vec{p}}^{\pm}}$ , die den Bedingungen (5.3) genügen, Funktionale zu konstruieren, die –wenn sie der Positivitätsbedingung gehorchen– Zweipunktfunktionen eines Zustands auf der lokalen Feldalgebra  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  sind. Diese Zweipunktfunktionen definieren über die bekannte Relation (2.7) quasifreie Zustände auf  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ , die, wenn sie  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermisch sind, die ggf. zulässigen Größen  $N_{\vec{p}}^{\pm}$  als Phasenraumteilchendichten

$$\varphi(N_{\vec{p}}^{\pm})(x) = \overline{N_{\vec{p}}^{\pm}}(x)$$

besitzen.

## 5.4 Gebiete lokalen Gleichgewichts

Wer über vier Dinge nachgrübelt,  
der wäre besser nie geboren:  
was oben, was unten,  
was vorher und was nachher ist.

(Talmud, Chagigah 2.1)

Nichttriviale<sup>19</sup>  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände des massiven Felds können nicht auf dem ganzen  $\mathbb{R}^4$  definiert sein. Präziser formuliert, kann ein Gebiet  $\mathcal{O}$  nichttrivialen lokalen Gleichgewichts noch nicht einmal Kegel  $K_{+, \lambda} = \{x, x \in \mathbb{R}^4, \vec{x}^2 < \lambda x_0^2, x_0 > 0, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ , bzw.  $K_{-, \lambda} = \{x, x \in \mathbb{R}^4, \vec{x}^2 < \lambda x_0^2, x_0 < 0, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$  enthalten, also auch keine Vorwärts- bzw. Rückwärtslichtkegel. Hier zeigt sich ein erster wesentlicher Unterschied zwischen der masselosen bosonischen und der massiven bosonischen Theorie. Der Verdacht, daß die Gebiete  $\mathcal{O}$  in der massiven Theorie sämtlich in kompakten Mengen enthalten sind, konnte allerdings nicht bestätigt werden – es ist ein Gegenbeispiel vorhanden, das im Kapitel 6 konstruiert wird.

Seien im folgenden die Phasenraumteilchendichten  $N_{\vec{p}}^{\pm}$  als zulässig angenommen. Darüberhinaus ist es sinnvoll, statt eines  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustands  $\omega$  den ihm entsprechenden regularisierten Zustand  $\omega_f \doteq \int d^4y \omega \circ \alpha_y$ , mit  $f \in \mathcal{C}_0^{\infty}$  und  $\int d^4y f(y) = 1$  zu betrachten. Da  $\mathcal{C}$  eine konvexe Menge ist, handelt es sich ebenfalls um einen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_f}$ -thermischen Zustand auf einer –entsprechend  $f$ – etwas verkleinerten Menge  $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_{\omega}$ . Nach Voraussetzung in Lemma (5.4) ist  $\omega(N_{\vec{p}}^{\pm})(x)$  eine Distribution und somit  $\omega_f(N_{\vec{p}}^{\pm})(x)$  eine  $\mathcal{C}^{\infty}$ -Funktion in  $x \in \mathcal{O}_f$ .

**Lemma 5.6** Sei  $\vec{p} = (p, 0, 0)$ . Dann ist  $\overline{N_{f, \vec{p}}^{\pm}}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \omega_f(N_{\vec{p}}^{\pm})(x)$  nur von  $vx_0 - x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  abhängig, wobei  $v = p/\omega_p$ .

**Beweis.** Die ist eine unmittelbare Folge der Boltzmann-Gleichung (5.2a). □

<sup>19</sup>Triviale  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände sind solche, die global im Gleichgewicht sind, also KMS-Zustände und deren Gemische.

**Lemma 5.7** Sei  $\vec{p} = (p, 0, 0)$ . Dann ist  $\overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}$  eine harmonische Funktion i.S.v.D. in den Variablen  $y_1 = x_1/\sqrt{1-v^2}$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_3 = x_3$ .

**Beweis.** Aus der Boltzmann-Gleichung (5.2a) folgt  $\partial_0^2 \overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}(x) = v^2 \partial_1^2 \overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}(x)$ . Somit impliziert die Wellengleichung (5.2b)

$$\begin{aligned} \square \overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}(x) = 0 &\Leftrightarrow (\partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2) \overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \left( \underbrace{(v^2 - 1)}_{\neq 0} \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 \right) \overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}(x) = 0, \end{aligned}$$

wobei  $v^2 < 1$  eine Eigenschaft des massiven Feldes ist. Hieraus folgt das Lemma.  $\square$

Zusammengenommen ergibt sich, daß die auf dem Gebiet  $\mathcal{O}_f \subset \mathbb{R}^4$  definierten Funktionen  $\overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}$  gewissen Funktionen  $\overline{n_{f,\vec{p}}^\pm}$  entsprechen, die auf der Menge  $\{\vec{z} \in \mathbb{R}^3, \vec{z} = (vx_0 - y_1\sqrt{1-v^2}, y_2, y_3) = (vx_0 - x_1, x_2, x_3), x \in \mathcal{O}_f\}$  definiert sind. Diese haben die Eigenschaften i.S.v.D.

$$\overline{n_{f,\vec{p}}^\pm}(vx_0 - y_1\sqrt{1-v^2}, y_2, y_3) = \overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}(x_0, \vec{y}) \quad (5.5)$$

und

$$\Delta_{\vec{y}} \overline{n_{f,\vec{p}}^\pm}(vx_0 - y_1\sqrt{1-v^2}, y_2, y_3) = 0. \quad (5.6)$$

Mit Hilfe dieser Erkenntnisse folgern wir den Satz

**Satz 5.8** Ein Gebiet  $\mathcal{O}_\omega$ , auf dem ein nichttrivialer lokaler Gleichgewichtszustand  $\omega$   $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_\omega}$ -thermisch ist, kann keinen Kegel  $K_{+,\lambda}$  oder  $K_{-,\lambda}$  enthalten.

**Beweis.** Wir führen die Annahme, daß ein solcher Kegel enthalten ist, zum Widerspruch.

Betrachten wir die  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen  $x \mapsto \overline{N_{f,\vec{p}}^\pm}(x) = \omega_f(N_{\vec{p}}^\pm)(x)$  auf dem Gebiet  $\mathcal{O}_f$ . Wählen wir  $\vec{v} = (0, 0, 0)$ , und betrachten wir die zu dieser Geschwindigkeit gehörige Phasenraumteilchendichte  $\overline{N_0}$  (generisch für  $\overline{N_{f,(m_0,\vec{0})}^+}$  bzw.  $\overline{N_{f,(m_0,\vec{0})}^-}$ ) und die entsprechende Funktion  $\overline{n_0}$ .

Gemäß (5.5) und (5.6) gilt für  $x \in \mathcal{O}_f$

$$x \mapsto \overline{n_0}(-x_1, x_2, x_3) \quad \text{und} \quad \Delta_{\vec{x}} \overline{n_0}(-x_1, x_2, x_3) = \Delta_{\vec{x}} \overline{n_0}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Insbesondere fehlt jede  $x_0$ -Abhängigkeit. Da es für jedes  $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$  ein  $x_0$  gibt, sodaß  $(x_0, \vec{y})$  in  $K_{+,\lambda}$  bzw. in  $K_{-,\lambda}$  enthalten ist, folgern wir, daß  $\overline{n_0}$  eine auf dem gesamten  $\mathbb{R}^3$  definierte Funktion ist.

Die Funktion  $\overline{n_0}$  ist also eine auf dem ganzen  $\mathbb{R}^3$  definierte harmonische Funktion. Das Liouville-Theorem für harmonische Funktionen sagt aus, daß eine harmonische Funktion  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{x} \mapsto \overline{n_0}(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ , die (nach unten) beschränkt ist, eine auf ganz  $\mathbb{R}^3$  konstante Funktion ist, siehe hierzu [FL03]. Dies ist der triviale Fall, bei dem der  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustand  $\omega$  einem KMS-Zustand bzw. einem Gemisch entspricht. Diesen wollen wir nicht betrachten.

Also sei  $\overline{n_0}$  nach unten nicht beschränkt und wir finden einen Vektor  $\vec{y}^- \in \mathbb{R}^3$  mit  $\overline{n_0}(\vec{y}^-) < 0$ . Wie schon oben diskutiert wurde, ist es möglich, zu  $\vec{y}^-$  einen Wert  $x_0$  zu finden, sodaß  $(x_0, \vec{y}^-) \in \mathcal{O}_f$ . An diesem Punkt  $(x_0, \vec{y}^-)$  ist also auch  $\overline{N_0}$  definiert und es gilt  $\overline{N_0}(x_0, \vec{y}^-) < 0$ .

Dies ist mit der Interpretation dieser Größe als Phasenraumteilchendichte nicht vereinbar. Außerdem impliziert es auch, daß die Dichte  $\rho(\beta, \mu, x)$  negative Werte annimmt, wie wir an der Darstellung

$$\overline{N_{\bar{p}}^{\pm}}(x) = \int d\rho(\beta, \mu, x) \frac{(2\pi)^{-3}}{\underbrace{e^{\beta\bar{p} \pm \mu\sqrt{\beta^2 - 1}}}_{>0}}$$

bemerkten. Dies ist ein noch eklatanterer Widerspruch zu den Grundannahmen der Theorie, da er von der Interpretation der Observablen  $\overline{N_{\bar{p}}}$  unabhängig ist. Somit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Abschließend noch ein kleiner Satz zum Verlauf der Phasenraumteilchendichten in  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen.

**Satz 5.9** *Die Phasenraumteilchendichte in einem  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustand nimmt auf dem Inneren von  $\mathcal{O}$  keine Extrema an.*

**Beweis.** Betrachten wir die Phasenraumteilchendichte in regularisierten Zuständen  $\omega_f$  (siehe Kapitel 5.4)

$$\overline{N_{f,\bar{p}}^{\pm}}(x) = \omega_f(N_{\bar{p}}^{\pm})(x)$$

Wir können für jedes offene Gebiet  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$  ein  $f$  finden, sodaß  $\omega_f$   $\mathcal{S}_{\mathcal{O}'}$ -thermisch ist, da der Träger von  $f$  beliebig klein gewählt werden kann. Es handelt sich bei den Funktionen  $\overline{N_{f,\bar{p}}^{\pm}}$  um  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{O}')$ -Funktionen, und da sie darüberhinaus gemäß Lemma (5.7) harmonische Funktionen in den Raumrichtungen sind, nehmen sie ihre Extrema auf den Randpunkten der Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{O}'$  an.

Hat nun  $\omega(N_{\bar{p}}^{\pm})(\cdot)$  ein Extremum im Inneren von  $\mathcal{O}$ , so ist es möglich, Funktionen  $f$  für die Regularisierung von  $\omega$  zu finden, sodaß a)  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$  und b) sodaß  $\overline{N_{f,\bar{p}}^{\pm}}$  ein Extremum im Inneren von  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$  besitzt, wie eine einfache Überlegung ergibt. Da wir diese Möglichkeit ausgeschlossen hatten, kann  $\omega(N_{\bar{p}}^{\pm})(\cdot)$  kein Extremum im Inneren von  $\mathcal{O}$  haben.  $\square$

## 6 Konstruktion von Beispielen nichttrivialer lokaler Gleichgewichtszustände

Ab nun werden alle Energien und inverse Längen in Einheiten der Masse  $m_0$  gemessen. Somit gilt natürlich auch  $m_0 = 1$ .

Bevor nichttriviale lokale Gleichgewichtszustände konstruiert werden, ist es sinnvoll, noch eine allgemeine Betrachtung anzustellen.

### 6.1 Zur Frage, ob über $\mathcal{F}$ nichttriviale $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände mit scharfer Temperatur und scharfem chemischen Potential existieren (No Go-Theorem)

Im masselosen Fall existieren  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände, die nicht identisch mit KMS-Zuständen sind, denen aber trotzdem an jedem Raumzeitpunkt ihres Definitionsbereichs eine eindeutige Temperatur zugeordnet werden kann. Für das massive Feld gibt es solche Zustände nicht, wie der folgende Satz (6.2) zeigt. Es kann somit nur noch eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden, einen Wert des Temperaturvektors zu messen.

**Lemma 6.1** Sei  $\vec{p} = (\pm\sqrt{m_0^2 + \vec{p}^2}, \vec{p})$ ,  $m_0 > 0$ . Dann gilt

$$\left( \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^3 : \bar{p}_\mu \bar{p}_\lambda A^{\mu\lambda} = 0 \right) \Leftrightarrow \left( A^{\mu\lambda} = -A^{\lambda\mu} \right).$$

**Beweis:** Es nehmen im folgenden griechische Indizes Werte von 0 bis 3 an und lateinische nur Werte von 1 bis 3.

Es ist, mit Einsteinscher Summenkonvention,  $0 = \bar{p}_\mu \bar{p}_\lambda A^{\mu\lambda} = \bar{p}_0^2 A^{00} + \bar{p}_i \bar{p}_k A^{ik} + \bar{p}_0 \bar{p}_i (A^{0i} + A^{i0})$ . Durch den Übergang  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  ergibt sich  $\forall p_i : p_i (A^{0i} + A^{i0}) = 0$  und somit  $A^{0i} = -A^{i0}$ . Setzt man  $\vec{p} = 0$ , so erhält man  $A^{00} = 0$  und damit  $\bar{p}_i \bar{p}_k A^{ik} = 0$ . Setzt man für feste  $i, k$  die Werte  $\bar{p}_i = \bar{p}_k = 1$  und alle anderen gleich Null, so erhält man  $A^{ik} = -A^{ki}$ .  $\square$

**Satz 6.2** Wie stets gelte a priori die einschränkende Bedingung  $|\mu| < m_0$ . Dann gilt:  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände des quasifreien massiven bosonischen Felds mit chemischem Potential, die in jedem Punkt des offenen Gebietes  $\mathcal{O}$  scharfe Temperatur und scharfes chemisches Potential haben, wobei Temperatur und chemisches Potential stetige reelle Funktionen des Ortes sind, haben räumlich konstante Temperatur und räumlich konstantes chemisches Potential in diesem Gebiet.

**Beweis.** Die generische Zweipunktfunktion eines  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustands mit räumlich scharfer Temperatur und scharfem chemischen Potential besitzt, im Sinne von Distributionen, die Darstellung

$$\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(x)\phi(y)) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) \frac{e^{-ip(\frac{x-y}{2})}}{1 - e^{-\beta(\frac{x+y}{2})p + \mu(\frac{x+y}{2})\sqrt{\beta^2(\frac{x+y}{2})}}}. \quad (6.1)$$

Ein Wort zu den Voraussetzungen. Es stellt sich zunächst die Frage, ob die Stetigkeit von  $\beta(\cdot)$  und  $\mu(\cdot)$  auf  $\mathcal{O}$  und die einschränkende Bedingung  $|\mu| < m_0$  gut genug gewählt sind,

damit durch (6.1) ein Funktional auf  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  definiert wird. Auf die Positivität und Stetigkeit dieses Funktionals, die Voraussetzung ist, damit (6.1) sogar einen Zustand definiert, wird in diesem ersten Abschnitt nicht mehr eingegangen – sie sind für die nächsten Schritte entbehrlich –, die Linearität ist unmittelbar klar.

Wir wollen zunächst die Frage nach der Wohldefiniertheit der Voraussetzungen noch präzisieren. Durch eine Umbenennung der Variablen  $v = \frac{x-y}{2}$ ,  $w = \frac{x+y}{2}$  erhalten wir

$$\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(w+v)\phi(w-v)) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta(w)p + \mu(w)\sqrt{\beta^2(w)}}} e^{-ipv} = t(w, v).$$

Sehen wir uns die folgende Auswertung der Distribution  $t$  an.

$$\begin{aligned} & T_{\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}}[f, g] \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) \left[ \int d^4w \int d^4v \left(1 - e^{-\beta(w)p + \mu(w)\sqrt{\beta^2(w)}}\right)^{-1} e^{-ipv} f(v) g(w) \right] \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) \left[ \int d^4w \left(1 - e^{-\beta(w)p + \mu(w)\sqrt{\beta^2(w)}}\right)^{-1} g(w) \right] \tilde{f}(p). \end{aligned}$$

Die Frage, ob mit  $T_{\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}}$  ein Zustand der Feldalgebra definiert werden kann, reduziert sich also darauf, ob die Funktion  $m$ ,

$$H_{m_0}^+ \ni p \longmapsto m_g(p) = \int d^4w \left(1 - e^{-\beta(w)p + \mu(w)\sqrt{\beta^2(w)}}\right)^{-1} g(w)$$

mit generischem  $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C})$ , stetigen Funktionen  $\beta(\cdot)$  und  $\mu(\cdot)$  und der einschränkenden Bedingung  $|\mu| < m_0$  ein Multiplikator des Maßes  $d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)$  ist.

Zunächst ist zu bemerken, daß der Träger von  $g$  in einer kompakten Menge  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  enthalten ist. Weiterhin ist für alle  $w \in \mathcal{K}$  die Auswertung  $\beta(w) \in V^+$  und auf dem Träger des Maßes  $d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)$  ist auch  $p \in H_{m_0}^+ \subset V^+$ . Daher gilt die Ungleichung

$$(\beta(w)p)^2 > \beta(w)^2 p^2 = \beta(w)^2 m_0^2 \geq 0.$$

Da  $\mu(\cdot)$  eine auf dem ganzen offenen Gebiet  $\mathcal{O}$  definierte, stetige Funktion ist, haben wir auf dem Kompaktum  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  eine Abschätzung  $|\mu(w)| \leq \kappa_0 < m_0$  mit einer Konstanten  $\kappa_0 > 0$ . Nimmt man obige Ungleichung hinzu, folgt

$$\left| -\beta(w)p + \mu(w)\sqrt{\beta^2(w)} \right| > \sqrt{\beta^2(w)} |\mu(w) - m_0| \geq |\kappa_0 - m_0| > 0$$

für alle  $p \in H_{m_0}^+$  und alle  $w \in \mathcal{K}$ . Also ist die Funktion

$$H_{m_0}^+ \times \mathcal{K} \ni (p, w) \longmapsto l(p, w) \doteq \left(1 - e^{-\beta(w)p + \mu(w)\sqrt{\beta^2(w)}}\right)^{-1}$$

beschränkt. Hieraus folgern wir, daß  $m_g$  eine  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ –Funktion ist und ebenfalls beschränkt als Funktion von  $p$ .

Daraus folgt schon, daß  $m$  ein Multiplikator von  $d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)$  ist und damit, daß das Funktional  $T_{\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}}$  tatsächlich problemlos in der oben gegebenen Form (6.1) auf  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C})$  definiert werden kann.

Aus der Beschränktheit von  $l$  als Funktion über  $w \in \mathcal{O}$  können wir weiterhin folgern, daß einerseits  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}) \ni f \mapsto m_f(p)$  ein stetiges Funktional und andererseits  $H_{m_0}^+ \ni p \mapsto m_g(p)$  eine stetige Funktion ist. Aus letzterem folgt wiederum, daß

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}) \ni f \mapsto T_{\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}} [f, g] = (2\pi)^{-3} \int d^4 p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) m_g(p) \tilde{f}(p)$$

ein stetiges Funktional darstellt. Insgesamt ist also  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \ni (f, g) \mapsto T_{\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}} [f, g]$  ein stetiges Funktional. Da  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C})$  dicht liegt in  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O} \times \mathcal{O}, \mathbb{C})$ , überträgt sich die Aussage zur Wohldefiniiertheit der Voraussetzungen (und auch die zur Stetigkeit) auf die Distribution

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \ni (f, g) \mapsto T'_{\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}} [f, g] \doteq \int d^4 x \int d^4 y f(x) g(y) \omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(x) \phi(y)),$$

und somit auf die oben definierte Zweipunktfunktion.

*Beweis des Satzes.* Die Zweipunktfunktion eines Zustandes über  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  muß als Konsequenz der Feldgleichung die Gleichung

$$(\square_x + m_0^2) \omega(\phi^*(x) \phi(y)) = 0$$

i.S.v.D. erfüllen, und so auch  $\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}$ . Skalieren wir der Einfachheit der Notation halber um:  $x \rightarrow 2x$ ,  $y \rightarrow 2y$ . Es ist möglich, die singuläre Distribution  $\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(x) \phi(y))$  aufzuspalten

$$\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(x) \phi(y)) = \underbrace{\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(x) \phi(y)) - \omega_\infty(\phi^*(x) \phi(y))}_{\mathfrak{r}(x,y)} + \underbrace{\omega_\infty(\phi^*(x) \phi(y))}_{\mathfrak{s}(x,y)},$$

wobei  $\mathfrak{s}(\cdot, \cdot)$ , gegeben durch

$$\mathfrak{s}(x, y) = (2\pi)^{-3} \int d^4 p \theta(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) e^{-ip(x-y)},$$

unabhängig von  $\beta$  und  $\mu$  ist und die Klein-Gordon-Gleichung löst<sup>20</sup>. Es bleibt daher, den Rest  $\mathfrak{r}(\cdot, \cdot)$  zu untersuchen, der die Klein-Gordon-Gleichung nun separat erfüllen muß. Betrachte den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(x, y) &= \omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(x) \phi(y)) - \omega_\infty(\phi^*(x) \phi(y)) = \omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(x) \phi(y) - \omega_\infty(\phi^*(x) \phi(y)) \hat{1}) \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ e^{-i\vec{p}(x-y)} \frac{1}{e^{\beta(x+y)\vec{p}-\nu(x+y)} - 1} - e^{i\vec{p}(x-y)} \frac{1}{1 - e^{\beta(x+y)\vec{p}+\nu(x+y)}} \right\}, \end{aligned}$$

mit  $\nu(x+y) = \mu(x+y) \sqrt{\beta^2(x+y)}$ . Dieser Term hat die Eigenschaft, eine *reguläre* Distribution zu definieren, weil die Integralausdrücke

$$\int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}(x-y)} \frac{1}{e^{\beta(x+y)\vec{p}-\nu(x+y)} - 1} \quad \text{und} \quad \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}(x-y)} \frac{1}{1 - e^{\beta(x+y)\vec{p}+\nu(x+y)}}$$

<sup>20</sup> bekanntes Resultat

existieren und somit  $\tau$  einer in  $x$  und  $y$  auf ganz  $\mathcal{O}$  stetigen Funktion entspricht.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung i.S.v.D.

$$(\square_x + m_0^2) \tau(x, y) = 0.$$

Sie impliziert

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ e^{-i\vec{p}(x-y)} \left( \square_x - i2\vec{p}_\lambda \partial^\lambda \right) \frac{1}{e^{\beta(x+y)\vec{p}-\nu(x+y)} - 1} \right. \\ &\quad \left. - e^{i\vec{p}(x-y)} \left( \square_x + i2\vec{p}_\lambda \partial^\lambda \right) \frac{1}{1 - e^{\beta(x+y)\vec{p}+\nu(x+y)}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ e^{-i\vec{p}v} \left( \square_w - i2\vec{p}_\lambda \partial^\lambda \right) \frac{1}{e^{\beta(w)\vec{p}-\nu(w)} - 1} - e^{i\vec{p}v} \left( \square_w + i2\vec{p}_\lambda \partial^\lambda \right) \frac{1}{1 - e^{\beta(w)\vec{p}+\nu(w)}} \right\}. \end{aligned}$$

Integration mit einer Testfunktion  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$  gibt

$$0 = \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \{ e^{-i\vec{p}v} F_{f,+}(\vec{p}) - e^{i\vec{p}v} F_{f,-}(\vec{p}) \} = \overline{F}(v)$$

mit

$$F_{f,\pm}(\vec{p}) = \int d^4 w \frac{1}{e^{\beta(w)\vec{p}-\nu(w)} - 1} \left( \square_w \pm i2\vec{p}_\lambda \partial^\lambda \right) f(w).$$

Wie bei den Betrachtungen zur Funktion  $m_g$  im Abschnitt, der sich mit den Voraussetzungen des Satzes befaßt, erkennen wir: die Funktionen  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto F_{f,\pm}(\vec{p})$  sind integrierbar und beschränkt. Somit ist  $\overline{F}$  eine analytische Funktion, die auf  $\mathcal{O}$  identisch mit der Nullfunktion ist. Diese ist fortsetzbar auf  $\mathbb{R}^4$  und wegen der Eindeutigkeit der Funktionen  $F_{f,\pm}$  in der Darstellung der (Fortsetzung der) Funktion  $\overline{F} = 0$  bis auf Nullmengen bekommen wir  $F_{f,\pm} = 0$ . Da dies für jede Testfunktion  $f$  auf  $\mathcal{O}$  gelten muß, erhalten wir die Gleichungen i.S.v. Distributionen über  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$

$$0 = \left( \square - i2\vec{p}_\lambda \partial^\lambda \right) \frac{1}{e^{\beta\vec{p}-\nu} - 1} \tag{6.2a}$$

$$0 = \left( \square + i2\vec{p}_\lambda \partial^\lambda \right) \frac{1}{1 - e^{\beta\vec{p}+\nu}}, \tag{6.2b}$$

die simultan und für alle  $\vec{p}$  gelten müssen. Hierbei müssen offenbar Real- und Imaginärteil beider Gleichungen separat verschwinden. Nullsetzen des Imaginärteils von (6.2a) ergibt

$$0 = 2i \left( e^{\beta\vec{p}-\nu} - 1 \right)^{-2} \vec{p}^\lambda \partial_\lambda \{ \beta\vec{p} - \nu \}$$

Man beachte, daß  $2i \left( e^{\beta\vec{p}-\nu} - 1 \right)^{-2} \neq 0$ , sodaß

$$\vec{p}^\lambda \partial_\lambda \{ \beta\vec{p} - \nu \} = 0 \tag{6.3}$$

sein muß. Im Imaginärteil von (6.2b) ist das Vorzeichen von  $\nu$  umgekehrt, also

$$\vec{p}^\lambda \partial_\lambda \{ \beta\vec{p} + \nu \} = 0. \tag{6.4}$$

Durch Subtraktion von (6.3) und (6.4) ergibt sich  $\vec{p}^\lambda \partial_\lambda \nu = 0$  für alle  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  und daraus

$$\partial_\lambda \nu = 0 \tag{6.5}$$

Eine Anwendung des Lemmas (6.1) auf die Gleichung (6.3) in Verbindung mit Gleichung (6.5) ergibt, daß  $\partial_\lambda \beta_\mu$  ein antisymmetrischer Tensor ist. Es gilt i.S.v.D.

$$\partial_\mu \partial_\nu \beta_\lambda = -\partial_\mu \partial_\lambda \beta_\nu = -\partial_\lambda \partial_\mu \beta_\nu = \partial_\lambda \partial_\nu \beta_\mu = \partial_\nu \partial_\lambda \beta_\mu = -\partial_\nu \partial_\mu \beta_\lambda = -\partial_\mu \partial_\nu \beta_\lambda$$

Also ist i.S.v.D.  $\partial_\mu \partial_\nu \beta_\lambda = 0$ , und folglich hat die stetige Funktion  $\beta_\nu$  die Form  $\beta_\nu(w) = A_{\nu\lambda} w^\lambda + \beta_{\nu,0}$ , mit  $A_{\lambda\nu} = -A_{\nu\lambda}$ .

