Transportprobleme – Lineare Optimierungsaufgaben

Robert Strich

Hannoversche Strasse 137a

37077 Göttingen

Tel.:(0551) 300 112

e-mail: strich@math.uni-goettingen.de

1. Dezember 1999

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Optimierungsaufgaben im Alltag befassen sich, wie der Name schon sagt, mit der Optimierung von Prozessen bzw. Abläufen in der Wirtschaft oder auch nur im täglichen Leben. Oft geht es hierbei darum, Kosten gering zu halten, Gewinn zu maximieren, Zeitaufwand zu minimieren usw.
Hierzu ein

Beispiel 1. *Eine Firma in Bovenden stellt im Jahr 40 t Gummibärchen her. Der Transport von 1 t Gummibärchen nach Göttingen bzw. Duderstadt kostet die Firma 40 DM bzw. 120 DM aber insgesamt stehen für den Transport nur 2400 DM zur Verfügung. Unabhängig davon hat der firmeneigene LKW eine maximale Gesamtzeitbelastung von 312 Tagen und für den Transport von 1 t Gummibärchen nach Duderstadt gehen davon 12 Tage ab, nach Göttingen nur 7. Unerklärlicherweise ist der Preis für die Tonne Gummibärchen in Göttingen viel geringer als der, den die Firma in Duderstadt für die selbe Menge bekommt, nämlich 100 DM in Göttingen aber 250 DM in Duderstadt. Wohin sollte die Firma nun wieviel liefern, um maximalen Profit beim Verkauf zu machen? Die Transportkosten werden hierbei aus einer separaten Kasse bezahlt, werden also vom Verkaufsgewinn nicht abgezogen.*

Für diese Art von Problemen sind folgende Dinge charakteristisch

- Die Randbedingungen (hier die Bedingungen an Arbeitstage und Kosten) sind als *lineare* Nebenbedingungen in Form von Gleichungen oder Ungleichungen in den variablen Größen (hier die zu wählenden Mengen an Gummibärchen) gegeben

- Die *Zielfunktion* oder auch *Kostenfunktion* hängt linear von der variablen Größen ab.

Obiges Transportproblem würde sich zum Beispiel folgendermaßen übersetzen:

Maximiere

$$f(x_1, x_2) = 100x_1 + 250x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$40x_1 + 120x_2 \leq 2400$$

$$7x_1 + 12x_2 \leq 312$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

und

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Hieran erkennt man unschwer die Linearität des Problems. Für dieses 2-dimensionale Problem gibt es nun eine anschauliche graphische Lösung. Die Menge aller Punkte (x_1, x_2) der Ebene, die obige Nebenbedingungen erfüllen, ist gerade die unten schraffierte Fläche.

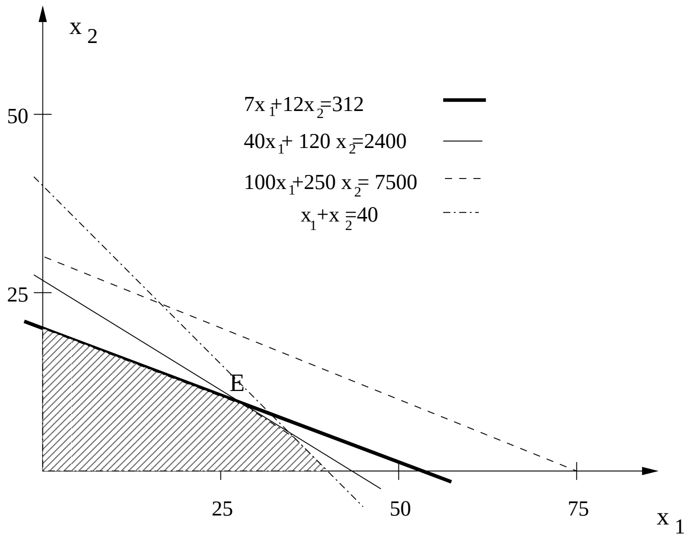

Abbildung 1: Das Problem der Gummibärchen

Auf der eingezeichneten gestrichelten Linie hat die Zielfunktion überall den konstanten Wert 7500. Verschiebt man diese nun parallel, bis zu die schraffierte Fläche zum ersten Mal in einem Punkt (oder einer Geraden) berührt, so hat die Zielfunktion auf der verschobenen Geraden gerade den maximalen Wert und dieser wird im Berührpunkt angenommen. In unserem Beispiel ist das gerade der Punkt E.

