Die verschiedenen Optionsarten:

Call Option Recht auf Ankauf einer Ware

Put Option Recht auf Verkauf einer Ware

Amerikanische Option Jederzeit bis zur Fälligkeit einlösbar

Europäische Option Nur bei Fälligkeit einlösbar

Im folgenden: *Verkauf einer Europäische Call Option.*

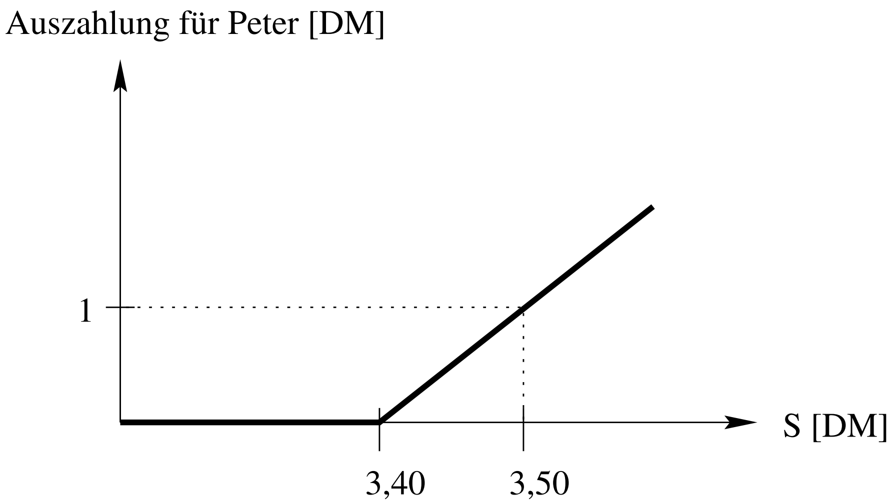
Ein Beispiel

Verkauf einer Europäischen Call Option auf 10 Stamm-II-Marken an Peter Pfennigfuchser.

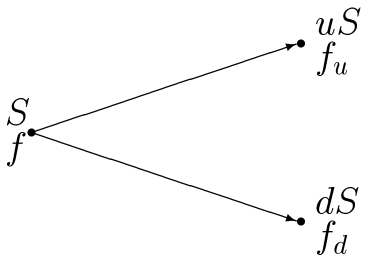
Basispreis: DM 3,40
Fälligkeitsdatum: 01.07.00

Situation am 01.07.00:

	Fall a	Fall b
Wert der Marke	DM 3,30	DM 3,50
Auszahlung für Peter	DM 0	DM 1



Binomischer Baum mit einem Schritt



$$f_d = \max(dS - X, 0) \qquad f_u = \max(uS - X, 0)$$

$$f = \frac{pf_u + (1-p)f_d}{1+r}$$

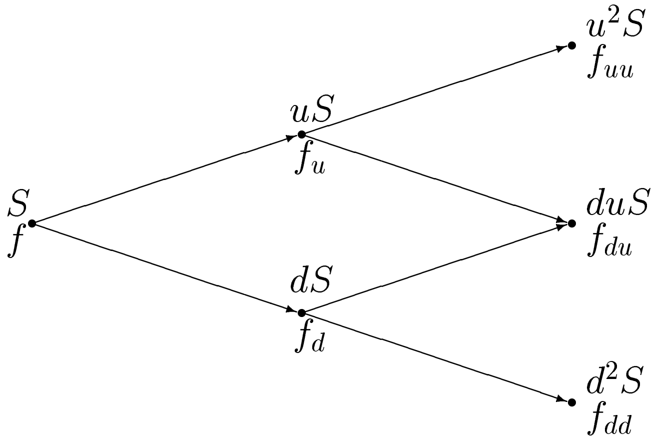
mit

$$p := \frac{1+r-d}{u-d}$$

Modellannahmen:

- Arbitragefreiheit
- nur zwei Aktienkurse bei Fälligkeit
- Markttiefe
- keine Transaktionskosten
- Δ reell

Binomischer Baum mit zwei Schritten



$$f_u = \frac{pf_{uu} + (1-p)f_{du}}{1+r}$$

$$f_d = \frac{pf_{du} + (1-p)f_{dd}}{1+r}$$

$$f = \frac{pf_u + (1-p)f_d}{1+r}$$

Einsetzen der drei Gleichungen ineinander ergibt für unseren Baum mit zwei Schritten

$$f = \frac{p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{du} + (1-p)^2 f_{dd}}{(1+r)^2}.$$

