# Optionspreismodelle

Martin K. Feix
e-mail: feix@theorie.physik.uni-goettingen.de

16. Dezember 1999

## Inhaltsverzeichnis



# 1 Einführung

Diese Zusammenfassung meines Vortrages richtet sich an Leser ohne Kenntnisse des Wertpapierhandels. Deshalb wird nun zunächst eine allgemeine Einführung zum Thema Termingeschäfte gegeben. Dabei soll das Augenmerk bereits auf Optionsscheinen, auch kurz einfach Optionen genannt, liegen. Insbesondere soll in diesem ersten Abschnitt motiviert werden, wieso der Erwerb eines Optionsscheines mit Kosten verbunden sein muss.

## 1.1 Termingeschäfte

Ein Termingeschäft ist ein Abkommen zwischen einem Verkäufer und einem Käufer, eine bestimmte Ware zum vereinbarten Fälligkeitsdatum zu einem festgelegten Preis zu kaufen bzw. zu verkaufen. Der vereinbarte Handel wird bei Fälligkeit auf jeden Fall ausgeführt. Der festgelegte Preis wird als *Basispreis* bezeichnet. Bei den Waren kann es sich z.B. um Rohstoffe, Fertigprodukte oder Tiere handeln, aber auch um Wertpapiere wie z.B. Aktien, Währungen oder Schatzbriefe. Solche Verträge werden meist über Geldinstitute abgewickelt. Genauer gesagt, werden die fertigen Verträge oft an der Börse gehandelt. Ziel dieser Verträge ist eigentlich die finanzielle Absicherung, denn das Termingeschäft garantiert ja einen Preis. Dadurch wird auch die zukünftige Finanzlage einer Firma leichter kalkulierbar.

Der Basispreis eines Termingeschäftes entspricht im einfachsten Fall, der hier ausschließlich betrachtet wird, dem *fairen Terminkurs*, d.h. dem Wert, den beide Vertragspartner für fair halten.

Sei nun $X$ der Basispreis und $S$ der tatsächliche Wert der Ware bei Fälligkeit, so beträgt die Auszahlung[1] aus dem Geschäft für den Käufer

$$S - X.$$

Liegt der tatsächliche Wert $S$ unter dem Basispreis $X$, macht der Käufer natürlich einen Verlust, d.h. die Auszahlung nimmt auch negative Werte an. (Für den Verkäufer ergibt sich umgekehrt eine Auszahlung von $X - S$). Da sowohl Käufer wie Verkäufer bei Vertragsabschluss einer Option zum fairen Terminkurs sich die gleiche Chance auf Gewinn ausrechnen, ist der Eintritt in den Vertrag für keinen der beiden Partner mit Kosten verbunden.

## 1.2 Optionsscheine

Optionsscheine werden seit 1973 an den Börsen verkauft. Eine Option ist ein ähnliches Abkommen wie ein Termingeschäft. Man differenziert zwei Grundtypen von Optionsscheinen. Mit einer *Call Option* erwirbt man das Recht eine bestimmte Ware zum vereinbarten Fälligkeitsdatum zu einem festgelegten Basispreis zu kaufen. Mit einer *Put Option* erwirbt man das Recht eine bestimmte Ware zum vereinbarten Fälligkeitsdatum zu einem festgelegten Basispreis zu verkaufen.

Der wichtige Unterschied gegenüber einem Termingeschäft liegt also darin, dass einer der Vertragspartner das Recht hat das Geschäft auszuführen, für ihn jedoch keine Pflicht dazu besteht. Selbstverständlich wird er die Option nur dann einlösen, wenn er dadurch einen Gewinn erzielt. Letzteres lässt erkennen, dass die Erwerbung einer Option kostenpflichtig sein muss. Dabei ist noch zu beachten, dass eine sog. *Amerikanische Option* zu jeder Zeit vor dem Fälligkeitsdatum, eine *Europäische Option* jedoch nur genau zum vereinbarten Termin eingelöst werden darf.[2]