2 Lineare Optimierungsprobleme

In diesem Abschnitt sollen nun die Grundlagen für die exakte mathematische Behandlung von Optimierungsaufgaben gelegt werden. Zunächst einmal folgende

Definition 1. *Ein* lineares Optimierungsproblem *(bzw.* lineares Programm*) besteht aus der Minimierung oder Maximierung einer linearen reellwertigen* Zielfunktion *auf dem* $\mathbb{R}^n$ *unter einer endlichen Anzahl von linearen Gleichungen oder Ungleichungen als* Nebenbedingungen*. Die Punkte des* $\mathbb{R}^n$*, die alle Nebenbedingungen erfüllen, bilden die* zulässige Menge*.*

Diese Definition erscheint allerdings noch sehr heuristisch und wenig exakt. Das allgemeine Optimierungsproblem kann ja immer noch eine Vielzahl von Formen annehmen. Man kann zum Beispiel $m \in \mathbb{N}$ Nebenbedingungen in $n \in \mathbb{N}$ Variablen haben. Von den Nebenbedingungen können nun $m_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $m_0 \leq m$ als Ungleichungen vorliegen. Hierbei kann man allerdings annehmen, dass die Nebenbedingungen so nummeriert sind, dass zuerst die Ungleichungen und dann erst die Gleichungen kommen. Außerdem kann man annehmen, dass die Ungleichungen alle gleichgerichtet sind, z.B. alle in der Form $u(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ vorkommen. Notfalls multipliziere man „falsch“ gerichtete Ungleichungen mit -1.

Oft sind auch an gewisse Variablen Vorzeichenbeschränkungen gegeben, wie im Beispiel (1) die transportierten Mengen, die ja nie negative Werte annehmen können. Man kann also davon ausgehen, dass eine gewisse Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_0 \leq n$ der Variablen vorzeichenbeschränkt sind. Durch Vertauschen der Bezeichnungen wiederum kann erreicht werden, dass dies die ersten n_0 Variablen sind, und dass für diese die Beschränkung $x_j \geq 0$ gilt (notfalls wieder mit -1 multiplizieren). Schließlich kann man auch noch annehmen, dass die gegebene Zielfunktion $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ zu minimieren ist. Andernfalls betrachte man als neue Zielfunktion $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} -c_i x_i$.
Zusammenfassend hat ein allgemeines lineares Optimierungsproblem dann folgende Gestalt:

$$\text{Minimiere } \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \text{ auf}$$

$$M := \left\{ x \in R^n | x_j \geq 0 \;\; (1 \leq j \leq n_0) \;\; \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (1 \leq i \leq m_0) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;\; (m_0 + 1 \leq i \leq m) \end{array} \right\}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^m$ und c Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ sind und $A = (a_{ij})$ eine reelle $m \times n$-Matrix ist.
Ist nun $n_0 = n$ und $m_0 = 0$, sind also alle Variablen vorzeichenbeschränkt und alle Nebenbedingungen durch Gleichungen gegeben, so sagt man, das lineare Programm sei in *Normalform*. Hat also ein lineares Programm Normalform, so lässt es sich kurz schreiben in der Form

$$\text{Minimiere } c^T x \text{ auf } M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax = b\}$$

Auch wenn die Normalform von linearen Problemen wie ein Spezialfall des allgemeinen linearen Optimierungsproblems aussieht, so gilt doch folgender

Satz 1. *Jedes lineare Problem lässt sich auf eine äquivalente Normalform bringen.*

Dies geschieht durch folgenden kleinen Trick: Hat man in einem allgemeinen linearen Problem eine Nebenbedingung als Ungleichung gegeben, also zum Beispiel

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

so ersetzt man diese mittels Einführung einer *Schlupfvariable* y durch

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y = b_i \text{ und } y \geq 0$$