Eine Betrachtung des Realteils von (6.2a) ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \frac{(\partial_\rho e^{\beta\bar{p}-\nu}) (\partial^\rho e^{\beta\bar{p}-\nu})}{e^{\beta\bar{p}} - 1} - \partial_\rho \partial^\rho e^{\beta\bar{p}-\nu} \\ &= 2 \frac{(\partial_\rho \beta_\lambda p^\lambda) (\partial^\rho \beta_\lambda p^\lambda) (e^{\beta\bar{p}-\nu})^2}{e^{\beta\bar{p}-\nu} - 1} - \left[ (\partial_\rho \partial^\rho \beta_\lambda \bar{p}^\lambda) + (\partial_\rho \beta_\lambda \bar{p}^\lambda) (\partial^\rho \beta_\lambda \bar{p}^\lambda) \right] e^{\beta\bar{p}-\nu} \end{aligned}$$

Daraus leiten wir

$$0 = \left(1 + e^{\beta\bar{p}-\nu}\right) \left(\partial_\rho \beta_\lambda p^\lambda\right) \left(\partial^\rho \beta_\lambda p^\lambda\right) + \left(1 - e^{\beta\bar{p}-\nu}\right) \left(\partial_\rho \partial^\rho \beta_\lambda \bar{p}^\lambda\right)$$

ab. Da, wie oben gezeigt,  $\partial_\rho \partial^\rho \beta_\lambda \bar{p}^\lambda = 0$  und  $(1 + e^{\beta\bar{p}-\nu}) \neq 0$ , folgt

$$0 = \left(\partial_\rho \beta_\lambda \bar{p}^\lambda\right) \left(\partial^\rho \beta_\lambda \bar{p}^\lambda\right).$$

Setzen wir die allgemeine Form  $\beta_\nu(w) = A_{\nu\lambda} w^\lambda + \beta_{\nu,0}$  ein, liefert dies

$$\begin{aligned} 0 &= (A_{01} p^1 + A_{02} p^2 + A_{03} p^3)^2 - (A_{10} \omega_{\vec{p}} + A_{12} p^2 + A_{13} p^3)^2 \\ &\quad - (A_{20} \omega_{\vec{p}} + A_{21} p^1 + A_{33} p^3)^2 - (A_{30} \omega_{\vec{p}} + A_{31} p^1 + A_{32} p^2)^2 \end{aligned}$$

Im Fall  $\vec{p} = 0$  ergibt sich  $0 = m_0^2 \left[ (A_{10})^2 + (A_{20})^2 + (A_{30})^2 \right] \Rightarrow A_{10} = A_{20} = A_{30} = 0$ . Auf analoge Weise kann man nun zeigen, daß alle  $A_{\mu\lambda} = 0$  und erhält

$$\beta = \text{const.}$$

Wir betrachten nun  $\partial_\lambda \nu = 0 \Leftrightarrow \partial_\lambda \left( \mu \sqrt{\beta^2} \right) = 0 \Rightarrow \partial_\lambda (\mu) = 0$ . Aus Sätzen der Theorie der Differentialgleichungen<sup>21</sup> kann man ableiten, daß falls  $u$  eine schwache, stetige Lösung der Differentialgleichung  $\partial_\lambda u = 0$  auf  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$  ist, die ebenfalls stetige Funktion

$$\mathcal{O} \ni w \mapsto (\partial_\lambda u)(w)$$

tatsächlich existiert und überall auf  $\mathcal{O}$  den Wert Null annimmt. Somit ist auch

$$\mu = \text{const.}$$

KMS-Zustände (also solche mit konstantem  $\beta, \mu$ ) sind globale Gleichgewichtszustände und daher insbesondere  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermisch für jedes  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ .  $\square$

Wie schon in Kapitel 2.2 gezeigt wurde, gibt es einen grundlegenden Unterschied zwischen den Gleichgewichtszuständen des masselosen und des massereichen bosonischen Feldes: Die

<sup>21</sup>z.B. [Hoe83.i], S. 59, Thm 3.1.7

Gleichgewichtszustände des massiven bosonischen Feldes besitzen –im Gegensatz zu denen des masselosen– zusätzlich zur Temperatur einen weiteren Parameter, das chemische Potential. Das obige Lemma zeigt nun, daß es mit der prinzipiellen Unschärfe der Parameter in nichttrivialen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zuständen des massiven Feldes einen weiteren fundamentalen Unterschied beider Theorien gibt.

Bemerkenswert ist, daß der mit Einführung der Masse gewonnene Freiheitsgrad  $\mu$  die Unschärfe der Temperatur in dieser massiven Theorie nicht kompensieren kann. Das läßt u.a. erkennen, daß eine mögliche Einschränkung auf Zustände mit  $\mu \equiv 0$  bei der Suche nach Beispielen nichttrivialer lokaler Gleichgewichtszustände von nicht allzu großer Tragweite wäre.

## 6.2 Die Mengen $\mathcal{F}_{\mathfrak{N}}^{*(+)}$ und $\mathcal{F}_{\mathfrak{E}}^{*(+)}$ lokaler Zustände

Nachdem nun klar ist, daß es keine nichttrivialen  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Zustände der Art

$$\omega_{\beta(\cdot)}^{\mu(\cdot)}(\phi^*(x)\phi(y)) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta(x+y)p + \mu(x+y)\sqrt{\beta^2(x+y)}}} e^{-ip(x-y)}$$

mit geeigneten stetigen Funktionen  $\beta(\cdot)$  und  $\mu(\cdot)$  geben kann, und somit die Suche nach einem dem HotBang-Zustand verwandten Zustand im Fall des massiven bosonischen Feldes von vornherein zum Scheitern verurteilt ist, besinnen wir uns in diesem Kapitel auf die in Kapitel 5.3, Lemma (5.4) vorbereitete Methode zurück.

Für die ersten Schritte bei der Konstruktion der lokalen Gleichgewichtszustände können wir zunächst den Spezialfall  $\mu \equiv 0$  ( $\overline{N_{\vec{p}}}^+ \equiv \overline{N_{\vec{p}}}^- \doteq \overline{N_{\vec{p}}}$ ) annehmen und bekommen für lokale Gleichgewichtsfunktionale

$$\varphi(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) = \omega_{\infty}(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) + \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{N_{\vec{p}}} \left(\frac{x+y}{2}\right) \cos \vec{p}(x-y), \quad (6.6)$$

wobei selbstverständlich auch die generische, auf einem Gebiet  $\mathcal{O}$  definierte Funktion  $\overline{N_{\vec{p}}}$  den Differentialgleichungen  $\vec{p}^\nu \partial_\nu \overline{N_{\vec{p}}}(x) = 0$  und  $\square \overline{N_{\vec{p}}}(x) = 0$  gehorchen muß.

Ein Reservoir lokaler Zustände der Form (6.6) bilden die Mengen  $\mathcal{F}_{\mathfrak{N}}^{*(+)}$  und  $\mathcal{F}_{\mathfrak{E}}^{*(+)}$  nichtstationärer bzw. stationärer lokaler Zustände, die wir im folgenden charakterisieren wollen. Daß in diesen Mengen auch  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände enthalten sind, wird sich bei weitergehenden Untersuchungen herausstellen.

**Lemma 6.3** Sei  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ . Die Fouriertransformierte  $\tilde{f}$  von  $f$  besitzt auf der Massenschale die Darstellung, mit  $\vec{p}^2 = m_0^2$ ,  $p_0 > 0$ ,

$$\tilde{f}(\pm\vec{p}) = \pm\omega_{\vec{p}}\tilde{a}(\pm\vec{p}) + \tilde{b}(\pm\vec{p}),$$

wobei für die Fourier(rück)transformierten  $a$  und  $b$  von  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  gilt

$$a, b \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}).$$

Der Träger von  $a$  und  $b$  in  $\mathbb{R}^3$  ist dabei nicht ausgedehnter als der Basisradius des kleinsten Doppelkegels, der den Träger von  $f$  enthält.

**Beweis.**  $\tilde{f}$  läßt sich auf der Massenschale aufspalten

$$\tilde{f}(\omega_{\vec{p}}, \vec{p}) = \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \tilde{f}(\omega_{\vec{p}}, \vec{p}) + \tilde{f}(-\omega_{\vec{p}}, \vec{p}) \right\}}_{\tilde{b}(\vec{p})} + \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}} \underbrace{\left\{ \frac{\tilde{f}(\omega_{\vec{p}}, \vec{p}) - \tilde{f}(-\omega_{\vec{p}}, \vec{p})}{\omega_{\vec{p}}} \right\}}_{\tilde{a}(\vec{p})}.$$

Des weiteren ist die Rücktransformierte

$$\left[ \tilde{f}(\omega, \cdot) \right]^\wedge(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\vec{p} e^{-i\vec{p}\vec{x}} (2\pi)^{-2} \int d^4y f(y) e^{-i\omega_{\vec{p}}y_0} e^{i\vec{p}\vec{y}},$$

und damit ergibt sich aus den Definitionen

$$\tilde{a}(\vec{p}) \doteq \frac{\tilde{f}(\omega_{\vec{p}}, \vec{p}) - \tilde{f}(-\omega_{\vec{p}}, \vec{p})}{\omega_{\vec{p}}} \quad \text{und} \quad \tilde{b}(\vec{p}) \doteq \tilde{f}(\omega_{\vec{p}}, \vec{p}) + \tilde{f}(-\omega_{\vec{p}}, \vec{p}),$$

daß

$$\begin{aligned} a(\vec{x}) &= \left[ \frac{\tilde{f}(\omega, \cdot) - \tilde{f}(-\omega, \cdot)}{\omega} \right]^\wedge(\vec{x}) \\ &= 4i (2\pi)^{-7/2} \int d^4y f(y) \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} [e^{-i\omega_{\vec{p}}y_0} - e^{+i\omega_{\vec{p}}y_0}] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b(\vec{x}) &= \left[ \tilde{f}(\omega, \cdot) + \tilde{f}(-\omega, \cdot) \right]^\wedge(\vec{x}) \\ &= 4 (2\pi)^{-7/2} \int d^4y f(y) \int \frac{d^3\vec{p}}{2} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} [e^{-i\omega_{\vec{p}}y_0} + e^{+i\omega_{\vec{p}}y_0}]. \end{aligned}$$

Es handelt sich beim Ausdruck

$$(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} [e^{-i\omega_{\vec{p}}y_0} - e^{+i\omega_{\vec{p}}y_0}]$$

um den Kommutator

$$\sigma(y-x) \doteq (2\pi)^{-3} \int d^4p \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2) e^{-ip(x-y)}$$

eingeschränkt auf die Hyperfläche  $x_0 \equiv 0$  und bei

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{2} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} [e^{-i\omega_{\vec{p}}y_0} + e^{+i\omega_{\vec{p}}y_0}]$$

um die Ableitung i.S.v.D.  $(\partial_0\sigma)(y-x)$  auf der Hyperfläche  $x_0 \equiv 0$ . Der Kommutator und seine Ableitungen haben Träger in  $\overline{V^+} \cup \overline{V^-}$ . Sei  $D_R \subset \mathbb{R}^4$  ein Doppelkegel, der den Träger von  $f$  einschließt und dabei den kleinstmöglichen Basisradius  $R$  hat. Dann ist der Träger von

$$a'(x) = \int d^4y f(y) \sigma(x-y) \quad \text{bzw.} \quad b'(x) = \int d^4y f(y) (\partial_0\sigma)(x-y)$$

in  $(\overline{V^+} \cup \overline{V^-}) + D_R$  enthalten. Man bemerkt, daß die Träger von  $a$  und  $b$  in

$$\left( (\overline{V^+} \cup \overline{V^-}) + D_R \right) \cap \{x \in \mathbb{R}^4; x_0 = 0\}$$

liegen und somit ebenfalls in einem kompakten Gebiet enthalten sind, das nicht größer ist als ein Doppelkegel mit Basisradius  $R$ .  $\square$

### Im folgenden verwendete Bezeichnungen

1. Sei im folgenden für zwei Funktionen  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto \tilde{a}(\vec{p}), \tilde{b}(\vec{p}) \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  das Skalarprodukt  $\langle a | b \rangle$  definiert als

$$\langle a | b \rangle \doteq \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \tilde{a}(\vec{p}) \tilde{b}(\vec{p}).$$

2. Es bezeichnen die Funktionen  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto \tilde{a}_f(\vec{p}), \tilde{b}_f(\vec{p}) \in \mathbb{R}$  die gemäß Lemma (6.3) zur generischen Funktion  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$  gehörigen Komponenten in der Darstellung

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto \tilde{f}(\pm \vec{p}) = \pm \omega_{\vec{p}} \tilde{a}_f(\pm \vec{p}) + \tilde{b}_f(\pm \vec{p})$$

der Fouriertransformierten  $\tilde{f}$  von  $f$  in der Einschränkung auf die Massenschale.

3. Sei nun und im folgenden  $|c\rangle$  ein beliebiger Zustand,  $\mathcal{C}_0^\infty$  im Ortsraum mit einem Träger, der in  $\mathcal{P}_r^3 \doteq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, x_1^2 < R^2\}$  bzw.  $\mathcal{Q}_r^3 \doteq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$  enthalten ist, je nachdem, ob wir Zustände aus  $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}^{*(+)}$  oder  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}^{*(+)}$  betrachten wollen. (Die Bedeutung von  $\mathcal{P}_r^3$  und  $\mathcal{Q}_r^3$  wird später klar.) Der Zustand  $|c\rangle$  steht symbolisch für die bei der Zerlegung von  $f$  auftretenden generischen Zustände  $|a_f\rangle$  bzw.  $|b_f\rangle$ .

Das im folgenden bei der Konstruktion von lokalen Zuständen angewandte Positivitätskriterium ist eine Idee von Buchholz [BuPM].

#### 6.2.1 Die Menge $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}^{*(+)}$ nichtstationärer lokaler Zustände

**Satz 6.4** Seien  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto A(\vec{p}), B(\vec{p}) \in \mathbb{R}$  zwei schwach integrable, kugelsymmetrische Funktionen. Weiterhin gebe es für alle  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C})$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_R \doteq \{x \in \mathbb{R}^4, x_0^2 + x_1^2 < R^2\}$  eine Funktion  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto Z_f(\vec{p}) \in \mathbb{R}$ , die überall ungleich Null und Fouriertransformierte einer Funktion  $\tilde{Z}$  mit  $\text{supp}(\tilde{Z}) \subset \mathcal{P}_r^3$  ist, sodaß die Ungleichungen

$$|\langle a_f | A \omega^2 | a_f \rangle| \geq (R+r) \langle a_f | Z_f^{-2} B^2 \omega^4 + Z_f^2 | a_f \rangle \quad (6.7a)$$

$$|\langle b_f | A | b_f \rangle| \geq (R+r) \langle b_f | Z_f^{-2} B^2 \omega^2 + Z_f^2 | b_f \rangle \quad (6.7b)$$

gelten. Dann wird durch

$$\varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) \doteq \omega_\infty(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) + \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{N_{\vec{p}}}(x+y) \cos \vec{p}(x-y),$$

wobei

$$\overline{N_{\vec{p}}}(x) \doteq A(\vec{p}) + B(\vec{p})(\omega_{\vec{p}} x_1 - p_1 x_0),$$

die Zweipunktfunktion eines Zustands über  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  definiert.

**Beweis.** Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zunächst ist zu klären, ob  $\overline{N_{\vec{p}}}(\cdot)$  den Auflagen des Lemmas (5.4) genügt. Darauf aufbauend bleibt nur noch die Positivität von  $\varphi$  zu zeigen.

Die Auflagen des Lemmas (5.4). Zu zeigen ist: Die durch  $(x, \vec{p}) \mapsto \overline{N_{\vec{p}}}(\cdot)$  definierte Funktion ist schwach integrierbar in  $x$  und  $\vec{p}$  und genügt den Differentialgleichungen  $\vec{p}^\nu \partial_\nu \overline{N_{\vec{p}}}(x) = 0$  und  $\square \overline{N_{\vec{p}}}(x) = 0$ .

Die Funktion  $\overline{N_{\vec{p}}}$  ist in  $x$  auf ganz  $\mathbb{R}^4$  stetig, und daher in dieser Variable auch schwach integrierbar. Über  $\vec{p}$  sind die Funktionen  $A$  und  $B$  schwach integrierbar nach Voraussetzung, daher ist  $\overline{N_{\vec{p}}}$  über  $\vec{p}$  schwach integrierbar. Die angegebenen Differentialgleichungen werden erfüllt, denn als lineare Funktion in  $x$  löst  $\overline{N_{\vec{p}}}$  die Wellengleichung

$$\square \overline{N_{\vec{p}}}(x) = 0$$

und eine kurze Rechnung ergibt, daß ebenfalls

$$\vec{p}^\nu \partial_\nu \overline{N_{\vec{p}}}(x) = B(\vec{p}) (\omega_{\vec{p}}(-p_1) + p_1 \omega_{\vec{p}}) = 0$$

gilt.

*Die Positivität* Zu zeigen ist

$$0 \leq \int d^4x \int d^4y \varphi(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) \overline{f(x)} f(y) \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}).$$

Der Vakuumteil des Funktionals  $\varphi$ , also  $\omega_\infty(\phi_0^*(x) \phi_0(y))$ , ist als positiv bekannt. Ein Einsetzen des Rests  $\int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{N_{\vec{p}}}(x+y) \cos \bar{p}(x-y)$  ergibt

$$\begin{aligned} & \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{N_{\vec{p}}}(x+y) \cos \bar{p}(x-y) \overline{f(x)} f(y) \\ &= \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} A(\vec{p}) \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\bar{p}(x-y)} + e^{i\bar{p}(x-y)} \right\} \overline{f(x)} f(y) \\ & \quad + \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} B(\vec{p}) \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\bar{p}(x-y)} + e^{i\bar{p}(x-y)} \right\} (p_1(x_0+y_0) - \omega_{\vec{p}}(x_1+y_1)) \overline{f(x)} f(y). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} & \int d^4x e^{\mp i\bar{p}x} (x_0 p_j - x_j \omega_{\vec{p}}) f(x) \\ &= \pm i \omega_{\vec{p}} \frac{\partial}{\partial p_j} \int d^4x e^{\mp i\bar{p}x} f(x) = \pm i \omega_{\vec{p}} \frac{\partial}{\partial p_j} \tilde{f}(\pm\bar{p}) = \mp \omega_{\vec{p}} \hat{x}_j \tilde{f}(\pm\bar{p}) \doteq \mp M_j \tilde{f}(\pm\bar{p}), \end{aligned}$$

wobei  $M_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , der Generator der Boosts in die  $j$ -Richtung ist.

Unter Benutzung des invarianten Skalarprodukts  $\langle f | g \rangle \doteq \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{f(\vec{p})} g(\vec{p})$ , bezüglich dessen  $M_1$  hermitesch ist, und mit der Schreibweise  $f_\pm \doteq \tilde{f}(\pm\bar{p})$  schreiben wir (6.8) –unter der schon in der Voraussetzung des Lemmas gemachten Annahme von kugelsymmetrischen Funktionen  $A$  und  $B$ – als

$$\begin{aligned} & \langle f_+ | A f_+ \rangle + \langle f_+ | B M_1 f_+ \rangle + \langle M_1 f_+ | B f_+ \rangle \\ & \quad + \langle f_- | A f_- \rangle - \langle f_- | B M_1 f_- \rangle - \langle M_1 f_- | B f_- \rangle \end{aligned} \quad (6.9)$$

(bis auf Faktoren  $1/2$ ). In Lemma (6.3) wurden für  $\tilde{f}$  in der Einschränkung auf die Massenschale die Identitäten

$$\tilde{f}(\pm\bar{p}) = \pm \omega_{\vec{p}} \tilde{a}_f(\pm\bar{p}) + \tilde{b}_f(\pm\bar{p})$$

gezeigt. An selber Stelle konnte bewiesen werden, daß  $a$  und  $b$  einen Träger besitzen, der nicht ausgedehnter ist als die Basis des kleinsten Doppelkegels, der den Träger von  $f$  einschließt, und daher in  $\mathcal{P}_R^3$  enthalten ist. Daher schreiben wir (6.8) schließlich als

$$\langle a_f | A \omega^2 | a_f \rangle + \langle a_f | \omega^2 B M_1 + M_1 B \omega^2 | a_f \rangle + [\langle b_f | A | b_f \rangle + \langle b_f | B M_1 + M_1 B | b_f \rangle]. \quad (6.10)$$

Hierbei ging ein, daß  $M_1$  bei Spiegelung sein Vorzeichen ändert. Die Positivitätsbedingungen für  $a$  und  $b$  entkoppeln also und können somit separat betrachtet werden.

Zunächst bemerken wir, daß  $A = A^* > 0$ . Nehmen wir nun eine Betrachtung des Terms

$$\langle c | M_1 Y + Y M_1 | c \rangle$$

vor. Hierbei sei  $Y = Y^*$  und außerdem  $|c\rangle$  ein Zustand, sodaß im Ortsraum  $c \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{P}_R^3)$ . Sei weiterhin wie in den Voraussetzungen des Satzes  $Z$  eine reelle Funktion des Impulsoperators, die Fouriertransformierte einer Funktion  $\tilde{Z}$  ist, und sei der Träger von  $\tilde{Z}$  in  $\mathcal{P}_r^3$  enthalten, sowie  $\forall \vec{p} : Z(\vec{p}) \neq 0$ . Da eine Multiplikation im Impulsraum einer Faltung im Ortsraum entspricht,  $c(\vec{p}) \mapsto Z(\vec{p}) c(\vec{p})$  ist äquivalent zu  $\tilde{c}(\vec{x}) \mapsto (2\pi)^{-3/2} (\tilde{Z} * \tilde{c})(\vec{x})$ , bedeutet dies also, daß die Multiplikation von  $c$  mit  $Z$  die Lokalisierung von  $|c\rangle$  im Ortsraum, in  $x_1$ -Richtung nicht wesentlich verschlechtert, nämlich maximal um den Betrag  $r$ .

Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} & |\langle c | Y Z^{-1} Z M_1 + M_1 Z Z^{-1} Y | c \rangle| \\ &= |\langle c | Y Z^{-1} Z \omega \hat{x}_1 + \hat{x}_1 \omega Z Z^{-1} Y | c \rangle| \stackrel{[\omega, Z]=0}{=} |\langle c | Y Z^{-1} \omega Z \hat{x}_1 + \hat{x}_1 Z \omega Z^{-1} Y | c \rangle| \\ &= |\langle c | Y Z^{-1} \omega [Z, \hat{x}_1] + [\hat{x}_1, Z] \omega Z^{-1} Y | c \rangle + \langle c | Y Z^{-1} \omega \hat{x}_1 Z + Z \hat{x}_1 \omega Z^{-1} Y | c \rangle| \end{aligned}$$

Nun ist  $Z$  als Fouriertransformierte einer  $\mathcal{C}_0$ -Funktion differenzierbar (sogar analytisch), und daher ist

$$[Z, \hat{x}_1] = -i\partial_1(Z)$$

und somit ist  $[Z, \hat{x}_1]$  insbesondere wieder eine Funktion des Impulsoperators. Wir erhalten

$$\langle c | Y Z^{-1} \omega [Z, \hat{x}_1] + [\hat{x}_1, Z] \omega Z^{-1} Y | c \rangle = \langle c | Y Z^{-1} \omega ([Z, \hat{x}_1] + [\hat{x}_1, Z]) | c \rangle = 0.$$

Also

$$|\langle c | Y Z^{-1} Z \omega \hat{x}_1 + \hat{x}_1 \omega Z Z^{-1} Y | c \rangle| = |\langle c | Y Z^{-1} \omega \hat{x}_1 Z + Z \hat{x}_1 \omega Z^{-1} Y | c \rangle|$$

Eine weitere Überlegung zeigt, daß

$$\begin{aligned} |\langle c | Y Z^{-1} \omega \hat{x}_1 Z + Z \hat{x}_1 \omega Z^{-1} Y | c \rangle| &\leq \langle c | \lambda^2 \omega Z^{-1} Y^2 Z^{-1} \omega + \frac{1}{\lambda^2} Z \hat{x}_1^2 Z | c \rangle \\ &\leq \lambda^2 \langle c | Z^{-2} Y^2 \omega^2 | c \rangle + \frac{1}{\lambda^2} (R+r)^2 \langle c | Z^2 | c \rangle \end{aligned}$$

mit beliebigem  $\lambda > 0$ . Sei nun  $\lambda = \sqrt{R+r}$ , so erhalten wir die Abschätzung

$$|\langle c | Y M_1 + M_1 Y | c \rangle| \leq (R+r) \langle c | Z^{-2} Y^2 \omega^2 + Z^2 | c \rangle.$$

Dem entspricht, im speziellen Kontext des Satzes mit  $Y = B\omega$  bzw.  $Y = B$ ,

$$|\langle a_f | \omega^2 B M_1 + M_1 B \omega^2 | a_f \rangle| \leq (R+r) \langle a_f | Z^{-2} B^2 \omega^4 + Z^2 | a_f \rangle$$

bzw.

$$|\langle b_f | B M_1 + M_1 B | b_f \rangle| \leq (R+r) \langle b_f | Z^{-2} B^2 \omega^2 + Z^2 | b_f \rangle.$$

Die Anwendung der Voraussetzung (6.7) auf die eben erhaltenen Ungleichungen zeigt nun unmittelbar die für die Positivität der beiden entkoppelten Teile in Ausdruck (6.9) hinreichende Majorisierung der Terme  $|\langle a_f | \omega^2 B M_1 + M_1 B \omega^2 | a_f \rangle|$  durch  $\langle a_f | A \omega^2 | a_f \rangle$  bzw.  $|\langle b_f | B M_1 + M_1 B | b_f \rangle|$  durch  $\langle b_f | A | b_f \rangle$  auf.

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Definition 6.5** Die Menge der Zustände, die den Voraussetzungen des Satzes (6.4) genügen, heiÙe  $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}^{*(+)}$ .

**Bemerkung:** Die Abhängigkeit der Phasenraumteilchendichte  $\overline{N}_{\vec{p}}(x) \doteq A(\vec{p}) + B(\vec{p})(\omega_{\vec{p}}x_1 - p_1x_0)$  von der Zeit  $x_0$  impliziert, daÙ diese Zustände nicht stationär sind.

### 6.2.2 Die Menge $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}^{*(+)}$ stationärer lokaler Zustände

**Satz 6.6** Seien  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto A(\vec{p}), B(\vec{p}) \in \mathbb{R}$  zwei schwach integrierbare, kugelsymmetrische Funktionen. Weiterhin gebe es für alle  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C})$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{Q}_R \doteq \{x \in \mathbb{R}^4, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$  eine Funktion  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto Z_f(\vec{p}) \in \mathbb{R}$ , die überall ungleich Null und Fouriertransformierte einer Funktion  $\tilde{Z}$  mit  $\text{supp}(\tilde{Z}) \subset \mathcal{Q}_r^3$  ist, sodaÙ die Ungleichungen

$$|\langle a_f | A \omega^2 | a_f \rangle| \geq \sqrt{2} (R+r) \langle a_f | Z_f^{-2} \omega^2 B^2 \hat{\vec{p}}^2 + Z_f^2 | a_f \rangle \quad (6.11a)$$

$$|\langle b_f | A | b_f \rangle| \geq \sqrt{2} (R+r) \langle b_f | Z_f^{-2} B^2 \hat{\vec{p}}^2 + Z_f^2 | b_f \rangle \quad (6.11b)$$

gelten. Dann wird durch

$$\varphi(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) \doteq \omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) + \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{N}_{\vec{p}}(x+y) \cos \vec{p}(x-y),$$

wobei

$$\overline{N}_{\vec{p}}(x) \doteq A(\vec{p}) + B(\vec{p})(x_1p_2 - x_2p_1),$$

die Zweipunktfunktion eines Zustands über  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  definiert.

**Beweis.** Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zunächst ist zu klären, ob  $\overline{N}_{\vec{p}}(\cdot)$  den Auflagen des Lemmas (5.4) genügt. Darauf aufbauend bleibt nur noch die Positivität von  $\varphi$  zu zeigen.

Die Auflagen des Lemmas (5.4). Zu zeigen ist: Die durch  $(x, \vec{p}) \mapsto \overline{N}_{\vec{p}}(\cdot)$  definierte Funktion ist schwach integrierbar in  $x$  und  $\vec{p}$  und genügt den Differentialgleichungen  $\vec{p}^\nu \partial_\nu \overline{N}_{\vec{p}}(x) = 0$  und  $\square \overline{N}_{\vec{p}}(x) = 0$ .

Die Funktion  $\overline{N}_{\vec{p}}$  ist in  $x$  auf ganz  $\mathbb{R}^4$  stetig, und daher in dieser Variable auch schwach integrierbar. Über  $\vec{p}$  sind die Funktionen  $A$  und  $B$  schwach integrierbar nach Voraussetzung, daher ist  $\overline{N}_{\vec{p}}$  über  $\vec{p}$  integrierbar. Die angegebenen Differentialgleichungen werden erfüllt, denn als lineare Funktion in  $x$  löst  $\overline{N}_{\vec{p}}$  die Wellengleichung

$$\square \overline{N}_{\vec{p}}(x) = 0$$

und eine kurze Rechnung ergibt, daÙ ebenfalls

$$\vec{p}^\nu \partial_\nu \overline{N}_{\vec{p}}(x) = B(\vec{p})(p_2(-p_1) + p_1p_2) = 0$$

gilt.

Die Positivität Zu zeigen ist

$$0 \leq \int d^4x \int d^4y \varphi(\phi_0^*(x)\phi_0(y)) \overline{f(x)} f(y) \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{C}).$$

Der Vakuumteil des Funktionals  $\varphi$ , also  $\omega_\infty(\phi_0^*(x)\phi_0(y))$ , ist als positiv bekannt. Ein Einsetzen des Rests  $\int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{N_{\vec{p}}}(x+y) \cos \bar{p}(x-y)$  ergibt, mit  $L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$ ,

$$\begin{aligned} & \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{N_{\vec{p}}}(x+y) \cos \bar{p}(x-y) \overline{f(x)} f(y) \\ &= \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} A(\vec{p}) \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\bar{p}(x-y)} + e^{i\bar{p}(x-y)} \right\} \overline{f(x)} f(y) \\ & \quad + \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} B(\vec{p}) \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\bar{p}(x-y)} + e^{i\bar{p}(x-y)} \right\} L_3 \overline{f(x)} f(y) \\ &= \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} A(\vec{p}) \left\{ |\tilde{f}(\vec{p})|^2 + |\tilde{f}(-\vec{p})|^2 \right\} \\ & \quad + \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} B(\vec{p}) \left\{ \begin{aligned} & \left( \overline{L_3 \tilde{f}(\vec{p})} \right) \tilde{f}(\vec{p}) + \overline{\tilde{f}(\vec{p})} \left( L_3 \tilde{f}(\vec{p}) \right) \\ & + \left( \overline{L_3 \tilde{f}(-\vec{p})} \right) \tilde{f}(-\vec{p}) + \overline{\tilde{f}(-\vec{p})} \left( L_3 \tilde{f}(-\vec{p}) \right) \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Nach Lemma (6.3) ist es erlaubt, auf der Massenschale mit der Darstellung  $\tilde{f}(\pm\vec{p}) = \pm\omega_{\vec{p}} \tilde{a}_f(\pm\vec{p}) + \tilde{b}_f(\pm\vec{p})$  zu rechnen, wobei  $a$  und  $b$  einen Träger besitzen, der nicht ausgedehnter ist als die Basis des kleinsten Doppelkegels, der den Träger von  $f$  einschließt, und somit in  $\mathcal{Q}_R^3$  enthalten ist. Wir erhalten unter Ausnutzen der Symmetrien  $A(\vec{p}) = A(-\vec{p})$  sowie  $B(\vec{p}) = B(-\vec{p})$

$$\begin{aligned} &= \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} A(\vec{p}) \left\{ |\tilde{b}_f(\vec{p})|^2 + |\omega_{\vec{p}} \tilde{a}_f(\vec{p})|^2 \right\} \\ & \quad + \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} B(\vec{p}) \left\{ \begin{aligned} & \left( \overline{L_3 \tilde{b}_f(\vec{p})} \right) \tilde{b}_f(\vec{p}) + \overline{\tilde{b}_f(\vec{p})} \left( L_3 \tilde{b}_f(\vec{p}) \right) \\ & + \left( \overline{L_3 \omega_{\vec{p}} \tilde{a}_f(\vec{p})} \right) \omega_{\vec{p}} \tilde{a}_f(\vec{p}) + \overline{\omega_{\vec{p}} \tilde{a}_f(\vec{p})} \left( L_3 \omega_{\vec{p}} \tilde{a}_f(\vec{p}) \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

In etwas übersichtlicherer Schreibweise

$$= \langle a_f | A \omega^2 | a_f \rangle + \langle a_f | \omega L_3 B \omega + \omega B L_3 \omega | a_f \rangle + [\langle b_f | A | b_f \rangle + \langle b_f | L_3 B + B L_3 | b_f \rangle], \quad (6.12)$$

und da

$$\begin{aligned} \langle a_f | \omega L_3 B \omega + \omega B L_3 \omega | a_f \rangle &= \langle a_f | [\omega, L_3] B \omega + \omega B [L_3, \omega] | a_f \rangle + \langle a_f | L_3 B \omega^2 + \omega^2 B L_3 | a_f \rangle \\ &= \langle a_f | [\omega, L_3] B \omega | a_f \rangle - \langle a_f | \omega B [\omega, L_3] | a_f \rangle + \langle a_f | L_3 B \omega^2 + \omega^2 B L_3 | a_f \rangle \\ & \quad \stackrel{\omega, B, L_3 \text{ hermitesch}}{=} \langle a_f | L_3 B \omega^2 + \omega^2 B L_3 | a_f \rangle \end{aligned}$$

schreiben wir (6.12) als

$$= \langle a_f | A \omega^2 | a_f \rangle + \langle a_f | L_3 B \omega^2 + \omega^2 B L_3 | a_f \rangle + [\langle b_f | A | b_f \rangle + \langle b_f | L_3 B + B L_3 | b_f \rangle]. \quad (6.13)$$

Die Anteile von  $a$  und  $b$  entkoppeln also analog zum nichtstationären Fall. Untersuchen wir nun die einzelnen Anteile auf Positivität.

Zunächst bemerken wir, daß  $A = A^* > 0$ , und betrachten des weiteren den Term

$$\langle c | L_3 Y + Y L_3 | c \rangle,$$

wobei  $Y = Y^*$  und  $\langle c |$  ein Zustand ist, sodaß im Ortsraum  $c \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{Q}_R^3)$ . Wie im Beweis des Satzes (6.4) wählen wir nun eine reelle Funktion  $Z$  des Impulsoperators, die Fouriertransformierte einer Funktion  $\tilde{Z}$  ist. Hierbei sei die Funktion  $Z$  stets ungleich Null und verschlechtere

die Lokalisierung von  $|c\rangle$  nicht wesentlich (um maximal  $r > 0$ ). Letzteres bedeutet also wiederum, daß  $\tilde{Z}$  als Funktion von Ortsraumkoordinaten beschränkten Träger besitzt, der in  $\mathcal{Q}_r^3$  enthalten ist. Mit ihr gelingt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\langle c|YL_3 + L_3Y|c\rangle| &= \left| \langle c|YZ^{-1}|\vec{p}\rangle \frac{1}{|\vec{p}|} ZL_3 + L_3Z \frac{1}{|\vec{p}|} |\vec{p}\rangle Z^{-1}Y|c\rangle \right| \\ &\stackrel{[Z,L_3]=0}{=} \left| \langle c|YZ^{-1}|\vec{p}\rangle \frac{1}{|\vec{p}|} L_3Z + ZL_3 \frac{1}{|\vec{p}|} |\vec{p}\rangle Z^{-1}Y|c\rangle \right| \\ &\leq \lambda^2 \langle c|YZ^{-1}p^2 Z^{-1}Y|c\rangle + \frac{1}{\lambda^2} \langle c|ZL_3 \frac{1}{p^2} L_3Z|c\rangle \end{aligned}$$

mit beliebigem  $\lambda > 0$ . Den Operator  $L_3 \frac{1}{p^2} L_3$  können wir abschätzen

$$0 \leq L_3 \frac{1}{p^2} L_3 = (x_1 p_2 - x_2 p_1) \frac{1}{p^2} (p_2 x_1 - p_1 x_2) \leq 2 \left( x_1 \frac{p_2^2}{p^2} x_1 + x_2 \frac{p_1^2}{p^2} x_2 \right) \leq 2(x_1^2 + x_2^2)$$

und somit gilt

$$\left| \langle c|ZL_3 \frac{1}{p^2} L_3Z|c\rangle \right| \leq 2(R+r)^2 \langle c|Z^2|c\rangle.$$

Mit  $\lambda^2 = \sqrt{2}(R+r)$  erhalten wir

$$|\langle c|YL_3 + L_3Y|c\rangle| \leq \sqrt{2}(R+r) \left( \langle c|Y^2 Z^{-2} \hat{p}^2 |c\rangle + \langle c|Z^2|c\rangle \right).$$

Unter den Voraussetzungen (6.11) wird folglich  $|\langle a_f|L_3B\omega^2 + \omega^2BL_3|a_f\rangle|$  durch  $\langle a_f|A\omega^2|a_f\rangle$  dominiert, genauso wie  $|\langle b_f|BL_3 + L_3B|b_f\rangle|$  durch  $\langle b_f|A|b_f\rangle$ . Dies ist für die Positivität des Ausdrucks (6.13) hinreichend.

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Definition 6.7** Die Menge der Zustände, die den Voraussetzungen des Satzes (6.6) genügen, heie  $\mathcal{F}_{\mathfrak{E}}^{*(+)}$ .

**Bemerkung:** Die Unabhängigkeit der Phasenraumteilchendichte  $\overline{N}_{\vec{p}}(x) \doteq A(\vec{p}) + B(\vec{p})(x_1 p_2 - x_2 p_1)$  von der Zeit  $x_0$  impliziert, daß diese Zustände stationär sind.

### 6.2.3 Eine verschärfte Version der Positivitätsbedingungen (6.7) und (6.11)

Es stellt sich heraus, daß mit der Zusatzforderung

$$Z(\vec{p})^2 \geq |\omega_{\vec{p}}^2 B(\vec{p})|$$

an die Funktionen  $Z$ , die in den Kriterien (6.7) bzw. (6.11) benötigt werden, um die Positivität der in den Sätzen (6.4) bzw. (6.6) konstruierten Zustände zu sichern, eine beiden Sätzen gemeinsame, wesentlich einfachere zu handhabende Positivitätsbedingung formuliert werden kann.

**Lemma 6.8** Seien  $A$  und  $B$  zwei schwach integrable Funktionen des Impulsoperators wie in den Voraussetzungen der Sätze (6.4) bzw. (6.6). Weiterhin sei  $Z$  eine reelle Funktion des Impulsoperators, die überall ungleich Null ist und die Ungleichungen

$$|\langle c | A | c \rangle| \geq 2\sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^2 | c \rangle \quad (6.14a)$$

$$Z(\vec{p})^2 \geq |\omega_{\vec{p}}^2 B(\vec{p})| \quad (6.14b)$$

erfüllt. Dann erfüllt  $Z$  auch

$$|\langle c | A | c \rangle| \geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \hat{p}^2 + Z^2 | c \rangle \quad (6.15a)$$

$$|\langle c | A | c \rangle| \geq (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^2 + Z^2 | c \rangle \quad (6.15b)$$

$$|\langle c | A \omega^2 | c \rangle| \geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} \omega^2 B^2 \hat{p}^2 + Z^2 | c \rangle \quad (6.15c)$$

$$|\langle c | A \omega^2 | c \rangle| \geq (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^4 + Z^2 | c \rangle \quad (6.15d)$$

**Beweis.** Ist nämlich  $Z(\vec{p})^2 \geq |\omega_{\vec{p}}^2 B(\vec{p})|$ , so können wir wegen

$$Z(\vec{p})^2 \geq |\omega_{\vec{p}}^2 B(\vec{p})| \quad \Rightarrow \quad 2Z(\vec{p})^2 \geq \frac{\omega_{\vec{p}}^4 B(\vec{p})^2}{Z(\vec{p})^2} + Z(\vec{p})^2$$

die Ungleichung

$$|\langle c | A | c \rangle| \geq 2\sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^2 | c \rangle \geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^4 + Z^2 | c \rangle.$$

folgern.

Betrachten wir den konkreten Fall

1. Zur Abschätzung (6.15a). Es folgt mit obiger Betrachtung

$$\begin{aligned} |\langle c | A | c \rangle| &\geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^4 + Z^2 | c \rangle \\ &\geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \hat{p}^2 + Z^2 | c \rangle \end{aligned}$$

2. Zur Abschätzung (6.15b). Es folgt

$$\begin{aligned} |\langle c | A | c \rangle| &\geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^4 + Z^2 | c \rangle \\ &> (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^2 + Z^2 | c \rangle. \end{aligned}$$

3. Zur Abschätzung (6.15c). Es folgt

$$\begin{aligned} |\langle c | A \omega^2 | c \rangle| &\geq |\langle c | A | c \rangle| \\ &\geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^4 + Z^2 | c \rangle \\ &\geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^2 \hat{p}^2 + Z^2 | c \rangle. \end{aligned}$$

4. Zur Abschätzung (6.15d). Es folgt

$$\begin{aligned} |\langle c | A \omega^2 | c \rangle| &\geq |\langle c | A | c \rangle| \\ &\geq \sqrt{2} (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^4 + Z^2 | c \rangle \\ &> (R+r) \langle c | Z^{-2} B^2 \omega^4 + Z^2 | c \rangle. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Der große Vorteil der Formulierung der Randbedingung in der Form (6.14) liegt darin, daß wir ein einfaches Kriterium dafür angeben können, wann eine Menge  $\mathfrak{Z}$  von Funktionen  $Z$  geeignet ist, für alle in Frage kommenden Zustände  $|c\rangle$  ein Element  $Z_c$  zu enthalten, das mit gegebener Funktionen  $A$  die Ungleichung (6.14a) erfüllt. Eine solche Menge  $\mathfrak{Z}$  ist später explizit angebar.

Wir bemerken an dieser Stelle noch einmal, daß in den Sätzen (6.4) und (6.6) die Positivitätsbedingungen für die Zustände  $|a_f\rangle$  und  $|b_f\rangle$  entkoppeln – daher ist es sinnvoll, mit solch einer universellen Menge  $\mathfrak{Z}$  zu arbeiten, mit der sich die obigen Ungleichungen mit der Gesamtheit der in Frage kommenden Zustände  $|c\rangle$ , ein Symbol, das ja für die Zustände  $|a_f\rangle$  und  $|b_f\rangle$  im entsprechenden Fall steht, erfüllen lassen.

#### 6.2.4 Ein Kriterium für die Erfüllbarkeit der Teilbedingung (6.14a)

Wir nehmen für zukünftige Betrachtungen an, daß jede Funktion  $Z$  kugelsymmetrisch ist, und werden dementsprechend auch nur solche Exemplare explizit konstruieren. Sei also  $Z(|\vec{p}|) = Z(\vec{p})$ .

**Lemma 6.9** *Es sei  $|\langle c|A|c\rangle| > 0$ . Weiterhin sei eine Menge  $\mathfrak{Z}$  von kugelsymmetrischen Funktionen  $Z$  des Impulsoperators gegeben. Die Ungleichung (6.14a) kann durch Elemente der Menge  $\mathfrak{Z}$  erfüllt werden, wenn man für jedes  $q_0$  ein  $Z_{q_0} \in \mathfrak{Z}$  finden kann, sodaß*

$$0 < Z_{q_0}^2(|\vec{p}|) < \frac{1}{k_0} \frac{A(\vec{p})}{2\sqrt{2}(R+r)}, \quad |\vec{p}| \in [0, q_0] \quad (6.16a)$$

$$0 < Z_{q_0}^2(|\vec{p}|) \leq k_1^{-(q_0)^{k_2}}, \quad |\vec{p}| > q_0, \quad (6.16b)$$

mit von  $q_0$  und  $Z_{q_0}$  unabhängigen Konstanten  $k_0, k_1 > 1, k_2 > 0$ .