Wir konzentrieren uns hier auf Europäische Optionen, da sie leichter zu analysieren sind. Außerdem wird die Analyse der Amerikanischen Optionsscheine meist sowieso auf die Behandlung der Europäischen zurückgeführt. Um Verwirrung zu vermeiden, gehen wir im Folgenden ausschließlich davon aus, dass wir eine **Europäische Call Option ausstellen**. Alle anderen denkbaren Positionen (z.B. der Erwerb einer Europäischen Put Option) lassen sich davon leicht ableiten. Betrachten wir unseren Optionstypen genauer.

**Beispiel 1** *Wir stellen heute, am 16. Dezember 1999, dem Studenten Peter Pfennigfuchser eine Europäische Call Option auf 10 StammII Mensamarken aus. Als Fälligkeitsdatum legen wir den 1. Juli 2000 fest. Der Basispreis soll DM 3,40 betragen. Sollte am 1. Juli 2000 eine StammII Marke DM 3,30 kosten, so wird Peter die Option natürlich nicht einlösen. Die Option wäre in diesem Fall wertlos, die Auszahlung beträgt für Peter DM 0.*

*Erhöht das Studentenwerk jedoch erneut die Preise, so dass eine StammII Marke am 1. Juli 2000 DM 3,50 kostet, so wird Peter die Option einlösen. Wir müssen demnach 10 StammII Marken für DM 35 vom Studentenwerk einkaufen und sie für DM 34 an Peter abgeben. Der Auszahlung beträgt für Peter DM 1.*

Die Auszahlung für Peter ist in Abbildung 1 noch mal veranschaulicht. Das Beispiel 1 zeigt, dass die Auszahlung auf jeden Fall nichtnegativ ist. Somit ist klar, dass wir einen Preis für das Ausstellen der Option verlangen werden.[3] Bevor wir uns überlegen, wie hoch dieser Preis sein muss, soll Beispiel 1 noch verallgemeinert werden. Sei $X$ der festgelegte Basispreis der zugrundeliegenden Ware unserer Europäischen Call Option und $S$ der tatsächliche Wert der Ware bei Fälligkeit, so beträgt die Auszahlung $\theta_X$ durch Ausführung des Geschäftes nicht mehr einfach $S - X$, wie bei einem Termingeschäft, sondern ist gegeben durch

$$\theta_X(S) = \max(S - X, 0). \tag{1}$$

[1] Die Auszahlung entspricht bei einem Termingeschäft zum fairen Terminkurs einfach dem Gewinn, der durch die Ausführung des vereinbarten Geschäftes entsteht.

[2] Amerikanische bzw. Europäische Option ist hierbei nur eine Bezeichnung. Es werden aber z.B. auch Europäische Optionen auf dem amerikanischen Markt gehandelt.

[3] Hier entspricht die Auszahlung nicht mehr dem Gewinn, da der Erwerb der Option ja einen Preis hatte.

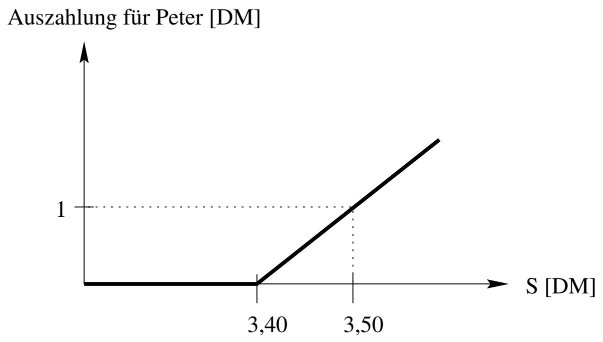


Abbildung 1: Die Auszahlung in Beispiel 1

In dieser Formel ist berücksichtigt, dass für $X > S$ die Option nicht eingelöst wird und somit die Auszahlung dann Null entspricht.