Da man nur endlich viele Nebenbedingungen hat, kann man also schlimmstenfalls durch Einführung von m neuen Schlupfvariablen alle Nebenbedingungen zu Gleichungen machen.
Einen ähnlichen Trick benutzt man bei nicht vorzeichenbeschränkten Variablen. Ist nämlich x_k nicht vorzeichenbeschränkt, so lässt sich x_k schreiben als

$$x_k = x_k^+ - x_k^- \text{ mit } x_k^+ \geq 0 \text{ und } x_k^- \geq 0$$

Man ersetzt somit x_k durch die beiden Schlupfvariablen x_k^+ und x_k^-. Somit erhält man wiederum höchstens n Schlupfvariablen hinzu und erreicht, dass alle Variablen vorzeichenbeschränkt sind. Damit ist Satz 1 gezeigt. □

3 Das Simplexverfahren

Das Simplexverfahren ist ein Algorithmus zur Lösung linearer Probleme. Da diese alle eine Normalform besitzen, wird also im folgenden stets von einem linearen Problem in Normalform ausgegangen. Das Simplexverfahren hat nun eine einfache geometrische Interpretation. Bei der Suche nach Lösungen von linearen Optimierungsproblemen, wird dabei entlang der Kanten eines *Polyeders* von *Ecke* zu Ecke gesprungen. Um diese Vorstellung mit dem Lösen eines in algebraischer Form gegebenen linearen Problems zu verbinden, müssen diese geometrischen Begriffe erst algebraisch gefasst werden.

3.1 Geometrische Grundlagen

Definition 2. *Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt* konvex, *wenn zu je zwei Punkten aus C auch die Verbindungslinie dieser Punkte ganz in C liegt.*

Sind also $x, y \in C$, so muss auch $[x,y] := \{(1-\lambda)x + \lambda y | \lambda \in [0,1]\} \subset C$ sein. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Konvexkombination* von Punkten $x_1, x_2, ..., x_N \in \mathbb{R}^n$, falls sich x in der Form

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \text{ mit } \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$$

darstellen lässt.
Ist $C \in \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, so heißt ein Punkt $x \in C$ *Ecke* von C, wenn sich x nicht als Konvexkombination zweier anderer Punkte aus C darstellen lässt.
Diese Definition von „Ecke“ deckt sich nun auch mit der Anschauung. So ist zum Beispiel die in Abbildung (1) schraffierte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ konvex, und E ist eine Ecke dieser Menge. Denn jede Verbindungslinie (also Menge aller Konvexkombinationen) zweier Punkte der schraffierten Fläche liegt entweder vollständig innerhalb der Menge, oder auf einer Kante, und da keiner der beiden Punkte E selbst sein darf, ist E in keiner solchen Verbindungslinie enthalten.
Desweiteren seien $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, so heißt $H := \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = \beta\}$ *Hyperebene* im $\mathbb{R}^n$ und $H^- := \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq \beta\}$ der zugehörige *abgeschlossene Halbraum.*
Den Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbebenen nennt man *Polyeder.* Polyeder sind als Durchschnitt konvexer Mengen also wieder konvex. Ist ein Polyeder sogar beschränkt, so nennt man ihn *Polytop.* Untenstehende Abbildung veranschaulicht die neuen Begriffe.

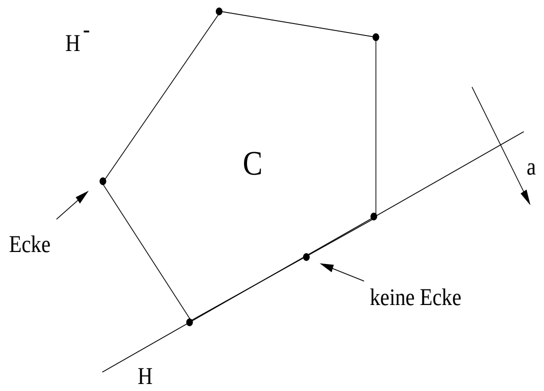

Abbildung 2: Ein Polytop im $\mathbb{R}^2$

Insbesondere sind alle zulässigen Mengen linearer Programme Polyeder, denn auch die Menge der $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = b$ ist Schnitt zweier abgeschlossener Halbräume, nämlich
$H_1^- = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b\}$ und $H_2^- = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{N} -a_i x_i \leq -b\}$. Damit hat sich das Lösen eines linearen Problems darauf reduziert, in einem Polyeder (dem der zulässigen Menge) einen Punkt zu suchen, der eine feste lineare Zielfunktion minimiert.
Hierbei gilt nun folgender