**Beweis.** Um dies zu sehen, stellen wir folgende Betrachtungen an. Da  $c$  im Ortsraum eine  $C_0^\infty$ -Funktion ist, handelt es sich bei  $|c\rangle$  um einen normierbaren Zustand. Mit dem Projektor  $P_{q_0}$  auf Impulse kleiner  $q_0$  und der Schreibweise  $|\langle c|f|c\rangle|^2 \doteq \|f\|_c^2$  ergibt sich unter Annahme von (6.16)

$$\begin{aligned} \|Z_{q_0}^2\|_c^2 &= \|P_{q_0} Z_{q_0}^2\|_c^2 + \|(\hat{1} - P_{q_0}) Z_{q_0}^2\|_c^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{k_0} \frac{1}{2\sqrt{2}(R+r)} \right)^2 \|P_{q_0} A\|_c^2 + k_1^{-2(q_0)^{k_2}} \|(\hat{1} - P_{q_0})\|_c^2 \end{aligned}$$

Für große  $q_0$  geht die Funktion  $q_0 \mapsto k_1^{-2(q_0)^{k_2}} \|(\hat{1} - P_{q_0})\|_c^2 < k_1^{-2(q_0)^{k_2}} \|\hat{1}\|_c^2$  unter jedes  $\varepsilon$ , also z.B. für den Wert  $q_1$  unter den Wert  $\left(1 - \frac{1}{k_0^2}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{2}(R+r)}\right)^2 \|A\|_c^2$ . Somit bekommen wir

$$\begin{aligned} \|Z_{q_1}^2\|_c^2 &\leq \left( \frac{1}{k_0} \frac{1}{2\sqrt{2}(R+r)} \right)^2 \|A\|_c^2 + \left(1 - \frac{1}{k_0^2}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{2}(R+r)}\right)^2 \|A\|_c^2 \\ &= \left\| \frac{A}{2\sqrt{2}(R+r)} \right\|_c^2, \end{aligned}$$

also

$$2\sqrt{2}(R+r) |\langle c|Z_{q_1}^2|c\rangle| \leq |\langle c|A|c\rangle|.$$

Das ist die Aussage des Lemmas, da  $0 \leq |\langle c|Z_{q_1}^2|c\rangle|$ .  $\square$

### 6.3 Vorbereitende Betrachtungen mit dem Ziel, $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustände in den Mengen $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$ und $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$ zu finden

Die Funktionen  $A$  und  $B$  sind bei der Konstruktion von Zuständen in  $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$  und  $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$  offenbar die wesentlichen Größen. Ihrer weitergehenden Untersuchung wollen wir uns daher jetzt widmen. Ihre Eigenschaften sind eng damit verknüpft, ob die mit ihnen konstruierten Zustände aus  $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$  und  $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$  überhaupt  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermisch sind. Diesen Aspekt wollen wir nun betrachten.

#### 6.3.1 Darstellungen von Funktionen $A$ und $B$ , die $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustände ergeben

In den Voraussetzungen der Sätze (6.4) bzw. (6.6) haben wir schon zwei notwendige Eigenschaften der Funktionen  $A$  und  $B$  formuliert: schwache Integrabilität und Kugelsymmetrie. Da wir aber insbesondere darauf abzielen,  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustände in den Mengen  $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$  und  $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$  zu finden, suchen wir weitere einschränkende Bedingungen an die Funktionen  $A$  und  $B$ , die die  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität der mit ihnen definierten Zustände sicherstellen. Es zeigt sich, daß bestimmte Integraldarstellungen von Funktionen  $A$  und  $B$  diesem Anspruch gerecht werden. Diese Darstellungen gehen zurück auf Buchholz [BuPM].

Wir rufen uns in Erinnerung, daß ein  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischer Zustand nach Konstruktion der Menge  $\mathcal{C}$  mit einer dichtewertigen Funktion  $\mathcal{O} \ni x \mapsto \rho_x$  identifiziert wird

$$\omega(\cdot)(x) = \int_{V^+} d\rho_x(\beta) \omega_\beta(\cdot).$$

Da wiederum

$$\omega(N_p)(x) = (2\pi)^{-3} \int d\rho_x(\beta) \frac{1}{e^{\beta p} - 1},$$

ist die Frage, ob es  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermische Zustände in  $\mathcal{F}_\mathfrak{E}^{*(+)}$  bzw.  $\mathcal{F}_\mathfrak{N}^{*(+)}$  gibt, äquivalent zu der Frage, ob es nichtnegative Dichten  $\rho_\mathfrak{N}$  bzw.  $\rho_\mathfrak{E}$  auf  $V^+$  gibt, sodaß

$$\begin{aligned} A(\vec{p}) + B(\vec{p})(x_1 p_2 - x_2 p_1) &= \int d^4 \beta \rho_{\mathfrak{E},x}(\beta) \frac{1}{e^{\beta \vec{p}} - 1} \\ A(\vec{p}) + B(\vec{p})(x_1 \omega_{\vec{p}} - x_0 p_1) &= \int d^4 \beta \rho_{\mathfrak{N},x}(\beta, x) \frac{1}{e^{\beta \vec{p}} - 1}. \end{aligned}$$

Mit einer positiven Funktion  $V^+ \ni \beta \mapsto \sigma(\beta_0, |\vec{\beta}|)$  und einer differenzierbaren Funktion  $V^+ \ni \beta \mapsto \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|)$  machen wir den Ansatz

$$\rho_{\mathfrak{E},x}(\beta) = \sigma(\beta_0, |\vec{\beta}|) + x_2 \frac{\partial}{\partial \beta_1} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) - x_1 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|)$$

bzw.

$$\rho_{\mathfrak{N},x}(\beta) = \sigma(\beta_0, |\vec{\beta}|) + x_0 \frac{\partial}{\partial \beta_1} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) - x_1 \frac{\partial}{\partial \beta_0} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|).$$

Die Normierung von der Funktionen  $\rho_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}}$  macht keine Schwierigkeiten, da für beide das Integral

$$\int d^4 \beta \rho_x(\beta) = \int d^4 \beta \sigma(\beta_0, |\vec{\beta}|)$$

unabhängig von  $x$  ist. Da weiterhin  $x \in \mathcal{Q}_r$  bzw.  $\mathcal{P}_r$ , ist es kein Problem, für gegebenes  $\sigma$  eine Funktion  $\tau$  zu finden, sodaß  $\rho_x$  auf  $\mathcal{Q}_r$  bzw.  $\mathcal{P}_r$  nichtnegativ ist. Es wird der Betrag der Ableitungen  $\left| \frac{\partial}{\partial \beta_\nu} \tau \left( \beta_0, |\vec{\beta}| \right) \right|$ ,  $\nu = 1, 2$  bzw.  $\nu = 0, 1$  limitiert, wir werden später darauf zurückkommen. Nun gilt

$$\begin{aligned} & \int d^4 \beta \rho_{\mathfrak{S},x}(\beta) \frac{1}{e^{\beta \bar{p}} - 1} \\ &= \int d^4 \beta \sigma \left( \beta_0, |\vec{\beta}| \right) \frac{1}{e^{\beta \bar{p}} - 1} - \int d^4 \beta \tau \left( \beta_0, |\vec{\beta}| \right) (x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2) \frac{1}{e^{\beta \bar{p}} - 1} \\ &= \underbrace{\int d^4 \beta \sigma \left( \beta_0, |\vec{\beta}| \right) \frac{1}{e^{\beta \bar{p}} - 1}}_{A(\vec{p})} + (x_2 p_1 - x_1 p_2) \underbrace{\int d^4 \beta \tau \left( \beta_0, |\vec{\beta}| \right) \frac{e^{\beta \bar{p}}}{(e^{\beta \bar{p}} - 1)^2}}_{B(\vec{p})}, \end{aligned}$$

analog  $\int d^4 \beta \rho_{\mathfrak{N},x}(\beta)$ . Wir bemerken, daß die mit diesem Ansatz konstruierten Funktionen  $A$  und  $B$  kugelsymmetrische Funktionen von  $\vec{p}$  sind.

Hiermit besitzen wir also eine Darstellung von Funktionen  $A$  und  $B$ , die mittels der in den Sätzen (6.4) bzw. (6.6) gegebenen Konstruktion ggf.  $\mathcal{S}_O$ -thermische Zustände  $\omega \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}}^{*(+)}$  bzw.  $\omega \in \mathcal{F}_{\mathfrak{N}}^{*(+)}$  erzeugen. Selbstverständlich müssen dazu ebenfalls die in denselben Sätzen formulierten Bedingungen bezüglich der Integrabilität von  $A$  und  $B$  und die dort gegebenen Positivitätsbedingungen erfüllt werden.

**Interpretation und Erläuterung** Die Form der Funktionen  $A$ , gegeben durch

$$A(\vec{p}) = \int d^4 \beta \sigma \left( \beta_0, |\vec{\beta}| \right) \frac{1}{e^{\beta \bar{p}} - 1} \quad (6.17)$$

legt die Interpretation nahe, daß es sich beim Anteil  $A$  von  $N_{\vec{p}}$  um einen Hintergrund handelt, der von einem statischen und ortsunabhängigen Gemisch von KMS-Zuständen erzeugt wird. Der Anteil  $\vec{p} \mapsto (x_2 p_1 - x_1 p_2) B(\vec{p})$ , mit

$$B(\vec{p}) = \int d^4 \beta \tau \left( \beta_0, |\vec{\beta}| \right) \frac{e^{\beta \bar{p}}}{(e^{\beta \bar{p}} - 1)^2}, \quad (6.18)$$

läßt sich dementsprechend als eine (qualitativ andere) kleine Störung dieses Hintergrundgemisches interpretieren.

Die auf den vorhergehenden Betrachtungen aufbauende kanonische Strategie zur Konstruktion von  $\mathcal{S}_O$ -thermischen Zuständen aus  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}^{*(+)}$  bzw.  $\mathcal{F}_{\mathfrak{N}}^{*(+)}$  besteht also dementsprechend daraus, zu einer vorgegebenen Phasenraumteilchendichte  $\vec{p} \mapsto A(\vec{p})$ , gegeben in der Darstellung (6.17), eine Menge erlaubter kleiner Störungen durch Funktionen  $\vec{p} \mapsto (x_2 p_1 - x_1 p_2) B(\vec{p})$ , mit einer in der Darstellung (6.18) gegebenen Funktion  $B$ , zu finden. Diese Methode fand auch bei der Konstruktion der im Kapitel 6.4 vorgestellten  $\mathcal{S}_O$ -thermischen Zustände Verwendung.

### 6.3.2 Das Abfallverhalten der Funktionen $A$ und $B$

Betrachten wir noch einmal die verschärften Randbedingungen.

$$\begin{aligned} |\langle c | A | c \rangle| &\geq 2\sqrt{2} (R + r) \langle c | Z^2 | c \rangle \\ Z(\vec{p})^2 &\geq |\omega_{\vec{p}}^2 B(\vec{p})| \end{aligned}$$

Eine geeignete Funktion  $Z^2$  ist offenbar im schwachen Sinn durch  $A$  nach oben beschränkt und sogar punktweise durch  $|\omega B|$  nach unten. Es fällt auf, daß die (Abfall-)Eigenschaften der Funktionen  $A$  und  $B$  entscheidend dafür sind, ob wir überhaupt dazu in der Lage sind, die Funktionen  $Z$  zu finden, die in den Positivitätskriterien benötigt werden.

Ein Rückblick auf das Kapitel 4 erinnert uns, daß auch das Abfallverhalten der Dichten  $\rho_x$  gewissen Bedingungen unterliegt: Das Abfallverhalten am Rand von  $V^+$  muß so gut sein, daß bei Multiplikation mit Polynomen in  $(\beta^2)^{-1}$  noch Konvergenz auftritt.

Beide Aspekte legen nahe, den Zusammenhang zwischen dem Abfallverhalten der Funktionen  $A, B$  und dem Randverhalten der Dichten  $\sigma, \tau$  zu untersuchen. Nachdem dies geschehen ist, wollen wir anhand des erhaltenen Wissens eine Vorauswahl an geeignet abfallenden Funktionen  $A, B$  (bzw. den dazugehörigen Funktionen  $\sigma, \tau$ ) treffen, die später dazu dienen soll, einen  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustand aus  $\mathcal{F}_\mathcal{S}^{*(+)}$  bzw.  $\mathcal{F}_\mathfrak{M}^{*(+)}$  in konkreter Weise anzugeben.

**Lemma 6.10** Sei  $f \in \mathcal{C}_0^0(V^+, \mathbb{R})$ . Die Funktion

$$B(\vec{p}) \doteq \int d^4\beta f(\beta) e^{\beta\vec{p}} \left(e^{\beta\vec{p}} - 1\right)^{-2},$$

mit  $\vec{p} = (\omega_{\vec{p}}, \vec{p})$ , besitzt eine in  $|\vec{p}|$  exponentiell abfallende **Majorante**.

**Beweis.** Der Träger von  $f$  ist in einem diamantförmigen<sup>22</sup> Doppelkegel  $D_{\tilde{\beta}} \subset V^+$  enthalten, wobei  $\sqrt{\tilde{\beta}^2} = \inf_{\beta \in D_{\tilde{\beta}}} \sqrt{\beta^2}$  und  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, 0, 0, 0)$ . Da  $f$  stetig ist und einen kompakten Träger hat, existiert ein  $m \geq |f(\beta)| \geq 0$ , und

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int d^4\beta f(\beta) e^{\beta\vec{p}} \left(e^{\beta\vec{p}} - 1\right)^{-2} \right| \\ &\leq \int d^4\beta |f(\beta)| e^{\beta\vec{p}} \left(e^{\beta\vec{p}} - 1\right)^{-2} \\ &\leq m \int d^4\beta e^{\beta\vec{p}} \left(e^{\beta\vec{p}} - 1\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Betrachte  $0 < \beta\vec{p} = \tilde{\beta}\vec{p} + (\beta - \tilde{\beta})\vec{p}$ . Es ist für alle  $\beta \in D_{\tilde{\beta}}$  und alle  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  der Wert  $(\beta - \tilde{\beta})\vec{p} \geq 0$  und  $(\beta - \tilde{\beta})\vec{p} = 0 \Leftrightarrow \beta = \tilde{\beta}$ . Somit wird  $\beta\vec{p}$  für festes  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  durch  $\tilde{\beta}\vec{p}$  minimiert. Nun ist

$$e^a (e^a - 1)^{-2} \geq e^b (e^b - 1)^{-2}$$

für  $0 \leq a \leq b$ . Daher gilt folgende weitere Abschätzung

$$\left| \int d^4\beta f(\beta) e^{\beta\vec{p}} \left(e^{\beta\vec{p}} - 1\right)^{-2} \right| \leq e^{\tilde{\beta}\vec{p}} \left(e^{\tilde{\beta}\vec{p}} - 1\right)^{-2} m \int_{D_{\tilde{\beta}}} d^4\beta.$$

Aus  $0 \leq a \leq b$  folgt durch einfache Rechnung

$$e^{2a} (e^a - 1)^{-2} e^{-b} \geq e^b (e^b - 1)^{-2}.$$

<sup>22</sup>Ein diamantförmiger Doppelkegel  $D \subset \mathbb{R}^4$  hat die Gestalt

$$D = (a(1, 0, 0, 0) + V^+) \cap (b(1, 0, 0, 0) - V^+)$$

wobei  $b > a \in \mathbb{R}$ .

Betrachten wir nun  $\tilde{\beta}\bar{p} = \tilde{\beta}_0\omega_{\bar{p}}$ . Der Wert  $\tilde{\beta}_0\omega_{\bar{p}}$  wird über  $\bar{p}$  durch  $\tilde{\beta}_0m_0$  minimiert. Somit gilt

$$\begin{aligned} \left| \int d^4\beta f(\beta) e^{\beta\bar{p}} \left( e^{\beta\bar{p}} - 1 \right)^{-2} \right| &\leq e^{-\tilde{\beta}_0\omega_{\bar{p}}} e^{\tilde{\beta}_0m_0} \left( e^{\tilde{\beta}_0m_0} - 1 \right)^{-2} m \int_{D_{\tilde{\beta}}} d^4\beta \\ &\leq e^{-\tilde{\beta}_0|\bar{p}|} e^{\tilde{\beta}_0m_0} \left( e^{\tilde{\beta}_0m_0} - 1 \right)^{-2} m \int_{D_{\tilde{\beta}}} d^4\beta, \end{aligned}$$

also fällt die Funktion  $B$  in  $|\bar{p}|$  mindestens exponentiell ab.  $\square$

Wir werden in kommenden Abschnitten eine Abschätzung für die Funktionen  $\bar{p} \mapsto \left| \omega_{\bar{p}}^2 B(\bar{p}) \right|$  benötigen. Auch sie fallen natürlich exponentiell ab.

**Lemma 6.11** *Sei die Funktion  $\bar{p} \mapsto |B(\bar{p})|$  durch die Funktion  $\bar{p} \mapsto \kappa e^{-\lambda|\bar{p}|}$  majorisiert. Dann gilt unter der Voraussetzung  $\lambda \geq \nu + 1$  auf ganz  $\mathbb{R}^3$  die Abschätzung  $\left| \omega_{\bar{p}}^2 B(\bar{p}) \right| \leq \kappa e^{-\nu|\bar{p}|}$ .*

**Beweis.** Die Relation  $(1 + q^2) e^{-\lambda q} \leq e^{-\nu q}$  ist äquivalent zur Ungleichung

$$(\lambda - \nu) q - \log [1 + q^2] \geq 0.$$

Mittels analytischer Methoden errechnen wir, daß die Funktion  $q \mapsto (\lambda - \nu) q - \log [1 + q^2]$  auf  $\mathbb{R}^{+,0}$  überhaupt nur für  $(\lambda - \nu) < 1$  negative Werte annimmt. Daraus folgt die Aussage des Lemmas.  $\square$

**Lemma 6.12** *Sei  $f \in \mathcal{C}_0^0(V^+, \mathbb{R}^{+,0})$ . Die Funktion*

$$A(\bar{p}) \doteq \int d^4\beta f(\beta) \left( e^{\beta\bar{p}} - 1 \right)^{-1}$$

mit  $\bar{p} = (\omega_{\bar{p}}, \bar{p})$ , besitzt eine in  $|\bar{p}|$  exponentiell abfallende **Minorante**.

**Beweis.** Der Träger von  $f$  ist in einem Doppelkegel  $D^{\tilde{\beta}} \subset V^+$  enthalten, wobei  $\sqrt{\tilde{\beta}^2} = \sup_{\beta \in D_{\tilde{\beta}}} \sqrt{\beta^2}$  und  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, 0, 0, 0)$ . Da  $f > 0$  gilt die Ungleichung

$$\int d^4\beta f(\beta) \left( e^{\beta\bar{p}} - 1 \right)^{-1} \geq \left( e^{\tilde{\beta}\bar{p}} - 1 \right)^{-1} \int d^4\beta f(\beta).$$

Nehmen wir nun

$$\tilde{\beta}\bar{p} = \tilde{\beta}_0\omega_{\bar{p}} < \tilde{\beta}_0(m_0 + |\bar{p}|)$$

und

$$a, b > 0 \Rightarrow \left( e^{a+b} - 1 \right)^{-1} > e^{-a} e^{-b}$$

zu Hilfe, so erkennen wir, daß die Ungleichung

$$\int d^4\beta f(\beta) \left( e^{\beta\bar{p}} - 1 \right)^{-1} \geq e^{-\tilde{\beta}_0|\bar{p}|} e^{-\tilde{\beta}_0m_0} \int d^4\beta f(\beta)$$

gilt, also besitzt die Funktion  $A$  eine in  $|\bar{p}|$  exponentiell abfallende Minorante.  $\square$

### Vorauswahl und Untersuchung einer Menge von Funktionen $A, \sigma$ und $\tau$

Gemäß Lemma (6.11) ist für  $\tau$  mit kompaktem Träger in  $V^+$  die Funktion  $\vec{p} \mapsto \left| \omega_{\vec{p}}^2 B(\vec{p}) \right|$  exponentiell fallend. Im folgenden soll  $\tau$  stets eine Funktion aus  $\mathcal{C}_0^1(V^+, \mathbb{R})$  sein.

Was die Funktionen  $A$  angeht, so wollen wir uns zunächst darauf beschränken, Beispiele von ihnen zu erzeugen und zu untersuchen, die *nicht* exponentiell abfallen. Dies erlaubt uns insbesondere, im weiteren Verlauf der Arbeit die Funktionen  $Z$  aus einer größeren Menge auszuwählen, als es bei (ebenso wie  $|\omega^2 B|$ ) exponentiell abfallendem  $|A|$  möglich wäre.

Eine unmittelbare Folgerung aus Lemma (6.12) kann vorab gezogen werden: Falls  $|A|$  nicht exponentiell abfallen darf, kann  $\sigma$  keinen kompakten Träger in  $V^+$  mehr besitzen. Man halte sich jedoch vor Augen, daß die im nachfolgenden benutzte Bedingung 'A fällt nicht exponentiell' möglicherweise keine prinzipiell *notwendige* ist.

Eine Menge von nicht exponentiell abfallenden Funktionen  $A$  wird von der Menge der Funktionen  $\sigma_{k, \beta_{\max}}$  erzeugt, und soll im folgenden betrachtet werden. Die Funktionen  $\sigma_{k, \beta_{\max}}$  sind nichtnegativ, wie wir noch schnell bemerken.

**Lemma 6.13** *Seien  $0 < k < 1$  und*

$$\sigma_{k, \beta_{\max}}(\beta_0, |\vec{\beta}|) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\bar{\sigma}} \chi_{[0, \beta_{\max}]}(\beta_0) e^{-\frac{1}{(\beta_0 - |\vec{\beta}|)^k}} & \text{falls } \beta \in V^+, \quad |\vec{\beta}| < \beta_0/2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei  $\bar{\sigma}$  die Normierungskonstante  $\bar{\sigma} = \int_{\beta \in V^+, |\vec{\beta}| < \beta_0/2} d^4\beta \chi_{[0, \beta_{\max}]}(\beta_0) e^{-\frac{1}{(\beta_0 - |\vec{\beta}|)^k}}$  ist, und sei

$$\vec{p} \mapsto A_{k, \beta_{\max}}(\vec{p}) \doteq \int d^4\beta \sigma_{k, \beta_{\max}}(\beta_0, |\vec{\beta}|) \frac{1}{e^{\beta \vec{p}} - 1}.$$

Dann ist  $A$  integabel, kugelsymmetrisch, monoton fallend in  $|\vec{p}|$  und es gilt für große Werte  $|\vec{p}|$  die Abschätzung

$$A_{k, \beta_{\max}}(\vec{p}) > c_A \frac{e^{-|\vec{p}|^k/2^k}}{|\vec{p}|^4}$$

mit  $c_A = e^{-\beta_{\max} m_0} 5\pi (e^{-2} - e^{-5}) / \bar{\sigma}$ .

**Beweis.** Die Kugelsymmetrie in  $\vec{p}$  fällt sofort auf, da sowohl  $d^4\beta$  als auch das Produkt  $\beta \vec{p}$  lorentz- und damit insbesondere genau wie  $\sigma_{k, \beta_{\max}}$  drehungsinvariant im Raumanteil von  $\beta$  sind.

Die Ausführung des Winkelanteils von  $\beta$  ergibt, mit  $b = |\vec{\beta}|$  und  $q = |\vec{p}|$ ,

$$A_{k, \beta_{\max}}(\vec{p}) = 2\pi \int_0^\infty d\beta_0 \int_0^{\beta_0} db \frac{b}{q} \sigma_{k, \beta_{\max}}(\beta_0, b) \log \left( \frac{1 - e^{-\beta_0 \omega_q - bq}}{1 - e^{-\beta_0 \omega_q + bq}} \right). \quad (6.20)$$

*Zu Integrabilität und Monotonie* Zunächst bemerken wir, daß die Funktion  $A$  stetig in  $\vec{p}$  ist. Weiterhin läßt das Integral  $\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p} A_{k,\beta_{\max}}(\vec{p})$  obere und untere Abschätzungen zu. So ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p} A_{k,\beta_{\max}}(\vec{p}) \\ &= \frac{8\pi^2}{\bar{\sigma}} \int_0^\infty dq q \int_0^{\beta_{\max}} d\beta_0 \int_0^{\beta_0/2} db b e^{-\frac{1}{(\beta_0-b)^k}} \log \left( \frac{1 - e^{-\beta_0\omega_q - bq}}{1 - e^{-\beta_0\omega_q + bq}} \right) \\ &= \frac{8\pi^2}{\bar{\sigma}} \int_0^{\beta_{\max}} d\beta_0 \int_0^{\beta_0/2} db b e^{-\frac{1}{(\beta_0-b)^k}} \int_0^\infty dq q \log \left( \frac{1 - e^{-\beta_0\omega_q - bq}}{1 - e^{-\beta_0\omega_q + bq}} \right), \end{aligned} \quad (6.21)$$

wobei unter der Bedingung  $b \in [0, \beta_0/2]$  gilt

$$\log \left( \frac{1 - e^{-\beta_0\omega_q - bq}}{1 - e^{-\beta_0\omega_q + bq}} \right) = \log \left( \frac{1 - e^{-\beta_0\omega_q \left(1 + \frac{bq}{\beta_0\omega_q}\right)}}{1 - e^{-\beta_0\omega_q \left(1 - \frac{bq}{\beta_0\omega_q}\right)}} \right) \leq \log \left( \frac{1 - e^{-\beta_0\omega_q \frac{3}{2}}}{1 - e^{-\beta_0\omega_q \frac{1}{2}}} \right)$$

und, wegen  $\log \left( \frac{1-a^3}{1-a} \right) < \frac{3}{2}a$  für  $0 \leq a \leq 1$ ,

$$< \frac{3}{2} e^{-\beta_0\omega_q \frac{1}{2}}.$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^\infty dq q \log \left( \frac{1 - e^{-\beta_0\omega_q - bq}}{1 - e^{-\beta_0\omega_q + bq}} \right) < \int_0^\infty dq q \frac{3}{2} e^{-\beta_0\omega_q \frac{1}{2}} = \frac{3}{\beta_0^2} e^{-\frac{1}{2}\beta_0 m_0} (2 + \beta_0 m_0).$$

Für (6.21) ergibt sich also die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p} A_{k,\beta_{\max}}(\vec{p}) \\ &< \frac{4\pi^2}{\bar{\sigma}} \int_0^{\beta_{\max}} d\beta_0 \frac{3}{\beta_0^2} e^{-\frac{1}{2}\beta_0 m_0} (2 + \beta_0 m_0) \int_0^{\beta_0/2} db b \\ &= \frac{4\pi^2}{\bar{\sigma}} \int_0^{\beta_{\max}} d\beta_0 \frac{3}{\beta_0^2} e^{-\frac{1}{2}\beta_0 m_0} (2 + \beta_0 m_0) \frac{(\beta_0)^2}{8} \\ &= \frac{3\pi^2}{\bar{\sigma}} \left( \frac{4}{m_0} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta_{\max} m_0} (\beta_{\max}^2 m_0^2 + 4\beta_{\max} m_0)}{\beta_{\max} m_0^2} \right) \\ &< 12\pi^2 / \bar{\sigma} m_0. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhalten wir Gewißheit, daß Ausdruck (6.20) nach  $q$  ableitbar ist, die Ableitung überall existiert und stets kleiner oder gleich Null ist, wobei Gleichheit nur in  $q = 0$  angenommen wird. Daraus folgt, daß Ausdruck (6.20) in  $q$  monoton abfällt.