# 2 Das Modell des binomischen Baumes

Nach der kurzen Einführung in die Welt der Optionen, beschäftigen wir uns jetzt mit einem einfachen Modell, das es erlaubt den Preis einer Option zu bestimmen. Dabei werden wir von einem sehr stark vereinfachten Markt ausgehen. Die Vorgehensweise in diesem Abschnitt ist im wesentlichen dem Buch von Hull [1] entnommen. Im Abschnitt 3 werden wir ein realistischeres Modell diskutieren, für dessen Verständnis das einfache Modell jedoch Voraussetzung ist.

## 2.1 Ein binomischer Baum mit nur einem Schritt

Wir betrachten eine Europäische Call Option auf eine Aktie der Firma Alpha mit einem Basispreis von $X$. Das lässt sich leicht auf den Fall einer beliebigen Ware verallgemeinern. Der Wert einer Alpha-Aktie liege zum Zeitpunkt des Abschlusses der Option bei $S$. Diesen Zeitpunkt bezeichnen wir mit $t_0$, den Zeitpunkt der Fälligkeit der Option mit $t_1$. Das stark vereinfachte Marktmodell geht nun davon aus, dass der Wert der Aktie zum Zeitpunkt $t_1$ entweder auf den Werte $uS$ gestiegen oder auf den Wert $dS$ gefallen ist. Andere Möglichkeiten sind ausgeschlossen. Dabei sind $u, d$ feste Werte mit $u > 1, d < 1$. Dies lässt sich leicht in einen binomischen Baum veranschaulichen, wie in Abbildung 2 gezeigt.

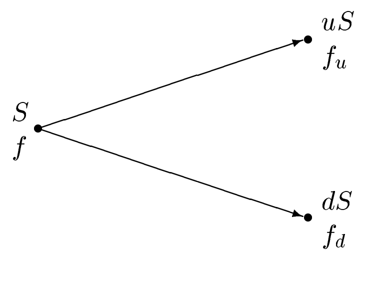


Abbildung 2: Aktienkurs und Wert der Option in einem Baum mit einem Schritt

Nun soll der Verkaufspreis $f$ der Option sinnvoll festlegt werden. Dazu versuchen wir den Verkauf der Option auf Alpha Aktien durch den Ankauf von $\Delta$ Alpha Aktien abzusichern. In der Fachterminologie würde man sagen, wir stellen ein Wertpapierpaket zusammen, ein sogenanntes

Portfolio[4], der aus den angekauften Aktien und dem verkauften Optionsschein besteht. Die Kosten hierfür belaufen sich auf $S\Delta - f$, d.h. das Portfolio hat zur Zeit $t_0$ auch den Wert[5] $\Pi_0 := S\Delta - f$. Transaktionskosten werden hier außer Acht gelassen. Außerdem nehmen wir an, dass unsere Aktienankäufe den Kurs nicht beeinflussen, d.h. es besteht eine ausreichende *Markttiefe*.

Bei Fälligkeit der Option hat dieses Portfolio entweder den Wert

$$uS\Delta - f_u,$$

wobei $f_u \overset{(1)}{=} \theta_X(uS)$ die Auszahlung im Falle des Anstiegs des Aktienkurses ist, oder den Wert

$$dS\Delta - f_d,$$

wobei $f_d = \theta_X(dS)$ die Auszahlung bei gefallenem Aktienkurs ist. Um mit dem Verkauf der Option keinerlei Risiko eingehen, wählen wir die Anzahl $\Delta$ der angekauften Aktien genau so, dass unser Wertpapierpaket beide Male den gleichen Wert hat, d.h es ist

$$uS\Delta - f_u = dS\Delta - f_d$$

oder

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{(u-d)S} \ . \tag{2}$$

Damit hat das Portfolios zur Zeit $t_1$ den Wert $\Pi_1 := uS\Delta - f_u = dS\Delta - f_d$.