Satz 2. *Nimmt eine lineare Zielfunktion f auf einem nichtleeren Polyeder K ihr Minimum an, so nimmt sie es auch auf einer Ecke an. Ist also ein lineares Problem auf K lösbar, so ist eine Ecke unter den Lösungen.*

Der Beweis dieses Satzes benutzt folgende Aussage, die ich hier nicht beweisen möchte:
Ist die zulässige Menge eines linearen Problems

$$(P) : \text{Minimiere } c^T x \text{ auf } M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$$

nicht leer, so hat sie endlich viele Ecken $x_1, x_2, ..., x_N$ und für jeden Vektor x aus M gibt es ein $d \in \mathbb{R}^n$ mit $Ad = 0$, so dass $x - d$ Konvexkombination der Ecken ist. Ist M sogar ein Polytop, also beschränkt,

so ist x selbst Konvexkombination der Ecken.(siehe dazu z.B. [3])
Hiermit folgt der Satz (2) nun leicht. Gibt es nämlich ein $d \in \mathbb{R}^n$ mit $Ad = 0$ und $c^T d < 0$, so ist das Problem nicht lösbar, da für jedes $x \in M$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $x + td \in M$ ist, aber $c^T(x+td) = c^T x + tc^T d$ für $t \to \infty$ unter alle Schranken fällt.
Gibt es aber kein solches d, so lässt sich nach obiger Hilfsaussage jedes x in M darstellen als

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i + d$$

wobei $Ad = 0$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ und $c^T d \geq 0$. Dann gilt aber

$$c^T x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i c^T x_i + c^T d \geq (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i) \min_{i=1..N} c^T x_i = \min_{i=1..N} c^T x_i$$

Die Minima der Zielfunktion sind also in den Ecken zu suchen. □

Sei nun das Problem

$$(P): \text{Minimiere } c^T x \text{ auf } M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$$

gegeben. Woran sieht man nun einem $x \in M$ an, dass es Ecke ist?
Um das zu klären, definiere ich folgendes: Zu gegebenem $x \in M$ sei $B_x := \{i \in \{1, ..., n\} | x_i > 0\}$ und $N_x := \{1, ...n\} \backslash B_x$. Schreibt man $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit seinen Spaltenvektoren $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, so gilt

Satz 3. *$x \in M$ ist genau dann Ecke von M, wenn die Spalten $\{a_i\}_{i \in B_x}$ linear unabhängig sind.*

Ein Beweis hierzu ist leicht erbracht, denn sind die $\{a_i\}_{i \in B_x}$ linear unabhängig, und ist $x \in [y, z]$ für zwei Vektoren $y, z \in M$, so ist zunächst $B_x \subset B_y$ und $B_x \subset B_z$ (da $y, z \geq 0$ sind), und damit dann

$$0 = b - b = Ay - Az = A(y - z) = \sum_{i \in B_x} (y_i - z_i) a_i$$

wegen der linearen Unabhängigkeit also $y = z$.
Sind die Vektoren $\{a_i\}_{i \in B_x}$ aber linear abhängig, so hat man reelle Zahlen α_i für $i \in B_x$ die nicht alle verschwinden mit $\sum_{i \in B_x} \alpha_i a_i = 0$. Außerdem gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass auch für alle $i \in B_x$: $x_i \pm \delta \alpha_i > 0$ ist. Dann sind aber y und z ,mit $y_i = x_i + \delta \alpha_i$, $z_i = x_i - \delta \alpha_i$ für $i \in B_x$ und $y_i = z_i = 0$ sonst, zwei von x verschieden Punkte aus M, deren Mittelpunkt x ist. Damit kann x keine Ecke sein. □

Man definiert nun

Definition 3. *Seien $A = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang$(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben und sei $B \subset \{1, ..., n\}$ mit $|B| = m$, so dass die $\{a_i\}_{i \in B}$ linear unabhängig sind. Dann heißt das eindeutig gegebene $x \in R^n$ mit $x_i := 0$ für $i \notin B$ und $\sum_{i \in B} x_i a_i = b$* Basislösung *von $Ax = b$* zur Basis B.
x heißt zulässige Basislösung*, falls $x \geq 0$ ist.*

Mit Satz (3) ergibt sich hieraus eine direkte Korrespondenz von zulässigen Basislösungen und Ecken. Jede Basis B gibt uns eine zulässige Basislösung, also eine Ecke. Aber es kann immer noch zwei verschiedene Basen geben, die zu der selben zulässigen Basislösung führen. Solche Basislösungen heißen dann *entartet* oder *ausgeartet*.