*Zur Asymptotik* Ausgehend von

$$A_{k,\beta_{\max}}(\vec{p}) = \frac{2\pi}{\bar{\sigma}} \int_0^{\beta_{\max}} d\beta_0 \int_0^{\beta_0/2} db \frac{b}{q} e^{-\frac{1}{(\beta_0-b)^k}} \log \left( \frac{1 - e^{-\beta_0\omega_q - bq}}{1 - e^{-\beta_0\omega_q + bq}} \right)$$

erhalten wir durch Ausnutzen der Beziehung  $\log \left( \frac{1-\delta}{1-\varepsilon} \right) \geq \varepsilon - \delta \geq 0$  für  $1 > \varepsilon \geq \delta > 0$  die erste Abschätzung

$$\geq \frac{2\pi}{\bar{\sigma}} \int_0^{\beta_{\max}} d\beta_0 \int_0^{\beta_0/2} db \frac{b}{q} e^{-\frac{1}{(\beta_0-b)^k}} \left( e^{-(\beta_0\omega_q - bq)} - e^{-(\beta_0\omega_q + bq)} \right).$$

Da für  $q \geq 0$  die Ungleichung  $0 < \omega_q - q = \frac{m_0^2}{\omega_q + q} \leq m_0$  gilt, und somit  $e^{-\beta_0 \omega_q} = e^{-\beta_0 \frac{m_0^2}{\omega_q + q}} e^{-\beta_0 q} \geq e^{-\beta_0 m_0} e^{-\beta_0 q}$ , erhalten wir die zweite

$$\geq \frac{2\pi}{\bar{\sigma}} e^{-\beta_{\max} m_0} \int_0^{\beta_{\max}} d\beta_0 \int_0^{\beta_0/2} db \frac{b}{q} e^{-\frac{1}{(\beta_0-b)^k}} \left( e^{-(\beta_0-b)q} - e^{-(\beta_0+b)q} \right).$$

Schränken wir nun den Bereich der Integration ein:

$$\frac{1}{q} \leq \beta_0 - b \leq \frac{2}{q}, \quad \frac{2}{q} \leq b \leq \frac{3}{q}. \quad (6.22)$$

Hier geht ein, daß  $q$  nicht zu klein sein darf, damit diese Ungleichungen noch auf Teilmengen des Trägers von  $\sigma$  gelten. Somit erhalten wir

$$e^{-\frac{1}{(\beta_0-b)^k}} \geq e^{-(\frac{q}{2})^k}$$

und

$$e^{-(\beta_0-b)q} \geq e^{-2}, \quad e^{-(\beta_0+b)q} \leq e^{-5}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.  $\square$

Für  $k < 1$  zeigt die aus der Funktion  $\sigma_{k, \beta_{\max}}$  hervorgehende Funktion  $A_{k, \beta_{\max}}$  das gewünschte langsame Abfallverhalten.

## 6.4 Zwei $\mathcal{S}_O$ -thermische Zustände aus $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}^{*(+)}$ bzw. $\mathcal{F}_{\mathfrak{N}}^{*(+)}$

In diesem Kapitel werden zwei Beispiele von  $\mathcal{S}_O$ -thermischen Zuständen gegeben. Wir benötigen im späteren Verlauf – zwecks Konstruktion von geeigneten Funktionen  $\mathbf{Z}$  – gewisse Hilfsfunktionen, die an dieser Stelle angegeben und analysiert werden.

### 6.4.1 Vorbereitung: Konstruktion und Analyse von Hilfsfunktionen

Betrachten wir zunächst die Menge von Funktionen<sup>23</sup>  $\{s_n, n \in \mathbb{N}\}$  mit

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto s_n(\vec{p}) \doteq \frac{\sin \pi |\vec{p}|}{\pi |\vec{p}|} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{j^2}\right)^{-1} = \prod_{j=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{j^2}\right). \quad (6.23)$$

Es handelt sich um ganze Funktionen, wie wir der zweiten Darstellung unter Zuhilfenahme von Sätzen aus der Funktionentheorie über Funktionenlimites von unendlichen Produkten entnehmen. Der Satz von Paley-Wiener impliziert weiterhin, daß die Fouriertransformierten  $\tilde{s}_n$  der Funktionen  $s_n$  in einer Kugel  $\mathcal{K}_\pi = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x}^2 \leq \pi^2\}$ , also mit Radius  $\pi$ , enthalten sind.

Folgende Lemmata machen uns mit einigen weiteren interessanten Aspekten vertraut. Hierbei sei

$$\mathbb{R} \ni q \mapsto \mathbf{s}_n(q) \doteq \frac{\sin \pi q}{\pi q} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{q^2}{j^2}\right)^{-1} = \prod_{j=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2}{j^2}\right). \quad (6.24)$$

**Lemma 6.14** *Es gilt*

<sup>23</sup>Diese Menge von Funktionen wurde [BAL90], Lemma 3.3 entlehnt.

1.  $q \in [0, n+1] : |\mathbf{s}_n(q)| \leq 1$
2.  $q \geq n+1 : |\mathbf{s}_n(q)| \leq \left(\frac{n}{2q}\right)^{2n-2}$ .

**Beweis.**

1. Ist der zweiten Darstellung von  $\mathbf{s}_n$  in Zeile (6.24) unmittelbar zu entnehmen.
2. Mit vollständiger Induktion anhand der ersten Darstellung in Zeile (6.24). Sei zunächst  $n = 1$  und damit  $q \geq 2$ . Es ist  $|\mathbf{s}_1(q)| = \left|\frac{\sin \pi q}{\pi q(q^2-1)}\right|$ . Für  $q \geq 1$  gilt  $\left|\frac{\sin \pi q}{\pi q}\right| \leq (q-1)$ . Damit ist  $|\mathbf{s}_1(q)| \leq \left|\frac{1}{q+1}\right| \leq 1/3$ . Andererseits ist  $(n/2q)^{2n-2}\Big|_{n=1} = 1$ . Im Fall  $n = 1$  stimmt die Behauptung also. Sei nun  $q \geq (n+1) + 1$  und es gelte

$$|\mathbf{s}_n(q)| \leq \left(\frac{n}{2q}\right)^{2n-2}.$$

Betrachten wir

$$\left|\left(1 - \frac{q^2}{(n+1)^2}\right) \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n-2}}\right| = (q^2 - (n+1)^2) \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n-2} > 1$$

Wir folgern:

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}_n(q)| &\leq \left(\frac{n}{2q}\right)^{2n-2} \underbrace{\left|\left(1 - \frac{q^2}{(n+1)^2}\right) (2q)^2 \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n-2}}\right|}_{>1} \\ &= \left(\frac{n+1}{2q}\right)^{2(n+1)-2} \left|\left(1 - \frac{q^2}{(n+1)^2}\right)\right|, \end{aligned}$$

und mit der Erkenntnis, daß

$$\left|\mathbf{s}_{n+1}(q) \left(1 - \frac{q^2}{(n+1)^2}\right)\right| = |\mathbf{s}_n(q)|$$

folgt der Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$  sofort. □

**Lemma 6.15** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $q \in [0, n]$ . Dann gilt

$$\mathbf{s}_n(q) = \prod_{j=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2}{j^2}\right) \geq e^{-q \log 4}.$$

**Beweis.** Wir schreiben

$$\mathbf{s}_n(q) = \prod_{j=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2}{j^2}\right) = \frac{\Gamma(1+n)^2}{\Gamma(1+n-q)\Gamma(1+n+q)}. \quad (6.25)$$

Durch Ableitung des Logarithmus erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial q} \log \mathfrak{s}_n(q) \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial q^2} \log \mathfrak{s}_n(q) \leq 0$$

für  $0 \leq q \leq n$ . Gleichheit wird nur in 0 angenommen. Folglich handelt es sich auf dem Intervall  $[0, n]$  bei den Funktionen  $\log \mathfrak{s}_n$  und ihren ersten Ableitungen um in  $q$  streng monoton fallende Funktionen. Im Punkt  $q = 0$  nehmen sie den Wert 0 an. Wir können daher jede Funktion  $\log \mathfrak{s}_n$  mit einer linearen Funktion  $[0, n] \ni q \mapsto -c_n q$ ,  $c_n = -\log \mathfrak{s}_n(n)$  nach unten abschätzen.

Es bleibt also zu zeigen  $c_n < \log 4$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \log 4$ .

$$\frac{\log \mathfrak{s}_n(n)}{n} = \frac{\log \frac{(n!)^2}{(2n)!}}{n} = \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{j=1}^n \log j - \sum_{j=1}^{2n} \log j \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n \log j - \sum_{j=n+1}^{2n} \log j \right)$$

Eine Abschätzung der Summen durch geeignete Integrale bringt

$$\frac{1}{n} \left( \int_1^n dx \log x - \int_{n+1}^{2n+1} dx \log x \right) \leq \frac{\log \mathfrak{s}_n(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \left( \int_1^{n+1} dx \log x - \int_{n+1}^{2n} dx \log x \right),$$

wobei beide Seiten gegen  $-\log 4$  streben. Da  $(n!)^2 / (2n)!$  eine fallende Folge ist, wird der Grenzwert  $-\log 4$  von oben angenommen.  $\square$

**Lemma 6.16** Für  $q > n$  gilt

$$\left| \prod_{j=1}^n \left( 1 - \frac{q^2}{j^2} \right)^{-1} \right| > e^{-2q},$$

**Beweis.** Unter der Voraussetzung  $q > n$  bekommen wir sofort

$$\left| \prod_{j=1}^n \left( 1 - \frac{q^2}{j^2} \right)^{-1} \right| > \frac{(n!)^2}{q^{2n}},$$

und mit der Stirlingschen Formel

$$\frac{(n!)^2}{q^{2n}} > \frac{n^{2n}}{e^{2n}} \frac{1}{q^{2n}} > e^{-2n} > e^{-2q}.$$

$\square$

Nun wollen wir eine neue Menge von Funktionen konstruieren durch die Definition

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto t_n(\vec{p}) \doteq \frac{1}{2} [s_n^2(\vec{p}) + s_n^2(\gamma \vec{p})],$$

wobei  $\gamma$  der Goldene Schnitt  $(\sqrt{5} + 1) / 2$  ist. Bevor wir uns den Eigenschaften von  $t_n$  zuwenden, noch ein wichtiges Lemma.

**Lemma 6.17** Es gilt, für  $q \geq 1$ ,

$$\sin^2(\pi q) + \sin^2(\pi \gamma q) \geq \frac{1}{40} \frac{1}{q^4}.$$

**Beweis.** Aus der Zahlentheorie ist bekannt, daß auch die beste Approximation von  $\gamma$  durch eine rationale Zahl  $n/m$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  immer einen  $m$ -abhängigen Fehler hinterläßt. Hierzu existiert z.B. der Liouvillesche Satz über die *diophantische Approximation algebraischer Zahlen*, gegeben u.a. in [Ma92]. Für den Fehler gilt die konkrete Abschätzung

$$\left| \gamma - \frac{n}{m} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}m^2}.$$

Die Nullstellen von  $\sin^2(\pi\gamma \cdot)$  liegen bei  $n/\gamma$ , mit ganzen Zahlen  $n$ . Betrachtet man obige Ungleichung, so bedeutet dies, daß die nächstgelegene Nullstelle von  $\sin^2(\pi \cdot)$ , die bei ganzen Zahlen  $m$  liegt, um mindestens  $1/\sqrt{5}m^2$  entfernt ist, höchstens jedoch um  $1/\gamma^2$ .

Im Intervall  $\left[ s - \frac{1}{2\gamma}, s + \frac{1}{2\gamma} \right]$  um eine Nullstelle  $s$  von  $\sin^2(\pi\gamma \cdot)$  (o.E.  $s = 0$ ) gilt stets die Abschätzung  $\sin^2(\pi\gamma q) \geq 4(\gamma q)^2$ . Eine Ähnliche Abschätzung existiert für  $\sin^2(\pi \cdot)$ , wo im Intervall  $\left[ s - \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2} \right]$  um eine Nullstelle  $s$  die Abschätzung  $\sin^2(\pi q) \geq 4q^2$  gilt. Sei  $m \leq q < m + 1$ . Dann ist folglich

$$\sin^2(\pi\gamma q) + \sin^2(\pi q) \geq 4 \left( (\gamma q)^2 + (\delta - q)^2 \right) > 4 \left( q^2 + (\delta - q)^2 \right),$$

wobei  $\delta \in \left[ \frac{1}{\sqrt{5}(m+1)^2}, \frac{1}{2\gamma} \right]$ . Das Minimum von  $4 \left( q^2 + (\delta - q)^2 \right)$  liegt bei  $q = \delta/2$  und beträgt  $2\delta^2$ . Somit ist  $\sin^2(\pi\gamma q) + \sin^2(\pi q)$  auf  $m \leq q < m + 1$  nach unten durch  $2/5(m+1)^4 > 2/5(2q)^4 = 1/40q^4$  beschränkt.

Betrachten wir nun den umgekehrten Fall, die Annäherung von Nullstellen der Funktion  $\sin^2(\pi \cdot)$  durch die von  $\sin^2(\gamma\pi \cdot)$ . Hier ist  $1/\gamma$  rational zu nähern, aber da  $1/\gamma = \gamma - 1$ , entspricht dies dem vorherigen Fall. Somit erhalten wir die Aussage des Lemmas.  $\square$

Nun können wir uns den Eigenschaften der Funktionen  $t_n$  zuwenden.

**Lemma 6.18** *Die Funktionen  $t_n$  haben folgende Eigenschaften*

1.  $t_n$  ist ganz analytisch
2.  $t_n$  ist kugelsymmetrisch
3.  $\text{supp}(\tilde{t}_n) \subset \mathcal{K}_{2\pi}$
4.  $\forall \vec{p} \in \mathbb{R}^3 : |t_n(\vec{p})| \leq 1$
5.  $|\vec{p}| \geq n + 1 : |t_n(\vec{p})| \leq \left( \frac{n}{2|\vec{p}|} \right)^{4n-4}$
6.  $\forall \vec{p} \in \mathbb{R}^3 : t_n(\vec{p}) \geq \frac{1}{80(\pi\gamma)^2} e^{-(4\gamma+6/e)|\vec{p}|}$

**Beweis.** 1., 2., 3. und 4. folgen unmittelbar aus den Eigenschaften von  $s_n$ . Punkt 5. folgt aus der für  $\gamma q > q \geq n + 1$  gültigen Ungleichung  $|\mathbf{s}_n(q)| \leq (n/2q)^{2n-2}$  bzw.  $|\mathbf{s}_n(\gamma q)| \leq (n/2\gamma q)^{2n-2} < (n/2q)^{2n-2}$ . Bleibt 6. zu zeigen. Wir unterscheiden hierbei drei Fälle.

- $|\vec{p}| \in [0, n]$  und  $\gamma|\vec{p}| \in [0, n]$  : Nach Lemma (6.15) gilt  $\mathbf{s}_n(q) \geq e^{-q \log 4}$ . Daraus ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} t_n(\vec{p}) &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{s}_n^2(|\vec{p}|) + \mathbf{s}_n^2(\gamma|\vec{p}|) \right] \geq \frac{1}{2} \left[ e^{-|\vec{p}|2 \log 4} + e^{-|\vec{p}|2\gamma \log 4} \right] \\ &\geq \frac{1}{2} e^{-|\vec{p}|2 \log 4} \geq \frac{1}{80(\pi\gamma)^2} e^{-(4\gamma+6/e)|\vec{p}|} \end{aligned}$$

- $|\vec{p}| \in [0, n]$  und  $\gamma |\vec{p}| > n$  : Da  $\mathfrak{s}_n^2 \geq 0$ , folgt auch hier

$$t_n(\vec{p}) = \frac{1}{2} [\mathfrak{s}_n^2(|\vec{p}|) + \mathfrak{s}_n^2(\gamma |\vec{p}|)] \geq \frac{1}{2} e^{-|\vec{p}|2 \log 4} \geq \frac{1}{80 (\pi\gamma)^2} e^{-(4\gamma+6/e)|\vec{p}|}$$

- $|\vec{p}| > n$  und  $\gamma |\vec{p}| > n$  : Wir betrachten

$$\begin{aligned} t_n(\vec{p}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2 \pi |\vec{p}|}{(\pi q)^2} \prod_{j=1}^n \left( 1 - \frac{|\vec{p}|^2}{j^2} \right)^{-2} + \frac{\sin^2 \pi \gamma |\vec{p}|}{(\pi \gamma |\vec{p}|)^2} \prod_{j=1}^n \left( 1 - \frac{(\gamma |\vec{p}|)^2}{j^2} \right)^{-2} \right] \\ &\stackrel{\text{Lemma (6.16)}}{\geq} \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-4|\vec{p}|}}{(\pi |\vec{p}|)^2} \sin^2 \pi |\vec{p}| + \frac{e^{-4\gamma|\vec{p}|}}{(\pi \gamma |\vec{p}|)^2} \sin^2 \pi \gamma |\vec{p}| \right] \\ &\geq \frac{e^{-4\gamma|\vec{p}|}}{2 (\pi \gamma |\vec{p}|)^2} [\sin^2 \pi |\vec{p}| + \sin^2 \pi \gamma |\vec{p}|] \\ &\stackrel{\text{Lemma (6.17)}}{\geq} \frac{e^{-4\gamma|\vec{p}|}}{2 (\pi \gamma |\vec{p}|)^2} \frac{1}{40} \frac{1}{|\vec{p}|^4}. \end{aligned}$$

Da  $|\vec{p}|/e \geq \log |\vec{p}|$ , folgt

$$t_n(\vec{p}) \geq \frac{1}{80 (\pi\gamma)^2} e^{-(4\gamma+6/e)|\vec{p}|}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

## 6.4.2 Hauptsatz

**Satz 6.19 (Zwei Beispiele  $\mathcal{S}_O$ -thermischer Zustände des massiven bosonischen Feldes)** Sei  $m_0 = 1$  und sei  $D_{\vec{\beta}} \subset V^+$  der diamantförmige Doppelkegel mit den Spitzen  $3e$  und  $4e$ , wobei  $e = (1, 0, 0, 0)$ . Gegeben sei eine Funktion  $\tau$  durch

$$V^+ \ni \beta \mapsto \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) \doteq \begin{cases} \varepsilon e^{-1/[(\beta-3e)^2(\beta-4e)^2]} & \beta \in D_{\vec{\beta}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$\varepsilon < 10^{-24}$ , und eine Funktion  $\sigma$  durch

$$V^+ \ni \beta \mapsto \sigma(\beta_0, |\vec{\beta}|) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\bar{\sigma}} \chi_{[0,4]}(\beta_0) e^{-\frac{1}{\sqrt{\beta_0-|\vec{\beta}|}}} & \text{falls } \beta \in V^+, |\vec{\beta}| < \beta_0/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei  $\bar{\sigma}$  die Normierungskonstante  $\bar{\sigma} = \int_{\beta \in V^+, |\vec{\beta}| < \beta_0/2} d^4 \beta \chi_{[0,4]}(\beta_0) e^{-\frac{1}{(\beta_0-|\vec{\beta}|)^k}}$  ist, und mit Hilfe von  $\sigma$  und  $\tau$  zwei Funktionen  $A$  und  $B$

$$A(\vec{p}) = \int d^4 \beta \sigma(\beta_0, |\vec{\beta}|) \frac{1}{e^{\beta \vec{p}} - 1} \quad \text{und} \quad B(\vec{p}) = \int d^4 \beta \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) \frac{e^{\beta \vec{p}}}{(e^{\beta \vec{p}} - 1)^2}.$$

Dann wird mittels der Vorschrift

$$\omega_{\mathfrak{N}, \varepsilon}(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) \doteq \omega_\infty(\phi_0^*(x) \phi_0(y)) + \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \overline{N_{\vec{p}}}(x+y) \cos \vec{p}(x-y),$$

die Zweipunktfunktion eines quasifreien  $\mathcal{S}_O$ -thermischen Zustands des massiven bosonischen Feldes  $\mathcal{F}$  definiert, wobei

- $\omega_{\mathfrak{S}} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}}^{*(+)}(\mathcal{O})$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_1$ , falls

$$\overline{N_{\vec{p}}}(x) \doteq A(\vec{p}) + B(\vec{p})(x_1 p_2 - x_2 p_1),$$

und

- $\omega_{\mathfrak{N}} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{N}}^{*(+)}(\mathcal{O})$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{Q}_1$ , falls

$$\overline{N_{\vec{p}}}(x) \doteq A(\vec{p}) + B(\vec{p})(\omega_{\vec{p}} x_1 - p_1 x_0).$$

**Beweis. Übersicht** Der Beweis besteht aus mehreren Teilen. Wir bemerken als erstes, daß die Konstruktion der Zustände  $\omega_{\mathfrak{N},\mathfrak{S}}$  offenbar den in den Sätzen (6.4) und (6.6) gegebenen Methoden folgt. Außerdem stammen nach Konstruktion die oben gegebene Phasenraumteilchendichte, bzw.  $A$  und  $B$ , gemäß den in Kapitel 6.3.1 gemachten Ausführungen von den dichtewertigen Funktionen

$$0 \leq \rho_{\mathfrak{S},x}(\beta) = \sigma(\beta_0, |\vec{\beta}|) + x_2 \frac{\partial}{\partial \beta_1} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) - x_1 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) \quad \text{im Fall } \omega_{\mathfrak{S}}$$

$$\text{bzw. } 0 \leq \rho_{\mathfrak{N},x}(\beta) = \sigma(\beta_0, |\vec{\beta}|) + x_0 \frac{\partial}{\partial \beta_1} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) - x_1 \frac{\partial}{\partial \beta_0} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) \quad \text{im Fall } \omega_{\mathfrak{N}}$$

ab. Die oben gegebene Vorschrift erzeugt somit  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermische Zustände, falls zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt sind

1.  $\forall \beta \in V^+ : 0 \leq \rho_{\mathfrak{S},x}(\beta)$  (im Fall  $\omega_{\mathfrak{S}}$ ) bzw.  $0 \leq \rho_{\mathfrak{N},x}(\beta)$  (im Fall  $\omega_{\mathfrak{N}}$ )
2.  $A$  und  $B$  kugelsymmetrisch sind und die Integrabilitätsbedingungen der Sätze (6.4) und (6.6) erfüllen
3.  $A$  und  $B$  die Positivitätsbedingungen der Sätze (6.4) (im Fall  $\omega_{\mathfrak{N}}$ ) bzw. (6.6) (im Fall  $\omega_{\mathfrak{S}}$ ) erfüllen
4. die Funktionale  $\omega_{\mathfrak{N},\mathfrak{S}}$  stetig in den Testfunktionen sind und die auf den Funktionen  $\rho_x$  aufbauenden Funktionale  $\rho_x[\cdot]$  auf die lokalthermischen Funktionen  $T^{\mathfrak{k}}$  anwendbar sind

Gezeigt wird im folgenden also als erstes die Positivität der Funktionen  $V^+ \ni \beta \mapsto \rho_{\mathfrak{S},x}(\beta), \rho_{\mathfrak{N},x}(\beta)$ . Dann wenden wir uns den oben gegebenen Funktion  $A$  und  $B$ , bzw. den in den Sätzen (6.4) und (6.6) gegebenen Auflagen bezüglich ihrer Integrabilität und Kugelsymmetrie zu. Abschließend wird die Positivität der Funktionale  $\omega_{\mathfrak{N},\mathfrak{S}}$  bewiesen, wobei wir uns der in Kapitel 6.2.3 und Kapitel 6.2.4 vorgestellten Techniken bedienen werden. Schließlich ist die Stetigkeit und Anwendbarkeit von  $\omega_{\mathfrak{N},\mathfrak{S}}$  auf die Menge der lokalthermischen Funktionen  $\{T^{\mathfrak{k}}\}$  zu zeigen, wobei wir auf Ergebnisse aus Kapitel 6.3.2 zurückgreifen.