Jetzt kommt das entscheidende Argument, das eine Beziehung zwischen $\Pi_0$ und $\Pi_1$ herstellt. Da unser Portfolio risikolos ist, muss sein Wertzuwachs von $t_0$ nach $t_1$ genau der risikolosen Zinsrate für den Zeitraum $t := t_1 - t_0$ entsprechen. Wäre der Wertzuwachs höher, so könnte eine Person zum risikolosen Zinssatz geliehenes Geld in unser "Super-Wertpapier" investieren. Damit hätte die Person eine Art "Gelddruckmaschine" auf unsere Kosten. Wäre der Wertzuwachs niedriger, so hätten wir zwar eine "Gelddruckmaschine" für uns, aber es würde uns wohl leider, leider niemand dieses Portfolio abkaufen. Diese Art der Argumentation spielt im Finanzwesen eine wichtige Rolle. Man spricht von der sogenannten *Arbitragefreiheit*.

Sei die risikolose Zinsrate für den Zeitraum $t$ durch $r$ festgelegt, so muss demnach

$$\Pi_0(1+r) = \Pi_1$$

oder mit obigen Überlegungen

$$(S\Delta - f)(1+r) = uS\Delta - f_u$$

sein. Umstellen dieser Gleichung liefert uns den gesuchten Optionspreis

$$f = S\Delta - \frac{uS\Delta - f_u}{1+r}.$$

Setzen wir noch $\Delta$ aus der Formel (2) ein, so kann man dies zu

$$f = \frac{pf_u + (1-p)f_d}{1+r} \tag{3}$$

mit

$$p := \frac{1+r-d}{u-d}$$

vereinfachen. In der Darstellung (3) ist das Ergebnis für den Optionspreis intuitiv leicht verständlich, wenn man $p$ als Wahrscheinlichkeit interpretiert. Man beachte jedoch, dass $p$ keine frei wählbare Wahrscheinlichkeit ist, sondern durch das Modell impliziert wird.

Das Modell des binomischen Baumes mit nur einem Schritt ist sicherlich sehr fern der Realität. Die naheliegendste Idee zur Verbesserung des Modells ist das Einführen von mehreren Schritten.

[4]Portfolio kommt, wie fast alle modernen Fachbegriffe aus dem Englischen. Die wörtliche Übersetzung ist Aktenmappe.

[5]$\Pi_0$ kann auch negativ sein, d.h. wir müssen einen Kredit aufnehmen.

## 2.2 Ein binomischer Baum mit mehreren Schritten

Das Modell des binomischen Baumes mit nur einem Schritt lässt sich sehr einfach auf einen Baum mit $n$ Schritten erweitern. Um das Prinzip der Erweiterung zu erklären, reicht es einen Baum mit zwei Schritten zu betrachten, wie er in Abbildung 3 zu sehen ist.

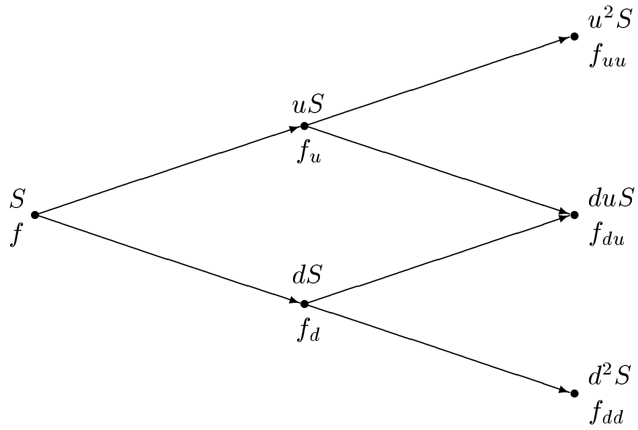


Abbildung 3: Baum mit zwei Schritten

Die Skizze spiegelt die folgende Situation wider:

> Bei Abschluss einer Option hat die zugrundeliegende Aktie einen Kurs von $S$. Der Optionspreis $f$ soll bestimmt werden. Unser Marktmodell besagt, dass die Aktie zum Fälligkeitsdatum einen der drei Werte $u^2S$, $udS$ oder $d^2S$ annimmt.[6] Die Auszahlung der Option bei Fälligkeit errechnet sich dementsprechend nach der Formel (1) zu $f_{uu} := \theta_X(u^2S)$, $f_{du} := \theta_X(duS)$ und $f_{dd} := \theta_X(d^2S)$, womit alle Größen auf der rechten Seite des Baumes bekannt sind. Der risikolose Wertzuwachs für den Zeitraum zwischen Abschluss und Fälligkeit betrage $(1+r)^2$, so dass die Zinsrate für einen Schritt im Baum wieder $r$ ist.

Nunmehr reichen die Ergebnisse aus Abschnitt 2.1 bereits aus, um $f$ zu errechnen. Anwendung der Formel (3) auf die einzelnen Unterbäume in Abbildung 3 liefert die drei Gleichungen

$$f_u = \frac{pf_{uu} + (1-p)f_{du}}{1+r},$$

$$f_d = \frac{pf_{du} + (1-p)f_{dd}}{1+r}$$

und

$$f = \frac{pf_u + (1-p)f_d}{1+r}.$$

Wir haben hiermit eine Rekursionsformel für $f$, die es ermöglicht den Baum einfach von rechts nach links durchzurechnen, bis wir bei dem gesuchten $f$ ankommen. Einsetzen der drei Gleichungen ineinander ergibt für unseren Baum mit zwei Schritten

$$f = \frac{p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{du} + (1-p)^2 f_{dd}}{(1+r)^2}.$$

Auch die Bestimmung von $f$ durch Rekursion für Bäume mit $n$ Schritten sollte nun klar sein. Wir finden somit immer einen exakten, explizit berechenbaren Wert für $f$, was natürlich nur durch unser einfaches Modell möglich ist.

[6] Allgemein sind es bei einen Baum mit $n$ Schritten $n+1$ Werte.

### 2.3 Bewertung des Modells

Ein Baum mit nur ein oder zwei Schritten gibt selbstverständlich nur eine grobe Näherung für den Optionspreis. In der Praxis wird der Zeitraum zwischen Abschluss und Fälligkeit der Option in mindestens 30 Teile unterteilt, d.h. es werden Bäume mit mindestens 30 Schritten verwendet. Doch selbst dann darf man nicht vergessen, dass das Modell von einigen unrealistischen Voraussetzungen ausgeht.

So lässt sich die Anzahl $\Delta$ der Aktien, die wir zur Absicherung der Option benötigen, i.a. gar nicht exakt realisieren, da keine "halben" Aktien erhältlich sind. Weiter geht die sogenannte *risikoneutrale Konstruktion* davon aus, dass es kein Restrisiko mehr gibt. Dagegen besteht z.B. die Gefahr eines Kurscrashes, den das Modell in keiner Weise berücksichtigt.

Um dies zu verbessern, ist es naheliegend zu einem stochastischen Modell überzugehen. Es lässt sich schon jetzt vermuten, dass der Optionspreis dann nicht mehr explizit berechnet werden kann, wie es hier der Fall war, sondern dass wir lediglich einen optimalen Preis nähern können. All dies wird nun geschehen.

## 3 Ein stochastisches Modell

In diesem Abschnitt soll das stochastische Modell zur Berechnung des Optionspreises vorgestellt werden, das von den beiden Mathematikern Fedotov und Mihkailov in [2] vorgeschlagen wird. Die Idee ist neu und wurde nach meinem Wissen noch nicht in ein Programm implementiert. Deshalb können hier auch nur die Grundlagen des Modells ohne Erfahrungswerte aus der Praxis präsentiert werden.