Das stochastische Modell

- N Zeitschritte, Zinsrate r pro Schritt
- ξ_n Folge von Zufallszahlen mit Erwartungswert Null
- Warenwert $S_{n+1} = (1+\xi_n)S_n$ für $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$
- Portfoliowert $V_n := \Delta_n S_n - B_n$ zur Zeit $]t_n, t_{n+1}]$
- Optionspreis $f := V_0^*$, also $B_0 = \Delta_0^* S_0 - f$
- Markttiefe
- keine Transaktionskosten
- $\Delta_n \in \mathbb{N}$

Zum Zeitpunkt t_{n+1} gilt

$$V_{n+1} := \Delta_n S_{n+1} - (1+r)B_n$$

oder

$$V_{n+1} = (1+r)V_n + (\xi_n - r)\Delta_n S_n$$

für den Portfoliowert.

Kriterium für den Portfoliowert

Bedingung:

$$\langle \theta_X(S_N) - V_N \rangle = 0$$

bei **minimalem**

$$\sigma^2 := \left\langle (\theta_X(S_N) - V_N)^2 \right\rangle$$

$\langle\rangle$ Mittelung über verschiedene Folgen ξ_n

Optimierung liefert:

- V_n^*, Δ_n^*
- Optionspreis $f := V_0^*$
- Δ_n^* Anzahl Aktien zur Zeit t_n

Der Optimierungsalgorithmus

Zu optimieren ist

$$R_\lambda := \Big\langle (\theta_X(S_N) - V_N)^2 + \lambda(\theta_X(S_N) - V_N) \Big\rangle,$$

wobei λ ein Lagrange-Multiplikator ist.

letzter Schritt:

$$I_0(S_{N-1}, V_{N-1}) := \min_{\Delta_{N-1}} \langle R_\lambda \rangle_{\xi_{N-1}} =$$

$$= \min_{\Delta_{N-1}} \big\langle (\theta_X(S_N) - V_N)^2 + \lambda(\theta_X(S_N) - V_N) \big\rangle_{\xi_{N-1}}$$

letzter und vorletzter Schritt:

$$I_1(S_{N-2}, V_{N-2}) := \min_{\Delta_{N-2},\ \Delta_{N-1}} \langle R_\lambda \rangle_{\xi_{N-2},\ \xi_{N-1}}\,.$$

mit $S_{N-1} = (1 + \xi_{N-2})S_{N-2}$
und $V_{N-1} = (1 + r)V_{N-2} + (\xi_{N-2} - r)\Delta_{N-2}S_{N-2}$

$$I_1(S_{N-2}, V_{N-2}) =$$

$$= \min_{\Delta_{N-2}} \langle I_0((1 + \xi_{N-2})S_{N-2}, (1 + r)V_{N-2} + (\xi_{N-2} - r)\Delta_{N-2}S_{N-2} \rangle_{\xi_{N-2}}\,.$$

zu bestimmen:

$I_1(S_{N-2}^{(0)}, V_{N-2}^{(0)})$

$\vdots$

$I_1(S_{N-2}^{(x)}, V_{N-2}^{(y)}) \xrightarrow[\Delta_{N-2}]{\xi_{N-2}}$

$\vdots$

bereits bekannt und somit verwendbar:

$I_0(S_{N-1}^{(0)}, V_{N-1}^{(0)})$

$\vdots$

$I_0((1+\xi_{N-2})S_{N-2}^{(x)}, (1+r)V_{N-2}^{(y)} + (\xi_{N-2} - r)\Delta_{N-2} S_{N-2}^{(x)})$

$\vdots$

$$I_{N-n}(S_n, V_n) =$$
$$= \min_{\Delta_n} \left\langle I_{N-n-1}((1+\xi_n)S_n, (1+r)V_n + (\xi_n - r)\Delta_n S_n)\right\rangle_{\xi_n}.$$

Das optimale V_0^* erhält man zuletzt durch die Minimierung von $I_N(S_0, V_0)$ über alle V_0.