*Punkt 1: Positivität der Funktionen  $V^+ \ni \beta \mapsto \rho_{\mathfrak{S},x}(\beta), \rho_{\mathfrak{N},x}(\beta)$*  Nach Voraussetzung gilt für  $\omega_{\mathfrak{S}}$ , daß  $x \in \mathcal{P}_1$ , also  $|x_1| < 1$  und  $|x_2| < 1$ . Analytische Methoden zeigen uns, daß die ersten Ableitungen der Funktion  $\tau$  Beträge annimmt, die kleiner als  $\varepsilon$  sind. Somit ist der Betrag des Teils  $\left| x_2 \frac{\partial}{\partial \beta_1} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) - x_1 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \tau(\beta_0, |\vec{\beta}|) \right| < 2\varepsilon < 2 \cdot 10^{-24}$  auf  $D_{\vec{\beta}}$ , überall sonst verschwindet er sogar.

Die Funktion  $\sigma$  hingegen ist nach Konstruktion nichtnegativ und nimmt, wie wir uns überlegen, auf  $D_{\vec{\beta}}$  nur Werte an, die größer oder gleich  $e^{-1/\sqrt{\frac{3}{2}}}/\bar{\sigma}$  sind. Der Wert von  $\bar{\sigma}$  ist jedoch

nicht größer als  $\int_{\beta \in V^+, |\bar{\beta}| < \beta_0/2} d^4\beta \chi_{[0,4]}(\beta_0) = \frac{32\pi}{3}$ . Also ist  $\sigma$  auf  $D_{\bar{\beta}}$  größer als  $10^{-2}$ . Daraus folgt unmittelbar die Positivität von  $\rho_{\mathfrak{E},x}$  auf dem Definitionsbereich von  $\omega_{\mathfrak{E}}$ . Analoge Betrachtungen treffen auf  $\rho_{\mathfrak{N},x}$  und  $\omega_{\mathfrak{N}}$  zu.

*Punkt 2: Die Integrabilitätsbedingungen/Symmetrien von A und B* Zu zeigen ist, daß A und B kugelsymmetrisch und schwach integrabel sind.

Betrachten wir Funktion A. Nach Konstruktion handelt es sich bei ihr um die Funktion  $A_{\frac{1}{2},4}$ , die wir schon in Kapitel 6.3.2 untersucht haben. Sie ist also, gemäß Lemma (6.13) sowohl kugelsymmetrisch als auch (schwach) integrabel.

Zu Funktion B. Da die Funktion  $\tau$ , mit deren Hilfe sie konstruiert ist, einen kompakten Träger in  $V^+$  besitzt, können wir mit Lemma (6.10) folgern, daß sie betragsmäßig durch eine Exponentialfunktion beschränkt ist. Da es sich weiterhin um eine stetige Funktion handelt, ist sie (schwach) integrabel.

Ihre Kugelsymmetrie folgt aus der Lorentzinvarianz (enthält Drehungen) von  $\beta\bar{p}$  und  $d^4\beta$  und der manifesten Drehinvarianz der Funktion  $\tau$ .

*Punkt 3: Die Positivität von  $\omega_{\mathfrak{N},\mathfrak{E}}$*  *Punkt 3: Die Positivität von  $\omega_{\mathfrak{N},\mathfrak{E}}$*  Wir wählen folgende Strategie. Zur gegebenen Funktion A suchen wir zunächst eine passende Menge von Funktionen  $\mathfrak{Z}$ , die es erlaubt, die Ungleichungen (6.14a) für jeden Zustand  $|c\rangle$  mit mindestens einem  $Z \in \mathfrak{Z}$  zu erfüllen, wobei  $c \in \mathcal{C}_0^\infty$  im Ortsraum mit einem Träger, der in  $\mathcal{P}_r^3$  bzw.  $\mathcal{Q}_r^3$  enthalten ist, je nachdem, ob wir den Zustand  $\omega_{\mathfrak{N}} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{N}}^{*(+)}$  oder  $\omega_{\mathfrak{E}} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{E}}^{*(+)}$  betrachten wollen. Hierbei ziehen wir die Kriterien (6.16) zurate.

Anschließend werden wir zeigen, daß die Funktion B der Bedingung (6.14b) für alle  $Z \in \mathfrak{Z}$  genügt.

Die Funktionen A und B erfüllen dann die Positivitätsbedingungen der Sätze (6.4) bzw. (6.6), denn sie erfüllen ja sogar die verschärften Randbedingungen (6.14) mit (mindestens) einer Funktion  $Z \in \mathfrak{Z}$ .

*Punkt 3a: Konstruktion der Menge  $\mathfrak{Z}$*  Es ist das Ziel der hier gemachten Ausführungen, eine Menge  $\mathfrak{Z}$  von Funktionen  $Z_{q_0}$  zu erhalten, die das Kriterium (6.16), gegeben durch

$$\forall q_0 \exists Z_{q_0} \in \mathfrak{Z} : 0 < Z_{q_0}^2(|\vec{p}|) < \frac{1}{k_0} \frac{A(\vec{p})}{2\sqrt{2}(R+r)}, \quad |\vec{p}| \in [0, q_0]$$

$$0 < Z_{q_0}^2(|\vec{p}|) \leq k_1^{- (q_0)^{k_2}}, \quad |\vec{p}| > q_0,$$

mit unserer Funktion  $A = A_{\frac{1}{2},4}$  erfüllt. Zunächst noch ein paar vorbereitende Betrachtungen.

**Definition 6.20** Sei  $a_j = \frac{3}{2j^{1+\varepsilon}}$  und  $\varepsilon > 0$ . Mit der Menge  $\{a_j, j \in \mathbb{N}\}$  und der Funktion  $t_2$ , die in Kapitel 6.4.1, Lemma (6.18) beschrieben ist, definieren wir die Funktionenfolge

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \longmapsto X_N(\vec{p}) = \prod_{j=1}^N t_2(a_j \vec{p}), \quad N \in \mathbb{N}$$

Wir halten fest, daß der Grenzwert der Reihe  $\sum_{j=1}^N a_j$  existiert, es handelt sich um  $3\zeta(1+\varepsilon)/2$ . Somit ist der Träger von  $\widetilde{X}_N$  in  $\mathcal{K}_{3\pi\zeta(1+\varepsilon)}$  enthalten, und darüberhinaus gilt  $X_N(\vec{p}) \geq \frac{1}{80(\pi\gamma)^2} e^{-(6\gamma+9/e)\zeta(1+\varepsilon)|\vec{p}|}$ , wie sich aus den entsprechenden Eigenschaften von  $t_2$  ableiten läßt. Auch ist  $X_N$  analytisch und kugelsymmetrisch.

**Lemma 6.21** Die Funktion  $X_N$  läßt folgende Majorisierung zu:

$$|X_N(\vec{p})| \leq \begin{cases} 1 & 0 \leq \left(\frac{|\vec{p}|}{2}\right)^k < 2 \\ 2^6 \left(\frac{1}{|\vec{p}|}\right)^2 (2^4)^{-\left(\frac{|\vec{p}|}{2}\right)^k} & 2 \leq \left(\frac{|\vec{p}|}{2}\right)^k < N \\ 2^{4(1-N)} & N \leq \left(\frac{|\vec{p}|}{2}\right)^k \end{cases},$$

mit  $k = (1 + \varepsilon)^{-1}$ .

**Beweis.** Die Funktion  $\vec{p} \mapsto t_2(a_j \vec{p})$  besitzt gemäß Lemma (6.18) die bemerkenswerte Eigenschaft, daß für  $a_j |\vec{p}| \geq 3$  die Ungleichung  $|t_2(a_j \vec{p})| \leq |\vec{p}|^{-4}$  gilt. Im Intervall  $\left[0, \frac{3}{a_1}\right] = [0, 2]$  sind alle Funktionen  $|t_2(a_j \vec{p})|$  nur durch 1 abschätzbar, daher ist hier  $\left|\prod_{j=1}^N t_2(a_j \vec{p})\right| \leq 1$ . Diese Abschätzung verbessert sich mit jeder Schwelle  $|\vec{p}| \geq 2^{j^{1+\varepsilon}}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , die überschritten wird. Sind  $J$ , aber nicht  $J + 1$  dieser Schwellen überschritten, so haben wir die Abschätzung  $|X_N(\vec{p})| \leq |\vec{p}|^{-4J}$ , also

$$|X_N(\vec{p})| \leq |\vec{p}|^{-4J} \quad \text{für } 2^{J^{1+\varepsilon}} \leq |\vec{p}| \leq 2^{(J+1)^{1+\varepsilon}}$$

bzw. für  $J \leq (|\vec{p}|/2)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq J+1$ . Wir rechnen, für  $J \geq 1$

$$|\vec{p}|^{-4J} = |\vec{p}|^{-2} |\vec{p}|^{-4(J-1/2)} \leq |\vec{p}|^{-2} 2^{-4(J-1/2)} = 2^2 |\vec{p}|^{-2} 2^{-4J}.$$

Da  $(|\vec{p}|/2)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq J+1$ , haben wir

$$|X_N(\vec{p})| \leq 2^2 |\vec{p}|^{-2} (2^4)^{-\left[\left(\frac{|\vec{p}|}{2}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} - 1\right]} = 2^6 |\vec{p}|^{-2} (2^4)^{-\left(\frac{|\vec{p}|}{2}\right)^k}.$$

Die letztmögliche Schwelle ist mit  $2 \leq J+1 = N$  erreicht. Mit  $|X_N(\vec{p})| \leq |\vec{p}|^{-4J} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{4(N-1)}$  für  $N \leq (|\vec{p}|/2)^k$  bekommen wir also die dritte Abschätzung.  $\square$

Die aus  $X_N$  hervorgehende Funktion

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{p} \mapsto Y_N(\vec{p}) = X_N\left(\frac{\vec{p}}{\alpha^2}\right), \quad k = 1/2$$

mit  $\alpha = 8 \log 2$  erlaubt also die Majorisierungen

$$Y_N(\vec{p})^2 \leq \begin{cases} 1 & 0 \leq \sqrt{|\vec{p}|/2} < 2\alpha \\ 2^{12} \alpha^8 \frac{e^{-\sqrt{|\vec{p}|/2}}}{|\vec{p}|^4} & 2\alpha \leq \sqrt{|\vec{p}|/2} < N\alpha \\ 2^{8(1-N)} & N\alpha \leq \sqrt{|\vec{p}|/2} \end{cases}.$$

Diese Funktionen sind natürlich ebenfalls analytisch und kugelsymmetrisch. Der Träger von  $\widetilde{Y}_N$  ist in  $\mathcal{K}_R$ , mit  $R = \pi^3/2\alpha^2$ , enthalten, und darüberhinaus gilt

$$Y_N(\vec{p})^2 \geq \left[ \frac{1}{80(\pi\gamma)^2} e^{-\frac{(6\gamma+9/\varepsilon)\pi^2}{6\alpha^2} |\vec{p}|} \right]^2.$$

Aus diesen Funktionen wollen wir nun die gewünschte Menge  $\mathfrak{Z}$  konstruieren. Zunächst kümmern wir uns um das im Punkt (6.16a) mit

$$\forall q_0 \exists Z_{q_0} \in \mathfrak{Z} : 0 < Z_{q_0}^2(|\vec{p}|) < \frac{1}{k_0} \frac{A(\vec{p})}{2\sqrt{2}(R+r)}, \quad |\vec{p}| \in [0, q_0], \quad k_0 > 1$$

formulierte Kriterium für geeignete Mengen  $\mathfrak{Z}$  von Funktionen  $Z$  und betrachten daher noch einmal die Funktion  $A = A_{\frac{1}{2},4}$ . Es gilt, gemäß Lemma (6.13) und mit der obigen Abschätzung des Wertes von  $\bar{\sigma}$  :

*A ist integrierbar, kugelsymmetrisch, monoton fallend in  $|\vec{p}|$  und es gilt für große Werte  $|\vec{p}|$  die Abschätzung*

$$A_{\frac{1}{2},4}(\vec{p}) > c_A \frac{e^{-\sqrt{|\vec{p}|/2}}}{|\vec{p}|^4}$$

mit  $c_A = e^{-\beta_{\max} m_0} 5\pi (e^{-2} - e^{-5}) / \bar{\sigma} > e^{-4} (e^{-2} - e^{-5}) > 10^{-3}$ .

Bei dieser Abschätzung ging eine Einschränkung des Bereichs der Integration ein

$$\frac{1}{|\vec{p}|} \leq \beta_0 - b \leq \frac{2}{|\vec{p}|}, \quad \frac{2}{|\vec{p}|} \leq b \leq \frac{3}{|\vec{p}|}.$$

und es war unabdingbar, daß  $|\vec{p}|$  nicht zu klein sein darf, damit diese Ungleichungen noch auf Teilmengen des Trägers von  $\sigma$  gelten. Wir stellen fest, daß  $|\vec{p}|$  mit  $\sqrt{|\vec{p}|/2} \geq 2\alpha$  groß genug ist.

Wir wissen also schon, daß

$$Y_N(\vec{p})^2 \leq \begin{cases} 1 & 0 \leq \sqrt{|\vec{p}|/2} < 2\alpha \\ 2^{12} \alpha^8 \frac{e^{-\sqrt{|\vec{p}|/2}}}{|\vec{p}|^4} & 2\alpha \leq \sqrt{|\vec{p}|/2} < N\alpha \end{cases} \quad (6.26)$$

und

$$A_{\frac{1}{2},4}(\vec{p}) > 10^{-3} \begin{cases} \frac{e^{-2\alpha}}{(8\alpha^2)^4} & 0 \leq \sqrt{|\vec{p}|/2} < 2\alpha \\ \frac{e^{-\sqrt{|\vec{p}|/2}}}{|\vec{p}|^4} & 2\alpha \leq \sqrt{|\vec{p}|/2} < N\alpha \end{cases}. \quad (6.27)$$

Wir werden nun eine von  $N$  unabhängige Konstante  $\delta$  wählen, mit der  $|(\delta Y_N(\vec{p}))^2| < \frac{1}{k_0} \frac{A_{\frac{1}{2},4}(\vec{p})}{2\sqrt{2}(R+r)}$ ,  $k_0 > 1$ , für alle Impulse  $|\vec{p}|$  mit  $0 \leq \sqrt{|\vec{p}|/2} < N\alpha \doteq \sqrt{q_0(N)/2}$ , also  $0 \leq |\vec{p}| < 2\alpha^2 N^2 = q_0(N)$ , gilt. Dies bedeutet, wie wir uns überlegen, daß die Menge der Funktionen  $\delta Y_N$  das erste Kriterium (6.16a) erfüllt.

Nach (6.26) und (6.27) ist eine Konstante  $\delta$  mit  $\delta^2 < \frac{1}{k_0} 10^{-3} \frac{e^{-2\alpha}}{(8\alpha^2)^4} \frac{1}{2\sqrt{2}(R+r)}$  und  $\delta^2 < \frac{1}{k_0} 10^{-3} \frac{1}{2^{12}\alpha^4} \frac{1}{2\sqrt{2}(R+r)}$  mit  $k_0 = 2$  ausreichend. Der Ausdruck  $2\sqrt{2}(R+r)$  nimmt für unsere Funktionen  $Y_N$ , deren Fouriertransformierte  $\widetilde{Y}_N$  Träger in  $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_{\pi^3/2\alpha^2}$  besitzen, und mit dem für den Satz gewählten Radius  $r = 1$  des  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -thermischen Gebiets den Wert  $2\sqrt{2}(\pi^3/2\alpha^2 + 1)$  an. Eine Rechnung ergibt also, daß  $\delta = 10^{-10}$  die Bedingungen erfüllt.

Das zweite Kriterium (6.16b) folgt nun sogar unabhängig davon, welche Konstante  $\delta$  wir wählen, schon unmittelbar aus der Eigenschaft  $Y_N(\vec{p})^2 \leq 2^{8(1-N)}$  für  $N\alpha \leq \sqrt{|\vec{p}|/2}$ , also

$$Y_N(\vec{p})^2 \leq \left(2^{8/\sqrt{2}\alpha}\right)^{-|\vec{p}|^{1/2}} \quad \text{für } |\vec{p}| \geq 2\alpha^2 N^2 = q_0(N).$$

Wir können nun die Menge  $\mathfrak{Z}$  angeben.

**Definition 6.22** Die Menge  $\mathfrak{Z}$  sei gegeben durch  $\{Z_N, Z_N(|\vec{p}|) = \delta Y_N(\vec{p}), N \in \mathbb{N}, \delta = 10^{-10}\}$ .

Diese Menge  $\mathfrak{Z}$  erfüllt das Kriterium (6.16). Da  $\widetilde{Z}_N$  für alle  $N \in \mathbb{N}$  Träger in  $\mathcal{K}_{\pi^3/2\alpha^2}$  besitzt, und dieser also in  $\mathcal{P}_{\pi^3/2\alpha^2}^3 \cap \mathcal{Q}_{\pi^3/2\alpha^2}^3$  enthalten ist, können wir diese Menge in den beiden Fällen  $\omega_{\mathfrak{N}}$  und  $\omega_{\mathfrak{S}}$  verwenden.

Es ist bemerkenswert, daß diese auf den Funktionen  $t_n$  basierende Methode der Definition der Menge  $\mathfrak{Z}$  bei exponentiell fallenden Funktionen  $A$  fehlschlägt. So fällt als erstes auf, daß es eine enge Verwandtschaft zwischen den Konstanten  $\varepsilon$  und  $k$  gibt:  $k = (1 + \varepsilon)^{-1}$ . Die oben eingeführte Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  und mit ihr der Durchmesser der Träger der Funktionen  $\widetilde{\tau}_N, \tau_N \in \mathfrak{Z}$  kann nur konvergieren, wenn  $\varepsilon > 0 \iff k < 1$ . Auch verbessern ähnliche Ansätze, in denen zum Beispiel das Abfallverhalten der Funktionen  $t_2$  besser abgeschätzt wird oder statt der Funktion  $t_2$  alle Funktionen  $t_n, n \in \mathbb{N}$  in Betracht gezogen werden, diese Situation leider nicht. Hierzu eine kurze heuristische Betrachtung: Obwohl  $t_n$  prinzipiell wie  $|\vec{p}|^{-4(n-1)}$  abfällt, wächst die untere Grenze der Anwendbarkeit der Abschätzung wegen der Bedingung  $|\vec{p}| > (n+1)a_n^{-1}$  zu stark an. Dies verhindert wiederum die Konvergenz der durch die  $a_j$  definierten Reihe.

Dennoch ist die hier gezeigte Strategie zum Auffinden von Funktionen  $A$  und  $B$  mittels der Konstruktion einer Menge  $\mathfrak{Z}$  allgemein genug gehalten, um alternative Ansätze aufnehmen zu können. Die Konstruktion einer besseren Menge  $\mathfrak{Z}$  wäre ein guter Ansatzpunkt, um zu versuchen, die  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -Thermalität auch mit exponentiell abfallenden Funktionen  $A$ , also mit Dichten  $\rho$  mit kompakten Träger zu etablieren.

*Punkt 3b: Erfüllung der Bedingung (6.14b) durch die Funktion  $B$  für alle  $Z \in \mathfrak{Z}$*  Wenden wir uns zunächst der Funktion  $B$  selbst zu. Gemäß Lemma (6.10) gilt

$$|B(\vec{p})| \leq e^{-\widetilde{\beta}_0|\vec{p}|} e^{\widetilde{\beta}_0 m_0} \left( e^{\widetilde{\beta}_0 m_0} - 1 \right)^{-2} (\sup |\tau|) \int_{D_{\widetilde{\beta}}} d^4\beta,$$

wobei  $\widetilde{\beta}_0 = 3, m_0 = 1$  nach den Voraussetzungen des Satzes. Wir bekommen somit die Abschätzung

$$|B(\vec{p})| \leq e^{-6|\vec{p}|} \frac{e^3}{(e^3 - 1)^2} \varepsilon \frac{\pi}{24}.$$

Nehmen wir Lemma (6.11) hinzu, erhalten wir für  $\omega^2 B$

$$|\omega_{\vec{p}}^2 B(\vec{p})| \leq \frac{e^3}{(e^3 - 1)^2} \frac{\pi}{24} \varepsilon e^{-2|\vec{p}|} < \frac{\varepsilon}{10^3} e^{-2|\vec{p}|}.$$

Betrachten wir nun abschließend die Funktionen  $Z_N$ . Nach Konstruktion gilt

$$Z_N(|\vec{p}|)^2 \geq \left[ \frac{\delta}{80(\pi\gamma)^2} e^{-\frac{(6\gamma+9/\varepsilon)\pi^2}{6\alpha^2}|\vec{p}|} \right]^2 > \frac{\delta^2}{10^7} e^{-\frac{3}{2}|\vec{p}|}.$$

Somit ist durch die Wahl  $\frac{\delta^2}{10^7} > \frac{\varepsilon}{10^3} \iff \varepsilon < \delta^2/10^4 = 10^{-24}$  (wie im Satz) sichergestellt, daß Kriterium (6.14b) für alle  $Z_N$  mit unserer Wahl von  $\varepsilon$  erfüllt ist.

Die Funktionen  $A$  und  $B$  erfüllen also die Positivitätsbedingungen der Sätze (6.4) bzw. (6.6), denn sie erfüllen sogar die verschärften Randbedingungen (6.14) mit (mindestens) einer Funktion  $Z_N \in \mathfrak{Z}$ .

*Punkt 4: Stetigkeit in den Testfunktionen und Anwendbarkeit auf die lokalthermalen Observablen* Wir bemerken, daß die Funktion  $\sigma_{\frac{1}{2},4}$ , von der unsere Funktion  $A = A_{\frac{1}{2},4}$  abstammt, zum Rand des Vorwärtslichtkegels hin stärker als jedes Polynom in  $\beta^2$  abfällt. Die Funktion  $\tau$  hat kompakten Träger in  $V^+$ , daher wird das Abfallverhalten der Dichten  $\beta \mapsto \rho_x(\beta)$  am Rande von  $\overline{V^+}$  nur noch von der Funktion  $\beta \mapsto \sigma_{\frac{1}{2},4}(\beta)$  bestimmt, die unabhängig von  $x$  ist. Die Störung durch die Funktion  $\tau$  ist, Punkt 1 dieses Beweises folgend, vom Betrag her beschränkt; es läßt sich also auf jeden Fall eine zum Rand von  $V^+$  hin schnell abfallende Dichte  $\sigma$  und eine Konstante  $c > 0$  mit  $\forall x \in \mathcal{O} : c\sigma > \rho_x$  finden.

Die hier konstruierten Zustände  $\omega_{\mathfrak{N},\mathfrak{S}}$  sind somit, Lemma (4.2) in Kapitel 4.1 folgend, *stetig in den Testfunktionen* und definieren gemäß Betrachtungen aus demselben Kontext, Funktionale, die *auf die lokalthermalen Funktionen anwendbar* sind.