3.2 Der Algorithmus

Geometrisch anschaulich lässt sich der Simplexalgorithmus nun folgendermaßen definieren:

algorithm simplex
begin
x := beliebige Startecke;
lösbar := TRUE;
nichtoptimal := TRUE;
while (lösbar **and** nichtoptimal) **do**
if es existiert Abstiegskante k von x **then**
if k ist unbegrenzt **then**
lösbar := FALSE;
else x := Ecke am anderen Ende von k;
else nichtoptimal := FALSE;
return
end

Hierbei heißt k eine Abstiegskante der Ecke x, wenn k eine Kante im Polyeder ist, die x als Eckpunkt hat, und auf der die Zielfunktion f von x ausgehend fällt. Wegen der Linearität der Zielfunktion ist dies äquivalent zu der Aussage, dass für den zweiten Endpunkt y von k (sofern dieser existiert) gilt: $f(y) < f(x)$. Da die Zielfunktion auf der durchlaufenen Folge von Eckpunkten streng monoton fällt, also jede Ecke höchstens einmal erreicht wird, und es nur endlich viele Ecken (siehe Satz (2)) gibt, bricht der Simplexalgorithmus in obiger Form stets ab. Das Finden einer geeigneten Startecke geschieht in einer vorgeschalteten Phase des Algorithmus. Diese beinhaltet das Lösen eines zweiten linearen Problems, bei dem allerdings eine geeignete Startecke schon gegeben ist. Hierzu sei auf eines der in der Literaturliste angegebenen Bücher verwiesen, insbesondere auf [3].

3.3 Das Simplex-Tableau

Hat man nun ein lineares Problem der Form

$$(P): \text{Minimiere } c^T x \text{ auf } M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$$

gegeben, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{Rang}(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ sind. Der in der Praxis durchgeführte Simplexalgorithmus nutzt nun die Korrespondenz zwischen Ecken und Basen, also Teilmengen $B \subset \{1, 2, ..., n\}$ mit $|B| = m$ wobei die $\{a_i\}_{i \in B}$ linear unabhängig waren. Anstatt nun bei einer Ecke zu starten, wählt man sich zu Beginn eine geeignete Basis B. Dann tauscht man iterativ jeweils ein Element dieser Basis gegen ein geeignetes Element aus $\{1, 2, ..., n\}$ aus, so dass man eine neue Basis B' erhält, für deren zugehörige Ecke die Zielfunktion kleiner ist. Dieser Verfahren wird folgendermaßen realisiert:

1. **Aufstellen des Tableaus**
   Seien $B = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, $N := \{1, 2, ..., n\} \backslash B$, $A_B = (a_i)_{i \in B}$ die zu den Spalten aus der Basis B gehörige Teilmatrix (analog A_N) und entsprechend c_B und c_N die Aufteilung des Kostenvektors c.
   $x_B := A_B^{-1} b \geq 0$ und $x_N := 0$.
   c_0 seien stets die aktuellen Kosten, also $c_0 = c^T x$.

   Für $z \in M$ ist dann $b = Az = A_B z_B + A_N z_N$, daher also $z_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N z_N$. Die Kosten lassen sich daher schreiben als

   $$c^T z = c_B^T A_B^{-1} b - c_B^T A_B^{-1} A_N z_N + c_N^T z_N = c_B^T A_B^{-1} b + (c_N - A_N^T (A_B^{-1})^T c_B)^T z_N$$