### 3.1 Formulierung des stochastischen Modells

Das Modell geht von $N$ diskreten Zeitschritten zwischen Abschluss und Fälligkeit der Option aus. Die Entwicklung des Preises $S_n$ der zugrundeliegenden Aktie sei durch die iterative stochastische Gleichung

$$S_{n+1} = (1 + \xi_n)S_n \tag{4}$$

für $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ gegeben. Dabei sind die $\xi_n$ eine Folge von um die Null[7] verteilten Zufallszahlen. Die $\xi_n$ realisieren somit eine zufällige Entwicklung des Aktienkurses. Erneut lassen wir Transaktionskosten außer acht. Weiter nehmen wir auch hier an, dass der Ankauf von Aktien den Kurs nicht beeinflusst.

Wir bleiben unserem alten Beispiel treu, indem wir zum Zeitpunkt $t_0$ eine Europäischen Call Option mit Basispreis $X$ zum Preis $f$ verkaufen. Auch hier versuchen wir den Verkauf durch ein Portfolio, bestehend aus zunächst $\Delta_0$ Aktien, abzusichern. Für den Ankauf der Aktien müssen wir einen Kredit in Höhe $B_0$ aufnehmen. Damit hat unser Portfolio bei $t_0$ einen Wert von

$$V_0 := \Delta_0 S_0 - B_0.$$

Die zeitliche Entwicklung des Portfoliowertes ist durch

$$V_n := \Delta_n S_n - B_n \tag{5}$$

gegeben, wenn wir in dem Zeitintervall $]t_n, t_{n+1}]$ die Anzahl $\Delta_n$ an Aktien besitzen. Die $\Delta_n$ sollen jetzt nur Werte in den natürlichen Zahlen annehmen, wie es sich für eine Anzahl gehört. Eine risikolose Absicherung ist i.a. nicht mehr möglich, aber $\Delta_n$ soll stets so gewählt sein, dass das Risiko minimiert ist. Was das genau bedeutet, werden wir gleich überlegen. Zum Zeitpunkt $t_{n+1}$,

[7] Mit einer Verteilung mit Erwartungswert ungleich Null ließe sich leicht ein Drift des Aktienkurses in das Modell integrieren.

also noch bevor wir die Anzahl der Aktien neu festgelegt haben, hat unser Wertpapierpaket den Wert

$$V_{n+1} := \Delta_n S_{n+1} - (1+r)B_n, \tag{6}$$

wobei $r$ wieder die Zinsrate für einen Zeitschritt repräsentiert. Einsetzen von (4), (5) in (6) liefert

$$V_{n+1} = (1+r)V_n + (\xi_n - r)\Delta_n S_n. \tag{7}$$

Nun kommt die entscheidende Überlegung: "Welche Kriterien sollte der Wert $V_n$ unseres Portfolios sinnvollerweise erfüllen?" Das Ziel unseres Porfolios war ja, den Verkauf der Option abzusichern. Dies motiviert, dass der Wert $V_N$ bei Fälligkeit möglichst nahe an der Auszahlung $\theta_X(S_N)$ liegen sollte. Genau das fordern Fedotov und Mihkailov in ihrem Modell. Mathematisch lässt sich dies durch die Bedingung

$$\Big\langle \theta_X(S_N) - V_N \Big\rangle = 0 \tag{8}$$

bei minimalem

$$\sigma^2 := \Big\langle (\theta_X(S_N) - V_N)^2 \Big\rangle$$

formulieren. Dabei symbolisiert $\langle\rangle$ eine Mittelung über verschiedene Folgen $\xi_n$ von Zufallszahlen. Das ist äquivalent dazu, dass der Erwartungswert von $\theta_X(S_N) - V_N$ verschwindet und die Varianz $\sigma^2$ minimiert wird. Um dies zu erreichen, müssen alle $V_n, \Delta_n$ optimiert werden.[8] Wer sich fragt, wo die $V_n, \Delta_n$ in den Gleichungen stecken, der bedenke, dass $V_N$ mittels der Formeln (5), (7) implizit von $V_{N-1}$ und $\Delta_{N-1}$ abhängt. Diese Überlegung lässt sich iterativ bis zu $V_0, \Delta_0$ fortsetzen. Die optimalen Werte werden im Folgenden mit $V_n^*$ und $\Delta_n^*$ bezeichnet.