Damit ist der Satz bewiesen. □

**Bemerkung.** Der Zustand  $\omega_{\mathfrak{S}}$  ist auf  $\mathcal{P}_1$  definiert. Es existiert somit ein offenes Gebiet  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ , auf dem er für alle Zeiten einen lokalen Zustand darstellt. Dies ist ein Gegenbeispiel zur Annahme, daß die Gebiete lokalen Gleichgewichts in massiven Fall sämtlich in kompakten Mengen eingeschlossen sind.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das von Buchholz, Ojima und Roos entwickelte Konzept zur Charakterisierung von lokalen thermischen Gleichgewichtszuständen auf das Modell des freien bosonischen massiven geladenen Feldes angewandt.

Wesentliche Eckpfeiler der einleitenden zwei Kapitel waren die Spezifizierung und genauere Untersuchung des Modells und der als Referenzzustände benutzten globalen thermischen Gleichgewichtszustände. Hierbei traten natürlich schon einige qualitative Unterschiede zum masselosen bosonischen Fall auf; zu nennen sei hier (neben der Einführung der Masse) die zusätzliche Eichgruppe  $G$  und das zugehörige chemische Potential  $\mu$  als neuer Parameter der globalen Gleichgewichtszustände. Dieser neue Parameter erhält formal durch eine erweiterte Fassung der KMS-Bedingung [AKTH77] Einzug in die Theorie. Auch dieser Aspekt wurde detailliert dargelegt.

Weiterhin wurden dann die konzeptuellen Grundlagen der  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität vorgestellt und auf das Modell angewandt. Hierbei wurden –analog zum Vorgehen in [BOR02]– die lokalthermalen Observablen als Teilraum  $\mathcal{S}_x$  von  $\mathcal{T}_x$  über dem Basisfeld  $\phi$  gewählt und mit den balancierten Wickquadraten des Feldes  $\phi$  bzw. ihren Ableitungen identifiziert. Sodann wurden die zugehörigen thermischen Funktionen  $T^\kappa$  berechnet. Wie gezeigt wurde, sind sie äquivalent zu gewissen Makroobservablen, zu denen einige wichtige –und im folgenden untersuchte– Größen wie der Strom und der Energie-Impulstensor gehören. Auch sind aus ihnen die Erwartungswerte von Temperatur und chemischem Potential unmittelbar ableitbar.

Um diese Menge um weitere interessante und aussagekräftige thermische Funktionen zu erweitern, wurden daraufhin Betrachtungen bezüglich der Abschließbarkeit der zu den lokalthermalen Observablen gehörigen thermischen Funktionen  $T^\kappa$  unter Berücksichtigung der Struktur der  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustände angestellt, und wichtige qualitative Aussagen erhalten. Wir wollten in dieser Arbeit eine gegenüber der Originalarbeit [BOR02] erweiterte Klasse von möglichen Referenzzuständen verwenden, wobei die Erweiterung daraus besteht, auch Zustandsgemische zuzulassen, die Zustände beinhalten, die Gemische von Zuständen aller Temperaturen in  $V^+$  bzw. Beträgen des chemischen Potentials sind, und nicht nur einer kompakten Teilmenge davon.

In diesem Zusammenhang waren weitergehende Betrachtungen des Verhaltens der Funktionen  $T^\kappa$  bei hohen Temperaturen und extremem chemischen Potential und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die möglichen Dichten der Referenzzustände nötig. Wie gezeigt wurde, divergieren die im Definitionsbereich stetigen Funktionen  $T^\kappa$  polynomial am Rand des Temperaturvorwärtslichtkegels und sind stetig bis in den Rand des chemischen Potentials. Daraus folgt wiederum, daß die Dichten der Zustandsgemische am Rand von  $V^+ \ni \beta$  schneller als alle Polynome in  $(\beta^2)$  fallen müssen.

Die Frage, welche (konkreten) thermischen Funktionen der massiven Theorie zulässig sind, also im besagten Abschluß von  $\{T^\kappa\}$  in den Referenzzuständen liegen, erfordert allerdings neuartige Ansätze, die über den Rahmen diese Arbeit hinausgehen und zum Teil schon in anderen Arbeiten [Bro04] geleistet wurden. Leider sind diese Vorarbeiten nicht auf alle Vergleichszustandsgemische anwendbar. Dennoch konnten in diesen externen Vorarbeiten für eine Teilmenge der in dieser Arbeit verwendeten Referenzzustände wichtige Aussagen getroffen und interessante zulässige Makroobservablen identifiziert werden.

Ein weiteres Kapitel beschäftigte sich mit den Transportgleichungen der zulässigen thermischen Größen. Diese Gleichungen wurden vorgestellt und ihre Richtigkeit bewiesen. Mit ihrer Hilfe konnte im Anschluß eine auf eine Idee in [Bu03] zurückgehende Methode zur Konstruktion von Beispielen lokaler thermischer Gleichgewichtszustände entwickelt werden. In diesem

Kontext wurden interessante Aussagen über die Definitionbereiche von  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen gemacht, und der raumzeitliche Verlauf der Phasenraumteilchendichte untersucht und qualitative Aussagen über ihn abgeleitet.

Es stellte sich heraus, daß die Dynamik des massiven Felds viel restriktiver ist als die des masselosen – so sind keine  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zustände des massiven Felds, die in ihrem Definitionsbereich Vorwärtslichtkegel enthalten, wie etwa der HotBang-Zustand, möglich.

Ein weiterer wichtiger qualitativer Unterschied beider Theorien konnte als Vorarbeit zum Hauptteil der Arbeit gezeigt werden. So sind im massiven Fall keine lokalen Gleichgewichtszustände mit scharfer Temperatur möglich, und auch die zusätzliche Freiheit des chemischen Potentials verbessert diese Lage nicht. Ein dem HotBang Zustand verwandter Zustand ist also auch in dieser Hinsicht verboten, und nur statistische Verteilungen der Temperatur sind noch möglich. Die statistischen Fluktuationen könnten jedoch sehr klein sein, und z.B. in der Größenordnung der durch die Masse  $m_0$  definierten Länge liegen.

Im Hauptteil dieser Arbeit wurde unter Anwendung von Ideen von Buchholz [BuPM] die in den vorhergehenden Kapiteln vorbereitete Methode zur Konstruktion von  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -thermischen Zuständen auf das freie massive bosonische Feld angewandt. Hierbei sind im wesentlichen zwei Mengen von Funktionalen und Bedingungen für ihre Positivität vorgestellt worden und auch Techniken, um bei der Konstruktion besagter Funktionale diese Positivitätsbedingungen garantiert zu erfüllen.

Die Gestalt dieser Funktionale kann als 'durch eine kleine Störung beeinflusstes Hintergrundgemisch' interpretieren werden. Zwei unterschiedliche Arten von Störungen wurden untersucht – weitere gilt es zu finden. Die dabei verwendeten Techniken ermöglichen es nun, eine Vielzahl von Zuständen auf gewissen Raumgebieten in expliziter Form zu konstruieren.

Leider ist es im Zeitrahmen dieser Arbeit nicht mehr gelungen, die hier verwendeten konstruktiven Techniken auch auf Zuständen mit kompaktem Temperaturträger in  $V^+$  zu etablieren, bzw. entsprechende Beispiele zu konstruieren. Diese Teilmenge von Zuständen stellt allerdings die einzige dar, auf der neben den zu den lokalthermalen Observablen gehörigen Funktionen  $T^\pm$  auch noch weitere zulässige thermische Funktionen bekannt sind.

Zustände mit kompaktem Temperaturträger zu finden oder die Zulässigkeit einer größeren aussagekräftigen Menge von thermischen Funktionen auf den hier entwickelten Zuständen zu beweisen, wäre also ein Punkt, an dem zukünftige Arbeiten anschließen könnten. Die in dieser Arbeit verwendeten Methoden scheinen in dieser Richtung erweiterbar zu sein und wurden auch dahingehend entwickelt.

Folgender Aspekt der Theorie der  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität erscheint mir besonders bemerkenswert und für die weitergehende Forschung auf diesem Gebiet als Fernziel von Interesse.

Schon lange sind die KMS-Zustände rigorosen Untersuchungen zugänglich. In diesen Zuständen höchster Symmetrie herrscht bemerkenswerterweise eine enge formale Verwandtschaft der Zeittranslationen und dem in ihnen entwickelten Temperaturbegriff. Was dies wirklich bedeutet, ist nicht ganz klar.

Die Methode der  $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ -Thermalität ermöglicht es nun, auch Zustände niedrigerer Symmetrie rigoros zu beschreiben und zu untersuchen. Ein Aspekt dieser Zustände von niedrigerer Symmetrie, der schon in den Originalarbeiten zum masselosen Feld, aber auch im massiven Fall (Kapitel 5.4) wieder zu Tage tritt, ist, daß *der Verlust einer globalen Temperatur mit einem Verlust der vollkommenen Translationsfreiheit des Definitionsbereichs der Zustände einhergeht*. Hier ist natürlich insbesondere der Begriff der möglichen Vergangenheit und Zukunft in die-

sen Zuständen und der diesbezüglichen Dynamik von hohem Interesse – man denke z.B. an intrinsisch definierte Zeitpfeile.

Man könnte die Hypothese wagen, daß auch der Zeitbegriff, den wir in unserer –den  $\mathcal{S}_0$ –thermischen Zuständen doch etwas entrückten– Welt haben, im wesentlichen von thermodynamischer Natur, und z.B. für ein einzelnes Elektron in einem ansonsten leeren Universum bedeutungslos ist. Auch wenn in der Beschreibung 'der Welt des Elektrons' die Zeit formal eingeht, steckt bei der wahrgenommenen Zeit vielleicht etwas konzeptuell Anderes dahinter.

Die Möglichkeit, Fragen dieser Art rigoros anzugehen und dadurch vielleicht das Phänomen 'Zeit' besser zu begreifen, ist meiner Meinung nach ein bedeutendes Potential des Konzepts der  $\mathcal{S}_0$ –Thermalität.

## A Nachtrag einiger Beweise

### A.1 Beweis des Lemmas (2.2)

**Lemma 2.2** Die Distribution  $I^\mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}) \ni (f, g) &\longmapsto I_{f,g}^\mu = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p \pm \mu e)}} \\ &\doteq 2\pi \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ \frac{\tilde{f}(p) \tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e(p \pm \mu e)}} \Big|_{p^0 = \omega_{\vec{p}}} - \frac{\tilde{f}(p) \tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e(p \pm \mu e)}} \Big|_{p^0 = -\omega_{\vec{p}}} \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $e$  zeitartig und  $\beta > 0$  sind, hat folgende Eigenschaften

1.  $I_{f,f}^\mu \geq 0$  für  $|\mu| \leq m_0$
2. Für  $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ ,  $f_i, g_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$  gilt

$$I_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2}^\mu = \lambda_1 \mu_1 I_{f_1, g_1}^\mu + \lambda_2 \mu_1 I_{f_2, g_1}^\mu + \lambda_1 \mu_2 I_{f_1, g_2}^\mu + \lambda_2 \mu_2 I_{f_2, g_2}^\mu$$

3.  $I_{f,g}^\mu$  ist stetig in den Testfunktionen, und zwar im Sinne

$$(f_n, g_n) \xrightarrow{S} (f, g) \quad \Rightarrow \quad \left| I_{f_n, g_n}^\mu - I_{f, g}^\mu \right| \rightarrow 0$$

4.  $I_{f,g}^\mu$  ist stetig in  $\beta e \in V^+$  sowie  $\mu \in (-m_0, m_0)$

**Beweis.**

1. **Positivität.** Betrachte

$$I_{f,f}^\mu = 2\pi \int d^4p \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2)}{1 - e^{-\beta e(p \pm \mu e)}} \left| \tilde{f}(-p) \right|^2$$

Der Vektor  $e$  ist der KMS-Bedingung zufolge zeitartig. Eine Lorentztransformation zu  $e = (|e|, 0) = (1, 0, 0, 0)$  ist also möglich. Somit

$$\begin{aligned} I_{f,f}^\mu &= 2\pi \int d^4p \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2)}{1 - e^{-\beta(p_0 \pm \mu)}} \left| \tilde{f}_0(-p) \right|^2 \\ &= 2\pi \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{1}{1 - e^{-\beta(p_0 \mp \mu)}} \left| \tilde{f}_0(-p) \right|^2 \Big|_{p_0 = \omega_{\vec{p}}} \\ &\quad - 2\pi \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{1}{1 - e^{\beta(p_0 \pm \mu)}} \left| \tilde{f}_0(-p) \right|^2 \Big|_{p_0 = -\omega_{\vec{p}}} \\ &= (I) - (II) \end{aligned}$$

wobei  $f_0$  die Lorentztransformierte von  $f$  ist. Die Aufspaltung des Integrals ist möglich, denn jedes der Einzelintegrale (I) und (II) existiert auch für sich alleine, wie die folgenden Betrachtungen zeigen. Zunächst zwei Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\left| \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \frac{1}{1 - e^{-\beta(p_0 \mp \mu)}} \left| \tilde{f}_0(-p) \right|^2 \Big|_{p_0 = \omega_{\vec{p}}} \right| \\ &\leq \int \frac{d^3\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(p_0 \mp \mu)}} \right| \left| \tilde{f}_0(-p) \right|^2 \Big|_{p_0 = \omega_{\vec{p}}} = \int d^3\vec{p} M_1(\beta, \mu, \vec{p}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left| \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \frac{1}{1 - e^{\beta(p_0 \pm \mu)}} \left| \tilde{f}_0(-p) \right|^2 \Big|_{p_0 = -\omega_{\vec{p}}} \right| \\ & \leq \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \left| \frac{1}{1 - e^{\beta(p_0 \pm \mu)}} \right| \left| \tilde{f}_0(-p) \right|^2 \Big|_{p_0 = -\omega_{\vec{p}}} = \int d^3 \vec{p} M_2(\beta, \mu, \vec{p}) \end{aligned}$$

An den für die Integration von  $M_1$  und  $M_2$  interessanten Bereichen  $|\vec{p}| \rightarrow \infty$  und  $|\vec{p}| \rightarrow 0$  findet man folgendes Verhalten dieser Funktionen.

- (a) Für große  $|\vec{p}|$  ist  $\left| \frac{1}{\omega_{\vec{p}} 1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}} \mp \mu)}} \right| \sim \frac{1}{|\vec{p}|}$  und  $\left| \frac{1}{\omega_{\vec{p}} 1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}} \pm \mu)}} \right| \sim e^{-\beta|\vec{p}|}$ .
- (b) Für  $|\vec{p}| \sim 0$  finden wir drei Fälle
- ' $\omega_{\vec{p}} \pm \mu \geq m_0 \pm \mu > 0$ '. Hier gibt es die Abschätzungen  $1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}} \mp \mu)} \geq k_0 > 0$  und  $0 > k_1 \geq 1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}} \pm \mu)}$
  - ' $|\mu| = m_0 \neq 0$ '. Betrachten wir hier  $|1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}} - |\mu|)}| \sim |\vec{p}|^2 \sim |1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}} - |\mu|)}|$  und  $1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}} + |\mu|)} \geq k_0 > 0$  sowie  $0 > k_1 \geq 1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}} + |\mu|)}$ .
  - ' $|\mu| = m_0 = 0$ '. Betrachten wir hier  $|1 - e^{-\beta\omega_{\vec{p}}}| \sim |\vec{p}| \sim |1 - e^{\beta\omega_{\vec{p}}}|$ . Dieser Fall ist im Modell massiver Felder nicht möglich, spielt aber in einer späteren Betrachtung eine Rolle.

Da  $\tilde{f}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  und damit schnellfallend und beschränkt ist, folgt unmittelbar, daß  $M_1$  und  $M_2$  auf jedem der interessanten Bereiche und damit auch insgesamt integrierbar sind. Daher existieren die Integrale (I) und (II) und wir können  $I_{\tilde{f},f}^\mu$  wie oben gezeigt zerlegen. Weiterhin gilt (I)  $\geq 0$  und  $-(II) \geq 0$ , denn für  $\omega_{\vec{p}} \pm \mu \geq m \pm \mu \geq 0$  ist  $1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}} \pm \mu)} \geq 0$  und  $0 \geq 1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}} \pm \mu)}$ . Damit wird  $I_{\tilde{f},f}^\mu$  größer Null, falls der Träger von  $\tilde{f}_0$  einen nichtleeren Schnitt mit der Massenschale vom Maß  $> 0$  hat, und anderenfalls gleich Null. Der Fall, daß  $I_{\tilde{f},f}^\mu$  kleiner Null wird, ist unter den gegebenen Voraussetzungen offenbar nicht möglich.

Allerdings können wir unter der Voraussetzung  $|\mu| > m$  (o.E.  $\mu < -m$ ) stets ein  $f \neq 0$  finden, sodaß

$$I_{\tilde{f},f}^{\mu,-} = 2\pi \int d^4 p \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2)}{1 - e^{-\beta(p_0 - \mu)}} \left| \tilde{f}_0(-p) \right|^2 < 0.$$

Um dies zu sehen, konstruieren wir<sup>24</sup> eine Funktion  $f_0$  mit  $\tilde{f}_0(p) = 0$  für  $p_0 < m$  und  $p_0 > -\mu$ , so wird (I) = 0 und (II) < 0, da auf dem Träger von  $\tilde{f}_0$  die Funktion  $1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}} + \mu)}$  nur negative Werte annimmt. Diese Funktionen sind zwar nicht in der Klasse  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$  enthalten, können aber durch Funktionen aus dieser Klasse beliebig gut approximiert werden.

2. **Linearität.** Die Linearität in den Testfunktionen ist durch die Linearität der Fouriertransformation auf den Testfunktionen sowie die Linearität des Integrals gegeben.
3. **Stetigkeit in den Testfunktionen im Sinne der Schwartzraumtopologie.** Betrachten wir die Halbnorm  $\|\cdot\|$  auf dem Schwartzraum  $\mathcal{S}$ , die durch

$$\|f\| = \sup_{p^2 = m_0^2} \left| (p^2 + m_0^2) \tilde{f}(p) \right|$$

<sup>24</sup>Dies ist nun möglich, da  $(0, \mu - \omega_{\vec{p}}) \neq \emptyset$

definiert ist. Die Testfunktionen aus  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ , die zur Definition der Algebra  $\mathcal{F}$  benutzt werden, bilden eine Teilmenge des Schwartzraums, und daher auch ihre Fouriertransformierten. Wir überlegen uns, daß aus dem Übergang  $f_n \xrightarrow{S} f$ , also im Sinne der Schwartzraumtopologie, die Konvergenz  $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$  folgt. Betrachten wir weiterhin

$$I_{f,g}^\mu = 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ \frac{\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e(p\pm\mu e)}} \Big|_{p_0=\omega_{\vec{p}}} - \frac{\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)}{1 - e^{-\beta e(p\pm\mu e)}} \Big|_{p_0=-\omega_{\vec{p}}} \right\}.$$

Wählen wir nun das Bezugssystem, in dem  $e = (1, 0, 0, 0)$  ist, wobei  $f_0, g_0$  die  $f$  und  $g$  entsprechenden lorentztransformierten Funktionen sind, so ergibt sich daraus die Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_{f,g}| &\leq 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(p_0\pm\mu)}} \tilde{f}_0(p)\tilde{g}_0(-p) \Big|_{p_0=\omega_{\vec{p}}} \right| \\ &\quad + 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(p_0\pm\mu)}} \tilde{f}_0(p)\tilde{g}_0(-p) \Big|_{p_0=-\omega_{\vec{p}}} \right| \\ &= 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(p_0\pm\mu)}} \frac{1}{\omega_{\vec{p}}^4} \left( \omega_{\vec{p}}^4 \tilde{f}_0(p)\tilde{g}_0(-p) \right) \Big|_{p_0=\omega_{\vec{p}}} \right| \\ &\quad + 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(p_0\pm\mu)}} \frac{1}{\omega_{\vec{p}}^4} \left( \omega_{\vec{p}}^4 \tilde{f}_0(p)\tilde{g}_0(-p) \right) \Big|_{p_0=-\omega_{\vec{p}}} \right| \\ &\leq 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{1}{\omega_{\vec{p}}^4} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} - \frac{1}{1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} \right) \\ &\quad \times \sup_{p^2=m_0^2} \left| (p^2 + m_0^2) \tilde{f}_0(p) \right| \sup_{p^2=m_0^2} \left| (p^2 + m_0^2) \tilde{g}_0(p) \right| \\ &= \sup_{p^2=m_0^2} \left| (p^2 + m_0^2) \tilde{f}_0(p) \right| \sup_{p^2=m_0^2} \left| (p^2 + m_0^2) \tilde{g}_0(p) \right| \\ &\quad \times 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{1}{\omega_{\vec{p}}^4} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} - \frac{1}{1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} \right) \\ &= \|f_0\| \|g_0\| 2\pi \int d^3\vec{p} \frac{1}{\omega_{\vec{p}}^5} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} - \frac{1}{1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} \right) \end{aligned}$$

Hier treten drei Fälle auf:

- ' $|\mu| < m$ '. Es gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} - \frac{1}{1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} \right| \leq \left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(m\mp\mu)}} - \frac{1}{1 - e^{\beta(m\pm\mu)}} \right| \doteq C_1.$$

Wir erhalten

$$|I_{f,g}| \leq \|f_0\| \|g_0\| 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{C_1}{\omega_{\vec{p}}^4} = \|f_0\| \|g_0\| \frac{\pi C_1}{2m^2}$$

- ' $|\mu| = m > 0$ '. Für kleine  $|\vec{p}|$  ist  $\left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} - \frac{1}{1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} \right| \sim \frac{1}{|\vec{p}|^2}$  und für große  $|\vec{p}|$  ist  $\left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} - \frac{1}{1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} \right| \sim 1$ . Daher ist  $\frac{1}{\omega_{\vec{p}}^5} \left| \frac{1}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} - \frac{1}{1 - e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} \right|$  integrierbar

und wir erhalten

$$|I_{f,g}| \leq \|f_0\| \|g_0\| C_2$$

- '| $\mu| = m = 0$ '. Für kleine  $|\vec{p}|$  ist diesmal  $\left| \frac{1}{1-e^{-\beta\omega_{\vec{p}}}} - \frac{1}{1-e^{\beta\omega_{\vec{p}}}} \right| \sim \frac{1}{|\vec{p}|}$ , und für große  $|\vec{p}|$  ist wie im vorigen Fall  $\left| \frac{1}{1-e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} - \frac{1}{1-e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} \right| \sim 1$ . Daraus folgt wiederum die Integrierbarkeit des Terms  $\frac{1}{\omega_{\vec{p}}^3} \left| \frac{1}{1-e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\mp\mu)}} - \frac{1}{1-e^{\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} \right|$  und somit erhalten wir analog zu den beiden vorhergehenden Fällen das Ergebnis

$$|I_{f,g}| \leq \|f_0\| \|g_0\| C_3.$$

Mit Hilfe der Linearität von  $I$  können wir nun die Aussage über die Stetigkeit von  $I$  in den Testfunktionen unmittelbar folgern.

4. **Stetigkeit in  $\beta e \in V^+$  sowie  $\mu \in (-m_0, m_0)$ .** Die Funktionen  $\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{\tilde{f}(\vec{p})\tilde{g}(-\vec{p})}{1-e^{-\beta e(\vec{p}\pm\mu e)}} \Big|_{p_0=\pm\omega_{\vec{p}}}$  sind stetig in  $\beta e \in V^+$  und  $\mu \in (-m_0, m_0)$ . Da sie außerdem innerhalb der Parametergrenzen  $\beta e \in V^+$  und  $\mu \in (-m_0, m_0)$  stetig in  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  und weiterhin über  $\mathbb{R}^3$  integrierbar sind, folgt die Behauptung sofort aus der Stetigkeit des Integraloperators.

□

## A.2 Beweis des Lemmas (2.3)

**Lemma 2.3** Die Funktion  $I_{f,g}^\mu$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto I_{f,g}^\mu(t) = 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m_0^2)}{1 - e^{-\beta e(p\pm\mu e)}} e^{ipet}$$

wobei  $f$  und  $g$  Testfunktionen aus  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ ,  $e$  ein zeitartiger Einheitsvektor und  $\beta > 0$  sind, ist analytisch und beschränkt im Streifen  $S_\beta \doteq \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \beta\}$  und stetig an seinen Rändern.