   Damit erhält man eine zunächst etwas wüst aussehende äquivalente Form des Problems, nämlich

   $$\text{Minimiere } c_B^T A_B^{-1} b + (c_N - A_N^T (A_B^{-1})^T c_B)^T z_N \text{ auf}$$

   $$M := \{z \in \mathbb{R}^n | z \geq 0, z_B + A_B^{-1} A_N z_N = A_B^{-1} b\}$$

   Ersetzt man nun $c_0 := c_B^T A_B^{-1} b$, $c_N := c_N - A_N^T (A_B^{-1}) c_B$, $c_B := 0$, $b := A_B^{-1} b$ und $A := A_B^{-1} A$, so sieht man, das obiges Problem genau wieder Normalformgestalt hat, nur das man folgendes erreicht hat

- $A_B = I$
- $b \geq 0$
- $c_B = 0$

Die so erhaltenen Daten werden nun in ein *Tableau* geschrieben

c^T	$-c_0$
A	b

PS: Dieser *Reduktionsschritt* muss in der Praxis häufig gar nicht durchgeführt werden.

2. **Ist $\mathbf{c \geq 0}$ (also $\mathbf{c_N \geq 0}$), so ist die aktuelle Basislösung $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x_B = b}$ und $\mathbf{x_N = 0}$ Lösung des Problems.** STOP
In diesem Fall gibt es keine von der aktuellen Ecke audgehende Abstiegskante.

3. **Gibt es ein $\mathbf{s \in N}$ mit $\mathbf{c_s < 0}$ und $\mathbf{a_s \leq 0}$, so ist das Problem nicht lösbar.** STOP
Denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $z(t)$ mit $z_i(t) = b_i - ta_{is}$ für $i \in B$, $z_s(t) = t$ und $z_i(t) = 0$ für alle anderen i, in M (denn $Az = A_B z_B + A_N z_N = z_B + ta_s = b - ta_s + ta_s = b$). Aber $c^T z(t) = tc_s \to -\infty$ wenn $t \to \infty$. Es gibt also eine von der aktuellen Ecke ausgehende unbegrenzte Abstiegskante.

4. **Sei $\mathbf{c_s < 0}$ und $\mathbf{a_s \not\leq 0}$**
Sei ein $r \in \{1, 2, ..., n\}$ mit $a_{rs} > 0$ und
$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} | a_{is} > 0 \right\}$$
bestimmt. Dann wird die r-te Spalte aus der aktuellen Basis entfernt und dafür die s-te eingebracht, das neue Tableau

$\tilde{c}^T$	$-\tilde{c}_0$
$\tilde{A}$	$\tilde{b}$

sieht dann wie folgt aus:

- $(\tilde{a_{r1}}, ..., \tilde{a_{rn}} | \tilde{b_r}) := \frac{1}{a_{rs}} (a_{r1}, ..., a_{rn} | b_r)$
- Für $i = 1, ..., m$, $i \neq r$
$$(\tilde{a_{i1}}, ..., \tilde{a_{in}} | \tilde{b_i}) := (a_{i1}, ..., a_{in} | b_i) - a_{is} (\tilde{a_{r1}}, ..., \tilde{a_{rn}} | \tilde{b_r})$$
- $(\tilde{c_1}, ..., \tilde{c_n} | -\tilde{c_0}) := (c_1, ..., c_n | -c_0) - c_s (\tilde{a_{r1}}, ..., \tilde{a_{rn}} | \tilde{b_r})$

Diese Umformungen entsprechen genau denen beim Gauss-Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme. Im übrigen ist die neue Indexmenge $\tilde{B}$ gegeben durch
$$\tilde{B} := \{j_1, j_2, ..., j_{r-1}, s, j_{r+1}, ..., j_m\}$$
Damit ist also auch $\tilde{N} := \{1, 2, ..., n\} \backslash \tilde{B}$.

5. Ersetze nun (A, b, c, c_0, B, N) durch $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{c_0}, \tilde{B}, \tilde{N})$ und beginne bei Schritt (2).

Anders als in der abstrakten Form des Simplexalgorithmus kann es aber nun dazu kommen, dass der Algorithmus in Zykel verfällt und nicht abbricht. Wie schon erwähnt ist nämlich die Basisdarstellung entarteter Ecken nicht eindeutig, man kann also beim Basistausch an der selben Ecke bleiben und eventuell so im Kreis laufen. Um dies zu vermeiden, gibt es mehrere Ansätze zu sogenannten „*Anti-Zykel-Regeln*“ , auf die ich aber nicht näher eingehen möchte. Für einen Beweis, dass das so vorgestellte Verfahren dem obigen Algorithmus gerecht wird, siehe u.a. [4].