Die Optimierung liefert mit $\Delta_0^* S_0 - B_0 = V_0^* =: f$ den ersehnten Optionspreis, denn der Wert der Aktien $\Delta_0^* S_0$ bei $t_0$ muss dem erhaltenen Optionspreis $f$ plus dem Kredit $B_0$ entsprechen. Die $\Delta_n^*$ geben an, aus wie vielen Aktien unser Portfolio zur Zeit $t_n$ bestehen sollte, um das Risiko gering zu halten.

Damit wäre das Problem mathematisch beschrieben. Jetzt fehlt noch ein Algorithmus zur Lösung.

## 3.2 Der Optimierungsalgorithmus

Gesucht sind die $V_n^*$ und $\Delta_n^*$, die die Varianz $\sigma^2$ minimieren und die Gleichung (4) erfüllen. Demzufolge suchen wir ein Extremum mit einer Nebenbedingung. Das ist äquivalent dazu die sog. Risikofunktion

$$R_\lambda := \Big\langle (\theta_X(S_N) - V_N)^2 + \lambda(\theta_X(S_N) - V_N) \Big\rangle$$

zu minimieren, wobei $\lambda$ ein Lagrange-Multiplikator ist.

Den Optimierungsprozess würde man bei der Implementierung mit einem Algorithmus realisieren, der diskrete Werte für $V_n$ und $\Delta_n$ ausprobiert. Dabei ist es hier von praktischem Nutzen, dass die Anzahlen $\Delta_n$ der Aktien in unserem Wertpapierpaket bereits diskret sind. Im Prinzip sind wir damit schon fertig, aber der Optimierungsalgorithmus lässt sich noch vereinfachen.

Es sieht zunächst so aus, als ob alle $V_n$ und $\Delta_n$ gleichzeitig angepasst werden müssten. Das ist aber nicht der Fall. Wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_n$ unser Portfolio den Wert $V_n$ hat, so sollte $\Delta_n$ so gewählt werden, dass das Risiko für die *Zukunft* minimal ist. Anders ausgedrückt hängt $\Delta_n$ nicht von den $V_k$ und $\Delta_k$ mit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ab. Dies erlaubt es die $\Delta_n$, beginnend bei $n = N$, *schrittweise* zu optimieren. Wir gehen dementsprechend rückwärts in der Zeit, wie bei den binomischen Bäumen mit mehreren Schritten.

Konkret heißt dies, dass zunächst die minimale Risikofunktion für den letzten Schritt

$$I_0(S_{N-1}, V_{N-1}) := \min_{\Delta_{N-1}} \Big\langle R_\lambda \Big\rangle_{\xi_{N-1}} = \min_{\Delta_{N-1}} \Big\langle (\theta_X(S_N) - V_N)^2 + \lambda(\theta_X(S_N) - V_N) \Big\rangle_{\xi_{N-1}}$$

[8] Die $B_n$ sind dann nach Formel (5) ebenfalls festgelegt.

| zu bestimmen: | | bereits bekannt und somit verwendbar: |
| --- | --- | --- |
| $I_1(S_{N-2}^{(0)}, V_{N-2}^{(0)})$ | | $I_0(S_{N-1}^{(0)}, V_{N-1}^{(0)})$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $I_1(S_{N-2}^{(x)}, V_{N-2}^{(y)})$ | $\xrightarrow[\Delta_{N-2}]{\xi_{N-2}}$ | $I_0((1+\xi_{N-2})S_{N-2}^{(x)}, (1+r)V_{N-2}^{(y)} + (\xi_{N-2} - r)\Delta_{N-2}S_{N-2}^{(x)})$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