**Beweis.**

1. **Analytizität im Inneren des Streifens  $S_\beta$ .** Betrachten wir  $z \in S_\beta$ . Damit erhalten wir im Lorentzsystem, in dem  $e$  in Eigenzeitrichtung zeigt,

$$\begin{aligned} I_{f,g}^\mu(z) &= 2\pi \int d^4p \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \frac{\varepsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2)}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} e^{i\omega_{\vec{p}}z} \\ &= 2\pi \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \Big|_{p_0=\omega_{\vec{p}}} \frac{e^{i\omega_{\vec{p}}z}}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} - \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \Big|_{p_0=-\omega_{\vec{p}}} \frac{e^{-i\omega_{\vec{p}}z}}{1 - e^{-\beta(-\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} \right\} \end{aligned}$$

Da  $e^{i\omega_{\vec{p}}z}$  analytisch in  $z$  ist, bleibt zu zeigen, daß man Integration und Differentiation vertauschen kann. Für die Folge  $g_n = \frac{e^{i\omega_{\vec{p}}(z+h_n)} - e^{i\omega_{\vec{p}}z}}{h_n}$ , wobei  $h_n$  eine komplexe Nullfolge ist, gilt die Abschätzung  $|g_n| < 2e^{\omega_{\vec{p}}|\text{Im } z|}$  für fast alle  $n$ . Die Ausdrücke

$$2\pi \int d^3\vec{p} \frac{1}{\omega_{\vec{p}}} \left| \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \Big|_{p_0=\pm\omega_{\vec{p}}} \frac{e^{\mp i\omega_{\vec{p}}|\text{Im } z|}}{1 - e^{-\beta(\pm\omega_{\vec{p}}\pm\mu)}} \right|$$

existieren ( $\pm_1$  und  $\pm_2$  seien dabei zwei voneinander unabhängige Symbole) nach Erkenntnissen im Beweis des Lemmas (2.2) in Verbindung mit einer Betrachtung des Verhaltens von  $e^{\mp_1 \omega_{\vec{p}} |\operatorname{Im} z|} (1 - e^{-\beta(\pm_1 \omega_{\vec{p}} \pm_2 \mu)})^{-1}$  im Inneren von  $S_\beta$ . Falls das Vorzeichen von  $\mp_1 \omega_{\vec{p}} |\operatorname{Im} z|$  negativ ist, ist nichts mehr zu zeigen; im anderen Fall verhält dieser Term sich für kleine  $|\vec{p}|$  wie  $(1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}} \pm_2 \mu)})^{-1}$  und für große  $|\vec{p}|$  wie  $e^{-\omega_{\vec{p}}(\beta - |\operatorname{Im} z|)}$  ( $< 1$  im Inneren). Somit folgt die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation aus dem Satz über dominierte Konvergenz.

2. **Stetigkeit an den Rändern des Streifens  $S_\beta$ .** Der Term

$$\frac{1}{\omega_{\vec{p}}} \left| \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \Big|_{p_0 = \pm_1 \omega_{\vec{p}}} \frac{e^{\mp_1 \omega_{\vec{p}} z}}{1 - e^{-\beta(\pm_1 \omega_{\vec{p}} \pm_2 \mu)}} \right|$$

ist stetig in  $z$ . Wie obiger Absatz zeigt, stellt er eine im (abgeschlossenen) Streifen  $S_\beta$  Lebesgue-integrable Funktion dar, die durch die ebenfalls Lebesgue-integrable Funktion

$$\frac{1}{\omega_{\vec{p}}} \left| \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \Big|_{p_0 = \pm_1 \omega_{\vec{p}}} \frac{e^{\omega_{\vec{p}} \beta}}{1 - e^{-\beta(\pm_1 \omega_{\vec{p}} \pm_2 \mu)}} \right|$$

dominiert wird. Damit folgt aus bekannten Sätzen, daß  $I_{f,g}^\mu(z)$  eine stetige Funktion ist.

3. **Beschränktheit im Streifen  $S_\beta$ .** Sei  $z = (r + is) \in S_\beta$ . Betrachte

$$\begin{aligned} \left| I_{f,g}^\mu(z) \right| &\leq 2\pi \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left| \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \Big|_{p_0 = \omega_{\vec{p}}} \frac{e^{-\omega_{\vec{p}} s}}{1 - e^{-\beta(\omega_{\vec{p}} \pm \mu)}} \right| \\ &\quad + 2\pi \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left| \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \Big|_{p_0 = -\omega_{\vec{p}}} \frac{e^{\omega_{\vec{p}} s}}{1 - e^{-\beta(-\omega_{\vec{p}} \pm \mu)}} \right| \end{aligned}$$

Im ersten Summanden ist der Integrand für alle Werte von  $s$  stets kleiner als oder gleich groß wie im Fall  $s = 0$ . Im zweiten geht für große  $|\vec{p}|$  der Term  $e^{\omega_{\vec{p}} s} (1 - e^{-\beta(-\omega_{\vec{p}} \pm \mu)})^{-1}$  wie  $e^{\omega_{\vec{p}}(s-\beta)}$ , also (da  $0 \leq s \leq \beta$ ) ist er entweder konstant 1 oder sogar exponentiell fallend und somit ist wie im ersten Summanden eine Abschätzung durch den Fall  $s = 0$  möglich. Da  $r$  offenbar keine Rolle spielt, ist  $I_{f,g}^\mu(z)$  im ganzen Streifen beschränkt.

□

### A.3 Beweis der Vertauschbarkeit von Summenbildung, Integration und Ableitung, die in Satz (4.4) benötigt wird

**Lemma A.1** 1. Für  $r, m \in \mathbb{N}^0$ ,  $r \leq m$  und  $(\beta, \mu) \in V^+ \times (-m_0, m_0)$  gilt

$$\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu})} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu})}.$$

2. Für  $r, m \in \mathbb{N}^0$ ,  $r \leq m$ ,  $m_0, \alpha \in \mathbb{R}^{+,0}$  und  $\mu \in [-m_0, m_0]$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-nq - n\alpha(m_0 \mp \mu)} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0 \mp \mu)} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq}. \end{aligned}$$

3. Für  $r, m \in \mathbb{N}^0$ ,  $r \leq m$ ,  $m_0, \alpha \in \mathbb{R}^+$ , also  $\beta \in V^+$ , und  $\mu \in [-m_0, m_0]$  gilt

$$\begin{aligned} \nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0 \mp \mu)} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \left( \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0 \mp \mu)} \int_0^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} \right). \end{aligned}$$

**Beweis.**

1. Der Term  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} x^n = \text{Li}_m(x)$  ist eine auf  $(-1, 1)$  definierte  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion mit der Eigenschaft  $\frac{d}{dx} \text{Li}_m(x) = \frac{1}{x} \text{Li}_{m-1}(x)$ , also

$$\frac{d}{dx} \text{Li}_m(e^x) = \text{Li}_{m-1}(e^x).$$

Somit

$$\begin{aligned} \nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu})} &= \nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \text{Li}_m \left( e^{-n(\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu})} \right) \\ &= \left( \prod_{i=1}^r \bar{p}^{\lambda_i} \right) \text{Li}_{m-r} \left( e^{-n(\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu})} \right). \end{aligned}$$

Für  $r \leq m$  und  $0 \leq x < 1$  wird  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m-r}} x^n$  durch  $\frac{1}{1-x^{-1}}$  majorisiert, und  $x = e^{-n(\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu})}$ ,  $(\beta, \mu) \in V^+ \times (-m_0, m_0)$  erfüllt diese Voraussetzung. Somit wird

$$\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} e^{-n(\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu})}$$

durch

$$\left( \prod_{i=1}^r \bar{p}^{\lambda_i} \right) \frac{1}{1 - e^{\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu}}}$$

majorisiert. Das Integral  $\int \frac{d^3 \vec{p}}{\omega_{\vec{p}}} \left( \prod_{i=1}^r \bar{p}^{\lambda_i} \right) \frac{1}{1 - e^{\beta \vec{p} \pm \sqrt{\beta^2 \mu}}}$  existiert. Daraus folgt die Behauptung. qed

2. Es gilt  $0 < e^{-nq-n\alpha(m_0\mp\mu)} < e^{-nq}$ . Somit ist

$$f_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^m} e^{-nq-n\alpha(m_0\mp\mu)} \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^m} e^{-nq} \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha}$$

eine monoton steigende Folge von integrierbaren Funktionen von  $q$ . Die Folge  $X_N$  der Integrale

$$X_N \doteq \int_0^\infty dq f_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq}$$

ist beschränkt, da nach Lemma (4.3) die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} \\ &< \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \frac{1}{n^2} [1 + \sqrt{2m_0\alpha}] \\ &< [1 + \sqrt{2m_0\alpha}] \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{m+2}} \end{aligned}$$

gilt. Mit dem Satz über monotone Konvergenz folgt nun die Behauptung. qed

3. Auf dem Bereich  $(\beta, \mu) \in V^+ \times [-m_0, m_0]$  stellen die Terme

$$\frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq}$$

stetig differenzierbare Funktionen dar. Zu zeigen ist daher noch die gleichmäßige Konvergenz von

$$\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r} \left( \frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} \right)$$

auf jedem Kompaktum  $K \subset V^+ \times [-m_0, m_0]$ . Es genügt jedoch, diese gleichmäßige Konvergenz für

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{m-s}} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \frac{\partial^{r-s}}{\partial \alpha^{r-s}} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq}$$

mit  $s \in \mathbb{N}^0$ ,  $s \leq r$  zu beweisen, da der Operator  $\nabla^{\lambda_1} \dots \nabla^{\lambda_r}$  bei der Wirkung auf

$$\frac{1}{n^m} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq}$$

die Terme

$$\frac{\beta^{\lambda_{i_1}} \dots \beta^{\lambda_{i_s}}}{\alpha^r} \frac{1}{n^{m-s}} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \frac{\partial^{r-s}}{\partial \alpha^{r-s}} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq}$$

hervorbringt, mit  $\{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, r\}$ .

Man schließt mit dem Lemma (4.3), daß

$$\frac{1}{n^{m-s}} e^{-n\alpha(m_0\mp\mu)} \frac{\partial^{r-s}}{\partial \alpha^{r-s}} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + 2qm_0\alpha} e^{-nq} < \frac{1}{n^{m-s+3/2}} \frac{1}{\alpha^{r-1/2}} \frac{(2r-1)!!}{2^{r-1/2}} \sqrt{m_0},$$

und da die Aussage  $m-s+3/2 > 1$  gilt und der Wert von  $\frac{1}{\alpha^{r-1/2}}$  auf jedem Kompaktum beschränkt ist, folgt die Behauptung. □

## B Einheiten, physikalische und mathematische Konventionen

**Einheiten** Es werden die natürlichen Einheiten benutzt, in denen

$$\hbar = k_B = c = 1$$

gilt.

**Der Minkowskiraum** Die Feldalgebra  $\mathcal{F}$  des Modells lebt auf dem Minkowskiraum  $M = (\mathbb{R}^4, g)$ , dessen indefinites Skalarprodukt die Signatur

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

trägt. Die Elemente des Minkowskiraums, z.B.  $v, w$ , werden als  $v = (v_0, \vec{v})$ ,  $w = (w_0, \vec{w})$  notiert. Die Auswertung des indefiniten Skalarprodukts, das mit der Minkowskimetrik gebildet wird, schreibt sich kurz als

$$wv = w_\nu v_\mu g^{\mu\nu} = w_0 v_0 - \vec{w}\vec{v}.$$

Wie üblich, werden bei einer Summation *griechische* Indizes verwendet, falls Werte von 0 bis 3, und *lateinische*, falls Werte von 1 bis 3 durchlaufen werden.

**Fouriertransformationen** Für die Fouriertransformation wird folgende Konvention benutzt.

$$d(p) = \tilde{D}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x D(x) e^{-ipx}$$

$$D(x) = \hat{d}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p d(p) e^{ipx}.$$

Es gilt

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx}.$$

**Schriftsatzkonvention** Generell gilt, daß wenn eine von einem Vektor abhängige Funktion nur vom Betrag des Vektors abhängig ist, die korrespondierende, den Betrag des Vektors als Argument erhaltende Funktion in Schreibmaschinenschrift gehalten wird.

$$\vec{p} \mapsto f(\vec{p})$$

$$|\vec{p}| \mapsto \mathfrak{f}(|\vec{p}|) = f(\vec{p}).$$

## C Symboltabelle

$\nabla^\lambda$	Ableitungsoperator, $\nabla^\lambda \doteq \frac{\partial}{\partial \beta_\lambda} - \frac{\beta^\lambda}{\sqrt{\beta^2}} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ (Kapitel 6.1)
$\square$	D'Alambert-Operator, $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \Delta$
$\alpha_{\Lambda, a}$	Automorphismus, der die Wirkung des Element $(\Lambda, a)$ der eigentlichen orthochronen Poincarégruppe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ auf der Feldalgebra $\mathcal{F}$ implementiert (Kapitel 1.2.1)
$\alpha_a$	Automorphismus, der die zum Vierervektor $a$ gehörende Translation auf der Feldalgebra $\mathcal{F}$ implementiert (Kapitel 1.2.1)
$\mathfrak{A}$	die Observablenalgebra, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{F}$ (Kapitel 1.2.2)
$\mathfrak{A}(\mathcal{O})$	die Observablenalgebra, $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{O})$ (Kapitel 1.2.2)
$\beta$	inverse Temperatur, je nach Kontext als reelle Zahl $1/k_B T$ verstanden oder als Viervektor $\beta^\mu = e^\mu/k_B T$ mit einem Einheitsvektor $e$ , $e^2 = 1$
$B$	eine Teilmenge von $\overline{V^+}$
$B_c$	eine kompakte Teilmenge von $V^+$
$\mathcal{C}_{\beta, \mu}$	die Menge thermischer Vergleichszustände mit Temperatur $\beta$ und chemischem Potential $\mu$
$\mathcal{C}_{B, M}$	die Menge thermischer Vergleichszustände mit Temperaturträger in $B$ und Träger des chemischen Potentials in $M$
$\mathcal{C}$	Auswahlmenge aller thermischer Vergleichszustände
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$	die Menge der $k$ -mal differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$	die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$
$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$	die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger
$\partial_\nu$	Ableitungsoperator, $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ , (bzw. statt $x$ eine andere, sich aus dem Kontext ergebende, Variable einsetzen)
$\partial_\zeta^{\underline{\kappa}}$	mit $\underline{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m)$ gilt $\partial_\zeta^{\underline{\kappa}} = \partial_{\zeta_{\kappa_1}} \dots \partial_{\zeta_{\kappa_m}}$
$\mathcal{F}(\mathcal{O})$	die Feldalgebra von Operatoren, die im offenen Gebiet $\mathcal{O}$ lokalisiert sind, mit Eichgruppe $U(1)$ (Kapitel 1.1.1)
$\mathcal{F}$	die Feldalgebra aller lokalen Operatoren, ausgestattet mit der Eichgruppe $U(1)$ (Kapitel 1.1.1)
$\mathcal{F}^{*(+)}$	die Menge der Zustände über $\mathcal{F}$ (Kapitel 1.3)
$\mathcal{F}_{\mathfrak{N}}^{*(+)}$	eine Menge nichtstationärer lokaler Zustände über $\mathcal{F}$ (Kapitel 6.2.1)
$\mathcal{F}_{\mathfrak{E}}^{*(+)}$	eine Menge stationärer lokaler Zustände über $\mathcal{F}$ (Kapitel 6.2.2)

- $\phi(x)$  eine quadratische Form (Kapitel 3.1.2)
- $\phi_0(x)$  das Basisfeld (Kapitel 3.1.2)
- $:\phi_0^2:(x)$  das normalgeordnete Quadrat des Basisfeldes  $\phi_0(x)$  (Kapitel 3.1.3)
- $\varphi$  ein generisches Funktional auf  $\mathcal{F}$
- $\gamma_g$  Automorphismus, der die Wirkung der Eichgruppe  $U(1)$  auf der Feldalgebra  $\mathcal{F}$  implementiert (Kapitel 1.2.2)
- $\mathcal{K}_r$  Kugel mit Radius  $r$  um den Nullpunkt  $\mathcal{K}_r = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x}^2 \leq r^2\}$
- $L_{1,\rho}$  die Menge  $L_1(\overline{V^+} \times [-m_0, m_0], d\rho(\beta, \mu))$  (Kapitel 4)
- $M$  der Minkowskiraum  $M = (\mathbb{R}^4, \eta)$  (siehe oben)
- $\mathbb{N}$  die natürlichen Zahlen ohne Null
- $\mathbb{N}^0$  die natürlichen Zahlen mit Null
- $\mathcal{N}(\phi_0^p)_{q,x}$  die Menge der die Potenzen  $:\phi_0^p:(x)$  von  $\phi_0$  approximierenden Felder mit Approximationsparameter  $q$  (Kapitel 3.1.3)
- $\mathcal{P}_+^\uparrow$  die eigentliche orthochrone Poincarégruppe
- $\mathcal{P}_R$  eine Teilmenge des Minkowskiraums,  $\mathcal{P}_R \doteq \{x \in \mathbb{R}^4, x_0^2 + x_1^2 < R^2\}$
- $\mathcal{P}_R^3$  eine Teilmenge des Minkowskiraums,  $\mathcal{P}_R^3 \doteq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, x_1^2 < R^2\}$
- $\mathcal{Q}_R$  eine Teilmenge des Minkowskiraums,  $\mathcal{Q}_R \doteq \{x \in \mathbb{R}^4, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$
- $\mathcal{Q}_R^3$  eine Teilmenge des Minkowskiraums,  $\mathcal{Q}_R^3 \doteq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$
- $\mathcal{Q}_{m,x}$  der Raum quadratischer Formen am Punkt  $x$  mit Parameter  $m$  (Kapitel 3.1.2)
- $\mathbb{R}^+$  die positiven reellen Zahlen ohne Null
- $\mathbb{R}^{+,0}$  die positiven reellen Zahlen mit Null
- $\mathcal{S}_x$  die Auswahlmenge der lokalthermischen Observablen für einen Punkt  $x$  (Kapitel 3.1.2)
- $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$  die Auswahlmenge der lokalthermischen Observablen für ein Gebiet  $\mathcal{O}$  (Kapitel 3.1.2)
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$  der Raum der Testfunktionen
- $\mathcal{T}_x$  die Menge aller möglichen lokalthermischen Observablen für einen Punkt  $x$  (Kapitel 3.1.2)
- $T^\kappa$  thermische Funktion  $T^\kappa(\beta, \mu) = \omega_\beta^\mu(\tau^\kappa(x))$  (Kapitel 3.2.2)
- $\tau_{*0}^\kappa(x)$  die balancierte Ableitung des normalgeordneten Quadrats  $:\phi_0^*\phi_0:(x)$  (Kapitel 3.2.2)
- $\tau_{0*}^\kappa(x)$  die balancierte Ableitung des normalgeordneten Quadrats  $\phi_0\phi_0^*:(x)$  (Kapitel 3.2.2)

- 
- $\overline{V^+}$  der abgeschlossene Vorwärtslichtkegel,  $v \in \overline{V^+} \Rightarrow vv \geq 0$
- $\overline{V_b^+}$  ein um  $(b, \vec{0})$  verschobener abgeschlossener Vorwärtslichtkegel
- $V^+$  der offene Vorwärtslichtkegel  $v \in V^+ \Rightarrow vv > 0$
- $W^+$  die offene Menge  $W^+ = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; x_0 > x_1\}$
- $\omega_{\vec{p}}$  die nullte Komponente eines Energie-Impulsvektors  $p \in H_{m_0}^+$ ;  $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{m_0^2 + \vec{p}^2}$

## Literatur

- [AKTH77] Araki H., Kastler D., Takesaki M., Haag R.: *Comm. Math. Phys.* 53, 97-134 (1977)
- [AF01] Agricola I., Friedrich Th.: *Globale Analysis*, 1. Auflage, Verlag Vieweg, (2001)
- [BAL90] Buchholz D., D'Antoni C., Longo R.: *Comm. Math. Phys.* 129, 115-138 (1990)
- [BF96] Barner M., Flohr F.: *Analysis II*, 3. Auflage, Walter de Gruyter, (1996)
- [BLT75] Bogolubov N.N., Logunov A.A., Todorov I.T.: *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc. (1975)
- [Bo00] Bostelmann H.: *Lokale Algebren und Operatorprodukte am Punkt*, Doktorarbeit, Univ. Göttingen (2000)
- [BOR02] Buchholz D., Ojima I., Roos H.: *Annals Phys.* 297, 219 (2002)
- [BR79] Bratteli O., Robinson D.W.R.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, II*, Springer Verlag (1979)
- [Bro04] Bros J.: unveröffentlichte Notizen
- [Bu03] Buchholz D.: *Comm. Math. Phys.* 237, 271-288 (2003)
- [BuPM] Buchholz D.: Persönliche Mitteilung
- [Di78] Dixon W.G.: *Special Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1978)
- [DHR69.1] Doplicher S., Haag R., Roberts J.E.: *Comm. Math. Phys.* 13, 1-23 (1969)
- [DHR69.2] Doplicher S., Haag R., Roberts J.E.: *Comm. Math. Phys.* 15, 173-200 (1969)
- [FH81] Fredenhagen K., Hertel J.: *Comm. Math. Phys.* 80, 555 (1981)
- [FL03] Fischer W., Lieb I.: *Funktionentheorie*, 8. Auflage, Verlag Vieweg (2003)
- [FR99] Forger M., Römer H., hep-th/0307199
- [GM92] Gotay M.J., Marsden J.E.: *Contemporary Mathematics* 132, S.367-392 (1992)
- [GS60] Gelfand I.M., Schilow G.E.: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I,II*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1960)
- [Ha96] Haag R.: *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, 2nd Edition, Berlin, Springer Verlag (1996)
- [HHW67] Haag R., Hugenholtz N.M., Winnink M.: *Comm. Math. Phys.* 5, 215 (1967)
- [HK64] Haag R., Kastler D.: *Journal of Math. Phys.* Vol 5, Nr 7, 848 (1964)
- [Hoe83.i] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer Verlag (1983)
- [Ma92] Matzat B.H.: **Skript zur Elementaren Zahlentheorie**, Universität Heidelberg (Sommersemester 1992)

- 
- [PS95] Peskin M.E., Schroeder D.V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Verlag (1995)
- [Re84] Remmert R.: *Funktionentheorie I,II*, Springer Verlag (1996)
- [Ry96] Ryder L.H.: *Quantum Field Theory*, 2nd edition, Cambridge University Press (1996)
- [SW64] Streater R.F., Wightman A.S.: *PCT, Spin, Statistics and all that*, W.A.Benjamin inc. (1964)
- [Wa94] Wald R.: *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press (1994)
- [Wolf] *Mathworld* – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com>

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben.

Zuallererst Prof. Dr. Buchholz, der mir dieses sehr interessante Thema nahegebracht hat. Stets war er ansprechbar und leistete unterstützenden Rat und fördernde Hilfe. Auch im informellen Rahmen kamen wesentliche Ideen und Denkanstöße von seiner Seite, ohne die diese Arbeit in dieser Form nicht hätte entstehen können.

Ich möchte mich auch bei Prof. Dr. Bros bedanken, einem Gast des Instituts. Einige wichtige Impulse kamen von ihm, der mit den  $\mathcal{T}_{m_0}$ -Klasse Funktionen einen neuartigen Ansatz für die Entdeckung zulässiger thermischer Funktionen beleuchtete und zu informativen Gesprächen gern bereit war.

Dank auch an den Koreferenten Prof. Dr. Rehren, der sich bereiterklärt hat, diese Arbeit durchzusehen.

Dank gilt auch meinen Eltern, die mich familiär und nicht zu letzt auch finanziell unterstützt haben, nicht nur während der Zeit der Diplomarbeit, sondern schon immer.

Nicht zuletzt möchte ich mich meinen Kollegen und Freunden zuwenden, mit denen sich viele interessante (nicht nur) fachliche Diskussionen ergaben, und die eine sehr angenehme Atmosphäre an unserem Arbeits- und Studienort schufen. Sehr gern erinnere ich mich an das KMS-Frühstück<sup>25</sup> mit Jan S. und Philipp, aber auch an angenehme Momente mit Hongxia, Jan M., Steffen und Oleg.

---

<sup>25</sup>nach der nach Kubo-Martin-Schwinger benannten Bedingung für globales thermisches Gleichgewicht, siehe [HHW67]