Das so vorgestellte Simplex-Verfahren hat eine nicht-polynomiale Komplexität. Es gibt allerdings Verfahren, wie zum Beispiel das sogenannte „Ellipsoid-Verfahren“ , das in polynomialer Zeit arbeitet. Hierzu sei wiederum auf einschlägige Literatur verwiesen.

3.4 Ein Beispiel

Das gesamte Simplexverfahren soll noch einmal an dem eingangs vorgestellten Beispiel (1) dargestellt werden.

Zu maximieren war also

$$100x_1 + 250x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$40x_1 + 120x_2 \leq 2400$$
$$7x_1 + 12x_2 \leq 312$$
$$x_1 + x_2 \leq 40$$

und

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Zunächst wird das Problem durch die Einführung von Schlupfvariablen auf Normalform gebracht, nämlich

$$\text{Minimiere } (-100, -250, 0, 0, 0)^T x$$

auf

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^5 | Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 40 & 120 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2400 \\ 312 \\ 40 \end{pmatrix}, x \geq 0 \right\}$$

Damit geht man jetzt in den Simplexalgorithmus. Als Basis nimmt günstigerweis $B = \{3, 4, 5\}$, damit als Startecke $(0, 0, 2400, 312, 40)$. Das Problem hat offenbar schon die unter Punkt (1) geforderte Form. Man stellt also folgendes Simplextableau auf:

-100	-250	0	0	0	0
40	120	1	0	0	2400
7	12	0	1	0	312
1	1	0	0	1	40

Nun ist $c = (-100, -250, 0, 0, 0) \ngeq 0$. Damit wird Schritt (2) des Algorithmus übersprungen. Die Bedingung in Schritt (3) ist auch nicht erfüllt. Also Schritt (4): Wähle $s = 1$. Dann ist $r = 3$, denn $\frac{40}{1} < \frac{312}{7} < \frac{2400}{40}$. Somit transformiert sich das Tableau zu

0	-150	0	0	100	4000
0	80	1	0	-40	800
0	5	0	1	-7	32
1	1	0	0	1	40

Mit der neuen Basis $B = \{3, 4, 1\}$. Auch jetzt ist $c \ngeq 0$, und so gelangt man wieder zu Schritt (4). Diesmal bleibt nur $s = 2$ und damit ist $r = 2$, denn $\frac{32}{5}$ ist der kleinste positive Quotient in dieser Spalte. Nach der entsprechenden Transformation hat man dann:

0	0	0	30	-110	4960
0	0	1	-16	72	288
0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{32}{5}$
1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{168}{5}$

Wiederum haben wir $c \ngeq 0$, also noch eine Transformation, diesmal mit $s = 5$ und $r = 1$. Das neue Tableau sieht dann so aus:

0	0	$\frac{110}{72}$	$\frac{50}{9}$	0	5400
0	0	$\frac{1}{72}$	$-\frac{2}{9}$	1	4
0	1	$\frac{7}{360}$	$-\frac{1}{5}$	0	12
1	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$	0	24

Damit sind wir nun endlich fertig. $c \geq 0$, und die Kosten belaufen sich auf $c_0 = -5400$. Dieses Minimum wird erreicht bei der Basis $B = \{5, 2, 1\}$, und dem dazugehörigen Punkt (Basislösung) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (24, 12, 0, 0, 4)$. Insbesondere sollte die Gummibärchenfabrik also 24 t nach Göttingen und 12 t nach Duderstadt schicken. □

Literatur

[1] Kress, R.; Vorlesungsskript Numerische Mathematik WS 1997/98

[2] Schaback, R.; Werner J.: Numerische Mathematik, Springer Verlag, 1993

[3] Werner, J.: Numerische Mathematik 2, Vieweg Verlag, 1992

[4] Werner, J.: Vorlesungsmitschrift und Übungsaufgaben, Numerische Mathematik WS 1998/99

[5] Zoutendijk, G.: Mathematical Programming Methods, North-Holland-Publishing-Company, 1976