Abbildung 4: Die Beziehung zwischen $I_0$ und $I_1$. Die hochgestellten Indizes in Klammern repräsentieren die verschieden Werte die durchprobiert werden.

ermittelt wird. Dazu muss nur über die verschiedenen $\xi_{N-1}$ gemittelt werden, da nur der letzte Schritt minimiert wird. Letzteres ist durch $\langle\rangle_{\xi_{N-1}}$ symbolisiert. Bei der Implementierung würden wir die Minimierung für verschiedene $(S_{N-1}, V_{N-1})$ berechnen und die Ergebnisse abspeichern. Dadurch erhalten wir $I_0$ als Funktion von $(S_{N-1}, V_{N-1})$.

Als nächstes bestimmt man die minimale Risikofunktion für den vorletzten Schritt und den letzten Schritt gleichzeiteig

$$I_1(S_{N-2}, V_{N-2}) := \min_{\Delta_{N-2},\ \Delta_{N-1}} \Big\langle R_\lambda \Big\rangle_{\xi_{N-2},\ \xi_{N-1}}.$$

Doch dies lässt sich vereinfachen. Nach den Gleichungen (4), (7) gilt nämlich $S_{N-1} = (1+\xi_{N-2})S_{N-2}$ und $V_{N-1} = (1+r)V_{N-2} + (\xi_{N-2} - r)\Delta_{N-2}S_{N-2}$, d.h. jedes Wertepaar $(S_{N-2}, V_{N-2})$ das durchprobiert werden muss, liefert durch $\xi_{N-2}$ und $\Delta_{N-2}$ ein Paar $(S_{N-1}, V_{N-1})$ für das das Optimierungsproblem bereits mit $I_0(S_{N-1}, V_{N-1})$ gelöst bzw. abgespeichert ist. Somit erhalten wir

$$I_1(S_{N-2}, V_{N-2}) := \min_{\Delta_{N-2}} \Big\langle I_0((1+\xi_{N-2})S_{N-2}, (1+r)V_{N-2} + (\xi_{N-2} - r)\Delta_{N-2}S_{N-2} \Big\rangle_{\xi_{N-2}}.$$

Auf diese Weise muss weniger probiert werden. Ein weiterer großer Vorteil dieses Verfahrens ist, das wir die Randbedingungen aus den Gleichungen (4), (7) gleich erfüllen. Die Idee ist in Abblidung 4 illustriert.

Die Werte von $I_1(S_{N-2}, V_{N-2})$ werden wieder gespeichert usw. So erhalten wir die weiteren minimalen Risikofunktionen nach dem gleichen Prinzip iterativ durch

$$I_{N-n}(S_n, V_n) = \min_{\Delta_n} \Big\langle I_{N-n-1}((1+\xi_n)S_n, (1+r)V_n + (\xi_n - r)\Delta_n S_n) \Big\rangle_{\xi_n}.$$

Das optimale $V_0^*$ erhält man zuletzt durch die Minimierung von $I_N(S_0, V_0)$ über alle $V_0$.

Zum Schluss sei ohne Beweis noch erwähnt, dass unser stochastisches Modell eine echte Erweiterung des Modells des binomischen Baumes ist. Denn verwendet man binominal verteilte Zufallszahlen im stochastischen Modell mit N Zeitschritten und lässt wieder reelle $\Delta_n$ zu, so liefert die Optimierung exakt den Optionspreis $f$ aus Abschnitt 2.

□

# Danksagungen

Ich möchte mich bei Alexander Hartmann und bei Matthias Otto für die Hilfe bei der Entstehung des Vortrages bedanken.

# Literatur


[1] J. Hull *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 3rd ed., Prentice-Hall (1993)

[2] S. Fedotov, S. Mihkailov *Option Pricing Model for Incomplete Market*, Preprint cond-mat/9807397

[3] D. Bertsekas *Network Optimization: Continous and Discrete Models*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts (1998)